Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

le mercredi 25 novembre 2015

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 26 novembre 2015

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

Remarques :
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que $4,14\ldots$ ou $1,41\ldots$, sauf indication contraire.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Si $\dfrac{8}{24} = \dfrac{4}{x+3}$, quelle est la valeur de x ?

2. A, B et C sont des chiffres non nuls. Ainsi BC est un entier strictement positif de deux chiffres et ABC est un entier strictement positif de trois chiffres dont les chiffres sont A, B et C. On sait que :

$$\begin{array}{cccc} & & B & C \\ & A & B & C \\ + & A & B & C \\ \hline & 8 & 7 & 6 \end{array}$$

   Quelle est la valeur de $A + B + C$?

3. Un toit carré plat, mesurant 5 m sur 5 m, reçoit une pluie de 6 mm. Toute cette eau (et aucune autre eau) est versée dans un bac de récupération. Ce bac a la forme d'un cylindre ayant un diamètre de 0,5 m et une hauteur de 1 m. Quel pourcentage du bac, au dixième de un pour cent près, est rempli d'eau ?

4. Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $\left(2 \cdot 4^{x^2-3x}\right)^2 = 2^{x-1}$.

5. Dans une expérience de psychologie, l'image d'un chat ou celle d'un chien est projetée brièvement sur un écran et Anna doit ensuite indiquer s'il s'agissait de l'image d'un chat ou de celle d'un chien. L'expérience est répétée un grand nombre de fois de manière qu'à la fin, chaque image a été projetée un nombre égal de fois. Sachant qu'Anna a répondu correctement 95 % du temps lorsqu'elle a répondu « chien » et 90 % du temps lorsqu'elle a répondu « chat », déterminer le rapport du nombre de fois qu'elle a *répondu* « chien » au nombre de fois qu'elle a *répondu* « chat ».

6. Soit X et Y des mesures d'angles, en degrés, telles que $\tan X = \dfrac{1}{m}$ et $\tan Y = \dfrac{a}{n}$, a, m et n étant des entiers strictement positifs. Déterminer le nombre d'entiers strictement positifs a, $a \leq 50$, pour lesquels il existe exactement 6 couples (m, n) d'entiers strictement positifs de manière que $X + Y = 45°$.

   (Remarque : La formule $\tan(X+Y) = \dfrac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X \tan Y}$ peut être utile.)

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

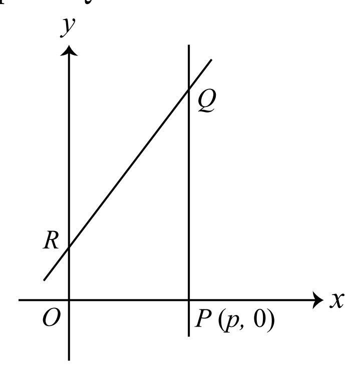
1. Dans la figure ci-dessous, la droite d'équation $y = 2x + 4$ coupe l'axe des ordonnées au point R. Une deuxième droite, parallèle à l'axe des ordonnées, est menée au point $P(p, 0)$ $(p > 0)$. Ces deux droites se coupent au point Q.

   (a) Déterminer la longueur OR.
   (O est l'origine $(0, 0)$.)

   (b) Déterminer les coordonnées du point Q en fonction de p.

   (c) Déterminer l'aire de $OPQR$ lorsque $p = 8$.

   (d) Déterminer la valeur de p lorsque $OPQR$ a une aire de 77.



2. (a) Soit $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ $(x \neq 1)$. Déterminer tous les nombres réels r $(r \neq 1)$ pour lesquels $f(r) = r$.

   (b) Soit $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ $(x \neq 1)$. Démontrer que $f(f(x)) = x$ pour tous les nombres réels x $(x \neq 1)$.

   (c) Soit k un nombre réel et soit $g(x) = \dfrac{2x}{x+k}$ $(x \neq -k)$. Déterminer toutes les valeurs réelles de k pour lesquelles $g(g(x)) = x$ pour tous les nombres réels x tels que $x \neq -k$ et $g(x) \neq -k$.

   (d) Soit a, b et c des nombres réels non nuls et soit $h(x) = \dfrac{ax+b}{bx+c}$ $(x \neq -\dfrac{c}{b})$. Déterminer tous les triplets (a, b, c) pour lesquels $h(h(x)) = x$ pour tous les nombres réels x tels que $x \neq -\dfrac{c}{b}$ et $h(x) \neq -\dfrac{c}{b}$.

3. Étant donné une suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ d'entiers strictement positifs, on définit une nouvelle suite $b_1, b_2, b_3, \ldots$ comme suit : $b_1 = a_1$ et pour tout entier n ($n \geq 1$), on a :

$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n + a_{n+1} & \text{lorsque } b_n \leq a_{n+1} \\ b_n - a_{n+1} & \text{lorsque } b_n > a_{n+1} \end{cases}$$

Par exemple, lorsque $a_1, a_2, a_3, \cdots$ est la suite $1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$, on a :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
a_n	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	$\cdots$
b_n	1	3	2	4	3	1	2	4	3	1	$\cdots$

(a) On définit $a_n = n^2$ pour tout n ($n \geq 1$). Déterminer la valeur de b_{10}.

(b) On définit $a_n = n$ pour tout n ($n \geq 1$). Déterminer tous les entiers strictement positifs n ($n < 2015$) pour lesquels $b_n = 1$.

(c) On dit qu'une suite $x_1, x_2, x_3, \ldots$ est *éventuellement périodique* s'il existe des entiers strictement positifs, r et p, pour lesquels $x_{n+p} = x_n$ pour tout n ($n \geq r$).

Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite éventuellement périodique. Démontrer que la suite $b_1, b_2, b_3, \ldots$ est éventuellement périodique.