Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire 2015

le mercredi 25 novembre 2015

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 26 novembre 2015

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. *Solution 1*

Puisque $\dfrac{1000}{12} \approx 83{,}33$, le plus grand multiple de 12, inférieur à 1000, est 83×12, ou 996.
Ainsi si Stéphanie remplissait 83 contenants, il y aurait 4 œufs cassés.
Si elle remplissait moins de 83 contenants, il y aurait plus de 12 œufs cassés, mais on sait que $n < 12$. Elle ne peut remplir plus de 83 contenants, car elle n'a pas assez d'œufs pour le faire.
Donc $n = 4$.

Solution 2

Puisque $80 \times 12 = 960$, alors avec 80 contenants remplis, il resterait 40 œufs ($1000 - 960 = 40$).
Puisque $81 \times 12 = 972$, alors avec 81 contenants remplis, il resterait 28 œufs ($1000 - 972 = 28$).
Puisque $82 \times 12 = 984$, alors avec 82 contenants remplis, il resterait 16 œufs ($1000 - 984 = 16$).
Puisque $83 \times 12 = 996$, alors avec 83 contenants remplis, il resterait 4 œufs ($1000 - 996 = 4$).
Puisque $84 \times 12 = 1008$, Stéphanie n'aurait pas pu remplir 84 contenants.
Donc, Stéphanie doit avoir rempli 83 contenants avec 4 œufs cassés. Donc $n = 4$.

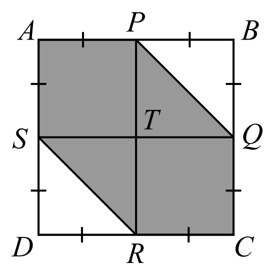
Réponse : 4

2. *Solution 1*

Puisque le carré a des côtés de longueur 4, alors $AB = BC = CD = DA = 4$.
Le carré a donc une aire égale à 4×4, ou 16.
Puisque P, Q, R et S sont les milieux des côtés, alors AP, PB, BQ, QC, CR, RD, DS et SA ont chacun une longueur de 2.
Or, l'aire de la partie ombrée est égale à l'aire du carré moins celle des triangles PBQ et RDS.
Puisque $ABCD$ est un carré, alors $\angle PBQ = 90^\circ$.
Donc, l'aire du triangle PBQ est égale à $\frac{1}{2}(PB)(BQ)$, ou $\frac{1}{2}(2)(2)$, ou 2.
De même l'aire du triangle RDS est égale à 2.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $16 - 2 - 2$, ou 12.

Solution 2

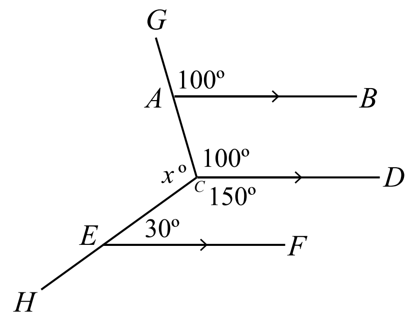
On trace les segments PR et QS. Soit T leur point d'intersection.
Puisque $ABCD$ est un carré avec des côtés de longueur 4, alors en joignant les milieux des côtés opposés, on partage $ABCD$ en quatre carrés identiques, chacun avec des côtés de longueur 2.
Chacun de ces carrés a une aire égale à 2^2, ou 4.



La région ombrée est formée du carré $APTS$, du carré $TQCR$, de la moitié du carré $PBQT$ et de la moitié du carré $STRD$. (La région ombrée, dans chacun de ces deux derniers carrés, occupe la moitié du carré, car la diagonale coupe le carré en deux triangles identiques.)
L'aire de la région ombrée est donc égale à $4 + 4 + \frac{1}{2}(4) + \frac{1}{2}(4)$, ou 12.

Réponse : 12

3. Puisque CD est parallèle à EF, alors $\angle FEC + \angle ECD = 180^\circ$. (Ces angles sont parfois appelés co-internes.)
Donc $\angle ECD = 180^\circ - \angle FEC$, d'où $\angle ECD = 180^\circ - 30^\circ$, ou $\angle ECD = 150^\circ$.
Puisque AB est parallèle à CD, alors $\angle GCD = \angle GAB = 100^\circ$. (Ces angles sont appelés correspondants.)



Puisque les angles ACE, ECD et ACD forment un angle plein autour du sommet C, alors :

$$\angle ACE + \angle ECD + \angle ACD = 360^\circ$$

Donc $x^\circ + 150^\circ + 100^\circ = 360^\circ$, ou $x + 250 = 360$, d'où $x = 110$.

Réponse : 110

4. Puisque $12x = 4y + 2$, alors $4y - 12x = -2$, d'où $2y - 6x = -1$.
Donc $6y - 18x + 7 = 3(2y - 6x) + 7 = 3(-1) + 7 = 4$.

Réponse : 4

5. *Solution 1*
On écrit d'abord $6048(28^n)$ en factorisation première.
On a $28 = 4(7) = 2^2 7^1$. Donc $28^n = (2^2 7^1)^n = 2^{2n} 7^n$.
De plus, $6048 = 8(756) = 8(4)(189) = 8(4)(7)(27) = 2^3(2^2)(7^1)(3^3) = 2^5 3^3 7^1$.
Donc $6048(28^n) = 2^5 3^3 7^1 (2^{2n} 7^n) = 2^{2n+5} 3^3 7^{n+1}$.
Ce nombre est un cube parfait lorsque l'exposant de chaque facteur premier est un multiple de 3.
Puisque l'exposant affecté au facteur 3 est un multiple de 3, le problème revient à déterminer le plus grand entier n, inférieur à 500, pour lequel $2n + 5$ et $n + 1$ sont des multiples de 3.
Si $n = 499$, ces expressions ont pour valeurs respectives 1003 et 500. Aucune n'est divisible par 3.
Si $n = 498$, ces expressions ont pour valeurs respectives 1001 et 499. Aucune n'est divisible par 3.
Si $n = 497$, ces expressions ont pour valeurs respectives 99 et 498. Chacune est divisible par 3.
Donc, le plus grand entier n, inférieur à 500, pour lequel $6048(28^n)$ est un cube parfait est 497.

Solution 2
On a $6048 = 28(216)$.
Donc $6048(28^n) = 216(28)(28^n) = 216(28^{n+1}) = 6^3 28^{n+1}$, puisque $6^3 = 216$.
Puisque 6^3 est un cube parfait, alors $6048(28^n)$ est un cube parfait lorsque 28^{n+1} est un cube parfait.
Puisque 28 n'est pas un cube parfait, alors 28^{n+1} est un cube parfait lorsque $n + 1$ est un multiple de 3.
On cherche donc le plus grand entier n, $n < 500$, pour lequel $n + 1$ est un multiple de 3.
Puisque 499 n'est pas un multiple de 3, mais que 498 en est un (en effet, $498 = 3(166)$) on a

donc $n + 1 = 498$, d'où $n = 497$.
Donc, 497 est le plus grand entier inférieur à 500 pour lequel $6048(28^n)$ est un cube parfait.

RÉPONSE : 497

6. On veut déterminer le nombre de triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs qui satisfont aux conditions $1 \le a < b < c \le 2015$ et $a + b + c = 2018$.
Puisque $a < b < c$, alors $a + b + c > a + a + a = 3a$.
Puisque $a + b + c = 2018$ et $3a < a + b + c$, alors $3a < 2018$. Donc $a < \frac{2018}{3}$, ou $a < 672\frac{2}{3}$.
Puisque a est un entier, alors $a \le 672$. Donc $1 \le a \le 672$.
On cherchera le nombre de triplets pour chaque valeur de a en considérant d'abord les cas où a est impair, puis ceux où a est pair.

Lorsque $a = 1$, on cherche le nombre de couples (b, c) d'entiers strictement positifs tels que $1 < b < c \le 2015$ et $b+c = 2017$, car on doit avoir $a+b+c = 2018$, c'est-à-dire $1+b+c = 2018$.
Puisque $1 < b$, alors $b \ge 2$.
Puisque $b < c$, alors $b + c > b + b$, d'où $2017 > 2b$, ou $b < 1008\frac{1}{2}$.
Puisque b est un entier, alors $b \le 1008$.
Donc, b satisfait à la condition $2 \le b \le 1008$.
Pour chaque valeur de b, il y a une valeur correspondante de c (soit $c = 2017 - b$).
Puisqu'il y a 1007 valeurs de b dans cet intervalle, il y a 1007 triplets correspondants, soit $(1, 2, 2015)$, $(1, 3, 2014)$, ..., $(1, 1008, 1009)$.
Lorsque $a = 3$, on cherche le nombre de couples (b, c) d'entiers strictement positifs tels que $3 < b < c \le 2015$ et $b+c = 2015$, car on doit avoir $a+b+c = 2018$, c'est-à-dire $3+b+c = 2018$.
Puisque $3 < b$, alors $b \ge 4$.
Puisque $b < c$, alors $b + c > b + b$, d'où $2015 > 2b$, ou $b < 1007\frac{1}{2}$.
Puisque b est un entier, alors $b \le 1007$.
Donc, b satisfait à la condition $4 \le b \le 1007$.
Pour chaque valeur de b, il y a une valeur correspondante de c (soit $c = 2015 - b$).
Puisqu'il y a 1004 valeurs de b dans cet intervalle, il y a 1004 triplets correspondants, soit $(3, 4, 2011)$, $(3, 5, 2010)$, ..., $(3, 1007, 1008)$.
De façon générale, si $a = 2k + 1$, k étant un entier non négatif quelconque, on cherche le nombre de couples (b, c) d'entiers strictement positifs tels que $2k + 1 < b < c \le 2015$ et $b + c = 2017 - 2k$, car on doit avoir $a + b + c = 2018$, c'est-à-dire $2k + 1 + b + c = 2018$.
Puisque $2k + 1 < b$, alors $b \ge 2k + 2$.
Puisque $b < c$, alors $b + c > b + b$, d'où $2017 - 2k > 2b$, ou $b < (1008 - k) + \frac{1}{2}$.
Puisque b est un entier, alors $b \le 1008 - k$.
Donc, b satisfait à la condition $2k + 2 \le b \le 1008 - k$.
Pour chaque valeur de b, il y a une valeur correspondante de c (soit $c = 2017 - 2k - b$).
Puisqu'il y a $(1008-k)-(2k+2)+1$ valeurs de b, ou $1007-3k$ valeurs de b dans cet intervalle, il y a $1007 - 3k$ triplets correspondants.
Puisque $a \le 672$, la plus grande valeur impaire possible de a est 671, ce qui donne $2k+1 = 671$, ou $k = 335$.
Donc, k prend les valeurs entières de $k = 0$ (ce qui donne $a = 1$) à $k = 335$ (ce qui donne $a = 671$).
Les nombres de triplets varient de 1007 (lorsque $k = 0$) à 2 (lorsque $k = 335$). Le nombre de triplets diminue de 3 lorsque la valeur de k augmente 1.
Donc lorsque a est impair, il y a $1007 + 1004 + 1001 + \cdots + 8 + 5 + 2$ triplets qui satisfont aux conditions.

On considère les cas où a est pair.

Lorsque $a = 2$, on cherche le nombre de couples (b, c) d'entiers strictement positifs tels que $2 < b < c \leq 2015$ et $b + c = 2016$, car on doit avoir $a + b + c = 2018$, ou $2 + b + c = 2018$.
Puisque $2 < b$, alors $b \geq 3$.
Puisque $b < c$, alors $b + c > b + b$, d'où $2016 > 2b$, ou $b < 1008$.
Puisque b est un entier, alors $b \leq 1007$.
Donc, b satisfait à la condition $3 \leq b \leq 1007$.
Pour chaque valeur de b, il y a une valeur correspondante de c (soit $c = 2016 - b$).
Puisqu'il y a 1005 valeurs de b dans cet intervalle, il y a 1005 triplets correspondants, soit $(2, 3, 2013)$, $(2, 4, 2012)$, ..., $(2, 1007, 1009)$.
De façon générale, si $a = 2m$, m étant un entier strictement positif quelconque, on cherche le nombre de couples (b, c) d'entiers strictement positifs tels que $2m < b < c \leq 2015$ et $b + c = 2018 - 2m$, car on doit avoir $a + b + c = 2018$, ou $2m + b + c = 2018$.
Puisque $2m < b$, alors $b \geq 2m + 1$.
Puisque $b < c$, alors $b + c > b + b$, d'où $2018 - 2m > 2b$, ou $b < 1009 - m$.
Puisque b est un entier, alors $b \leq 1008 - m$.
Donc, b satisfait à la condition $2m + 1 \leq b \leq 1008 - m$.
Pour chaque valeur de b, il y a une valeur correspondante de c (soit $c = 2018 - 2m - b$).
Puisque $2m + 1 \leq 1008 - m$, alors $3m \leq 1007$, ou $m \leq 335\frac{2}{3}$. Puisque m est un entier, alors $m \leq 335$.
Puisqu'il y a $(1008 - m) - (2m + 1) + 1$ valeurs de b, c'est-à-dire $1008 - 3m$ valeurs de b dans cet intervalle, il y a $1008 - 3m$ triplets correspondants.
Puisque $a \leq 672$, la plus grande valeur possible de a est 672, d'où $2m = 672$, ou $m = 336$. Or, on sait aussi (voir quelques lignes plus haut) que $m \leq 335$.
Donc, m prend les valeurs entières de $m = 1$ (ce qui donne $a = 2$) à $m = 335$ (ce qui donne $a = 670$).
Les nombres de triplets varient de 1005 (lorsque $m = 1$) à 3 (lorsque $m = 335$). Le nombre de triplets diminue de 3 lorsque la valeur de m augmente de 1.
Donc lorsque a est pair, il y a $1005 + 1002 + 999 + \cdots + 6 + 3$ triplets qui satisfont aux conditions.

Donc le nombre de triplets qui satisfont aux conditions est égal à la somme de

$$1007 + 1004 + 1001 + \cdots + 8 + 5 + 2$$

et de

$$1005 + 1002 + 999 + \cdots + 6 + 3 + 0.$$

La première série est une série arithmétique dont le premier terme est 1007 et le dernier terme est 2. Elle compte 336 termes en tout. (Les valeurs de k qui génèrent les termes vont de 0 à 335, ce qui fait 336 valeurs en tout.)
La somme d'une série arithmétique est égale à la moitié du nombre de termes multipliée par la somme du premier et du dernier terme.
La somme de la première série est donc égale à $\dfrac{336}{2}(1007 + 2)$.
La deuxième série est une série arithmétique dont le premier terme est 1005 et le dernier terme est 0. Elle compte 335 termes en tout. (Les valeurs de m qui la génèrent vont de 1 à 335, ce qui fait 335 valeurs en tout.)
La somme de la deuxième série est donc égale à $\dfrac{335}{2}(1005 + 3)$.
Le nombre total de triplets est donc égal à :

$$\frac{336}{2}(1007 + 2) + \frac{335}{2}(1005 + 3) = 168(1009) + 335(504) = 338\,352$$

Réponse : 338 352

Partie B

1. (a) *Solution 1*

Puisque la classe d'art dramatique compte 41 élèves et que 15 élèves participent aux deux classes, il y a 26 élèves ($41 - 15 = 26$) qui participent à la classe d'art dramatique, mais pas à la classe de musique.
Puisque la classe de musique compte 28 élèves et que 15 élèves participent aux deux classes, il y a 13 élèves ($28 - 15 = 13$) qui participent à la classe de musique, mais pas à la classe d'art dramatique.
Il y a donc 39 élèves ($26 + 13 = 39$) qui participent à exactement une classe et 15 élèves qui participent aux deux classes.
Il y a donc 54 élèves ($39 + 15 = 54$) inscrits au programme.

Solution 2

Si on additionne le nombre d'élèves qui participent à chaque classe, on compte deux fois ceux qui participent aux deux classes.
Donc pour déterminer le nombre d'élèves inscrits au programme, on additionne le nombre d'élèves qui participent à chaque classe, puis on soustrait le nombre d'élèves qui participent aux deux classes. (Ceci a pour effet de ne compter qu'une fois ceux qui participent aux deux classes.)
Le nombre d'élèves inscrits au programme est donc égal à $41 + 28 - 15$, ou 54.

(b) *Solution 1*

Comme dans la partie (a), le nombre d'élèves qui participaient à la classe d'art dramatique, mais pas à la classe de musique, est égal à $(3x - 5) - x$, ou $2x - 5$.
De même, le nombre d'élèves qui participaient à la classe de musique, mais pas à la classe d'art dramatique, est égal à $(6x + 13) - x$, ou $5x + 13$.
Le nombre d'élèves qui étaient inscrits à une seule classe est donc égal à $(2x-5)+(5x+13)$, ou $7x + 8$. Il y avait x élèves qui participaient aux deux classes.
Puisque 80 élèves étaient inscrits au programme, on a donc $(7x+8)+x = 80$, d'où $8x = 72$, ou $x = 9$.

Solution 2

On utilise la même approche que celle de la Solution 2 de la partie (a). On obtient l'équation $(3x - 5) + (6x + 13) - x = 80$.
On simplifie pour obtenir $8x + 8 = 80$, d'où $8x = 72$, ou $x = 9$.

(c) Soit a le nombre d'élèves qui participaient aux deux classes.
Puisque la moitié des élèves de la classe d'art dramatique participaient aux deux classes, il y avait aussi a élèves de la classe d'art dramatique qui ne participaient pas à la classe de musique.
Puisqu'un quart des élèves de la classe de musique participaient aux deux classes, trois quarts de la classe de musique ne participaient pas à la classe d'art dramatique. Donc, le nombre d'élèves qui participaient à la classe de musique, mais pas à la classe d'art dramatique, est le triple du nombre d'élèves qui participaient aux deux classes. Il est égal à $3a$.
Le nombre d'élèves qui ne participaient qu'à une classe est donc égal à $a + 3a$, ou $4a$, et le nombre d'élèves qui participaient aux deux classes est égal à a.
Puisque N élèves étaient inscrits au programme, alors $4a + a = N$, ou $N = 5a$.
Puisque a est un entier, N doit être un multiple de 5.
Puisque N est un entier de 91 à 99 et qu'il est un multiple de 5, alors $N = 95$.

2. (a) La distance totale à parcourir est de $(2 + 40 + 10)$ km, ou 52 km.
Emma a parcouru $\frac{1}{13}$ de la distance totale du triathlon, soit $\frac{1}{13} \times 52$ km, ou 4 km.

(b) Puisque Conrad a complété les 2 km à la nage en 30 minutes (ou une demi-heure), sa vitesse était de $(2 \div \frac{1}{2})$ km/h ou 4 km/h.
Puisqu'il a avancé 12 fois plus vite en vélo qu'à la nage, sa vitesse en vélo était de 12×4 km/h, ou 48 km/h.
Puisqu'il a parcouru 40 km en vélo, il a mis $\frac{40}{48}$ heure, ou $\frac{5}{6}$ heure pour le faire.
Puisqu'une heure correspond à 60 minutes, Conrad a mis $\frac{5}{6} \times 60$ minutes, ou 50 minutes, pour parcourir la portion de la course en vélo.
Puisqu'il a avancé 3 fois plus vite en courant qu'à la nage, il a couru à une vitesse de 3×4 km/h, ou 12 km/h.
Puisqu'il a parcouru 10 km en courant, il a mis $\frac{10}{12}$ heure, ou $\frac{5}{6}$ heure, pour le faire, ce qui correspond aussi à 50 minutes.
En tout, sa course a duré $(30+50+50)$ minutes, ou 130 minutes, ou 2 heures et 10 minutes.
Puisque Conrad a commencé le triathlon à 8 h 00, il l'a terminé à 10 h 10.

(c) On suppose qu'Alain a dépassé Salma t minutes après leur départ.
Puisqu'Alain a nagé pendant 36 minutes, il a pédalé pendant $(t - 36)$ minutes (ou $\dfrac{t-36}{60}$ heures) lorsqu'il a dépassé Salma.
Puisque Salma a nagé pendant 30 minutes, elle a pédalé pendant $(t - 30)$ minutes (ou $\dfrac{t-30}{60}$ heures) lorsqu'Alain l'a dépassée.
Lorsqu'Alain a dépassé Salma, les deux avaient parcouru la même distance.
À ce point, Alain avait parcouru 2 km à la nage. Puisqu'il avançait à 28 km/h en vélo, il avait parcouru $28 \times \dfrac{t-36}{60}$ km en vélo.
De même, Salma avait parcouru 2 km à la nage. Puisqu'elle avançait à 24 km/h en vélo, elle avait parcouru $24 \times \dfrac{t-30}{60}$ km à la nage.
Puisque les deux avaient parcouru la même distance, alors :

$$\begin{aligned}
2 + 28 \times \frac{t-36}{60} &= 2 + 24 \times \frac{t-30}{60} \\
28 \times \frac{t-36}{60} &= 24 \times \frac{t-30}{60} \\
28(t-36) &= 24(t-30) \\
7(t-36) &= 6(t-30) \\
7t - 252 &= 6t - 180 \\
t &= 72
\end{aligned}$$

Donc, Alain a dépassé Salma après 72 minutes de course.
Puisque les deux ont commencé la cource à 8 h 00, Alain a dépassé Salma à 9 h 12.

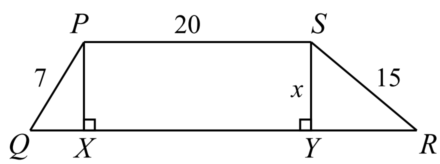
On pourrait constater que Selma a complété la partie à la nage 6 minutes avant Alain. Puisque cela correspond à $\frac{1}{10}$ d'une heure, elle a pédalé sur une distance de $\frac{1}{10} \times 24$ km, ou 2,4 km, avant qu'Alain ne parte en vélo. Elle avait donc une avance de 2,4 km sur Alain. avant qu'il ne parte en vélo. Puisqu'Alain avance de 4 km/h plus vite que Salma en vélo, il met $\frac{2{,}4}{4}$ heure, ou 0,6 heure pour combler la différence. Cela correspond à $0{,}6 \times 60$ minutes, ou 36 minutes. Puisqu'il a nagé pendant 36 minutes et pédalé pendant 36 minutes, il a mis $(36 + 36)$ minutes, ou 72 minutes, pour dépasser Salma.

3. (a) On calcule l'aire du triangle ABC de deux façons, ce qui donnera une équation en fonction de h.
Puisque le triangle ABC a des côtés de longueurs 20, 99 et 101, son demi-périmètre est égal à $\frac{1}{2}(20+99+101)$, ou $\frac{1}{2}(220)$, ou 110.
D'après la formule de Héron, l'aire du triangle ABC est égale à :

$$\begin{aligned}\sqrt{110(110-20)(110-99)(110-101)} &= \sqrt{110(90)(11)(9)} \\ &= \sqrt{11(10)(9)(10)(11)(9)} \\ &= \sqrt{9^2 10^2 11^2} \\ &= 9 \cdot 10 \cdot 11 \\ &= 990\end{aligned}$$

On considère la base BC du triangle ABC. Cette base a pour longueur 99 et la hauteur correspondante a pour longueur h.
L'aire du triangle ABC est donc égale à $\frac{1}{2}(99)h$.
Puisqu'il s'agit de l'aire d'un même triangle, on a $\frac{1}{2}(99)h = 990$, d'où $\frac{1}{2}h = 10$, ou $h = 20$.

(b) Comme dans la partie (a), on calcule l'aire de la figure de deux façons différentes.
$PQRS$ est un trapèze. Ses côtés parallèles ont pour longueurs 20 et 40 et il y a une distance de x entre ces deux côtés. L'aire de $PQRS$ est donc égale à $\frac{1}{2}(20+40)x$, ou $30x$.
Pour déterminer une deuxième expression pour l'aire du trapèze, on abaisse des perpendiculaires depuis P et S jusqu'aux points X et Y sur QR.

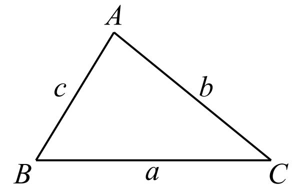


$PSYX$ est un rectangle, puisque PS et XY sont parallèles et que les angles aux sommets X et Y sont droits. Son aire est égale à $20x$.
Si on retire le rectangle $PSYX$ de la figure et que l'on « colle » les deux triangles ensemble le long des segments PX et SY (ils ont la même longueur et chacun est perpendiculaire à la base), on obtient un triangle avec des côtés de longueurs 7 (car $PQ = 7$), 15 (car $SR = 15$) et 20. (Le troisième côté a une longueur de 20, puisqu'on a enlevé un segment de longueur 20 d'un côté de longueur 40.)
Ce triangle a un demi-périmètre égal à $\frac{1}{2}(7+15+20)$, ou 21. D'après la formule de Héron, son aire est égale à :

$$\sqrt{21(21-7)(21-15)(21-20)} = \sqrt{21(14)(6)} = \sqrt{2^2 3^2 7^2} = 42$$

L'aire du trapèze $PQRS$ est égale à l'aire du rectangle plus l'aire du triangle, soit $20x+42$.
Puisq'il s'agit de l'aire d'un même trapèze, on a $30x = 20x+42$, ou $10x = 42$, ou $x = 4{,}2$.

(c) On considère un triangle qui satisfait aux cinq propriétés.
Soit a, b et c les longueurs des côtés, a, b et c étant des entiers strictement positifs (d'après la 1re condition) avec $a \leq b \leq c$.
Puisque les longueurs des deux plus petits côtés diffèrent de 1 (d'après la 2e condition), alors $b = a+1$.
Les longueurs des côtés sont donc a, $a+1$ et c.
Dans un triangle, la longueur de n'importe quel côté doit être inférieure au demi-périmètre du triangle. Ceci découle d'un résultat appelé *l'inégalité du triangle*.



Par exemple, dans le triangle ci-dessus, le chemin le plus court de B à C est le segment de droite BC de longueur a. Donc, le chemin de B à A à C (de longueur $c+b$) doit être plus long que a.
On a donc $c+b>a$ (l'inégalité du triangle) et le périmètre $a+b+c$ est donc plus grand que $a+a$, c'est-à-dire que a est inférieur au demi-périmètre. On peut appliquer le même raisonnement aux deux autres côtés.
Le demi-périmètre p du triangle dont les côtés ont pour longueurs a, $a+1$ et c est égal à $\frac{1}{2}(a+a+1+c)$.
Puisque la longueur c du plus grand côté et le demi-périmètre p diffèrent de 1 (d'après la 3e condition) et que c est inférieur à p, alors $c=p-1$, ou $p=c+1$.
Donc $c+1=\frac{1}{2}(a+a+1+c)$, d'où $2c+2=2a+1+c$, ou $c=2a-1$.
Donc, les côtés du triangle ont pour longueurs a, $a+1$ et $2a-1$.
Le périmètre du triangle, en fonction de a, est donc égal à $a+(a+1)+(2a-1)$, ou $4a$.
Le demi-périmètre est donc égal à $2a$.
Puisque le périmètre du triangle est inférieur à 200 (d'après la 5e condition), alors $4a<200$, ou $a<50$.
On a tenu compte de quatre des cinq propriétés du triangle. Il faut aussi que l'aire du triangle soit un entier (selon la 4e condition).
Le triangle a un demi-périmétre de $2a$. D'après la formule de Héron, il a une aire de :

$$\begin{aligned}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} &= \sqrt{2a(2a-a)(2a-(a+1))(2a-(2a-1))}\\ &= \sqrt{2a(a)(a-1)(1)}\\ &= \sqrt{a^2(2a-2)}\end{aligned}$$

Cette aire est un entier si $\sqrt{a^2(2a-2)}$ est un entier.
$\sqrt{a^2(2a-2)}$ est un entier si $a^2(2a-2)$ est un carré parfait, c'est-à-dire si $2a-2$ est un carré parfait.
Or, $2a-2$ est un multiple de 2, c'est-à-dire un nombre pair. Puisque a est un entier strictement positif avec $1\le a<50$, alors $2a-2$ est un entier avec $0\le 2a-2<98$.
Les carrés parfaits pairs dans cet intervalle sont 0, 4, 16, 36 et 64.
Les valeurs correspondantes de a sont 1, 3, 9, 19 et 33.
Puisque le triangle a des côtés de longueurs a, $a+1$ et $2a-1$, on obtient les longueurs de côtés suivantes :

$$1,2,1 \quad 3,4,5 \quad 9,10,17 \quad 19,20,37 \quad 33,34,65$$

Le premier cas ne donne pas des longueurs de côtés d'un triangle, car $1+1=2$.
Les quatre autres cas donnent des longueurs de côtés d'un triangle, puisque chaque longueur est inférieure à la somme des deux autres longueurs.
Les triangles qui satisfont aux cinq propriétés ont pour longueurs de côtés :

$$3,4,5 \quad 9,10,17 \quad 19,20,37 \quad 33,34,65$$