



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Números Favoritos

Problema

A Dandan le gustan los números que le recuerdan a su nombre. Es decir, le gustan los números de seis dígitos que se obtienen de repetir un número de tres dígitos, como 305 305, 417 417 y 832 832.

¿Cuál es el máximo común divisor de todos esos números?

Solución

Para darnos una idea, observemos la factorización en primos de cada uno de los números.

$$305\,305 = 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 61$$

$$417\,417 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 139$$

$$832\,832 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 13$$

Observamos que todos estos números son divisibles entre $7 \times 11 \times 13 = 1001$. Estos son los únicos divisores que los tres números tienen en común. Podemos elegir otro número de seis dígitos que conste de un número de tres dígitos repetido y revisar si también es divisible entre 1001. El número 246 246, por ejemplo, es 1001×246 . Parece que 1001 podría ser el máximo común divisor de todos estos números, pero aún no lo hemos demostrado.

Sea $abc\,abc$ un número cualquiera de seis dígitos que se puede obtener de repetir el número de tres dígitos abc .

$$\begin{aligned} abc\,abc &= abc000 + abc \\ &= 1000 \times abc + abc \\ &= 1000 \times abc + 1 \times abc \\ &= 1001 \times abc \end{aligned}$$

Como $abc\,abc = 1001 \times abc$, entonces es divisible entre 1001. El número $abc\,abc$ en específico, puede tener otros factores, pero 1001 es el mayor divisor que es común para todos. En el primer ejemplo $305\,305 = 1001 \times 5 \times 61$, y en el segundo ejemplo $417\,417 = 1001 \times 3 \times 139$. Ambos números tienen otros factores, pero ningún otro factor común es mayor a 1. En algunos casos puede haber otros factores comunes mayores a 1, pero esto no es cierto en general.

Por lo tanto, hemos demostrado que 1001 es el máximo común divisor de los números de seis dígitos que se pueden formar repitiendo un número de tres dígitos.

Este problema no es complicado si le ‘atinas’ desde un inicio. La solución que presentamos, muestra un método que se puede utilizar cuando no estás seguro de como comenzar. La idea es intentar algunos ejemplos específicos y luego intentar generalizar la idea, con base en lo que se observa en esos ejemplos específicos. Pero recuerda, que descubrir que 1001 funciona para los cuatro primeros ejemplos no es suficiente para hacer la conclusión general de que 1001 es el máximo común divisor de todos esos números.