



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Cuadrados Perfectos

Problema

Determina la cantidad de cuadrados perfectos, menores a 10 000 que son divisibles entre 392.

NOTA: Un *cuadrado perfecto* es un entero que se puede expresar como el producto de dos enteros iguales. Por ejemplo, 49 es un cuadrado perfecto ya que $49 = 7 \times 7 = 7^2$.

Solución

Para entender mejor los cuadrados perfectos, empecemos examinando la factorización en primos de algunos cuadrados perfectos. Por ejemplo, $49 = 7^2$, $36 = 6^2 = (2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2$ y $144 = 12^2 = (3 \times 4)^2 = 3^2 \times (2^2)^2 = 3^2 \times 2^4$.

De los ejemplos anteriores, observamos que en cada cuadrado perfecto, el exponente de cada uno de los factores primos, es un entero par positivo. Esto se debe a que un cuadrado perfecto se forma al multiplicar un entero por sí mismo, así que todos los primos en la factorización del entero, aparecerán dos veces. Además, para cualquier entero a , si m es un entero par mayor o igual a cero, entonces a^m es un cuadrado perfecto. Esto es porque si m es un par mayor o igual a cero, entonces $m = 2n$ para algún entero n mayor o igual a cero, y entonces $a^m = a^{2n} = a^n \times a^n$, donde a^n es un entero.

Para resumir, un entero positivo es un cuadrado perfecto justo cuando el exponente de cada primo en su factorización es par.

Observemos que el número $392 = 8 \times 49 = 2^3 \times 7^2$ no es un cuadrado perfecto, ya que 2^3 tiene un exponente impar. Necesitamos otro factor 2 para obtener un múltiplo de 392 que sea un cuadrado perfecto, es decir $2 \times 392 = 784$.

Observemos que $784 = 2^4 \times 7^2 = (2^2 \times 7)^2 = 28^2$, y es el primer cuadrado perfecto, menor a 10 000 que es divisible entre 392.

Para encontrar todos los cuadrados perfectos menores a 10 000 que son múltiplos de 392, multiplicaremos 784 por cuadrados de enteros positivos, hasta que encontremos un producto mayor a 10 000.

Si multiplicamos 784 por 2^2 , obtenemos 3136, que es 56^2 , el segundo cuadrado perfecto menor a 10 000. Si multiplicamos 784 por 3^2 , obtenemos 7056, que es 84^2 , el tercer cuadrado perfecto menor a 10 000.

si multiplicamos 784 por 4^2 , obtenemos 12 544, que es mayor a 10 000. Ningún otro cuadrado perfecto es divisible entre 392 y menor a 10 000.

Por lo tanto, hay 3 cuadrados perfectos menores a 10 000 que son divisibles entre 392.