



$10^{2021} - 2021$ Problema de la Semana

Problema D y Solución

Un año exponencial

Problema

Determina la suma de los dígitos del número $10^{2021} - 2021$.

Solución**Solución 1**

Cuando escribimos el número 10^{2021} , obtenemos un uno seguido de 2021 ceros, para un total de 2022 dígitos. Veamos qué sucede cuando restamos.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ - 2\ 0\ 2\ 1 \\ \hline \end{array}$$

Utilizando el algoritmo común para restar, empezamos con los dígitos de la derecha. En este caso necesitamos pedir prestado. Pero esto crea una reacción en cadena, el resultado se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r} 1\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \dots\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}} \\ -\phantom{1\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \dots\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}}\ \overset{9}{\cancel{0}}} 2\ 0\ 2\ 1 \\ \hline 9\ 9\ 9\ 9\ \dots\ 9\ 9\ 7\ 9\ 7\ 9 \end{array}$$

Los cuatro dígitos de la derecha en la resta son 7, 9, 7 y 9. A la izquierda de estos cuatro dígitos, hay puros dígitos 9. Pero, ¿cuántos dígitos iguales a nueve hay? La resta tiene un dígito menos que 10^{2021} , así que tiene 2021 dígitos contando los 4 dígitos de la derecha. Entonces a la izquierda de 7979 hay $2021 - 4 = 2017$ nueves.

Por lo tanto, la suma de los dígitos es

$$2017 \times 9 + (7 + 9 + 7 + 9) = 18\,153 + 32 = 18\,185.$$



Solución 2

La expresión $10^{2021} - 2021$ tiene el mismo valor que $(10^{2021} - 1) - (2021 - 1)$.

Como mencionamos en la Solución 1, cuando escribimos 10^{2021} obtenemos 1 uno seguido de 2021 ceros, para un total de 2022 dígitos. El número $(10^{2021} - 1)$ es uno menos que 10^{2021} , que es el entero positivo conformado por exactamente 2021 nueves. Cuando le restamos 1 a 2021 obtenemos 2020.

Entonces, la resta que buscamos es equivalente a lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 9 \ 9 \ 9 \ 9 \ \dots \ 9 \ 9 \ 9 \ 9 \ 9 \ 9 \\ - \ 2 \ 0 \ 2 \ 0 \\ \hline 9 \ 9 \ 9 \ 9 \ \dots \ 9 \ 9 \ 7 \ 9 \ 7 \ 9 \end{array}$$

Los cuatro dígitos de la derecha en la resta son 7, 9, 7 y 9. A la izquierda de estos cuatro dígitos, hay puros dígitos 9. Pero, ¿cuántos dígitos iguales a nueve hay? Observemos que el resultado tiene el mismo número de dígitos que $10^{2021} - 1$, es decir 2021. Esto incluye los 4 dígitos de la derecha. Así que a la izquierda de 7979 hay $2021 - 4 = 2017$ nueves.

Por lo tanto, la suma de los dígitos es

$$2017 \times 9 + (7 + 9 + 7 + 9) = 18\,153 + 32 = 18\,185.$$