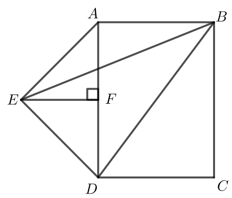


Problema de la Semana

Problema D y Solución

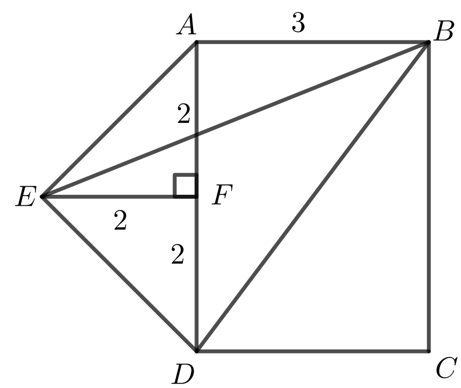
Ese Triángulo

Problema

En el diagrama, $ABCD$ es un rectángulo. El punto E está afuera del rectángulo de forma que $\triangle AED$ es un triángulo rectángulo isósceles con hipotenusa AD. El punto medio de AD es F, y EF es perpendicular a AD. Si $BC = 4$ y $AB = 3$, determina el área de $\triangle EBD$.

Solución

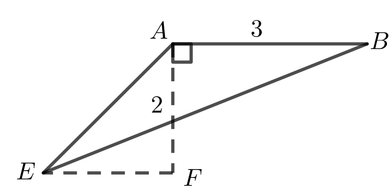
Como $ABCD$ es un rectángulo, entonces $AD = BC = 4$. Como F es el punto medio de AD, entonces $AF = FD = 2$.



Como $\triangle AED$ es un triángulo rectángulo isósceles, entonces $\angle EAD = 45^\circ$.
Ahora, en $\triangle EAF$,
$\angle EAF = \angle EAD = 45^\circ$ and $\angle AFE = 90^\circ$.
Como la suma de los ángulos en un triángulo es 180°, entonces $\angle AEF = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Por lo tanto, $\triangle EAF$ tiene dos ángulos iguales y entonces es un triángulo rectángulo isósceles.
Por lo tanto, $EF = AF = 2$.
A partir de aquí podemos proceder de dos formas.

Solución 1:

Para calcular el área de $\triangle EBD$ sumamos las áreas de $\triangle BAD$ y $\triangle AED$, y restamos el área de $\triangle ABE$.
Como $AB = 3$, $DA = 4$ y $\angle DAB = 90^\circ$, entonces el área de $\triangle BAD$ es $\frac{1}{2}(3)(4) = 6$.
Como $AD = 4$, $EF = 2$ y EF es perpendicular a AD, entonces el área de $\triangle AED$ es $\frac{1}{2}(4)(2) = 4$.
A la derecha, si nos fijamos en $\triangle ABE$ y tomamos como base el lado AB, entonces la altura es la logitud de AF.

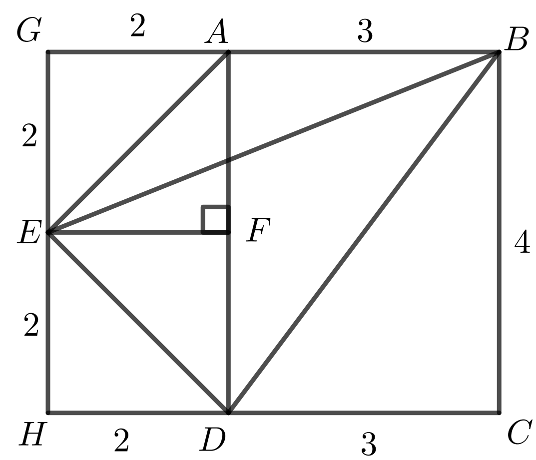


Por lo tanto, el área de $\triangle ABE$ es $\frac{1}{2}(3)(2) = 3$.

Por lo tanto, el área de $\triangle EBD$ es $6 + 4 - 3 = 7$.

Solución 2:

Extendemos BA hasta el punto G y CD hasta el punto H de forma que GH es perpendicular a GB y a HC, y tal que GH pasa por E.
Tanto $GAFE$ como $EFDH$ tienen tres ángulos rectos (en G, A y F, y en F, D y H, respectivamente), así que son rectángulos.
Como $AF = EF = FD = 2$, entonces tanto $GAFE$ como $EFDH$ son cuadrados de lado 2.
Entonce $GBCH$ es un rectángulo con $GB = 2+3 = 5$ y $BC = 4$.



El área de $\triangle EBD$ es igual al área del rectángulo $GBCH$ menos las áreas de $\triangle EGB$, $\triangle BCD$ y $\triangle DHE$.

El rectángulo $GBCH$ es de 5 por 4, y entonces tiene área $5 \times 4 = 20$.
Como $EG = 2$, $GB = 5$ y EG es perpendicular a GB,
entonces el área de $\triangle EGB$ es $\frac{1}{2}(EG)(GB) = \frac{1}{2}(2)(5) = 5$.
Como $BC = 4$, $CD = 3$ y BC es perpendicular a CD,
entonces el área de $\triangle BCD$ es $\frac{1}{2}(BC)(CD) = \frac{1}{2}(4)(3) = 6$.
Como $DH = HE = 2$ y DH es perpendicular a EH,
entonces el área de $\triangle DHE$ es $\frac{1}{2}(DH)(HE) = \frac{1}{2}(2)(2) = 2$.

Por lo tanto, el área de $\triangle EBH$ es $20 - 5 - 6 - 2 = 7$.