



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Arreglos de Palabras

Problema

Hoy contaremos ciertos arreglos de las letras en la palabra en inglés “CAMERA”.

Las seis letras, C , A , M , E , R y A se acomodan para formar “palabras” de seis letras. Cuando examinamos las “palabras”, ¿En cuántas de ellas las vocales A , A y E aparecen en orden alfabético y las consonantes C , M y R no aparecen en orden alfabético? Las vocales pueden o no estar juntas y las consonantes pueden o no estar juntas.

Por ejemplo, tanto $MAAERC$ como $ARAEMC$ son arreglos válidos, pero $ACAMER$, $MEAARC$ y $AEACMR$ no son válidos.

Solución

Solución 1

En esta solución, contaremos directamente todos los arreglos válidos de las seis letras C , A , M , E , R , y A .

Primero, consideremos la cantidad de formas de acomodar las vocales alfabéticamente.

- Si la primera A está en la primera posición, la letra E y la segunda A se pueden poner así:
 1. $A A _ _ _ _$ y la E puede ponerse en 4 lugares después de la segunda A .
 2. $A _ A _ _ _$ y la E puede ponerse en 3 lugares después de la segunda A .
 3. $A _ _ A _ _ _$ y la E puede ponerse en 2 lugares después de la segunda A .
 4. $A _ _ _ A _ _$ y la E puede ponerse en 1 lugar después de la segunda A .

Hay un total de $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ formas de poner las vocales en orden alfabético de forma que la A está en la primera posición.

- Si la primera A está en la segunda posición, la E y la segunda A se pueden poner así:
 1. $_ A A _ _ _$ y la E puede ponerse en 3 lugares después de la segunda A .
 2. $_ A _ A _ _ _$ y la E puede ponerse en 2 lugares después de la segunda A .
 3. $_ A _ _ A _ _$ y la E puede ponerse en 1 lugar después de la segunda A .

Hay un total de $3 + 2 + 1 = 6$ formas de poner las vocales en orden alfabético de forma que la A está en la segunda posición.

- Si la primera A está en la tercera posición, la letra E y la segunda A se pueden poner así:
 1. $_ _ A A _ _ _$ y la E puede ponerse en 2 lugares después de la segunda A .
 2. $_ _ A _ A _ _ _$ y la E puede ponerse en 1 lugar después de la segunda A .

Hay un total de $2 + 1 = 3$ formas de poner las vocales en orden alfabético de forma que la A está en la tercera posición.

- Si la primera A está en la cuarta posición, la letra E y la segunda A se pueden poner así:
 1. $_ _ _ A A _ _ _$ y la E puede ponerse en 1 lugar después de la segunda A .

Hay un total de 1 forma de poner las vocales en orden alfabético de forma que la A está en la cuarta posición.

Sumando todos los posibles resultados, hay un total de $10 + 6 + 3 + 1 = 20$ formas de poner las vocales en orden alfabético.



Para cada una de las 20 formas de poner las vocales, encontraremos el número de formas válidas de rellenar los tres lugares restantes con consonantes de forma que no están en orden alfabético.

Resulta que las consonantes se pueden poner de en los tres lugares vacíos ordenadas de seis formas distintas: CMR , CRM , MCR , MRC , RCM y RMC . Uno de los arreglos está en orden alfabético y cinco no están en orden alfabético.

Entonces, para cada uno de los 20 arreglos en los que las vocales están en orden alfabético, hay 5 arreglos de las consonantes de forma que no están en orden alfabético.

Por lo tanto, hay $20 \times 5 = 100$ arreglos de las letras en la palabra $CAMERA$ en los que las vocales aparecen en orden alfabético y las consonantes no aparecen en orden alfabético.

Solución 2

En esta solución, primero contamos la cantidad total de arreglos de las letras en la palabra $CAMERA$.

Observa que hay dos A 's. Debemos tener cuidado de no contar dos veces el mismo arreglo. Así que primero acomodaremos las letras C , E , M , y R . Hay 6 lugares para la C . Para cada uno de estos lugares para C , quedan 5 lugares para poner la E . Esto da un total de $6 \times 5 = 30$ formas de poner la C y la E . Para cada una de estas posiciones de C y E , hay 4 formas de acomodar la M . Esto da un total de $30 \times 4 = 120$ formas de acomodar C , E y M . Para cada una de estas posiciones de C , E y M , hay 3 formas de acomodar R . Esto da un total de $120 \times 3 = 360$ formas de acomodar C , E , M y R . Las dos A 's deben ir en los dos lugares restantes y esto sólo se puede hacer de una forma. Por lo tanto, hay un total de 360 formas de reacomodar las seis letras de la palabra $CAMERA$.

Al examinar los 360 arreglos, veremos que las vocales aparecen ordenadas de tres formas: AAE , AEA y EAA , de las cuales sólo una está en orden alfabético. Así que en un tercio de los 360 arreglos, es decir en 120 arreglos, las vocales aparecen en orden alfabético.

Al examinar los 120 arreglos en los que las vocales aparecen en orden alfabético, las consonantes aparecen ordenadas de seis formas distintas: CMR , CRM , MCR , MRC , RCM y RMC . Cinco sextos de estos arreglos tienen consonantes en orden alfabético. Así que cinco sextos de 120 arreglos, es decir 100 arreglos, cumplan que las vocales aparecen en orden alfabético y las consonantes no aparecen en orden alfabético.

Por lo tanto, hay 100 arreglos de las letras en la palabra $CAMERA$ en los que las vocales aparecen en orden alfabético y las consonantes no aparecen en orden alfabético.