POTW 0826

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Boletos

Problema

La escuela secundaria POTW está organizando una obra de teatro. Los boletos de la obra están numerados, y cada boleto consiste de exactamente cuatro dígitos entre 0 y 9. Cada posible boleto se imprime exactamente una vez. Si los boletos se reparten aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los dígitos del primer boleto entregado sea mayor o igual a 34?

Solución

Primero debemos determinar la cantidad total de boletos, es decir, de números de cuatro dígitos. Hay 10 opciones para el primer dígito. Para cada una de esas opciones, hay 10 opciones para el segundo dígito. Por lo tanto, hay $10 \times 10 = 100$ opciones para los primeros dos dígitos. Para cada una de ellas, hay 10 opciones para el tercer dígito. Por lo tanto, hay $100 \times 10 = 1000$ opciones para los primeros tres dígitos. Por último, para cada una de las 1000 formas de elegir los primeros tres dígitos, hay 10 formas de elegir el cuarto dígito. Por lo tanto, hay $1000 \times 10 = 10\,000$ números de cuatro dígitos.
Ahora debemos determinar la cantidad de boletos cuya suma de dígitos es mayor o igual a 34. Lo haremos por casos.

1. **El boleto tiene cuatro 9s.** Si los dígitos son todos 9s, entonces la suma es 36, que está en el rango deseado. Sólo hay un boleto con puros 9s.
2. **El boleto tiene tres 9s y otro dígito.** Los tres 9s suman 27. Para obtener 34 o más, el otro dígito debe ser 7 u 8. Hay dos opciones para elegir este dígito. Ya que elegimos el dígito, lo podemos colocar en 4 lugares y las otras tres posiciones deben ser 9s. Por lo tanto, hay $2 \times 4 = 8$ boletos que tienen exactamente tres 9s. (Específicamente, los números son: 7999, 8999, 9799, 9899, 9979, 9989, 9997, 9998.)
3. **El boleto tiene exactamente dos 9s.** Los dos 9s suman 18. Para obtener 34 o más, los otros dos dígitos deben sumar $34 - 18 = 16$ o más. La única forma de lograr esto, dado que ya no podemos usar más 9s, es usando dos 8s. Hay seis formas de colocar los dos 8s, y los 9s deben ir en las otras posiciones restantes. Por lo tanto, hay seis boletos que contienen exactamente dos 9s. (Los números son: 8899, 8989, 8998, 9889, 9898, 9988.)
4. **El boleto tiene un 9.** Para obtener 34 o más, los otros tres dígitos deben sumar $34 - 9 = 25$ o más. Pero los dígitos restantes van del 0 al 8. La máxima suma posible sería 24, si usamos los tres 8s, pero necesitamos 25 o más. Por lo tanto, no existen boletos con exactamente un 9 y cuya suma sea mayor o igual a 34. Es importante recalcar que si un boleto no tiene nueves, entonces tampoco sera posible que su suma sea mayor o igual a 34.

Por lo tanto, la cantidad de boletos cuya suma de dígitos es mayor o igual a 34 es $1 + 8 + 6 = 15$. Para obtener la probabilidad, dividimos la cantidad de boletos con suma mayor o igual a 34 entre la cantidad total de boletos. La probabilidad de obtener un boleto cuya suma de dígitos es mayor o igual a 34 es $\frac{15}{10\,000} = \frac{3}{2000}$. Otra forma de ver el resultado es que de cada 2000 boletos, en promedio puedes esperar encontrar 3 boletos cuya suma de sus dígitos es mayor o igual a 34.