

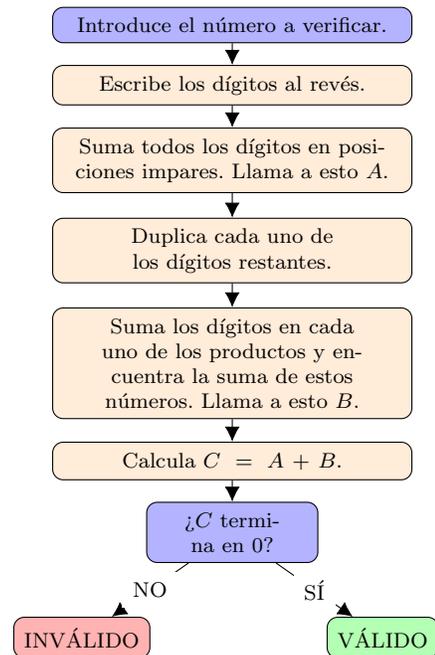


Problema de la Semana Problema D y Solución ¡Aprobada!

Problema

Las tarjetas de débito y crédito contienen números de cuenta que consisten de muchos dígitos. Cuando compras en línea, frecuentemente debes introducir tu número de cuenta. Como hay muchos dígitos, es fácil equivocarse con el número. El último dígito del número es un dígito de control especialmente generado que se puede usar para verificar la validez del número. Un algoritmo común usado para verificar números se llama *Algoritmo de Luhn*. Se realiza una serie de operaciones en el número y se produce un resultado final. Si el resultado final termina en cero, el número es válido. De lo contrario, el número es inválido.

Los pasos realizados en el Algoritmo de Luhn se esbozan en el diagrama de flujo de la derecha.



El número 8763 $D8D4$ $D6D8$ 0459 es válido cuando lo verificamos con el Algoritmo de Luhn. D es un entero de 0 a 9 que aparece cuatro veces en el número. (Puede ser igual a uno de los dígitos que ya aparecen.) Determina todos los posibles valores de D .

Solución

Solución 1

Cuando volteamos los dígitos del número, obtenemos 9540 $8D6D$ $4D8D$ 3678. La suma de los dígitos en posiciones impares es

$$A = 9 + 4 + 8 + 6 + 4 + 8 + 3 + 7 = 49$$

Cuando duplicamos los dígitos restantes obtenemos:

$$2 \times 5 = 10; 2 \times 0 = 0; 2 \times D = 2D; 2 \times 6 = 12; \text{ y } 2 \times 8 = 16.$$

Representamos con x la suma de los dígitos de $2D$.

Cuando sumamos las sumas de los dígitos de cada producto, obtenemos:

$$B = (1 + 0) + 0 + x + x + x + x + (1 + 2) + (1 + 6) = 1 + 0 + 4x + 3 + 7 = 4x + 11$$

Como $C = A + B$, tenemos que $C = 49 + 4x + 11 = 60 + 4x$.

Cuando duplicamos un entero entre 0 y 9 y sumamos los dígitos del producto, ¿cuáles son los resultados que podemos obtener?

Dígito Original $\rightarrow D$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Doble del Dígito Original $\rightarrow 2D$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Suma de los Dígitos de $2D$	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9



Observa que la suma de los dígitos del doble del dígito original sólo puede ser un número entre 0 y 9, inclusive. Se sigue que los únicos valores para x son enteros entre 0 y 9.

Para ser ún número válido, el dígito de las unidades de C debe ser 0. Queremos que $60 + 4x$ sea un entero mayor o igual a 60 tal que el dígito de las unidades es 0.

¿Es posible que $60 + 4x = 60$? Cuando $4x = 0$, entonces $x = 0$, $60 + 4x = 60$ y $D = 0$. Es decir, cuando $D = 0$, $2D = 0$ y la suma de dígitos de $2D$ es $x = 0$. Este valor de D produce un número válido.

¿Es posible que $60 + 4x = 70$? Cuando $4x = 10$, entonces $x = 2,5$ y $60 + 4x = 70$. Pero x debe ser un entero y esto no es posible.

¿Es posible que $60 + 4x = 80$? Cuando $4x = 20$, entonces $x = 5$, $60 + 4x = 80$ y $D = 7$. Es decir, cuando $D = 7$, $2D = 14$ y la suma de dígitos de $2D$ es $x = 5$. Este valor de D produce un número válido.

¿Es posible que $60 + 4x = 90$? Cuando $4x = 30$, entonces $x = 7,5$ y $60 + 4x = 90$. Pero x debe ser un entero y esto no es posible.

¿Es posible que $60 + 4x = 100$? Cuando $4x = 40$, entonces $x = 10$ y $60 + 4x = 100$. Pero x debe ser un entero entre 0 y 9, entonces esto no es posible.

Cualquier entero que termine en 0 y que es mayor 100 producirá un valor mayor a 10 para x . Entonces no hay más valores posibles para x o D .

Por lo tanto, las dos opciones válidas para D son 0 y 7.

Cuando $D = 0$, el número válido es 8763 0804 0608 0459.

Cuando $D = 7$, el número válido es 8763 7874 7678 0459.

Solución 2

La segunda solución inspecciona cada uno de los posibles valores de D y luego verifica el número obtenido. Se podría crear un programa de computadora o una hoja de datos para resolver este problema eficientemente.

Recuerda que A es la suma de los dígitos en las posiciones impares del número al revés. Cada uno de los dígitos en posición par se duplican y B es la suma de la suma de los dígitos de cada uno de estos productos. C es la suma de $A + B$.

D	Número	Al revés	A	Doble de dígitos en posición par	B	C	Válido / Inválido
0	8763 0804 0608 0459	9540 8060 4080 3678	49	10, 0, 0, 0, 0, 0, 12, 16	11	60	Válido
1	8763 1814 1618 0459	9540 8161 4181 3678	49	10, 0, 2, 2, 2, 2, 12, 16	19	68	Inválido
2	8763 2824 2628 0459	9540 8262 4282 3678	49	10, 0, 4, 4, 4, 4, 12, 16	27	76	Inválido
3	8763 3834 3638 0459	9540 8363 4383 3678	49	10, 0, 6, 6, 6, 6, 12, 16	35	84	Inválido
4	8763 4844 4648 0459	9540 8464 4484 3678	49	10, 0, 8, 8, 8, 8, 12, 16	43	92	Inválido
5	8763 5854 5658 0459	9540 8565 4585 3678	49	10, 0, 10, 10, 10, 10, 12, 16	15	64	Inválido
6	8763 6864 6668 0459	9540 8666 4686 3678	49	10, 0, 12, 12, 12, 12, 12, 16	23	72	Inválido
7	8763 7874 7678 0459	9540 8767 4787 3678	49	10, 0, 14, 14, 14, 14, 12, 16	31	80	Válido
8	8763 8884 8688 0459	9540 8868 4888 3678	49	10, 0, 16, 16, 16, 16, 12, 16	39	88	Inválido
9	8763 9894 9698 0459	9540 8969 4989 3678	49	10, 0, 18, 18, 18, 18, 12, 16	47	96	Inválido

Por lo tanto, las dos opciones válidas para D son 0 y 7.