



Problema de la Semana

Problema D y Solución

¡Sumando!

Problema

Si sumamos sesenta enteros *impares consecutivos*, el resultado es 4800. Determina el mayor de los sesenta enteros impares.

Solución

Solución 1

En esta solución utilizaremos patrones.

Sea a el menor número. Como los números son impares, distan en 2. Por lo que el segundo número es $(a + 2)$, el tercero es $(a + 4)$, el cuarto es $(a + 6)$, y así sucesivamente. ¿Cuál es el último número?

Si nos fijamos con atención, el segundo número es $(a + 1(2))$, el tercero es $(a + 2(2))$, el cuarto es $(a + 3(2))$, y así sucesivamente. Siguiendo el patrón, el último número es $(a + 59(2)) = a + 118$. Entonces

$$\begin{aligned}a + (a + 2) + (a + 4) + (a + 6) + \cdots + (a + 118) &= 4800 \\60a + 2 + 4 + 6 + \cdots + 118 &= 4800 \\60a + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 59) &= 4800 \\60a + 2\left(\frac{59 \times 60}{2}\right) &= 4800, \text{ utilizando la fórmula.} \\60a + 3540 &= 4800 \\60a &= 1260 \\a &= 21 \\a + 118 &= 139\end{aligned}$$

Por lo tanto, el número más grande en la suma es 139.

Solución 2

En esta solución, utilizaremos promedios.

Sea A la suma de los sesenta impares consecutivos. El promedio multiplicado por la cantidad de enteros es igual a la suma de los enteros. Como la suma de los sesenta enteros es 4800, entonces $60A = 4800$ y $A = 80$.

Ahora, los enteros en la sucesión son impares. Se sigue que 30 enteros están por debajo del promedio y 30 por encima. Buscamos el 30vo impar mayor al promedio. De hecho, queremos el 30vo impar después de 79, que es el primer impar menor al promedio. Este entero es fácil de obtener,

$$79 + 30(2) = 79 + 60 = 139.$$

Por lo tanto, el número más grande en la suma es 139.



Solución 3

En esta solución utilizamos sucesiones aritméticas. La presentamos al final, porque varios estudiantes aún no han visto estas sucesiones en sus cursos.

Una *sucesión aritmética* es una sucesión en la que cada término, después del primero, se obtiene a partir de sumar una constante al término del anterior. El término general, t_n , de una sucesión aritmética es $t_n = a + (n - 1)d$, donde a es el primer término, d es la diferencia entre términos consecutivos, y n es el número del término. La suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética, S_n , se puede obtener utilizando la fórmula $S_n = \frac{n}{2} (2a + (n - 1)d)$, donde a , d , y n son las mismas variables que se usaron en la fórmula para un término general.

Sea a el primer término de la sucesión. Como los términos de la sucesión son impares consecutivos, la diferencia entre términos consecutivos es dos. Por lo tanto, $d = 2$. Como hay 60 términos en la sucesión, $n = 60$. La suma de los sesenta enteros en la sucesión es 4800, entonces $S_{60} = 4800$.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} (2a + (n - 1)d) \\ 4800 &= \frac{60}{2} (2a + (60 - 1)(2)) \\ 4800 &= 30(2a + 59(2)) \\ \text{Dividiendo entre 30, } 160 &= 2a + 118 \\ 42 &= 2a \\ 21 &= a \end{aligned}$$

Como queremos el mayor entero en la sucesión, buscamos el término 60.

$$\begin{aligned} \text{Usando } t_n &= a + (n - 1)d, \text{ con } a = 21, d = 2, n = 60 \\ t_{60} &= 21 + 59(2) \\ t_{60} &= 139 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el número más grande en la suma es 139.