



## Problema de la Semana

### Problema D y Solución

### Plantando Árboles

#### Problema

El primero de Noviembre de cada año, la familia Stablo planta un árbol. Esta tradición ha ocurrido por generaciones y el primer árbol que plantó la familia tiene ahora 183 años. Dos de los árboles fueron plantados en el patio trasero. Uno es un manzano y el otro es un arce. El arce tiene más de 100 años, pero no fue el primer árbol plantado en el patio trasero. El primero de Noviembre de este año, la edad del arce es 15 veces la edad del manzano.

Dentro de algunos años, para el primero de Noviembre, la edad del arce será 11 veces la edad del manzano. ¿Qué edad tendrán los árboles ese año?

#### Solución

##### Solución 1:

Como la edad del arce es 15 veces la edad del manzano, la edad del arce debe ser un múltiplo de 15 que sea mayor a 100 y menor a 183. Las posibles edades del arce y las correspondientes edades del manzano se muestran en la siguiente tabla.

Edad del arce	105	120	135	150	165	180
Edad del manzano	7	8	9	10	11	12

En algún punto, la edad del arce será 11 veces la edad del manzano. Sea  $n$  la cantidad de años que transcurrirán para que esto suceda, donde  $n$  es un entero.

Revisaremos los casos posibles.

1. ¿Es posible que en este momento el manzano tenga 7 años y el arce 105 años?

En este caso, dentro de  $n$  años el manzano tendría  $7 + n$  años y el arce tendría  $105 + n$  años. Si en  $n$  años la edad del arce es 11 veces la edad del manzano, entonces tenemos que  $11(7 + n) = 105 + n$ . Si despejamos  $n$ , obtenemos que  $77 + 11n = 105 + n$ , es decir  $10n = 28$ , que implica que  $n = 2.8$ . Como  $n$  no es un entero, es imposible que en este momento el manzano tenga 7 años y el arce 105 años.

2. ¿Es posible que en este momento el manzano tenga 8 años y el arce 120 años?

En este caso, dentro de  $n$  años el manzano tendría  $8 + n$  años y el arce tendría  $120 + n$  años. Si en  $n$  años la edad del arce es 11 veces la edad del manzano, entonces tenemos que  $11(8 + n) = 120 + n$ . Si despejamos  $n$ , obtenemos que  $88 + 11n = 120 + n$ , es decir  $10n = 32$ , que implica que  $n = 3.2$ . Como  $n$  no es un entero, es imposible que en este momento el manzano tenga 8 años y el arce 120 años.

3. ¿Es posible que en este momento el manzano tenga 9 años y el arce 135 años?

En este caso, dentro de  $n$  años el manzano tendría  $9 + n$  años y el arce tendría  $135 + n$  años. Si en  $n$  años la edad del arce es 11 veces la edad del manzano, entonces tenemos que  $11(9 + n) = 135 + n$ . Si despejamos  $n$ , obtenemos que  $99 + 11n = 135 + n$ , es decir  $10n = 36$ , que implica que  $n = 3.6$ . Como  $n$  no es un entero, es imposible que en este momento el manzano tenga 9 años y el arce 135 años.



4. ¿Es posible que en este momento el manzano tenga 10 años y el arce 150 años?

En este caso, dentro de  $n$  años el manzano tendría  $10 + n$  años y el arce tendría  $150 + n$  años. Si en  $n$  años la edad del arce es 11 veces la edad del manzano, entonces tenemos que  $11(10 + n) = 150 + n$ . Si despejamos  $n$ , obtenemos que  $110 + 11n = 150 + n$ , es decir  $10n = 40$ , que implica que  $n = 4$ . Esto es, dentro de 4 años, el manzano tendría 14 años y el arce 154 años. Como  $14 \times 11 = 154$ , se cumple que la edad del arce es 11 veces la edad del manzano. Hemos obtenido una solución, pero debemos revisar las otras dos opciones para estar seguros que no nos hagan falta soluciones.

5. ¿Es posible que en este momento el manzano tenga 11 años y el arce 165 años?

En este caso, dentro de  $n$  años el manzano tendría  $11 + n$  años y el arce tendría  $165 + n$  años. Si en  $n$  años la edad del arce es 11 veces la edad del manzano, entonces tenemos que  $11(11 + n) = 165 + n$ . Si despejamos  $n$ , obtenemos que  $121 + 11n = 165 + n$ , es decir  $10n = 44$ , que implica que  $n = 4.4$ . Como  $n$  no es un entero, es imposible que en este momento el manzano tenga 11 años y el arce 165 años.

6. ¿Es posible que en este momento el manzano tenga 12 años y el arce 180 años?

En este caso, dentro de  $n$  años el manzano tendría  $12 + n$  años y el arce tendría  $180 + n$  años. Si en  $n$  años la edad del arce es 11 veces la edad del manzano, entonces tenemos que  $11(12 + n) = 180 + n$ . Si despejamos  $n$ , obtenemos que  $132 + 11n = 180 + n$ , es decir  $10n = 48$ , que implica que  $n = 4.8$ . Como  $n$  no es un entero, es imposible que en este momento el manzano tenga 12 años y el arce 180 años.

Ya consideramos todos los casos. La edad del arce será 11 veces la edad del manzano dentro de 4 años, cuando el manzano tenga 14 y el arce 154 años. Aunque no era parte de la pregunta, actualmente el manzano tiene 10 años y el arce tiene 150 años.

## Solución 2:

Representemos con  $m$  la edad del manzano y con  $a$  la edad del arce actualmente. Como la edad del arce es 15 veces la edad del manzano, se sigue que  $a = 15m$ .

Sea  $n$  la cantidad de años que transcurren hasta que la edad del arce es 11 veces la edad del manzano, donde  $n$  es un entero positivo. Dentro de  $n$  años, el manzano tendrá  $m + n$  años, y el arce tendrá  $a + n$ . Entonces

$$\begin{aligned} a + n &= 11(m + n) \\ \text{Pero } a &= 15m, \text{ entonces } & 15m + n &= 11(m + n) \\ & & 15m + n &= 11m + 11n \\ & & 4m &= 10n \\ & & 2m &= 5n \\ & & \frac{2m}{5} &= n \end{aligned}$$

Como tanto  $m$  como  $n$  son enteros positivos, se sigue que  $m$  es divisible entre 5. Pero en la primera solución, vimos que las posibles edades del manzano eran 7, 8, 9, 10, 11 y 12. El único múltiplo de 5 en esta lista es 10. Por lo tanto  $m = 10$  y entonces  $n = 4$ . Finalmente, la ecuación  $a = 15m$ , implica que  $a = 15 \times 10 = 150$ . Por lo tanto, actualmente el manzano tiene 10 años y el arce 150 años. En 4 años, el manzano tendrá 14, el arce 154, y la edad del arce será 11 veces la edad del manzano.