Problema de la Semana
Problema D y Solución
¡Más potencia, Scott!

Problema

A Scott le gusta plantear problemas interesantes en su clase de Matemáticas. Hoy, empezó con la expresión $6^{2020} + 7^{2020}$. Afirmó que la expresión no es igual a 13^{2020} y que no estaba interesado en calcular la suma. Su pregunta para la clase y para ti es: “¿Cuáles son los dos últimos dígitos de la suma?”

Solución

Solución 1

Empecemos por examinar los dos últimos dígitos de varias potencias de 7.

$7^1 = \mathbf{07}$	$7^2 = \mathbf{49}$	$7^3 = 3\mathbf{43}$	$7^4 = 24\mathbf{01}$
$7^5 = 16\,8\mathbf{07}$	$7^6 = 117\,6\mathbf{49}$	$7^7 = 823\,5\mathbf{43}$	$7^8 = 5\,764\,8\mathbf{01}$

Observa que los dos últimos dígitos se repiten cada cuatro potencias de 7. Si el patrón continua, entonces 7^9 termina en 07, 7^{10} termina en 49, 7^{11} termina en 43, 7^{12} termina en 01, y así sucesivamente. Podríamos simplemente calcular las potencias para verificar estos ejemplos, pero mejor justificaremos porqué este patrón continua en general. Si una potencia termina en “07”, entonces los 2 últimos dígitos de la siguiente potencia son exactamente los dos últimos dígitos del producto $07 \times 7 = 49$. Es decir, los 2 últimos dígitos de la siguiente potencia son “49”. Si una potencia termina en “49”, entonces los 2 últimos dígitos de la siguiente potencia son exactamente los dos últimos dígitos del producto $49 \times 7 = 343$. Es decir, los 2 últimos dígitos de la siguiente potencia son “43”. Si una potencia termina en “43”, entonces los 2 últimos dígitos de la siguiente potencia son exactamente los dos últimos dígitos del producto $43 \times 7 = 301$. Es decir, los 2 últimos dígitos de la siguiente potencia son “01”. Finalmente, si una potencia termina en “01”, entonces los 2 últimos dígitos de la siguiente potencia son exactamente los dos últimos dígitos del producto $01 \times 7 = 07$. Es decir, los 2 últimos dígitos de la siguiente potencia son “07”. Por lo tanto, empezando con la primera potencia de 7, cada cuatro potencias consecutivas de 7, sus respectivos dos últimos digitos serán 07, 49, 43 y 01.

Necesitamos determinar la cantidad de ciclos completos, dividiendo 2020 entre 4. Como $2020 \div 4 = 505$, hay 505 ciclos completos. Esto significa que 7^{2020} es la última potencia de 7 en el ciclo 505, y por lo tanto termina en 01.

A continuación, determinaremos los dos últimos dígitos de varias potencias de 6.

$6^1 = \mathbf{06}$	$6^2 = \mathbf{36}$	$6^3 = 2\mathbf{16}$	$6^4 = 12\mathbf{96}$	$6^5 = 77\mathbf{76}$	$6^6 = 46\,6\mathbf{56}$
	$6^7 = 279\,9\mathbf{36}$	$6^8 = 1\,679\,6\mathbf{16}$	$6^9 = 10\,077\,6\mathbf{96}$	$6^{10} = 60\,466\,1\mathbf{76}$	$6^{11} = 362\,797\,0\mathbf{56}$

Observa que los dos últimos dígitos se repiten cada cinco potencias de 6 empezando con la segunda potencia de 6. Este patrón se puede justificar con un argumento similar al de las potencias de 7. Entonces, 6^{12} termina en 36, 6^{13} termina en 16, 6^{14} termina en 96, 6^{15} termina en 76, 6^{16} termina en 56, y así sucesivamente. Empezando con la segunda potencia de 6, cada cinco potencias consecutivas de 6, sus dos últimos dígitos serán 36, 16, 96, 76 y 56.

Necesitamos determinar la cantidad de ciclos completos en 2020. Para ello primero restamos 1 para que 06 sea el primero de la lista, y luego dividimos $2020 - 1$ (es decir 2019) entre 5. Como $2019 \div 5 = 403$ con residuo 4, hay 403 ciclos completos y $\frac{4}{5}$ de otro ciclo. Como $403 \times 5 = 2015$, $6^{2015+1} = 6^{2016}$ es la última potencia de 6 en el ciclo 403 y por lo tanto termina en 56.

Los $\frac{4}{5}$ de ciclo que nos faltan, nos dicen que el número 6^{2020} termina con el cuarto número en el patrón, es decir 76. De hecho, sabemos que 6^{2017} termina en 36, 6^{2018} termina en 16, 6^{2019} termina en 96, 6^{2020} termina en 76, y 6^{2021} termina en 56, porque eso serían los números de todo el ciclo 404.

Por lo tanto, 6^{2020} termina en 76.

Los dos últimos dígitos de la suma $6^{2020} + 7^{2020}$ se obtienen al sumar los dos últimos dígitos de 6^{2020} y 7^{2020}. Por lo tanto, los últimos dos dígitos de la suma son $01 + 76 = 77$.

Solución 2

En la primera solución, vimos que los dos últimos dígitos de las potencias de 7 se repiten cada 4 potencias consecutivas de 7. También vimos que los dos últimos dígitos de 6 se repiten cada 5 potencias consecutivas de 6.

Empecemos con la segunda potencia de tanto 7 como de 6. Sabemos que los dos últimos dígitos de 7^2 son 49 y que los dos últimos dígiyos de 6^2 son 36. ¿Cuando volverá a aparecer esta combinación de dos últimos dígitos? Los ciclos de potencias de 7 son de longitud 4 mientras que los ciclos de las potencias de 6 son de longitud 5.

El mínimo común múltiplo de 4 y 5 es 20. Se sigue que 20 potencias después de la segunda potencia, los dos últimos dígitos de las potencias de 7 y 6 tendrán los mismos dos dígitos que tenían la segunda potencia de cada uno. Esto significa que los dos últimos dígitos de 7^{22} y 7^2 son iguales: 49. Y que los dos últimos dígitos de 6^{22} y 6^2 son iguales: 36. La siguiente tabla ilustra esta repetición.

Potencias	7^2	7^3	7^4	7^5	7^6	7^7	7^8	7^9	7^{10}	7^{11}	7^{12}	7^{13}	7^{14}	7^{15}	7^{16}	7^{17}	7^{18}	7^{19}	7^{20}	7^{21}	7^{22}
Últimos 2 dígitos	**49**	43	01	07	49	43	01	07	49	43	01	07	49	43	01	07	49	43	01	07	**49**

Potencias	6^2	6^3	6^4	6^5	6^6	6^7	6^8	6^9	6^{10}	6^{11}	6^{12}	6^{13}	6^{14}	6^{15}	6^{16}	6^{17}	6^{18}	6^{19}	6^{20}	6^{21}	6^{22}
Últimos 2 dígitos	**36**	16	96	76	56	36	16	96	76	56	36	16	96	76	56	36	16	96	76	56	**36**

Como 2000 es múltiplo de 20, sabemos que la potencia 7^{2022} termina en 49 y que 6^{2022} termina en 36.

Revisando hacia atrás el ciclo de los dos últimos dígitos de las potencias de 7, obtenemos que 7^{2021} termina en 07 y que 7^{2020} termina en 01.

Revisando hacia atrás el ciclo de los dos últimos dígitos de las potencias de 6, obtenemos que 6^{2021} termina en 56 y que 6^{2020} termina en 76.

Los últimos dos dígitos de la suma $6^{2020} + 7^{2020}$ se obtienen al sumar los dos últimos dígitos de 6^{2020} y 7^{2020}. Por lo tanto, los últimos dos dígitos de la suma son $01 + 76 = 77$.