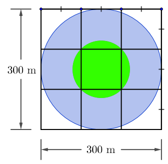
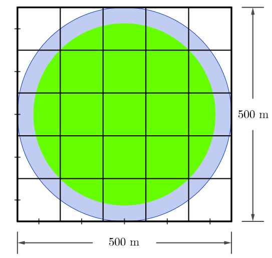


Problema de la Semana

Problema D y Solución

Espejos de Agua



Problema

Dos parques en cierta ciudad, tienen diseños únicos pero muy similares, como se muestra en los dibujos de arriba. El parque pequeño está dentro de un cuadrado de 300 m por 300 m. El parque grande está dentro de un cuadrado de 500 m por 500 m. En cada dibujo, hay líneas horizontales y verticales, que distan 100 m entre ellas. Estas líneas forman una cuadrícula con cuadros de 100 m por 100 m, el parque pequeño tiene 9 cuadros y el grande 25. El dibujo de cada parque muestra dos círculos concéntricos. En ambos parques, la circunferencia del círculo grande toca el punto medio de los cuatro lados del parque. La circunferencia del círculo pequeño, pasa por los cuatro vértices del cuadrado más grande formado por la cuadrícula y que está completamente dentro del parque. El anillo que se forma entre el círculo exterior e interior, se llena completamente de agua, a una profundidad uniforme de 0.5 m. ¿Cuál de los dos espejos de agua contiene más agua?

Solución

Para encontrar el volúmen de cada espejo de agua, necesitamos encontrar el área de cada anillo y multiplicarlo por la profundidad. Como la profundidad de cada espejo es la misma, y es constante, sólo necesitamos comparar las áreas para determinar la mayor.

En el parque pequeño, denotaremos por d_1 al diámetro del círculo interior y por r_1 a su radio. Además, llamaremos D_1 al diámetro del círculo exterior y R_1 a su radio.

En el parque grande, denotaremos por d_2 al diámetro del círculo interior y por r_2 a su radio. Además, llamaremos D_2 al diámetro del círculo exterior y R_2 a su radio.

A la izquierda mostraremos los cálculos para el parque pequeño y a la derecha los cálculos para el parque grande.

Parque Pequeño

El diámetro del círculo interior es la longitud de la diagonal del cuadrado central de 100 m por 100 m. Usando el Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{100^2 + 100^2} \\ &= \sqrt{20\,000} \\ &= 100\sqrt{2} \text{ m} \\ r_1 &= \frac{1}{2} d_1 \\ &= 50\sqrt{2} \text{ m} \end{aligned}$$

Parque Grande

El diámetro del círculo interior es la longitud de la diagonal del cuadrado central de 300 m por 300 m. Usando el Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} d_2 &= \sqrt{300^2 + 300^2} \\ &= \sqrt{180\,000} \\ &= \sqrt{(90\,000)(2)} \quad * \\ &= 300\sqrt{2} \text{ m} \\ r_2 &= \frac{1}{2} d_2 \\ &= 150\sqrt{2} \text{ m} \end{aligned}$$

Parque Pequeño

El diámetro del círculo exterior es el ancho del cuadrado de 300 m por 300 m. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} D_1 &= 300 \text{ m} \\ R_1 &= \frac{1}{2}D_1 \\ &= 150 \text{ m} \end{aligned}$$

Parque Grande

El diámetro del círculo exterior es el ancho del cuadrado de 500 m por 500 m. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} D_2 &= 500 \text{ m} \\ R_2 &= \frac{1}{2}D_2 \\ &= 250 \text{ m} \end{aligned}$$

La superficie de cada espejo de agua se puede determinar, restando el área del círculo interior del área del círculo exterior.

Sea A_1 la superficie del espejo de agua del parque pequeño y sea A_2 la superficie del espejo de agua del parque grande.

Parque Pequeño

$$\begin{aligned} A_1 &= \pi(R_1)^2 - \pi(r_1)^2 \\ &= \pi(150)^2 - \pi(50\sqrt{2})^2 \\ &= 22500\pi - 5000\pi \\ &= 17500\pi \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Parque Grande

$$\begin{aligned} A_1 &= \pi(R_2)^2 - \pi(r_2)^2 \\ &= \pi(250)^2 - \pi(150\sqrt{2})^2 \\ &= 62500\pi - 45000\pi \\ &= 17500\pi \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Este puede ser un resultado sorprendente. Ambos espejos de agua tienen la misma superficie. Como la profundidad de los espejos es igual y uniforme, el volúmen del agua en cada espejo es el mismo. Ninguno tiene más que el otro.

Para reflexionar:

Un tercer parque de tamaño mediano, puede ser encerrado en un cuadrado de 400 m por 400 m. Si un espejo de agua se construye de manera similar a los otros dos parques, ¿Cuál es el volúmen de agua comparado con los otros dos parques? ¿Puedes explicar qué está sucediendo?

* Nota que hemos reducido los radicales factorizando primero el cuadrado perfecto mas grande y luego encontrando la raíz de ese cuadrado perfecto. Otro ejemplo:
$\sqrt{20} = \sqrt{(4)(5)} = \sqrt{4}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.