



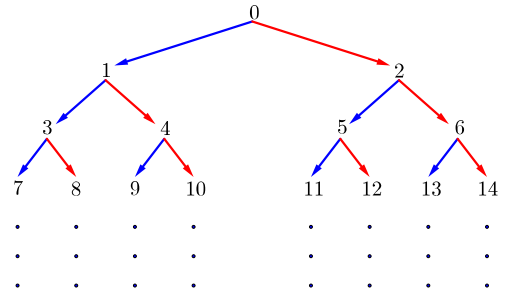
## Problema de la Semana

### Problema D y Solución

#### Sigue el camino

### Problema

Considera el árbol de números que se muestra a la derecha. En este árbol de números, los enteros mayores o iguales a 0 se escriben en orden ascendente. La fila de arriba tiene un entero, y cada fila subsecuente contiene el doble de números que la fila previa. Cada entero se conecta con dos enteros de la fila de abajo, uno abajo a la izquierda y otro abajo a la derecha, como se muestra en el árbol. Por ejemplo, el número 5 está conectado con el número 11 (abajo a la izquierda) y con el número 12 (abajo a la derecha) de la fila inferior. Observa que podemos ir de 0 a 12 de la siguiente forma: primero bajamos a la derecha (D), luego bajamos a la izquierda (I), y por último bajamos a la derecha (D).



Determina a qué entero se llega si seguimos este camino empezando en 0:

$$D \rightarrow D \rightarrow D \rightarrow D \rightarrow D \rightarrow I \rightarrow I \rightarrow D \rightarrow I \rightarrow D$$

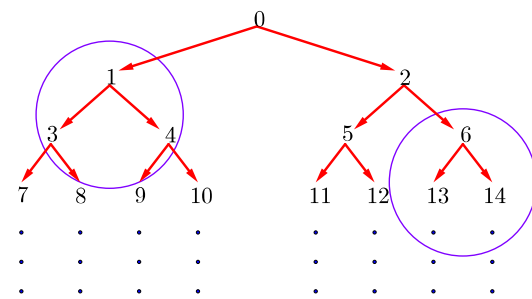
### Solución

#### Solución 1

Al principio puede que no sea obvio cómo proceder. Podemos observar en el diagrama que  $D \rightarrow D \rightarrow D$  será el recorrido 0, 2, 6 y 14. Pero desde ahí, ¿hacia dónde vamos después? Podríamos completar las siguientes filas del árbol hasta que logremos hacer el número de pasos que nos piden y encontrar la respuesta final. Este método para resolver el problema, sería muy útil para una cantidad relativamente pequeña de pasos, pero no sería muy práctica en general para caminos “largos”.

Procederemos haciendo una observación. Cuando bajamos hacia la izquierda (I) desde cualquier número, llegamos a un número impar. Cuando bajamos hacia la derecha (D) desde cualquier número, llegamos a un número par. ¿Existe una fórmula general que se pueda usar para determinar qué sucede cuando bajamos hacia la izquierda (I)? ¿Y para cuando bajamos hacia la derecha (D)?

El diagrama de la derecha tiene dos partes circuladas. ¿Podemos descubrir un patrón que nos lleve de cada número inicial al impar y al par de abajo? Para ir de 1 a 3 podemos sumar 2 y para ir de 1 a 4 podemos sumar 3. Pero si hacemos lo mismo con 6 no llegaremos al 13 ni al 14. Conforme bajamos en el árbol, cada nueva fila tiene el doble de números que la fila de arriba. Así que intentemos multiplicar el número inicial por 2 y ver qué se necesita para llegar a los números de abajo. Si duplicamos 1 obtenemos 2. Entonces tendríamos que sumar 1 para llegar al impar debajo, que es el 3, y tendríamos que sumar 2 para llegar al número par debajo, que es el 4. ¿Esto funciona para 6? Si duplicamos 6 y sumamos 1, obtenemos 13. Parece que funciona. Si duplicamos 6 y sumamos 2, obtenemos 14. Parece que también funciona.





Entonces, aparentemente si bajamos hacia la izquierda (I) desde cualquier número  $a$  en el árbol, el número resultante es uno más que el doble del valor de  $a$ . Es decir, bajar a la izquierda (I) desde  $a$ , nos llevará al número  $2a + 1$  en el árbol.

Aparentemente si bajamos hacia la derecha (D) desde cualquier número  $a$  en el árbol, el número resultante es dos más que el doble del valor de  $a$ . Es decir, bajar a la izquierda (D) desde  $a$ , nos llevará al número  $2a + 2$  en el árbol.

Estas afirmaciones son ciertas, pero no las hemos demostrado. Las relaciones se cumplen para todas las filas que hemos probado, pero no sabemos si es cierto para todas las filas. Tendrás que esperar a aprender matemáticas más avanzadas para ser capaz de demostrar estas afirmaciones en general.

La siguiente tabla muestra el resultado de realizar la sucesión de movimientos dada:

$$D \rightarrow D \rightarrow D \rightarrow D \rightarrow D \rightarrow I \rightarrow I \rightarrow D \rightarrow I \rightarrow D$$

Número Inicial	Movimiento	Cálculo	Siguiente Número
0	D	$2(0) + 2$	2
2	D	$2(2) + 2$	6
6	D	$2(6) + 2$	14
14	D	$2(14) + 2$	30
30	D	$2(30) + 2$	62
62	I	$2(62) + 1$	125
125	I	$2(125) + 1$	251
251	D	$2(251) + 2$	504
504	I	$2(504) + 1$	1009
1009	D	$2(1009) + 2$	2020

Empezando en 0 y haciendo los movimientos  $D \rightarrow D \rightarrow D \rightarrow D \rightarrow D \rightarrow I \rightarrow I \rightarrow D \rightarrow I \rightarrow D$ , terminamos en el número 2020.

Una vez que logramos determinar las operaciones requeridas para bajar hacia la izquierda (I) o hacia la derecha (D), el resto del problema se resuelve directamente. Incluso sería posible escribir un programa de computadora en el que introdujeras cualquier sucesión de I's y D's, y que la computadora determine la posición final en este árbol específico.

En la siguiente página, mostramos una solución que no requiere usar de las afirmaciones que no hemos demostrado.



## Solución 2

Si seguimos el camino que nos dieron, terminaremos en la fila 11 del árbol. Así que primero determinamos qué enteros están en la fila 11.

Para ir del entero de hasta arriba al entero de hasta la derecha en la fila 2, sumamos 2. Para ir del entero de hasta la derecha de la fila 2 al entero de hasta la derecha en la fila 3, sumamos 4. Para ir del entero de hasta la derecha de la fila 3 al entero de hasta la derecha en la fila 4, sumamos 8. El número que debemos sumar corresponde a la cantidad de enteros en la siguiente fila. Encontraremos el entero de hasta la derecha de las filas 10 y 11.

El entero de hasta la derecha de las fila 10 es:

$$0 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1022.$$

El entero de hasta la derecha de las fila 11 es:

$$0 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 = 2046.$$

Entonces, la fila 11 contiene 1024 enteros que van del 1023 (1 más que el número de hasta la derecha en la fila 10) al 2046 (el número de hasta la derecha de la fila 11), incluidos el 1023 y 2046.

Ahora nos fijamos en los comandos para encontrar exactamente a que parte de la fila 11 llegaremos.

La primera D nos llevará a la mitad derecha de nuestro rango de números 1023 a 2046, es decir, de 1535 a 2046, 512 números posibles.

La segunda D nos llevará a la mitad derecha de nuestro rango de números 1535 a 2046, es decir, de 1791 a 2046, 256 números posibles.

La tercera D nos llevará a la mitad derecha de nuestro rango de números 1791 a 2046, es decir, de 1919 a 2046, 128 números posibles.

La cuarta D nos llevará a la mitad derecha de nuestro rango de números 1919 a 2046, es decir, de 1983 a 2046, 64 números posibles.

La quinta D nos llevará a la mitad derecha de nuestro rango de números 1983 a 2046, es decir, de 2015 a 2046, 32 números posibles.

La primera I nos llevará a la mitad izquierda de nuestro rango de números 2015 a 2046, es decir, de 2015 a 2030, 16 números posibles.

La segunda I nos llevará a la mitad izquierda de nuestro rango de números 2015 a 2030, es decir, de 2015 a 2022, 8 números posibles.

La sexta D nos llevará a la mitad derecha de nuestro rango de números 2015 a 2022, es decir, de 2019 a 2022, 4 números posibles.

La tercera I nos llevará a la mitad izquierda de nuestro rango de números 2019 a 2022, es decir, de 2019 a 2020, 2 números posibles.

La última D nos llevará a la mitad derecha de nuestro rango de números 2019 a 2020, es decir, al 2020, que es el destino final.

Por lo tanto, terminamos en 2020, que está en la fila 11 del árbol.