Problema de la Semana

Problema D y Solución

Montones y Montones

Problema

Virat tiene una gran colección de billetes de \$2 y de \$5. Con ellos hace montones que en total valen \$100. Cada montón tiene al menos un billete de \$2, al menos un billete de \$5, y no tiene billetes de otra denominación. Si cada montón tiene una cantidad distinta de billetes de \$2, ¿Cuál es el máximo número de montones que puede crear Virat?

Solución

Consideremos un montón de billetes con un valor total de \$100 que incluye x billetes de \$2 y y billetes de \$5. Los billetes de \$2 valen en total $\$2x$ mientras que los de \$5 suman $\$5y$, y entonces $2x + 5y = 100$.

Determinar la cantidad posible de montones es equivalente a determinar la cantidad de parejas (x, y) de enteros con $x \geq 1$, con $y \geq 1$ y con $2x + 5y = 100$ o equivalentemente $5y = 100 - 2x$. (Debemos tener $x \geq 1$ y $y \geq 1$ porque cada montón incluye al menos un billete de \$2 y uno de \$5.)

Como $x \geq 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 2x &\geq 2 \\ 2x + 98 &\geq 100 \\ 98 &\geq 100 - 2x \end{aligned}$$

Esto se puede reescribir como $100 - 2x \leq 98$.

Además, como $5y = 100 - 2x$, esto se vuelve $5y \leq 98$.
Esto significa que $y \leq \frac{98}{5} = 19{,}6$. Como y es un entero, entonces $y \leq 19$.

Observa que $5y = 100 - 2x$, entonces el lado derecho de esta igualdad es la diferencia entre dos números pares y por lo tanto es par. Esto significa que $5y$ (el lado izquierdo) es par, lo que significa que y debe ser par.

Como y es par, $y \geq 1$ y $y \leq 19$, entonces los valores posibles de y son 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Cada uno de estos valores da una pareja (x, y) que satisface la ecuación $2x + 5y = 100$. Estas parejas ordenadas son:

$(x, y) = (45, 2), (40, 4), (35, 6), (30, 8), (25, 10), (20, 12), (15, 14), (10, 16), (5, 18)$

Por lo tanto, vemos que el máximo número de montones que Virat puede tener es 9.