Le CEMI à la maison

7e et 8e année - le jeudi 21 mai 2020
Concours - Jour 3

La ressource d'aujourd'hui présente une question de l'un des concours de mathématiques 2020 du CEMI récemment publié, ainsi qu'une question tirée de l'un de nos concours passé.

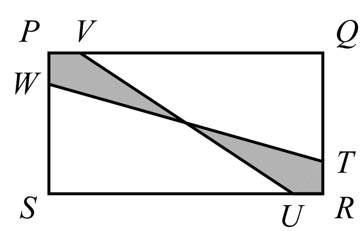
Concours Gauss 2011, nº13

Cinq enfants viennent de manger. Cédric a mangé plus que Max. Ben a mangé moins que Karine. Karine a mangé moins que Max, mais plus que Tanya. Qui a mangé la 2$^{\text{e}}$ plus grande quantité de nourriture ?

(A) Ben **(B)** Cédric **(C)** Karine **(D)** Max **(E)** Tanya

Concours Gauss 2020, nº23

Dans la figure ci-contre, le rectangle $PQRS$ a $PS = 2$ et $PQ = 4$. De plus, les points T, U, V et W sont situés de manière que $RT = RU = PW = PV = a$. Sachant que VU et WT passent par le centre du rectangle, pour quelle valeur de a la région ombrée aurait-elle une aire égale à $\frac{1}{8}$ de celle du rectangle $PQRS$?



(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{5}$

(D) $\frac{1}{3}$ **(E)** $\frac{1}{4}$

Plus d'infos :

Consulte la page du CEMI à la maison lundi, le 25 mai, pour les solutions aux problèmes de Concours Jour 3.

Le CEMI à la maison

7e et 8e année - le jeudi 21 mai 2020
Concours jour 3 - solutions

Voici les solutions aux deux problèmes de concours.

Concours Gauss 2011, nº 13

Cinq enfants viennent de manger. Cédric a mangé plus que Max. Ben a mangé moins que Karine. Karine a mangé moins que Max, mais plus que Tanya. Qui a mangé la 2ᵉ plus grande quantité de nourriture ?

(A) Ben **(B)** Cédric **(C)** Karine **(D)** Max **(E)** Tanya

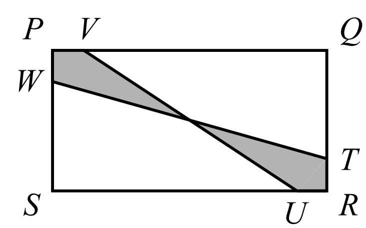
Solution :

Karine a mangé moins que Max qui a mangé moins que Cédric.
Or, Ben et Tanya ont mangé moins que Karine.
Donc, Max a mangé la 2ᵉ plus grande quantité de nourriture.

Réponse: (D)

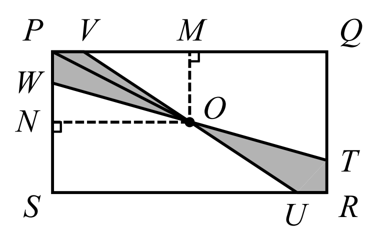
Concours Gauss 2020, nº 23

Dans la figure ci-contre, le rectangle $PQRS$ a $PS = 2$ et $PQ = 4$. De plus, les points T, U, V et W sont situés de manière que $RT = RU = PW = PV = a$. Sachant que VU et WT passent par le centre du rectangle, pour quelle valeur de a la région ombrée aurait-elle une aire égale à $\frac{1}{8}$ de celle du rectangle $PQRS$?



(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{5}$
(D) $\frac{1}{3}$ **(E)** $\frac{1}{4}$

Solution :



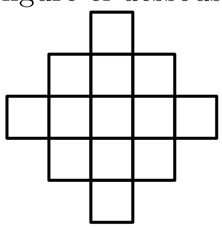
On commence d'abord en reliant le centre du rectangle, O, au sommet P.
Au centre du rectangle O, on élève une perpendiculaire OM au côté PQ et on trace une perpendiculaire ON au côté PS.
Puisque O est le centre du rectangle, alors M est le milieu du côté PQ, on a donc $PM = \frac{1}{2} \times 4 = 2$.
De même, puisque N est le milieu du côté PS, alors $PN = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.
Le triangle PVO a pour base $PV = a$ et pour hauteur $OM = 1$ et a donc une aire égale à $\frac{1}{2} \times a \times 1 = \frac{1}{2}a$.
Le triangle PWO a pour base $PW = a$ et pour hauteur $ON = 2$ et a donc une aire égale à $\frac{1}{2} \times a \times 2 = a$.
Donc, les aires des deux triangles ont une somme égale à l'aire du quadrilatère $PWOV$, soit $\frac{1}{2}\,a + a = \frac{3}{2}\,a$.
De même, on peut montrer que le quadrilatère $RTOU$ a aussi une aire égale à $\frac{3}{2}a$. La région ombrée a donc une aire totale de $2 \times \frac{3}{2}a = 3a$.
Puisque le rectangle $PQRS$ a une aire égale à $4 \times 2 = 8$ et que l'aire de la région ombrée est égale à $\frac{1}{8}$ l'aire du rectangle $PQRS$, alors $3a = \frac{1}{8} \times 8$ ou $3a = 1$, d'où $a = \frac{1}{3}$.

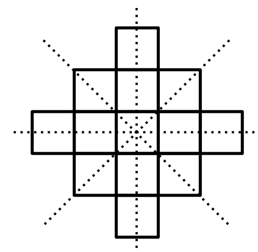
Réponse: (D)

Le CEMI à la maison

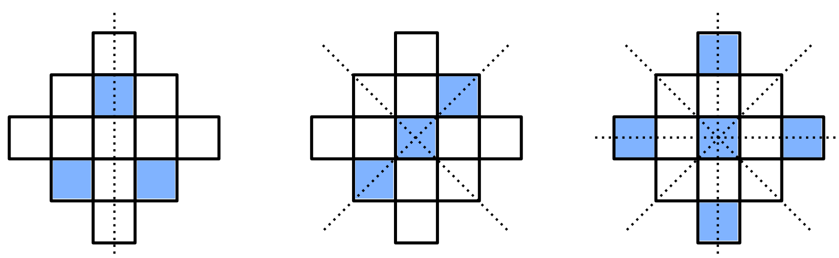
7e et 8e année - le vendredi 22 mai 2020
Miroir, Miroir

Treize carrés identiques sont disposés de manière à créer le dallage ci-dessous à gauche. Dans l'activité d'aujourd'hui, on va créer des dallages symétriques en ombrant certains des carrés du dallage. Remarque que le dallage dont aucun carré n'est ombré a exactement quatre axes de symétrie tel qu'indiqué dans la figure ci-dessous à droite.





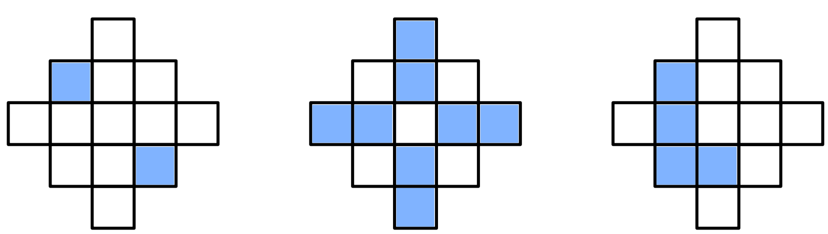
Dans chacun des dallages ci-dessous, certains des carrés sont ombrés et on voit tous les axes de symétrie de chaque dallage. Remarque que le dallage le plus à droite a comme axes de symétrie les quatre axes de symétrie du dallage originale tandis que les deux autres dallages n'ont qu'un ou deux axes de symétrie.



Problème 1 : Combien y a-t-il de dallages différents dont exactement deux carrés sont ombrés et qui ont exactement deux axes de symétrie ? *Sers-toi des dallages vierges sur la page suivante.*

Problème 2 : Est-il possible de créer un dallage qui a exactement trois axes de symétrie ? Si oui, dessine-en un. Sinon, explique pourquoi cela n'est pas possible. *Tu peux ombrer autant de carrés dans ton dallage que nécessaire.*

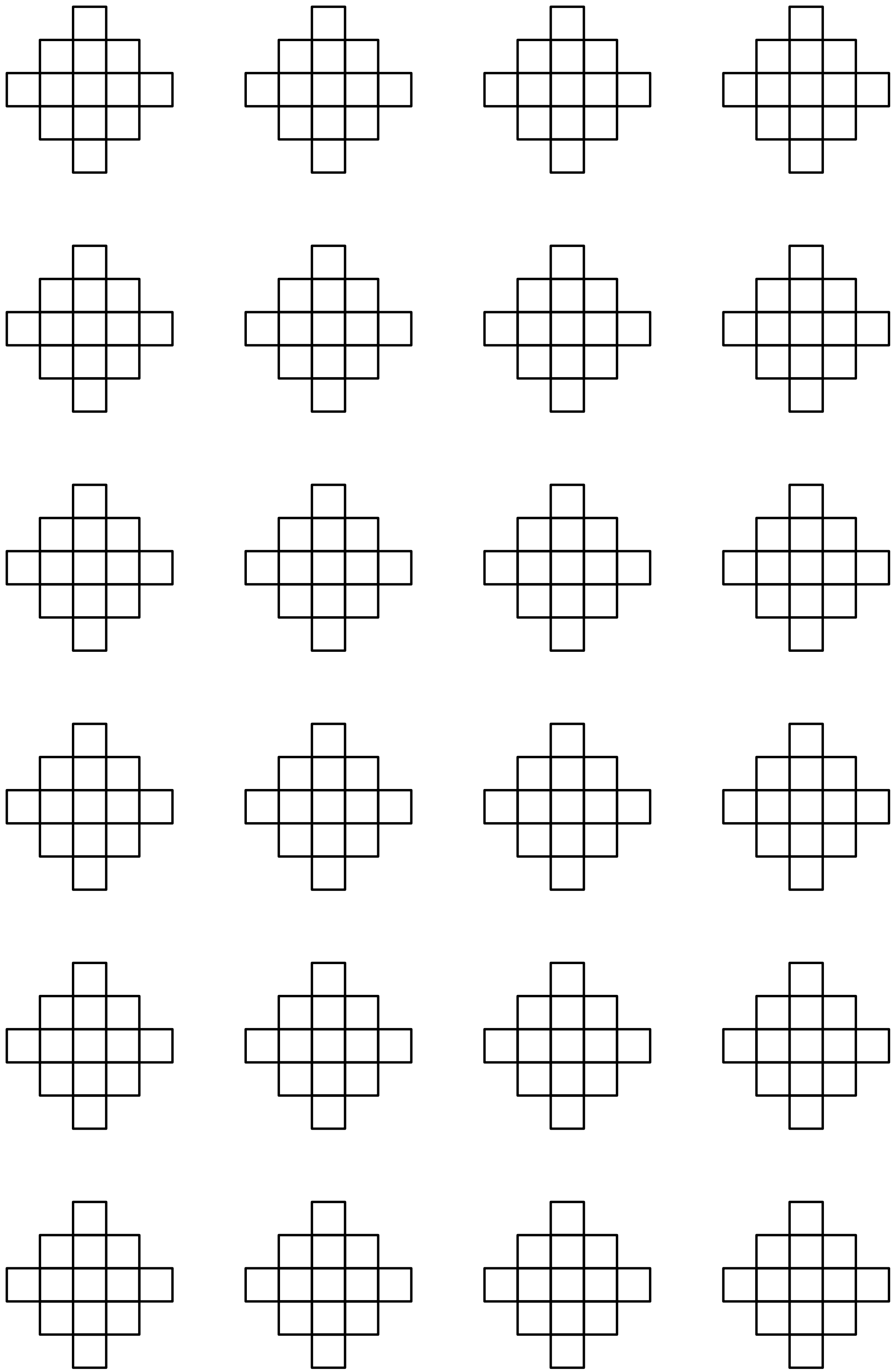
Problème 3 : Un dallage présente une symétrie de rotation lorsqu'il demeure invariant par une rotation inférieure à 360 degrés autour de son centre. Parmi les trois dallages ci-dessous, seuls les deux premiers présentent une symétrie de rotation.



Combien y a-t-il de dallages différents contenant exactement trois carrés ombrés qui présentent une symétrie de rotation et qui ont au moins un axe de symétrie ?

Plus d'infos :

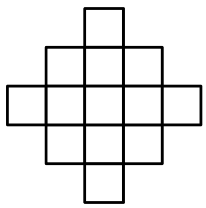
Consulte la page du CEMI à la maison lundi, le 25 mai, pour les solutions à ces problèmes.

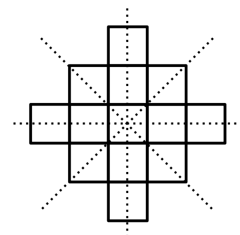


CEMC at Home

Grade 7/8 - Friday, May 22, 2020
Mirror, Mirror - Solution

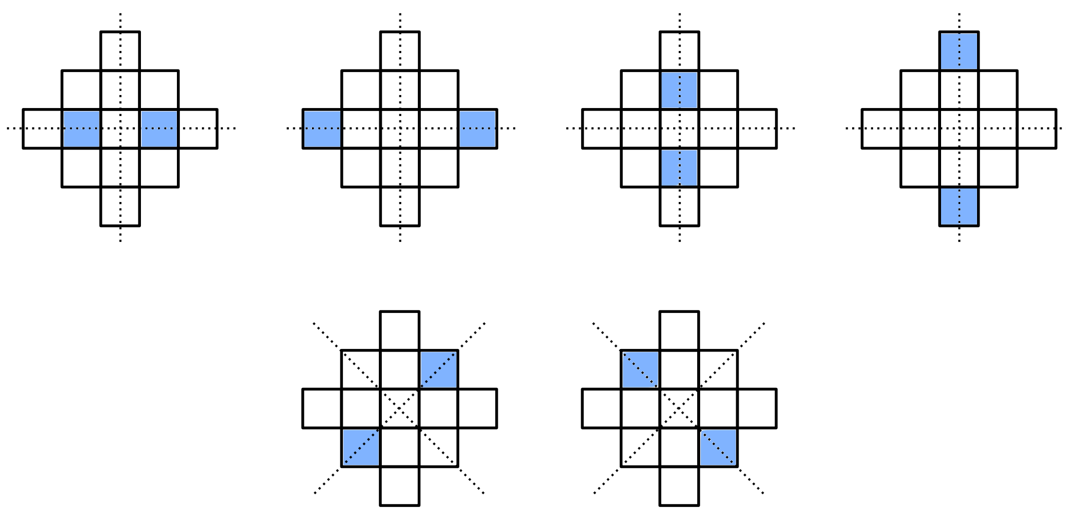
Thirteen identical squares are arranged as shown in the figure below on the left. Notice that the design with no shaded squares has exactly four lines of symmetry, as shown in the image below on the right.





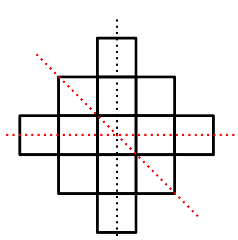
Problem 1: How many different designs are there with exactly two shaded squares that have exactly two lines of symmetry?

Solution: There are six different designs. They are shown below.

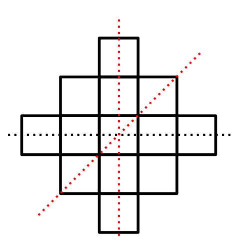


Problem 2: Is it possible to create a design that has exactly three lines of symmetry? If so, draw one. If not, explain why this is not possible.

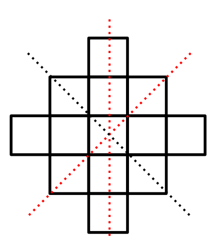
Solution: It is not possible. First, we notice that any group of three of the four lines of symmetry must include a diagonal line *and* a horizontal or vertical line. The four possible combinations of three lines of symmetry are shown below.



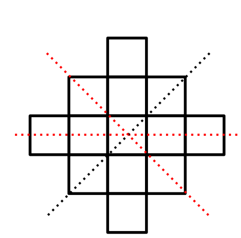
Group 1



Group 2



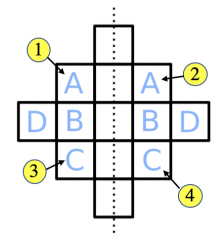
Group 3



Group 4

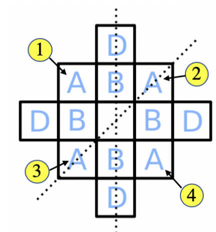
It turns out that any design that has a diagonal line of symmetry *and* a vertical or horizontal line of symmetry must actually have all four lines of symmetry. (This means it cannot be possible to create a design with exactly three lines of symmetry.)

Suppose we have a design that has the three lines of symmetry in Group 2. We will use letters to show the squares that must have the same shading, based on the lines of symmetry. For example, the squares marked with the letter "A" must be either all shaded, or all not shaded.



Since the design has the vertical line of symmetry, the design must have the symmetry indicated in the top image on the right.

Since the design *also* has the diagonal line of symmetry from the lower left corner to the upper right corner, the design must have the additional symmetry shown in the bottom image on the right.

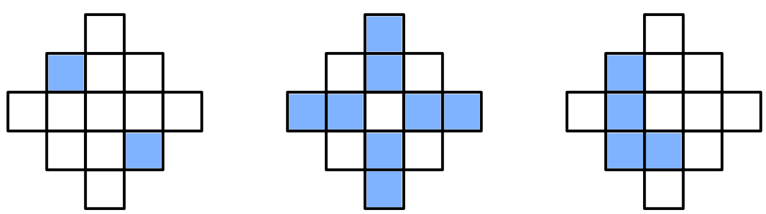


For example, the vertical line of symmetry tells us that the squares marked with 1 and 2 must look the same and that the squares marked with 3 and 4 must look the same. The diagonal line of symmetry tells us that the squares marked with 1 and 4 must look the same. Putting this together, we see that all four of these squares must look the same and so are marked with the same letter, A.

From this, we can see that the design actually has all four lines of symmetry.

This means any design with these two lines of symmetry will actually have all four lines of symmetry. This argument works for Group 2 and Group 3. The argument for Group 1 and Group 4 is similar.

Problem 3: A design has rotational symmetry if we can rotate it about its centre less than a full turn and produce a design that looks identical to the original design. The first two designs below have rotational symmetry but the last design does not.



How many different designs are there with exactly three shaded squares that have rotational symmetry and at least one line of symmetry?

Solution: There are six different designs. They are shown below.