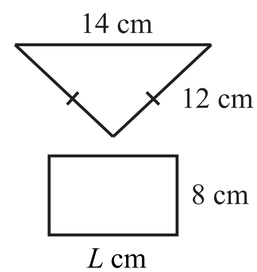
Le CEMI à la maison

4e, 5e, 6e année - le lundi 11 mai 2020
Concours - Jour 2

La ressource d'aujourd'hui présente une question de l'un des concours de mathématiques 2020 du CEMI récemment publiés, ainsi qu'une question tirée de l'un de nos concours passés.

Concours Gauss 2020, nº9

Dans la figure ci-contre, le périmètre du triangle est égal au périmètre du rectangle. Quelle est la longueur (L) du rectangle ?



(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 11
(D) 14 **(E)** 15

Concours Gauss 2017 nº14

Lorsqu'il est 13 h 00 à Toronto (Ont.), il est 14 h 30 à Gander (T.-N.). Un vol de Toronto à Gander dure 2 heures et 50 minutes. Sachant que le départ est à 15 h 00 (heure de Toronto), à quelle heure (heure de Gander) l'avion atterrit-il à Gander ?

(A) 19 h 20 **(B)** 17 h 00 **(C)** 18 h 20 **(D)** 17 h 20 **(E)** 20 h 50

Plus d'infos :

Consulte la page du CEMI à la maison jeudi, le 21 mai, pour les solutions aux problèmes de Concours Jour 2.

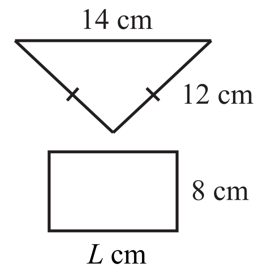
Le CEMI à la maison

4e, 5e, 6e année - le lundi 11 mai 2020
Concours jour 2 - solutions

Voici les solutions aux deux problèmes de concours. La solution du premier problème est accompagnée d'une vidéo.

Concours Gauss 2020, nº9

Dans la figure ci-contre, le périmètre du triangle est égal au périmètre du rectangle. Quelle est la longueur (L) du rectangle ?



(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 11
(D) 14 **(E)** 15

Solution :

Avant de pouvoir résoudre ce problème, tu dois te rappeler que le périmètre signifie la distance autour de l'extérieur d'une forme, et que lorsqu'une forme a un trait sur ces deux côtés, cela indique que les deux côtés sont de la même longueur. Cela signifie que le triangle a deux côtés de 12 cm de long et un de 14 cm de long. Son périmètre est de $12 + 12 + 14 = 38$ cm. Le rectangle a également le même périmètre. On sait que deux des côtés du rectangle ont une longueur de 8 cm, donc ensemble ils donnent 16 cm. Les deux autres côtés combinés sont donc de $38 - 16 = 22$ cm. Comme ces deux côtés sont de longueur égale, la valeur de L doit être de $22 \div 2 = 11$.

RÉPONSE: (C)

Vidéo
Clique le lien suivant pour une discussion sur la solution à ce premier problème :
https://youtu.be/wmLK4eFEcpo

Concours Gauss 2017, nº14

Lorsqu'il est 13 h 00 à Toronto (Ont.), il est 14 h 30 à Gander (T.-N.). Un vol de Toronto à Gander dure 2 heures et 50 minutes. Sachant que le départ est à 15 h 00 (heure de Toronto), à quelle heure (heure de Gander) l'avion atterrit-il à Gander ?

(A) 19 h 20 **(B)** 17 h 00 **(C)** 18 h 20 **(D)** 17 h 20 **(E)** 20 h 50

Solution :

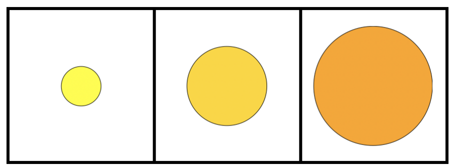
Puisqu'il est 14 h 30 à Gander lorsqu'il est 13 h 00 à Toronto, l'heure de Gander est 1 heure et 30 minutes en avance de l'heure de Toronto.
Un vol qui part à 15 h 00 (heure de Toronto) et qui dure 2 heures et 50 minutes arrive à Gander à 17 h 50 (heure de Toronto).
Or, l'heure de Gander a une heure et 30 minutes d'avance.
L'avion arrive donc à 19 h 20 (heure de Gander).

RÉPONSE: (A)

Le CEMI à la maison

4e, 5e, 6e année - le mardi 12 mai 2020
Déplacer des disques

Trois disques, chacun d'une taille différente, sont disposés dans une grille tel qu'illustré ci-dessous. Chaque disque commence dans sa propre case, les disques étant disposés par ordre croissant de taille, de sorte que le plus petit disque se trouve dans la case la plus à gauche et le plus grand dans la case la plus à droite.

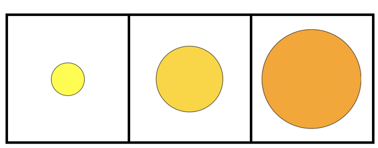


Ton but est d'inverser l'ordre des disques, de sorte que le disque le plus petit se trouve dans la case la plus à droite et le disque le plus grand dans la case la plus à gauche, cependant, tu dois suivre certaines règles lorsque tu déplaces les disques :

- À tout moment, chaque case de la grille ne doit contenir qu'un seul disque, qu'une seule pile de disques ou être vide.
- Un disque peut être déplacé au-dessus d'un autre disque de plus grande taille, mais pas au-dessus d'un disque plus petit.
- Un seul disque peut être déplacé à gauche ou à droite dans n'importe quelle case vide.
- Les disques ne peuvent être déplacés que d'une case à la fois.
  Par exemple, un disque ne peut pas être déplacé directement de la case la plus à gauche à la case la plus à droite sans passer par la case du milieu.
- Un seul disque peut être déplacé à la fois. S'il y a une pile de disques sur une case de la grille, alors seul le disque supérieur de la pile peut être déplacé et non la pile entière.

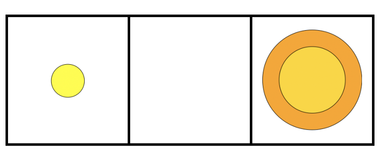
Par exemple, voici trois déplacements exécutés l'un après l'autre en suivant les règles :

Début



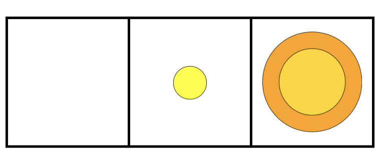
Tu peux soit déplacer le petit disque au-dessus du disque moyen ou déplacer le disque moyen au-dessus du grand disque.

Après le premier déplacement



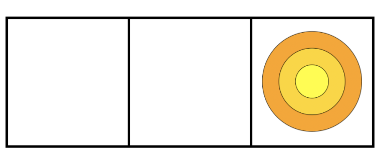
Tu ne peux plus déplacer la pile des deux disques. Tu peux seulement replacer le disque moyen dans la case du milieu ou déplacer le petit disque vers le milieu.

Après le deuxième déplacement



Tu ne peux pas déplacer la pile des deux disques. Tu ne peux pas déplacer le disque moyen, car il irait au-dessus du petit disque.

Après le troisième déplacement

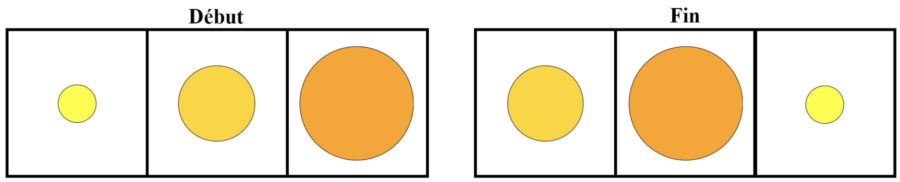


Tu peux seulement déplacer le petit disque.

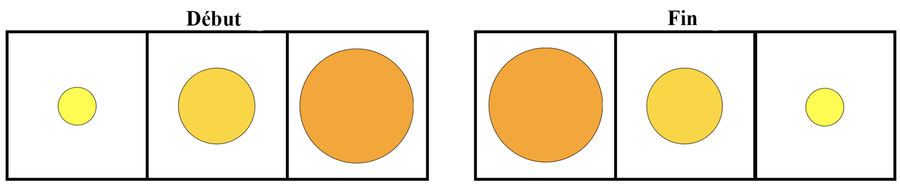
Voir la page suivante pour des problèmes sur lesquels réfléchir pendant ton exploration.

Problèmes :

1. Décris une séquence de déplacements qui permet aux trois disques de passer de la disposition de départ, présentée ci-dessous à gauche, à la disposition de droite.



2. Décris une séquence de déplacements qui permet aux trois disques de passer de la disposition de départ, présentée ci-dessous à gauche, à la disposition de droite, qui présente les disques dans l'ordre inverse.



   Résoudre ce problème est le but principal de cette activité !

3. Supposons maintenant que tu commences avec quatre disques au lieu de trois. Comme auparavant, ils sont tous de différentes tailles et disposés par ordre croissant de taille, le plus petit étant le disque le plus à gauche et le plus grand à droite. Comme dans la question 2., tu veux renverser l'ordre des disques, en suivant les mêmes règles. Comment peux-tu utiliser la solution trouvée pour déplacer trois disques (question 2.) afin de résoudre le problème de déplacer quatre disques ?
4. En se basant sur la question précédente, comment peux-tu utiliser la solution trouvée pour quatre disques afin de solutionner un casse-tête similaire de cinq disques ? De façon générale, si tu sais comment résoudre ce casse-tête pour un certain nombre de disques, comment peux-tu utiliser tes connaissances afin de résoudre un casse-tête similaire avec un disque supplémentaire ?

Extension : Supposons que l'on ajoute une règle supplémentaire : les piles ne peuvent pas contenir plus de deux disques à la fois. Penses-tu qu'il existe toujours une solution au casse-tête des trois disques, de la question 2. ? Penses-tu qu'il existe toujours une solution au casse-tête similaire de quatre disques ? Explique tes réponses.

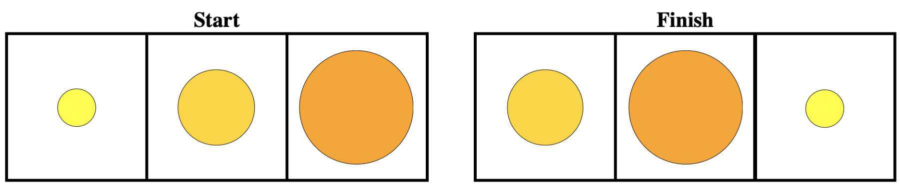
Plus d'infos :

Consulte la page internet du CEMI à la maison mardi, 19 mai, pour une solution à Déplacer des disques.

CEMC at Home

Grade 4/5/6 - May 12, 2020
Shifting Discs - Solution

1. Describe a sequence of moves that takes the three discs from the starting arrangement shown below on the left to the arrangement shown below on the right.

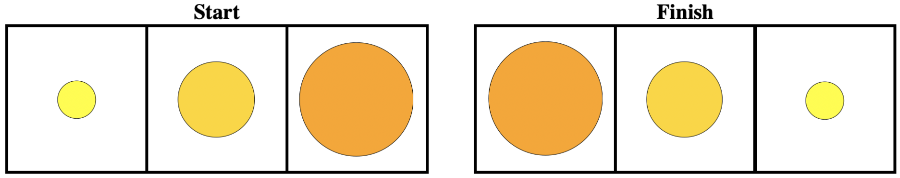


Solution:

The table below shows one possible sequence of moves that produces the correct final arrangement of the discs.

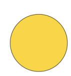
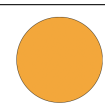
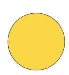
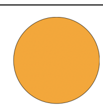
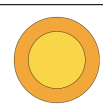
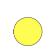
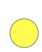
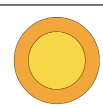
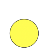
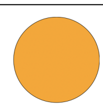
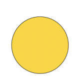
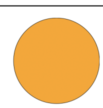
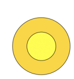
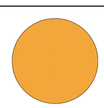
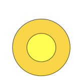
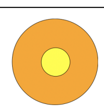
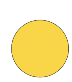
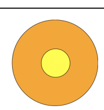
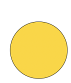
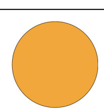
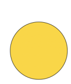
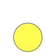
Left Position	Middle Position	Right Position	Explanation
			Starting position
			Move the small disc to the right
			Move the small disc to the right
			Move the medium disc to the left
			Move the small disc to the left
			Move the small disc to the left
			Move the large disc to the left
			Move the small disc to the right
			Move the small disc to the right

2. Describe a sequence of moves that takes the three discs from the starting arrangement shown below on the left to the arrangement shown below on the right, which has the discs in the reverse order.



Solution:

We start by following the moves from 1. to get the discs into the arrangement medium, large, small. Then we continue as shown the table below to get the final arrangement with the discs reversed. Note that we sometimes do more than one move in each row.

Left Position	Middle Position	Right Position	Explanation
			Starting position
			Final position from 1.
			Move the medium disc to the right
			Move the small disc to the left, **twice**
			Move the medium disc to the right
			Move the small disc to the right, **twice**
			Move the large disc to the left
			Move the small disc to the left, **twice**
			Move the medium disc to the left
			Move the small disc to the right, **twice**

3. Now suppose you start with four discs instead of three. Just like before, they are all different sizes, and arranged in increasing order of size, with the smallest disc on the left and largest disc on the right. As in 2., you want to reverse the order of the discs, following the same rules. How can you use your solution for moving three discs from 2. to come up with a solution for moving four discs?

   Solution:

   Let's label the discs 1, 2, 3, and 4, from smallest to largest. Using this labelling we are tasked with moving the discs from the starting configuration shown below on the left, to the final configuration shown below on the right.

1	2	3	4

4	3	2	1

   We illustrate our solution in the table below. Each row of the table shows where each of the four discs (1, 2, 3, and 4) are located in the grid at each stage. If more than one disc is in the same square in the grid at some time, then these discs will be in a stack.

   We start our solution by ignoring disc 1 and rearranging discs 2, 3 and 4 using the method from the solution to problem 2 to reverse them: 1 2 3 4 becomes 1 4 3 2.

Position A	Position B	Position C	Position D	Explanation
1	2	3	4	Starting position
1	4	3	2	Problem 2. with discs 2, 3, and 4
	4	3	1, 2	Move disc 1 all the way to the right
4	3		1, 2	Move disc 4, then disc 3 to the left
4	1, 3		2	Move disc 1 to the left, twice
4	1, 3	2		Move disc 2 to the left
4	3	2	1	Move disc 1 all the way to the right

4. Building on the previous question, how can you use the solution for four discs to get a solution for the similar puzzle for five discs? In general, if you know how to solve the puzzle for a certain number of discs, how can you use it to solve the similar puzzle with one more disc added?

   Solution:

   Once we have a set of moves to solve the four-disc puzzle, such as given above, we can solve the five-disc version of the puzzle using the same type of strategy as in the solution to problem 3. We number the discs 1, 2, 3, 4, and 5, from smallest to largest, and illustrate the solution in the table below.

Pos. A	Pos. B	Pos. C	Pos. D	Pos. E	Explanation
1	2	3	4	5	Starting position
1	5	4	3	2	Problem 3. with discs 2, 3, 4, and 5
	5	4	3	1, 2	Move disc 1 all the way to the right
5	4	3		1, 2	Move disc 5, then disc 4, then disc 3 to the left
5	4	1, 3		2	Move disc 1 to the left, twice
5	4	1, 3	2		Move disc 2 to the left
5	4	3	2	1	Move disc 1 all the way to the right

We can use the same strategy to solve the puzzle for any larger number of discs, too! Can you see how to do this? We can always use our solution to the previous puzzle as the first step in our solution to the next puzzle. How can you use the solution to the five-disc puzzle to get a solution to the six-disc puzzle? How can you get from the six-disc puzzle to the seven-disc puzzle?

Extension: Suppose we add one more rule: stacks cannot have more than two discs in them at any time. Do you think there is still a solution to the puzzle with three discs from 2.? Do you think there is still a solution to the similar puzzle with four discs? Explain your answers.

Solution:

It turns out that it is not possible to solve the three-disc puzzle with this new rule in place. Our solution to the three-disc puzzle (shown earlier) used a stack of three discs, but how can we be sure that there isn't some *other* sequence of moves that avoids any stacks of three?

To see why a stack of three discs is unavoidable, we note that we must start with the discs in the order $1, 2, 3$ and need to move disc 3 all the way to the left.

In order to move disc 3 at all, we must first arrange the discs as follows: | 1, 2 | | 3 |.

Then we can move disc 3 to the left one place: | 1, 2 | 3 | |.

Now, in order to move disc 3 to the left again, we need to somehow move discs 1 and 2 past disc 3 to the right. This cannot be done without forming a stack of three at some point. Can you see why? Here is the idea:

In order to have a chance at moving disc 2, we first need to move disc 1 all the way to the right: | 2 | 3 | 1 |. The problem is that there is now no way to move disc 2 past disc 3 without first moving disc 1 off the rightmost square. The only way to have disc 2 occupy the rightmost square after this point is to have disc 2 and disc 1 somehow "pass" each other, over disc 3. The only way to make this happen is to create a stack of all three discs in the middle (which is not allowed).

On the other hand, it *is* possible to solve the four-disc puzzle with this new rule in place. One way to do it is illustrated in the table below:

Pos. A	Pos. B	Pos. C	Pos. D	Explanation
1	2	3	4	Starting position
	2	3	1, 4	Move disc 1 all the way to the right
2	3		1, 4	Move disc 2, then disc 3 to the left
2	1, 3		4	Move disc 1 onto disc 3
2	1, 3	4		Move disc 4 to the left
2	3	4	1	Move disc 1 all the way to the right
	3	2, 4	1	Move disc 2 onto disc 4
3		2, 4	1	Move disc 3 to the left
2, 3		4	1	Move disc 2 all the way to the left
2, 3	4		1	Move disc 4 to the left
3	4	2	1	Move disc 2 two places right
3	1, 4	2		Move disc 1 two places left
3	1, 4		2	Move disc 2 to the right
3	4		1, 2	Move disc 1 all the way to the right
	4	3	1, 2	Move disc 3 two places right
4	3		1, 2	Move disc 4, then disc 3 to the left
4	1, 3		2	Move disc 1 two places left
4	1, 3	2		Move disc 2 to the left
4	3	2	1	Move disc 1 all the way to the right