Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatia 2024

le jeudi 4 avril 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 5 avril 2024
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Sur les 4050 camions qui ont été vendus, 32 % étaient blancs. Donc, $\frac{32}{100} \cdot 4050 = 1296$ camions blancs ont été vendus.

(b) *Solution 1*

Sur les 4050 camions qui ont été vendus, 24 % étaient gris. Donc, $\frac{24}{100} \cdot 4050 = 972$ camions gris ont été vendus.

Puisque $\frac{1}{4}$ des camions gris vendus étaient électriques, alors $\frac{1}{4} \cdot 972 = 243$ camions vendus étaient à la fois gris et électriques.

Solution 2

Puisque 24 % des camions vendus étaient gris et que $\frac{1}{4}$ de ceux-ci étaient électriques, alors $\frac{24}{100} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{100}$ (soit 6 %) des camions qui ont été vendus étaient à la fois gris et électriques.

Donc, sur les 4050 camions vendus, $\frac{6}{100} \cdot 4050 = 243$ étaient à la fois gris et électriques.

(c) *Solution 1*

Sur les 4050 camions vendus, 44 % étaient noirs. Donc, $\frac{44}{100} \cdot 4050 = 1782$ camions noirs ont été vendus.

Donc, le nombre total de camions noirs, vendus et invendus, est égal à $1782+k$ et le nombre total de camions, vendus et invendus, est égal à $4050 + k$.

Puisque 46 % de tous les camions, vendus et invendus, étaient noirs, alors $\frac{1782 + k}{4050 + k} = \frac{46}{100}$.

On résout cette équation pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{1782 + k}{4050 + k} &= \frac{46}{100} \\
\frac{1782 + k}{4050 + k} &= \frac{23}{50} \\
50(1782 + k) &= 23(4050 + k) \\
89\,100 + 50k &= 93\,150 + 23k \\
27k &= 4050 \\
k &= 150
\end{aligned}$$

Donc, il y avait 150 camions invendus, tous noirs.

Solution 2

Sur les 4050 camions vendus, 44 % étaient noirs. Donc, 100 % − 44 % = 56 % camions n'étaient pas noirs.

Donc, $\frac{56}{100} \cdot 4050 = 2268$ camions vendus n'étaient pas noirs.

Puisque tous les camions invendus étaient noirs, il y avait donc 2268 camions, vendus et invendus, qui n'étaient pas noirs.

Puisque 46 % de tous les camions, vendus et invendus, étaient noirs, alors 100 % − 46 % = 54 % de tous les camions, vendus et invendus, n'étaient pas noirs.

Le nombre total de camions, vendus et invendus, est égal à $4050+k$ et 54 % de ces camions n'étaient pas noirs. Donc, $\frac{2268}{4050 + k} = \frac{54}{100}$.

On résout cette équation pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{2268}{4050+k} &= \frac{54}{100}\\
\frac{2268}{4050+k} &= \frac{27}{50}\\
50(2268) &= 27(4050+k)\\
113\,400 &= 109\,350+27k\\
4050 &= 27k\\
k &= 150
\end{aligned}$$

Donc, il y avait 150 camions invendus, tous noirs.

2. (a) On a $f(132) = 132 + 1 + 3 + 2 = 138$.

(b) Soit n égal à l'entier strictement positif de trois chiffres abc.
Donc, $f(n) = f(abc) = 100a + 10b + c + a + b + c = 101a + 11b + 2c$.
Puisque $f(n) = 175$, alors $101a + 11b + 2c = 175$.
On ne peut avoir $a \geq 2$ car sinon on aurait $101a \geq 202$, ce qui est trop grand. Remarquons que $11b + 2c$ est toujours au moins 0.
Donc, $a < 2$, ce qui signifie que $a = 1$.
Lorsque $a = 1$, on obtient $101 + 11b + 2c = 175$ ou $11b + 2c = 74$.
On ne peut avoir $b \geq 7$ car sinon on aurait $11b \geq 77$, ce qui est trop grand. Remarquons que $2c$ est toujours au moins 0.
Donc, $b < 7$. Si $b = 6$, alors $66 + 2c = 74$ ou $2c = 8$, donc $c = 4$.
Si $b \leq 5$, alors $11b \leq 55$. Donc, $2c \geq 74 - 55 = 19$, ce qui n'est pas possible puisque $c \leq 9$.
On peut confirmer que $f(164) = 164 + 1 + 6 + 4 = 175$. Donc, $n = 164$.

(c) Soit n égal à l'entier strictement positif de trois chiffres pqr.
Donc, $f(pqr) = 100p + 10q + r + p + q + r$. On a donc $101p + 11q + 2r = 204$.
Si $p \geq 3$, alors $101p \geq 303$, donc $p = 1$ ou $p = 2$.

Si $p = 1$, alors $101 + 11q + 2r = 204$ ou $11q + 2r = 103$.
Puisque $r \leq 9$, alors $2r \leq 18$, donc $11q \geq 103 - 18 = 85$.
Donc, $q = 8$ ou $q = 9$.
Si $q = 8$, alors $88 + 2r = 103$ ou $2r = 15$, ce qui est impossible puisque r est un entier.
Si $q = 9$, alors $99 + 2r = 103$ ou $2r = 4$, donc $r = 2$.
Dans ce cas, $n = 192$ et on peut confirmer que $f(192) = 192 + 1 + 9 + 2 = 204$.

Si $p = 2$, alors $202 + 11q + 2r = 204$ ou $11q + 2r = 2$.
Donc, l'équation $11q + 2r = 2$ admet une seule solution, soit $q = 0$ et $r = 1$.
Dans ce cas, $n = 201$ et on peut confirmer que $f(201) = 201 + 2 + 0 + 1 = 204$.
Donc, si $f(n) = 204$, alors les valeurs possibles de n sont 192 et 201.

3. (a) Pour déterminer les coordonnées de F, on trouve le point d'intersection de la droite passant par A et C et de la droite passant par B et E.
La droite passant par $A(0, 0)$ et $C(12, 12)$ a une pente de $\frac{12-0}{12-0} = 1$.
Puisqu'elle passe par $(0, 0)$, cette droite a pour équation $y = x$.
La droite passant par $B(12, 0)$ et $E(0, 6)$ a une pente de $\frac{6-0}{0-12} = -\frac{1}{2}$.
Puisqu'elle passe par $(0, 6)$, cette droite a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + 6$.
Pour déterminer l'abscisse du point d'intersection, F, on résout $x = -\frac{1}{2}x + 6$, d'où $\frac{3}{2}x = 6$ ou $3x = 12$, soit $x = 4$.
Puisque F est situé sur la droite d'équation $y = x$, alors F a pour coordonnées $(4, 4)$.

(b) *Solution 1*
On considère que le triangle AEF a pour base $AE = 6$.
Donc, la hauteur du triangle AEF est égale à la distance perpendiculaire de F à AE. Cette distance est égale à 4, soit l'abscisse de F.
L'aire du triangle AEF est donc égale à $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.

Solution 2
On peut déterminer l'aire du triangle AEF en soustrayant l'aire du triangle AFB de l'aire du triangle AEB.
On considère que le triangle AFB a pour base $AB = 12$.
Donc, la hauteur du triangle AFB est égale à la distance perpendiculaire de F à AB. Cette distance est égale à 4, soit l'ordonnée de F.
L'aire du triangle AFB est donc égale à $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24$.
L'aire du triangle AEB est égale à $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36$. Donc, l'aire du triangle AEF est égale à $36 - 24 = 12$.

(c) Pour déterminer l'aire du quadrilatère $GDEF$, on va soustraire l'aire du triangle AEF et l'aire du triangle CDG de l'aire du triangle ACD.
Pour déterminer l'aire du triangle CDG, il nous faut les coordonnées de G.
On peut trouver les coordonnées de G en déterminant le point d'intersection entre la droite passant par A et C et le cercle de diamètre EB.
Donc, on doit d'abord déterminer l'équation du cercle.
Puisque le cercle a pour diamètre EB, alors son centre est le milieu de EB, soit $\left(\frac{0+12}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$ ou $(6, 3)$.
La longueur du diamètre est $EB = \sqrt{(12-0)^2 + (0-6)^2}$ ou $EB = \sqrt{180}$, soit $EB = 6\sqrt{5}$.
Donc, le cercle a pour rayon $r = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ et pour équation $(x-6)^2+(y-3)^2 = (3\sqrt{5})^2$ ou $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 45$.
Soit g l'abscisse du point G.
Puisque G est situé sur la droite d'équation $y = x$, alors G a pour coordonnées (g, g).
Puisque le point G est également situé sur le cercle, alors ses coordonnées vérifient l'équation du cercle.
On a donc $(g-6)^2 + (g-3)^2 = 45$, que l'on résout pour obtenir :

$$\begin{aligned} g^2 - 12g + 36 + g^2 - 6g + 9 &= 45 \\ 2g^2 - 18g + 45 &= 45 \\ 2g^2 - 18g &= 0 \\ 2g(g-9) &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $g = 0$ ou $g = 9$.
Puisque A et G sont distincts, alors $g = 9$ et G a donc pour coordonnées $(9, 9)$.
On peut maintenant déterminer l'aire du triangle CDG.
On considère que le triangle CDG a pour base $CD = 12$.
Donc, la hauteur du triangle CDG est égale à la distance perpendiculaire de G à CD (soit $12 - 9 = 3$) puisque CD est situé sur la droite d'équation $y = 12$ et que l'ordonnée de G est 9.
L'aire du triangle CDG est égale à $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 = 18$.
L'aire du triangle ACD est la moitié de l'aire du carré $ABCD$. Donc, l'aire du triangle ACD est égale à $\frac{1}{2} \cdot 12^2 = 72$.
D'après la partie (b), le triangle AEF a une aire de 12. Donc, l'aire de $GDEF$ est égale à $72 - 18 - 12 = 42$.

4. (a) On peut exprimer chaque nombre Hewitt, H sous la forme $H = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$, n étant un entier tel que $n \geq 2$.
(On a opté pour $H = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ plutôt que $H = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ car, en simplifiant l'expression, le terme du second degré ainsi que le terme constant sont éliminés.)
On développe et on simplifie pour obtenir

$$\begin{aligned} H &= (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \\ &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= 3n^3 + 6n \\ &= 3n(n^2+2) \end{aligned}$$

Un nombre Hewitt est divisible par 10 uniquement lorsque son chiffre des unités est égal à 0.
Si, par exemple, le chiffre des unités de n est 9, alors le chiffre des unités de $3n$ est 7, le chiffre des unités de n^2+2 est 3 et donc le chiffre des unités de $H = 3n(n^2+2)$ est 1 (car 7×3 a 1 pour chiffre des unités).
Dans le tableau ci-dessous, on détermine le chiffre des unités de H pour chaque chiffre des unités possible de n.

Chiffre des unités de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de $3n$	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
Chiffre des unités de n^2+2	2	3	6	1	8	7	8	1	6	3
Chiffre des unités de $H = 3n(n^2+2)$	0	9	6	9	6	5	4	1	4	1

Donc, pour qu'un nombre Hewitt soit divisible par 10, le chiffre des unités de n doit être 0.
Donc n doit être divisible par 10.
Lorsque $n = 10$, $H = 3(10)(10^2+2) = 3060$. Ce nombre est inférieur à 10 000.
Lorsque $n = 20$, $H = 3(20)(20^2+2) = 24\,120$. Ce nombre est situé entre 10 000 et 100 000.
Lorsque $n = 30$, $H = 3(30)(30^2+2) = 81\,180$. Ce nombre est situé entre 10 000 et 100 000.
Lorsque $n \geq 40$, $H \geq 3(40)(40^2+2) = 192\,240$. Ce nombre est supérieur à 100 000.
Donc, il y a 2 nombres Hewitt entre 10 000 et 100 000 qui sont divisibles par 10.

(b) D'après la partie (a), chaque nombre Hewitt peut être exprimé sous la forme $H = 3n(n^2+2)$, n étant un entier tel que $n \geq 2$.
Puisque $216 = 2^3 \cdot 3^3$, alors un nombre Hewitt est divisible par 216 uniquement lorsque $3n(n^2+2)$ est divisible par $2^3 \cdot 3^3$ ou uniquement lorsque $n(n^2+2)$ est divisible par $2^3 \cdot 3^2$.
Cela signifie qu'il faut que $n(n^2+2)$ soit divisible par $2^3 = 8$ et par $3^2 = 9$.

On examine d'abord les conditions nécessaires pour que $n(n^2+2)$ soit divisible par 8.
Si $n(n^2+2)$ est divisible par 8, alors $n(n^2+2)$ est divisible par 2. Donc, $n(n^2+2)$ est pair.
Si n est impair, alors $n(n^2+2)$ est impair. Donc, n doit être pair.
Puisque n est pair, alors $n = 2a$, a étant un entier strictement positif quelconque. Donc, $n^2+2 = 4a^2+2$, ce qui est 2 de plus qu'un multiple de 4 et donc n^2+2 n'est pas divisible par 4 (bien qu'il soit divisible par 2).
Puisque $n(n^2+2)$ est divisible par 8 et que n^2+2 contient exactement un facteur 2, alors n doit être divisible par 4.

On examine ensuite les conditions nécessaires pour que $n(n^2+2)$ soit divisible par 9. Si $n(n^2+2)$ est divisible par 9, alors au moins l'une des affirmations suivantes doit être vraie :

(i) n est divisible par 3 et n^2+2 est divisible par 3

(ii) n est divisible par 9

(iii) $n^2 + 2$ est divisible par 9.

Supposons que n soit divisible par 9 et donc par 3.
Donc, $n = 3b$, b étant un entier strictement positif. Donc, $n^2 + 2 = 9b^2 + 2 = 3(3b^2) + 2$, ce qui est 2 de plus qu'un multiple de 3. Donc, $n^2 + 2$ n'est pas divisible par 3 et n'est donc pas divisible par 9.
Cela indique que si n est divisible par 3, alors $n^2 + 2$ n'est pas divisible par 3. Donc, l'affirmation (i) ne peut être vraie.
De plus, si n est divisible par 9, alors $n^2 + 2$ n'est pas divisible par 9. Donc, exactement l'une des affirmations (ii) ou (iii) est vraie.

Pour résumer, $n(n^2+2)$ est divisible par 8 et par 9 (et donc un nombre Hewitt est divisible par 216) uniquement lorsque n est divisible par 4 et par 9 ou lorsque n est divisible par 4 et $n^2 + 2$ est divisible par 9.

<u>1^er cas : n est divisible par 4 et par 9</u>
Puisque 4 et 9 n'ont pas de diviseur commun supérieur à 1, alors n est divisible par 4 et par 9 uniquement lorsque n est divisible par $4 \cdot 9 = 36$.
Dans ce cas, $n = 36k$, k étant un entier strictement positif.
Le premier nombre Hewitt se produit lorsque $n = 2$. Donc, le 2024^e nombre Hewitt se produit lorsque $n = 2025$.
Cela signifie que $2 \leq n \leq 2025$ ou $2 \leq 36k \leq 2025$, soit $\frac{2}{36} \leq k \leq \frac{2025}{36}$.
Puisque k est un entier et que $\frac{2025}{36} = 56{,}25$, alors $1 \leq k \leq 56$.
Donc, dans ce cas, 56 nombres parmi les 2024 nombres Hewitt les plus petits sont divisibles par 216.

<u>2^e cas : n est divisible par 4 et $n^2 + 2$ est divisible par 9</u>
Puisque n est divisible par 4, alors $n = 4m$, m étant un entier strictement positif. Donc, $n^2 + 2 = 16m^2 + 2$ est divisible par 9.
Pour certains entiers non négatifs q et r $(0 \leq r \leq 8)$, chaque entier strictement positif m peut être exprimé sous la forme $m = 9q + r$, en fonction de son reste, r, lorsqu'il est divisé par 9.
Puisque $16m^2 + 2$ doit être divisible par 9, alors chacune des expressions équivalentes suivantes doit également être divisible par 9 :

$$\begin{aligned} 16m^2 + 2 &= 16(9q + r)^2 + 2 \\ &= 16(9^2q^2 + 2 \cdot 9qr + r^2) + 2 \\ &= 16(9^2q^2 + 2 \cdot 9qr) + 16r^2 + 2 \\ &= 9 \cdot 16(9q^2 + 2qr) + 16r^2 + 2 \end{aligned}$$

ce qui est divisible par 9 uniquement lorsque $16r^2 + 2$ est divisible par 9.
C'est-à-dire que n est divisible par 4 et $n^2 + 2 = 16m^2 + 2$ est divisible par 9 uniquement lorsque $16r^2 + 2$ est divisible par 9, r étant le reste lorsque m est divisé par 9.
Pour chacun des restes possibles $0 \leq r \leq 8$, on peut déterminer le reste lorsque $16r^2 + 2$ est divisé par 9.
Par exemple, lorsque $r = 2$, $16r^2 + 2 = 16(2)^2 + 2 = 66$ a un reste de 3 lorsqu'on le divise par 9.
De même, on détermine le reste lorsque $16r^2 + 2$ est divisé par 9 pour chacune des valeurs possibles de r :

Valeur de r	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste lorsque $16r^2 + 2$ est divisé par 9	2	0	3	2	6	6	2	3	0

Donc, $16r^2 + 2$ est divisible par 9 lorsque $r = 1$ ou lorsque $r = 8$.
Pour résumer, n est divisible par 4 et $n^2 + 2$ est divisible par 9 uniquement lorsque $n = 4m = 4(9q + 1)$ ou lorsque $n = 4(9q + 8)$, q étant un entier non négatif.
Pour les 2024 nombres Hewitt les plus petits, $2 \leq n \leq 2025$ ou $2 \leq 4(9q + 1) \leq 2025$. Donc, $0 \leq q \leq 56$ (puisque q est un entier non négatif).
Dans ce cas, 57 nombres parmi les 2024 nombres Hewitt les plus petits sont divisibles par 216.
De même, $2 \leq 4(9q + 8) \leq 2025$. Donc, $0 \leq q \leq 55$.
Dans ce cas, 56 nombres parmi les 2024 nombres Hewitt les plus petits sont divisibles par 216.

Parmi les 2024 nombres Hewitt les plus petits, $56 + 57 + 56 = 169$ sont divisibles par 216.

(c) D'après la partie (a), chaque nombre Hewitt peut être exprimé sous la forme $H = 3n(n^2 + 2)$, n étant un entier tel que $n \geq 2$.
Si S est la somme de deux nombres Hewitt distincts, alors $S = 3n(n^2 + 2) + 3m(m^2 + 2)$, m et n étant des entiers tels que $2 \leq m < n$.
Si deux nombres Hewitt distincts ont une somme égale à $9 \cdot 2^k$, k étant un entier strictement positif, alors on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
S &= 3n(n^2 + 2) + 3m(m^2 + 2) \\
9 \cdot 2^k &= 3n(n^2 + 2) + 3m(m^2 + 2) \\
3 \cdot 2^k &= n(n^2 + 2) + m(m^2 + 2) \\
3 \cdot 2^k &= n^3 + m^3 + 2n + 2m \\
3 \cdot 2^k &= (n + m)(n^2 - nm + m^2) + 2(n + m) \\
3 \cdot 2^k &= (n + m)(n^2 - nm + m^2 + 2)
\end{aligned}$$

Donc, si deux nombres Hewitt distincts ont une somme de $9 \cdot 2^k$, alors $(n + m)(n^2 - nm + m^2 + 2) = 3 \cdot 2^k$, k, m et n étant des entiers strictement positifs tels que $2 \leq m < n$.
Si m et n sont de parité différente (l'un est pair et l'autre est impair), alors $n + m$ est impair.
De plus, $n^2 - nm + m^2 + 2$ est impair puisque exactement l'un des termes n^2 ou m^2 est impair et les trois autres termes de la somme sont pairs.
Dans ce cas, $n + m$ et $n^2 - nm + m^2 + 2$ sont tous deux impairs et donc leur produit est impair.
Cependant, $3 \cdot 2^k$ est pair pour tous les entiers strictement positifs k. Donc, m et n doivent être de même parité (ils sont tous deux impairs ou tous deux pairs).

<u>1^er cas : m et n sont tous deux impairs</u>
Si m et n sont tous deux impairs, alors $n^2 - nm + m^2 + 2$ est impair.
Puisque les seuls facteurs impairs de $3 \cdot 2^k$ sont 1 et 3, alors $n^2 - nm + m^2 + 2$ doit être égal à 1 ou à 3.
Cependant, si m et n sont tous deux impairs avec $2 \leq m < n$, alors $m \geq 3$ et $n \geq 5$ et $n - m \geq 2$.
Donc,

$$\begin{aligned}
n^2 - nm + m^2 + 2 &= n(n - m) + m^2 + 2 \\
&\geq 5(2) + 3^2 + 2 \\
&= 21
\end{aligned}$$

Donc, $n^2 - nm + m^2 + 2$ ne peut égaler 1 ou 3.
Donc, m et n ne peuvent pas être tous deux impairs.

2[e] cas : m et n sont tous deux pairs
Si m et n sont tous deux pairs, alors $m = 2a$ et $n = 2b$, a et b étant des entiers tels que $1 \leq a < b$.
On reporte $m = 2a$ et $n = 2b$ dans $3 \cdot 2^k = (n+m)(n^2 - nm + m^2 + 2)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^k &= (n+m)(n^2 - nm + m^2 + 2) \\ 3 \cdot 2^k &= (2b+2a)(4b^2 - 4ab + 4a^2 + 2) \\ 3 \cdot 2^k &= 4(b+a)(2b^2 - 2ab + 2a^2 + 1) \\ 3 \cdot 2^{k-2} &= (b+a)(2b^2 - 2ab + 2a^2 + 1) \end{aligned}$$

Puisque le membre de droite est le produit de deux entiers, alors $k \geq 2$.
Le facteur $2b^2 - 2ab + 2a^2 + 1$ est un de plus qu'un multiple de 2. Donc, $2b^2 - 2ab + 2a^2 + 1$ est impair et doit donc égaler 1 ou 3.
Puisque $1 \leq a < b$, alors $a \geq 1$, $b \geq 2$ et $b - a \geq 1$. Donc,

$$\begin{aligned} 2b^2 - 2ab + 2a^2 + 1 &= 2b(b-a) + 2a^2 + 1 \\ &\geq 4(1) + 2(1^2) + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Donc, $2b^2 - 2ab + 2a^2 + 1$ ne peut égaler 1 ou 3.
Donc, m et n ne peuvent être tous deux pairs.

On peut donc conclure qu'il ne peut y avoir deux nombres Hewitt distincts dont la somme est égale à $9 \cdot 2^k$, k étant un entier strictement positif.