Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2024

le jeudi 4 avril 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 5 avril 2024
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) *Solution 1*

La longueur du jardin agrandi est de $(5 + 2 \times 2)$ m $= 9$ m et la largeur est de 4 m.
Donc, l'aire totale du jardin agrandi est égale à 9 m $\times$ 4 m $= 36$ m^2.

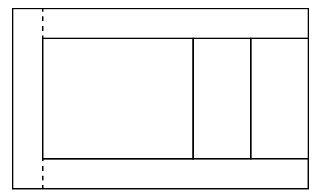
Solution 2

Le jardin initial avait une longueur de 5 m et une largeur de 4 m est avait donc une aire de 5 m $\times$ 4 m $= 20$ m^2.
Chaque parcelle supplémentaire de 2 m par 4 m a une aire de 2 m $\times$ 4 m $= 8$ m^2. Donc, l'aire totale du jardin agrandi est égale à $(20 + 2 \times 8)$ m$^2 = 36$ m^2.

(b) *Solution 1*

L'ensemble formé par le jardin et le chemin a une longueur de 9 m $+$ 1 m $= 10$ m et une largeur de $(4 + 2 \times 1)$ m $= 6$ m.
Donc, l'aire totale du jardin et du chemin est égale à 10 m $\times$ 6 m $= 60$ m^2.

Solution 2



Considérons la division du chemin en trois rectangles, comme dans la figure ci-contre.
Chacun des rectangles au-dessus et en dessous du jardin mesure 9 m $\times$ 1 m et a donc une aire de 9 m $\times$ 1 m $= 9$ m^2.
La section restante du chemin a une hauteur de $(4 + 2 \times 1)$ m $= 6$ m et une largeur de 1 m et a donc une aire de 6 m $\times$ 1 m $= 6$ m^2.

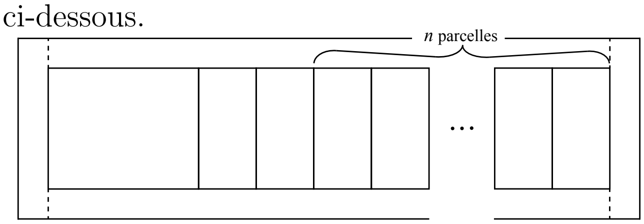
L'aire du jardin agrandi est égale à 36 m^2. Donc, l'aire totale du jardin et du chemin est égale à $(36 + 2 \times 9 + 6)$ m$^2 = 60$ m^2.

(c) *Solution 1*

Chaque nouvelle parcelle a une longueur de 2 m. Donc, si l'on ajoute n parcelles supplémentaires, la longueur du jardin de 9 m augmente de $2n$ m.
Donc, l'ensemble formé par le jardin et le chemin a une longueur de $(9 + 2n + 2 \times 1)$ m $= (2n + 11)$ m et une largeur de $(4 + 2 \times 1)$ m $= 6$ m.
Donc, en m^2, l'aire totale du jardin et du chemin est égale à $6 \times (2n + 11)$.
On résout $6 \times (2n + 11) = 150$ pour obtenir $2n + 11 = \frac{150}{6} = 25$, d'où $2n = 14$ ou $n = 7$.

Solution 2

Considérons la division de la superficie totale du jardin et du chemin en trois rectangles, comme dans la figure ci-dessous.



Chacun des rectangles à gauche et à droite du jardin a une hauteur de $(4+2\times1)$ m $= 6$ m et une largeur de 1 m. Donc, chacun de ces rectangles a une aire de 6 m $\times$ 1 m $= 6$ m^2.
Le rectangle restant, soit l'ensemble formé par le jardin et les sections restantes du chemin, a également une hauteur de 6 m.
Chaque nouvelle parcelle a une longueur de 2 m. Donc, si l'on ajoute n parcelles supplémentaires, la longueur du jardin de 9 m augmente de $2n$ m.
Donc, ce rectangle restant a une longueur de $(2n + 9)$ m.
En m^2, l'aire totale du jardin et du chemin est égale à $2\times6+6\times(2n+9)$, soit $12+6\times(2n+9)$.
On résout $12 + 6 \times (2n + 9) = 150$ pour obtenir $6 \times (2n + 9) = 138$, soit $2n + 9 = \frac{138}{6} = 23$, d'où $2n = 14$ ou $n = 7$.

2. (a) En commençant par le point $(5, 11)$ et en appliquant R puis T, on obtient les coordonnées $(11, -3)$:

$$(5{,}11) \xrightarrow{R} (11, -5) \xrightarrow{T} (11, -3)$$

(b) *Solution 1*

Lorsqu'un point subit une rotation de $90°$ autour de l'origine 4 fois, le résultat est une rotation de $4 \times 90° = 360°$, soit une rotation complète autour de l'origine.
Donc, en commençant par le point $(-3, 7)$, lorsque R est appliqué 4 fois, le point revient à sa position initiale. Donc, les coordonnées résultantes sont $(-3, 7)$.
Lorsque R est appliqué une cinquième fois, on obtient les coordonnées $(7, 3)$.

Solution 2

En commençant par le point $(-3, 7)$ et en appliquant R 5 fois, on obtient les coordonnées $(7, 3)$:

$$(-3, 7) \xrightarrow{R} (7, 3) \xrightarrow{R} (3, -7) \xrightarrow{R} (-7, -3) \xrightarrow{R} (-3, 7) \xrightarrow{R} (7, 3)$$

(c) En commençant par le point $(9, 1)$, et en appliquant la séquence R, R, T, on obtient les coordonnées $(-9, 1)$:

$$(9, 1) \xrightarrow{R} (1, -9) \xrightarrow{R} (-9, -1) \xrightarrow{T} (-9, 1)$$

En continuant avec le point $(-9, 1)$ et en appliquant la séquence R, R, T à nouveau, on obtient les coordonnées $(9, 1)$:

$$(-9, 1) \xrightarrow{R} (1, 9) \xrightarrow{R} (9, -1) \xrightarrow{T} (9, 1)$$

En commençant par le point $(9, 1)$, et en appliquant la séquence R, R, T deux fois, on obtient les coordonnées $(9, 1)$ (c'est-à-dire que le point retourne à sa position initiale).
Ceci se produira chaque fois que la séquence R, R, T est appliquée un nombre pair de fois.
Donc, après avoir appliqué R, R, T 10 fois, on obtient les coordonnées $(9, 1)$.
En commençant par le point $(9, 1)$ et en appliquant la séquence R, R, T une onzième fois, on obtient les coordonnées $(-9, 1)$.

3. (a) Parmi les 7 boules dans le sac, il y a 3 boules à numéro pair, soit les boules 2, 4 et 6. Donc, la probabilité pour que la première boule retirée soit un nombre pair est égale à $\frac{3}{7}$.

(b) Il y a 7 choix possibles pour la première boule. Lorsqu'une boule est retirée du sac, elle n'est ni remplacée par une autre boule, ni remise dans le sac. Cela signifie qu'il reste 6 choix pour la deuxième boule. On peut donc retirer les deux premières boules de $7 \times 6 = 42$ façons.
La somme des numéros sur les deux premières boules retirées est égale à 5 lorsque les numéros sont 1 et 4, dans un ordre quelconque, ou 2 et 3, dans un ordre quelconque.
Donc, il y a 4 façons possibles pour que les deux premières boules retirées aient une somme de 5 : 1 et 4, 4 et 1, 2 et 3, 3 et 2.
La probabilité pour que les numéros sur les deux premières boules retirées aient une somme de 5 est égale à $\frac{4}{42} = \frac{2}{21}$.

(c) Soit p la probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit supérieure ou égale à 6.
Donc, soit $\overline{p}$ la probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées ne soit *pas* supérieure ou égale à 6.
C'est-à-dire que $\overline{p}$ est égal à la probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit inférieure à 6. Donc, $p = 1 - \overline{p}$.

Si la somme des numéros sur les deux premières boules retirées est inférieure à 6, alors cette somme est soit 5, soit 4, soit 3 (puisque deux boules différentes sont retirées, la somme minimale possible est égale à $1 + 2 = 3$).
D'après la partie (b), il y a exactement 4 façons pour que les deux premières boules retirées aient une somme de 5.
Il y a exactement 2 façons pour que les deux premières boules retirées aient une somme de 4 : 1 et 3 ou 3 et 1 (2 et 2 n'est pas possible car il n'y a qu'un seul 2).
Il y a exactement 2 façons pour que les deux premières boules retirées aient une somme de 3 : 1 et 2 ou 2 et 1.
Donc, sur les $7 \times 6 = 42$ façons dont les deux premières boules peuvent être retirées, $4 + 2 + 2 = 8$ façons donnent une somme inférieure à 6. Donc, $\overline{p} = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$.
Enfin, la probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit supérieure ou égale à 6 est $p = 1 - \overline{p} = 1 - \frac{4}{21} = \frac{17}{21}$.

Remarquons qu'on aurait pu choisir de déterminer p directement. C'est-à-dire que l'on aurait pu déterminer la probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ou 13 puis additionner chacune de ces probabilités pour déterminer p.
On a choisit de déterminer $\overline{p}$ car cela impliquait seulement de prendre en compte les cas où les numéros sur les deux premières boules retirées avait une somme de 3, 4 ou 5, ce qui représentait moins de travail que de déterminer p directement.

(d) La probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit supérieure ou égale à 7 est $q = \frac{3}{4}$.
Comme dans la partie (c), soit $\overline{q}$ la probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules soit inférieure à 7. Donc, $q = 1 - \overline{q}$ ou $\frac{3}{4} = 1 - \overline{q}$, soit $\overline{q} = \frac{1}{4}$.
Il y a 8 choix possibles pour la première boule (puisqu'une huitième boule a été ajoutée au sac) et 7 choix pour la deuxième boule. Donc, on peut retirer les deux premières boules de $8 \times 7 = 56$ façons.
Puisque $\overline{q} = \frac{1}{4} = \frac{14}{56}$, il y a donc 14 façons pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit inférieure à 7.
Sans utiliser la nouvelle boule dorée, la somme des numéros sur les deux premières boules retirées peut être inférieure à 7 de 12 façons.
Celles-ci sont : $1 + 5$, $1 + 4$, $1 + 3$, $1 + 2$, $2 + 4$, $2 + 3$ et leurs inverses.
Donc, la nouvelle boule dorée qui porte l'entier k ($1 \leq k \leq 7$) doit fournir 2 façons supplémentaires de produire une somme inférieure à 7.
Si $k = 5$, alors on peut apparier la boule dorée avec la boule qui porte le numéro 1 (ces boules étant retirées du sac dans n'importe quel ordre) pour obtenir 2 façons supplémentaires de produire une somme inférieure à 7.
De plus, si $k = 5$, on ne peut apparier la boule dorée avec une autre boule pour obtenir une somme inférieure à 7. Donc, la bonne valeur de k est 5.
(On vous encourage à vérifier par vous-même que pour $k = 6$ ou 7, il n'existe pas de façons supplémentaires d'obtenir une somme inférieure à 7 et que pour $k = 1, 2, 3$ ou 4, il y a plus de 2 façons supplémentaires d'obtenir une somme inférieure à 7.)

4. (a) Soit $[r, c]$ le nombre dans la rangée r et la colonne c. Donc, à titre d'exemple, $[2, 1] = 1$.
On détermine d'abord les nombres dans la colonne 2.
Les voisins de $[1, 1]$ sont $[2, 1]$ et $[1, 2]$. Donc, $[1, 1] = [2, 1] \times [1, 2]$ ou $-1 = 1 \times [1, 2]$, d'où $[1, 2] = -1$.
Les voisins de [2,1] sont $[1, 1]$, $[3, 1]$ et $[2, 2]$. Donc, $[2, 1] = [1, 1] \times [3, 1] \times [2, 2]$ ou $1 = (-1) \times (-1) \times [2, 2]$, d'où $[2,2] = 1$.
Les voisins de $[3, 1]$ sont $[2, 1]$ et $[3, 2]$. Donc, $[3, 1] = [2, 1] \times [3, 2]$ ou $-1 = 1 \times [3,2]$, d'où $[3,2] = -1$.
Remarquons qu'il n'y avait pas véritablement de choix quant aux nombres de la colonne 2. En effet, les propriétés des nombres dans la colonne 1 sont uniquement satisfaites lorsque $[1, 2] = -1$, $[2, 2] = 1$ et $[3, 2] = -1$.
En procédant ainsi, les nombres de la colonne 3 sont $[1, 3] = 1$, $[2, 3] = 1$ et $[3,3] = 1$.
Remarquons à nouveau que les propriétés des nombres dans la colonne 2 sont uniquement satisfaites par ces nombres de la colonne 3.
Si l'on s'arrête ici, est-ce que la grille 3×3 ci-contre est une grille Griffin ?
Les voisins de $[1, 3] = 1$ sont $[1, 2] = -1$ et $[2, 3] = 1$. Cependant, $1 \neq (-1) \times 1$. Il n'est donc pas possible de construire une grille Griffin 3×3 avec la première colonne donnée.

−1	−1	1
1	1	1
−1	−1	1

On remplit ensuite les colonnes 4 et 5, comme dans la figure ci-dessous. On choisit les nombres de la colonne 5 de manière que les nombres de la colonne 4 satisfont les propriétés d'une grille Griffin.
Il faut vérifier que les nombres de la colonne 5 satisfont également les propriétés d'une grille Griffin. Étant donné que chaque case dans la colonne 5 contient un -1 ou un 1 et que le nombre dans chaque case est égal au produit des nombres dans toutes les cases voisines, alors la grille 3×5 ci-dessous est effectivement une grille Griffin.

−1	−1	1	−1	−1
1	1	1	1	1
−1	−1	1	−1	−1

(b) Dans la première colonne d'une grille 3×5, il y a deux possibilités pour le nombre dans chaque cellule. Donc, il y a $2 \times 2 \times 2 = 8$ premières colonnes possibles.
Comme on l'a démontré dans la partie (a), le restant de la grille est déterminé par les trois nombres de la première colonne. Donc, il y a au maximum 8 grilles Griffin 3×5 différentes.
Considérons les deux grilles dont les premières colonnes sont $(1, -1, -1)$ et $(-1, -1, 1)$.
Puisque chacune de ces colonnes est un reflet vertical de l'autre, leurs grilles 3×5 complétées seront des reflets verticaux l'une de l'autre.
C'est-à-dire que la grille 3×5 dont la première colonne est $(-1, -1, 1)$ est une grille Griffin uniquement lorsque la grille 3×5 dont la première colonne est $(1, -1, -1)$ est une grille Griffin. On peut donc considérer ces deux types de grilles comme un seul cas.
De même, les grilles dont les premières colonnes sont $(1, 1, -1)$ et $(-1, 1, 1)$ sont également des reflets verticaux l'une de l'autre et on peut donc considérer ces deux types de grilles comme un seul cas.

Toutes les cases d'une grille dont la première colonne est $(1, 1, 1)$ contiennent des 1, formant ainsi une grille Griffin 3×5.
Donc, il nous reste à considérer les 5 grilles dont les premières colonnes sont :

$$A(-1, -1, -1), B(1, -1, 1), C(-1, 1, -1), D(1, -1, -1) \text{ et } E(1, 1, -1)$$

On remplit chacune des 5 grilles ci-dessous en remplaçant 1 par $+$ et -1 par $-$.

A

−	+	+	+	−
−	−	+	−	−
−	+	+	+	−

B

+	−	+	−	+
−	−	+	−	−
+	−	+	−	+

C

−	−	+	−	−
+	+	+	+	+
−	−	+	−	−

D

+	−	−	+	−
−	+	+	+	−
−	+	−	−	+

E

+	+	−	−	−
+	−	+	−	+
−	−	−	+	+

Comme on l'a démontré dans la partie (a), on choisit les nombres de la colonne 5 de manière que les nombres de la colonne 4 satisfont les propriétés d'une grille Griffin.
On doit vérifier si les nombres de la colonne 5 satisfont également les propriétés d'une grille Griffin.
Puisque les cases dans les cinquième colonnes des grilles ci-dessus contiennent soit un -1, soit un 1 et que le nombre dans chaque case est égal au produit des nombres dans toutes les cases voisines, alors chacune des grilles 3×5 ci-dessus est effectivement une grille Griffin.
Donc, chacune des 8 premières colonnes possibles produit une grille Griffin 3×5. Donc, il y a au total 8 grilles Griffin de cette taille.

Remarquons que la grille dont la première colonne est $F(-1, -1, 1)$ produit une grille Griffin 3×5 qui est un reflet vertical de la grille dont la première colonne est D.
De même, la grille dont la première colonne est $G(-1, 1, 1)$ produit une grille Griffin 3×5 qui est un reflet vertical de la grille dont la première colonne est E.
Ces deux grilles Griffin, ainsi que la grille dont la première colonne est $H(1, 1, 1)$, sont présentées ci-dessous.

F

−	+	−	−	+
−	+	+	+	−
+	−	−	+	−

G

−	−	−	+	+
+	−	+	−	+
+	+	−	−	−

H

+	+	+	+	+
+	+	+	+	+
+	+	+	+	+

(c) En continuant notre analyse à partir de la partie (b), si l'on ajoute une colonne supplémentaire à chaque grille 3×5, on constate que toutes les grilles présentent la même sixième colonne, soit $(1, 1, 1)$.
Cela signifie que pour chaque grille 3×7, la septième colonne correspondra à la cinquième colonne.
Voyez-vous pourquoi ? (Par exemple, dans la partie (b), examinez les deuxième, troisième et quatrième colonnes de la grille dont la première colonne est C.)
Comme on l'a démontré dans la partie (b), la grille dont la première colonne est F est un reflet vertical de la grille dont la première colonne est D. Donc, leurs grilles $3 \times n$ complétées seront des reflets verticaux l'une de l'autre.
C'est-à-dire que la grille $3 \times n$ dont la première colonne est D est une grille Griffin uniquement lorsque la grille $3 \times n$ dont la première colonne est F est une grille Griffin. On peut donc considérer ces deux types de grilles comme un seul cas. Le même constat s'applique également aux grilles dont les premières colonnes sont E et G.

Toutes les cases d'une grille dont la première colonne est $(1, 1, 1)$ contiennent des 1, formant ainsi une grille Griffin $3 \times n$ pour toutes les valeurs de $n \geq 2$.
Dans les figures ci-dessous, on voit les 7 premières colonnes des grilles dont les premières colonnes sont A, B, C, D, E.

A

−	+	+	+	−	+	−
−	−	+	−	−	+	−
−	+	+	+	−	+	−

B

+	−	+	−	+	+	+
−	−	+	−	−	+	−
+	−	+	−	+	+	+

C

−	−	+	−	−	+	−
+	+	+	+	+	+	+
−	−	+	−	−	+	−

D

+	−	−	+	−	+	−
−	+	+	+	−	+	−
−	+	−	−	+	+	+

E

+	+	−	−	−	+	−
+	−	+	−	+	+	+
−	−	−	+	+	+	+

On désigne chacune des grilles ci-dessus par la lettre de sa première colonne : A, B, C, D et E.
Étant donné une première colonne et un entier $n \geq 2$, il existe soit aucune grille Griffin $3 \times n$ ayant cette première colonne, soit exactement une seule.
Pour chaque première colonne possible, on va compter le nombre de n ($2 \leq n \leq 2024$) pour lesquels il existe une grille Griffin $3 \times n$.
Remarquons que la septième colonne de chacune des grilles A, B et C correspond à la première colonne de la grille.
De plus, puisque la sixième colonne de chaque grille est $(1, 1, 1)$, alors la huitième colonne correspondra à la deuxième colonne, la neuvième à la troisième et, de façon générale, la colonne $n + 6$ correspondra à la colonne n.
Chacune des grilles A, B et C se répète toutes les 6 colonnes. Par conséquent, si une grille $3 \times n$ ($n \geq 2$) est une grille Griffin, alors une grille $3 \times (n + 6)$ est également une grille Griffin.
Cela signifie que pour déterminer pour quelles valeurs de n une grille $3 \times n$ constitue une grille Griffin, il suffit de considérer $2 \leq n \leq 7$ (on ne considère pas $n = 1$ et puisque la régularité se répète toutes les 6 colonnes, on vérifie $n = 7$). Ensuite, on utilise le fait que la régularité se répète pour déterminer le nombre de grilles Griffin pour toutes les valeurs de n telles que $2 \leq n \leq 2024$.

Dans les grilles D et E, la septième colonne est un reflet vertical de la première colonne.
De plus, puisque la sixième colonne de chaque grille est $(1, 1, 1)$, alors la huitième colonne est un reflet vertical de la deuxième colonne et, de façon générale, la colonne $n + 6$ est un reflet vertical de la colonne n.
Cela signifie que dans chacune des grilles D et E, chaque groupe de 6 colonnes à partir de la septième colonne est un reflet vertical du groupe précédent de 6 colonnes.
Cela indique que si la grille D ou E (et donc F ou G) est une grille Griffin $3 \times n$, alors la grille $3 \times (n + 6)$ est également une grille Griffin.
Pourquoi est-ce le cas ? Pour déterminer si une grille $3 \times k$ est une grille Griffin, on vérifie que chaque nombre dans la colonne k correspond au produit de ses voisins, à savoir les nombres de la colonne k et de la colonne précédente $k - 1$.
Le fait de refléter ces deux colonnes verticalement ne change pas le produit des cellules voisines. Donc, soit les grilles $3 \times n$ et $3 \times (n + 6)$ sont toutes deux des grilles Griffin, soit elles ne le sont pas.

Ensuite, on doit déterminer les valeurs de n ($2 \leq n \leq 7$) pour lesquelles les grilles A, B, C, D et E sont des grilles Griffin.

Dans les figures ci-dessous, on place un “Y” sous la colonne n si la grille $3 \times n$ est une grille Griffin, dans le cas contraire on ne place pas de “Y”.

A

−	+	+	+	−	+	−
−	−	+	−	−	+	−
−	+	+	+	−	+	−
	Y			Y		

B

+	−	+	−	+	+	+
−	−	+	−	−	+	−
+	−	+	−	+	+	+
	Y			Y		

C

−	−	+	−	−	+	−
+	+	+	+	+	+	+
−	−	+	−	−	+	−
	Y			Y		

D

+	−	−	+	−	+	−
−	+	+	+	−	+	−
−	+	−	−	+	+	+
				Y		

E

+	+	−	−	−	+	−
+	−	+	−	+	+	+
−	−	−	+	+	+	+
				Y		

Donc, les grilles A, B et C sont des grilles Griffin $3 \times n$ lorsque $n = 2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots$ et ainsi de suite, tandis que les grilles D et E sont des grilles Griffin $3 \times n$ lorsque $n = 5, 11, 17, 23, \ldots$ et ainsi de suite.
Puisque $2024 = 6 \times 337 + 2$, la régularité de 6 colonnes se répète 337 fois dans chacune des grilles.
Dans chaque groupe de 6, il y a 2 valeurs de n pour lesquelles les grilles A, B et C sont des grilles Griffin. Donc, pour chacun de ces types de grilles, il y a $2 \times 337 = 674$ grilles Griffin pour $2 \leq n \leq 2022$.
Cependant, la grille 3×2024 est également une grille Griffin dans chaque cas. Il y a donc 675 grilles Griffin pour chacune des grilles A, B et C.
Dans chaque groupe de 6, il y a 1 valeur de n pour laquelle les grilles D, E, F, et G sont des grilles Griffin. Donc, pour chacun de ces types de grilles, il y a 337 grilles Griffin.
Enfin, la grille H (la grille dont toutes les cases contiennent des 1) est une grille Griffin pour toutes les valeurs de n. Donc, il y a 2023 grilles Griffin dans ce cas.

Donc, la somme des nombres de grilles Griffin $3 \times n$ avec $2 \leq n \leq 2024$ est égale à

$$S = (3 \times 675) + (4 \times 337) + 2023 = 5396$$