Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2024

(11e année – Secondaire V)

le mercredi 28 février 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 29 février 2024
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a $3\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\right)=3\cdot\frac{5}{3}-3\cdot\frac{1}{3}=5-1=4$.
Par ailleurs, $3\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\right)=3\cdot\frac{4}{3}=4$.

Réponse : (D)

2. On a $4x^2-3x^2=x^2$. Lorsque $x=2$, cette expression est égale à 4.
Par ailleurs, lorsque $x=2$, on a $4x^2-3x^2=4\cdot 2^2-3\cdot 2^2=16-12=4$.

Réponse : (C)

3. Le volume d'un cube $1\times 1\times 1$ est égal à 1.
Le volume d'un cube $2\times 2\times 2$ est égal à 8.
Donc, il faut 8 cubes $1\times 1\times 1$ pour former un cube $2\times 2\times 2$.

Réponse : (E)

4. Pour qu'il y ait un nombre égal de bonbons de chaque couleur, il doit y avoir au plus 3 bonbons rouges et au plus 3 bonbons jaunes (puisqu'il y a déjà 3 bonbons bleus au départ).
Donc, Shuxin a mangé au moins 7 bonbons rouges et au moins 4 bonbons jaunes.
Cela signifie que Shuxin a mangé au moins $7+4=11$ bonbons.
Remarquons que si Shuxin mange 7 bonbons rouges, 4 bonbons jaunes et 0 bonbon bleu, il y aura bien un nombre égal de bonbons de chaque couleur.

Réponse : (A)

5. Le carré $PQRS$ est formé de 16 petits carrés isométriques.
Parmi les 16 petits carrés, 2 sont entièrement ombrés et 8 sont à moitié ombrés.
Cela est équivalent à $2+8\cdot\frac{1}{2}=2+4=6$ petits carrés ombrés.
Donc, $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ du carré $PQRS$ est ombré.

Réponse : (E)

6. À l'aide d'une calculatrice, $\sqrt{15}\approx 3{,}87$ et $\sqrt{50}\approx 7{,}07$.
Il y a 4 entiers entre ces nombres réels, soit 4, 5, 6 et 7.
On aurait également pu remarquer que les entiers entre $\sqrt{15}$ et $\sqrt{50}$ correspondent aux valeurs de $\sqrt{n}$ telles que n est un carré parfait entre 15 et 50. Il y a 4 carrés parfaits entre 15 et 50, soit 16, 25, 36, 49.

Réponse : (B)

7. *Solution 1*
Lorsqu'une droite subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, son ordonnée à l'origine ne change pas (puisqu'elle se trouve sur l'axe de symétrie) et sa pente est multipliée par -1.
Donc, la nouvelle droite (son image) a une pente de -3 et une ordonnée à l'origine de 6. Cette droite a donc pour équation $y=-3x+6$.
On pose $y=0$, que l'on reporte dans l'équation de cette nouvelle droite pour obtenir son abscisse à l'origine : $0=-3x+6$ ou $3x=6$, d'où $x=2$.

Solution 2
On pose $y=0$, que l'on reporte dans l'équation de la droite initiale pour obtenir son abscisse à l'origine : $0=3x+6$ ou $3x=-6$, d'où $x=-2$.
Lorsqu'une droite subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, l'abscisse à l'origine de la nouvelle droite (son image) est le reflet de celle de la droite initiale dans l'axe des ordonnées. Donc, $x=2$.

Réponse : (A)

8. D'après les lois des exposants, $1000^{20} = (10^3)^{20} = 10^{60}$. Donc, $n = 60$.

Réponse : (B)

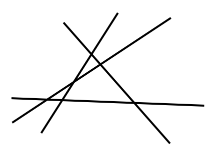
9. Étant donné que O est le centre du cercle, alors $OA = OB = OC$.
Cela signifie que les triangles AOB et COB sont isocèles avec $\angle ABO = \angle BAO = \angle BAC = 25^\circ$.
Donc, $\angle AOB = 180^\circ - \angle ABO - \angle BAO = 130^\circ$.
Puisque l'angle AOC est un angle plat, alors $\angle BOC = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

Réponse : (D)

10. Après que David s'est assis, il y a 4 chaises sur lesquelles Pedro peut s'asseoir, dont 2 sont adjacentes à la chaise sur laquelle David s'est assis.
Donc, la probabilité pour que Pedro soit assis à côté de David est égale à $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$.

Réponse : (C)

11. Chacune des 4 lignes peut couper chacune des 3 autres lignes au maximum une fois.
Quoique cela semble produire $4 \times 3 = 12$ points d'intersection, chaque point d'intersection est compté deux fois ; une fois pour chacune des deux lignes.
Donc, le nombre maximum de points d'intersection est égal à $\dfrac{4 \times 3}{2} = 6$.
Dans la figure ci-dessous, on voit qu'il est possible d'avoir 6 points d'intersection :



Réponse : (D)

12. Lorsqu'une liste de 5 nombres a, b, c, d, e est telle que $a+b+c = c+d+e$, alors il est également vrai que $a + b = d + e$.
Avec la liste donnée de 5 nombres, il est probablement plus facile de trouver deux paires de nombres, sans nombres en commun et ayant la même somme, que de trouver deux triplets partageant un nombre commun et ayant la même somme.
En procédant par tâtonnement, on constate que $6 + 21 = 10 + 17$. Donc, la liste 6, 21, 5, 10, 17 a la propriété donnée ; 5 est donc le nombre qui se trouve au milieu.
(Remarquons que ces deux paires sont les seules possibles, après avoir permis l'échange des nombres au sein de chaque paire et/ou des paires elles-mêmes.)

Réponse : (A)

13. On développe l'expression pour obtenir $(x+m)(x+n) = x^2+nx+mx+mn = x^2+(m+n)x+mn$.
Le terme constant de cette expression quadratique est mn. Donc, $mn = -12$.
Puisque m et n sont des entiers, tous deux sont des diviseurs de -12 et donc de 12.
Parmi les choix de réponse, seul 5 n'est pas un diviseur de 12. Donc, m ne peut égaler 5.
On peut vérifier que chacun des quatre autres choix est une valeur possible de m.

Réponse : (E)

14. Remarquons d'abord que le triangle ACB a un angle droit et un angle de 60°. Donc, le triangle ACB est un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Puisque $AB = \sqrt{3}$, alors d'après les rapports connus des longueurs des côtés, $BC = 1$ et $AC = 2$.
Ensuite, on remarque que le triangle ACE a deux angles de 45°. Donc, le triangle ACE est un triangle rectangle isocèle.

Cela signifie que $CE = AC = 2$ et que $\angle ACE = 90^\circ$.
De plus, $AE = \sqrt{2}AC = 2\sqrt{2}$.
En outre, puisque l'angle BCD est un angle plat, alors

$$\angle ECD = 180^\circ - \angle ACB - \angle ACE = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

Puisque le triangle CED a un angle droit et un angle de 30°, alors le triangle CED est également un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Puisque $CE = 2$, alors d'après les rapports connus des longueurs des côtés, $DE = 1$ et $CD = \sqrt{3}$.
Donc, le périmètre de $ABDE$ est égal à

$$AB + BC + CD + DE + AE = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

Réponse : (E)

15. Remarquons d'abord que $197 = 8 \cdot 24 + 5$.
Donc, 197 heures est équivalent à 8 jours et 5 heures.
Puisque la grand-mère d'Anila suit la même routine chaque jour, alors dans 197 heures et 5 minutes, elle fera la même chose que dans 5 heures et 5 minutes, soit du yoga.

Réponse : (C)

16. Parmi les produits des rangées et des colonnes, seuls 135 et 160 sont divisibles par 5. Cela signifie que 5 était l'entier dans la case située à la 2^{e} rangée, 3^{e} colonne.
Parmi les produits des rangées et des colonnes, seuls 21 et 56 sont divisibles par 7. Cela signifie que 7 était l'entier dans la case située à la 1^{re} rangée, 1^{re} colonne.
Parmi les produits des rangées et des colonnes, seuls 108 et 135 sont divisibles par 9. Cela signifie que 9 était l'entier dans la case située à la 2^{e} rangée, 2^{e} colonne.
Jusque-là, on a la grille suivante :

7			56
	9	5	135
			48
21	108	160	

Le produit de la 2^{e} rangée est 135. Cela signifie que l'entier manquant est $\frac{135}{5 \cdot 9} = 3$.
Le produit de la 1^{re} colonne est 21. Cela signifie que l'entier manquant est $\frac{21}{7 \cdot 3} = 1$.
La 3^{e} rangée, dont le produit est 48, comprend donc 1 et deux autres entiers entre 1 et 9. La seule paire de diviseurs complémentaires de 48 dont les valeurs sont inférieures à 10 est $48 = 6 \cdot 8$.
Puisque 8 n'est pas un diviseur de 108, alors N doit être 6.

Donc, voici la grille complétée :

7	2	4	56
3	9	5	135
1	6	8	48
21	108	160	

Réponse : (C)

17. Puisque $b + d > a + d$, alors $b > a$. Cela signifie que a n'a pas la plus grande valeur.
Puisque $c + e > b + e$, alors $c > b$. Cela signifie que b n'a pas la plus grande valeur.
Puisque $b + d = c$ et que b, c et d sont tous positifs, alors $d < c$. Cela signifie que d n'a pas la plus grande valeur.
Considérons l'équation $a + c = b + e$, ainsi que $a < b < c$.
On a $e = c + (a - b)$.
Puisque $a < b$, alors $a - b$ est négatif. Donc, $e < c$.
Cela signifie que c a la plus grande valeur.

Réponse : (C)

18. Puisque $3x + 2y = 6$, alors $(3x + 2y)^2 = 6^2$ ou $9x^2 + 12xy + 4y^2 = 36$.
Puisque $9x^2 + 4y^2 = 468$, alors

$$12xy = (9x^2 + 12xy + 4y^2) - (9x^2 + 4y^2) = 36 - 468 = -432$$

Donc, $xy = \frac{-432}{12} = -36$.
(Avec un peu plus de travail, on peut trouver les solutions du système d'équations, soit $(x, y) = (-4, 9)$ et $(x, y) = (6, -6)$.)

Réponse : (A)

19. Soit x, y et z les trois nombres obtenus lorsqu'on jette les trois dés.
Puisque chaque dé a six faces, alors il y a $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ résultats possibles.
De plus, la somme, S, des trois dés est au moins $3 \cdot 1 = 3$ et au plus $3 \cdot 6 = 18$.
Les résultats « $S > 5$ » et « $S \leq 5$ » sont complémentaires.
Donc, la probabilité de $S > 5$ est égale à 1 moins la probabilité de $S \leq 5$.
Il est plus simple de calculer directement la probabilité de $S \leq 5$ en comptant les combinaisons correspondantes.
Si $S = 3$, alors $x + y + z = 3$. Donc, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.
Si $S = 4$, alors $x + y + z = 4$. Donc, x, y et z sont 1, 1 et 2 dans un ordre quelconque. Donc, $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ ou $(1, 2, 1)$ ou $(1, 1, 2)$.
Si $S = 5$, alors $x + y + z = 5$. Donc, x, y et z sont 1, 1, 3, ou 1, 2, 2, dans un ordre quelconque. Il y a 3 arrangements dans chaque cas et donc 6 triplets en tout.
Donc, il y a $1 + 3 + 6 = 10$ triplets tels que $S \leq 5$. Donc, la probabilité pour que $S > 5$ est égale à $1 - \frac{10}{216} \approx 0{,}954$.
Parmi les choix de réponse, 0,95 est le choix le plus près.

Réponse : (B)

20. Soit r le rayon du cylindre et h la hauteur du cylindre.
Cela signifie que le volume du cylindre est égal à $\pi r^2 h$ et que le volume de la moitié du cylindre est égal à $\frac{1}{2}\pi r^2 h$.
De plus, le rayon du cône est égal à $\frac{1}{2}r$ et la hauteur du cône est égale à h.
Cela signifie que le volume du cône est égal à $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2 h$, soit $\frac{1}{12}\pi r^2 h$.
Lorsque le cône est divisé en deux parties par un plan horizontal situé à la moitié de sa hauteur, la partie supérieure du cône est un cône ayant les mêmes proportions, mais dont les dimensions sont la moitié de celles du grand cône.
Cela signifie que le volume de la partie supérieure est égal à $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ de celui du cône, soit $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12}\pi r^2 h$ ou $\frac{1}{96}\pi r^2 h$.
Sous un autre angle, remarquons que la partie supérieure du cône a une hauteur de $\frac{1}{2}h$ et devrait avoir un rayon de $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}r$ (puisque le rayon diminue proportionnellement à la hauteur). Cela signifie que le volume de la partie supérieure du cône est égal à $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}r\right)^2 \cdot \frac{1}{2}h$, soit $\frac{1}{96}\pi r^2 h$.
D'après cela, le volume de la partie inférieure du cône est égal à $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{12}\pi r^2 h = \frac{7}{96}\pi r^2 h$.
Quand le cône est placé dans le cylindre et que ce dernier a de l'eau jusqu'à la moitié de sa hauteur, le volume de la moitié inférieure du cylindre est constitué de la partie inférieure du cône et de l'eau.
Donc, le volume d'eau correspond à la différence entre la moitié du volume du cylindre et le volume de la partie inférieure du cône, soit $\frac{1}{2}\pi r^2 h - \frac{7}{96}\pi r^2 h = \frac{48}{96}\pi r^2 h - \frac{7}{96}\pi r^2 h = \frac{41}{96}\pi r^2 h$.
Lorsque le cône est retiré, l'eau occupe alors un cylindre de rayon r et de volume $\frac{41}{96}\pi r^2 h$.
Soit d la profondeur de l'eau dans cette configuration. Donc, $\pi r^2 d = \frac{41}{96}\pi r^2 h$, d'où $d = \frac{41}{96}h$. Cela signifie que la profondeur de l'eau est $\frac{41}{96}$ de la hauteur du cylindre.

Réponse : (B)

21. Puisque la deuxième colonne contient le nombre 1, alors l'étape (ii) n'a jamais été appliquée sur la deuxième colonne, sinon chaque nombre dans cette colonne serait d'au moins 2.
Pour obtenir les 1, 3 et 2 dans la deuxième colonne, on doit donc avoir appliqué l'étape (i) 1 fois sur la rangée 1, 3 fois sur la rangée 2 et 2 fois sur la rangée 3.
On a donc :

1	1	1
3	3	3
2	2	2

Il n'est pas possible d'appliquer l'étape (i) davantage, au risque de voir augmenter les nombres dans la colonne 2. Donc, $a = 1 + 3 + 2 = 6$.
Pour obtenir le tableau final à partir du tableau actuel en appliquant uniquement l'étape (ii), il faut augmenter de 6 chaque nombre dans la colonne 1 (ce qui signifie appliquer l'étape (ii) 3 fois) et augmenter de 4 chaque nombre dans la colonne 3 (ce qui signifie appliquer l'étape (ii) 2 fois).
Donc, $b = 3 + 2 = 5$.
Donc, $a + b = 11$.

Réponse : 11

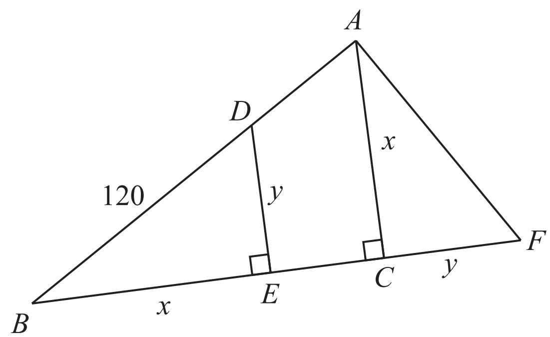
22. Remarquons que

$$ac + bd - ad - bc = ac - ad - bc + bd = a(c - d) - b(c - d) = (a - b)(c - d)$$

Puisque a, b, c et d proviennent tous de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, alors $a - b \leq 9$, car la différence maximale entre deux nombres quelconques de cet ensemble est 9.
De même, $c - d \leq 9$.
Donc, si $a - b = 9$, alors on doit avoir $a = 10$ et $b = 1$.
Dans ce cas, c et d proviennent de l'ensemble $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Donc, $c - d \leq 7$.
Donc, si $a - b = 9$, on a $(a - b)(c - d) \leq 9 \cdot 7 = 63$.
Si $a - b = 8$, alors soit $a = 9$ et $b = 1$, soit $a = 10$ et $b = 2$.
Dans les deux cas, $c - d = 9$ n'est pas possible, mais $c - d = 8$ l'est.
Donc, si $a - b = 8$, on a $(a - b)(c - d) \leq 8 \cdot 8 = 64$.
Enfin, si $a - b \leq 7$, la restriction initiale que $c - d \leq 9$ signifie que $(a - b)(c - d) \leq 7 \cdot 9 = 63$.
Donc, la plus grande valeur possible de $ac + bd - ad - bc$ est 64. Cela se produit, par exemple, lorsque $a = 9$, $b = 1$, $c = 10$ et $d = 2$.

Réponse : 64

23. *Solution 1*
Soit $BE = AC = x$ et $DE = y$.
On prolonge le segment BC jusqu'au point F de manière que $BC = DE = y$.

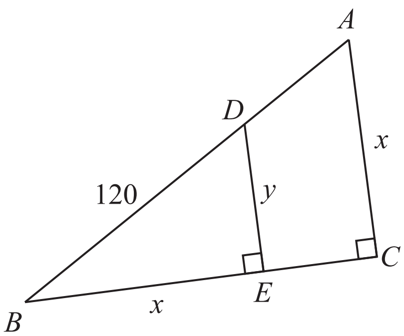


Puisque $BC + DE = 288$, alors $BF = BC + CF = BC + DE = 288$.
De plus, les triangles BED et ACF sont isométriques (côté-angle-côté).
Donc,

$$\angle BAF = \angle BAC + \angle ACF = \angle BDE + \angle DBE = 90^\circ$$

puisque DE et AC sont parallèles.
Ensuite, les triangles BED et BAF sont semblables car ils sont tous deux rectangles et partagent un angle en B.
Donc, $\dfrac{DE}{BD} = \dfrac{FA}{BF}$, soit $\dfrac{DE}{120} = \dfrac{120}{288}$, d'où $DE = \dfrac{120 \cdot 120}{288} = 50$.

Solution 2
Soit $BE = AC = x$ et $DE = y$.
Puisque $DE + BC = 288$, alors $BC = 288 - y$.



Remarquons que les triangles BED et BCA sont semblables car ils sont tous deux rectangles et partagent un angle en B.
Donc, $\dfrac{BE}{DE} = \dfrac{BC}{AC}$, soit $\dfrac{x}{y} = \dfrac{288-y}{x}$.
On a donc $x^2 = y(288 - y)$, d'où $x^2 = 288y - y^2$ ou $x^2 + y^2 = 288y$.
De plus, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle BED, on a $x^2 + y^2 = 120^2$.
Puisque $x^2 + y^2 = 288y$ et $x^2 + y^2 = 120^2$, alors $288y = 120^2$, d'où $2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot y = 120 \cdot 120$ ou $2y = 10 \cdot 10$, soit $y = 50$.
Donc, $DE = 50$.

Réponse : 50

24. Dans cette solution, on utilise le principe suivant : si N est un entier strictement positif avec $N > 1$ et que sa factorisation première est $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$ ($p_1, p_2, \ldots, p_m$ étant des nombres premiers distincts et $a_1, a_2, \ldots, a_m$ étant des entiers strictement positifs), alors N admet $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_m)$ diviseurs positifs, y compris 1 et N.
On sait que N est un multiple positif de 2024.
On écrit l'entier 2024 en factorisation première : $2024 = 8 \cdot 253 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$.
Cela signifie que N a au moins 3 facteurs premiers (soit 2, 11 et 23) et qu'au moins l'un de ces facteurs premiers a un exposant d'au moins 3.
Supposons que N admette D diviseurs positifs. On sait que $100 < D < 110$.
Puisque $D = (1+a_1)(1+a_2) \cdots (1+a_m)$ et que N a au moins 3 facteurs premiers, alors D est un entier strictement positif que l'on peut exprimer sous la forme d'un produit d'au moins 3 entiers strictement positifs, chacun étant supérieur à 2.
D ne peut égaler 101, 103, 107 ou 109, puisque ces nombres sont premiers et, par conséquent, ne peuvent pas être exprimés sous la forme d'un produit de trois entiers, chacun étant supérieur ou égal à 2.
De plus, D ne peut égaler 106 car $106 = 2 \cdot 53$ (2 et 53 sont tous deux des nombres premiers). Cela signifie que 106 ne peut pas être exprimé sous la forme d'un produit de trois entiers, chacun étant supérieur à 1.
Les valeurs possibles restantes de D sont 102, 104, 105, 108.
Remarquons que $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$, que $104 = 2^3 \cdot 13$, que $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ et que $108 = 2^2 \cdot 3^3$.

<u>1^er^ cas : $D = 102$</u>
Puisque 2, 11 et 23 font partie des facteurs premiers de N, alors la factorisation première de N comprend donc des termes de la forme 2^a, 11^b et 23^c, a, b et c étant des entiers strictement positifs avec $a \geq 3$.
Si la factorisation première de N comprenait également p^e, alors D serait divisible par

$(1+a)(1+b)(1+c)(1+e)$. (D pourrait avoir un plus grand nombre de facteurs si N avait plus de facteurs premiers.)
Puisque $D = 102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$ a seulement 3 facteurs premiers, on ne peut l'exprimer sous la forme d'un produit de 4 entiers, chacun étant supérieur à 1.
Donc, N ne peut avoir un quatrième facteur premier.
Cela signifie que $N = 2^a 11^b 23^c$, d'où $D = (1+a)(1+b)(1+c) = 2 \cdot 3 \cdot 17$.
Cela signifie que les valeurs de $1+a$, $1+b$ et $1+c$ sont 2, 3 et 17, dans un ordre quelconque, et donc que celles de a, b et c sont 1, 2 et 16, dans un ordre quelconque.
Pour minimiser la valeur de D, l'exposant le plus élevé est associé au plus petit facteur premier, le deuxième plus grand exposant au deuxième plus petit facteur premier et ainsi de suite. (Voyez-vous pourquoi cela minimise la valeur de N ?)
Donc, dans ce cas, la plus petite valeur possible de N est $N = 2^{16} 11^2 23^1 = 182\,386\,688$.

<u>2e cas : $D = 105$</u>
En utilisant un argument semblable, on détermine que $N = 2^a 11^b 23^c$. Cela signifie que les valeurs de $1+a$, $1+b$ et $1+c$ sont 3, 5 et 7, dans un ordre quelconque, et donc que celles de a, b et c sont 2, 4 et 6, dans un ordre quelconque.
Donc, dans ce cas, la plus petite valeur possible de N est $N = 2^6 11^4 23^2 = 495\,685\,696$.

<u>3e cas : $D = 104$</u>
Puisque $D = 2^3 \cdot 13$ comprend 4 facteurs premiers, alors N ne peut avoir plus de 4 facteurs premiers. (Si N avait 5 facteurs premiers ou plus, alors le produit égal à D comprendrait au moins 5 entiers, chacun étant supérieur ou égal à 2.)
Donc, soit $N = 2^a 11^b 23^c$ et $D = (1+a)(1+b)(1+c)$, soit $N = 2^a 11^b 23^c p^e$, p étant un facteur premier tel que $p \neq 2, 11, 23$ et $D = (1+a)(1+b)(1+c)(1+e)$.
Cela signifie que $(1+a)(1+b)(1+c) = 2^3 \cdot 13$ ou $(1+a)(1+b)(1+c)(1+e) = 2^3 \cdot 13$.
Dans le cas où N a trois facteurs premiers, we remarque que $104 = 26 \cdot 2 \cdot 2 = 13 \cdot 4 \cdot 2$ sont les deux seules manières d'exprimer 104 sous la forme d'un produit de 3 entiers, chacun étant supérieur ou égal à 2.
Donc, les valeurs minimales correspondantes de N sont $N = 2^{25} \cdot 11 \cdot 23 = 8\,489\,271\,296$ et $N = 2^{12} \cdot 11^3 \cdot 23 = 125\,390\,848$.
Dans le cas où N a quatre facteurs premiers, alors $(1+a)(1+b)(1+c)(1+e) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$ signifie que a, b, c et e sont 1, 1, 1 et 12, dans un ordre quelconque.
Cela signifie à son tour que la plus petite valeur correspondante possible de N est

$$N = 2^{12} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23 = 3\,108\,864$$

Remarquons que p^e est devenu 3^1 afin de minimiser à la fois p (puisque $p > 2$) et son exposant.

<u>4e cas : $D = 108$</u>
Puisque $D = 2^2 \cdot 3^3$ comprend 5 facteurs premiers, alors N ne peut avoir plus de 5 facteurs premiers.
Si N avait 5 facteurs premiers, alors il faudrait que l'on utilise la factorisation $D = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Cependant, cela n'est pas possible, car 2^a doit avoir $a \geq 3$, ce qui signifie que l'un des cinq facteurs de D devrait être au moins égal à 4.
Si N a 4 facteurs premiers, alors D doit être séparé en $9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ ou en $6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$ ou en $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. (Puisque deux des facteurs premiers doivent être combinés, alors soit deux 2, soit deux 3, ou un 2 et un 3 sont combinés.)
On a donc les valeurs minimales de $N = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 = 582\,912$ et $N = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 23 = 801\,504$ et $N = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 23^2 = 4\,408\,648$.
Si N a 3 facteurs premiers, alors on doit utiliser l'une des factorisations suivantes : $D = 27 \cdot 2 \cdot 2$

ou $D = 18 \cdot 3 \cdot 2$ ou $D = 12 \cdot 3 \cdot 3$ ou $D = 9 \cdot 4 \cdot 3$ ou $D = 6 \cdot 6 \cdot 3$.
Donc, les valeurs minimales correspondantes de N sont :

$$N = 2^{26} \cdot 11 \cdot 23 = 16\,978\,542\,592$$
$$N = 2^{17} \cdot 11^2 \cdot 23 = 364\,773\,376$$
$$N = 2^{11} \cdot 11^2 \cdot 23^2 = 131\,090\,432$$
$$N = 2^{8} \cdot 11^3 \cdot 23^2 = 180\,249\,344$$
$$N = 2^{5} \cdot 11^5 \cdot 23^2 = 2\,726\,271\,328$$

Donc, dans les 4 cas, la valeur minimale possible de N est 582 912.
Les chiffres de 582 912 ont une somme de $5 + 8 + 2 + 9 + 1 + 2 = 27$.

Réponse : 27

25. Soit $a_n = x$ et $a_{n-1} = y$, n étant un entier tel que $n \geq 2$.
On peut récrire l'équation $a_n + a_{n-1} = \frac{5}{2}\sqrt{a_n \cdot a_{n-1}}$ sous la forme $x + y = \frac{5}{2}\sqrt{xy}$.
Puisque $x > 0$ et $y > 0$, alors en élevant chaque membre au carré, on obtient l'équation équivalente $(x + y)^2 = \frac{25}{4}xy$.
On a donc les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= \tfrac{25}{4}xy \\ 4(x^2 + 2xy + y^2) &= 25xy \\ 4x^2 - 17xy + 4y^2 &= 0 \\ (4x - y)(x - 4y) &= 0 \end{aligned}$$

d'où on a donc $4x = y$ ou $x = 4y$.

Revenons à la notation employée pour les suites. On sait désormais que $4a_n = a_{n-1}$ (c'est-à-dire que $a_n = \frac{1}{4}a_{n-1}$) ou que $a_n = 4a_{n-1}$.
Autrement dit, chaque terme de la suite peut être obtenu à partir du terme précédent soit en multipliant par 4, soit en divisant par 4.
On sait que $a_1 = 4$ et que $a_{11} = 1024$. Remarquons que $\dfrac{a_{11}}{a_1} = \dfrac{1024}{4} = 256 = 4^4$.
On peut considérer que l'on se déplace le long de la suite de a_1 à a_{11} en effectuant 10 « opérations », chacune d'entre elles étant soit une multiplication par 4, soit une division par 4.

S'il y a m opérations dans lesquelles on multiplie par 4 et $10 - m$ opérations dans lesquelles on divise par 4, alors $\dfrac{4^m}{4^{10-m}} = 4^4$ ou $4^{2m-10} = 4^4$, d'où $2m - 10 = 4$. Donc, $m = 7$.
Autrement dit, la suite comporte 7 opérations de multiplication par 4 et 3 opérations de division par 4.
Ces opérations définissent entièrement la suite.
Le nombre de suites possibles, S, correspond au nombre de manières dont on peut arranger ces 10 opérations, ce qui équivaut à $\dbinom{10}{3}$.
(Pour celles et ceux qui ne sont pas familières ou familiers avec la notation combinatoire, il est également possible de compter les arrangements.)
Donc, $S = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$. Les deux chiffres les plus à droite de S sont 20.

Réponse : 20