Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mardi 3 avril 2024

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 4 avril 2024

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

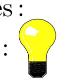
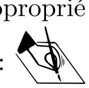
Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

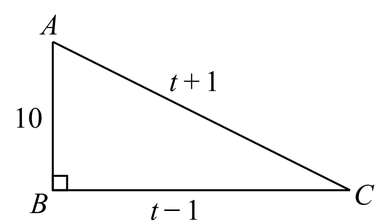
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son lieu de résidence.

1. (a) Si $x = 2$, quelle est la valeur de $\dfrac{x^4 + 3x^2}{x^2}$?

   (b) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B. De plus, $AB = 10$, $BC = t-1$ et $AC = t + 1$. Quelle est la valeur de t ?



   (c) Sachant que $\dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{2y} = 14$, déterminer la valeur de y.

2. (a) Une suite de six termes est formée de manière que chaque terme, après le deuxième, est égal à la somme des deux termes précédents. Sachant que le quatrième terme est 13 et que le sixième terme est 36, quel est le premier terme de la suite ?

   (b) Pour un nombre réel $r \neq 0$, la suite $5r$, $5r^2$, $5r^3$ est telle que la somme du deuxième terme et du troisième terme est égale au carré du premier terme. Quelle est la valeur de r ?

   (c) Jacques a écrit quatre tests la semaine dernière. La moyenne de ses notes sur les premier, deuxième et troisième tests était de 65. La moyenne de ses notes sur les deuxième, troisième et quatrième tests était de 80. Sa note au quatrième test était le double de celle du premier. Déterminer sa note au quatrième test.

3. (a) La représentation graphique de l'équation $y = r(x-3)(x-r)$ coupe l'axe des ordonnées au point $(0, 48)$. Quelles sont les deux valeurs possibles de r ?

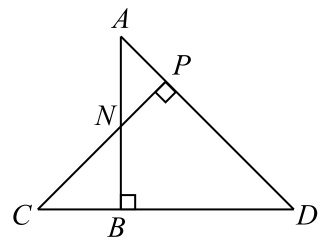
(b) Un vélo coûte B \$ avant taxes. Si la taxe de vente était de 13 %, Annemiek paierait en tout 24 \$ de plus que si la taxe de vente était de 5 %. Quelle est la valeur de B ?

(c) La fonction f est telle que :

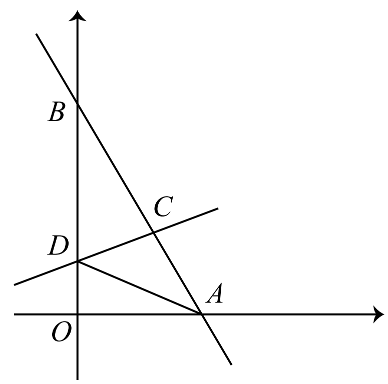
- $f(1) = 3$.
- $f(2n) = (f(n))^2$ pour tous les entiers strictement positifs n.
- $f(2m+1) = 3f(2m)$ pour tous les entiers strictement positifs m.

Déterminer la valeur de $f(2) + f(3) + f(4)$.

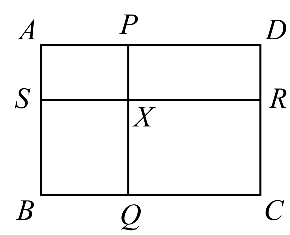
4. (a) Dans la figure ci-contre, AB est perpendiculaire à CD, CP est perpendiculaire à AD, et AB et CP se coupent en N. De plus, $\angle ADB = 45°$, $AB = 12$ et $CB = 6$. Quelle est l'aire du triangle APN ?



(b) Dans la figure ci-contre, la droite d'équation $y = -3x + 6$ coupe l'axe des abscisses en A et l'axe des ordonnées en B. Supposons que $m > 0$ et que la droite d'équation $y = mx + 1$ coupe l'axe des ordonnées en D et coupe la droite d'équation $y = -3x + 6$ en C. Si O est l'origine et que l'aire du triangle ACD est la moitié de l'aire du triangle ABO, déterminer les coordonnées de C.



5. (a) Dans la figure ci-contre, les segments PQ et RS se coupent en X et divisent le rectangle $ABCD$ en quatre petits rectangles. Les aires de ces petits rectangles sont 2, 6, 3 et a, dans un ordre quelconque. Quelles sont les trois valeurs possibles de a ?



(b) Supposons que la parabole d'équation $y = x^2 - 4tx + 5t^2 - 6t$ a deux abscisses à l'origine distinctes. Déterminer la valeur de t pour laquelle la distance entre ces deux abscisses à l'origine est aussi grande que possible.

6. (a) Il existe M entiers entre 10 000 et 100 000 qui sont des multiples de 21 et dont le chiffre des unités est 1. Quelle est la valeur de M ?

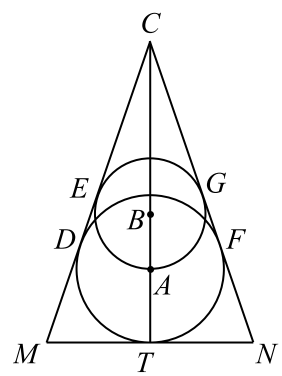
(b) Il y a N ($500 < N < 600$) élèves qui fréquentent le lycée Strickland. Parmi ces N élèves, $\frac{2}{5}$ font partie du club de sciences physiques et $\frac{1}{4}$ font partie du club de mathématiques. Dans le club de sciences physiques, le nombre d'élèves qui ne font pas partie du club de mathématiques est le double de ceux qui en font partie. Déterminer le nombre d'élèves qui ne font partie d'aucun des deux clubs.

7. (a) Arun et Bella courent sur une piste circulaire, partant de points diamétralement opposés. Arun court dans le sens des aiguilles d'une montre autour de la piste et Bella court dans le sens contraire. Arun et Bella courent à des vitesses constantes mais différentes. Ils se croisent pour la première fois après qu'Arun a couru 100 m. Ils se croisent pour la deuxième fois après que Bella a couru 150 m après leur premier point de rencontre. Quelle est la longueur de la piste ?

(b) Déterminer tous les angles θ avec $0° \leq \theta \leq 360°$ tels que

$$4^{1+\cos^3\theta} = 2^{2-\cos\theta} \cdot 8^{\cos^2\theta}$$

8. (a) Dans la figure ci-contre, le cercle de centre A a un rayon de 4 et A est situé sur le cercle de centre B et de rayon 3. La droite passant par A et par B est située le long du diamètre de chaque cercle et forme un angle droit avec MN au point T. De plus, MN est tangent au grand cercle tandis que MC et NC sont tous deux tangents aux deux cercles en points D, E, F et G, comme dans la figure ci-contre. Déterminer l'aire du triangle MNC.



(b) Determiner tous les triplets (x, y, z) de nombres réels qui vérifient le système d'équations :

$$\begin{aligned}
\log_9 x + \log_9 y + \log_3 z &= 2 \\
\log_{16} x + \log_4 y + \log_{16} z &= 1 \\
\log_5 x + \log_{25} y + \log_{25} z &= 0
\end{aligned}$$

9. Une fourmi marche le long de l'axe des abscisses en effectuant une séquence de pas de 1 unité chacun. Certains, tous, ou aucun de ces pas sont dans la direction positive de l'axe des abscisses ; certains, tous, ou aucun de ces pas sont dans la direction négative de l'axe des abscisses. La fourmi commence à marcher à partir de $x = 0$. Elle effectue n pas et s'arrête à $x = d$. Pour chaque telle séquence de pas, soit c le nombre de fois que la fourmi change de direction.

(a) Déterminer le nombre de séquences de pas différentes pour lesquelles $n = 9$ et $d = 5$.

(b) Soit $n = 9$ et $d = 3$. Déterminer le nombre de séquences pour lesquelles c est pair.

(c) Déterminer le nombre de couples (d, n) d'entiers avec $1 \leq n \leq 2024$ et $d \geq 0$ pour lesquels c est pair pour exactement la moitié des séquences de n pas qui se terminent à $x = d$.

10. Soit s et t des nombres réels avec $0 < s \leq 1$ et $0 < t \leq 1$. Les points $A(-1, 0)$, $B(0, 4)$ et $C(1, 0)$ forment le triangle ABC. Les points $S(s, 0)$ et $T(-t, 0)$ sont situés sur AC. Le point P est situé sur AB et le point Q est situé sur BC, aucun des deux n'étant un sommet du triangle ABC. Les segments de droites SP et TQ se coupent en X et divisent le triangle ABC en quatre régions. Pour certains tels couples (s, t) de nombres réels et points P et Q, les segments de droites SP et TQ divisent le triangle ABC en quatre régions de même aire. Un tel couple (s, t) est appelé un couple *équilibré*.

(a) Supposons que (s, t) est un couple équilibré avec $s = 1$ et que les segments de droites SP et TQ divisent le triangle ABC en quatre régions de même aire. Déterminer les coordonnées de P.

(b) Démontrer qu'ils existe des nombres réels d, e, f et g pour lesquels tous les couples équilibrés (s, t) vérifient une équation de la forme

$$s^2 + t^2 = dst + es + ft + g$$

et déterminer les valeurs de d, e, f et g.

(c) Déterminer une famille infinie de couples (s, t) distincts de nombres rationnels avec $0 < s \leq t \leq 1$ qui vérifient l'équation de la partie (b).

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2024! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2024.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— des copies gratuites des concours précédents

— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir

— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2024/2025

— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne

— utiliser notre générateur de séries de problèmes gratuit pour créer des séries de problèmes afin de soutenir et d'enrichir le programme scolaire; veuillez noter que cette ressource n'est disponible qu'en anglais

— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne

— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne

— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants

— trouver les résultats de vos élèves dans les concours