



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

# Concours Galois

(10<sup>e</sup> année – Sec. IV)

le jeudi 12 avril 2018

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2018

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF  
**WATERLOO**

Durée : 75 minutes

©2018 University of Waterloo

*Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.*

Nombre de questions : 4

Chaque question vaut 10 points.

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable, telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera, (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 2 ou 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.



**ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.**


- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple,  $\pi + 1$  et  $1 - \sqrt{2}$  sont des nombres exacts simplifiés.


*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*


*Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca). Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.*


NOTE :

- Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
- Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
- Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
- Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
- Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
- Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par  $y = x^3 - x$ , mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
- Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

-  (a) Sachant que  $x \neq 0$ , simplifier l'expression  $\frac{12x^2}{3x}$ .

 (b) Quelle est la valeur de l'expression  $\frac{12x^2}{3x}$  lorsque  $x = 5$ ?

 (c) Sachant que  $n = 2m$  et que  $m \neq 0$ , quelle est la valeur de l'expression  $\frac{8mn}{3m^2}$  ?

 (d) Sachant que  $q = 6$ , déterminer tous les entiers positifs  $p$  tels que  $3 \leq \frac{8p^2q}{5pq^2} \leq 4$ .

2. Voici deux propriétés des cercles :

- Si des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont situés sur un cercle de manière que  $\angle ABC = 90^\circ$ , alors  $AC$  est un diamètre du cercle. Dans la figure 1,  $AC$  est donc un diamètre du cercle.
- Si des points  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont situés sur un cercle de manière que  $EF$  est un diamètre, alors  $\angle EDF = 90^\circ$ . Dans la figure 2, on a donc  $\angle EDF = 90^\circ$ .

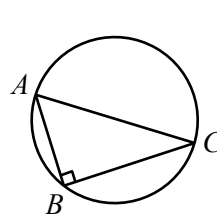


Figure 1

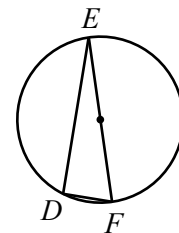





Figure 2

-  Dans la figure 1 ci-dessus,  $AB = 8$  et  $BC = 15$ . Quelle est la longueur du diamètre  $AC$  ?
-  Dans la figure 2 ci-dessus,  $DE = 24$  et le cercle a un rayon de 13. Quelle est la longueur de  $DF$  ?
-  Dans la figure 3, les points  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  et  $S$  sont situés sur un cercle de centre  $O$ . De plus,  $SQ$  est un diamètre du cercle et  $O$  est joint à  $R$ . Sachant que  $SP = PQ$  et que  $\angle RQP = 80^\circ$ , déterminer la mesure de l'angle  $ROQ$  et celle de l'angle  $RSQ$ .

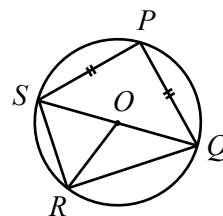
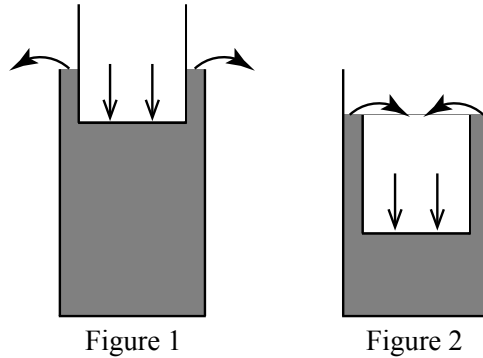





Figure 3

3. Le cylindre A a un rayon de 12 et une hauteur de 25. Le cylindre B a un rayon de 9 et une hauteur  $h$ . On verse de l'eau dans le cylindre A jusqu'à une profondeur de 19. Le cylindre B est vide. On abaisse le cylindre B jusqu'au fond du cylindre A, comme il est indiqué dans les figures suivantes. Selon la valeur de  $h$ ,
- (i) de l'eau peut se déverser du cylindre A sur le sol (Figure 1), ou
  - (ii) de l'eau peut se déverser du cylindre A dans le cylindre B (Figure 2), ou
  - (iii) (i) puis (ii).







Les bases et les parois des deux cylindres sont suffisamment minces pour qu'on puisse ignorer leur épaisseur.

-  (a) Supposons que  $h = 30$ . Quel est le volume d'eau qui se déverse du cylindre A sur le sol ?
  -  (b) Supposons que  $h = 20$ . Déterminer le volume d'eau qui se déverse du cylindre A sur le sol et la profondeur d'eau dans le cylindre B lorsqu'il est au fond du cylindre A.
  -  (c) Déterminer l'intervalle des valeurs de  $h$  de manière que lorsque le cylindre B est au fond du cylindre A, il y a de l'eau dans le cylindre B, sans qu'il soit plein.
4. Pour chaque entier strictement positif  $k$ , l'expression  $C(k)$  représente le nombre de façons d'écrire  $k$  comme somme d'un ou de plusieurs entiers consécutifs strictement positifs. Par exemple,  $C(21) = 4$ , car on peut écrire 21 comme

$$21, \quad 10 + 11, \quad 6 + 7 + 8 \quad \text{et} \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6,$$

et il n'existe aucune autre façon d'écrire 21 comme somme d'entiers consécutifs strictement positifs.

-  (a) Déterminer la valeur de  $C(45)$ .
-  (b) L'entier positif  $m$  est égal à la somme des entiers positifs de 4 à  $n$ . Déterminer les valeurs de  $a$  et de  $b$  ( $a < b$ ) pour lesquelles  $m = \frac{1}{2}(n+a)(n+b)$  pour chaque entier  $n$  ( $n \geq 4$ ).
-  (c) Déterminer la valeur de  $C(2 \times 3^4 \times 5^6)$ .
-  (d) Déterminer le plus petit entier strictement positif  $k$  pour lequel  $C(k) = 215$ .



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

*Pour les élèves...*

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2018! Chaque année, plus de 240 000 élèves, provenant de 75 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2018.

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

*Pour les enseignants...*

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2018/2019
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11<sup>e</sup> et 12<sup>e</sup> année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours