

Concours Hypatie (11^e année – Sec. V)
le mercredi 20 avril 2005

1. Étant donné les nombres a et b , la notation $a \diamond b$ représente l'expression $a^2 - 4b$.
Par exemple, $5 \diamond 3 = 5^2 - 4(3)$, d'où $5 \diamond 3 = 13$.

(a) Évaluer $2 \diamond 3$.

(b) Quelles sont toutes les valeurs de k pour lesquelles $k \diamond 2 = 2 \diamond k$?

(c) Les nombres x et y sont tels que $3 \diamond x = y$ et $2 \diamond y = 8x$.
Déterminer la valeur de x et de y .

2. Un jeu se joue avec une pile de cure-dents selon les règlements suivants :

- Les deux joueurs jouent à tour de rôle.
- À son tour, un joueur peut enlever 1, 2, 3, 4 ou 5 cure-dents de la pile.
- Le même nombre de cure-dents ne peut être enlevé plus d'une fois.
- La dernière personne qui réussit à jouer est gagnante, peu importe s'il reste des cure-dents sur la table.

Par exemple, s'il y avait 8 cure-dents au départ, voici un déroulement possible :

Gilles enlève 1 cure-dent. Il en reste 7 dans la pile.

Carla enlève 4 cure-dents. Il en reste 3 dans la pile.

Gilles enlève 2 cure-dents. Il en reste 1 dans la pile.

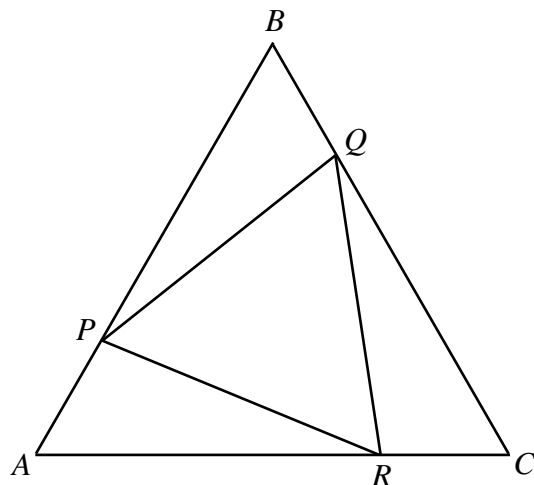
Gilles est gagnant, car Carla ne peut enlever le cure-dent qui reste. (Gilles a déjà enlevé 1 cure-dent et selon le 3^e règlement, il est interdit d'enlever 1 cure-dent une autre fois.)

(a) Supposons qu'il y a 11 cure-dents au départ. Gilles enlève 3 cure-dents. Ensuite, Carla en enlève 1. Gilles en enlève alors 4. Expliquer comment Carla peut gagner.

(b) Supposons qu'il y a 10 cure-dents au départ. Gilles enlève 5 cure-dents. Expliquer pourquoi Gilles peut gagner, peu importe le nombre de cure-dents que Carla enlève à son tour.

(c) Supposons qu'il y a 9 cure-dents au départ. Gilles enlève 2 cure-dents. Expliquer pourquoi Gilles peut gagner, peu importe comment Carla joue par la suite.

3. Dans la figure suivante, le triangle ABC est équilatéral, ses côtés ayant chacun une longueur de 4. Les points P , Q et R sont choisis sur les côtés respectifs AB , BC et CA , de manière que $AP = BQ = CR = 1$.



- (a) Déterminer l'aire exacte du triangle ABC . Expliquer sa démarche.
- (b) Déterminer l'aire exacte des triangles PBQ et PQR . Expliquer sa démarche.
4. Une *permutation* d'un ensemble d'objets est un classement de ces objets dans un ordre particulier. Par exemple, 312 et 231 sont deux des permutations possibles de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.
- (a) Déterminer combien il existe de triplets (a, b, c) tels que les nombres a , b et c soient trois nombres différents tirés de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, de manière que $a < b$ et $b > c$. Expliquer sa démarche.
- (b) Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ qui contiennent les chiffres 254, dans cet ordre en positions adjacentes? Expliquer sa démarche.
- (c) On dit qu'une permutation admet un *sommet local* lorsqu'elle contient une suite de 3 nombres dans laquelle le nombre du milieu est supérieur à ses deux voisins. Par exemple, la permutation 35241 de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ contient deux sommets locaux. Déterminer le nombre moyen de sommets locaux dans les 40 320 permutations possibles de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Expliquer et justifier sa démarche.