



The CENTRE for EDUCATION
in MATHEMATICS and COMPUTING
cemc.uwaterloo.ca

Kompetisi Fermat 2020

(Kelas 11)

Selasa, 25 Februari 2020
(di Amerika Utara dan Amerika Selatan)

Rabu, 26 Februari 2020
(di Luar Amerika Utara dan Amerika Selatan)

Jawaban

1. Karena $OPQR$ adalah persegi panjang dengan dua sisi terletak pada sumbu, maka sisinya horizontal dan vertikal.
 Karena PQ horizontal, koordinat- y dari Q adalah sama seperti koordinat- y dari P , yaitu 3.
 Karena QR vertikal, koordinat- x dari Q adalah sama seperti koordinat- x dari R , yaitu 5.
 Jadi, koordinat Q adalah $(5, 3)$.

JAWABAN: (B)

2. Menghitung,

$$3 \times 2020 + 2 \times 2020 - 4 \times 2020 = 2020 \times (3 + 2 - 4) = 2020 \times 1 = 2020$$

Atau,

$$3 \times 2020 + 2 \times 2020 - 4 \times 2020 = 6060 + 4040 - 8080 = 10\,100 - 8080 = 2020$$

JAWABAN: (E)

3. Jabarkan lalu sederhanakan, $(x + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 2x + 1) - x^2 = 2x + 1$.

JAWABAN: (A)

4. Barisan yang ditulis Ewan dimulai dengan 3 dan setiap bilangan berikutnya adalah 11 lebih besar dari bilangan sebelumnya.

Karena setiap bilangan di barisan adalah beberapa bilangan 11-an lebih 3, ini berarti setiap bilangan di barisan adalah 3 lebihnya dari kelipatan 11. Selanjutnya, setiap bilangan bulat positif yang memenuhi adalah barisan Ewan.

Karena $110 = 11 \times 10$ adalah kelipatan 11, maka $113 = 110 + 3$ adalah 3 lebihnya dari kelipatan 11, sehingga ini berada di barisan Ewan.

Cara lain, kita bisa menuliskan barisan Ewan sampai ke rentang yang sesuai

$$3, 14, 25, 36, 47, 58, 69, 80, 91, 102, 113, 124, \dots$$

JAWABAN: (A)

5. Menghitung, $\sqrt{\frac{\sqrt{81} + \sqrt{81}}{2}} = \sqrt{\frac{9 + 9}{2}} = \sqrt{9} = 3$.

JAWABAN: (A)

6. Karena 12 dan 21 adalah kelipatan 3 ($12 = 4 \times 3$ dan $21 = 7 \times 3$), jawabannya adalah bukan (A) atau (D).

16 adalah kuadrat sempurna ($16 = 4 \times 4$) sehingga jawabannya bukan (C).

Jumlah digit dari 26 adalah 8, yaitu bukan bilangan prima, jadi jawabannya bukan (E).

Karena 14 bukan kelipatan tiga, 14 bukan kuadrat sempurna, dan jumlah digit dari 14 adalah $1 + 4 = 5$ yaitu bilangan prima, maka jawabannya adalah (B) 14.

JAWABAN: (B)

7. Karena WXY adalah garis lurus, maka $p^\circ + q^\circ + r^\circ + s^\circ + t^\circ = 180^\circ$ sehingga $p + q + r + s + t = 180$. Untuk menghitung rata-rata p , q , r , s , dan t , kita tambahkan lima bilangan dan dibagi oleh 5.

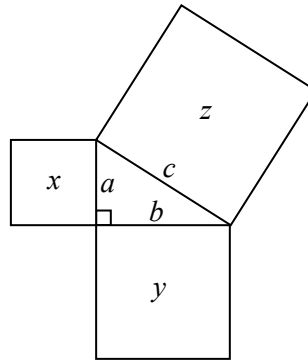
Jadi, rata-rata p , q , r , s , dan t adalah $\frac{p + q + r + s + t}{5} = \frac{180}{5} = 36$.

JAWABAN: (B)

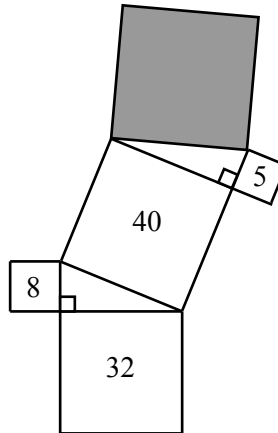
8. Karena $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$, maka $8^{20} = (2^3)^{20} = 2^{3 \times 20} = 2^{60}$.
 Jadi, jika $2^n = 8^{20}$, maka $n = 60$.

JAWABAN: (B)

9. Teorema Pythagoras menyatakan bahwa jika segitiga siku-siku mempunyai panjang sisi a , b dan c , dengan c hipotenusa, maka $a^2 + b^2 = c^2$.
 Karena luas persegi yang sisinya a adalah a^2 , Teorema Pythagoras bisa dibunyikan kembali untuk menyatakan bahwa jumlah luas persegi yang digambar di dua sisi yang lebih pendek sama dengan luas persegi yang digambar di hipotenusanya. (Pada gambar di bawah, ini menyatakan bahwa $x + y = z$ dimana x , y dan z adalah luas beberapa persegi.)



Dari gambar yang diberikan, menggambarkan bahwa luas daerah yang tidak ditandai, yaitu persegi yang tidak diarsir adalah $8 + 32 = 40$.



Ini artinya bahwa luas persegi yang diarsir adalah $40 + 5 = 45$.

JAWABAN: (B)

10. Diketahui bahwa s dan t adalah bilangan bulat positif dan $s(s - t) = 29$.
 Karena s dan t adalah positif, maka $s - t$ adalah kurang dari s .
 Karena s adalah positif dan 29 adalah positif dan $s(s - t) = 29$, maka $s - t$ juga pasti positif.
 Karena 29 adalah bilangan prima, satu-satunya cara yang bisa ditulis sebagai hasil kali dua bilangan bulat positif adalah $29 = 29 \cdot 1$.
 Karena $s(s - t) = 29$ dan $s > s - t$, maka kita harus mempunyai $s = 29$ dan $s - t = 1$.
 Karena $s = 29$ dan $s - t = 1$, didapat $t = 28$.
 Oleh karena itu, $s + t = 29 + 28 = 57$.

JAWABAN: (C)

11. Masing-masing kolom pertama dan kedua berisi 4 X, yang artinya bahwa setidaknya 2 X harus dipindahkan. Sekarang kita akan menunjukkan bahwa ini sebenarnya bisa diselesaikan dengan memindahkan 2 X.

Setiap baris pertama dan kedua berisi X, sehingga kita memindahkan dua X di diagonal utama, karena ini akan memindahkan beberapa X dari kolom pertama dan kedua dan baris pertama dan kedua secara bersamaan.

Kolom kelima dimulai dengan satu X, sehingga kita memindahkan dua X ke kolom kelima dan ke baris yang hanya berisi 2 X. Sehingga didapat:

O	X	X	X	
X	O	X		X
X	X			X*
X	X		X	
		X	X	X*

(Kotak-kotak tempat X yang telah dipindahkan ditandai dengan O; kotak-kotak tempat X dipindahkan ditandai dengan X*'s.)

Jadi, paling sedikit X yang harus dipindahkan adalah 2.

JAWABAN: (B)

12. Karena Harriet berlari 720 m dengan kecepatan 3 m/s, maka ini menghabiskan waktu $\frac{720 \text{ m}}{3 \text{ m/s}} = 240$ detik.

Totalnya, Harriet berlari 1000 m dalam 380 detik, sehingga sisa jalur larinya berjarak $1000 \text{ m} - 720 \text{ m} = 280 \text{ m}$ dimana dia berlari dalam $380 \text{ detik} - 240 \text{ detik} = 140 \text{ detik}$.

Karena dia berlari dalam sisa jalur ini pada kecepatan konstan v m/s, maka $\frac{280 \text{ m}}{140 \text{ s}} = v \text{ m/s}$ artinya $v = 2$.

JAWABAN: (A)

13. Karena jumlah dua bilangan yang berdekatan adalah konstan, maka $2 + x = x + y$.

Ini artinya bahwa $y = 2$ membuat daftarnya menjadi 2, x , 2, 5.

Ini artinya bahwa jumlah dua bilangan yang berdekatan adalah $2 + 5 = 7$, sehingga $x = 5$.

Jadi, $x - y = 5 - 2 = 3$.

JAWABAN: (C)

14. Jika $\frac{2}{7}$ dari bunga mawar berwarna kuning, maka sisa $\frac{5}{7}$ dari bunga mawarnya berwarna merah. Karena ada 30 mawar merah dan ini merupakan $\frac{5}{7}$ dari bunga mawar, maka $\frac{1}{7}$ dari total banyaknya mawar adalah $30 \div 5 = 6$, yang artinya bahwa terdapat total $6 \times 7 = 42$ bunga mawar.

Jika ada 42 bunga mawar yaitu 30 merah dan sisanya kuning, maka ada $42 - 30 = 12$ mawar kuning.

Karena awalnya terdapat 19 bunga kuning, maka $19 - 12 = 7$ mawar kuning dibuang.

JAWABAN: (E)

15. Ketika $N = 3x + 4y + 5z$ dengan setiap x, y dan z sama dengan 1 atau -1 , ada 8 kombinasi yang mungkin dari nilai x, y dan z :

x	y	z	N
1	1	1	12
1	1	-1	2
1	-1	1	4
1	-1	-1	-6
-1	1	1	6
-1	1	-1	-4
-1	-1	1	-2
-1	-1	-1	-12

Dari informasi ini, N tidak sama dengan 0, N tidak ganjil, N bisa sama dengan 4, dan N selalu genap.

Jadi, hanya ada satu dari empat pernyataan yang benar.

JAWABAN: (B)

16. Kita perhatikan bahwa $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$.

Nilai terbesar yang mungkin dari $\frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$ akan terjadi ketika nilai $\frac{y}{x}$ sebesar mungkin.

Karena x selalu negatif dan y selalu positif, maka $\frac{y}{x}$ negatif.

Jadi, karena $\frac{y}{x}$ sebesar mungkin, maka nilai negatifnya harus sekecil mungkin (contohnya sedekat mungkin dengan 0).

Karena x adalah negatif dan y positif, ini terjadi jika x bernilai se-negatif mungkin dan y sekecil mungkin. Yaitu, jika $x = -4$ dan $y = 2$.

Jadi, nilai terbesar yang mungkin dari $\frac{x+y}{x}$ adalah $1 + \frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$.

JAWABAN: (E)

17. Karena $\triangle PQR$ siku-siku di Q , luasnya sama dengan $\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot QR$.

Karena luasnya 30 dan $PQ = 5$, maka $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot QR = 30$ sehingga $QR = 30 \cdot \frac{2}{5} = 12$.

Dengan Teorema Pythagoras, kita tahu

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

Karena $PR > 0$, maka $PR = \sqrt{169} = 13$.

Jika sekarang kita perhatikan $\triangle PQR$, karena mempunyai alas PR dan tinggi tegak lurus QS , kita melihat bahwa luasnya sama dengan $\frac{1}{2} \cdot PR \cdot QS$.

Karena luasnya 30 dan $PR = 13$, maka $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot QS = 30$ yaitu hasilnya $QS = 30 \cdot \frac{2}{13} = \frac{60}{13}$.

JAWABAN: (A)

18. Misal empat tim dalam sebuah perlombaan disebut W, X, Y, dan Z.
Maka totalnya ada 6 pertandingan yang dimainkan:

W lawan X, W lawan Y, W lawan Z, X lawan Y, X lawan Z, Y lawan Z

Di setiap pertandingan yang dimainkan, satu tim yang menang mendapat 3 poin dan tim yang kalah mendapat 0 poin (Jadi total 3 poin antara dua tim), atau setiap tim diberikan 1 poin untuk seri (totalnya 2 poin antara dua tim).

Karena 6 pertandingan dimainkan, maka secara teori maksimum poin yang diberikan adalah $6 \cdot 3 = 18$ dan secara teori minimum poin yang diberikan adalah $6 \cdot 2 = 12$.

Secara khusus, ini artinya bahwa tidak mungkin total banyak poinnya 11.

Kita bisa menunjukkan bahwa setiap kemungkinan dari 12 sampai 18 poin, inklusif, adalah mungkin.

Jadi, S tidak bisa 11.

JAWABAN: (C)

19. Jika $(3 + 2x + x^2)(1 + mx + m^2x^2)$ dijabarkan, suku yang memuat x^2 dihasilkan dari perkalian sebuah konstanta dengan suku yang memuat x^2 atau perkalian dua suku yang memuat x .
Dengan kata lain, suku yang memuat x^2 akan menjadi

$$3 \cdot m^2x^2 + 2x \cdot mx + x^2 \cdot 1 = 3m^2x^2 + 2mx^2 + x^2 = (3m^2 + 2m + 1)x^2$$

Diketahui bahwa koefisien dari suku ini sama dengan 1, berarti $3m^2 + 2m + 1 = 1$ sehingga $3m^2 + 2m = 0$ atau $m(3m + 2) = 0$, artinya bahwa $m = 0$ atau $m = -\frac{2}{3}$.

Jumlah nilai yang mungkin dari m adalah $-\frac{2}{3}$.

JAWABAN: (B)

20. Ketika sebuah titik dibuang dari sebuah sisi dengan banyak titik genap, selanjutnya banyak titiknya menjadi ganjil.

Ketika sebuah titik dibuang dari sebuah sisi dengan banyak titik ganjil, selanjutnya banyak titiknya genap.

Awalnya, ada 3 sisi dengan banyak titik genap dan 3 sisi dengan banyak titik ganjil.

Jika sebuah titik dibuang dari sebuah sisi dengan banyak titik genap, maka ada 4 sisi dengan banyak titik ganjil dan 2 sisi dengan banyak titik genap. Ini artinya peluang hasil putaran adalah sisi atas ganjil, setelah satu titik dibuang adalah $\frac{4}{6}$ pada kasus ini.

Jika sebuah titik dibuang dari satu sisi yang banyak titiknya ganjil, maka ada 2 sisi dengan banyak titik ganjil dan 4 sisi dengan banyak titik genap. Ini artinya peluang hasil putaran adalah sisi atas ganjil, setelah satu titik dibuang adalah $\frac{2}{6}$ pada kasus ini.

Karena ada $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$ titik di beberapa sisi, maka peluang sebuah titik dibuang dari sisi dengan 2 titik adalah $\frac{2}{27}$, peluang dari sisi dengan 3 titik adalah $\frac{3}{27}$, dan seterusnya.

Jadi, peluang sebuah titik dibuang dari sisi dengan 2 titik dan kemudian hasil putarannya sisi atas ganjil adalah hasil kali peluangnya yaitu $\frac{2}{27} \cdot \frac{2}{3}$, karena sekarang ada 4 sisi ganjil dan 2 sisi genap.

Begitu juga, peluang bahwa sebuah titik dibuang dari sisi dengan 3 titik dan kemudian hasil putaran adalah sisi atas ganjil yaitu $\frac{3}{27} \cdot \frac{1}{3}$.

Melanjutkan cara ini, peluang hasil putaran adalah sisi atas ganjil setelah sebuah titik dibuang adalah $\frac{2}{27} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{27} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{27} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{27} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{27} \cdot \frac{2}{3} + \frac{7}{27} \cdot \frac{1}{3}$.

Ini sama dengan $\frac{2}{3} \cdot (\frac{2}{27} + \frac{4}{27} + \frac{6}{27}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{27} + \frac{5}{27} + \frac{7}{27}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{27} + \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{27} = \frac{8}{27} + \frac{5}{27} = \frac{13}{27}$.

JAWABAN: (C)

21. Jika hasil kali tiga bilangan x , 36 dan y adalah 2592, maka $x \cdot 36 \cdot y = 2592$ sehingga $xy = \frac{2592}{36} = 72$.

Jika x dan y bilangan bulat positif dengan $xy = 72$, maka kita mempunyai peluang berikut:

x	y	$x + y$
72	1	73
36	2	38
24	3	27
18	4	22
12	6	18
9	8	17

Kita telah mengasumsikan bahwa $x > y$ karena kita belum menetapkan susunan untuk x , 36 dan y .

Diketahui bahwa kita ingin menempatkan empat pasang bilangan di lingkaran luar sedemikian sehingga 9 bilangannya berbeda dan jumlah 9 bilangan sebesar mungkin.

Dengan kata lain, kita ingin memilih 4 dari 6 pasang di tabel di atas (ingat kita tidak bisa memilih pasangan 36 dan 2 karena 36 sudah berada di lingkaran pusat) untuk membuat jumlahnya sebesar mungkin.

Karena kita mengetahui jumlah pasangan, kita pilih pasangan dengan empat jumlah terbesar. Ini artinya bahwa jumlah 9 bilangannya adalah $(72 + 1) + (24 + 3) + (18 + 4) + (12 + 6) + 36$ yaitu sama dengan $73 + 27 + 22 + 18 + 36$ atau 176.

JAWABAN: (B)

22. Karena $x^2 + 3xy + y^2 = 909$ dan $3x^2 + xy + 3y^2 = 1287$, maka

$$\begin{aligned}(x^2 + 3xy + y^2) + (3x^2 + xy + 3y^2) &= 909 + 1287 \\ 4x^2 + 4xy + 4y^2 &= 2196 \\ x^2 + xy + y^2 &= 549\end{aligned}$$

Karena $x^2 + 3xy + y^2 = 909$ dan $x^2 + xy + y^2 = 549$, maka

$$\begin{aligned}(x^2 + 3xy + y^2) - (x^2 + xy + y^2) &= 909 - 549 \\ 2xy &= 360 \\ xy &= 180\end{aligned}$$

Karena $x^2 + 3xy + y^2 = 909$ dan $xy = 180$, maka

$$\begin{aligned}(x^2 + 3xy + y^2) - xy &= 909 - 180 \\ x^2 + 2xy + y^2 &= 729 \\ (x + y)^2 &= 27^2\end{aligned}$$

Jadi, $x + y = 27$ atau $x + y = -27$. Ini juga menunjukkan bahwa $x + y$ tidak bisa sama dengan 39, 29, 92, dan 41.

(Sebenarnya kita bisa menyelesaikan sistem persamaan $x + y = 27$ dan $xy = 180$ untuk x dan y untuk menunjukkan bahwa ada bilangan riil x dan y yang merupakan solusi dari sistem persamaan awal.)

Jadi, nilai $x + y$ adalah (A) 27.

JAWABAN: (A)

23. *Jawaban 1*

Karena $f(x) = ax + b$ untuk semua bilangan riil x , maka $f(t) = at + b$ untuk beberapa bilangan riil t .

Ketika $t = bx + a$, didapat $f(bx + a) = a(bx + a) + b = abx + (a^2 + b)$.

Diketahui juga $f(bx + a) = x$ untuk semua bilangan riil x .

Ini artinya $abx + (a^2 + b) = x$ untuk semua bilangan riil x sehingga $(ab - 1)x + (a^2 + b) = 0$ untuk semua bilangan riil x .

Agar ini benar, kasusnya haruslah $ab = 1$ dan $a^2 + b = 0$.

Dari persamaan kedua $b = -a^2$ yaitu $a(-a^2) = 1$ sehingga $a^3 = -1$, yang artinya $a = -1$.

Karena $b = -a^2$, maka $b = -1$ juga, berarti $a + b = -2$.

Jawaban 2

Karena $f(x) = ax + b$ untuk semua x , maka ketika $x = a$, didapat $f(a) = a^2 + b$.

Karena $f(bx + a) = x$ untuk semua x , maka ketika $x = 0$, didapat $f(a) = 0$.

Dengan membandingkan nilai untuk $f(a)$, didapat $a^2 + b = 0$ atau $b = -a^2$.

Menghasilkan $f(x) = ax - a^2$ untuk semua bilangan riil x dan $f(-a^2x + a) = x$ untuk semua bilangan riil x .

Karena $f(-a^2x + a) = x$ untuk semua x , maka ketika $x = -1$, didapat $f(a^2 + a) = -1$.

Karena $f(x) = ax - a^2$ untuk semua x , maka ketika $x = a^2 + a$, didapat $f(a^2 + a) = a(a^2 + a) - a^2$.

Membandingkan nilai untuk $f(a^2 + a)$, didapat $a(a^2 + a) - a^2 = -1$ atau $a^3 = -1$.

Karena a bilangan riil, maka $a = -1$.

Karena $b = -a^2$, maka $b = -1$, berarti $a + b = -2$.

Mengecek ulang, kita lihat jika $f(x) = -x - 1$, maka $f(-x - 1) = -(-x - 1) - 1 = x$, memenuhi.

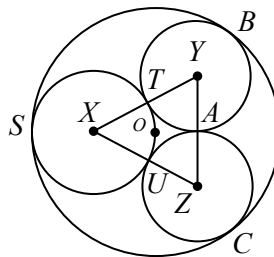
JAWABAN: (E)

24. Misal pusat lingkaran terbesar adalah O .

Misal lingkaran dengan pusat X menyinggung lingkaran terbesar di S dan dua lingkaran dengan pusat Y dan Z di T dan U , secara berurutan.

Misal lingkaran dengan pusat Y dan Z menyinggung satu sama lain di A , dan lingkaran terbesar di B dan C , secara berurutan.

Hubungkan X ke Y , X ke Z , dan Y ke Z .



(Perhatikan gambar di atas telah dibuat ulang disini sehingga titik pusat X benar-benar tampak melewati pusat lingkaran terbesar.)

Karena lingkaran bersinggungan di titik T dan U , segmen garis XY dan XZ melalui T dan U , secara berurutan.

Selanjutnya, $XY = XT + TY = 1 + r$, karena lingkaran dengan pusat X dan Y berjari-jari 1 dan r , secara berurutan.

Begitu juga, $XZ = 1 + r$.

Juga, $YA = ZA = YB = ZC = r$, karena ini adalah jari-jari dari dua lingkaran.

Ketika satu lingkaran berada di dalam lingkaran lain, dan dua lingkaran menyinggung di satu

titik, maka jari-jari dua lingkaran yang melalui titik ini saling menumpuk. Hal ini karena lingkaran mempunyai garis singgung yang sama di titik dimana keduanya bersentuhan dan garis singgung ini akan tegak lurus terhadap masing-masing jari-jarinya.

Karena lingkaran dengan pusat X menyetuh lingkaran terbesar di S , maka X terletak di OS . Di lingkaran terbesar, perhatikan diameter yang melalui X .

Karena lingkaran dengan pusat X melalui O , maka jari-jari lingkaran terbesar adalah dua kali lingkaran dengan pusat X , yaitu 2 . Karena $XO = 1$.

Selanjutnya, kita hubungkan O ke B . Karena lingkaran dengan pusat O dan Y menyetuh di B , maka OB melalui Y . Ini artinya bahwa $OY = OB - BY = 2 - r$. Begitu juga, $OZ = 2 - r$. Selanjutnya, dengan simetri di lingkaran terbesar, diameter yang melalui X juga melalui A , yaitu titik dimana dua lingkaran terkecil bersentuhan:

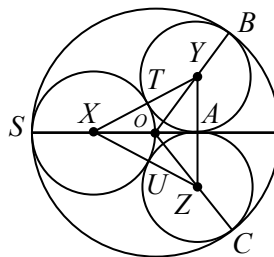
Untuk melihat ini secara formal, gambar garis singgung yang melalui A ke lingkaran dengan pusat Y dan Z .

Garis ini adalah tegak lurus ke YZ , karena ini adalah garis singgung ke kedua lingkaran.

Karena $\triangle OYZ$ adalah sama kaki dengan $OY = OZ$, maka garis tingginya melalui titik tengah A di alasnya dan melalui O .

Begitu juga, $\triangle XYZ$ adalah sama kaki dengan $XY = XZ$ sehingga garis tingginya melalui A dan X .

Karena garis yang tegak lurus YZ di A melalui kedua O dan X , maka ini adalah diameter yang melalui X .



Sekarang, kita perhatikan $\triangle XYA$ dan $\triangle OYA$, yang masing-masing siku-siku di A . Dengan Teorema Pythagoras,

$$OA = \sqrt{OY^2 - YA^2} = \sqrt{(2 - r)^2 - r^2} = \sqrt{4 - 4r + r^2 - r^2} = \sqrt{4 - 4r}$$

Lagi, dengan Teorema Pythagoras,

$$\begin{aligned} XA^2 + YA^2 &= XY^2 \\ (XO + OA)^2 + r^2 &= (1 + r)^2 \\ (1 + \sqrt{4 - 4r})^2 &= 1 + 2r + r^2 - r^2 \\ 1 + 2\sqrt{4 - 4r} + (4 - 4r) &= 1 + 2r \\ 2\sqrt{4 - 4r} &= 6r - 4 \\ \sqrt{4 - 4r} &= 3r - 2 \\ 4 - 4r &= (3r - 2)^2 \quad (\text{kuadratkan kedua sisi}) \\ 4 - 4r &= 9r^2 - 12r + 4 \\ 8r &= 9r^2 \end{aligned}$$

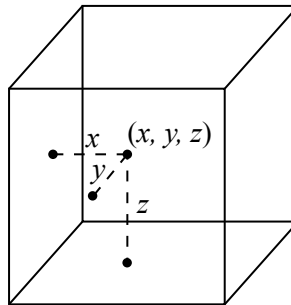
Karena $r \neq 0$, maka $9r = 8$ sehingga $r = \frac{8}{9} \approx 0,889$.

Dari pilihan jawaban, ini mendekati (E) 0,89.

25. Perhatikan sebuah kubus $1 \times 1 \times 1$.

Kita gambarkan pasangan tiga bilangan riil (x, y, z) dengan $0 \leq x \leq 1$ dan $0 \leq y \leq 1$ dan $0 \leq z \leq 1$ dengan sebuah titik di dalam kubus dengan memisalkan x menjadi jarak tegak lurus titik ke sisi kiri, y menjadi jarak tegak lurus titik ke sisi depan, dan z menjadi jarak tegak lurus dari sisi bawah.

Kita sebut titik ini (x, y, z) . Memilih x, y dan z secara acak dan independen antara 0 dan 1 adalah ekuivalen dengan memilih titik (x, y, z) secara acak dan seragam pada kubus atau di dalam kubus.



Kondisi bahwa $-\frac{1}{2} < x - y < \frac{1}{2}$ dan $-\frac{1}{2} < x - z < \frac{1}{2}$ membatasi nilai x, y dan z yang bisa dipilih, yaitu mentranslasikan ke titik-titik yang memenuhi syarat yang dibatasi di dalam kubus. Jadi, batas ini menjadi sebuah daerah di dalam kubus.

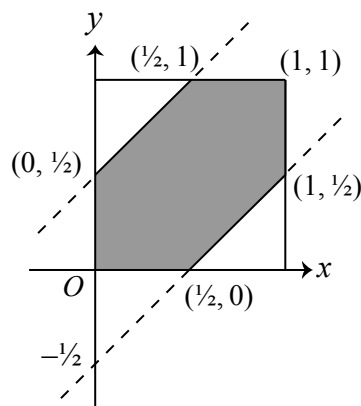
Peluang bahwa sebuah titik yang memenuhi syarat dipilih secara acak di dalam kubus akan sama dengan volume daerah yang memenuhi syarat dibagi volume keseluruhan kubus.

Karena volume kubus adalah 1, maka peluangnya akan sama dengan volume daerah yang memenuhi syarat.

Sekarang perhatikan daerah di bidang- xy yang didefinisikan oleh $-\frac{1}{2} < x - y < \frac{1}{2}$.

Dengan menyusun ulang pertidaksamaan ini, didapat $x - \frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2}$, yang artinya bahwa sebuah titik (x, y) yang memenuhi kondisi ini terletak di atas garis dengan persamaan $y = x - \frac{1}{2}$ dan di bawah garis dengan persamaan $y = x + \frac{1}{2}$.

Batasi untuk $0 \leq x \leq 1$ dan $0 \leq y \leq 1$, didapat daerah yang ditunjukkan sebagai berikut:

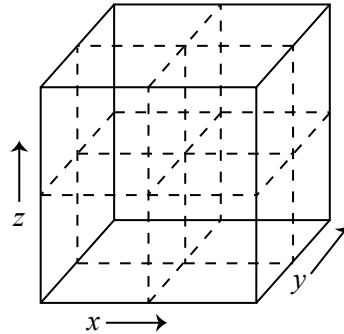


Karena sebuah titik (x, y, z) dalam daerah memenuhi $-\frac{1}{2} < x - y < \frac{1}{2}$, kondisi ini memungkinkan kita "mengiris" kubus dari atas menjaga bagian yang terlihat seperti daerah di atas. Titik-titik yang tersisa adalah yang memenuhi syarat.

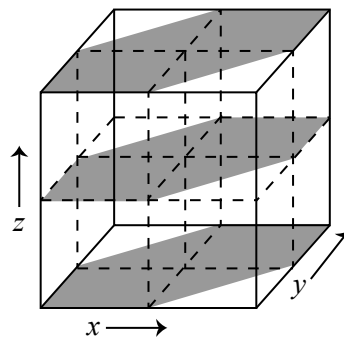
Begitu juga, kondisi $-\frac{1}{2} < x - z < \frac{1}{2}$ menghasilkan $x - \frac{1}{2} < z < x + \frac{1}{2}$, yang mempunyai bentuk yang sama di bidang- xz .

Jadi, kita bisa mengiris kubus dari depan ke belakang untuk melihat bentuknya. Sekarang kita perlu menentukan volume daerah yang tersisa.

Untuk menentukan volume daerah, kita membagi kubus $1 \times 1 \times 1$ ke dalam delapan kubus yang masing-masing berukuran $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.



Ketika kubus ini diiris oleh batasan $x - \frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2}$, bagian kiri belakang dan kanan depan kubus di lapisan atas dan bawah diiris setengah.



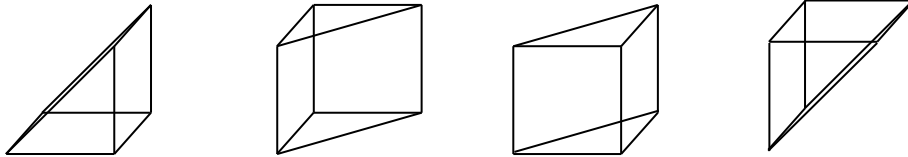
Ketika kubus ini diiris oleh batasan $x - \frac{1}{2} < z < x + \frac{1}{2}$, bagian kiri atas dan kanan bawah kubus di depan dan belakang diiris setengah.

Delapan kubus kecil diiris sebagai berikut:

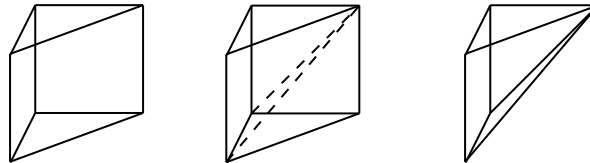
Kubus kecil	Dipotong oleh $x - \frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2}$	Dipotong oleh $x - \frac{1}{2} < z < x + \frac{1}{2}$
Bawah depan kiri	Tidak	Tidak
Bawah depan kanan	Ya	Ya
Bawah belakang kiri	Ya	Tidak
Bawah belakang kanan	Tidak	Ya
Atas depan kiri	Tidak	Ya
Atas depan kanan	Ya	Tidak
Atas belakang kiri	Ya	Ya
Atas belakang kanan	Tidak	Tidak

Ini artinya bahwa kita bisa memperhatikan kubus kecil sebagai berikut:

- Bawah depan kiri dan atas belakang kanan: kubus ini tidak dipotong di kedua arah sehingga berkontribusi $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ ke volumenya.
- Bawah belakang kiri, bawah belakang kanan, atas depan kiri, atas depan kanan: kubus-kubus ini dipotong setengah di satu arah dan tidak dipotong di arah yang lain, sehingga berkontribusi $\frac{1}{2}$ dari volume (atau masing-masing $\frac{1}{16}$) terhadap volume.



- Atas belakang kiri dan bawah depan kanan: Masing-masing kubus ini dipotong setengah dalam dua arah. Potongan pertama memotong kubus menjadi prisma segitiga, yang volumenya setengah dari volume kubus kecil, atau $\frac{1}{16}$. Potongan kedua membuat sebuah limas dengan alas persegi dari prisma ini. Limas mempunyai alas dengan panjang rusuk $\frac{1}{2}$ dan tinggi $\frac{1}{2}$, sehingga volumenya $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.



Jadi, volumenya adalah $2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$.

Jadi ini artinya peluangnya adalah $\frac{7}{12}$.

JAWABAN: (B)