The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

cemc.uwaterloo.ca

Kompetisi Cayley 2020

(Kelas 10)

Selasa, 25 Februari 2020

(di Amerika Utara dan Amerika Selatan)

Rabu, 26 Februari 2020

(di Luar Amerika Utara dan Amerika Selatan)

Jawaban

1. Sederhanakan, $\dfrac{20-20}{20+20} = \dfrac{0}{40} = 0$.

   Jawaban: (A)

2. Jika $x = 3$ dan $y = 4$, didapat $xy - x = 3 \times 4 - 3 = 12 - 3 = 9$.
   Atau, $xy - x = x(y-1) = 3 \times 3 = 9$.

   Jawaban: (D)

3. Karena $OPQR$ adalah sebuah persegi panjang dengan dua sisi pada sumbu, maka sisinya adalah horizontal dan vertikal.
   Karena PQ adalah horizontal, koordinat-y dari Q adalah sama seperti koordinat-y dari P, yaitu 3.
   Karena QR adalah vertikal, koordinat-x dari Q adalah sama seperti koordinat-x dari R, yaitu 5.
   Jadi, koordinat Q adalah $(5, 3)$.

   Jawaban: (B)

4. Jika $0 < a < 20$, maka $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{20}$. Jadi, $\dfrac{1}{15} > \dfrac{1}{20}$ dan $\dfrac{1}{10} > \dfrac{1}{20}$.
   Juga, $\dfrac{1}{20} = 0.05$ yaitu kurang dari kedua 0.5 dan 0.055.
   Terakhir, $\dfrac{1}{20} > \dfrac{1}{25}$ karena $0 < 20 < 25$.
   Jadi, $\dfrac{1}{25}$ adalah satu-satunya pilihan yang kurang dari $\dfrac{1}{20}$.

   Jawaban: (B)

5. Karena QST sudut pelurus, maka $\angle QSP = 180^\circ - \angle TSP = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.
   Sekarang $\angle RQS$ adalah sudut luar untuk $\triangle QSP$.
   Ini artinya bahwa$\angle RQS = \angle QSP + \angle SPQ$.
   Dengan menggunakan informasi itu kita tahu, $150^\circ = 130^\circ + x^\circ$ sehingga $x = 150 - 130 = 20$.
   (Cara lain, kita bisa perhatikan bahwa $\angle RQS$ dan $\angle SQP$ adalah pelurus dan kemudian digunakan untuk menjumlahkan sudut $\triangle QSP$.)

   Jawaban: (E)

6. Dari diagram batang, Matilda melihat 6 goldfinches, 9 sparrows, dan 5 grackles.
   Secara total, dia melihat $6 + 9 + 5 = 20$ burung.
   Ini artinya persentase burung goldfinches adalah $\dfrac{6}{20} \times 100\% = \dfrac{3}{10} \times 100\% = 30\%$.

   Jawaban: (C)

7. Karena rata-rata m dan n adalah 5, maka $\dfrac{m+n}{2} = 5$ yang artinya bahwa $m + n = 10$.
   Agar n nilainya sebesar mungkin, kita perlu membuat m sekecil mungkin.
   Karena m dan n adalah bilangan bulat positif, maka nilai terkecil yang mungkin dari m adalah 1, yang artinya bahwa nilai terbesar yang mungkin dari n adalah $n = 10 - m = 10 - 1 = 9$.

   Jawaban: (C)

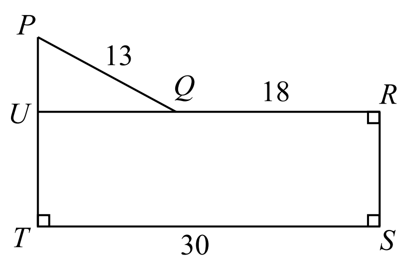
8. Untuk menentukan 30% dari \$200 hadiah Roman, kita menghitung $\$200 \times 30\% = \$200 \times \frac{30}{100} = \$2 \times 30 = \$60$.
   Setelah Roman memberikan \$60 ke Jackie, dia mempunyai sisa $\$200 - \$60 = \$140$.
   Dia membagi 15% dari sisa ini kepada Dale dan Natalia.
   Total yang dia bagi adalah $\$140 \times 15\% = \$140 \times 0.15 = \$21$.
   Karena Roman membagi \$21 secara sama antara Dale dan Natalia, maka total Roman memberi Dale adalah $\$21 \div 2 = \$10.50$.

   Jawaban: (A)

9. Baris pertama mempunyai 0 kotak diarsir dan 1 kotak tidak diarsir.
Baris ke-2 mempunyai 1 kotak diarsir dan 2 kotak tidak diarsir.
Baris ke-3 mempunyai 2 kotak diarsir dan 3 kotak tidak diarsir.
Baris ke-4 mempunyai 3 kotak diarsir dan 4 kotak tidak diarsir.
Karena setiap baris mempunyai 2 kotak lebih banyak dari baris sebelumnya dan kotak di setiap baris selang seling antara diarsir dan tidak diarsir, maka setiap baris mempunyai tepat 1 kotak diarsir lebih banyak dari baris sebelumnya.
Ini artinya bahwa, dari baris ke-4 langsung ke baris 2020, totalnya ada $2020 - 4 = 2016$ kotak yang diarsir lagi yang ditambahkan.
Jadi, baris ke-2020 mempunyai $3 + 2016 = 2019$ kotak diarsir.

JAWABAN: (D)

10. Kita perpanjang RQ ke kiri sampai bertemu PT di titik U, seperti pada gambar.



Karena segi empat $URST$ mempunyai tiga sudut siku-siku, maka dia harus mempunyai empat sudut siku-siku sehingga disebut persegi panjang.
Jadi, $UT = RS$ dan $UR = TS = 30$.
Karena $UR = 30$, maka $UQ = UR - QR = 30 - 18 = 12$.
Sekarang $\triangle PQU$ adalah sudut siku-siku di U.
Dengan Teorema Pythagoras, karena $PU > 0$, kita mempunyai

$$PU = \sqrt{PQ^2 - UQ^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

Karena keliling $PQRST$ adalah 82, maka $13 + 18 + RS + 30 + (UT + 5) = 82$.
Karena $RS = UT$, maka $2 \times RS = 82 - 13 - 18 - 30 - 5 = 16$ sehingga $RS = 8$.
Akhirnya, kita bisa menghitung luas $PQRST$ dengan membaginya ke dalam $\triangle PQU$ dan persegi panjang $URST$.
Luas $\triangle PQU$ adalah $\frac{1}{2} \times UQ \times PU = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$.
Luas persegi panjang $URST$ adalah $RS \times TS = 8 \times 30 = 240$.
Jadi, luas segi lima $PQRST$ adalah $30 + 240 = 270$.

JAWABAN: (E)

11. Karena

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

maka

$$5 + 10 + 15 + \cdots + 40 + 45 = 5(1 + 2 + 3 + \cdots + 8 + 9) = 5(45) = 225$$

JAWABAN: (A)

12. Misal panjang, lebar dan tinggi prisma adalah bialngan bulat positif a, b dan c.
Karena volume prisma adalah 21, maka $abc = 21$.
Kita perhatikan bahwa setiap a, b dan c adalah sebuah pembagi positif dari 21.
Pembagi positif dari 21 adalah 1, 3, 7, dan 21, dan satu-satunya cara untuk menulis 21 sebagai sebuah hasil kali dari tiga bilangan bulat yang berbeda adalah $1 \times 3 \times 7 = 21$.
Jadi, panjang, lebar dan tinggi prisma pasti 1, 3, dan 7, dalam beberapa urutan.
Jumlahnya adalah $1 + 3 + 7 = 11$.

JAWABAN: (A)

13. Karena $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$, maka $8^{20} = (2^3)^{20} = 2^{3\times 20} = 2^{60}$.
Jadi, jika $2^n = 8^{20}$, maka $n = 60$.

JAWABAN: (B)

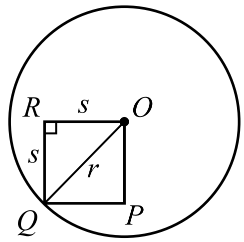
14. Karena $3 \times 5 \times 7 = 105$, maka nilai terbesar yang mungkin dari n adalah *setidaknya* 105.
Khususnya, nilai terbesar yang mungkin dari n harus positif.
Untuk hasil kali tiga bilangan menjadi positif, bisa saja ketiga bilangan positif (yaitu tidak ada bilangan negatif) atau satu bilangan positif dan dua negatif. (Jika banyaknya faktor negatif adalah ganjil, maka hasil kalinya negatif.)
Jika ketiganya semuanya positif, hasil kalinya adalah sebesar mungkin ketika tiga bilangannya pun sebesar mungkin. Dalam kasus ini, nilai terbesar dari n adalah $3 \times 5 \times 7 = 105$.
Jika salah satu bilangan adalah positif dan dua bilangan negatif, hasil kalinya adalah sebesar mungkin jika bilangan positifnya sebesar mungkin (7) dan hasil kali dua bilangan negatif juga sebesar mungkin.
Hasil kali dua bilangan negatif akan menjadi sebesar mungkin jika bilangan negatifnya masing-masing“se-negatif mungkin” (yaitu sejauh mungkin dari 0). Pada kasus ini, bilangan-bilangan ini adalah -4 dan -6 dengan hasil kali $(-4) \times (-6) = 24$. (Kita bisa memeriksa kemungkinan hasil kali dua bilangan negatif lainnya untuk melihat tidak ada lagi yang lebih besar.)
Jadi, nilai terbesar dari n pada kasus ini adalah $7 \times (-4) \times (-6) = 7 \times 24 = 168$.
Dengan menggabungkan dua kasus ini, nilai terbesar yang mungkin dari n adalah 168.

JAWABAN: (A)

15. Karena perbandingan kelereng hijau terhadap kuning terhadap merah adalah $3 : 4 : 2$, maka kita bisa memisalkan banyaknya kelereng hijau, kuning dan merah menjadi $3n$, $4n$ dan $2n$ untuk bilangan bulat positif n.
Karena 63 kelereng di kantong bukan merah maka jumlah banyaknya kelereng hijau dan kelereng kuning di kantong adalah 63.
Jadi, $3n + 4n = 63$ sehingga $7n = 63$ atau $n = 9$, artinya bahwa banyaknya kelereng merah di kantong adalah $2n = 2 \times 9 = 18$.

JAWABAN: (B)

16. Misal s adalah panjang sisi persegi. Jadi, $OR = RQ = s$.
Misal r adalah jari-jari lingkaran. Jadi, $OQ = r$ karena O adalah pusat lingkaran dan Q terletak di keliling lingkaran.
Karena persegi mempunyai sudut siku-siku di setiap titik sudutnya, maka $\triangle ORQ$ adalah sudut siku-siku di R.



Dengan menggunakan Teorema Pythagoras, $OR^2 + RQ^2 = OQ^2$ sehingga $s^2 + s^2 = r^2$ atau $2s^2 = r^2$.
Dalam bentuk r, luas lingkarannya adalah πr^2.
Karena diketahui luas lingkaran adalah 72π, maka $\pi r^2 = 72\pi$ atau $r^2 = 72$.
Karena $2s^2 = r^2 = 72$, maka $s^2 = 36$.
Dalam bentuk s, luas persegi adalah s^2, jadi luas perseginya adalah 36.

JAWABAN: (E)

17. Misal Carley membeli x kotak cokelat, y kotak mint dan z kotak karamel.
Totalnya, Carley akan mempunyai $50x$ buah cokelat (karena ada 50 buah cokelat di dalam satu kotak cokelat), $40y$ buah mint (karena ada 40 buah mint dalam satu kotak mint), dan $25z$ buah karamel (karena ada 25 buah karamel dalam satu kotak karamel).
Karena isi setiap kantong sama dan Carley tidak membuat kantong camilan yang tidak lengkap dan tidak ada permen yang tersisa, maka kasusnya haruslah $50x = 40y = 25z$.
Kita ingin menemukan nilai positif minimum yang mungkin dari $x + y + z$.
Dengan dibagi oleh faktor persekutuan 5, persamaan $50x = 40y = 25z$ menjadi $10x = 8y = 5z$.
Karena $10x$ adalah kelipatan 10 dan $8y$ adalah kelipatan 8 dan $10x = 8y$, kita mencari kelipatan terkecil dari 10 yang juga kelipatan 8.
Karena 10, 20 dan 30 bukan kelipatan 8, dan 40 adalah kelipatan 8, maka nilai terkecil yang mungkin dari $10x$ tampaknya adalah 40.
Pada kasus ini, $x = 4$, $y = 5$ dan $z = 8$ menghasilkan $10x = 8y = 5z = 40$, dan ini adalah bilangan bulat positif terkecil yang membentuk kesamaan ini.
Karena x, y dan z adalah masing-masing nilai terkecil, maka jumlah $x+y+z$ adalah juga yang terkecil.
Jadi, banyak minimum dari kotak yang Carley harus beli adalah $4 + 5 + 8 = 17$.

JAWABAN: (B)

18. *Jawaban 1*
Misal bahwa ketika Nate sampai tepat waktu, dia berkendara selama t jam.
Jika Nate sampai 1 jam lebih awal, dia sampai dalam $t - 1$ jam.
Jika Nate sampai 1 lebih lambat, dia sampai dalam $t + 1$ jam.
Karena jarak yang dia tempuh adalah sama untuk kedua kasus di atas serta jarak adalah sama dengan kecepatan kali waktu, maka $(60 \text{ km/jam}) \times ((t-1) \text{ jam}) = (40 \text{ km/jam}) \times ((t+1) \text{ jam})$.
Dengan menjabarkan ini, didapat $60t - 60 = 40t + 40$ sehingga $20t = 100$ atau $t = 5$.
Jarak total yang Nate tempuh adalah $(60 \text{ km/jam}) \times (4 \text{ jam}) = 240$ km.
Jika Nate menempuh jarak ini dalam 5 jam dengan kecepatan konstan, dia hendaknya mengendarai dengan kecepatan $\dfrac{240 \text{ km}}{5 \text{ jam}}$ yaitu 48 km/jam.

Jawaban 2

Misal bahwa jarak yang Nate tempuh adalah d km.

Karena mengendarai dengan kecepatan 40 km/jam menyebabkan Nate terlambat 1 jam dan mengendarai dengan kecepatan 60 km/jam menyebabkan Nate tiba lebih awal 1 jam, maka selisih antara panjangnya waktu tempuh pada dua kecepatan ini adalah 2 jam.

Karena waktu sama dengan jarak dibagi kecepatan, maka

$$\frac{d \text{ km}}{40 \text{ km/jam}} - \frac{d \text{ km}}{60 \text{ km/jam}} = 2 \text{ jam}$$

Dengan mengalikan kedua sisi dari persamaan dengan 120 km/jam, didapat

$$3d \text{ km} - 2d \text{ km} = 240 \text{ km}$$

Hasilnya $d = 240$.

Jadi, jarak yang Nate tempuh adalah 240 km.

Pada 40 km/jam, perjalanannya ditempuh selama 6 jam dan Nate terlambat 1 jam.

Untuk sampai tepat waktu, dia harus menempuh waktu 5 jam.

Untuk menempuh 240 km dalam 5 jam, Nate hendaknya berkendara dengan kecepatan konstan $\frac{240 \text{ km}}{5 \text{ jam}} = 48$ km/jam.

Jawaban: (D)

19. Untuk setiap 10 pertanyaan, setiap jawaban benar bernilai 5 poin, setiap pertanyaan yang tidak dijawab bernilai 1 poin, dan setiap jawaban salah bernilai 0 poin.

Jika 10 dari 10 pertanyaan dijawab dengan benar, total skornya adalah $10 \times 5 = 50$ poin.

Jika 9 dari 10 pertanyaan dijawab dengan benar, 0 atau 1 pertanyaan bisa saja tidak dijawab. Ini artinya total skornya adalah $9 \times 5 = 45$ poin atau $9 \times 5 + 1 = 46$ poin.

Jika 8 dari 10 pertanyaan dijawab dengan benar, 0 atau 1 atau 2 pertanyaan bisa saja tidak dijawab. Ini artinya total skornya adalah $8 \times 5 = 40$ poin atau $8 \times 5 + 1 = 41$ poin atau $8 \times 5 + 2 = 42$ poin.

Jika 7 dari 10 pertanyaan dijawab dengan benar, 0 atau 1 atau 2 atau 3 pertanyaan bisa saja tidak dijawab. Ini artinya bahwa total skornya adalah salah satu dari 35, 36, 37, atau 38 poin.

Jika 6 dari 10 pertanyaan dijawab dengan benar, 0 atau 1 atau 2 atau 3 atau 4 pertanyaan bisa saja tidak dijawab. Ini artinya total skornya adalah salah satu dari 30, 31, 32, 33, atau 34 poin.

Sejauh ini, kita telah melihat bahwa total poin berikut ini antara 30 dan 50, inklusif, adalah mungkin:

$$30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 45, 46, 50$$

yang artinya

$$39, 43, 44, 47, 48, 49$$

tidak mungkin.

Jika 5 pertanyaan atau kurang dijawab dengan benar, mungkinkah menemukan total poin setidaknya 39 poin?

Jawabannya adalah tidak, karena dalam kasus ini, banyaknya jawaban benar adalah paling banyak 5 dan banyaknya yang tidak terjawab paling banyak 10 (keduanya ini tidak bisa terjadi bersamaan) yaitu sama-sama akan menghasilkan paling besarnya $5 \times 5 + 10 = 35$ poin.

Jadi, ada 6 bilangan bulat antara 30 dan 50, inklusif, yang tidak mungkin menjadi total skor.

Jawaban: (D)

20. Kita menentukan kapan $3^m + 7^n$ habis dibagi 10 dengan melihat pada digit satuan dari $3^m + 7^n$. Untuk melakukannya, pertama kita melihat satu per satu pada digit satuan dari 3^m dan 7^n.

Digit satuan pangkat dari 3 berulang $3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, \ldots$.
Untuk melihat ini, kita perhatikan bahwa beberapa hasil pangkat dari 3 pertama yaitu

$$3^1 = 3 \quad 3^2 = 9 \quad 3^3 = 27 \quad 3^4 = 81 \quad 3^5 = 243 \quad 3^6 = 729$$

Karena digit satuan dari hasil kali bilangan bulat hanya bergantung pada digit satuan bilangan bulat yang dikalikan dan kita mengalikan dengan 3 untuk berpindah dari pangkat satu ke selanjutnya, maka ketika digit satuan berulang membentuk barisan, digit satuan berikutnya akan mengikuti pola yang sama.
Artinya digit satuan pangkat dari 3 berulang setiap empat pangkat dari 3.
Jadi, dari 100 pangkat dari 3 dalam bentuk 3^m dengan $1 \leq m \leq 100$, akan mempunyai 25 digit satuan 3, 25 digit satuan 9, 25 digit satuan 7, dan 25 digit satuan 1.

Digit satuan dari pangkat dari 7 berulang $7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, \ldots$.
Untuk melihat ini, kita perhatikan bahwa beberapa hasil pangkat dari 7 pertama yaitu

$$7^1 = 7 \quad 7^2 = 49 \quad 7^3 = 343 \quad 7^4 = 2401 \quad 7^5 = 16\,807 \quad 7^6 = 117\,649$$

Dengan menggunakan argumen yang sama seperti di atas, digit satuan dari pangkat 7 berulang setiap empat pangkat dari 7.
Karena 101 adalah 1 lebih banyak dari kelipatan 4, maka pangkat 7^{101} adalah berada di salah satu siklus ini sehingga digit satuan dari 7^{101} adalah 7.
Jadi, dari 105 pangkat dari 7 dalam bentuk 7^n dengan $101 \leq n \leq 205$, akan mempunyai 27 digit satuan 7, 26 digit satuan 9, 26 digit satuan 3, dan 26 digit satuan 1. (Disini, 105 pangkat termasuk 26 siklus lengkap dari 4 ditambah satu suku tambahan.)

Untuk $3^m + 7^n$ untuk mempunyai sebuah digit satuan 0 (jadi habis dibagi 10), salah satu dari pernyataan berikut adalah benar:

- digit satuan dari 3^m adalah 3 (25 nilai yang mungkin dari m) dan digit satuan dari 7^n adalah 7 (27 nilai yang mungkin dari n), atau
- digit satuan dari 3^m adalah 9 (25 nilai yang mungkin dari m) dan digit satuan dari 7^n adalah 1 (26 nilai yang mungkin dari n), atau
- digit satuan dari 3^m adalah 7 (25 nilai yang mungkin dari m) dan digit satuan dari 7^n adalah 3 (26 nilai yang mungkin dari n), atau
- digit satuan dari 3^m adalah 1 (25 nilai yang mungkin dari m) dan digit satuan dari 7^n adalah 9 (26 nilai yang mungkin dari n).

Jadi, banyaknya pasangan (m, n) yang mungkin adalah

$$27 \times 25 + 26 \times 25 + 26 \times 25 + 26 \times 25 = 25 \times (27 + 26 + 26 + 25) = 25 \times 105 = 2625$$

JAWABAN: (E)

21. Untuk menentukan banyaknya titik (x, y) pada garis $y = 4x + 3$ yang terletak di dalam daerah ini, kita menentukan banyaknya bilangan bulat x dengan $25 \leq x \leq 75$ yang memenuhi $y = 4x + 3$ yaitu sebuah bilangan bulat antara 120 dan 250.
Dengan kata lain, kita menentukan banyaknya bilangan bulat x dengan $25 \leq x \leq 75$ yaitu $120 \leq 4x + 3 \leq 250$ dan merupakan bilangan bulat.
Kita perhatikan bahwa, semakin x meningkat, nilai persamaan $4x + 3$ juga meningkat.
Begitu juga, ketika $x = 29$, didapat $4x + 3 = 119$, dan ketika $x = 30$, didapat $4x + 3 = 123$.
Selanjutnya, ketika $x = 61$, didapat $4x + 3 = 247$, dan ketika $x = 62$, didapat $4x + 3 = 251$.
Jadi, $4x + 3$ adalah antara 120 dan 250 tepatnya ketika $30 \leq x \leq 61$.
Ada $61 - 30 + 1 = 32$ yang memenuhi nilai x, sehingga ada 32 titik yang memenuhi kondisi itu.

JAWABAN: (D)

22. Karena $PT = 1$ dan $TQ = 4$, maka $PQ = PT + TQ = 1 + 4 = 5$.
$\triangle PSQ$ siku-siku di S dan mempunyai hipotenusa PQ.
Jadi kita bisa menerapkan Teorema Pythagoras untuk mendapatkan
$PS^2 = PQ^2 - QS^2 = 5^2 - 3^2 = 16$.
Karena $PS > 0$, maka $PS = 4$.
Perhatikan $\triangle PSQ$ dan $\triangle RTQ$.
Masing-masingnya adalah segitiga siku-siku dan mereka mempunyai sudut yang sama di Q.
Jadi, dua segitiga ini adalah sebangun.
Ini menyatakan bahwa $\dfrac{PQ}{QS} = \dfrac{QR}{TQ}$.
Dengan menggunakan panjang yang diketahui, $\dfrac{5}{3} = \dfrac{QR}{4}$ sehingga $QR = \dfrac{4 \cdot 5}{3} = \dfrac{20}{3}$.
Jadi, $SR = QR - QS = \dfrac{20}{3} - 3 = \dfrac{11}{3}$.

JAWABAN: (B)

23. Misal N adalah sebuah bilangan bulat yang memenuhi sifat yang diketahui.
Digit pertama dari N haruslah 1, karena setidaknya ada satu angka 1 sebelum angka 2 pertama, setidaknya ada satu angka 2 sebelum angka 3 pertama, dan setidaknya satu angka 3 sebelum angka 4, artinya kita tidak bisa mempunyai angka 2, angka 3, atau angka 4 sebelum angka 1 pertama.
Karena ada tiga angka 1 di N, maka N bisa dimulai dengan 1, 11 atau 111.
Digit pertama dari N yang bukan 1 pasti 2.
Jadi, N dimulai dengan 12, 112, atau 1112.

Kasus 1: N dimulai dengan 12
Karena tidak ada dua angka 2 yang bisa bersebelahan, selanjutnya kita tempatkan sisa dua angka 2.
Dibaca dari kiri, angka-angka 2 ini bisa ke posisi 4 dan 6, 4 dan 7, 4 dan 8, 4 dan 9, 5 dan 7, 5 dan 8, 5 dan 9, 6 dan 8, 6 dan 9, atau 7 dan 9.
Dengan kata lain, ada 10 kemungkinan pasangan posisi dimana angka 2 bisa ditempatkan.
Saat angka 2 ditempatkan, ada 5 posisi yang tersisa.
Selanjutnya, kita tempatkan sisa dua angka 1.
Jika kita menyebut 5 posisinya A, B, C, D, E, kita melihat bahwa ada 10 pasangan posisi dimana 1 bisa ditempatkan: A dan B, A dan C, A dan D, A dan E, B dan C, B dan D, B dan E, C dan D, C dan E, D dan E.

Ini meninggalkan 3 posisi dimana dua angka 3 dan satu angka 4 harus ditempatkan. Jika dibaca dari kiri, sebuah angka 3 harus ditempatkan di posisi kosong yang pertama, karena harus ada angka 3 sebelum angka 4.
Ini menyisakan 2 posisi, dimana sisa digit (3 dan 4) bisa ditempatkan di urutan mana pun; ada 2 urutan seperti itu (3 dan 4, atau 4 dan 3).
Dalam kasus ini, ada $10 \times 10 \times 2 = 200$ bilangan bulat N yang mungkin.

Kasus 2: N dimulai dengan 112
Karena tidak ada dua angka 2 yang bisa bersebelahan, berikutnya kita tempatkan sisa angka 2.
Dengan membaca dari kiri, angka-angka 2 ini bisa ke posisi 5 dan 7, 5 dan 8, 5 dan 9, 6 dan 8, 6 dan 9, atau 7 dan 9.
Dengan kata lain, ada 6 pasangan posisi yang mungkin dimana 2 bisa ditempatkan.
Saat angka 2 ditempatkan, ada 4 posisi yang tersisa.
Lalu kita menampatkan sisa angka 1. Ada 4 kemungkinan posisi dimana 1 bisa ditempatkan.
Ini menyisakan 3 posisi dimana dua angka 3 dan satu angka 4 harus ditempatkan. Dibaca dari kiri, sebuah angka 3 harus ditempatkan di posisi kosong pertama, karena harus ada angka 3 sebelum angka 4.
Ini menyisakan 2 posisi, dimana digit sisanya (3 dan 4) bisa ditempatkan dalam urutan apa pun; ada 2 urutan seperti itu.
Dalam kasus ini, ada $6 \times 4 \times 2 = 48$ bilangan bulat N yang mungkin .

Kasus 3: N dimulai dengan 1112
Karena tidak ada dua angka 2 yang bisa ditempatkan bersebelahan, selanjutnya kita tempatkan sisa angka-angka 2.
Dibaca dari kiri, angka-angka 2 ini bisa ditempatkan ke posisi 6 dan 8, 6 dan 9, atau 7 dan 9.
Dengan kata lain, ada 3 kemungkinan pasangan posisi dimana angka 2 bisa ditempatkan.
Saat angka-angka 2 ditempatkan, ada 3 posisi yang tersisa dengan hanya dua angka 3 dan 4 yang tersisa untuk ditempatkan.
Dibaca dari kiri, angka 3 harus ditempatkan di posisi kosong pertama, karena harus ada 3 sebelum 4.
Ini meninggalkan 2 posisi, dimana digit sisanya (3 dan 4) bisa ditempatkan dalam urutan apa pun; ada 2 urutan seperti itu.
Dalam kasus ini, ada $3 \times 2 = 6$ bilangan bulat N yang mungkin .

Menggabungkan tiga kasus ini, kita melihat bahwa ada $200 + 48 + 6 = 254$ bilangan bulat N yang mungkin.

JAWABAN: (C)

24. Misal $GP = x$.
Karena panjang rusuk kubus adalah 200, maka $HP = 200 - x$.
Kita perhatikan tetrahedron (yaitu, piramida yang alasnya segitiga) $FGMP$ dan hitung volumenya dalam dua cara yang berbeda.
Volume tetrahedron sama dengan satu per tiga kali luas alas segitiga kali tinggi tegak lurusnya.
Pertama, kita perhatikan tetrahedron $FGMP$ mempunyai alas $\triangle FGM$ dan tinggi GP, dimana tegak lurus terhadap alas.
$\triangle FGM$ adalah sudut siku-siku di G dan $FG = GM = 200$, jadi luasnya adalah $\frac{1}{2} \times FG \times GM$ yaitu sama dengan $\frac{1}{2} \times 200 \times 200$ sama dengan $20\,000$.
Jadi, volume $FGMP$ adalah $\frac{1}{3} \times 20\,000 \times x$.

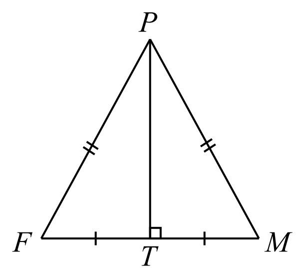
Selanjutnya, kita perhatikan tetrahedron $FGMP$ mempunyai alas $\triangle PFM$.
Dari informasi yang diketahui, jarak terdekat dari G ke titik di dalam segitiga ini adalah 100.
Ini artinya bahwa tinggi tetrahedron $FGMP$ ketika alasnya $\triangle PFM$ adalah 100.
Kita perlu menghitung luas $\triangle PFM$.
Karena $\triangle FGM$ adalah siku-siku di G dan $FM > 0$, maka dengan Teorema Pythagoras,

$$FM = \sqrt{FG^2 + GM^2} = \sqrt{200^2 + 200^2} = \sqrt{200^2 \times 2} = 200\sqrt{2}$$

Karena $\triangle FGP$ adalah siku-siku di G dan $FP > 0$, maka dengan Teorema Pythagoras,

$$FP = \sqrt{FG^2 + GP^2} = \sqrt{200^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + 40\,000}$$

Begitu juga, $MP = \sqrt{x^2 + 40\,000}$.
Ini artinya bahwa $\triangle PFM$ adalah sama kaki dengan $FP = MP$. Misal T adalah titik tengah FM. Maka $FT = TM = 100\sqrt{2}$. Karena $\triangle PFM$ adalah sama kaki, maka PT tegak lurus FM.



Dengan Teorema Pythagoras,

$$PT = \sqrt{FP^2 - FT^2} = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + 40\,000}\right)^2 - \left(100\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + 40\,000 - 20\,000} = \sqrt{x^2 + 20\,000}$$

Jadi, luas $\triangle PFM$ adalah $\frac{1}{2} \times FM \times PT$ yaitu sama dengan $\frac{1}{2} \times 200\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000}$.
Ini artinya bahwa volume tetrahedron $FGMP$ sama dengan

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 200\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000}\right) \times 100$$

Sekarang kita bisa menyamakan dua persamaan volume $FGMP$ untuk mencari x:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \times 20\,000 \times x &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 200\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000}\right) \times 100 \\
20\,000 \times x &= \left(\frac{1}{2} \times 200\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000}\right) \times 100 \\
x &= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000} \\
2x &= \sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000} \\
4x^2 &= 2(x^2 + 20\,000) \\
2x^2 &= 40\,000 \\
x^2 &= 20\,000
\end{aligned}$$

Karena $x > 0$, maka $x = \sqrt{20\,000} = \sqrt{10\,000 \times 2} = \sqrt{100^2 \times 2} = 100\sqrt{2}$.
Ini artinya $HP = 200 - x = 200 - 100\sqrt{2} \approx 58,58$.
Dari pilihan jawaban, ini mendekati 59, yaitu (D).

JAWABAN: (D)

25. Kita akan menggunakan proposisi bahwa jika sebuah bilangan bulat positif N mempunyai faktor prima $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ untuk beberapa bilangan prima yang berbeda $p_1, p_2, \ldots, p_k$ dan bilangan bulat positif $a_1, a_2, \ldots, a_k$, maka N mempunyai tepat $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$ pembagi positif.

Proposisi ini berdasarkan fakta berikut:

F1. Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 bisa ditulis sebagai hasil kali bilangan prima dengan cara unik. (Jika bilangan bulat positif itu sendiri adalah bilangan prima, hasil kali ini terdiri dari bilangan prima saja.) Fakta ini disebut "Teorema Fundamental Aritmetika". Fakta ini sering terlihat implisit dalam menemukan sebuah "pohon faktor" untuk bilangan bulat yang diberikan. Sebagai contoh, 1500 sama dengan $2^2 \times 3^1 \times 5^3$ dan tidak ada cara lain dalam menuliskan 1500 sebagai hasil kali bilangan prima. Perhatikan bahwa menyusun kembali bilangan prima yang sama di urutan yang berbeda tidak dihitung sebagai faktorisasi yang berbeda.

F2. Jika n adalah bilangan bulat positif dan d adalah bilangan bulat positif yang merupakan pembagi n, maka kemungkinan faktor prima d hanyalah faktor prima dari n. Sebagai contoh, jika d adalah pembagi positif $n = 1500$, maka faktor prima d yang mungkin hanyalah 2, 3 dan 5. Ini artinya, sebagai contoh, bahwa d tidak bisa dibagi oleh 7 atau 11 atau bilangan prima yang lain selain 2, 3 atau 5. d mungkin habis dibagi atau mungkin tidak habis dibagi oleh masing-masing 2, 3 atau 5.

F3. Jika n adalah bilangan bulat positif, d adalah bilangan bulat positif yang merupakan pembagi n, dan p adalah faktor prima dari kedua n dan d, maka p tidak bisa membagi d "lebih banyak kali" dibanding dia membagi n. Contohnya, jika d adalah pembagi positif $n = 1500 = 2^2 \times 3^1 \times 5^3$ yang habis dibagi oleh 5, maka d bisa dibagi oleh 5 atau oleh 5^2 atau oleh 5^3 tapi tidak bisa dibagi oleh 5^4 atau oleh 5^5 atau oleh yang pangkatnya lebih dari 5.

Dari fakta ini, pembagi positif dari $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ adalah bilangan bulat dengan bentuk

$$d = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k}$$

dimana $b_1, b_2, \ldots, b_k$ adalah bilangan bulat non-negatif dengan $0 \le b_1 \le a_1$, $0 \le b_2 \le a_2$, dan seterusnya.
Ini artinya bahwa ada $a_1 + 1$ nilai yang mungkin untuk b_1, yaitu $0, 1, 2, \ldots, a_1$.
Begitu juga, ada $a_2 + 1$ nilai yang mungkin untuk b_2, $a_3 + 1$ nilai yang mungkin untuk b_3, dan seterusnya.
Karena setiap kombinasi nilai yang mungkin ini memberikan pembagi yang berbeda d, maka ada $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$ pembagi positif.

Misal bahwa n mempunyai faktor prima $2^r 5^s p_3^{a_3} p_4^{a_4} \cdots p_k^{a_k}$ untuk beberapa bilangan prima yang berbeda $p_3, p_4, \ldots, p_k$ yang tidak satu pun sama dengan 2 atau 5, untuk beberapa bilangan bulat positif $a_3, a_4, \ldots, a_k$, dan beberapa bilangan bulat non-negatif r dan s.
Kita telah menulis n dengan cara ini untuk membuat kita memperhatikan faktor prima yang mungkin dari 2 dan 5.
Ini artinya bahwa

$$2n = 2^{r+1} 5^s p_3^{a_3} p_4^{a_4} \cdots p_k^{a_k}$$
$$5n = 2^r 5^{s+1} p_3^{a_3} p_4^{a_4} \cdots p_k^{a_k}$$

Karena $2n$ mempunyai 64 pembagi positif dan $5n$ mempunyai 60 pembagi positif, maka

$$(r+2)(s+1)(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1) = 64$$
$$(r+1)(s+2)(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1) = 60$$

Karena setiap faktor di dua persamaan di sebelah kiri adalah bilangan bulat positif, maka

$$(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1)$$

adalah faktor persekutuan positif dari 64 dan dari 60.
Pembagi positif dari 64 adalah 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.
Dari sini, hanya 1, 2, 4 yang merupakan pembagi 60.
Jadi, $(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1)$ sama dengan 1, 2 atau 4.
Karena setiap $a_3, a_4, \ldots, a_k$ adalah bilangan bulat postif, maka masing-masing dari $a_3+1, a_4+1, \ldots, a_k+1$ adalah paling kecil 2.

Kasus 1: $(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1) = 4$

Satu-satunya cara dimana 4 bisa ditulis sebagai sebuah hasil kali bilangan bulat positif yang masing-masingnya paling kecil 2 adalah 2×2 dan 4 (hasil perkalian satu bilangan bulat itu sendiri).
Jadi, $k = 4$ dengan $a_3+1 = a_4+1 = 2$ (hasilnya $a_3 = a_4 = 1$), atau $k = 3$ dengan $a_3+1 = 4$ (hasilnya $a_3 = 3$).
Karena

$$(r+2)(s+1)(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1) = 64$$
$$(r+1)(s+2)(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1) = 60$$

Kemudian, setelah disederhanakan menjadi

$$(r+2)(s+1) = 16$$
$$(r+1)(s+2) = 15$$

Menjabarkan sisi kiri dari dua persamaan, didapat

$$rs + r + 2s + 2 = 16$$
$$rs + 2r + s + 2 = 15$$

Mengurangi persamaan kedua dari persamaan pertama, didapat $-r+s = 1$ sehingga $s = r+1$.
Mensubstitusikan ke persamaan $(r+2)(s+1) = 16$, didapat $(r+2)(r+2) = 16$.
Karena $r > 0$, maka $(r+2)^2 = 16$ hasilnya $r+2 = 4$ sehingga $r = 2$, yaitu hasilnya $s = 3$.
Jadi, kita mendapatkan $r = 2$, $s = 3$.

Menggabungkan nilai yang mungkin dari a_3 dan a_4, ini artinya bahwa kita bisa mempunyai $n = 2^2 5^3 p_3 p_4$ untuk beberapa bilangan prima p_3 dan p_4 yang tidak sama dengan 2 atau 5, atau $n = 2^2 5^3 p_3^3$ untuk beberapa bilangan prima p_3 yang tidak sama dengan 2 atau 5.
Kita bisa memeriksa bahwa $2n$ dan $5n$ mempunyai banyaknya pembagi postif yang benar di setiap kasusnya.

Kasus 2: $(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1)=2$

Satu-satunya cara dimana 2 bisa ditulis sebagai hasil kali bilangan bulat positif masing-masing paling kecil 2 adalah 2.
Jadi, $k=3$ dengan $a_3+1=2$ (hasilnya $a_3=1$).
Karena

$$(r+2)(s+1)(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1)=64$$
$$(r+1)(s+2)(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1)=60$$

maka

$$(r+2)(s+1)=32$$
$$(r+1)(s+2)=30$$

Kita bisa melajutkan seperti Kasus 1.
Sebagai alternatif, mengetahui bahwa r dan s adalah bilangan bulat non-negatif, maka kemungkinan dari persamaan pertama adalah

$r+2$	$s+1$	r	s	$r+1$	$s+2$	$(r+2)(s+1)$
32	1	30	0	31	2	62
16	2	14	1	15	3	45
8	4	6	3	7	5	35
4	8	2	7	3	9	27
2	16	0	15	1	17	17
1	32	-1	31	0	33	0

Tidak ada nilai dari r dan s yang memenuhi dalam kasus ini.

Kasus 3: $(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1)=1$

Karena setiap faktor di sisi kiri seharusnya paling kecil 2, ini apa artinya? Ini sebenarnya berarti tidak ada faktor di sisi kiri. Atau $k=2$ dan $n=2^r5^s$.
(Lihat apakah kamu bisa menelusuri argumen sebelum Kasus 1 untuk memeriksa bahwa tidak ada kontradiksi.)
Disini,

$$(r+2)(s+1)=64$$
$$(r+1)(s+2)=60$$

Mengetahui bahwa r dan s adalah bilangan bulat non-negatif, maka kemungkinan dari persamaan pertama adalah

$r+2$	$s+1$	r	s	$r+1$	$s+2$	$(r+2)(s+1)$
64	1	62	0	63	2	126
32	2	30	1	31	3	93
16	4	14	3	15	5	45
8	8	6	7	7	9	63
4	16	2	13	3	15	51
2	32	0	31	1	33	33
1	64	-1	63	0	65	0

Tidak ada nilai r dan s yang memenuhi dalam kasus ini.

Oleh karena itu, dengan menggabungkan hasil dari tiga kasus ini, bilangan bulat positif n yang memenuhi kondisi yang diberikan ketika

- $n = 2^2 5^3 p_3 p_4 = 500 p_3 p_4$ untuk beberapa bilangan prima p_3 dan p_4 tidak sama dengan 2 atau 5, atau
- $n = 2^2 5^3 p_3^3 = 500 p_3^3$ untuk beberapa bilangan prima p_3 tidak sama dengan 2 atau 5.

Karena $n \leq 20\,000$, maka

- $500 p_3 p_4 \leq 20\,000$ yaitu hasilnya $p_3 p_4 \leq 40$, atau
- $500 p_3^3 \leq 20\,000$ yaitu hasilnya $p_3^3 \leq 40$.

Ini tetap menentukan banyaknya pasangan bilangan prima p_3 dan p_4 yang tidak sama dengan 2 atau 5 dengan hasil kali kurang dari 40, dan banyaknya bilangan prima p_3 yang tidak sama dengan 2 atau 5 yang pangkat tiganya kurang dari 40.
Dalam kasus pertama, kemungkinannya adalah:

$$3 \times 7 = 21 \qquad 3 \times 11 = 33 \qquad 3 \times 13 = 39$$

Susunan p_3 dan p_4 tidak masalah karena menukar urutan memberikan nilai yang sama untuk n.
Kita perhatikan juga bahwa kedua p_3 dan p_4 tidak bisa paling kecil 7 dan hasil kalinya paling besar 40.
Di kasus kedua, satu-satunya kemungkinan adalah $p_3^3 = 3^3$.

Ini artinya ada 4 kemungkinan nilai n yang memenuhi kondisi yang diberikan.

Jawaban: (A)