The CENTRE for EDUCATION
in MATHEMATICS and COMPUTING
cemc.uwaterloo.ca

Kompetisi Fermat 2019

(Kelas 11)

Selasa, 26 Februari 2019
(di Amerika Utara dan Amerika Selatan)

Rabu, 27 Februari 2019
(di Luar Amerika Utara dan Amerika Selatan)

Jawaban

1. Karena kelipatan terbesar dari 5 yang kurang dari 14 adalah 10 dan $14 - 10 = 4$, maka sisa jika 14 dibagi dengan 5 adalah 4.

   Jawaban: (E)

2. Dengan menyederhanakannya, $20(x + y) - 19(y + x) = 20x + 20y - 19y - 19x = x + y$ untuk semua nilai x dan y.

   Jawaban: (B)

3. Menghitung, $8 - \dfrac{6}{4-2} = 8 - \dfrac{6}{2} = 8 - 3 = 5$.

   Jawaban: (A)

4. Segmen garis bilangan antara 3 dan 33 panjangnya $33 - 3 = 30$.
   Segmen ini dibagi menjadi enam bagian yang sama, jadi setiap bagian panjangnya $30 \div 6 = 5$.
   Segmen PS terdiri dari 3 bagian yang sama ini, sehingga panjangnya $3 \times 5 = 15$.
   Segmen TV terdiri dari 2 bagian yang sama ini sehingga panjangnya $2 \times 5 = 10$.
   Jadi, jumlah panjang PS dan TV adalah $15 + 10$ atau 25.

   Jawaban: (A)

5. Karena 1 jam sama dengan 60 menit, maka 20 menit sama dengan $\frac{1}{3}$ jam.
   Karena Mike kecepatannya 30 km/jam, maka dalam $\frac{1}{3}$ jam, dia menempuh $\frac{1}{3} \times 30$ km $= 10$ km.

   Jawaban: (E)

6. Misal $SU = UW = WR = b$ dan $PS = h$.
   Lebar persegi panjang $PQRS$ adalah $3b$ dan tingginya adalah h, sehingga luasnya adalah $3bh$.
   Karena $SU = b$ dan jarak antara garis paralel PQ dan SR adalah h, maka luas $\triangle STU$ adalah $\frac{1}{2}bh$. Begitu juga, luas $\triangle UVW$ dan $\triangle WXR$ adalah $\frac{1}{2}bh$.
   Jadi, bagian persegi panjang yang diarsir adalah $\dfrac{3 \times \frac{1}{2}bh}{3bh}$ yaitu sama dengan $\dfrac{1}{2}$.

   Jawaban: (C)

7. Karena Kota Cans berada di utara Kota Ernie, maka Ernie tidak bisa menjadi kota yang paling utara.
   Karena Kota Dundee berada di selatan Kota Cans, maka Dundee tidak bisa menjadi kota yang paling utara.
   Karena Kota Arva berada di selatan Kota Blythe, maka Arva tidak bisa menjadi kota yang paling utara.
   Karena Kota Arva berada di utara Kota Cans, maka Cans tidak bisa menjadi kota yang paling utara.
   Kemungkinan yang tersisa hanyalah Kota Blythe adalah kota yang paling utara.
   Urutan berikut ini adalah satu-satunya yang memenuhi syarat:

   Blythe
   Arva
   Cans
   Dundee
   Ernie

   Jawaban: (B)

8. Perhatikan bahwa $8 \times 48 \times 81 = 2^3 \times (2^4 \times 3) \times 3^4 = 2^7 \times 3^5 = 2^2 \times 2^5 \times 3^5 = 2^2 \times (2 \times 3)^5 = 2^2 \times 6^5$.
   Setelah 6^5 membagi $8 \times 48 \times 81$, hasil baginya tidak mempunyai faktor 3 sehingga tidak ada faktor 6 lain yang bisa dibagi.
   Jadi, bilangan bulat terbesar k dimana 6^k pembagi dari $8 \times 48 \times 81$ adalah $k = 5$.

   Jawaban: (C)

9. Rata-rata $\frac{1}{8}$ dan $\frac{1}{6}$ adalah $\dfrac{\frac{1}{8}+\frac{1}{6}}{2} = \dfrac{\frac{3}{24}+\frac{4}{24}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{24} = \frac{7}{48}$.

   Jawaban: (E)

10. Kita temukan bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari 30 000 dan bilangan bulat terbesar yang kurang dari 30 000 dan kemudian tentukan yang paling mendekati 30 000.
    Misal M adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari 30 000 yang dibentuk menggunakan digit 2, 3, 5, 7, dan 8, masing-masing satu kali.
    Karena M lebih besar dari 30 000, digit puluh ribuannya paling kecil adalah 3.
    Untuk membuat M sekecil mungkin (tapi lebih besar dari 30 000), kita tentukan digit puluh ribuannya menjadi 3.
    Untuk membuat M sekecil mungkin, digit ribuannya haruslah sekecil mungkin, yaitu 2.
    Melanjutkan cara ini, jadi digit ratusan, puluhan dan satuannya adalah 578. Jadi, $M = 32\,578$.

    Misal m adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari 30 000 yang dibentuk menggunakan digit 2, 3, 5, 7, dan 8, masing-masing satu kali.
    Karena m adalah kurang dari 30 000, digit puluh ribuannya adalah kurang dari 3 yaitu 2.
    Untuk membuat m sebesar mungkin (tapi kurang dari 30 000), digit ribuannya haruslah sebesar mungkin yaitu 8.
    Melanjutkan cara ini, digit ratusan, puluhan dan satuannya adalah 7, 5 dan 3, secara berurutan. Jadi, $m = 28\,753$.
    Karena $M - 30\,000 = 2578$ dan $30\,000 - m = 1247$, maka m lebih dekat ke 30 000.
    Jadi, $N = m = 28\,753$. Digit puluhan N adalah 5.

    Jawaban: (B)

11. Garis dengan persamaan $y = x - 3$ mempunyai gradien 1.
    Untuk mendapatkan titik potong garis $y = x - 3$ dengan sumbu-x, kita tentukan $y = 0$ dan cari nilai x yaitu $x - 3 = 0$ atau $x = 3$. Jadi, garis ℓ juga mempunyai titik potong sumbu-x yaitu 3.
    Selanjutnya, karena dua garisnya tegak lurus, maka gradien kedua garis itu hasil kalinya adalah -1, yang artinya gradien ℓ adalah -1.
    Garis ℓ mempunyai gradien-1 dan melalui $(3, 0)$.
    Ini artinya bahwa ℓ mempunyai persamaan $y - 0 = -1(x - 3)$ atau $y = -x + 3$.
    Jadi, titik potong garis ℓ dengan sumbu-y adalah 3.

    Jawaban: (C)

12. Alberto menjawab 70% dari 30 pertanyaan dengan benar di bagian pertama.
    Jadi, Alberto menjawab $\frac{70}{100} \times 30 = 21$ pertanyaan dengan benar di bagian pertama.
    Alberto menjawab 40% dari 50 pertanyaan dengan benar di bagian kedua.
    Jadi, Alberto menjawab $\frac{40}{100} \times 50 = 20$ pertanyaan dengan benar di bagian kedua.
    Secara keseluruhan, Alberto menjawab $21 + 20 = 41$ dari $30 + 50 = 80$ pertanyaan dengan benar.
    Ini menggambarkan persentase $\frac{41}{80} \times 100\% = 51,25\%$.
    Dari pilihan jawaban, ini mendekati 51%.

    Jawaban: (D)

13. Jumlah menit antara 7:00 dan saat Tanis melihat jam tangannya adalah $8x$, dan jumlah menit antara saat Tanis melihat jam tangannya dan 8:00 adalah $7x$.
Jumlah total menit antara 7:00 dan 8:00 adalah 60.
Jadi, $8x + 7x = 60$ sehingga $15x = 60$ atau $x = 4$.
Waktu saat itu adalah $8x = 32$ menit setelah 7:00, yaitu 7:32 . (Kita perhatikan bahwa 7:32 adalah $28 = 7x$ menit sebelum 8:00.)

Jawaban: (C)

14. Setiap huruf A, B, C, D, E muncul satu kali di setiap kolom dan setiap baris.
Entri di kolom pertama, baris kedua tidak bisa A atau E atau B (huruf ini sudah muncul di kolom itu) dan tidak bisa C atau A (huruf ini sudah muncul di baris itu).
Jadi, entri di kolom pertama, baris kedua haruslah D.
Ini artinya bahwa entri di kolom pertama, baris keempat haruslah C.
Entri di kolom kelima, baris kedua tidak bisa D atau C atau A atau E sehingga haruslah B.
Ini artinya bahwa entri di kolom kedua, baris kedua haruslah E.
Dengan menggunakan argumen yang sama, entri di baris pertama, kolom ketiga dan keempat haruslah D dan B, secara berurutan.
Ini artinya bahwa entri di kolom kedua, baris pertama haruslah C.
Dengan menggunakan argumen yang sama, entri di baris kelima, kolom kedua haruslah A.
Begitu juga, entri di baris ketiga, kolom kedua haruslah D.
Ini artinya bahwa huruf yang diletakkan di kotak yang bertanda $*$ haruslah B.
Kita bisa melengkapi kotaknya sebagai berikut:

A	C	D	B	E
D	E	C	A	B
E	D	B	C	A
C	B	A	E	D
B	A	E	D	C

Jawaban: (B)

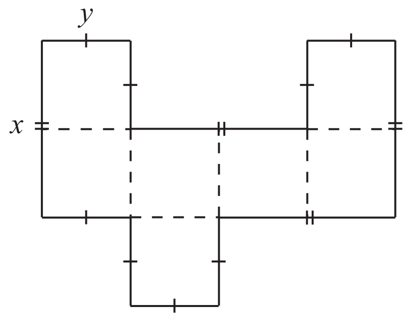
15. Karena 4 bola dipilih dari 6 bola merah dan 3 bola hijau, maka 4 bola yang dipilih bisa meliputi:

- 4 bola merah, atau
- 3 bola merah dan 1 bola hijau, atau
- 2 bola merah dan 2 bola hijau, atau
- 1 bola merah dan 3 bola hijau.

Hanya ada 1 cara yang berbeda untuk menyusun 4 bola merah.
Ada 4 cara yang berbeda untuk menyusun 3 bola merah dan 1 bola hijau: bola hijau bisa terletak di posisi ke-1, ke-2, ke-3, atau ke-4.
Ada 6 cara yang berbeda untuk menyusun 2 bola merah dan 2 bola hijau: bola merah bisa ditempatkan di posisi ke-1/ke-2, ke-1/ke-3, ke-1/ke-4, ke-2/ke-3, ke-2/ke-4, atau ke-3/ke-4.
Ada 4 cara yang berbeda untuk menyusun 1 bola merah dan 3 bola hijau: bola merah bisa ditempatkan di posisi ke-1, ke-2, ke-3, atau ke-4.
Totalnya, ada $1 + 4 + 6 + 4 = 15$ susunan yang berbeda.

Jawaban: (A)

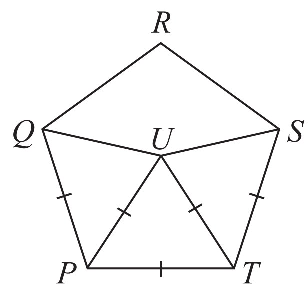
16. Karena $x = 2y$, maka dengan menggambar garis putus-putus yang sejajar dengan segmen garis di gambar yang diberikan, beberapa di antaranya dimulai dari titik tengah sisi, kita bisa membagi bangun tersebut menjadi 7 persegi, masing-masing berukuran $y \times y$.



Karena luas bangunnya adalah 252, maka $7y^2 = 252$ atau $y^2 = 36$.
Karena $y > 0$, maka $y = 6$.
Keliling dari bangun tersebut terdiri dari 16 segmen yang panjangnya y.
Jadi, kelilingnya adalah $16 \times 6 = 96$.

Jawaban: (A)

17. Hubungkan QU dan SU.
Karena $\triangle PUT$ adalah sama sisi, maka $PU = UT = TP$.
Karena segi lima $PQRST$ adalah beraturan, maka $QP = PT = TS$.
Jadi, $PU = QP$ dan $UT = TS$, yang artinya $\triangle QPU$ dan $\triangle STU$ adalah sama kaki.



Setiap sudut dalam segi lima beraturan berukuran $108°$.
Karena $\angle UPT = 60°$, maka $\angle QPU = \angle QPT - \angle UPT = 108° - 60° = 48°$.
Karena $\triangle QPU$ adalah sama kaki dengan $QP = PU$, maka $\angle PQU = \angle PUQ$.
Jadi, $\angle PUQ = \frac{1}{2}(180° - \angle QPU) = \frac{1}{2}(180° - 48°) = 66°$.
Dengan simetri, $\angle TUS = 66°$.
Jadi, $\angle QUS = 360° - \angle PUQ - \angle PUT - \angle TUS = 360° - 66° - 60° - 66° = 168°$.

Jawaban: (B)

18. Misal n adalah sebuah bilangan bulat positif 7-digit yang dibuat dari digit 0 dan 1 saja, dan dapat dibagi 6.
Digit yang paling kiri dari n tidak bisa 0, jadi haruslah 1.
Karena n dapat dibagi 6, maka n adalah genap, yang artinya digit paling kanan dari n tidak bisa 1, jadi haruslah 0.
Jadi, n bentuknya $1\,pqr\,st0$ untuk digit-digit p, q, r, s, t masing-masing sama dengan 0 atau 1.
n dapat dibagi 6 jika dapat juga dibagi oleh 2 dan 3.
Karena digit satuan n adalah 0, berarti dapat dibagi 2.

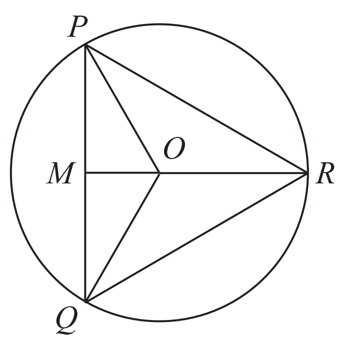
n dapat dibagi 3 jika jumlah digitnya dapat dibagi 3.
Jumlah digit n adalah $1 + p + q + r + s + t$.
Karena masing-masing dari p, q, r, s, t adalah 0 atau 1, maka $1 \leq 1 + p + q + r + s + t \leq 6$.
Jadi, n dapat dibagi 3 jika $1 + p + q + r + s + t$ sama dengan 3 atau 6.
Artinya, n dapat dibagi 3 jika 2 dari p, q, r, s, t adalah 1 atau semua 5 dari p, q, r, s, t adalah 1.
Ada 10 cara untuk 2 dari bilangan-bilangan ini bernilai 1.
Ini sesuai dengan pasangan $pq, pr, ps, pt, qr, qs, qt, rs, rt, st$.
Ada 1 cara untuk semua dari p, q, r, s, t bernilai 1.
Jadi, ada $1 + 10 = 11$ bilangan bulat 7-digit yang memenuhi.

Jawaban: (B)

19. Kita menggunakan persamaan fungsi $f(2x + 1) = 3f(x)$ secara berulang-ulang.
Jika $x = 1$, didapat $f(3) = 3f(1) = 3 \times 6 = 18$.
Jika $x = 3$, didapat $f(7) = 3f(3) = 3 \times 18 = 54$.
Jika $x = 7$, didapat $f(15) = 3f(7) = 3 \times 54 = 162$.
Jika $x = 15$, didapat $f(31) = 3f(15) = 3 \times 162 = 486$.
Jika $x = 31$, didapat $f(63) = 3f(31) = 3 \times 486 = 1458$.

Jawaban: (D)

20. Misal sebuah lingkaran dengan pusat O berjari-jari 2 dan ada $\triangle PQR$ sama sisi yang titik sudutnya terletak pada lingkaran.
Hubungkan OP, OQ dan OR.
Hubungkan O ke M, yang merupakan titik tengah dari PQ.



Karena jari-jari lingkaran adalah 2, maka $OP = OQ = OR = 2$.
Dengan simetri, $\angle POQ = \angle QOR = \angle ROP$.
Karena ketiga sudut ini ditambahkan menjadi 360°, maka $\angle POQ = \angle QOR = \angle ROP = 120°$.
Karena $\triangle POQ$ adalah sama kaki dengan $OP = OQ$ dan M adalah titik tengah PQ, maka OM adalah tinggi dan garis bagi sudut.
Jadi, $\angle POM = \frac{1}{2}\angle POQ = 60°$ yang artinya $\triangle POM$ adalah segitiga 30°-60°-90° .
Karena $OP = 2$ dan berada di depan sudut 90°, maka $OM = 1$ dan $PM = \sqrt{3}$.
Karena $PM = \sqrt{3}$, maka $PQ = 2PM = 2\sqrt{3}$.
Jadi, luas $\triangle POQ$ adalah $\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}$.
Karena $\triangle POQ$, $\triangle QOR$ dan $\triangle ROP$ adalah kongruen, maka masing-masing dari segitiga ini mempunyai luas yang sama.
Ini artinya luas $\triangle PQR$ adalah tiga kali luas $\triangle POQ$, atau $3\sqrt{3}$.

Jawaban: (A)

21. *Jawaban 1*

Kita mulai dengan digit satuan.

Karena $4 \times 4 = 16$, maka $T = 6$ dan kita bawa 1 ke kolom puluhan.

Lihat kolom puluhan. Karena $4 \times 6 + 1 = 25$, maka $S = 5$ dan kita bawa 2 ke kolom ratusan.

Lihat kolom ratusan. Karena $4 \times 5 + 2 = 22$, maka $R = 2$ dan kita bawa 2 ke kolom ribuan.

Lihat kolom ribuan. Karena $4 \times 2 + 2 = 10$, maka $Q = 0$ dan kita bawa 1 ke kolom puluh ribuan.

Lihat kolom puluh ribuan. Karena $4 \times 0 + 1 = 1$, maka $P = 1$ dan kita bawa 0 ke kolom ratus ribuan.

Lihat kolom ratus ribuan, $4 \times 1 + 0 = 4$, sesuai yang diharapkan.

Ini menghasilkan perkalian berikut:

$$\begin{array}{rr} & 1\,0\,2\,5\,6\,4 \\ \times & 4 \\ \hline & 4\,1\,0\,2\,5\,6 \end{array}$$

Jadi, $P + Q + R + S + T = 1 + 0 + 2 + 5 + 6 = 14$.

Jawaban 2

Misal x adalah bilangan bulat lima digit dengan digit $PQRST$.

Ini artinya bahwa $PQRST0 = 10x$ sehingga $PQRST4 = 10x + 4$.

Begitu juga, $4PQRST = 400\,000 + PQRST = 400\,0000 + x$.

Dari perkalian yang diberikan, $4(10x + 4) = 400\,000 + x$ yang hasilnya $40x + 16 = 400\,000 + x$ atau $39x = 399\,984$.

Jadi, $x = \dfrac{399\,984}{39} = 10\,256$.

Karena $PQRST = 10\,256$, maka $P + Q + R + S + T = 1 + 0 + 2 + 5 + 6 = 14$.

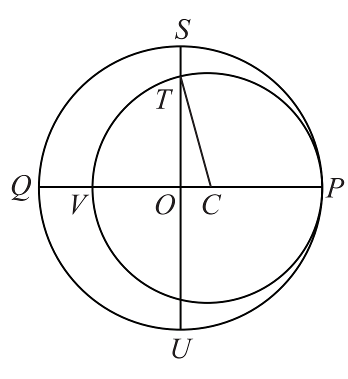
Jawaban: (A)

22. Misal D adalah panjang diameter lingkaran yang lebih besar dan d adalah panjang diameter lingkaran yang lebih kecil.

Karena QP dan VP adalah diameter lingkaran yang lebih besar dan lebih kecil, maka $QV = QP - VP = D - d$.

Karena $QV = 9$, maka $D - d = 9$.

Misal C adalah pusat lingkaran yang lebih kecil lalu hubungkan C ke T. Karena $D > d$, maka C berada di sebelah kanan O di garis QP.



Karena CT adalah jari-jari lingkaran yang lebih kecil, maka $CT = \frac{1}{2}d$.

Begitu juga, $OC = OP - CP$. Karena OP dan CP adalah jari-jari dua lingkaran, maka $OC = \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}d$.
Karena SO adalah jari-jari lingkaran yang lebih besar dan $ST = 5$, maka $TO = SO - ST = \frac{1}{2}D - 5$.
Karena QP dan SU adalah tegak lurus, maka $\triangle TOC$ adalah siku-siku di O.
Dengan Teorema Pythagoras,

$$\begin{aligned}
TO^2 + OC^2 &= CT^2 \\
\left(\tfrac{1}{2}D - 5\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}d\right)^2 &= \left(\tfrac{1}{2}d\right)^2 \\
4\left(\tfrac{1}{2}D - 5\right)^2 + 4\left(\tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}d\right)^2 &= 4\left(\tfrac{1}{2}d\right)^2 \\
(D-10)^2 + (D-d)^2 &= d^2 \\
(D-10)^2 + 9^2 &= d^2 \\
81 &= d^2 - (D-10)^2 \\
81 &= (d - (D-10))(d + (D-10)) \\
81 &= (d - D + 10)(d + (D-10)) \\
81 &= (10 - (D-d))(d + D - 10) \\
81 &= (10 - 9)(d + D - 10) \\
81 &= d + D - 10 \\
91 &= d + D
\end{aligned}$$

sehingga jumlah diameternya adalah 91.

Jawaban: (B)

23. Kita perhatikan dulu bilangan bulat yang bisa dinyatakan sebagai jumlah 4 bilangan bulat positif yang berurutan.
Bilangan bulat terkecil yang memenuhi adalah $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Yang terkecil berikutnya yang memenuhi bilangan bulat tersebut adalah $2 + 3 + 4 + 5 = 14$.
Kita perhatikan bahwa jika kita berpindah dari $k + (k+1) + (k+2) + (k+3)$ ke $(k+1) + (k+2) + (k+3) + (k+4)$, kita tambah 4 ke totalnya (ini sama dengan selisih antara $k + 4$ dan k karena tiga suku lainnya tidak berubah).
Jadi, bilangan bulat positif yang bisa dinyatakan sebagai jumlah 4 bilangan bulat positif berurutan adalah bilangan bulat pada barisan aritmetika dengan 10 suku pertama dan bedanya 4.
Karena $n \leq 100$, bilangan bulat ini adalah

$$10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, 62, 66, 70, 74, 78, 82, 86, 90, 94, 98$$

Ada 23 bilangan bulat yang memenuhi.

Selanjutnya, kita perhatikan bilangan bulat positif $n \leq 100$ yang bisa dinyatakan sebagai jumlah 5 bilangan bulat positif berurutan.
Bilangan bulat terkecil yang memenuhi adalah $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ dan selanjutnya adalah $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$.
Dengan menggunakan argumen yang sama dengan yang di atas, bilangan bulat ini membentuk barisan aritmetika dengan 15 suku pertama dan bedanya 5.

Karena $n \leq 100$, bilangan bulat ini: $15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100$.
Ketika kita mengeluarkan bilangan bulat yang telah disebutkan di atas (30, 50, 70, 90), didapat

$$15, 20, 25, 35, 40, 45, 55, 60, 65, 75, 80, 85, 95, 100$$

Ada 14 bilangan bulat yang memenuhi.

Selanjutnya, kita perhatikan bilangan bulat positif $n \leq 100$ yang bisa dinyatakan sebagai sebagai jumlah 6 bilangan bulat positif berurutan.
Bilangan bulat ini membentuk barisan aritmetika dengan 21 suku pertama dan bedanya 6.
Karena $n \leq 100$, bilangan bulat ini: $21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99$.
Ketika kita mengeluarkan bilangan bulat yang telah disebutkan di atas (45, 75), didapat

$$21, 27, 33, 39, 51, 57, 63, 69, 81, 87, 93, 99$$

Ada 12 bilangan bulat yang memenuhi.

Karena $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14 = 105$ dan ini adalah bilangan bulat terkecil yang bisa dinyatakan sebagai jumlah 14 bilangan bulat positif berurutan, maka tidak ada $n \leq 100$ yang merupakan jumlah 14 atau lebih bilangan bulat positif berurutan. (Jumlah 15 atau lebih bilangan bulat positif akan lebih besar dari 105.)
Jadi, jika sebuah bilangan bulat $n \leq 100$ bisa dinyatakan sebagai jumlah $s \geq 4$ bilangan bulat berurutan, maka $s \leq 13$.
Kita buat sebuah tabel untuk mencari $n \leq 100$ yang dibentuk dari nilai s dengan $7 \leq s \leq 13$ yang belum kita hitung sebelumnya:

s	n terkecil	$n \leq 100$ yang mungkin	n baru
7	28	$28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98$	$28, 49, 56, 77, 84, 91$
8	36	$36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100$	$36, 44, 52, 68, 76, 92$
9	45	$45, 54, 63, 72, 81, 90, 99$	72
10	55	$55, 65, 75, 85, 95$	Tidak ada
11	66	$66, 77, 88, 99$	88
12	78	$78, 90$	Tidak ada
13	91	91	Tidak ada

Totalnya, ada $23 + 14 + 12 + 6 + 6 + 1 + 1 = 63$ nilai n yang memenuhi.
Apa yang kamu perhatikan tentang n yang tidak bisa dinyatakan dengan cara ini?

Jawaban: (B)

24. Sebuah persamaan kuadrat mempunyai dua solusi bilangan *real* yang berbeda jika diskriminannya positif.
Untuk persamaan kuadrat $x^2 - (r+7)x + r + 87 = 0$, diskriminannya adalah

$$\Delta = (r+7)^2 - 4(1)(r+87) = r^2 + 14r + 49 - 4r - 348 = r^2 + 10r - 299$$

Karena $\Delta = r^2 + 10r - 299 = (r+23)(r-13)$ yang akarnya $r = -23$ dan $r = 13$, maka $\Delta > 0$ ketika $r > 13$ atau $r < -23$. (Untuk melihat ini, kita bisa menggambar parabola dengan persamaan $y = x^2 + 10x - 299 = (x+23)(x-13)$ dan melihat dimana letaknya di atas sumbu-x.)

Kita juga ingin solusi persamaan kuadrat yang awal negatif.
Jika $r > 13$, maka persamaan $x^2 - (r+7)x + r + 87 = 0$ berbentuk $x^2 - bx + c = 0$ dengan setiap b dan c positif.
Pada kasus ini, jika $x < 0$, maka $x^2 > 0$ dan $-bx > 0$ dan $c > 0$ sehingga $x^2 - bx + c > 0$.
Ini artinya, jika $r > 13$, tidak ada solusi negatif.

Jadi, ini pasti kasus $r < -23$. Ini tidak menjamin solusi negatif, tapi ini syarat yang diperlukan.
Sehingga kita petimbangkan $x^2 - (r+7)x + r + 87 = 0$ dengan syarat $r < -23$.
Kuadrat ini berbentuk $x^2 - bx + c = 0$ dengan $b < 0$. Kita belum tahu apakah c positif, negatif atau nol.
Kita tahu bahwa persamaan ini mempunyai dua solusi bilangan *real*.
Misal persamaan kuadrat $x^2 - bx + c = 0$ mempunyai solusi bilangan *real* s dan t.
Ini artinya faktor dari $x^2 - bx + c$ adalah $x - s$ dan $x - t$.
Dengan kata lain, $(x-s)(x-t) = x^2 - bx + c$.
Sekarang,

$$(x-s)(x-t) = x^2 - tx - sx + st = x^2 - (s+t)x + st$$

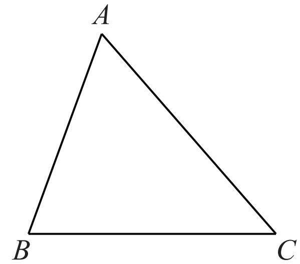
Karena $(x-s)(x-t) = x^2 - bx + c$, maka $x^2 - (s+t)x + st = x^2 - bx + c$ untuk semua nilai x, yang artinya $b = (s+t)$ dan $c = st$.
Karena $b < 0$, maka ini tidak bisa menjadi kasus dimana s dan t keduanya positif, karena $b = s + t$.
Jika $c = 0$, maka ini tidak bisa menjadi kasus dimana $s = 0$ atau $t = 0$.
Jika $c < 0$, maka ini tidak bisa menjadi kasus dimana salah satu dari s dan t positif dan yang lainnya negatif.
Jika $c = st$ positif, maka s dan t keduanya positif atau keduanya negatif, tapi karena $b < 0$, maka s dan t tidak bisa keduanya positif, jadi keduanya negatif.
Mengetahui bahwa persamaan $x^2 - bx + c = 0$ mempunyai dua akar *real* berbeda dan $b < 0$, kondisi bahwa dua akar negatif adalah ekuivalen dengan kondisi bahwa $c > 0$.
Disini, $c = r + 87$ sehingga $c > 0$ tepat ketika $r > -87$.
Ini berarti persamaan $x^2 - (r+7)x + r + 87 = 0$ mempunyai dua akar *real* yang keduanya negatif ketika $-87 < r < -23$.
Jadi $p = -87$ dan $q = -23$ sehingga $p^2 + q^2 = 8098$.

JAWABAN: (E)

25. Pada jawaban ini, kita akan menggunakan dua proposisi geometri:

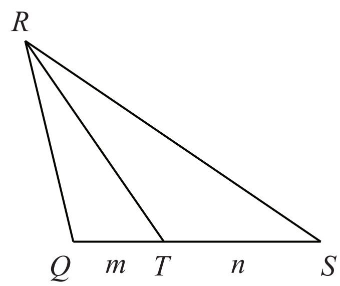
(i) *Ketaksamaan Segitiga*
Proposisi ini mengatakan bahwa, pada $\triangle ABC$, setiap pertidaksamaan berikut ini benar:

$$AB + BC > AC \qquad AC + BC > AB \qquad AB + AC > BC$$



Proposisi ini berasal dari fakta bahwa jarak terpendek antara dua titik adalah panjang segmen garis yang menghubungkan dua titik itu.
Sebagai contoh, jarak terpendek antara titik A dan C adalah panjang segmen garis AC. Jadi, jalur dari A ke C melalui sebuah titik B yang bukan di AC, yang panjangnya $AB + BC$, adalah lebih panjang. Penjelasan ini menyatakan bahwa $AB + BC > AC$.

(ii) *Teorema Garis Bagi*
Pada segitiga yang diberikan, diketahui bahwa $\angle QRT = \angle SRT$. Ini artinya RT adalah garis bagi $\angle QRS$. Teorema garis bagi menyatakan bahwa, karena RT adalah garis bagi $\angle QRS$, maka $\dfrac{QT}{TS} = \dfrac{RQ}{RS}$.



Teorema Garis Bagi bisa dibuktikan menggunakan aturan sinus:

Pada $\triangle RQT$, kita punya $\dfrac{RQ}{\sin(\angle RTQ)} = \dfrac{QT}{\sin(\angle QRT)}$.

Pada $\triangle RST$, kita punya $\dfrac{RS}{\sin(\angle RTS)} = \dfrac{TS}{\sin(\angle SRT)}$.

Membagi persamaan pertama oleh yang kedua, didapat:

$$\frac{RQ \sin(\angle RTS)}{RS \sin(\angle RTQ)} = \frac{QT \sin(\angle SRT)}{TS \sin(\angle QRT)}$$

Karena $\angle QRT = \angle SRT$, maka $\sin(\angle QRT) = \sin(\angle SRT)$.
Karena $\angle RTQ = 180^\circ - \angle RTS$, maka $\sin(\angle RTQ) = \sin(\angle RTS)$.
Dengan menggabungkan tiga persamaan ini, didapat $\dfrac{RQ}{RS} = \dfrac{QT}{TS}$.

Sekarang kita mulai menyelesaikan soalnya.

Dengan Teorema Garis Bagi , $\frac{RQ}{RS} = \frac{QT}{TS} = \frac{m}{n}$.
Jadi, kita bisa tentukan $RQ = km$ dan $RS = kn$ untuk beberapa bilangan *real* $k > 0$.
Dengan Ketaksamaan Segitiga , $RQ + RS > QS$.
Ini ekuivalen terhadap pertidaksamaan $km + kn > m + n$ atau $k(m + n) > m + n$.
Karena $m + n > 0$, ini ekuivalen terhadap $k > 1$.
Dengan menggunakan Ketaksamaan Segitiga kedua kalinya, kita tahu bahwa $RQ + QS > RS$.
Ini ekuivalen dengan $km + m + n > kn$, yang menjadi $k(n - m) < n + m$.
Karena $n > m$, maka $n - m > 0$ sehingga didapat $k < \frac{n + m}{n - m}$.
(Karena kita sudah mengetahui bahwa $RS > RQ$, aplikasi ketiga dari Ketaksamaan Segitiga tidak akan memberikan informasi lanjutan. Bisa lihatkah kenapa?)

Keliling, p, dari $\triangle QRS$ adalah $RQ + RS + QS = km + kn + m + n = (k + 1)(m + n)$.
Karena $k > 1$, maka $p > 2(m + n)$.
Karena $2(m + n)$ adalah sebuah bilangan bulat, maka bilangan bulat terkecil yang mungkin dari p adalah $2m + 2n + 1$.
Karena $k < \frac{n + m}{n - m}$, maka $p < \left(\frac{n + m}{n - m} + 1\right)(n + m)$.
Karena $n + m$ adalah kelipatan dari $n - m$, maka $\left(\frac{n + m}{n - m} + 1\right)(n + m)$ adalah sebuah bilangan bulat sehingga bilangan bulat terbesar yang mungkin dari p adalah $\left(\frac{n + m}{n - m} + 1\right)(n + m) - 1$.
Setiap nilai yang mungkin dari p antara $2m + 2n + 1$ dan $\left(\frac{n + m}{n - m} + 1\right)(n + m) - 1$, inklusif, sebenarnya bisa didapat. Kita bisa melihat ini dengan memulai titik dari R yang hampir ke titik T dan kemudian berlanjut menarik R menjauh dari QS dengan menjaga rasio $\frac{RQ}{RS}$ tetap hingga segitiga hampir rata dengan RS bersama RQ dan QS.
Kita tahu bahwa bilangan bulat terkecil yang mungkin dari p adalah $2m + 2n + 1$ dan bilangan bulat terbesar yang mungkin dari p adalah $\left(\frac{n + m}{n - m} + 1\right)(n + m) - 1$.
Banyaknya bilangan bulat pada rentang ini adalah

$$\left(\left(\frac{n + m}{n - m} + 1\right)(n + m) - 1\right) - (2m + 2n + 1) + 1$$

Diketahui banyaknya bilangan bulat yang mungkin dari p adalah $m^2 + 2m - 1$.

Jadi, kita menemukan persamaan ekuivalen berikut ini:

$$\begin{aligned}
\left(\left(\frac{n+m}{n-m}+1\right)(n+m)-1\right)-(2m+2n+1)+1 &= m^2+2m-1\\
\left(\left(\frac{n+m}{n-m}+1\right)(n+m)\right)-(2m+2n) &= m^2+2m\\
\left(\left(\frac{n+m}{n-m}+\frac{n-m}{n-m}\right)(n+m)\right)-(2m+2n) &= m^2+2m\\
\left(\frac{2n}{n-m}\right)(n+m)-2m-2n &= m^2+2m\\
\frac{2n^2+2nm}{n-m}-2m-2n &= m^2+2m\\
\frac{2n^2+2nm}{n-m}-\frac{2(n+m)(n-m)}{n-m} &= m^2+2m\\
\frac{2n^2+2nm}{n-m}-\frac{2n^2-2m^2}{n-m} &= m^2+2m\\
\frac{2m^2+2nm}{n-m} &= m^2+2m\\
\frac{2m+2n}{n-m} &= m+2 \qquad \text{(karena } m \neq 0\text{)}\\
2m+2n &= (m+2)(n-m)\\
2m+2n &= nm+2n-m^2-2m\\
0 &= nm-m^2-4m\\
0 &= m(n-m-4)
\end{aligned}$$

Karena $m > 0$, maka $n-m-4=0$ sehingga $n-m=4$.

Sebagai contoh dari segitiga seperti itu, misalkan bahwa $m=2$ dan $n=6$.

Disini, $\frac{n+m}{n-m}=2$ sehingga keliling minimum yang mungkin adalah $2n+2m+1=17$ dan keliling maksimum yang mungkin adalah $\left(\frac{n+m}{n-m}+1\right)(n+m)-1=23$.

Banyaknya bilangan bulat antara 17 dan 23, inklusif, adalah 7, yaitu sama dengan m^2+2m-1 atau $2^2+2(2)-1$, memenuhi syarat.

Jawaban: (A)