The CENTRE for EDUCATION
in MATHEMATICS and COMPUTING
***cemc.uwaterloo.ca***

# *Kompetisi Fermat 2018*

**(Kelas 11)**

**Selasa, 27 Februari 2018**
**(di Amerika Utara dan Amerika Selatan)**

**Rabu, 28 Februari 2018**
**(di Luar Amerika Utara dan Amerika Selatan)**

*Jawaban*

1. Menghitung,

$$\begin{aligned}2016 - 2017 + 2018 - 2019 + 2020 &= 2016 + (2018 - 2017) + (2020 - 2019)\\ &= 2016 + 1 + 1\\ &= 2018\end{aligned}$$

Jawaban: (D)

2. Karena suhu maksimum adalah 14°C dan suhu minimum adalah $-11$°C, maka rentang suhunya adalah 14°C $-$ ($-11$°C) = 25°C.

Jawaban: (B)

3. Persamaan $(3x + 2y) - (3x - 2y)$ sama dengan $3x + 2y - 3x + 2y$ yang juga sama dengan $4y$. Ketika $x = -2$ dan $y = -1$, ini sama dengan $4(-1)$ atau $-4$.

Jawaban: (A)

4. Pecahan $\frac{5}{7}$ ada di antara 0 dan 1.
Pecahan $\frac{28}{3}$ ekuivalen dengan $9\frac{1}{3}$ sehingga di antara 9 dan 10.
Jadi, bilangan bulat antara dua pecahan ini adalah $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, yaitu ada 9.

Jawaban: (B)

5. Jika $\heartsuit = 1$, maka $\nabla = \heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = 1 \times 1 \times 1 = 1$, yang nilainya tidak memenuhi karena $\nabla$ dan $\heartsuit$ haruslah bilangan bulat positif yang berbeda.
Jika $\heartsuit = 2$, maka $\nabla = \heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = 2 \times 2 \times 2 = 8$, nilainya memenuhi.
Jika $\heartsuit = 3$, maka $\nabla = \heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = 3 \times 3 \times 3 = 27$, yang nilainya tidak memenuhi $\nabla$ yaitu kurang dari 20.
Jika $\heartsuit$ lebih besar dari 3, maka $\nabla$ akan lebih besar dari 27 sehingga $\heartsuit$ tidak bisa lebih besar dari 3.
Jadi, $\heartsuit = 2$ sehingga $\nabla = 8$.
Ini artinya bahwa $\nabla \times \nabla = 8 \times 8 = 64$.

Jawaban: (D)

6. Karena $\angle QRT = 158^\circ$, maka $\angle QRP = 180^\circ - \angle QRT = 180^\circ - 158^\circ = 22^\circ$.
Karena $\angle PRS = \angle QRS$ dan $\angle QRP = \angle PRS + \angle QRS$, maka
$\angle QRS = \frac{1}{2}\angle QRP = \frac{1}{2}(22^\circ) = 11^\circ$.
Karena $\triangle QSR$ siku-siku di $Q$, maka $\angle QSR = 180^\circ - 90^\circ - \angle QRS = 90^\circ - 11^\circ = 79^\circ$.

Jawaban: (E)

7. Karena Beth telah berkendara sejauh 312 km dan masih tersisa 858 km lagi, jarak dari Waterloo ke Marathon adalah 312 km + 858 km = 1170 km.
Titik tengah perjalanannya adalah $\frac{1}{2}$(1170 km) = 585 km dari Waterloo.
Untuk mencapai titik ini, dia masih perlu berkendara sejauh 585 km $-$ 312 km = 273 km.

Jawaban: (B)

8. Sebuah segmen garis yang menghubungkan dua titik adalah sejajar dengan sumbu-$x$ ketika koordinat-$y$ dari dua titiknya sama.
Artinya bahwa $2k + 1 = 4k - 5$ sehingga $6 = 2k$ atau $k = 3$.
(Kita bisa memeriksa bahwa jika $k = 3$, koordinat titiknya adalah $(3, 7)$ dan $(8, 7)$.)

Jawaban: (A)

9. Karena luas persegi panjang $PQRS$ adalah 180 dan $SR = 15$, maka $PS = \dfrac{180}{15} = 12$.
Karena $PS = 12$ dan $US = 4$, maka $PU = PS - US = 12 - 4 = 8$.
Karena $\triangle PUT$ siku-siku di $U$, dengan Teorema Pythagoras,
$$TU = \sqrt{PT^2 - PU^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$$
karena $TU > 0$.
Pada $\triangle PTS$, kita perhatikan alas $PS$ dan tinggi $TU$.
Jadi, luasnya adalah $\frac{1}{2}(PS)(TU) = \frac{1}{2}(12)(6) = 36$.

Jawaban: (B)

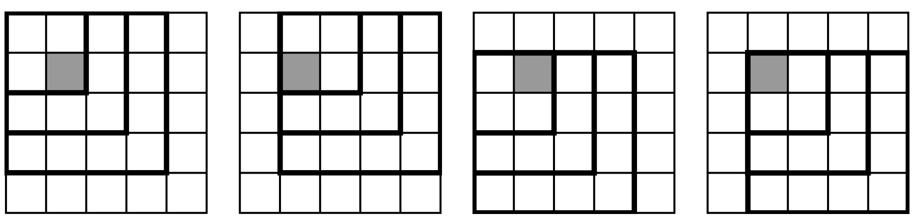
10. Untuk sembarang bilangan riil $x$ yang tidak 0, $x^2 > 0$.
Karena $-1 < x < 0$, maka $x^2 < (-1)^2 = 1$, sehingga $0 < x^2 < 1$.
Dari titik yang diketahui, hanya $C$ yang berada di antara 0 dan 1.

Jawaban: (C)

11. Karena $\frac{5}{6}$ bola berwarna putih dan sisanya bola merah, maka $\frac{1}{6}$ bola berwarna merah.
Karena 8 bola merah adalah $\frac{1}{6}$ dari total banyaknya bola dan $\frac{5}{6} = 5 \cdot \frac{1}{6}$, maka banyaknya bola putih adalah $5 \cdot 8 = 40$.

Jawaban: (C)

12. Terdapat 1 persegi berukuran $1 \times 1$ yang memuat persegi yang diarsir (yaitu persegi itu sendiri).
Terdapat 4 persegi yang masing-masing berukuran $2 \times 2$, $3 \times 3$ dan $4 \times 4$ yang memuat persegi yang diarsir.



Terakhir, ada 1 persegi berukuran $5 \times 5$ yang memuat persegi yang diarsir (yaitu persegi $5 \times 5$ itu sendiri)
Totalnya ada $1 + 4 + 4 + 4 + 1 = 14$ persegi yang memuat persegi $1 \times 1$ yang diarsir.

Jawaban: (E)

13. Kita ingin mendapatkan waktu pertama setelah 4:56 yang angkanya berurutan dari terkecil sampai terbesar dalam urutan meningkat.
Sangat masuk akal untuk mencoba 5:67, tapi ini bukan waktu yang valid.
Demikian pula, waktunya tidak bisa dimulai dengan 6, 7, 8 atau pun 9.
Tidak ada waktu dengan angka 10 atau 11 yang dimulai dengan angka berurutan yang meningkat.
Dimulai dengan 12, kita mendapatkan waktu 12:34. Inilah waktu pertama yang memenuhi.
Kita perlu menentukan lama waktu antara 4:56 dan 12:34.
Dari 4:56 ke 11:56 adalah 7 jam, atau $7 \times 60 = 420$ menit.
Dari 11:56 ke 12:00 adalah 4 menit.
Dari 12:00 ke 12:34 adalah 34 menit.
Jadi, dari 4:56 ke 12:34 adalah $420 + 4 + 34 = 458$ menit.

Jawaban: (A)

14. Garis dengan persamaan $y = x$ mempunyai gradien 1 dan melalui $(0, 0)$.
Ketika garis ini ditranslasikan, gradiennya tidak berubah.
Ketika garis ini ditranslasikan 3 satuan ke kanan dan 2 satuan ke bawah, setiap titik pada garis ditranlasikan 3 satuan ke kanan dan 2 satuan ke bawah. Jadi, titik $(0, 0)$ berpindah ke $(3, -2)$.
Jadi, garis baru mempunyai gradien 1 dan melalui $(3, -2)$.
Jadi, persamaannya adalah $y - (-2) = 1(x - 3)$ atau $y + 2 = x - 3$ atau $y = x - 5$.
Titik potong dengan sumbu-$y$ dari garis ini adalah $-5$.

JAWABAN: (C)

15. Setiap entri dalam kotak haruslah sebuah faktor dari hasil kali bilangan pada barisnya dan hasil kali bilangan pada kolomnya.

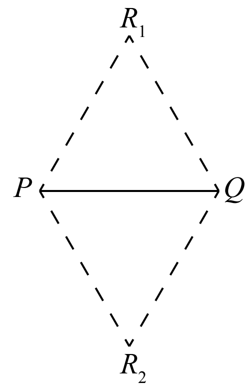
| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 56 |
| | | | 135 |
| | $N$ | | 48 |
| 21 | 108 | 160 | |

Hanya ada dua hasil kali yang merupakan kelipatan 5, yaitu 160 dan 135.
Ini artinya bahwa 5 harus berada di baris kedua dan kolom ketiga.
Dari sini, kita bisa melihat bahwa hasil kali dua bilangan lain pada baris kedua adalah $\frac{135}{5} = 27$.
Karena semua entri antara 1 dan 9, maka dua bilangan sisa pada baris ini haruslah 3 dan 9.
Karena 9 bukan faktor 21, maka 9 haruslah di kolom tengah.
Ini artinya hasil kali bilangan sisanya pada kolom tengah adalah $\frac{108}{9} = 12$.
Dan digit sisanya di kolom tengah adalah 3 dan 4, atau 2 dan 6. (Hanya inilah pasangan faktor 12 dari daftar entri yang mungkin.)
Karena 3 sudah muncul di baris kedua, maka entri pada kolom kedua haruslah 2 dan 6.
Karena 6 bukan faktor 56, maka 6 harus berada di baris pertama.
Artinya 6 berada di baris ketiga sehingga $N = 6$.
Kita bisa melengkapi kotaknya seperti berikut:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 2 | 4 | 56 |
| 3 | 9 | 5 | 135 |
| 1 | 6 | 8 | 48 |
| 21 | 108 | 160 | |

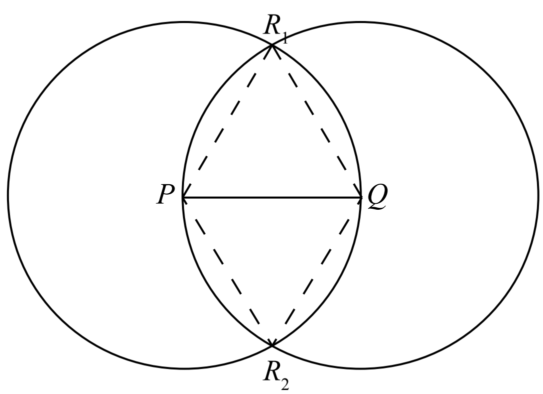
JAWABAN: (D)

16. *Jawaban 1*
Jika titik $R$ diletakkan sedemikian sehingga $PQ = QR = PR$, maka menghasilkan $\triangle PQR$ yang merupakan segitiga sama sisi.
Karena titik $P$ dan $Q$ adalah permanen, maka ada dua kemungkinan segitiga sama sisi yang mungkin dengan $PQ$ sebagai sebuah sisi – satu di masing-masing di samping $PQ$.




Satu cara untuk melihat ini adalah dengan melihat bahwa ada dua garis yang mungkin yang melalui $P$ dan membentuk sudut $60^\circ$ dengan $PQ$.

*Jawaban 2*
Perhatikan segmen garis $PQ$. Gambar lingkaran dengan pusat $P$ yang melalui $Q$ dan sebuah lingkaran dengan pusat $Q$ yang melalui $P$.




Andai titik $R$ memenuhi $PQ = QR = PR$.
Karena $PQ = QR$, maka $P$ dan $R$ berjarak sama dari $Q$, sehingga $R$ terletak pada lingkaran dengan pusat $Q$ dan melalui $P$.
Karena $PQ = PR$, maka $R$ terletak pada lingkaran dengan pusat $P$ dan melalui $Q$.
Dengan kata lain, titik $R$ terletak pada kedua lingkaran pada gambar.
Karena dua lingkaran ini berpotongan di dua titik, maka ada dua kemungkinan lokasi yang mungkin untuk $R$.

JAWABAN: (C)

17. Panjang sisi persegi adalah 2 dan $M$ dan $N$ adalah titik tengah sisi.
Jadi, $SM = MR = QN = NR = 1$.
Dengan menggunakan Teorema Pythagoras pada $\triangle PSM$, didapat
$PM = \sqrt{PS^2 + SM^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ karena $PM > 0$.
Begitu juga, $PN = \sqrt{5}$.
Dengan menggunakan Teorema Pythagoras pada $\triangle MNR$, didapat
$MN = \sqrt{MR^2 + NR^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ karena $MN > 0$.
Dengan menggunakan aturan cosinus pada $\triangle PMN$, didapat

$$\begin{aligned} MN^2 &= PM^2 + PN^2 - 2(PM)(PN)\cos(\angle MPN) \\ 2 &= 5 + 5 - 2(\sqrt{5})(\sqrt{5})\cos(\angle MPN) \\ 2 &= 10 - 10\cos(\angle MPN) \\ 10\cos(\angle MPN) &= 8 \\ \cos(\angle MPN) &= \tfrac{8}{10} = \tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

Jawaban: (A)

18. Misal $\sqrt{7 + \sqrt{48}} = m + \sqrt{n}$.
Pangkatkan kedua sisi, didapat $7 + \sqrt{48} = (m + \sqrt{n})^2$.
Karena $(m + \sqrt{n})^2 = m^2 + 2m\sqrt{n} + n$, maka $7 + \sqrt{48} = (m^2 + n) + 2m\sqrt{n}$.
Asumsikan $m^2 + n = 7$ dan $2m\sqrt{n} = \sqrt{48}$.
Pangkatkan kedua sisi persamaan kedua, didapat $4m^2n = 48$ atau $m^2n = 12$.
Jadi kita mempunyai $m^2 + n = 7$ dan $m^2n = 12$.
Dengan cara coba-coba, kita mungkin melihat bahwa $m = 2$ dan $n = 3$ adalah jawabannya.
Jika tidak, kita bisa perhatikan bahwa $n = 7 - m^2$ sehingga $m^2(7 - m^2) = 12$ atau $m^4 - 7m^2 + 12 = 0$.
Dengan pemfaktoran, didapat $(m^2 - 3)(m^2 - 4) = 0$.
Karena $m$ adalah bilangan bulat, maka $m^2 \neq 3$.
Jadi, $m^2 = 4$ yaitu $m = \pm 2$. Karena $m$ adalah bilangan bulat positif, maka $m = 2$.
Ketika $m = 2$, didapat $n = 7 - m^2 = 3$.
Jadi, $m = 2$ dan $n = 3$, yaitu memberikan $m^2 + n^2 = 13$.
Kita perhatikan bahwa $m + \sqrt{n} = 2 + \sqrt{3}$ dan $(2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + \sqrt{48}$, sesuai syarat. Ini artinya, meskipun asumsi yang dibuat di awal tidak sepenuhnya umum, tapi dapat digunakan menyelesaikan soal ini.

Jawaban: (E)

19. *Jawaban 1*
Selama 3 menit pertama, Peter berlari 48 m lebih jauh dari Radford. Disinilah mengapa:

Kita mencatat bahwa pada saat 0 menit, Radford berada pada tanda 30 m.
Jika Radford berlari $d$ m selama 3 menit ini, maka dia akan berada di tanda $(d+30)$ m setelah 3 menit.
Karena Peter berada 18 m di depan Radford setelah 3 menit, maka Peter berada pada tanda $(d + 30 + 18)$ m.
Ini artinya dalam 3 menit, Peter berlari $(d + 48)$ m yaitu 48 m lebih jauh $d$ m dari Radford .

Karena saat lari kecepatannya selalu konstan, maka Peter berlari $\dfrac{48\text{ m}}{3\text{ menit}} = 16$ m/menit lebih cepat dari Radford.

Karena Peter menyelesaikan larinya setelah 7 menit, maka Peter lari 4 menit lagi.
Selama 4 menit ini, dia berlari (4 menit) $\cdot$ (16 m/menit) $= 64$ m di depan Radford.
Setelah 3 minutes, Peter berada 18 m di depan Radford.
Jadi, setelah 7 menit, Peter berada 18 m + 64 m = 82 m lebih jauh dari Radford, sehingga Radford berada 82 m dari garis akhir.

*Jawaban 2*
Seperti pada jawaban 1, andaikan Radford berlari $d$ m selama 3 menit pertama sehingga Peter berlari $(d + 48)$ m selama 3 menit pertama.
Karena kecepatan Peter konstan, dia berlari $\frac{4}{3}(d + 48)$ m selama 4 menit berikutnya.
Kerena kecepatan Radford konstan, dia berlari $\frac{4}{3}d$ selama 4 menit berikutnya.
Ini artinya totalnya Peter berlari sejauh $(d + 48)$ m + $\frac{4}{3}(d + 48)$ m = $\frac{7}{3}(d + 48)$ m.
Dan Radford berada $(30 + d + \frac{4}{3}d)$ m dari garis awal setelah 7 menit, karena dia berada 30 m di depan.
Jadi, jarak Radford dari garis akhir, adalah (dalam meter)

$$\tfrac{7}{3}(d + 48) - (30 + d + \tfrac{4}{3}d) = \tfrac{7}{3}d + 112 - 30 - d - \tfrac{4}{3}d = 82$$

JAWABAN: (D)

20. Kita menghitung bilangan bulat positif $x$ untuk hasil kali

$$(x - 2)(x - 4)(x - 6) \cdots (x - 2016)(x - 2018) \qquad (*)$$

sama dengan 0 dan kurang dari 0 secara terpisah.
Hasil kali $(*)$ sama dengan 0 ketika salah satu faktornya 0.
Ini terjadi ketika $x$ sama dengan salah satu dari $2, 4, 6, \ldots, 2016, 2018$.
Ini adalah bilangan genap dari 2 sampai 2018, inklusif, sehingga ada $\frac{2018}{2} = 1009$ bilangan bulat yang memenuhi.

Hasil kali $(*)$ lebih kecil dari 0 ketika faktornya tidak ada yang bernilai 0 dan banyaknya faktor negatif adalah ganjil.
Perhatikan lebih lanjut bahwa untuk setiap bilangan bulat $x$, kita mempunyai

$$x - 2 > x - 4 > x - 6 > \cdots > x - 2016 > x - 2018$$

Ketika $x = 1$, maka $x - 2 = -1$ sehingga 1009 faktornya adalah negatif, membuat $(*)$ negatif.
Ketika $x = 3$, maka $x - 2 = 1$, $x - 4 = -1$ dan faktor lainnya adalah negatif, yaitu 1008 faktor negatif sehingga hasil kalinya positif.
Ketika $x = 5$, maka $x - 2 = 3$, $x - 4 = 1$ dan $x - 6 = -1$ dan faktor lainnya adalah negatif, yaitu 1007 faktor negatif sehingga hasil kalinya negatif.
Pola ini berlanjut menghasilkan nilai negatif untuk $(*)$ untuk $x = 1, 5, 9, 13, \ldots, 2013, 2017$.
Ada $1 + \frac{2017-1}{4} = 505$ nilai memenuhi (mulai dari 1, ini terjadi setiap 4 bilangan bulat).

Ketika $x \geq 2019$, setiap faktornya positif sehingga $(*)$ adalah positif.
Jadi, ada $1009 + 505 = 1514$ bilangan bulat positif $x$ yang hasil kali $(*)$ adalah kurang dari atau sama dengan 0.

Berikutnya kita harus memberikan alasan lebih lanjut tentang pola yang ditemukan di atas.
Andai $x = 4n + 1$ untuk $n = 0, 1, 2, \ldots, 504$. (Ini adalah bilangan bulat $1, 5, 9, 13, \ldots, 2017$.)
Maka $(*)$ menjadi

$$(4n - 1)(4n - 3)(4n - 5) \cdots (4n - 2015)(4n - 2017)$$

Faktor ke-$2k$ adalah $(n - (4k - 1))$ sehingga ketika $n = 4k$, faktor ini adalah positif dan faktor berikutnya adalah negatif.
Dengan kata lain, ketika $n = 2k$, $2k$ pertama dari faktor ini adalah positif dan sisanya adalah negatif.
Dengan kata lain, ketika $n = 2k$, terdapat faktor positif sebanyak genap. Karena total banyaknya faktor adalah 1009, ganjil, maka banyaknya faktor negatif adalah ganjil sehingga hasil kalinya negatif.
Dengan cara yang sama, kita bisa menunjukkan bahwa jika $x = 4n+3$ untuk $n = 0, 1, 2, \ldots, 503$ (ini adalah bilangan bulat $3, 7, 11, \ldots, 2011, 2015$), maka hasil kalinya adalah positif.
Ini menegaskan bahwa pola ini berlanjut.

Jawaban: (C)

21. Dengan mensubstitusikan $n = 1$ ke persamaan $a_{n+1} = a_n + a_{n+2} - 1$ hasilnya $a_2 = a_1 + a_3 - 1$.
Karena $a_1 = x$ dan $a_3 = y$, maka $a_2 = x + y - 1$.
Dengan menyusun ulang persamaan, didapat $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 1$ untuk setiap $n \geq 1$.
Jadi,

$$\begin{aligned}
a_4 &= a_3 - a_2 + 1 = y - (x + y - 1) + 1 = 2 - x \\
a_5 &= a_4 - a_3 + 1 = (2 - x) - y + 1 = 3 - x - y \\
a_6 &= a_5 - a_4 + 1 = (3 - x - y) - (2 - x) + 1 = 2 - y \\
a_7 &= a_6 - a_5 + 1 = (2 - y) - (3 - x - y) + 1 = x \\
a_8 &= a_7 - a_6 + 1 = x - (2 - y) + 1 = x + y - 1
\end{aligned}$$

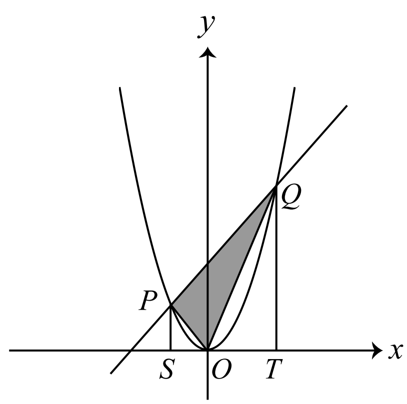
Karena $a_7 = a_1$ dan $a_8 = a_2$ dan setiap suku pada barisan hanya bergantung pada dua suku sebelumnya, maka barisannya berulang setiap 6 suku.
(Sebagai contoh, $a_9 = a_8 - a_7 + 1 = a_2 - a_1 + 1 = a_3$ dan seterusnya.)
Sekarang

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = x + (x + y - 1) + y + (2 - x) + (3 - x - y) + (2 - y) = 6$$

yang artinya jumlah setiap kelompok 6 suku berurutan juga sama dengan 6.
Kita perhatikan bahwa $2016 = 6 \cdot 336$ sehingga suku ke-2016 adalah akhir dari kelompok 6 suku, artinya bahwa jumlah 2016 suku pertama dalam barisan adalah $6 \cdot 336 = 2016$.
Terakhir, $a_{2017} = a_1 = x$ dan $a_{2018} = a_2 = x + y - 1$.
Jadi, jumlah 2018 suku pertama adalah $2016 + x + (x + y - 1) = 2x + y + 2015$.

Jawaban: (E)

22. Pertama, kita mendapatkan koordinat titik $P$ dan $Q$ dalam bentuk $k$ dengan menemukan titik potong dua grafik $y = x^2$ dan $y = 3kx + 4k^2$.
Dengan menyamakan nilai $y$, didapat $x^2 = 3kx + 4k^2$ atau $x^2 - 3kx - 4k^2 = 0$.
Kita tulis kembali sisi kiri sebagai $x^2 - 4kx + kx + (-4k)(k) = 0$ yang bisa difaktorkan sehingga didapat $(x - 4k)(x + k) = 0$ sehingga $x = 4k$ atau $x = -k$.
Karena $k > 0$, $P$ adalah kuadran dua dan $Q$ adalah kuadran pertama, maka $P$ mempunyai koordinat-$x$ yaitu $-k$ (nilainya negatif).
Karena $P$ terletak pada $y = x^2$, maka koordinat-$y$ nya adalah $(-k)^2 = k^2$ sehingga koordinat $P$ adalah $(-k, k^2)$.
Karena $Q$ terletak pada $y = x^2$ dan koordinat-$x$ nya $4k$, maka koordinat-$y$ adalah $(4k)^2 = 16k^2$ sehingga koordinat $Q$ adalah $(4k, 16k^2)$.
Langkah selanjutnya adalah menentukan luas $\triangle OPQ$ dalam bentuk $k$.
Karena luas $\triangle OPQ$ secara numerik sama dengan 80, ini memberikan persamaan untuk $k$ yang membuat kita bisa menemukan gradien garisnya.
Untuk mendapatkan luas $\triangle OPQ$ dalam bentuk $k$, kita membuat garis tegak lurus dari $P$ dan $Q$ ke $S$ dan $T$, secara berurutan, pada sumbu-$x$.




Luas $\triangle OPQ$ sama dengan luas trapesium $PSTQ$ dikurangi luas $\triangle PSO$ dan $\triangle QTO$.
Trapesium $PSTQ$ mempunyai alas paralel $SP$ dan $TQ$ dan tinggi $ST$.
Karena koordinat $P$ adalah $(-k, k^2)$, maka $SP = k^2$.
Karena koordinat $Q$ adalah $(4k, 16k^2)$, maka $TQ = 16k^2$.
Juga, $ST = 4k - (-k) = 5k$.
Jadi, luas trapesium $PSTQ$ adalah $\frac{1}{2}(SP + TQ)(ST) = \frac{1}{2}(k^2 + 16k^2)(5k) = \frac{85}{2}k^3$.
$\triangle PSO$ siku-siku di $S$ sehingga luasnya $\frac{1}{2}(SP)(SO) = \frac{1}{2}(k^2)(0 - (-k)) = \frac{1}{2}k^3$.
$\triangle QTO$ siku-siku di $T$ sehingga luasnya $\frac{1}{2}(TQ)(TO) = \frac{1}{2}(16k^2)(4k - 0) = 32k^3$.
Menggabungkan ini, luas dari $\triangle POQ$ sama dengan $\frac{85}{2}k^3 - \frac{1}{2}k^3 - 32k^3 = 10k^3$.
Karena luas ini adalah 80, maka $10k^3 = 80$ atau $k^3 = 8$ sehingga $k = 2$.
Ini artinya gradien garisnya adalah $3k$ yaitu sama dengan 6.

JAWABAN: (D)

23. Diketahui $(x-a)(x-6)+3=(x+b)(x+c)$ untuk semua bilangan riil $x$.
Pasti persamaan ini berlaku ketika $x=6$.
Dengan mensubstitusikan $x=6$ hasilnya $(6-a)(6-6)+3=(6+b)(6+c)$ atau $3=(6+b)(6+c)$.
Karena $b$ dan $c$ adalah bilangan bulat, maka $6+b$ dan $6+c$ adalah bilangan bulat, yang artinya $6+b$ adalah faktor dari 3.
Jadi, nilai yang mungkin dari $6+b$ adalah $3, 1, -1, -3$.
Ini menghasilkan nilai untuk $b$ yaitu $-3, -5, -7, -9$.
Kita perlu memastikan bahwa setiap nilai $b$ ini menghasilkan bilangan bulat $a$ dan $c$.
Jika $b=-3$, maka $6+b=3$. Persamaan $3=(6+b)(6+c)$ artinya $6+c=1$ sehingga $c=-5$.
Ketika $b=-3$ dan $c=-5$, persamaan aslinya menjadi $(x-a)(x-6)+3=(x-3)(x-5)$.
Jabarkan sisi kanan $(x-a)(x-6)+3=x^2-8x+15$ sehingga $(x-a)(x-6)=x^2-8x+12$.
Faktor persamaan kuadrat $x^2-8x+12$ yaitu $(x-2)(x-6)$ sehingga $a=2$ dan persamaan ini adalah sebuah identitas yang selalu benar untuk semua bilangan riil $x$.
Begitu juga, jika $b=-5$, maka $c=-3$ dan $a=2$. (Ini karena $b$ dan $c$ dapat ditukar pada persamaan aslinya.)
Juga, jika $b=-7$, maka $c=-9$ dan kita bisa memeriksa bahwa $a=10$.
Begitu juga, jika $b=-9$, maka $c=-7$ dan $a=10$.
Jadi, nilai yang mungkin dari $b$ adalah $b=-3,-5,-7,-9$.
Jumlah nilai ini adalah $(-3)+(-5)+(-7)+(-9)=-24$.

JAWABAN: (B)

24. Kita menggunakan notasi "$a/b/c$" untuk mengartikan $a$ keping hockey di ember satu, $b$ keping hockey di ember kedua, dan $c$ keping hockey di ember ketiga, tanpa memperhatikan urutan embernya.

Ember Kuning

1/0/0: Dengan 1 keping hockey dimasukkan, dsitribusinya selalu 1/0/0.

Ember Biru

Karena ada 2 keping hockey untuk dimasukkan di antara ketiga ember, maka totalnya ada $3^2=9$ cara melakukannya. (Ada 3 kemungkinan untuk setiap dua keping hockey)
2/0/0: Ada 3 cara untuk 2 keping hockey berakhir di ember yang sama. (1 cara untuk masing-masing dari 3 ember tersebut). Peluang untuk ini adalah $\frac{3}{9}$.
1/1/0: Jadi, ada $9-3=6$ cara untuk 2 keping hockey dimasukkan dengan 1 keping di setiap dua ember dan 0 keping di ember ketiga. Peluang untuk ini adalah $\frac{6}{9}$.

Ember Merah

Dengan 3 keping hockey untuk dimasukkan di antara 3 ember, totalnya ada $3^3=27$ cara.
3/0/0: Ada 3 cara untuk 3 keping hockey berakhir di ember yang sama (1 cara untuk masing-masing 3 ember). Peluang untuk ini adalah $\frac{3}{27}$.
1/1/1: Ada $3\cdot 2\cdot 1=6$ cara untuk 3 keping hockey masuk satu di setiap ember (3 pilihan dari ember untuk keping pertama, 2 untuk yang kedua, dan 1 untuk yang ketiga). Peluangnya adalah $\frac{6}{27}$.
2/1/0: Jadi, ada $27-3-6=18$ cara untuk 2 keping hockey dimasukkan dengan 2 keping dalam 1 ember, 1 keping dalam 1 ember dan 0 keping dalam 1 ember. Peluangnya adalah $\frac{18}{27}$.

Ember Hijau

Dengan 4 keping untuk dimasukkan di antara 3 ember, totalnya ada $3^4 = 81$ cara.

4/0/0: Ada 3 cara untuk 4 keping hockey dimasukkan di ember yang sama (1 cara untuk masing-masing dari 3 ember tersebut). Peluangnya adalah $\frac{3}{81}$.

3/1/0: Ada $4 \times 3 \times 2 = 24$ cara untuk keping hockey ini dimasukkan 3 di satu ember dan 1 di ember lainnya (4 cara untuk memilih sebuah keping untuk berada di setiap embernya, 3 cara untuk memilih ember untuk kepingan ini dan 2 cara untuk memilih ember untuk 3 keping). Peluangnya adalah $\frac{24}{81}$.

2/1/1: Ada 6 cara untuk memilih dua dari empat keping hockey. (Jika mereka dinamai W, X, Y, Z, maka kita bisa memilih WX, WY, WZ, XY, XZ, atau YZ.) Ada $6 \times 3 \times 2 = 36$ cara agar kepingannya bisa dimasukkan dengan 2 keping di satu ember dan 1 keping di setiap ember sisanya (6 cara untuk memilih 2 keping sekaligus, 3 cara untuk memilih ember dan 2 cara untuk 2 keping bisa dimasukkan ke 2 ember sisanya). Peluangnya adalah $\frac{36}{81}$.

2/2/0: Jadi, ada $81 - 3 - 24 - 36 = 18$ cara untuk 4 keping dimasukkan dengan 2 keping di setiap 2 ember. Peluangnya adalah $\frac{18}{81}$.

Untuk sebuah ember hijau yang berisi lebih banyak kepingan dari setiap 11 ember lainnya, berikut adalah distribusi yang mungkin dengan peluangnya:

| Hijau | Merah | Biru | Kuning | Peluang |
|---|---|---|---|---|
| 4/0/0 ($p = \frac{3}{81}$) | Bebas ($p = 1$) | Bebas ($p = 1$) | Bebas ($p = 1$) | $\frac{3}{81}$ |
| 3/1/0 ($p = \frac{24}{81}$) | Bebas selain 3/0/0 ($p = 1 - \frac{3}{27}$) | Bebas ($p = 1$) | Bebas ($p = 1$) | $\frac{24}{81} \cdot \frac{24}{27}$ |
| 2/1/1 ($p = \frac{36}{81}$) | 1/1/1 ($p = \frac{6}{27}$) | 1/1/0 ($p = \frac{6}{9}$) | Bebas ($p = 1$) | $\frac{36}{81} \cdot \frac{6}{27} \cdot \frac{6}{9}$ |

Sebuah distribusi kepingan 2/2/0 untuk ember hijau tidak bisa memenuhi syarat karena tidak ada ember hijau yang tunggal dengan banyaknya kepingan melebihi ember lain, karena ada dua ember hijau yang banyak kepingannya sama.

Jadi, peluang keseluruhanya adalah $\frac{3}{81} + \frac{24}{81} \cdot \frac{24}{27} + \frac{36}{81} \cdot \frac{6}{27} \cdot \frac{6}{9} = \frac{1}{27} + \frac{8}{27} \cdot \frac{8}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{243} + \frac{64}{243} + \frac{16}{243} = \frac{89}{243}$.

JAWABAN: (B)

25. Misal $D$ adalah sebuah digit dan $k$ adalah bilangan bulat positif. Maka

$$D_{(k)} = \underbrace{DD\cdots DD}_{k \text{ kali}} = D\cdot\underbrace{11\cdots 11}_{k \text{ kali}} = D\cdot\tfrac{1}{9}\cdot\underbrace{99\cdots 99}_{k \text{ kali}} = D\cdot\tfrac{1}{9}\cdot(1\underbrace{00\cdots 00}_{k \text{ kali}}-1) = D\cdot\tfrac{1}{9}\cdot(10^k-1)$$

Jadi, persamaan berikut adalah ekuivalen:

$$\begin{aligned}
P_{(2k)} - Q_{(k)} &= \left(R_{(k)}\right)^2\\
P\cdot\tfrac{1}{9}\cdot(10^{2k}-1) - Q\cdot\tfrac{1}{9}\cdot(10^k-1) &= \left(R\cdot\tfrac{1}{9}\cdot(10^k-1)\right)^2\\
P\cdot\tfrac{1}{9}\cdot(10^{2k}-1) - Q\cdot\tfrac{1}{9}\cdot(10^k-1) &= R^2\cdot\tfrac{1}{81}\cdot(10^k-1)^2\\
9P\cdot(10^{2k}-1) - 9Q\cdot(10^k-1) &= R^2\cdot(10^k-1)^2\\
9P\cdot(10^k-1)(10^k+1) - 9Q\cdot(10^k-1) &= R^2\cdot(10^k-1)^2\\
9P\cdot(10^k+1) - 9Q &= R^2\cdot(10^k-1) \qquad (\text{karena } 10^k-1\neq 0)\\
9P\cdot 10^k + 9K - 9Q &= R^2\cdot 10^k - R^2\\
9P - 9Q + R^2 &= 10^k(R^2-9P)
\end{aligned}$$

Kita pertimbangkan tiga kasus: $3\le k\le 2018$, $k=1$, dan $k=2$.

Kasus 1: $3\le k\le 2018$
Andai $R^2-9P\neq 0$.
Karena $k\ge 3$, maka $10^k(R^2-9P) > 1000$ jika $R^2-9P>0$
dan $10^k(R^2-9P) < -1000$ jika $R^2-9P<0$.
Karena $P,Q,R$ adalah digit-digit, maka $9P-9Q+R^2$ adalah paling banyak $9(9)-9(0)+9^2=162$ dan $9P-9Q+R^2$ adalah paling sedikit $9(0)-9(9)+0^2=-81$.
Ini artinya jika $R^2-9P\neq 0$, kita tidak bisa mempunyai $9P-9Q+R^2=10^k(R^2-9P)$ karena nilai yang mungkin tidak ada irisan.
Sehingga jika $3\le k\le 2018$, kita harus mempunyai $R^2-9P=0$ sehingga $9P-9Q+R^2=0$.
Jika $R^2=9P$, maka $R^2$ adalah kelipatan 3 sehingga $R$ adalah kelipatan 3.
Karena $R$ adalah digit positif, maka $R=3$ atau $R=6$ atau $R=9$.
Jika $R=3$, maka $9P=R^2=9$ sehingga $P=1$.
Karena $9P-9Q+R^2=0$, maka $9Q=9(1)+9=18$ sehingga $Q=2$.
Jika $R=6$, maka $9P=R^2=36$ sehingga $P=4$.
Karena $9P-9Q+R^2=0$, maka $9Q=9(4)+36=72$ sehingg $Q=8$.
Jika $R=9$, maka $9P=R^2=81$ sehingga $P=9$.
Karena $9P-9Q+R^2=0$, maka $9Q=9(9)+81=162$ sehingga $Q$ tidak bisa satu digit.
Oleh karena itu, pada kasus dimana $3\le k\le 2018$, kita mendapat kombinasi beranggotakan empat angka $(P,Q,R,k)=(1,2,3,k)$ dan $(P,Q,R,k)=(4,8,9,k)$.
Karena ada $2018-3+1=2016$ nilai yang mungkin dari $k$, maka kita mempunyai $2\cdot 2016=4032$ kombinasi beranggotakan empat angka sampai sejauh ini.

Kasus 2: $k=1$
Disini, persamaan $9P-9Q+R^2=10^k(R^2-9P)$ menjadi $9P-9Q+R^2=10R^2-90P$ atau $99P=9R^2+9Q$ atau $11P=R^2+Q$.
Untuk setiap nilai yang mungkin dari $P$ dari 1 sampai 9, kita tentukan nilai yang mungkin dari $Q$ dan $R$ dengan mencari kuadrat sempurna, yang nilainya maksimal 9 tapi kurang dari $11P$.
$P=1$: Disini, $11P=11$ yang mendekati bilangan kuadrat 4 dan 9. Didapat $(R,Q)=(2,7),(3,2)$.
$P=2$: Disini, $11P=22$ yang mendekati bilangan kuadrat 16. Didapat $(R,Q)=(4,6)$.
$P=3$: Disini, $11P=33$ yang mendekati bilangan kuadrat 25. Didapat $(R,Q)=(5,8)$.

$P = 4$: Disini, $11P = 44$ yang mendekati bilangan kuadrat 36. Didapat $(R, Q) = (6, 8)$.
$P = 5$: Disini, $11P = 55$ yang mendekati bilangan kuadrat 49. Didapat $(R, Q) = (7, 6)$.
$P = 6$: Disini, $11P = 66$ yang mendekati bilangan kuadrat 64. Didapat $(R, Q) = (8, 2)$.
$P = 7$: Tidak ada bilangan kuadrat antara 68 dan 76, inklusif.
$P = 8$: Disini, $11P = 88$ yang mendekati bilangan kuadrat 81. Didapat $(R, Q) = (9, 7)$.
$P = 9$: Tidak ada bilangan kuadrat antara 90 dan 98, inklusif.
Karena $k = 1$ di setiap kasus ini, didapat tambahan 8 kombinasi beranggotakan empat angka.

Kasus 3: $k = 2$
Disini, persamaan $9P - 9Q + R^2 = 10^k(R^2 - 9P)$ menjadi $9P - 9Q + R^2 = 100R^2 - 900P$ atau $909P = 99R^2 + 9Q$ atau $101P = 11R^2 + Q$.
Karena $P$ rentangnya dari 1 sampai 9, nilai yang mungkin dari $101P$ adalah $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$.
Karena $R$ rentangnya dari 1 sampai 9, nilai yang mungkin dari $11R^2$ adalah $11, 44, 99, 176, 275, 396, 539, 704, 891$.

Pasangan bilangan bulat di daftar pertama dan kedua di atas yang berbeda dan maksimal 9 adalah

(i) 101 dan 99 (yang hasilnya $(P, Q, R) = (1, 2, 3)$),

(ii) 404 dan 396 (yang hasilnya $(P, Q, R) = (4, 8, 6)$), dan

(iii) 707 dan 704 (yang hasilnya $(P, Q, R) = (7, 3, 8)$).

Karena $k = 2$ di setiap kasus ini, didapat tambahan 3 kombinasi beranggotakan empat angka.

Totalnya ada $N = 4032 + 8 + 3 = 4043$ kombinasi beranggotakan empat angka.
Jumlah digit $N$ adalah $4 + 0 + 4 + 3 = 11$.

JAWABAN: (C)