



The CENTRE for EDUCATION
in MATHEMATICS and COMPUTING
cemc.uwaterloo.ca

Kompetisi Cayley 2018

(Kelas 10)

Selasa, 27 Februari 2018
(di Amerika Utara dan Amerika Selatan)

Rabu, 28 Februari 2018
(di Luar Amerika Utara dan Amerika Selatan)

Jawaban

1. Karena $3 \times n = 6 \times 2$, maka $3n = 12$ atau $n = \frac{12}{3} = 4$.

JAWABAN: (E)

2. Kotak besar berukuran 4×5 terdiri dari 20 persegi yang berukuran 1×1 .
 Karena setengah dari semua persegi ini diarsir, 10 harus diarsir.
 Karena 3 telah diarsir, maka perlu $10 - 3 = 7$ lagi yang diarsir.

JAWABAN: (C)

3. Karena garis bilangan antara 0 dan 2 dibagi menjadi 8 bagian yang sama panjang, maka porsi antara 0 dan 1 dan antara 1 dan 2 dibagi menjadi 4 bagian.
 Artinya, pembagian pada garis bilangan menandai satu per empat, sehingga $S = 1 + 0.25 = 1.25$.

JAWABAN: (D)

4. Karena $9 = 3 \times 3$, maka $9^4 = (3 \times 3)^4 = 3^4 \times 3^4 = 3^8$.
 Dengan bentuk yang lain, bisa dibuat

$$9^4 = 9 \times 9 \times 9 \times 9 = (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) = 3^8$$

JAWABAN: (D)

5. Secara keseluruhan, sudut pusat lingkaran berukuran 360° .
 Di gambar, sudut pusat yang berukuran 120° mewakili $\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$ dari keseluruhan sudut pusat.
 Oleh karena itu, luas sektornya adalah $\frac{1}{3}$ luas keseluruhan lingkaran, atau $\frac{1}{3} \times 9\pi = 3\pi$.

JAWABAN: (B)

6. Untuk setiap nilai x , kita mempunyai $x^2 + 2x - x(x + 1) = x^2 + 2x - x^2 - x = x$.
 Ketika $x = 2018$, maka nilai dari persamaan di atas adalah 2018.

JAWABAN: (B)

7. Kita ingin menghitung persentase peningkatan dari 24 ke 48. .

Persentase peningkatan dari 24 ke 48 sama dengan $\frac{48 - 24}{24} \times 100\% = 1 \times 100\% = 100\%$.

Alternatifnya, karena 48 adalah dua kali dari 24, maka 48 mewakili peningkatan sebesar 100% di atas 24.

JAWABAN: (D)

8. Sebuah segmen garis yang menghubungkan dua titik adalah paralel terhadap sumbu- x ketika koordinat y dari dua titik itu sama.

Dalam kasus ini $2k + 1 = 4k - 5$ sehingga $6 = 2k$ atau $k = 3$.

(Kita bisa memeriksa bahwa ketika $k = 3$, koordinat dari titik tersebut adalah $(3, 7)$ dan $(8, 7)$.)

JAWABAN: (B)

9. Karena 5, a , b mempunyai rata-rata 33, maka $\frac{5 + a + b}{3} = 33$.

Kalikan dengan 3, didapat $5 + a + b = 3 \times 33 = 99$, yang artinya $a + b = 94$.

Jadi rata-rata dari a dan b adalah sama dengan $\frac{a + b}{2} = \frac{94}{2} = 47$.

JAWABAN: (E)

10. Dari nomor-nomor yang tertera pada seragam diketahui,
- 11 dan 13 adalah bilangan prima
 - 16 adalah bilangan kuadrat sempurna
 - 12, 14 dan 16 adalah bilangan genap

Karena nomor Karl dan Liu adalah bilangan prima, maka nomor mereka adalah 11 dan 13 sesuai urutan.

Karena nomor Glenda adalah kuadrat sempurna, maka nomor dia adalah 16.

Karena nomor Helga dan Julia adalah genap, maka nomor mereka adalah 12 dan 14 sesuai urutan. (Nomor 16 telah dipakai.)

Jadi, nomor Ioana adalah sisanya yaitu 15.

JAWABAN: (D)

11. *Jawaban 1*

Persegi yang besar mempunyai panjang sisi 4, dan luasnya $4^2 = 16$.

Persegi yang kecil mempunyai panjang sisi 1, sehingga luasnya 1, sehingga luasnya $1^2 = 1$.

Luas gabungan dari empat trapesium yang sama adalah selisih dari luas-luasnya ini, yaitu $16 - 1 = 15$.

Karena 4 trapesiumnya sama, maka luasnya sama, yaitu masing-masing sama dengan $\frac{15}{4}$.

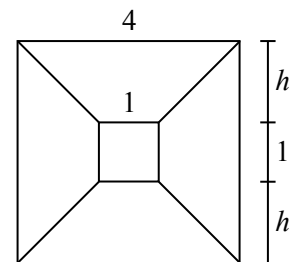
Jawaban 2

Misalkan tinggi setiap empat trapesium itu adalah h .

Karena panjang sisi luarnya adalah 4, maka $h + 1 + h = 4$ dan sehingga $h = \frac{3}{2}$.

Setiap empat trapesium mempunyai panjang alas yang paralel 1 dan 4, dan tingginya $\frac{3}{2}$.

Jadi, luas masing-masing trapesiumnya yaitu $\frac{1}{2}(1+4)(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2}(\frac{3}{2}) = \frac{15}{4}$.



JAWABAN: (D)

12. Diketahui bahwa 1 Zed sama dengan 16 Exes.

Diketahui juga bahwa 2 Exes sama dengan 29 Wyes.

Karena 16 Exes adalah 8 kelompok 2 Exes, maka 16 Exes sama dengan $8 \times 29 = 232$ Wyes.

Jadi, 1 Zed sama dengan 232 Wyes.

JAWABAN: (C)

13. Soal ini sama dengan menentukan semua nilai dari x untuk $x + 1$ yang merupakan faktor dari 3.

Faktor dari 3 adalah 3, -3 , 1, -1 .

Jika $x + 1 = 3, -3, 1, -1$, maka $x = 2, -4, 0, -2$, secara berurutan. Ada 4 nilai yang memenuhi.

JAWABAN: (A)

14. *Jawaban 1*

Segmen garis dengan titik ujung $(-9, -2)$ dan $(6, 8)$ mempunyai gradien $\frac{8 - (-2)}{6 - (-9)} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Ini artinya dimulai dari $(-9, -2)$ dan bergerak “naik 2 dan ke kanan 3” secara berulang akan memberikan titik lain pada garis yang koordinatnya keduanya bilangan bulat.

Titik ini adalah $(-9, -2), (-6, 0), (-3, 2), (0, 4), (3, 6), (6, 8)$. Se jauh ini, ada 6 titik pada garis dengan koordinat bilangan bulat.

Ada lagi titik lain yang seperti itu?

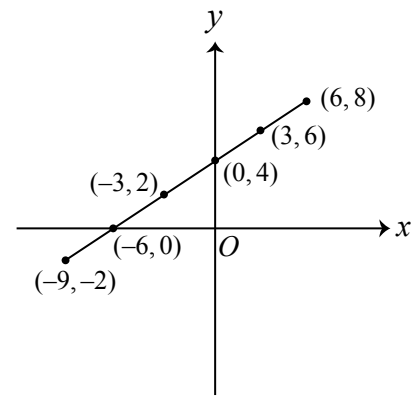
Jika ada sebuah titik antara $(-9, -2)$ dan $(6, 8)$, koordinat y haruslah sama dengan salah satu dari $-1, 1, 3, 5, 7$, bilangan bulat yang lain kemungkinannya antara -2 dan 8 .

Pertimbangkan titik pada segmen garis ini dengan koordinat- y 7.

Karena titik ini mempunyai koordinat- y di tengah-tengah antara 6 dan 8, maka titik ini harusnya titik tengah dari $(3, 6)$ dan $(6, 8)$, yang artinya bahwa koordinat- x adalah $\frac{1}{2}(3 + 6) = 4,5$ dan bukan bilangan bulat.

Dengan cara yang sama, titik-titik pada segmen garis dengan koordinat- y : $-1, 1, 3, 5$ tidak mempunyai koordinat- x bilangan bulat.

Jadi, hanya ada 6 titik yang disebutkan sebelumnya yang terletak pada segmen garis dengan koordinat bilangan bulat.



Jawaban 2

Segmen garis dengan titik ujung $(-9, -2)$ dan $(6, 8)$ mempunyai gradien $\frac{8 - (-2)}{6 - (-9)} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Karena garisnya melalui $(6, 8)$, persamaannya dapat ditulis sebagai $y - 8 = \frac{2}{3}(x - 6)$ atau $y = \frac{2}{3}x + 4$.

Misal bahwa titik (x, y) terletak sepanjang garis antara $(-9, -2)$ dan $(6, 8)$ dan untuk x dan y keduanya bilangan bulat.

Karena y adalah bilangan bulat dan $\frac{2}{3}x = y - 4$, maka $\frac{2}{3}x$ adalah bilangan bulat.

Ini berarti bahwa x haruslah kelipatan 3.

Karena x berada antara -9 dan 6 , inklusif, maka nilai yang mungkin untuk x adalah $-9, -6, -3, 0, 3, 6$.

Ini membawa pada titik-titik yang disebutkan di Jawaban 1, dan membenarkan kenapa tidak ada titik lain.

Jadi, ada 6 titik yang memenuhi.

JAWABAN: (E)

15. Karena $\triangle PQS$ adalah sama sisi maka $\angle QPS = 60^\circ$.

Karena $\angle RPQ, \angle RPS$ dan $\angle QPS$ mengelilingi titik P , maka jumlah sekelilingnya adalah 360° .

Karena $\angle RPQ = \angle RPS$, ini artinya $2\angle RPQ + \angle QPS = 360^\circ$ atau $2\angle RPQ = 360^\circ - 60^\circ$, artinya $\angle RPQ = \angle RPS = 150^\circ$.

Karena $PR = PQ$, maka segitiga $\triangle PQR$ sama kaki, sehingga

$$\angle PRQ = \angle PQR = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle RPQ) = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$$

Begitu juga, $\angle PRS = \angle PSR = 15^\circ$.

Artinya $\angle QRS = \angle PRQ + \angle PRS = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$.

JAWABAN: (A)

16. Elisabeth menaiki 5 anak tangga dengan menaiki 1 atau 2 anak tangga dalam satu waktu. Karena hanya ada 5 anak tangga, maka dia tidak menaiki 2 anak tangga dalam satu waktu lebih dari 2 kali. Jadi, dia harus menaiki 2 anak tangga 0, 1 atau 2 kali.

Jika dia menaiki 2 anak tangga sekaligus sebanyak 0 kali, maka setiap langkah terdiri dari 1 anak tangga sehingga dia menaiki 1, 1, 1, 1 sampai di atas.

Jika dia menaiki 2 anak tangga 1 kali, maka dia menaiki 2, 1, 1, 1, karena sisa 3 anak tangga harus dibuat langkah-langkah dengan 1 anak tangga. Tapi dia bisa menaiki anak tangga seperti ini dengan urutan yang berbeda. Karena dia mengambil empat langkah, dia bisa menaiki 2 anak tangga sekaligus sebagai langkah ke-1, 2, 3, atau 4. Dengan kata lain, dia menaiki 2, 1, 1, 1 atau 1, 2, 1, 1 atau 1, 1, 2, 1 atau 1, 1, 1, 2. Ada 4 kemungkinan dalam kasus ini.

Jika dia menaiki 2 anak tangga 2 kali, maka dia menaiki 2, 2, 1. Lagi-lagi, urutannya bisa berbeda. Karena dia mengambil tiga langkah, dia bisa menaiki 1 anak tangga sebagai langkah ke-1, 2 atau 3. Dengan kata lain, dia menaiki 1, 2, 2 atau 2, 1, 2 atau 2, 2, 1. Ada 3 kemungkinan dalam kasus ini.

Totalnya ada $1 + 4 + 3 = 8$ cara dia menaiki tangga tersebut.

JAWABAN: (E)

17. Karena $\frac{x-y}{x+y} = 5$, maka $x-y = 5(x+y)$.

Artinya $x-y = 5x+5y$ sehingga $0 = 4x+6y$ atau $2x+3y = 0$.

Jadi, $\frac{2x+3y}{3x-2y} = \frac{0}{3x-2y} = 0$.

(Contoh spesifik dari x dan y yang memenuhi adalah $x = 3$ dan $y = -2$.)

Artinya $\frac{x-y}{x+y} = \frac{3-(-2)}{3+(-2)} = \frac{5}{1} = 5$ dan $\frac{2x+3y}{3x-2y} = \frac{2(3)+3(-2)}{3(3)-2(-2)} = \frac{0}{13} = 0$.)

Kita perlu memperhatikan bahwa $\frac{x-y}{x+y} = 5$, maka $2x+3y = 0$ (dari keterangan di atas) serta x dan y keduanya tidak boleh 0 (agar $\frac{x-y}{x+y}$ dapat didefinisikan).

Karena $2x+3y = 0$, maka $x = -\frac{3}{2}y$ artinya tidak mungkin untuk salah satu dari x dan y nilainya 0, berarti tidak ada yang nilainya 0.

Selain itu, penyebut dari persamaan yang dicari $\frac{2x+3y}{3x-2y}$ adalah $3x-2y = 3(-\frac{3}{2}y) - 2y = -\frac{13}{2}y$ yang nilainya tidak 0, karena $y \neq 0$.

Jadi, jika $\frac{x-y}{x+y} = 5$, maka $\frac{2x+3y}{3x-2y} = 0$.

JAWABAN: (B)

18. *Solution 1*

Garis dengan persamaan $x = 0$ dan $x = 4$ adalah garis vertikal yang paralel.

Garis dengan persamaan $y = x - 2$ dan $y = x + 3$ adalah garis paralel dengan gradien 1.

Karena segi empatnya mempunyai dua set sisi yang sejajar, maka ini merupakan jajar genjang.

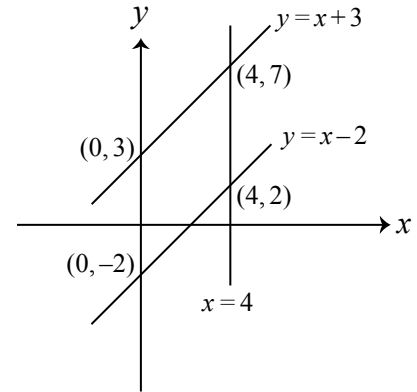
Jadi, luasnya sama dengan panjang alas kali tinggi.

Kita perhatikan sisi vertikal sepanjang sumbu- y sebagai alasnya.

Karena dua sisi yang gradiennya 1 berpotongan dengan sumbu- y di -2 dan 3 , maka panjang alas vertikalnya adalah $3 - (-2) = 5$.

Karena sisi vertikal yang paralel terletak sepanjang garis dengan persamaan $x = 0$ dan $x = 4$, maka sisi-sisi ini berjarak 4, artinya tinggi jajar genjangnya adalah 4.

Jadi, luas jajar genjangnya adalah $5 \times 4 = 20$.



Jawaban 2

Garis dengan persamaan $x = 0$ dan $x = 4$ adalah garis vertikal yang paralel.

Garis dengan persamaan $y = x - 2$ dan $y = x + 3$ adalah garis paralel dengan gradien 1.

Garis dengan persamaan $y = x - 2$ dan $y = x + 3$ berpotongan dengan garis yang persamaannya $x = 0$ di titik potong sumbu- y , yaitu -2 dan 3 , secara berurutan.

Garis dengan persamaan $y = x - 2$ dan $y = x + 3$ berpotongan dengan garis yang persamaannya $x = 4$ di $(4, 2)$ dan $(4, 7)$, secara berurutan (titik di setiap garis dengan koordinat- x 4).

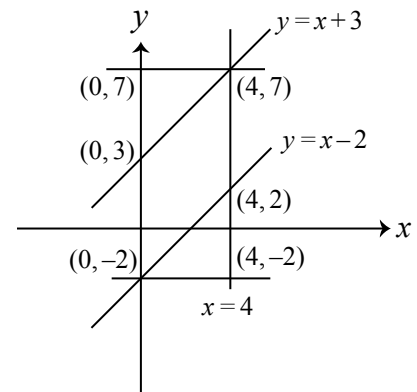
Kita menggambar garis horizontal melalui $(0, -2)$, memotong $x = 4$ di $(4, -2)$, dan melalui $(4, 7)$, memotong $x = 0$ di $(0, 7)$.

Luas segi empat sama dengan luas persegi panjang dengan titik sudut $(0, 7)$, $(4, 7)$, $(4, -2)$, $(0, -2)$ dikurangi luas gabungan dua segitiga.

Persegi panjang ini mempunyai panjang $4 - 0 = 4$ dan $7 - (-2) = 9$ sehingga luasnya $4 \times 9 = 36$.

Dua segitiganya adalah segitiga siku-siku dan panjang alasnya $4 - 0 = 4$ dan tingginya $7 - 3 = 4$ dan $2 - (-2) = 4$. Ini artinya bahwa mereka bisa digabungkan membentuk sebuah persegi dengan panjang sisi 4, sehingga luas gabungannya $4^2 = 16$.

Jadi, luas persegi panjangnya adalah $36 - 16 = 20$.



JAWABAN: (E)

19. Misal L adalah luas lingkaran yang besar, S adalah luas lingkaran yang kecil, dan A adalah luas daerah yang beririsan.

Karena luas daerah yang beririsan adalah $\frac{3}{5}$ luas lingkaran yang kecil, maka $A = \frac{3}{5}S$.

Karena luas daerah irisannya adalah $\frac{6}{25}$ luas lingkaran besar, maka $A = \frac{6}{25}L$.

Jadi, $\frac{3}{5}S = \frac{6}{25}L$.

Mengalikan kedua sisi dengan 25 untuk menghilangkan penyebut, kita mendapatkan $15S = 6L$.

Membagi kedua sisi dengan 3, kita mendapatkan $5S = 2L$. Jadi, $\frac{5S}{L} = 2$ atau $\frac{S}{L} = \frac{2}{5}$.

Ini artinya perbandingan luas lingkaran kecil terhadap luas lingkaran besar adalah 2 : 5.

JAWABAN: (D)

20. Ketika hasil kali tiga bilangan bulat dihitung, hasil kalinya bisa saja pangkat dari 2 atau bukan pangkat dari 2.

Jika p adalah peluang bahwa hasil kalinya adalah pangkat dari 2 dan q adalah peluang bahwa hasil kalinya bukan pangkat dari 2, maka $p + q = 1$.

Jadi, kita bisa mendapatkan q dengan menghitung p dan memperhatikan bahwa $q = 1 - p$.

Untuk hasil kali tiga bilangan bulat yang merupakan pangkat dari 2, tidak akan ada faktor prima selain 2. Secara khusus, ini artinya setiap tiga bilangan bulat harus pangkat dari 2.

Di setiap tiga himpunan ini, ada 3 pangkat dari 2 (yaitu 2, 4 dan 8) dan 2 bilangan bulat yang bukan pangkat dari 2 (yaitu 6 dan 10).

Ini artinya bahwa peluang memilih pangkat dari 2 secara acak dari setiap himpunan adalah $\frac{3}{5}$.

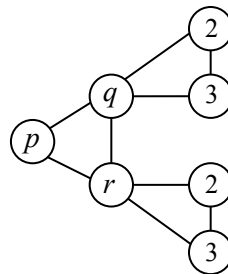
Karena Abigail, Bill dan Charlie memilih tiga bilangannya saling bebas, maka peluang masing-masing memilih pangkat dari 2 adalah $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$.

Dengan kata lain, $p = \frac{27}{125}$ sehingga $q = 1 - p = 1 - \frac{27}{125} = \frac{98}{125}$.

JAWABAN: (C)

21. Karena setiap s, t, u, v sama dengan salah satu dari 1, 2 atau 3, dan s dan t berbeda dan u dan v berbeda, maka penjumlahannya tidak bisa lebih besar dari $2 + 3 + 2 + 3 = 10$.

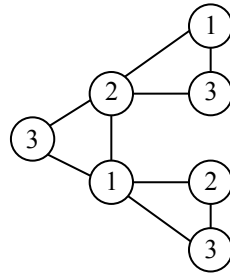
Ini hanya bisa terjadi jika s dan t adalah 2 dan 3 dalam beberapa urutan, dan jika u dan v adalah 2 dan 3 dalam beberapa urutan.



Tapi q, s, t adalah 1, 2, 3 dalam beberapa urutan dan r, u, v adalah 1, 2, 3 dalam beberapa urutan.

Sehingga jika s dan t adalah 2 dan 3, maka $q = 1$. Begitu juga, jika u dan v adalah 2 dan 3, maka $r = 1$.

Tapi p, q, r adalah 1, 2, 3 dalam beberapa urutan, sehingga kita tidak bisa mempunyai $q = r = 1$. Jadi, kita tidak bisa mempunyai $s + t + u + v = 10$. Nilai kemungkinan terbesar dari $s + t + u + v$ akan menjadi 9. Kita bisa membuat diagram dengan nilai ini $s + t + u + v$ dengan memisalkan $s = 1, t = 3, u = 2, v = 3$, sebagai berikut:



Jadi, nilai maksimumnya dari $s + t + u + v$ adalah 9.

JAWABAN: (B)

22. Karena persamaan yang diketahui harus menghasilkan bilangan bulat, setiap faktor prima dari penyebutnya haruslah membagi habis hasil kali pada pembilang. Dengan kata lain, setiap bilangan prima yang merupakan faktor dari penyebut harus muncul sebagai faktor di pembilang setidaknya sama banyaknya dengan penyebutnya.

Perhatikan bahwa $25 = 5^2$ sehingga $25^y = 5^{2y}$.

Selain itu, $36 = 6^2 = 2^2 3^2$ sehingga $36^x = (2^2 3^2)^x = 2^{2x} 3^{2x}$.

Persamaan yang diketahui adalah $\frac{30!}{2^{2x} 3^{2x} 5^{2y}}$.

Kita menghitung berapa banyak setiap 5, 3 dan 2 yang merupakan faktor pada pembilang.

Hasil kali dari $30!$ memuat enam faktor yang merupakan kelipatan 5, yaitu 5, 10, 15, 20, 25, 30.

Setiap faktor ini meliputi 1 faktor dari 5, kecuali 25 yang memuat 2 faktor.

Jadi, pembilangannya memuat 7 faktor dari 5.

Untuk pembilang setidaknya terdiri dari faktor 5 yang sama banyaknya seperti di penyebut, kita harus mempunyai $7 \geq 2y$.

Karena y adalah sebuah bilangan bulat, maka $y \leq 3$.

Hasil kali dari $30!$ memuat 10 faktor yang merupakan kelipatan 3, yaitu 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.

Tujuh diantaranya mempunyai tepatnya satu faktor 3, yaitu 3, 6, 12, 15, 21, 24, 30.

Dua diantaranya mempunyai dua faktor 3, yaitu 9, 18.

Salah satu diantaranya mempunyai tiga faktor 3, yaitu 27.

Jadi, pembilangannya memuat $7(1) + 2(2) + 1(3) = 14$ faktor 3.

Karena pembilangannya setidaknya memuat faktor 3 yang sama banyaknya dengan di penyebut, kita harus mempunyai $14 \geq 2x$.

Karena x adalah bilangan bulat, maka $x \leq 7$.

Jika $x \leq 7$, maka penyebut terdiri dari paling banyak 14 faktor 2. Karena hasil kalinya sama dengan $30!$ yang terdiri dari 15 bilangan genap, maka pembilangannya terdiri dari paling tidak 15 faktor 2, sehingga lebih banyak faktor 2 dari pada penyebutnya. Ini artinya bahwa angka 2 tidak membatasi nilai x .

Karena $x \leq 7$ dan $y \leq 3$, maka $x + y \leq 7 + 3 = 10$.

Perhatikan jika $x = 7$ dan $y = 3$, maka persamaan ini menghasilkan sebuah bilangan bulat, jadi ini adalah nilai maksimum yang bisa dicapai.

JAWABAN: (A)

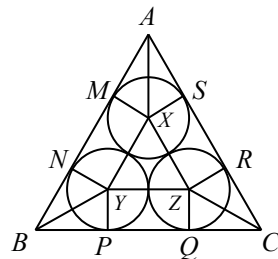
23. Untuk menentukan volume prisma, kita menghitung luas alas dan tinggi prismanya.

Pertama, kita menghitung luas alasnya.

Setiap penampang prisma yang sejajar dengan alasnya mempunyai bentuk yang sama, sehingga kita mengambil satu penampang 1 satuan di atas alas.

Karena setiap bola mempunyai jari-jari 1, penampang segitiga ini akan melalui pusat setiap bola dan titik-titik singgung antara bola dan permukaan persegi panjang.

Misal titik-titik penampang segitiga adalah A, B dan C , pusat bola adalah X, Y dan Z , dan titik-titik singgung bola (lingkaran) ke permukaan prisma (sisi segitiga) adalah M, N, P, Q, R, S , seperti ditunjukkan sebagai berikut:



Hubungkan X ke M, S, Y, Z, A , hubungkan Y ke N, P, Z, B , dan Z ke Q, R, C .

Kita tentukan panjang BC , yang juga akan menjadi panjang dari AB dan AC . Dengan menggunakan simetri, $AB = AC = BC$.

Perhatikan YP dan ZQ tegak lurus BC karena radiusnya tegak lurus dengan garis singgung.

Selain itu, $YP = ZQ = 1$ karena jari-jari setiap bola (dan juga setiap lingkaran) adalah 1.

Karena $ZYPQ$ mempunyai sudut siku-siku di P dan Q dan $YP = ZQ = 1$, maka $ZYPQ$ adalah persegi panjang. Jadi, $YZ = PQ$.

Karena YZ melalui titik dimana lingkarannya bersentuhan, maka YZ sama dengan jumlah jari-jari lingkaran, atau 2. Jadi, $PQ = YZ = 2$.

Karena $AB = BC = CA$, maka $\triangle ABC$ adalah sama sisi sehingga $\angle ABC = 60^\circ$.

Sekarang YB membagi dua $\angle ABC$, dengan simetri.

Artinya $\angle YBP = 30^\circ$, yang juga berarti $\triangle BYP$ adalah segitiga $30^\circ-60^\circ-90^\circ$.

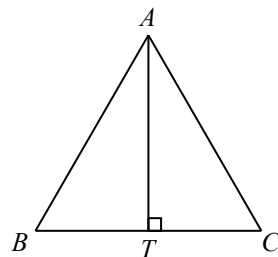
Karena $YP = 1$, maka $BP = \sqrt{3}$, dari perbandingan panjang sisi dalam segitiga $30^\circ-60^\circ-90^\circ$.

Begitu juga, $QC = \sqrt{3}$.

Jadi, $BC = BP + PQ + QC = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 2 + 2\sqrt{3}$.

Ini artinya $AB = BC = CA = 2 + 2\sqrt{3}$.

Untuk menghitung luas $\triangle ABC$, kita membuat garis tegak lurus dari A ke T pada BC .



Karena $\angle ABC = 60^\circ$, maka $\triangle ABT$ adalah segitiga $30^\circ-60^\circ-90^\circ$.

Karena $AB = 2 + 2\sqrt{3}$, maka $AT = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 + 2\sqrt{3})$.

Oleh karena itu luas $\triangle ABC$ adalah $\frac{1}{2}(BC)(AT) = \frac{1}{2}(2 + 2\sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2 + 2\sqrt{3}) \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2 + 2\sqrt{3})^2$.

Ini artinya bahwa luas alas prisma (yang merupakan $\triangle ABC$) adalah $\frac{\sqrt{3}}{4}(2 + 2\sqrt{3})^2$.

Sekarang kita hitung tinggi prisma.

Misal pusat bola atas adalah W .

Jarak vertikal dari W ke permukaan atas prisma sama dengan jari-jari bola, yaitu 1.

Begitu pun, jarak vertikal dari permukaan bawah ke bidang yang melalui X, Y dan Z adalah 1.

Untuk menyelesaikan perhitungan tinggi prisma, kita perlu menentukan jarak vertikal antara penampang melalui X, Y, Z dan titik W .

Tinggi total prisma sama dengan 2 ditambah tinggi ini.

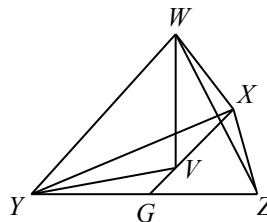
Karena empat bola bersentuhan, maka jarak antara sepasang pusatnya sama dengan jumlah jari-jarinya, yaitu 2.

Jadi, $WX = XY = YZ = WZ = WY = XZ = 2$. (Artinya bahwa $WXYZ$ adalah piramida segitiga dengan panjang rusuk sama)

Kita perlu menghitung tinggi prisma segitiga.

Hubungkan W ke titik berat $\triangle XYZ$ yaitu V .

Dengan simetri, W langsung di atas V .



Misal G adalah titik tengah YZ . Ini artinya bahwa $YG = GZ = 1$.

Hubungkan V ke Y dan G .

Karena V adalah pusat $\triangle XYZ$, maka VG tegak lurus terhadap YZ di G .

Karena $\triangle XYZ$ adalah sama sisi, maka $\angle VYG = \frac{1}{2}\angle XYZ = 30^\circ$. Ini karena V titik berat segitiga sama sisi $\triangle XYZ$

$\triangle YVG$ adalah segitiga 30° - 60° - 90° , sehingga $YV = \frac{2}{\sqrt{3}}YG = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Akhirnya, $\triangle WYV$ siku-siku di V .

Jadi, $WV = \sqrt{WY^2 - YV^2} = \sqrt{2^2 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Ini artinya bahwa tinggi prisma adalah $1 + 1 + \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Volume prisma sama dengan luas alas kali tinggi, yaitu sama dengan $\frac{\sqrt{3}}{4}(2 + 2\sqrt{3})^2 \cdot (2 + \sqrt{\frac{8}{3}})$ nilainya sekitar 46,97.

Dari pilihan jawaban, mendekati 47,00.

JAWABAN: (E)

24. Karena setidaknya ada 2 kaos kaki emas (G) di antara 2 kaos kaki hitam (B), maka kita mulai dengan menempatkan n kaos kaki hitam dengan 2 kaos kaki emas di antara setiap pasangannya:

$$BGGBGGBGGB \cdots BGGB$$

Karena ada n kaos kaki hitam, maka ada $n - 1$ “celah” di antara mereka sehingga $2(n - 1)$ atau $2n - 2$ kaos kaki telah digunakan.

Ini artinya ada 2 kaos kaki emas yang tersisa. Ada $n + 1$ lokasi dimana kaos kaki ini bisa ditempatkan: sebelum kaos kaki hitam pertama, setelah kaos kaki hitam terakhir, atau di salah satu $n - 1$ celahnya.

2 kaos kaki ini bisa ditempatkan bersamaan di satu lokasi atau terpisah di dua lokasi.

Jika 2 kaos kaki ditempatkan secara bersamaan, mereka ditempatkan di salah satu dari $n + 1$ lokasi, sehingga terdapat $n + 1$ cara melakukan ini. (Penempatan kaos kaki emas dalam lokasi ini tidak menjadi masalah karena semua kaos kaki emas itu identik.)

Kemungkinan lain yaitu 2 kaos kaki emas ditempatkan secara terpisah di dua dari $n + 1$ tempat. Terdapat $n + 1$ kemungkinan lokasi untuk kaos kaki pertama ini. Untuk masing-masingnya, ada n kemungkinan lokasi kaos kaki ini (selain lokasi kaos kaki pertama).

Karena dua kaos kaki ini identik, kita telah menghitung ganda banyaknya total kemungkinan-kemungkinannya, sehingga ada $\frac{1}{2}(n + 1)n$ cara menempatkan dua kaos kaki emas ini.

Totalnya, ada $(n + 1) + \frac{1}{2}(n + 1)n = (n + 1)(1 + \frac{1}{2}n) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ cara menyusun kaos kaki.

Kita ingin menentukan bilangan bulat positif terkecil n yang totalnya lebih besar dari 1 000 000. Ini ekuivalen dengan menentukan bilangan bulat positif terkecil n dimana $(n + 1)(n + 2)$ lebih besar dari 2 000 000.

Kita perhatikan bahwa $(n + 1)(n + 2)$ meningkat seiring n meningkat, karena setiap $n + 1$ dan $n + 2$ adalah positif dan meningkat, sehingga hasil kalinya pun meningkat.

Ketika $n = 1412$, kita punya $(n + 1)(n + 2) = 1\,997\,982$.

Ketika $n = 1413$, kita punya $(n + 1)(n + 2) = 2\,000\,810$.

Karena $(n + 1)(n + 2)$ meningkat, maka $n = 1413$ adalah bilangan bulat positif terkecil dimana $(n + 1)(n + 2)$ adalah lebih besar dari 2 000 000, sehingga bilangan bulat positif terkecil dimana terdapat lebih dari 1 000 000 susunan kaos kaki.

Jumlah digit $n = 1413$ is $1 + 4 + 1 + 3 = 9$.

JAWABAN: (A)

25. Karena suku di setiap barisan seperti ini bisa dikelompokkan untuk mendapatkan jumlah positif dan negatif, maka harus ada suku yang positif dan ada suku yang negatif.

Karena 15 suku mempunyai paling banyak dua nilai yang berbeda dan ada suku yang positif dan suku yang negatif, maka suku-sukunya itu tepat mempunyai dua nilai yang berbeda, yaitu satu positif dan satu negatif.

Kita akan menyebut nilainya sebagai x dan y . Kita mengetahui keduanya adalah bilangan bulat dan kita akan menambahkan syarat $x > 0$ dan $y < 0$.

Perhatikan salah satu dari barisan ini dan namai sukunya:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$$

Karena jumlah enam suku yang berurutan selalu positif, maka $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 > 0$.

Karena jumlah sebelas suku yang berurutan selalu negatif, maka $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} < 0$.

Karena $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 > 0$ dan $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}) < 0$, maka $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} < 0$.

Syarat enam sukunya juga adalah $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} > 0$.

Karena $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} < 0$ dan $a_6 + (a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}) > 0$, maka $a_6 > 0$ sehingga $a_6 = x$.

Syarat enam sukunya juga adalah $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} > 0$.

Karena $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} < 0$, maka $a_{12} > 0$ sehingga $a_{12} = x$.

Kita bisa mengulang argumen ini dengan menggeser semua suku satu lebih jauh dalam barisan.

Dimulai dari $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 > 0$ dan $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} < 0$ dan menggunakan argumen yang sama seperti di atas akan menghasilkan $a_7 = a_{13} = x$.

Dengan menggeser lagi satu suku lebih jauh sebanyak dua kali lagi, didapat $a_8 = a_{14} = x$ dan $a_9 = a_{15} = x$.

Sejauh ini polanya adalah

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, x, x, x, x, a_{10}, a_{11}, x, x, x, x$$

Kita bisa terus mengulangi argumen ini dengan memulai dari ujung kanan barisan.

Dimulai dari $a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} > 0$ dan $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 0$, akan membuat kita menyimpulkan bahwa $a_{10} = x$ dan $a_4 = x$.

Menggeser ulang ke kiri dan mengulangi argumen ini hasilnya $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_{10} = x$.

Ini artinya barisan ini mempunyai bentuk

$$x, x, x, x, a_5, x, x, x, x, x, a_{11}, x, x, x, x$$

Paling tidak salah satu dari a_5 dan a_{11} harus sama dengan y , jika tidak, semua suku dalam barisan akan bernilai positif.

Faktanya, kedua suku ini harus sama dengan y .

Untuk melihat ini, andaikan $a_5 = y$ tapi $a_{11} = x$.

Dalam kasus ini, jumlah 6 suku pertama dalam barisan adalah $5x + y$ yaitu positif (artinya, $5x + y > 0$).

Juga jumlah 11 suku pertama dalam barisan adalah $10x + y$ yaitu negatif (artinya, $10x + y < 0$).

Sedangkan $x > 0$ sehingga $10x + y = 5x + (5x + y) > 0$, yang bertentangan dengan $10x + y < 0$.

Kita juga mendapat hasil yang sama jika mempertimbangkan kemungkinan $a_5 = x$ dan $a_{11} = y$.

Oleh karena itu, $a_5 = a_{11} = y$ sehingga barisannya haruslah

$$x, x, x, x, y, x, x, x, x, x, y, x, x, x, x$$

Dalam kasus ini, setiap kelompok 6 suku berturut-turut meliputi tepat 5 x sehingga jumlah setiap kelompok 6 suku yang berurutan adalah $5x + y$.

Diketahui $5x + y > 0$.

Juga, jumlah setiap 11 suku yang berurutan adalah $9x + 2y$.

Diketahui $9x + 2y < 0$.

Sekarang kita ubah soal aslinya ke soal yang ekuivalen: hitung banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) dengan $x > 0$ dan $y < 0$ dan $5x + y > 0$ dan $9x + 2y < 0$ dan x di antara 1 dan 16, inklusif, atau y di antara -16 dan -1 , inklusif.

Misalkan $1 \leq x \leq 16$.

Dari $5x + y > 0$ dan $9x + 2y < 0$, kita mendapatkan $-5x < y < -4,5x$.

Sekarang kita dapat membuat bagan yang menjabarkan nilai x dari 1 sampai 16, batas yang bersesuaian pada y , dan kemungkinan nilai y yang dihasilkan:

x	$-5x$	$-4.5x$	Kemungkinan y
1	-5	-4.5	Tidak ada
2	-10	-9	Tidak ada
3	-15	-13.5	-14
4	-20	-18	-19
5	-25	-22.5	-24, -23
6	-30	-27	-29, -28
7	-35	-31.5	-34, -33, -32
8	-40	-36	-39, -38, -37
9	-45	-40.5	-44, -43, -42, -41
10	-50	-45	-49, -48, -47, -46
11	-55	-49.5	-54, -53, -52, -51, -50
12	-60	-54	-59, -58, -57, -56, -55
13	-65	-58.5	-64, -63, -62, -61, -60, -59
14	-70	-63	-69, -68, -67, -66, -65, -64
15	-75	-67.5	-74, -73, -72, -71, -70, -69, -68
16	-80	-72	-79, -78, -77, -76, -75, -74, -73

Jadi, jika $1 \leq x \leq 16$, ada $2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 56$ pasangan (x, y) sehingga ada 56 barisan.

Sebagai contoh, jika $x = 5$ dan $y = -24$, kita mendapat barisan

$$5, 5, 5, 5, -24, 5, 5, 5, 5, 5, -24, 5, 5, 5, 5$$

yang memenuhi lima syarat yang diberikan.

Apakah ada barisan tambahan lain dengan $-16 \leq y \leq -1$?

Karena $5x + y > 0$, maka $x > -0,2y$. Karena $y \geq -16$, maka $x < 0,2(16) = 3,2$.

Karena $9x + 2y < 0$, maka $x < -\frac{2}{9}y$. Karena $y \leq -1$, maka $x > \frac{2}{9}(1) = \frac{2}{9}$.

Karena $\frac{2}{9} < x < 3,2$, maka barisan mana pun dengan $-16 \leq y \leq -1$ juga mempunyai $1 \leq x \leq 16$, sehingga kita telah menghitungnya.

Ini artinya bahwa N , total banyaknya barisan yang memenuhi, adalah 56.

JAWABAN: (E)