Partie A

1. On obtient :

$$1{,}000 + 0{,}101 + 0{,}011 + 0{,}001 = 1{,}113$$

Réponse : (B)

2. On peut faire des additions d'abord, ensuite les soustractions, puis les dernières additions :

$$\begin{aligned} & 1+2+3-4+5+6+7-8+9+10+11-12 \\ &= 6-4+18-8+30-12 \\ &= 2+10+18 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Réponse : (A)

3. Chacune des 25 œuvres de charité reçoit un vingt-cinquième du total, soit $3109\ \$ \div 25$, ou 124,36 $.

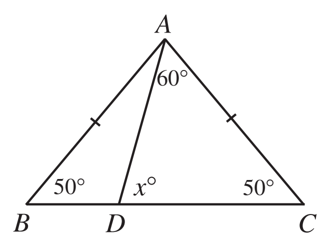
Réponse : (E)

4. Le carré de la racine carrée de 17 est $\left(\sqrt{17}\right)^2$, ce qui est égal à 17. Mettre au carré est l'opération réciproque de prendre la racine carrée.

Réponse : (C)

5. Puisque le triangle ABC est isocèle, $\angle ACB = \angle ABC = 50^\circ$.
Puisque la somme des mesures des angles du triangle ACD est égale à 180°, alors :

$$\begin{aligned} x^\circ + 60^\circ + 50^\circ &= 180^\circ \\ x &= 70 \end{aligned}$$



Réponse : (A)

6. *Solution 1*
On peut défaire les opérations en soustrayant d'abord 13, puis en divisant par 2, ce qui donne $(89-13)\div 2$, ou 38.

Solution 2
Soit x le nombre. On a $2x+13=89$. Donc $2x=76$, d'où $x=38$.

Réponse : (D)

7. L'étendue de température est égale à la différence entre le maximum et le minimum. On calcule l'étendue dans le tableau suivant.

Jour	Étendue ($^\circ$C)
Lundi	$5-(-3)=8$
Mardi	$0-(-10)=10$
Mercredi	$-2-(-11)=9$
Jeudi	$-8-(-13)=5$
Vendredi	$-7-(-9)=2$

La plus grande étendue a été obtenue mardi. RÉPONSE : (B)

8. On écrit d'abord les nombres sous forme décimale pour mieux les comparer.

$$\sqrt{5}=2{,}236...$$
$$2{,}1=2{,}1$$
$$\tfrac{7}{3}=2{,}333...$$
$$2{,}0\overline{5}=2{,}055...$$
$$2\tfrac{1}{5}=2{,}2$$

On les place en ordre, du plus petit au plus grand : $2{,}0\overline{5}$, $2{,}1$, $2\frac{1}{5}$, $\sqrt{5}$, $\frac{7}{3}$.

Le nombre du milieu est $2\frac{1}{5}$. RÉPONSE : (E)

9. Puisque un tiers des 30 élèves de la classe sont des filles, il y a 10 filles dans la classe. Il y a donc 20 garçons dans la classe. Trois quarts des 20 garçons jouent au basket-ball. Il y a donc 15 garçons qui jouent au basket-ball. RÉPONSE : (E)

10. On récrit l'addition en colonne, tout en écrivant trois décimales pour chaque nombre :

$$\begin{array}{r} 15{,}200 \\ 1{,}520 \\ 0{,}15\square \\ +\ \square{,}128 \\ \hline 20{,}000 \end{array}$$

Puisque la somme des chiffres de la dernière colonne se termine en 0, la case dans cette colonne doit contenir un 2. On obtient alors :

$$\begin{array}{r} 15,200 \\ 1,520 \\ 0,152 \\ + \ \square,128 \\ \hline 20,000 \end{array}$$

On additionne les chiffres des trois colonnes à droite de la virgule. La somme des chiffres de la colonne des dixièmes nous donne une retenue de 1 pour la colonne des unités. Puisque la somme de la retenue et des chiffres de la colonne des unités se termine en 0, la case doit contenir un 3. La somme des chiffres dans les deux cases est donc égale à 5. (On vérifie que $15,2 + 1,52 + 0,152 + 3,128 = 20$.) RÉPONSE : (A)

Partie B

11. D'après le diagramme, il y a 10, 14, 7, 9 et 13 filles dans les cinq classes. La moyenne du nombre de filles par classe est égale à $\frac{10 + 14 + 7 + 9 + 13}{5}$, c'est-à-dire à $\frac{53}{5}$, ou 10,6.

RÉPONSE : (E)

12. L'aire de la photo initiale est égale à 20×25, ou 500 cm2. L'aire de la grande photo est égale à 25×30, ou 750 cm2. L'augmentation de l'aire est égale à $750 - 500$, ou 250 cm2.
On a $\frac{\text{augmentation de l'aire}}{\text{aire initiale}} = \frac{250}{500}$, ou $\frac{\text{augmentation de l'aire}}{\text{aire initiale}} = \frac{1}{2}$.
Ce rapport est égal à 50 %. RÉPONSE : (B)

13. Les mesures des angles sont dans un rapport de 2 : 3 : 4. Cela signifie que la mesure du premier angle se divise en 2 groupes, celle du deuxième angle en 3 groupes et celle du troisième angle en 4 groupes pour un total de 9 groupes. Or la somme de ces mesures est égale à 180°. Chaque groupe contient donc 20°. Le plus grand angle mesure donc $4 \times 20°$, ou 80°. On peut présenter cet argument sous forme algébrique, ou x représente le nombre de degrés de chaque groupe :
Puisque les mesures des angles sont dans un rapport de 2 : 3 : 4, soit $2x$, $3x$ et $4x$ les mesures respectives des angles en degrés. Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, alors :

$$\begin{aligned} 2x + 3x + 4x &= 180 \\ 9x &= 180 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Le plus grand angle mesure donc $4 \times 20°$, ou 80°. RÉPONSE : (C)

14. *Solution 1*

Puisque Josée a inscrit une note plus haute pour son meilleur résultat, cela ne change pas l'ordre des résultats lorsqu'elle les écrit en ordre croissant.
La note minimum n'est donc pas changée. De plus, la médiane (la note du milieu) n'est pas changée.
L'étendue et la moyenne sont-elles changées?
L'étendue est la différence entre la note la plus haute et la note la plus basse. En écrivant une note plus élevée pour son meilleur résultat, l'étendue devient plus grande.
Pour calculer la moyenne, on additionne les résultats et on divise la somme par 7. En écrivant une note plus élevée, la somme est changée et la moyenne aussi.
Donc deux des nombres sont changés, soit l'étendue et la moyenne.

Solution 2

Supposons que Josée a eu pour résultats 80, 81, 82, 83, 84, 85 et 86, mais qu'elle a écrit 100 au lieu de 86.
Avec ses vrais résultats, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, on obtient :

Moyenne	$\dfrac{80+81+82+83+84+85+86}{7}=83$
Médiane	83
Note minimum	80
Étendue	$86-80=6$

Avec les résultats 80, 81, 82, 83, 84, 85, 100, on obtient :

Moyenne	$\dfrac{80+81+82+83+84+85+100}{7}=85$
Médiane	83
Note minimum	80
Étendue	$100-80=20$

Donc deux des nombres sont changés, soit l'étendue et la moyenne. RÉPONSE : (C)

15. L'aire de la base du prisme est égale à 10×2, ou 20 m2. La hauteur du prisme (c'est-à-dire la profondeur de la fosse) est égale à 50 cm, ou 0,5 m. Le volume est donc égal à $20\times 0{,}5$, ou 10 m3.
Puisque la fosse est à moitié pleine au départ, il faut donc ajouter 5 m3 de sable pour la remplir.

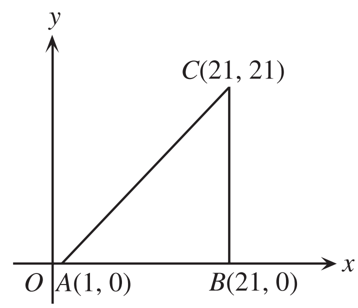
RÉPONSE : (B)

16. On évalue cette « fraction continue » étape par étape :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)}=\frac{3}{5}$$

RÉPONSE : (A)

17. Le périmètre du triangle est la somme des longueurs des côtés. Pour faciliter le travail, on fait une esquisse de la situation. Puisque le côté AB est sur l'axe des x et que le côté BC est parallèle à l'axe des y, le triangle est rectangle et on peut utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la longueur de l'hypoténuse AC.
Or $AB = 20$ et $BC = 21$. Donc :



$$
\begin{aligned}
AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\
AC^2 &= 20^2 + 21^2 \\
AC^2 &= 400 + 441 \\
AC^2 &= 841 \\
AC &= 29
\end{aligned}
$$

Le périmètre est égal à $20 + 21 + 29$, ou 70. Réponse : (A)

18. *Solution 1*

Si $-3x^2 < -14$, alors $3x^2 > 14$, d'où $x^2 > \frac{14}{3}$, ou $x^2 > 4\frac{2}{3}$.
Les seuls nombres de l'ensemble qui vérifient cette inéquation sont –5, –4, –3 et 3.

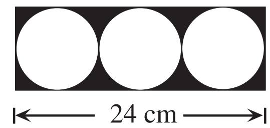
Solution 2

Pour chaque nombre x de l'ensemble, on calcule la valeur de $-3x^2$:

x	$-3x^2$
–5	–75
–4	–48
–3	–27
–2	–12
–1	–3
0	0
1	–3
2	–12
3	–27

Les nombres –5, –4, –3 et 3 vérifient l'inéquation. Réponse : (D)

19. Puisque les cercles se touchent et qu'ils touchent aux extrémités du rectangle, la longueur du rectangle, soit 24 cm, est égale à trois fois le diamètre du cercle.
Chaque cercle a donc un diamètre de 8 cm et un rayon de 4 cm, tandis que le rectangle a une hauteur de 8 cm.
On a donc :



$$\begin{aligned}&\text{Aire de la région ombrée}\\&= \text{Aire du rectangle} - \text{Aire des trois cercles}\\&= (24\times 8) - 3\left[\pi(4)^2\right]\\&= 192 - 48\pi\\&\approx 192 - 150{,}80 \qquad (\text{en utilisant } \pi \approx 3{,}14)\\&= 41{,}20\end{aligned}$$

L'aire de la région ombrée, arrondie au centimètre carré près, est égale à $41\ \text{cm}^2$.

RÉPONSE : (A)

20. Le problème est difficile à cause des deux lettres identiques. On peut surmonter cette difficulté en collant temporairement une étiquette T par dessus un des S, ce qui fait que les lettres sont maintenant G, A, U, S et T. On veut maintenant calculer la probabilité pour que Luc choisisse le S et le T lorsqu'il choisit deux tuiles au hasard.
Supposons que Luc choisit les tuiles une à la fois. Pour son premier choix, il peut choisir n'importe quelle des 5 tuiles, ce qui fait 5 choix. Pour chacun de ces choix, il peut choisir n'importe quelle des 4 tuiles qui restent, ce qui fait 4 choix. Il y a donc 20 choix possibles pour les deux tuiles. (On peut écrire les 20 choix au long pour s'assurer que le nombre total de choix est égal à 5×4 et non pas à $5+4$.)
Dans deux des 20 choix, on retrouve les lettres *S* et *T*. Or dans ces deux choix, on a vraiment choisi les deux S. La probabilité de choisir les deux S est donc égale à $\frac{2}{20}$, ou $\frac{1}{10}$.

RÉPONSE : (D)

Partie C

21. Examinons d'abord quelques exemples de quatre entiers positifs consécutifs dont la somme est un multiple de 5. Cela nous permettra peut-être de conclure que quelques-uns des énoncés ne sont pas toujours vrais.
On considère 1, 2, 3 et 4, dont la somme est 10. On peut éliminer le choix (A), car la somme ne se termine pas par un 5. On peut aussi éliminer le choix (B), car le plus grand des nombres ne se termine pas par un 9.
On considère maintenant 6, 7, 8 et 9, dont la somme est 30, et que l'on peut découvrir par tâtonnements. On peut éliminer le choix (C), car le plus petit des nombres n'est pas impair. On peut aussi éliminer le choix (E), car aucun de ces nombres ne se termine par un 3.
Le seul choix qui reste est (D).

Pourquoi l'énoncé (D) est-il toujours vrai? Il est plutôt difficile de s'en convaincre. On devra faire appel à l'algèbre.
Si n est le plus petit des entiers, les trois autres sont $n+1$, $n+2$ et $n+3$. Leur somme est donc $n+n+1+n+2+n+3$, ou $4n+6$.
Or cette expression donne toujours des valeurs paires. Pour qu'elle donne un multiple de 5, l'expression $4n+6$ doit égaler un nombre qui se termine par 0. Pour cela, il faut que $4n$ égale un nombre qui se termine par 4. Quels sont les chiffres des unités possibles pour n? Les seules possibilités sont 1 et 6 ($4\times1=4$ et $4\times6=2\underline{4}$). Dans le premier cas, les quatre nombres se termineraient par 1, 2, 3 et 4 et dans le deuxième cas, les quatre nombres se termineraient par 6, 7, 8 et 9. Aucun de ces nombres n'est un multiple de 5. RÉPONSE : (D)

22. *Solution 1*
Si Carmina remplace les pièces de cinq cents par des pièces de dix cents et vice versa, elle gagne 1,80 $. Puisqu'on gagne 5 cents lorsqu'on remplace une pièce de cinq cents par une pièce de dix cents et que l'on perd 5 cents dans le cas contraire, elle a gagné $\frac{180}{5}$, ou 36 fois plus souvent qu'elle n'a perdu. Elle devait donc avoir 36 pièces de plus de cinq cents que de pièces de dix cents.
Ces 36 pièces de cinq cents supplémentaires valent 1,80 $. En plus de ces 36 pièces de cinq cents, elle a un nombre égal de pièces de cinq cents et de dix cents. Ensemble, une pièce de cinq cents et une pièce de dix cents valent 15 cents. Elle doit avoir $\frac{180}{15}$, ou 12 ensembles de pièces de cinq cents et de dix cents, c'est-à-dire 12 pièces de cinq cents et 12 pièces de dix cents.
En tout, Carmina a donc 48 pièces de cinq cents et 12 pièces de dix cents, pour un total de 60 pièces.

Solution 2
Supposons que Carmina a c pièces de cinq cents et d pièces de dix cents.
La valeur de ces pièces est égale à 360 cents, ce qui donne $5c+10d=360$.
Si elle échange les pièces de cinq cents pour des pièces de dix cents et vice versa, la valeur de ces pièces sera égale à 540 cents, ce qui donne $10c+5d=540$.
Si on additionne ces équations, membre par membre, on obtient :

$$\begin{aligned} 5c+10d+10c+5d &= 360+540 \\ 15c+15d &= 900 \\ c+d &= 60 \end{aligned}$$

Il y a donc 60 pièces en tout. (On remarque qu'il n'a pas été nécessaire de calculer le nombre de pièces de chaque sorte!)

Solution 3
Supposons que Carmina a c pièces de cinq cents et d pièces de dix cents.
La valeur de ces pièces est égale à 360 cents, ce qui donne $5c+10d=360$, ou $c+2d=72$, d'où $c=72-2d$.

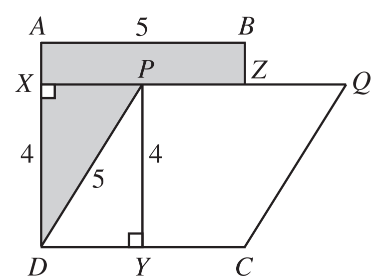
Après l'échange, on a :

$$\begin{aligned} 5d + 10c &= 540 \\ 5d + 10(72 - 2d) &= 540 \\ 5d + 720 - 20d &= 540 \\ 180 &= 15d \\ d &= 12 \end{aligned}$$

Puisque $d = 12$, alors $c = 72 - 2(12)$, ou $c = 48$.
Il y a donc 60 pièces en tout. RÉPONSE : (D)

23. Supposons que les 12 plantes de tomates portent respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12 tomates. Il y aurait alors 78 tomates. Or on sait qu'il y a vraiment 186 tomates. Il y a donc 108 tomates de plus qu'il faut distribuer. Pour que les nombres demeurent consécutifs, il faut distribuer les 108 tomates également aux 12 plantes. Chacune doit donc en recevoir 9 de plus.
Les plantes ont donc 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 et 21 tomates respectivement.
La dernière plante porte donc 21 tomates. (On peut vérifier que $10 + 11 + ... + 21 = 168$.)
RÉPONSE : (D)

24. Puisque *ABCD* est un carré avec une aire de 25 cm^2, ses côtés ont une longueur de 5 cm. Puisque *PQCD* est un losange, il est aussi un parallélogramme. Son aire est donc égale au produit de sa base et de sa hauteur.
On prolonge QP jusqu'au point *X* sur *AD*. Au point *P*, on abaisse une perpendiculaire jusqu'au point *Y* sur *DC*.



L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du rectangle *ABZX* plus l'aire du triangle *PXD*.

Puisque le losange *PQCD* a une aire de 20 cm^2 et une base de 5 cm, sa hauteur *PY* doit mesurer 4 cm. On ajoute donc au diagramme les renseignements $DX = 4$, $DP = 5$ (puisque *PQCD* est un losange), $AX = 1$ et $AB = 5$.

Le rectangle *ABZX* a une base de 5 cm et une hauteur de 1 cm. Il a donc une aire de 5 cm^2.
Le triangle *PXD* est rectangle en *X*. Puisque $DP = 5$ et $DX = 4$, alors $PX = 3$ selon le théorème de Pythagore. L'aire du triangle *PXD* est égale à $\frac{3 \times 4}{2}$, ou 6 cm2.

L'aire de la région ombrée est donc égale à 11 cm^2. RÉPONSE : (C)

25. Puisqu'une des diagonales est remplie, on connaît le produit des nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale, soit $6 \times 12 \times 24$, ou 1728.
La première rangée et la première colonne ont chacune deux cases occupées. La troisième case doit donc contenir un nombre égal à 1728, divisé par le produit des nombres des deux autres cases.

On a donc :

N	$\frac{1728}{24N}$	24
$\frac{1728}{6N}$	12	
6		$\frac{1728}{12N}$

On simplifie pour obtenir :

N	$\frac{72}{N}$	24
$\frac{288}{N}$	12	
6		$\frac{144}{N}$

On remplit les deux autres cases en procédant de la même façon :

N	$\frac{72}{N}$	24
$\frac{288}{N}$	12	$\frac{1}{2}N$
6	$2N$	$\frac{144}{N}$

Puisque chaque case doit contenir un entier strictement positif, alors les nombres N, $2N$, $\frac{1}{2}N$, $\frac{72}{N}$, $\frac{144}{N}$ et $\frac{288}{N}$ sont des entiers strictement positifs.
On examine ces expressions une à une.
Si N est un entier, $2N$ est aussi un entier.
Si $\frac{1}{2}N$ est un entier, alors N doit être un entier pair.
Si $\frac{72}{N}$ est un entier, alors N doit être un diviseur de 72.
Si $\frac{144}{N}$ est un entier, alors N doit être un diviseur de 144. Or puisque N doit être un diviseur de 72 et que $144 = 2 \times 72$, alors N sera de ce fait un diviseur de 144.
De même, si N est un diviseur de 72, il sera de ce fait un diviseur de 288 et $\frac{288}{N}$ sera un entier.
Pour résumer, N doit être un diviseur pair de 72.
Les diviseurs positifs de 72 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72.
Neuf d'entre eux sont pairs. Il y a donc 9 valeurs possibles pour N. RÉPONSE : (C)