Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2001 Solutions

Concours Gauss

(7e et 8e années – Sec. I et II)

Avec la
contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la
participation de :

Institut canadien
des actuaires

Sybase
inc (Waterloo)

Avec
l'appui de :

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Financière
Manuvie

L'Équitable, Compagnie
d'Assurance-Vie
du Canada

Comité exécutif	Ron Scoins, (Directeur), Peter Crippin, Barry Ferguson, Ruth Malinowski
Le directeur d'operation	Barry Ferguson, Université de Waterloo
Ordinatique	Steve Breen, Université de Waterloo Don Cowan, Université de Waterloo
Compilateurs du rapport du Concours Gauss	Lloyd Auckland, Université de Waterloo Barry Ferguson, Université de Waterloo
Documentation	Bonnie Findlay, Université de Waterloo
Publications	Bonnie Findlay, Université de Waterloo
Version française	André Ladouceur, Collège catholique Samuel-Genest, Ottawa Robert Laliberté, École secondaire publique Louis-Riel Gérard Proulx, Collège catholique Franco-Ouest, Ottawa Rodrigue St-Jean, École secondaire Embrun, Embrun
Adjoints à la technique	Joanne Kursikowski, Terri McCartney, Linda Schmidt, Kelly Clark, Michael Green
Comité de validation	John Barsby, St. John's-Ravenscourt School, Winnipeg Jean Collins, (retraité), Thornhill Ron Scoins, Université de Waterloo, Waterloo

Comité Gauss — Solutions Gauss 2001

Bob McRoberts (Chair)
Dr. G.W. Williams S.S.
Aurora, Ontario

Richard Auckland
Locke's School
St. Thomas, Ontario

Mark Bredin (Assoc. Chair)
St. John's-Ravenscourt School
Winnipeg, Manitoba

Sandy Emms Jones
Forest Heights C.I.
Kitchener, Ontario

Joanne Halpern
Toronto, Ontario

Marianne Kuwabara
Elizabeth Ziegler Public School
Waterloo, Ontario

David Matthews
University of Waterloo
Waterloo, Ontario

John Grant McLoughlin
Memorial University of Newfoundland
St. John's, Newfoundland

Patricia Tinholt
Valley Park Middle School
Don Mills, Ontario

Sue Trew
Holy Name of Mary S.S.
Mississauga, Ontario

Partie A

1. Le plus grand nombre de l'ensemble $\{0,01;\ 0,2;\ 0,03;\ 0,02;\ 0,1\}$ est :

   (**A**) 0,01 (**B**) 0,2 (**C**) 0,03 (**D**) 0,02 (**E**) 0,1

   Solution

   Il est plus facile de comparer les nombres si on les écrit avec deux décimales, c'est-à-dire en centièmes : 0,01; 0,20; 0,03; 0,02 et 0,10. Le plus grand est 0,2. RÉPONSE : (B)

2. En 1998, la population du Canada était de 30,3 millions. Lequel des nombres suivants est le même que 30,3 millions?

   (**A**) 30 300 000 (**B**) 303 000 000 (**C**) 30 300 (**D**) 303 000 (**E**) 30 300 000 000

   Solution

   Le nombre 30,3 millions peut être obtenu en multipliant 30,3 par $1\,000\,000$. On obtient alors $30\,300\,000$. RÉPONSE : (A)

3. La valeur de $0,001+1,01+0,11$ est :

   (**A**) 1,111 (**B**) 1,101 (**C**) 1,013 (**D**) 0,113 (**E**) 1,121

   Solution

   La somme des nombres 0,001, 1,01 et 0,11 est égale à 1,121. Il est plus facile de l'obtenir en additionnant en colonne :

$$\begin{array}{r} 0,001 \\ 1,01 \\ +0,11 \\ \hline 1,121 \end{array}$$

   RÉPONSE : (E)

4. Lorsque le nombre 16 est doublé et que l'on prend la moitié de la réponse, on obtient :

   (**A**) 2^1 (**B**) 2^2 (**C**) 2^3 (**D**) 2^4 (**E**) 2^8

   Solution

   Lorsque le nombre 16 est doublé, on obtient 32.

   Lorsqu'on prend la moitié de la réponse, on obtient 16, le nombre initial. Puisque $16=2^4$, la réponse est 2^4. RÉPONSE : (D)

5. La valeur de $3\times 4^2-(8\div 2)$ est :

   (**A**) 44 (**B**) 12 (**C**) 20 (**D**) 8 (**E**) 140

Solution

On a : $3\times 4^2-(8\div 2)$

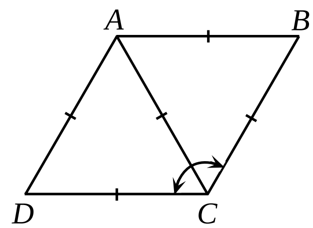
$=48-4$

$=44$

RÉPONSE : (A)

6. Le diagramme présente un losange $ABCD$. La mesure de l'angle BCD est égale à :

(**A**) 60° (**B**) 90° (**C**) 120°
(**D**) 45° (**E**) 160°



Solution

Puisque le triangle ADC est équilatéral, chacun de ses trois angles mesure 60°. De même, chacun des angles du triangle ABC mesure 60°. Puisque $\angle BCD=\angle BCA+\angle DCA$ et que $\angle BCA=\angle DCA=60°$, alors $\angle BCD=120°$. RÉPONSE : (C)

7. On affiche 40 entiers consécutifs sur une droite numérique. Si le plus petit de ces entiers est –11, quel est le plus grand?

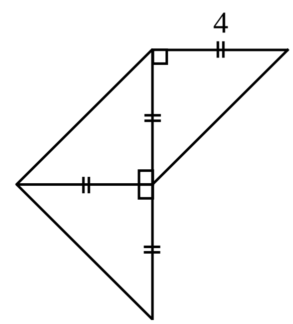
(**A**) 29 (**B**) 30 (**C**) 28 (**D**) 51 (**E**) 50

Solution

De –11 à 0, il y a 12 entiers affichés. Il y a donc 28 autres entiers affichés, soit de 1 à 28. Le plus grand de ces entiers est 28. RÉPONSE : (C)

8. L'aire de la figure au complet est égale à :

(**A**) 16 (**B**) 32 (**C**) 20
(**D**) 24 (**E**) 64

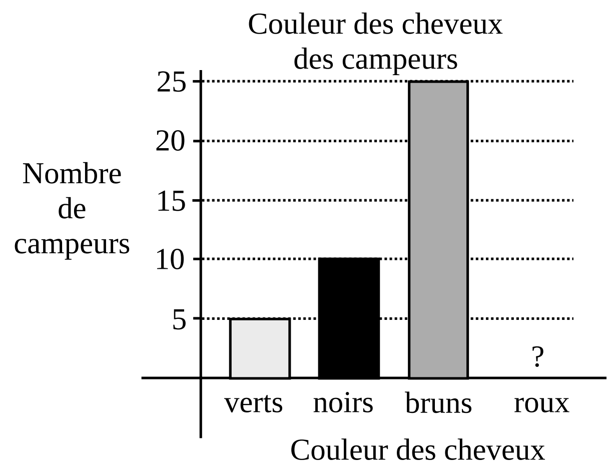


Solution

Chacun des petits triangles a une base de 4 et une hauteur de 4. Leur aire est égale à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8. L'aire de la figure au complet est égale à 3×8, ou 24. RÉPONSE : (D)

9. Le diagramme en bâtons illustre la couleur des cheveux des campeurs au Camp d'été Gauss. Le bâton qui indique le nombre de campeurs ayant des cheveux roux a été effacé accidentellement. Si 50 % des campeurs ont les cheveux bruns, combien de campeurs ont les cheveux roux?

(**A**) 5 (**B**) 10 (**C**) 25 (**D**) 50 (**E**) 60



Solution

D'après le diagramme, 25 campeurs ont les cheveux bruns, ce qui représente 50 % des campeurs. En tout, il y a donc 2×25, ou 50 campeurs. Il y a un total de 15 campeurs qui ont les cheveux verts ou noirs. Il y a donc $50 - (25 + 15)$, ou 10 campeurs qui ont les cheveux roux. RÉPONSE : (B)

10. Henri a compté un total de 20 points dans les trois premières joutes de son équipe de basket-ball. Il a compté $\frac{1}{2}$ de ces points dans la première joute et $\frac{1}{10}$ de ces points dans la deuxième joute. Combien de points a-t-il comptés dans la troisième joute?

(**A**) 2 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 8

Solution

Henri a compté $\frac{1}{2}$ de 20, ou 10 points dans sa première joute. Dans sa deuxième joute, il a compté $\frac{1}{10}$ de 20, ou 2 points. Dans la troisième joute, il a compté $20 - (2 + 10)$, ou 8 points.

RÉPONSE : (E)

Partie B

11. On prend un cube en bois pour en faire un dé juste et on indique les nombres 1, 1, 1, 2, 3 et 3 sur ses faces. Si on jette le dé une fois, quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair?

(**A**) $\frac{5}{6}$ (**B**) $\frac{4}{6}$ (**C**) $\frac{3}{6}$ (**D**) $\frac{2}{6}$ (**E**) $\frac{1}{6}$

Solution

Puisque le dé est juste, les six résultats possibles, 1, 1, 1, 2, 3 et 3, ont la même probabilité. Puisque cinq des résultats sont des nombres impairs, la probabilité d'obtenir un nombre impair est égale à $\frac{5}{6}$.

RÉPONSE : (A)

12. Dans une foire, le rapport du nombre de gros chiens au nombre de petits chiens est égal à 3:17. Il y a 80 chiens en tout à cette foire. Combien de gros chiens y a-t-il?

(**A**) 12 (**B**) 68 (**C**) 20 (**D**) 24 (**E**) 6

Solution
Puisque le rapport du nombre de gros chiens au nombre de petits chiens est égal à 3:17, il y a 3 gros chiens dans chaque groupe de 20 chiens. Puisqu'il y a 80 chiens en tout à cette foire, il y a 4 groupes de 20 chiens. Il y a donc 3×4, ou 12 gros chiens. RÉPONSE : (A)

13. Le produit de deux nombres naturels est égal à 24. La plus petite somme possible de ces deux nombres est égale à :
(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 14 (**E**) 25

Solution
Puisque le produit de deux nombres naturels est égal à 24, il ne peut s'agir que de 1×24, 2×12, 3×8 ou 4×6. La plus petite somme possible de deux de ces nombres est $4+6$, ou 10.
RÉPONSE : (B)

14. Dans le carré illustré, si on multiplie les nombres de chaque colonne, de chaque rangée ou de chaque diagonale, on obtient toujours le même résultat. La somme des deux nombres manquants est égale à :

12	1	18
9	6	4
		3

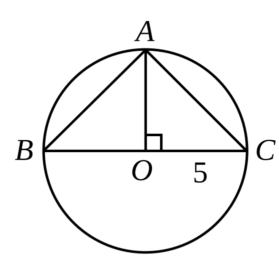
(**A**) 28 (**B**) 15 (**C**) 30
(**D**) 38 (**E**) 72

Solution
Les nombres de chaque colonne, de chaque rangée ou de chaque diagonale ont un produit de $(12)(1)(18)$, ou 216. On cherche donc deux nombres tels que $(12)(9)(\quad)=216$ et $(1)(6)(\quad)=216$. Les deux nombres sont 2 et 36 et leur somme est égale à 38. RÉPONSE : (D)

15. Un nombre premier est appelé *superpremier* si, lorsqu'on le double et que l'on soustrait 1 du résultat, on obtient un autre nombre premier. Le nombre de nombres superpremiers inférieurs à 15 est égal à :
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Solution
Les nombres premiers inférieurs à 15 sont 2, 3, 5, 7, 11 et 13. Si on double chacun de ces nombres et que l'on soustrait 1 du résultat, on obtient 3, 5, 9, 13, 21 et 25. Trois des résultats sont des nombres premiers. Il y a donc trois nombres superpremiers inférieurs à 15. RÉPONSE : (B)

16. Dans le diagramme, BC est un diamètre du cercle de centre O et de rayon 5. Si A est sur le cercle et si AO est perpendiculaire à BC, l'aire du triangle ABC est égale à :



(**A**) 6,25 (**B**) 12,5 (**C**) 25
(**D**) 37,5 (**E**) 50

Solution

Puisque O est le centre du cercle et que le rayon est 5, alors $OB = AC = OC = 5$. Le triangle ABC a donc une base de 10 et une hauteur de 5. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(10)(5)$, ou 25. RÉPONSE : (C)

17. Une pancarte rectangulaire mesure 9 m sur 16 m. Au milieu de la pancarte, on veut peindre une annonce de forme carrée. La bordure qui entoure l'annonce doit avoir une largeur d'au moins 1,5 m. L'aire de la plus grande annonce de forme carrée que l'on puisse peindre sur la pancarte est égale à :

(**A**) $78\ \text{m}^2$ (**B**) $144\ \text{m}^2$ (**C**) $36\ \text{m}^2$ (**D**) $9\ \text{m}^2$ (**E**) $56{,}25\ \text{m}^2$

Solution

Le rectangle a une largeur de 9 m. Puisque la bordure doit avoir une largeur d'au moins 1,5 m, le carré aura une largeur maximale de $9 - 1{,}5 - 1{,}5$, ou 6 m. L'aire de ce carré est égale à 6×6, ou $36\ \text{m}^2$.

RÉPONSE : (C)

18. Avant de partir pour la France, Félix a changé 924,00 $ en francs. Chaque franc valait 30 cents. S'il est revenu de son voyage avec 21 francs, combien de francs a-t-il dépensés?

(**A**) 3080 (**B**) 3101 (**C**) 256,2 (**D**) 3059 (**E**) 298,2

Solution

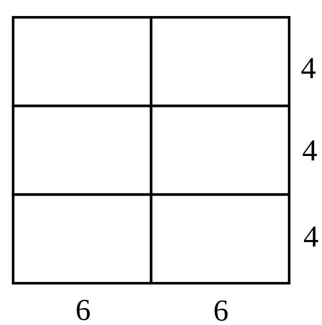
Puisque chaque franc vaut 0,30 $, Félix a pu acheter $\frac{924}{0{,}30}$, ou 3080 francs. S'il est revenu avec 21 francs, il a dépensé $3080 - 21$, ou 3059 francs. RÉPONSE : (D)

19. On utilise des tuiles de forme rectangulaire, mesurant chacune 6 sur 4, pour recouvrir un carré sans que les tuiles ne débordent l'une sur l'autre. Le nombre minimal de tuiles qu'il faut pour recouvrir un espace de forme carrée est égal à :

(**A**) 8 (**B**) 24 (**C**) 4 (**D**) 12 (**E**) 6

Solution

Puisque les rectangles mesurent 6×4, les longueurs de leurs côtés sont dans un rapport de 3:2. Il faut donc placer deux colonnes de trois tuiles comme dans le diagramme. Il faut donc 6 tuiles.



RÉPONSE : (E)

20. Anne, Berthe et Carl ont 10 bonbons à partager entre eux. Anne reçoit au moins 3 bonbons, tandis que Berthe et Carl en reçoivent au moins 2 chacun. Si Carl en reçoit 3 au plus, le nombre de bonbons que Berthe pourrait recevoir est :
(**A**) 2 (**B**) 2 ou 3 (**C**) 3 ou 4 (**D**) 2, 3 ou 5 (**E**) 2, 3, 4 ou 5

Solution
Si Anne reçoit 3 bonbons et si Carl en reçoit 2, Berthe en recevrait 5. Si Anne ou Carl reçoit plus de bonbons, Berthe pourrait en recevoir 4, 3 ou 2. RÉPONSE : (E)

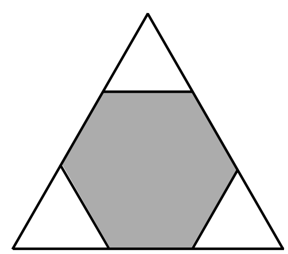
Partie C

21. Naoki a écrit neuf tests, chacun sur 100 points. Sur les neuf tests, il a obtenu une moyenne de 68 %. Si on omet la note la plus basse, quelle est la plus grande moyenne possible qu'il pourrait obtenir sur ses autres tests?
(**A**) 76,5 % (**B**) 70 % (**C**) 60,4 % (**D**) 77 % (**E**) 76 %

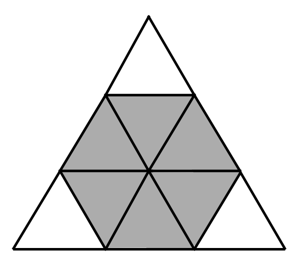
Solution
Puisqu'il a obtenu une moyenne de 68 % sur neuf tests, Naoki a obtenu un total de 9×68, ou 612 points. S'il a obtenu une note de 0 sur un de ces tests et que cette note est omise, il aurait un total de 612 points sur huit tests. Sa nouvelle moyenne serait égale à $\frac{612}{8}$, ou 76,5 %.

RÉPONSE : (A)

22. Un hexagone régulier est inscrit dans un triangle équilatéral comme dans le diagramme. Si l'hexagone a une aire de 12 unités carrées, quelle est l'aire du triangle en unités carrées?
(**A**) 20 (**B**) 16 (**C**) 15
(**D**) 18 (**E**) 24



Solution
On peut diviser l'hexagone en 6 triangles équilatéraux identiques. De plus, les triangles blancs sont équilatéraux et ils partagent un côté avec les triangles ombrés. Le grand triangle est donc formé de 9 petits triangles équilatéraux identiques.
Puisque l'hexagone a une aire de 12 unités carrées, chaque petit triangle a une aire de 2 unités carrées. L'aire du grand triangle est donc égale à 9×2, ou 18 unités carrées.



RÉPONSE : (D)

23. Catrina peut parcourir 100 m en 10 secondes. Sedra peut parcourir 400 m en 44 secondes. Elles participent tous les deux à une course de 1 km, tout en maintenant ces vitesses respectives. Quelle est l'avance de la première, au mètre près, lorsqu'il franchit la ligne d'arrivée?
(**A**) 100 m (**B**) 110 m (**C**) 95 m (**D**) 90 m (**E**) 91 m

Solution

Catrina parcourt 100 m en 10 secondes. Sedra parcourt 400 m en 44 secondes, ou 100 m en 11 secondes. Sedra est donc la plus lente. Catrina mettra 10×10, ou 100 secondes pour parcourir 1000 m. Sedra parcourt $\frac{400}{44}$, ou 9,091 m par seconde. Pendant les 100 secondes que dure la course, elle aura parcouru $100 \times 9,091$, ou 909,1 m. Catrina aura donc une avance de 90,9 m sur Sedra lorsqu'elle terminera la course. Réponse : (E)

24. Enzo a deux aquariums. Dans le premier, le rapport du nombre de guppys au nombre de poissons rouges est de 2:3. Dans le deuxième aquarium, le rapport est de 3:5. Si Enzo a 20 guppys en tout, le plus petit nombre de poissons rouges qu'il pourrait avoir est égal à :

(**A**) 29 (**B**) 30 (**C**) 31 (**D**) 32 (**E**) 33

Solution 1

Les tableaux suivants indiquent les nombres possibles de poissons dans les deux aquariums.

1er aquarium	
Nombre de guppys	Nombre de poissons rouges
2	3
4	6
6	9
8	12
10	15
12	18
14	21
16	24
18	27

2^e aquarium	
Nombre de guppys	Nombre de poissons rouges
3	5
6	10
9	15
12	20
15	25
18	30

Les lignes relient les trois résultats qui donnent un nombre total de 20 guppys, c'est-à-dire $2+18$, $8+12$ et $14+6$. Les nombres correspondants de poissons rouges sont 33, 32 et 31. Le plus petit nombre de poissons rouges est 31.

Solution 2

Dans le premier aquarium, le rapport du nombre de guppys au nombre de poissons rouges est de 2:3. On considère donc que dans cet aquarium, le nombre de guppys est égal à $2a$ et que le nombre de poissons rouges est égal à $3a$. De même, on considère que le nombre de guppys dans le deuxième aquarium est égal à $3b$ et que le nombre de poissons rouges est égal à $5b$.

$2a+3b$	a	b	$3a+5b$
20	1	6	33
20	4	4	32
20	7	2	31

En tout, il y a 20 guppys, ce qui nous donne l'équation $2a+3b=20$. On considère les diverses valeurs possibles de a et de b, tout en calculant la valeur correspondante de $3a+5b$, le nombre total de poissons rouges. On voit, d'après le tableau, que le plus petit nombre possible de poissons rouges est 31.

Réponse : (C)

25. Il est possible de former un triangle dont les côtés ont des longueurs de 4, 5 et 8. Il est impossible de former un triangle dont les côtés ont des longueurs de 4, 5 et 9. Ron a huit bâtons dont les longueurs sont des entiers. Il constate qu'il est impossible de former un triangle avec n'importe quels trois bâtons. La longueur la plus courte possible du plus grand des huit bâtons est égale à :

(**A**) 20 (**B**) 21 (**C**) 22 (**D**) 23 (**E**) 24

Solution

Les trois plus petites longueurs possibles qui ne permettent pas à Ron de former un triangle sont 1, 1 et 2. On obtient la plus petite longueur possible suivante si on additionne les deux dernières longueurs. On a alors des bâtons de longueurs 1, 1, 2, 3. On continue à obtenir la plus petite longueur possible suivante si on additionne toujours les deux dernières longueurs. On obtient les longueurs 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Il s'agit des 8 premiers termes de la suite célèbre de Fibonacci. La longueur la plus courte possible du plus grand des huit bâtons est 21.

Réponse : (B)

✿✿✿✿✿✿✿✿✿