Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1999 Solutions

Concours Gauss

(7e et 8e années – Sec. I et II)

CONCOURS GAUSS 7e

Partie A

1. $1999 - 999 + 99$ est égal à :
   (**A**) 901 (**B**) 1099 (**C**) 1000 (**D**) 199 (**E**) 99

   Solution
   $1999 - 999 + 99$
   $= 1000 + 99$
   $= 1099$ RÉPONSE : (B)

2. L'entier 287 est divisible par :
   (**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 6

   Solution 1
   Puisque le nombre 287 est impair, il n'est pas divisible par 4 ou par 6.
   Puisque 287 ne se termine pas par un 5 ou un 0, il n'est pas divisible par 5.
   Puisque la somme des chiffres de 287 est 17 et que cette somme n'est pas divisible par 3, alors 287 n'est pas divisible par 3.
   Il ne reste plus que le 7. On peut vérifier que 287 est divisible par 7.

   Solution 2
   On peut vérifier, de façon manuelle ou à l'aide d'une calculatrice, que $\frac{287}{3} = 95{,}66\ldots$; $\frac{287}{4} = 71{,}75$; $\frac{287}{5} = 57{,}4$; $\frac{287}{7} = 41$; $\frac{287}{6} = 47{,}833\ldots$ RÉPONSE : (D)

3. Susanne veut verser 35,5 kg de sucre dans des petits sacs. Si chaque sac peut contenir 0,5 kg, de combien de sacs aura-t-elle besoin?
   (**A**) 36 (**B**) 18 (**C**) 53 (**D**) 70 (**E**) 71

   Solution
   Le nombre de sacs est égal à : $\frac{35{,}5}{0{,}5} = 71$ RÉPONSE : (E)

4. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ est égal à :
   (**A**) $\frac{15}{8}$ (**B**) $1\frac{3}{14}$ (**C**) $\frac{11}{8}$ (**D**) $1\frac{3}{4}$ (**E**) $\frac{7}{8}$

   Solution
   $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
   $= \frac{8}{8} + \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8}$

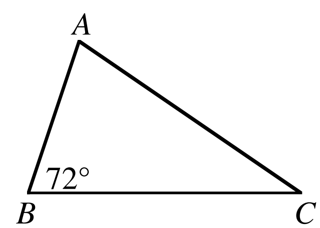
$= \frac{15}{8}$ RÉPONSE : (A)

5. Laquelle des expressions suivantes donne un nombre impair?
(**A**) 6^2 (**B**) $23 - 17$ (**C**) 9×24 (**D**) $96 \div 8$ (**E**) 9×41

Solution 1
On évalue chaque expression directement.
(**A**) $6^2 = 36$ (**B**) $23 - 17 = 6$ (**C**) $9 \times 24 = 216$ (**D**) $96 \div 8 = 12$ (**E**) $9 \times 41 = 369$

Solution 2
On pense aux propriétés des nombres pairs et des nombres impairs.
(**A**) (pair) × (pair) = pair
(**B**) (impair) – (impair) = pair
(**C**) (impair) × (pair) = pair
(**D**) (pair) ÷ (pair) = pair ou impair (Il faut évaluer.)
(**E**) (impair) × (impair) = impair RÉPONSE : (E)

6. Dans le triangle ABC, $\angle B = 72°$. Quelle est la somme des mesures des deux autres angles, en degrés?
(**A**) 144 (**B**) 72 (**C**) 108
(**D**) 110 (**E**) 288



Solution
Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, alors :
$$\angle A + \angle C = 180° - 72°$$
$$= 108°$$
RÉPONSE : (C)

7. Si on place les nombres $\frac{4}{5}$, 81 % et 0,801 en ordre, du plus petit au plus grand, le bon ordre est :
(**A**) $\frac{4}{5}$; 81 %; 0,801 (**B**) 81 %; 0,801; $\frac{4}{5}$ (**C**) 0,801; $\frac{4}{5}$; 81 %
(**D**) 81 %; $\frac{4}{5}$; 0,801 (**E**) $\frac{4}{5}$; 0,801; 81 %

Solution
On écrit les nombres sous forme décimale pour mieux les comparer.
On a $\frac{4}{5} = 0{,}800$; 81 % = 0,810; 0,801.
Du plus petit au plus grand, on a $\frac{4}{5}$; 0,801; 81 %. RÉPONSE : (E)

8. La moyenne des nombres 10, 4, 8, 7 et 6 est égale à :
(**A**) 33 (**B**)13 (**C**) 35 (**D**) 10 (**E**) 7

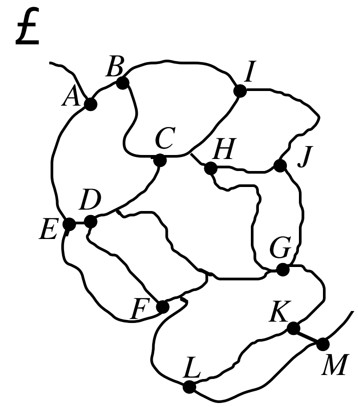
Solution

La moyenne est égale à : $\frac{10+4+8+7+6}{5}$

$= \frac{35}{5}$

$= 7$ RÉPONSE : (E)

9. Le diagramme est une carte indiquant des sentiers dans une forêt. André se propose de visiter les sites, de *A* à *M*, en ordre alphabétique. Il ne doit jamais revenir sur ses pas et il doit toujours procéder directement d'un site au suivant. Quel est le nombre maximal de sites qu'il peut visiter avant de briser l'ordre alphabétique?



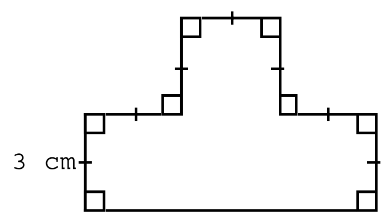
(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 13

Solution

En traçant à l'aide d'un crayon, on peut visiter les sites de *A* à *J* en ordre alphabétique, sans revenir sur ses pas. On constate alors qu'il est impossible de se rendre au site *K* sans passer par *G* ou sans retracer ses pas.

Puisque *J* est la dixième lettre de l'alphabet, André peut visiter un maximum de 10 sites avant de briser l'ordre alphabétique. RÉPONSE : (D)

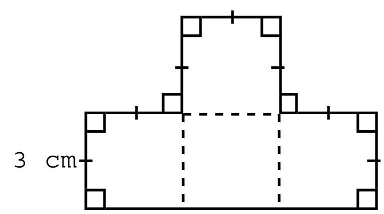
10. Dans le diagramme, les segments se rencontrent en formant des angles de 90°. Si les petits segments mesurent 3 cm, quelle est l'aire de la figure, en centimètres carrés?



(**A**) 30 (**B**) 36 (**C**) 40 (**D**) 45 (**E**) 54

Solution

Les quatre carrés sont identiques. Ils ont chacun une aire égale à : $3 \times 3 = 9$ cm^2. L'aire de la figure est égale à : $4 \times 9 = 36$ cm^2.



RÉPONSE : (B)

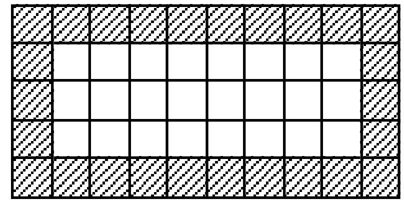
Partie B

11. On a recouvert de tuiles carrées le parquet d'une salle rectangulaire. La salle mesure 10 tuiles de long et 5 tuiles de large. Le nombre de tuiles qui touchent aux murs de la salle est :

(**A**) 26 (**B**) 30 (**C**) 34 (**D**) 46 (**E**) 50

Solution

On trace un quadrillage mesurant 10×5, ce qui permet de compter les tuiles qui touchent aux murs de la salle. On voit qu'il y a 26 tuiles qui touchent aux murs de la salle. On peut aussi compter $2 \times 10 + 2 \times 5 - 4 = 26$. On a soustrait 4 parce que les quatre tuiles des coins ont été comptées deux fois. Si la salle avait mesuré L tuiles de long et l tuiles de large, le nombre de tuiles qui touchent aux murs de la salle serait égal à $2L + 2l - 4$.



RÉPONSE : (A)

12. Cinq élèves, France, Gaëlle, Henri, Isabelle et Jean, sont assis dans cet ordre autour d'une table de forme circulaire. Pour décider qui sera premier à un jeu, ils décident de faire un compte à rebours. Henri dit '34', puis Isabelle dit '33'. Les cinq élèves continuent ainsi le compte à rebours, dans l'ordre où ils sont assis. Qui est celui ou celle qui dira '1'?

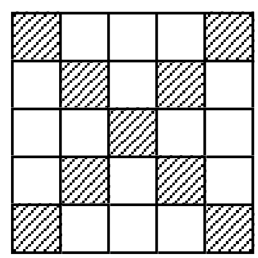
(**A**) France (**B**) Gaëlle (**C**) Henri (**D**) Isabelle (**E**) Jean

Solution

Puisqu'il y a cinq personnes autour de la table, chacun dira un nombre à tous les cinq nombres.
Henri dira '34', '29', '24', '19', '14', '9', '4'. Isabelle dira '33', '28', '23', '18', '13', '8', '3'.
Jean dira '32', '27', '22', '17', '12', '7', '2'. France dira '31', '26', '21', '16', '11', '6', '1'.
Gaëlle dira '30', '25', '20', '15', '10', '5'.
Pour les mathématiciennes et les mathématiciens, il s'agit d'un problème portant sur l'arithmétique modulo 5. RÉPONSE : (A)

13. Dans le diagramme, le pourcentage des petits carrés qui sont ombrés est égal à :

(**A**) 9 (**B**) 33 (**C**) 36
(**D**) 56,25 (**E**) 64



Solution

Il y a 9 petits carrés ombrés, sur un total de 25 petits carrés.
Le rapport est donc égal à $\frac{9}{25}$, ce qui correspond à 36 %. RÉPONSE : (C)

14. Lequel des nombres suivants est un nombre impair, contenant le chiffre 5, divisible par 3 et situé entre les nombres 12^2 et 13^2?

(**A**) 105 (**B**) 147 (**C**) 156 (**D**) 165 (**E**) 175

Solution

Puisque $12^2 = 144$ et $13^2 = 169$, on rejette les choix 105 et 175.
On rejette aussi le choix 156 qui est un nombre pair. Il reste 147 et 165. Puisque 147 ne contient pas le chiffre 5, ce choix est rejetté. Il ne reste plus que 156. On peut vérifier qu'il satisfait à toutes les

conditions. RÉPONSE : (C)

15. Dans une boîte, il y a 36 cubes roses, 18 cubes bleus, 9 cubes verts, 6 cubes rouges et 3 cubes mauves, tous de format identique. Si on choisit un cube au hasard, quelle est la probabilité de choisir un cube vert?

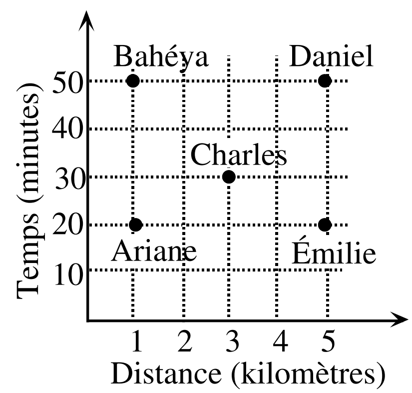
(**A**) $\frac{1}{9}$ (**B**) $\frac{1}{8}$ (**C**) $\frac{1}{5}$ (**D**) $\frac{1}{4}$ (**E**) $\frac{9}{70}$

Solution
En tout, il y a 72 cubes de format indentique.
Puisqu'il y a 9 cubes verts, la probabilité de choisir un cube vert est égale à : $\frac{9}{72} = \frac{1}{8}$

RÉPONSE : (B)

16. Le graphique représente le temps que cinq personnes ont mis pour parcourir diverses distances. En moyenne, quelle personne était la plus rapide?

(**A**) Ariane (**B**) Bahéya (**C**) Charles
(**D**) Daniel (**E**) Émilie



Solution
Le tableau suivant indique les données du graphique, ainsi que leur vitesse moyenne.
On rappelle que vitesse moyenne $= \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$.

	Distance (km)	Temps (minutes)	Vitesse (km/min)
Ariane	1	20	$\frac{1}{20} = 0{,}05$
Bahéya	1	50	$\frac{1}{50} = 0{,}02$
Charles	3	30	$\frac{3}{30} = 0{,}10$
Daniel	5	50	$\frac{5}{50} = 0{,}10$
Émilie	5	20	$\frac{5}{20} = 0{,}25$

Émilie est la plus rapide. RÉPONSE : (E)

17. Une suite de type Fibonacci est une suite de nombres dans laquelle chaque nombre, à partir du troisième, est la somme des deux nombres précédents. Si le premier nombre d'une telle suite est 2 et le troisième est 9, quel est le huitième nombre de la suite?

(**A**) 34 (**B**) 36 (**C**) 107 (**D**) 152 (**E**) 245

Solution

Puisque le premier nombre est 2 et le troisième est 9, le deuxième doit être 7.

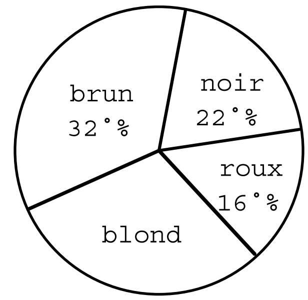
La suite est donc : 2, 7, 9, 16, 25, 41, 66, 107. Le huitième nombre est 107.

RÉPONSE : (C)

18. Le diagramme circulaire indique les résultats d'un sondage, mené auprès de 600 personnes, portant sur la couleur des cheveux. Combien de ces personnes ont les cheveux blonds?

(**A**) 30 (**B**) 160 (**C**) 180

(**D**) 200 (**E**) 420



Couleur des chevei

Solution

D'après le diagramme, 30 % des 600 personnes ont les cheveux blonds.

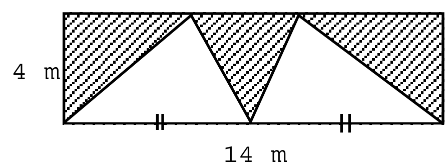
Or 30 % de 600 est égal à $0{,}30 \times 600$ ou $\frac{30}{100} \times 600$, c.-à-d. à 180.

Il y a donc 180 des 600 personnes qui ont les cheveux blonds. RÉPONSE : (C)

19. Quelle est l'aire de la partie ombrée du rectangle, en mètres carrés?

(**A**) 14 (**B**) 28 (**C**) 33,6

(**D**) 56 (**E**) 42



Solution

Les deux triangles non ombrés ont chacun une base de 7 m et une hauteur de 4 m. Chacun a donc une aire égale à : $\frac{7 \times 4}{2} = 14$ m^2. Les deux triangles ont donc une aire totale de 28 m^2.

La partie ombrée est égale à : $56 - 28 = 28$ m^2 RÉPONSE : (B)

20. On place les neuf premiers entiers impairs positifs dans le carré magique, de manière que la somme des nombres dans chaque rangée, chaque colonne et chaque diagonale soit la même. Quelle est la valeur de $A + E$?

(**A**) 32 (**B**) 28 (**C**) 26

(**D**) 24 (**E**) 16

A	1	B
5	C	13
D	E	3

Solution

La somme des neuf premiers entiers impairs positifs est égale à :

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 81$$

Puisque la somme des nombres dans chaque colonne est la même, cette somme est égale à : $\frac{81}{3} = 27$.

Il en est de même pour les rangées. Puisque $B + 13 + 3 = 27$, alors $B = 11$.

Dans la première rangée, $A+1+11=27$. Donc $A=15$.
Dans la première colonne, $15+5+D=27$. Donc $D=7$.
Dans la troisième rangée, $7+E+3=27$. Donc $E=17$.
Donc : $A+E=15+17$
$=32$ RÉPONSE : (A)

Partie C

21. On joue un jeu sur le tableau illustré. À chaque tour, on doit se déplacer de trois positions dans n'importe quelle direction (à droite, à gauche, vers le haut ou vers le bas), puis de deux positions dans une direction perpendiculaire à la première. Si on est en position S, laquelle des positions P, Q, R, T ou W ne peut jamais être obtenue de la manière décrite, peu importe le nombre de tours que l'on joue?

		P		
	Q		R	
		T		
S				W

(**A**) P (**B**) Q (**C**) R (**D**) T (**E**) W

Solution
En partant de S, on peut atteindre la position R. En partant de S, on peut aussi atteindre la position P. On peut ensuite atteindre l'une après l'autre les positions W et Q. Pour arriver à la position T, il faudrait être placé à l'extérieur du tableau pour se déplacer de trois positions, puis de deux positions.
RÉPONSE : (D)

22. On colle ensemble 42 cubes, mesurant chacun 1 cm de large, pour former un prisme droit à base rectangulaire. Si la base du prisme a un périmètre de 18 cm, quelle est la hauteur du prisme, en centimètres?
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) $\frac{7}{3}$ (**D**) 3 (**E**) 4

Solution 1
Puisque le prisme a un volume de 42 cm^3, on peut l'obtenir en multipliant $42\times1\times1$, $6\times7\times1$, $21\times2\times1$, $2\times3\times7$ ou $14\times3\times1$.
Pour avoir un périmètre de 18 cm, il faut que la longueur et la largeur aient une somme de 9 cm. Parmi les possibilités ci-dessus, seule $2\times3\times7$ permet une telle somme.
On a donc une longueur de 7 cm et une largeur de 2 cm.
La hauteur est donc égale à 3 cm.

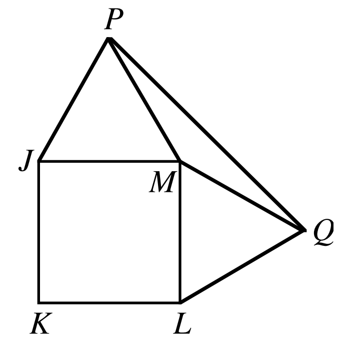
Solution 2
Puisque le prisme a un périmètre de 18 cm, le tableau suivant donne les seules possibilités quant à la longueur L et à la largeur l.

longueur (L)	largeur (l)
8	1
7	2
6	3
5	4

Puisque le prisme a un volume de 42 cm^3, ces possibilités donnent les équations suivantes, h étant la

hauteur du prisme : $8 \times 1 \times h = 42$, $7 \times 2 \times h = 42$, $6 \times 3 \times h = 42$ et $5 \times 4 \times h = 42$.
La seule valeur entière possible de h est $h = 3$, avec $L = 7$ et $l = 2$.
La hauteur est donc égale à 3 cm. RÉPONSE : (D)

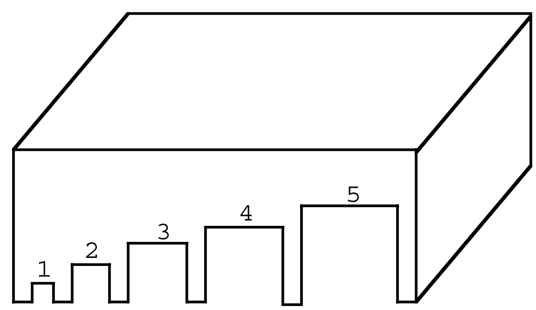
23. Le diagramme illustre un carré $JKLM$. Les points P et Q sont situés à l'extérieur du carré, de manière que les triangles JMP et MLQ soient équilatéraux. La mesure de l'angle PQM, en degrés, est égale à :



(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 25
(**D**) 30 (**E**) 150

Solution
Puisque les triangles JMP et MLQ sont équilatéraux, alors $\angle PMJ = 60°$ et $\angle QML = 60°$.
Donc : $\angle PMQ = 360° - 90° - 60° - 60°$
$= 150°$
Puisque les côtés JM, ML, MP et MQ sont congrus, le triangle PQM est isocèle.
Donc $\angle MPQ = \angle MQP$ et puisque $\angle PMQ = 150°$, chacun mesure 15°.
RÉPONSE : (B)

24. On a découpé une face d'une boîte, le long d'un bord, pour former cinq trous de grandeurs croissantes. La boîte est utilisée pour un jeu de billes. Le nombre au-dessus d'un trou indique le nombre de points comptés lorsqu'une bille roule dans le trou. On a des petites, des moyennes et des grosses billes. Les petites peuvent passer dans n'importe quel trou, tandis que les moyennes peuvent passer dans les trous numéros 3, 4 et 5. Les grosses billes peuvent seulement passer dans le trou numéro 5. Supposons que vous pouvez choisir jusqu'à 10 billes de chaque grandeur et que vous réussissez à faire pénétrer chaque bille dans un trou. Quel est le nombre maximal de billes qu'il faudrait faire rouler pour obtenir 23 points?



(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 14
(**D**) 15 (**E**) 16

Solution
Puisqu'on cherche le nombre ***maximal*** de billes, on en veut beaucoup. On commence donc par utiliser les 10 petites billes que l'on fait rouler dans le trou numéro 1 pour un total de 10 points. Il reste alors 13 points à obtenir. On peut continuer avec trois billes moyennes que l'on fait rouler dans les trous respectifs numéros 5, 5 et 3. On a alors utilisé 13 billes en tout.

Pour obtenir les 13 derniers points, on peut aussi utiliser quatre billes moyennes que l'on fait rouler dans les trous respectifs numéros 3, 3, 3 et 4. On a alors utilisé 14 billes en tout.
Voici une autre façon de s'y prendre. On choisit 10 petites billes et on en fait rouler neuf dans le trou numéro 1 et une dans le trou numéro 2, pour un total de 11 points. On choisit alors quatre billes moyennes que l'on fait rouler dans le trou numéro 3, pour un total global de 23 points. On a alors utilisé 14 billes. RÉPONSE : (C)

25. Dans une ligue de balle molle, chaque équipe a rencontré chaque autre équipe 4 fois. Voici les points obtenus par les équipes de la ligue : Lions, 22; Tigres, 19; Cougars, 14; Panthères, 12. Si chaque équipe a reçu trois points pour une victoire, un point pour un match nul et aucun point pour une défaite, combien y a-t-il eu de matchs nuls?
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 10

Solution
Lorsque chaque équipe rencontre chaque autre équipe une seule fois, le nombre de parties est égal à :
$3+2+1=6$
Puisque chaque équipe rencontre chaque autre équipe quatre fois, le nombre de parties est égal à :
$4\times 6=24$
Puisqu'on accorde trois points par victoire, si chaque partie avait une équipe gagnante, le nombre total de points accordés serait égal à : $3\times 24=72$
Si on additionne le nombre de points des équipes, on obtient : $22+19+14+12=67$
À chaque match nul, chacune des deux équipes reçoit un point. On accorde donc un total de deux points au lieu des trois points pour une victoire. Chaque point qu'il manque pour faire 72 correspond donc à un match nul.
Le nombre de matchs nuls est donc égal à : $72-67=5$ RÉPONSE : (C)