35e Anniversaire
1963 – 1998

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

# 1998 Solutions

# Concours Gauss

*(8e année – Sec. II)*

## Partie A

1. Si on triple le nombre 4567, le chiffre des unités du nombre obtenu est :
(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 3 (**E**) 1

*Solution*
On veut tripler le nombre 4567.
Pour déterminer le chiffre des unités du nombre obtenu, il suffit de tripler le 7. On choisit alors le chiffre des unités du nombre 21.
Le chiffre est 1. RÉPONSE : (E)

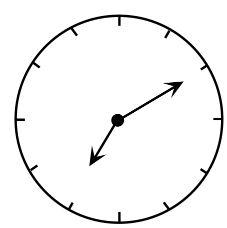
2. Le plus petit nombre de l'ensemble $\{0, -17, 4, 3, -2\}$ est :
(**A**) $-17$ (**B**) 4 (**C**) $-2$ (**D**) 0 (**E**) 3

*Solution*
On voit que le plus petit nombre est $-17$. RÉPONSE : (A)

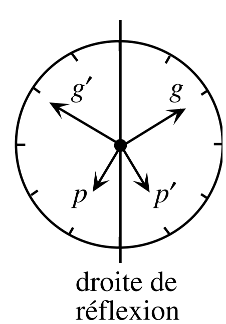
3. La moyenne des nombres $-5$, $-2$, 0, 4 et 8 est égale à :
(**A**) $\frac{5}{4}$ (**B**) 0 (**C**) $\frac{19}{5}$ (**D**) 1 (**E**) $\frac{9}{4}$

*Solution*
La somme des entiers est égale à 5.
Leur moyenne est donc égale à $\frac{5}{5}$ ou 1. RÉPONSE : (D)

4. Émilie est assise sur une chaise dans une salle. Il y a une horloge derrière elle. Devant elle, il y a un miroir dans lequel elle peut voir l'image de l'horloge. Le diagramme illustre ce qu'elle voit. Quelle heure est-il en réalité?
(**A**) 4 h 10 (**B**) 7 h 10 (**C**) 5 h 10
(**D**) 6 h 50 (**E**) 4 h 50



*Solution*
On trace une droite de réflexion à la verticale.
La grande aiguille ($g$) est réfléchie sur $g'$ qui pointe vers le 10. La petite aiguille ($p$) est réfléchie sur $p'$ qui pointe tout près du 5.
Il est donc 4 h 50.




RÉPONSE : (E)

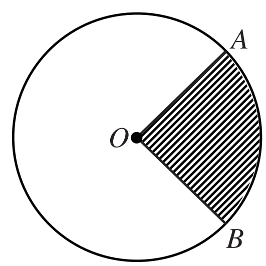
5. Si on double le nombre $1{,}2 \times 10^6$, on obtient :
(**A**) $2{,}4 \times 10^6$ (**B**) $2{,}4 \times 10^{12}$ (**C**) $2{,}4 \times 10^3$ (**D**) $1{,}2 \times 10^{12}$ (**E**) $0{,}6 \times 10^{12}$

*Solution*
Lorsqu'on double le nombre $1{,}2 \times 10^6$, seul le $1{,}2$ est doublé, car le reste de l'expression indique la position décimale.
Le nombre obtenu est $2{,}4 \times 10^6$. RÉPONSE : (A)

6. Mardi, la température maximale était de 4 °C plus chaude que celle de lundi. Mercredi, la température maximale était de 6 °C plus froide que celle de lundi. Mardi, la température maximale était égale à 22 °C. Quelle était la température maximale de mercredi?
(**A**) 20 °C (**B**) 24 °C (**C**) 12 °C (**D**) 32 °C (**E**) 16 °C

*Solution*
Puisque la température maximale était de 22 °C mardi, elle était de 18 °C lundi.
La température maximale de mercredi était de 12 °C, puisqu'elle était de 6 °C plus froide que celle de lundi. RÉPONSE : (C)

7. L'aire du secteur ombré représente 20 % de l'aire du cercle de centre *O*. Quelle est la mesure de l'angle $AOB$?
(**A**) 36° (**B**) 72° (**C**) 90°
(**D**) 80° (**E**) 70°




*Solution*
Puisque l'aire du secteur ombré représente 20 % de l'aire du cercle, alors l'angle $AOB$ mesure 20 % de $360°$ ou $72°$. RÉPONSE : (B)

8. Un groupe de figures △●□▲○ forme une régularité qui est répétée dans l'ordre suivant,
△,●,□,▲,○,△,●,□,▲,○, …, pour former une suite.
La 214e figure de la suite est :
(**A**) △ (**B**) ● (**C**) □ (**D**) ▲ (**E**) ○

*Solution*
Puisque la régularité est répétée à toutes les cinq figures, elle recommence après la 210e figure.
La 214e figure de la suite est donc la quatrième figure du groupe, soit ▲. RÉPONSE : (D)

9. Lorsqu'un pot est à moitié plein, il contient juste assez d'eau pour remplir trois verres identiques. À quelle fraction le pot doit-il être rempli pour qu'il contienne juste assez d'eau pour remplir quatre verres pareils aux précédents?

**(A)** $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{7}{12}$ **(C)** $\frac{4}{7}$ **(D)** $\frac{6}{7}$ **(E)** $\frac{3}{4}$

*Solution*

Trois verres d'eau correspondent à $\frac{1}{2}$ pot. Chaque verre correspond donc à $\frac{1}{6}$ d'un pot.

Quatre verres correspondent donc à $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ d'un pot. RÉPONSE : (A)

10. Une employée de la banque remplit un guichet automatique en déposant des liasses de billets de 5 \$, de 10 \$ et de 20 \$. Chaque liasse compte 100 billets et la machine peut contenir 10 liasses de chaque sorte de billets. Quelle somme d'argent le guichet peut-il contenir?

**(A)** 30 000 \$ **(B)** 25 000 \$ **(C)** 35 000 \$ **(D)** 40 000 \$ **(E)** 45 000 \$

*Solution*

Chaque liasse compte 100 billets. Les liasses de billets de 5 \$, de 10 \$ et de 20 \$ ont donc des valeurs respectives de 500 \$, 1000 \$ et 2000 \$.

Puisqu'il y a 10 liasses de chaque sorte, leur valeur totale est égale à $10(500\ \$ + 1000\ \$ + 2000\ \$)$ ou 35 000 \$. RÉPONSE : (C)

## Partie B

11. Un ascenseur peut contenir un poids maximal de 1500 kilogrammes. Les personnes dans l'ascenseur ont un poids moyen de 80 kilogrammes. Le poids total de ces personnes dépasse de 100 kilogrammes la limite permise. Combien y a-t-il de personnes dans l'ascenseur?

**(A)** 14 **(B)** 17 **(C)** 16 **(D)** 20 **(E)** 13

*Solution*

Puisque le poids total des personnes dépasse de 100 kilogrammes la limite permise, leur poids total est de 1600 kilogrammes.

Puisque leur poids moyen est de 80 kilogrammes, il doit y avoir $\frac{1600}{80}$ ou 20 personnes dans l'ascenseur.

RÉPONSE : (D)

12. Dans le carré $4 \times 4$ illustré ci-contre, chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale doit contenir chacun des nombres 1, 2, 3 et 4. Quelle est la valeur de $K + N$?

**(A)** 4 **(B)** 3 **(C)** 5

**(D)** 6 **(E)** 7

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $F$ | $G$ | $H$ |
| $T$ | 2 | $J$ | $K$ |
| $L$ | $M$ | 3 | $N$ |
| $P$ | $Q$ | 1 | $R$ |

*Solution*
Puisque $R$ est sur une diagonale qui contient déjà 1, 2 et 3, alors $R = 4$.
La façon la plus facile de procéder est de regarder les cases $P$ et $Q$.
D'après la 4e ligne, $Q$ doit être un 2 ou un 3, mais la 2e colonne contient déjà un 2. Donc $Q = 3$ et $P = 2$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| | 2 | | |
| | | 3 | |
| 2 | 3 | 1 | 4 |

Ne peut être un 2.

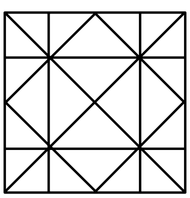
À partir de là, il suffit de remplir les autres cases en suivant la règle indiquée, c'est-à-dire que chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale doit contenir chacun des nombres 1, 2, 3 et 4.
On obtient alors le résultat ci-contre.

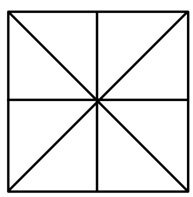
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 3 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 4 |

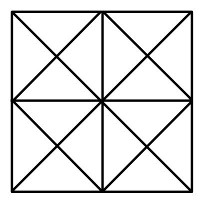
On remarque que $K + N = 3$.
*Remarque 1* : Il n'est pas nécessaire de remplir toutes les cases, mais ça nous permet de vérifier l'exactitude du travail.
*Remarque 2* : On aurait pu commencer en examinant $H$, $K$ et $N$, mais cette approche aurait exigé plus de travail.

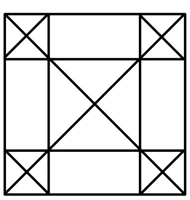
RÉPONSE : (B)

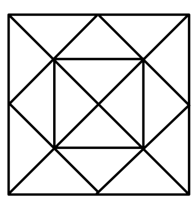
13. Claire prend un morceau de papier de forme carrée et le plie en deux parties égales, quatre fois de suite, sans déplier, de manière à former un triangle rectangle isocèle à chaque fois. Lorsqu'elle déplie le morceau de papier à la fin, les plis du papier ressemblent à :

(**A**) 

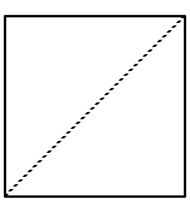
(**B**) 

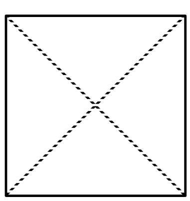
(**C**) 

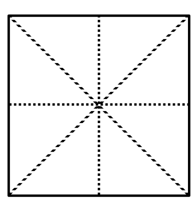
(**D**) 

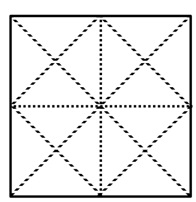
(**E**) 

*Solution*


1er pli


2e pli


3e pli


4e pli

RÉPONSE : (C)

14. Stéphane avait un rendez-vous à 10 h à une distance de 60 km de chez lui. Il a fait le voyage à une vitesse moyenne de 80 km/h, mais il est arrivé 20 minutes en retard. À quelle heure est-il parti de chez lui?
(**A**) 9 h 35 (**B**) 9 h 15 (**C**) 8 h 40 (**D**) 9 h (**E**) 9 h 20

*Solution*
Puisque Stéphane a parcouru une distance de 60 km à une vitesse moyenne de 80 km/h, il a fait le trajet en 45 minutes.
Puisqu'il est arrivé 20 minutes en retard, il est arrivé à 10 h 20.
Il est donc parti à 9 h 35. RÉPONSE : (A)

15. Michelle choisit trois chiffres *différents* de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et elle forme un nombre en plaçant les chiffres dans les cases de $\square\frac{\square}{\square}$. Dans ce nombre fractionnaire, la fraction doit être inférieure à 1. (Par exemple, $4\frac{2}{3}$). Quelle est la différence entre le plus grand nombre fractionnaire et le plus petit nombre fractionnaire qu'il est possible de former?
(**A**) $4\frac{3}{5}$ (**B**) $4\frac{9}{20}$ (**C**) $4\frac{3}{10}$ (**D**) $4\frac{4}{15}$ (**E**) $4\frac{7}{20}$

*Solution*
Le plus grand nombre que Michelle peut former est $5\frac{3}{4}$, tandis que le plus petit est $1\frac{2}{5}$.
La différence est égale à $5\frac{3}{4} - 1\frac{2}{5}$ ou $4\frac{7}{20}$. RÉPONSE : (E)

16. Supposons que $x^*$ signifie $\frac{1}{x}$, l'inverse de $x$. Par exemple, $5^* = \frac{1}{5}$. Combien des énoncés suivants sont vrais?

i) $2^* + 4^* = 6^*$ ii) $3^* \times 5^* = 15^*$ iii) $7^* - 3^* = 4^*$ iv) $12^* \div 3^* = 4^*$

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

*Solution*
i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{6}$, L'énoncé n'est pas vrai

ii) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$, L'énoncé est vrai

iii) $\frac{1}{7} - \frac{1}{3} = \frac{3}{21} - \frac{7}{21} = -\frac{4}{21} \neq \frac{1}{4}$, L'énoncé n'est pas vrai

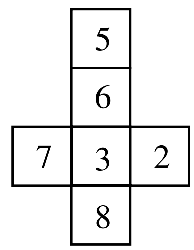
iv) $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{12} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{4}$, L'énoncé est vrai

Deux des énoncés sont vrais. RÉPONSE : (C)

17. Au carnaval, un des jeux consiste à lancer trois anneaux sur n'importe quelles trois chevilles en bois. Un anneau sur la cheville $A$ vaut *un* point, un anneau sur la cheville $B$ vaut *trois* points et un anneau sur la cheville $C$ vaut *cinq* points. Lorsqu'on réussit à lancer les trois anneaux sur des chevilles, combien de totaux différents peut-on obtenir? (Il est possible d'avoir plus d'un anneau sur une même cheville.)
(**A**) 12 (**B**) 7 (**C**) 10 (**D**) 13 (**E**) 6

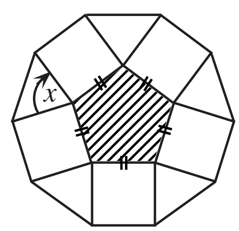
*Solution*
Le total le plus bas est 3 et le total le plus élevé est 15.
Puisque la somme de trois nombres impairs est impaire, il est impossible d'obtenir un total pair. On peut vérifier qu'il est possible d'obtenir 3, 5, 7, 9, 11, 13 et 15 comme total.
Il y a 7 totaux possibles. RÉPONSE : (B)

18. On plie la figure illustrée pour former un cube. Trois faces se rencontrent à chaque sommet. Si, à chaque sommet, on multiplie les nombres qui paraissent sur les trois faces, quel est le plus grand produit que l'on puisse obtenir?
(**A**) 144 (**B**) 168 (**C**) 240
(**D**) 280 (**E**) 336




*Solution*
Les deux plus grands produits que l'on puisse obtenir en multipliant trois des nombres indiqués sont $8\times7\times6=336$ et $8\times7\times5=280$. Lorsque la figure est pliée pour former un cube, le 6 et le 8 sont sur des faces opposées. Il est donc impossible d'obtenir le produit $8\times7\times6$ ou 336. Cependant, le 5, le 7 et le 8 sont sur des faces qui se rencontrent à un sommet. Le plus grand produit est donc $5\times7\times8$ ou 280. RÉPONSE : (D)

19. Un pentagone régulier a des côtés de même longueur et des angles égaux. Le diagramme illustre un pentagone régulier hachuré, entouré de carrés et de triangles. Quelle est la mesure de l'angle $x$?
(**A**) 75° (**B**) 108° (**C**) 90°
(**D**) 60° (**E**) 72°




*Solution*
Puisqu'on peut diviser un pentagone en trois triangles, la somme des angles d'un pentagone est égale à $3\times180°$ ou $540°$. Puisque les angles d'un pentagone régulier sont égaux, chacun mesure $540°\div5$ ou $108°$. Les quatre angles au sommet du pentagone ont une somme égale à $360°$.
Donc $x+90°+90°+108°=360°$.
Donc $x=72°$. RÉPONSE : (E)

20. On prend trois cartes d'un jeu de cartes et on les place en ligne. Le trèfle est à la droite du coeur et du carreau. Le 5 est à la gauche du coeur. Le 8 est à la droite du 4. De gauche à droite, les cartes sont :
(**A**) Le 4 de coeur, le 5 de carreau et le 8 de trèfle.
(**B**) Le 5 de carreau, le 4 de coeur et le 8 de trèfle.
(**C**) Le 8 de trèfle, le 4 de coeur et le 5 de carreau.
(**D**) Le 4 de carreau, le 5 de trèfle et le 8 de coeur.
(**E**) Le 5 de coeur, le 4 de carreau et le 8 de trèfle.

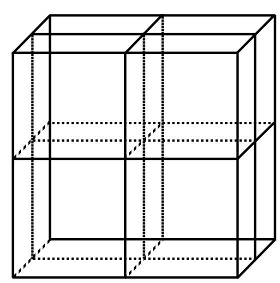
*Solution*
Puisque le trèfle est à la droite du coeur et du carreau, l'ordre est carreau, coeur, trèfle ou bien coeur, carreau, trèfle.
Puisque le 5 est à la gauche du coeur, il doit s'agir du 5 de carreau.
On a donc, dans l'ordre, le 5 de carreau, coeur, trèfle. Puisque le 8 est à la droite du 4, le cœur est un 4 et le trèfle est un 8. RÉPONSE : (B)

## Partie C

21. On peut écrire le nombre 315 comme produit de deux nombres impairs, chacun supérieur à 1. De combien de façons peut-on le faire?
(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

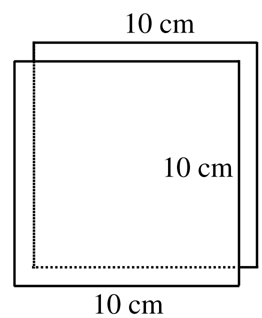
*Solution*
On écrit 315 en factorisation première, c'est-à-dire comme un produit de facteurs premiers, pour obtenir $315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7$.
À partir de ces facteurs, on peut seulement former les multiplications suivantes pour donner 315 : $3 \times 105$, $5 \times 63$, $7 \times 45$, $9 \times 35$, $15 \times 21$.
Il y a donc 5 façons de le faire. RÉPONSE : (E)

22. Un cube mesure $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. On le coupe trois fois. Comme on peut le voir dans le diagramme, chaque coupe est parallèle à l'une des faces du cube. On obtient alors 8 solides Quelle est l'augmentation dans l'aire totale de la surface?



(**A**) $300 \text{ cm}^2$ (**B**) $800 \text{ cm}^2$ (**C**) $1200 \text{ cm}^2$
(**D**) $600 \text{ cm}^2$ (**E**) $0 \text{ cm}^2$

*Solution*
Chaque coupe augmente la surface de deux carrés mesurant $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. L'aire est donc augmentée de $200 \text{ cm}^2$.
Avec les trois coupes, l'aire est augmentée de $3 \times 200 \text{ cm}^2$ ou $600 \text{ cm}^2$.



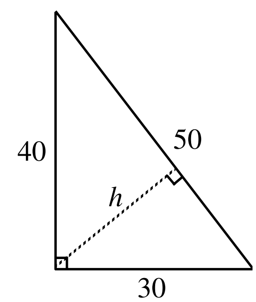

RÉPONSE : (D)

23. Si les côtés d'un triangle ont des longueurs respectives de 30, 40 et 50, quelle est la longueur de la hauteur la plus courte?

(**A**) 20 (**B**) 24 (**C**) 25 (**D**) 30 (**E**) 40

*Solution*

Puisque $30^2 + 40^2 = 50^2$, il s'agit d'un triangle rectangle ayant une hypoténuse de longueur 50. Deux des hauteurs ont donc pour longueurs respectives 30 et 40.




L'aire du triangle est égale à $\dfrac{30 \times 40}{2}$ ou 600 unités carrées.

On abaisse une perpendiculaire de l'angle droit à l'hypoténuse. Si sa longueur est égale à $h$, on obtient l'expression suivante pour l'aire du triangle : $\frac{1}{2}(h)(50) = 25h$

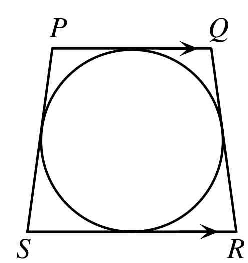
Donc $25h = 600$, d'où $h = 24$.

La hauteur la plus courte a donc une longueur de 24. RÉPONSE : (B)

24. Un cercle est inscrit dans le trapèze $PQRS$.
Si $PS = QR = 25$ cm, $PQ = 18$ cm et $SR = 32$ cm, quelle est la longueur du diamètre du cercle?

(**A**) 14 (**B**) 25 (**C**) 24

(**D**) $\sqrt{544}$ (**E**) $\sqrt{674}$

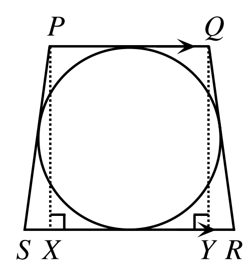



*Solution*

On abaisse les perpendiculaires $PX$ et $QY$.

Par symétrie, on a $XY = PQ = 18$. De plus, $SX = YR$.

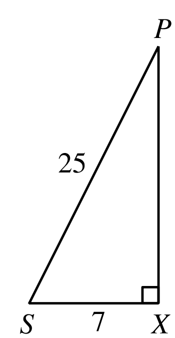
Donc $SX = YR = \frac{32-18}{2} = 7$.




On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle $PXS$.

$$(PX)^2 + 7^2 = 25^2$$
$$(PX)^2 = 576$$
$$PX = 24$$

Le diamètre du cercle a donc une longueur de 24 cm.




RÉPONSE : (C)

25. André, Brigitte et Carla doivent se partager une somme d'argent. André reçoit d'abord1 \$ plus un tiers de la somme qu'il reste. Brigitte reçoit ensuite 6 \$ plus un tiers de la somme qu'il reste. Carla reçoit enfin le reste, soit 40 \$. Combien Brigitte a-t-elle reçu?

(**A**) 26 \$ (**B**) 28 \$ (**C**) 30 \$ (**D**) 32 \$ (**E**) 34 \$

*Solution*

Après qu'André a reçu sa part, Brigitte a reçu 6 \$ plus un tiers de la somme qu'il restait. Carla a donc reçu deux tiers de cette somme, soit 40 \$. Il restait donc 60 \$. Un tiers de cette somme est égal à 20 \$. Brigitte a donc reçu 26 \$.

RÉPONSE : (A)