Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2024

(9^e^ année – Secondaire III)

le mercredi 28 février 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 29 février 2024
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

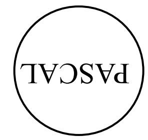
Solutions

1. On a $2 - 0 + 2 - 4 = 2 + 2 - 4 = 0$.

Réponse : (B)

2. La distance entre deux nombres sur la droite numérique est égale à leur différence positive. On a donc $6 - (-5) = 11$.

Réponse : (D)

3. Étant donné qu'un tour de 180° équivaut à un demi-tour, la figure obtenue est  .

(Remarquons que l'on obtient le même résultat en faisant tourner la figure de 180° dans le sens des aiguilles d'une montre ou de 180° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.)

Réponse : (C)

4. Puisque le 1er juillet est un mercredi, alors les 8 et 15 juillet sont également des mercredis. Puisque le 15 juillet est un mercredi, alors le 17 juillet est un vendredi.

Réponse : (D)

5. Le premier et le dernier losange ont chacun trois côtés qui constituent une partie du périmètre de la figure. Chacun de ces losanges contribue donc 3 au périmètre de la figure.
Les quatre autres losanges ont chacun deux côtés qui constituent une partie du périmètre de la figure. Chacun de ces losanges contribue donc 2 au périmètre.
Donc, la figure a un périmètre de $2 \times 3 + 4 \times 2 = 14$.

Réponse : (B)

6. Lundi, Narsa a mangé 4 biscuits.
Mardi, Narsa a mangé 12 biscuits.
Mercredi, Narsa a mangé 8 biscuits.
Jeudi, Narsa a mangé 0 biscuits.
Vendredi, Narsa a mangé 6 biscuits.
Cela signifie que Narsa a mangé $4 + 12 + 8 + 0 + 6 = 30$ biscuits.
Étant donné que le paquet contenait initialement 45 biscuits, il reste $45 - 30 = 15$ biscuits dans le paquet après vendredi.

Réponse : (D)

7. Pour qu'il y ait un nombre égal de bonbons de chaque couleur, il doit y avoir au plus 3 bonbons rouges et au plus 3 bonbons jaunes (puisqu'il y a déjà 3 bonbons bleus au départ).
Donc, Shuxin a mangé au moins 7 bonbons rouges et au moins 4 bonbons jaunes.
Cela signifie que Shuxin a mangé au moins $7 + 4 = 11$ bonbons.
Remarquons que si Shuxin mange 7 bonbons rouges, 4 bonbons jaunes et 0 bonbon bleu, il y aura bien un nombre égal de bonbons de chaque couleur.

Réponse : (C)

8. Puisque 10 élèves ont les cheveux noirs et 3 élèves ont les cheveux noirs et portent des lunettes, cela signifie que $10 - 3 = 7$ élèves ont les cheveux noirs mais ne portent pas de lunettes.

Réponse : (A)

9. Puisque 25 % équivaut à $\frac{1}{4}$, alors la portion du sentier qui longe la rivière et qui traverse la forêt représente $\frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$ du sentier.
Donc, la section finale qui mène au sommet d'une colline représente $\frac{1}{8}$ du sentier.
Puisque $\frac{1}{8}$ du sentier correspond à 3 km, alors la longueur totale du sentier est égale à 8×3 km $= 24$ km.

Réponse : (A)

10. Selon la définition, $(5\nabla 2)\nabla 2 = (4 \times 5 + 2)\nabla 2 = 22\nabla 2 = 4 \times 22 + 2 = 90$.

Réponse : (E)

11. *Solution 1*
Si les 10 paniers de Laurianne valent chacun 2 points, elle aurait marqué $10 \times 2 = 20$ points en tout.
Puisqu'elle a un total de 26 points, alors elle a marqué $26 - 20 = 6$ points de plus que si tous ses paniers valaient 2 points chacun.
Cela signifie que si elle a marqué 6 paniers à 3 points chacun, alors elle aurait marqué 1 point de plus pour chacun de ces 6 paniers, d'où elle aurait donc marqué $20 + 6 = 26$ points.
Laurianne marque donc 6 paniers à 3 points.
(Remarquons que $6 \times 3 + 4 \times 2 = 26$.)

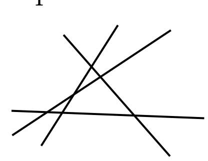
Solution 2
Supposons que Laurianne marque x paniers à 3 points chacun.
Puisqu'elle a marqué 10 paniers, alors elle a marqué $10 - x$ paniers à 2 points chacun.
Puisque Laurianne a marqué 26 points, alors $3x + 2(10 - x) = 26$, d'où $3x + 20 - x = 26$ ou $x = 6$.
Donc, Laurianne a marqué 6 paniers à 3 points.

Réponse : (B)

12. Dans la liste donnée, les nombres 11 et 13 sont les seuls nombres premiers et doivent donc être les numéros de Clara et Léo.
Dans la liste donnée, 16 est le seul carré parfait. Donc, le numéro de Guillaume est 16.
Les nombres restants sont 12, 14, 15.
Puisque les numéros de Hao et de Julie sont des nombres pairs, alors leurs numéros doivent être 12 et 14.
Donc, le numéro d'Ioana est 15.

Réponse : (B)

13. Chacune des 4 lignes peut couper chacune des 3 autres lignes au maximum une fois.
Quoique cela semble produire $4 \times 3 = 12$ points d'intersection, chaque point d'intersection est compté deux fois ; une fois pour chacune des deux lignes.
Donc, le nombre maximum de points d'intersection est égal à $\dfrac{4 \times 3}{2} = 6$.
Dans la figure ci-dessous, on voit qu'il est possible d'avoir 6 points d'intersection :



Réponse : (D)

14. Lorsque 10 nombres ont une moyenne de 17, leur somme est égale à $10 \times 17 = 170$.
Lorsque 9 nombres ont une moyenne de 16, leur somme est égale à $9 \times 16 = 144$.
Donc, le nombre qui a été supprimé est $170 - 144 = 26$.

Réponse : (A)

15. Puisque $CD = DE = EC$, alors le triangle CDE est équilatéral, ce qui signifie que $\angle DEC = 60^\circ$.
Puisque l'angle DEB est un angle plat, alors $\angle CEB = 180^\circ - \angle DEC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
Puisque $CE = EB$, alors le triangle CEB est isocèle avec $\angle ECB = \angle EBC$.
Puisque $\angle ECB + \angle CEB + \angle EBC = 180^\circ$, alors $2 \times \angle EBC + 120^\circ = 180^\circ$, d'où $2 \times \angle EBC = 60^\circ$ ou $\angle EBC = 30^\circ$.
Donc, $\angle ABC = \angle EBC = 30^\circ$.

Réponse : (A)

16. Puisque $x^2 < x$ et $x^2 \geq 0$, alors $x > 0$. Donc, x ne peut être négatif.
Donc, ni (D) ni (E) n'est la bonne réponse.
Puisque $x^2 < x$, alors on ne peut avoir $x > 1$ car sinon on aurait $x^2 > x$.
Donc, (A) n'est pas la bonne réponse. Donc, la bonne réponse est soit (B), soit (C).
Si $x = \frac{1}{3}$, alors $x^2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ et $\frac{x}{2} = \frac{1/3}{2} = \frac{1}{6}$.
Puisque $\frac{1}{6} > \frac{1}{9}$, alors (B) n'est pas la bonne réponse.
Donc, la bonne réponse doit être (C).
Pour vérifier, lorsque $x = \frac{3}{4}$, alors on a $x^2 = \frac{9}{16}$ et $\frac{x}{2} = \frac{3}{8}$.
Puisque $\frac{x}{2} = \frac{3}{8} = \frac{6}{16} < \frac{9}{16} = x^2$, alors $\frac{x}{2} < x^2$.
De plus, $x^2 = \frac{9}{16} < \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = x$.
On voit donc que $x = \frac{3}{4}$ remplit les conditions de l'énoncé.

Réponse : (C)

17. Pendant les deux premières heures de son voyage, Mélanie a parcouru $2 \text{ h} \times 100 \text{ km/h} = 200 \text{ km}$.
Ensuite, en roulant à une vitesse de 80 km/h, elle a parcouru 200 km en $\frac{200 \text{ km}}{80 \text{ km/h}} = 2{,}5 \text{ h}$.
En tout, Mélanie a parcouru $200 \text{ km} + 200 \text{ km} = 400 \text{ km}$.
En tout, le voyage de Mélanie a duré $2 \text{ h} + 2{,}5 \text{ h} = 4{,}5 \text{ h}$.
Donc, la vitesse moyenne de Mélanie pendant son voyage est égal à $\frac{400 \text{ km}}{4{,}5 \text{ h}} \approx 88{,}89 \text{ km/h}$.
Parmi les choix de réponse, 88,89 km/h est le plus près de 89 km/h.

Réponse : (B)

18. D'après l'énoncé,

$$\mathrm{S} + \mathrm{E} + \mathrm{T} = 2 \qquad \mathrm{H} + \mathrm{A} + \mathrm{T} = 7 \qquad \mathrm{T} + \mathrm{A} + \mathrm{S} + \mathrm{T} + \mathrm{E} = 3 \qquad \mathrm{M} + \mathrm{A} + \mathrm{T} = 4$$

Puisque $\mathrm{T} + \mathrm{A} + \mathrm{S} + \mathrm{T} + \mathrm{E} = 3$ et $\mathrm{S} + \mathrm{E} + \mathrm{T} = 2$, alors $\mathrm{T} + \mathrm{A} = 3 - 2 = 1$.
Puisque $\mathrm{H} + \mathrm{A} + \mathrm{T} = 7$ et $\mathrm{T} + \mathrm{A} = 1$, alors $\mathrm{H} = 7 - 1 = 6$.
Puisque $\mathrm{M} + \mathrm{A} + \mathrm{T} = 4$ et $\mathrm{H} = 7$, alors $\mathrm{M} + (\mathrm{A} + \mathrm{T}) + \mathrm{H} = 4 + 6 = 10$.
Donc, le mot MATH a une valeur de 10.

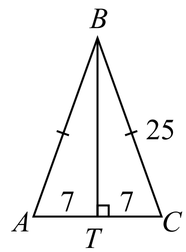
Remarquons qu'il est aussi possible de déterminer des valeurs spécifiques de S, E, T, A à partir desquelles on peut obtenir les valeurs correctes des mots. Un tel ensemble de valeurs est A $= 1$, T $= 0$, S $= 4$ et E $= -2$. Bien que ces valeurs ne soient pas uniques, les valeurs de M et H (3 et 6 respectivement) le sont.

Réponse : (E)

19. Le périmètre du triangle ABC est égal à $(3x+4)+(3x+4)+2x = 8x+8$.
Le périmètre du rectangle $DEFG$ est égal à

$$2 \times (2x-2) + 2 \times (3x-1) = 4x - 4 + 6x - 2 = 10x - 6$$

Puisque ces périmètres sont égaux, alors $10x - 6 = 8x + 8$, d'où $2x = 14$ ou $x = 7$.
Donc, le triangle ABC est tel que $AC = 2 \times 7 = 14$ et $AB = BC = 3 \times 7 + 425$.
Au point B, on abaisse une perpendiculaire BT à AC.



Puisque le triangle ABC est isocèle, alors T est le milieu de AC. Donc, $AT = TC = 7$.
D'après le théorème de Pythagore, $BT = \sqrt{BC^2 - TC^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24$.
Donc, l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BT = \frac{1}{2} \times 14 \times 24 = 168$.

Réponse : (C)

20. Puisque N est un entier strictement positif de 1 000 000 à 10 000 000, alors $25 \times N$ est un entier strictement positif de 25 000 000 à 250 000 000. Donc, $25 \times N$ a soit 8 chiffres, soit 9 chiffres.
Supposons que la valeur de $25 \times N$ a 9 chiffres, avec la possibilité que le premier chiffre soit 0.
Puisque $25 \times N$ est un multiple de 25, ses deux derniers chiffres doivent être 00, 25, 50 ou 75.
Pour un ensemble fixe des trois premiers chiffres, xyz, le multiple de 25 ayant la plus grande somme des chiffres doit être $xyz\,999\,975$ car les quatre chiffres suivants sont les plus grands possibles (tous sont 9) et les deux derniers chiffres ont la plus grande somme possible parmi les fins admissibles pour les multiples de 25.
Donc, pour répondre à la question, il faut trouver l'entier de la forme $xyz\,999\,975$ qui est compris entre 25 000 000 et 250 000 000 et dont la somme $x+y+z$ est aussi grande que possible.
On sait que la valeur maximale de x est 2, que la valeur maximale de y est 9 et que la valeur maximale de z est 9.
Cela signifie que $x + y + z \leq 2 + 9 + 9 = 20$.
On ne peut avoir 299 999 975 car ce nombre n'est pas situé dans l'intervalle donné.
Cependant, on pourrait avoir $x + y + z = 19$ si $x = 1$, $y = 9$ et $z = 9$.
Donc, dans l'intervalle donné, l'entier 199 999 975 est le multiple de 25 dont la somme des chiffres est aussi grande que possible. Cette somme est égale à $1 + 6 \times 9 + 7 + 5 = 67$.
Remarquons que $199\,999\,975 = 25 \times 7\,999\,999$. Donc, 199 999 975 est bien un multiple de 25. Remarquons également que $N = 7\,999\,999$ est situé entre 1 000 000 et 10 000 000.

Réponse : (C)

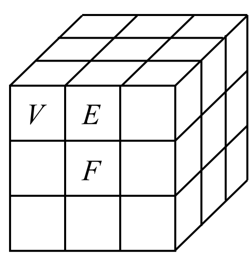
21. Puisque la deuxième colonne contient le nombre 1, alors l'étape (ii) n'a jamais été appliquée sur la deuxième colonne, sinon chaque nombre dans cette colonne serait d'au moins 2.
Pour obtenir les 1, 3 et 2 dans la deuxième colonne, on doit donc avoir appliqué l'étape (i) 1 fois sur la rangée 1, 3 fois sur la rangée 2 et 2 fois sur la rangée 3.
On a donc :

1	1	1
3	3	3
2	2	2

Il n'est pas possible d'appliquer l'étape (i) davantage, au risque de voir augmenter les nombres dans la colonne 2. Donc, $a = 1 + 3 + 2 = 6$.
Pour obtenir le tableau final à partir du tableau actuel en appliquant uniquement l'étape (ii), il faut augmenter de 6 chaque nombre dans la colonne 1 (ce qui signifie appliquer l'étape (ii) 3 fois) et augmenter de 4 chaque nombre dans la colonne 3 (ce qui signifie appliquer l'étape (ii) 2 fois). Donc, $b = 3 + 2 = 5$.
Donc, $a + b = 11$.

Réponse : 11

22. Les 27 petits cubes qui forment le grand cube de dimensions $3 \times 3 \times 3$ peuvent être répartis en 4 catégories : 1 petit cube au centre même du grand cube (qui n'est pas visible dans la figure ci-dessous), 8 petits cubes aux sommets du grand cube (à titre d'exemple, l'un de ces cubes est indiqué par la lettre V dans la figure ci-dessous), 12 petits cubes situés sur les arêtes du grand cube, mais pas aux sommets (à titre d'exemple, l'un de ces cubes est indiqué par la lettre E) et 6 petits cubes au centre de chaque face du grand cube (à titre d'exemple, l'un de ces cubes est indiqué par la lettre F).



Le petit cube au centre du grand cube contribue 0 à l'aire totale du grand cube.
Les 8 cubes situés aux sommets contribuent chacun 3 à l'aire totale du grand cube puisque 3 de leurs faces sont exposées sur l'extérieur du grand cube.
Les 12 cubes situés sur les arêtes du grand cube (mais non aux sommets de ce dernier) contribuent chacun 2 à l'aire totale du grand cube.
Les 6 cubes situés au centre de chaque face du grand cube contribuent chacun 1 à l'aire totale de ce dernier.
Parmi les 27 petits cubes qui forment le grand cube, 10 sont rouges.
Pour minimiser l'aire qui est rouge, on doit disposer les cubes rouges de manière à minimiser leur contribution à l'aire totale du grand cube. Pour ce faire, on place 1 cube rouge au centre (ce cube contribue 0 à l'aire totale du grand cube), 6 cubes rouges au centre des faces (chacun de ces cubes contribue 1 à l'aire totale du grand cube) et les 3 cubes rouges restants sur les arêtes (chacun de ces cubes contribue 2 à l'aire totale du grand cube).
Donc, l'aire qui est rouge est égale à $1 \times 0 + 6 \times 1 + 3 \times 2 = 12$.

Réponse : 12

23. On veut compter le nombre de codes de 4 chiffres $abcd$ qui répondent aux critères.
D'après le premier critère, au moins l'un des chiffres doit être 4, mais $b \neq 4$ et $d \neq 4$.
Donc, soit $a = 4$, soit $c = 4$. D'après le quatrième critère, on pourrait avoir à la fois $a = 4$ et $c = 4$.

Supposons que $a = 4$ et que $c = 4$.
Le code a donc la forme $4b4d$.
D'après les deuxième et troisième critères, les chiffres restants sont 2 et 7 et il n'y a pas d'autres restrictions quant à l'emplacement du 2 et du 7.
Donc, dans ce cas, le code est soit 4247, soit 4742. Il y a donc 2 codes possibles.

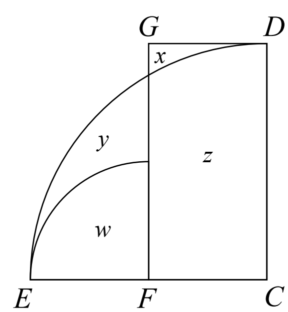
Supposons que $a = 4$ et que $c \neq 4$. (Rappelons que $b \neq 4$ et $d \neq 4$.)
Le code a donc la forme $4bcd$.
Les chiffres restants comprennent un 2 (qui peut être placé dans n'importe laquelle des positions restantes), un 7 et soit un 1, soit un 6.
Il y a 3 positions dans lesquelles le 2 peut être placé, après quoi il y a 2 positions dans lesquelles le 7 peut être placé, après quoi il y a 2 chiffres qui peuvent être placés dans la position restante.
Donc, dans ce cas, il y a $3 \times 2 \times 2 = 12$ codes possibles.

Supposons que $c = 4$ et que $a \neq 4$.
Le code a donc la forme $ab4d$.
Les chiffres restants comprennent un 2 (avec la restriction que $a \neq 2$), un 7 et soit un 1, soit un 6.
Il y a 2 positions dans lesquelles le 2 peut être placé, après quoi le 7 peut être placé dans l'une ou l'autre des 2 positions restantes, après quoi il y a 2 chiffres qui peuvent être placés dans la position restante.
Donc, dans ce cas, il y a $2 \times 2 \times 2 = 8$ codes possibles.

Donc, il y a $2 + 12 + 8 = 22$ codes possibles en tout.

Réponse : 22

24. On nomme les deux autres régions comme dans la figure ci-dessous :



Si l'on commence par l'aire du grand quart de cercle (qui est égale à $y + w + z$) et que l'on soustrait ensuite l'aire du petit quart de cercle (qui est égale à w), on a $y + z$.
Si l'on soustrait l'aire du rectangle (qui est égale à $x + z$), on a $y - x$.
Autrement dit, $y - x$ est égal à l'aire du grand quart de cercle moins l'aire du petit quart de cercle moins l'aire du rectangle.
Le grand quart de cercle a un rayon de 30 et a donc une aire de $\frac{1}{4}\pi \times 30^2 = 225\pi$.
Le rayon du petit quart de cercle est la moitié de celui du grand quart de cercle car F est le milieu de CE.
Donc, le petit quart de cercle a un rayon de 15 et a donc une aire de $\frac{1}{4}\pi \times 15^2 = \frac{225}{4}\pi$.
La largeur du rectangle est égale à FC, ce qui est égal à la moitié de CE, soit 15.
La hauteur du rectangle est égale à 30. Le rectangle a donc une aire de $15 \times 30 = 450$.

Donc, $y - x = 225\pi - \frac{225}{4}\pi - 450 = \frac{900}{4}\pi - \frac{225}{4}\pi - 450 = \frac{675}{4}\pi - 450 \approx 80{,}1$.
Cela indique que $y-x$ est positif (ce que la figure suggère également), ce qui signifie que $d = y-x$ et que l'entier le plus près de d est 80.

RÉPONSE : 80

25. On écrit $a = 3^r$, $b = 3^s$ et $c = 3^t$, r, s et t étant chacun un entier de 1 à 8.
Puisque $a \leq b \leq c$, alors $r \leq s \leq t$.
Remarquons que

$$\frac{ab}{c} = \frac{3^r 3^s}{3^t} = 3^{r+s-t} \qquad \frac{ac}{b} = \frac{3^r 3^t}{3^s} = 3^{r+t-s} \qquad \frac{bc}{a} = \frac{3^s 3^t}{3^r} = 3^{s+t-r}$$

Puisque $t \geq s$, alors $r + t - s = r + (t - s) \geq r > 0$. Donc, $\dfrac{ac}{b}$ est toujours un entier.

Puisque $t \geq r$, alors $s + t - r = s + (t - r) \geq s > 0$. Donc, $\dfrac{bc}{a}$ est toujours un entier.

Puisque $\dfrac{ab}{c} = 3^{r+s-t}$, alors $\dfrac{ab}{c}$ est un entier uniquement lorsque $r + s - t \geq 0$ ou $t \leq r + s$.
Cela signifie que l'on doit compter le nombre de triplets (r, s, t) tels que $r \leq s \leq t$ (r, s et t étant chacun un entier de 1 à 8) et que $t \leq r + s$.

Supposons que $r = 1$. Alors $1 \leq s \leq t \leq 8$ et $t \leq s + 1$.
Si $s = 1$, alors t peut égaler 1 ou 2. Si $s = 2$, alors t peut égaler 2 ou 3. Cette régularité se poursuit de sorte que lorsque $s = 7$, t peut égaler 7 ou 8. Cependant, lorsque $s = 8$, t doit égaler 8 puisque $t \leq 8$.
Dans ce cas, il y a $2 \times 7 + 1 = 15$ paires de valeurs admissibles de s et t et il y a donc 15 triplets (r, s, t).

Supposons que $r = 2$. Alors $2 \leq s \leq t \leq 8$ et $t \leq s + 2$.
Cela signifie que lorsque $2 \leq s \leq 6$, t peut égaler s, $s + 1$ ou $s + 2$.
Lorsque $s = 7$, t peut égaler 7 ou 8 et lorsque $s = 8$, t doit égaler 8.
Dans ce cas, il y a $5 \times 3 + 2 + 1 = 18$ triplets.

Supposons que $r = 3$. Alors $3 \leq s \leq t \leq 8$ et $t \leq s + 3$.
Cela signifie que lorsque $3 \leq s \leq 5$, t peut égaler s, $s + 1$, $s + 2$ ou $s + 3$.
Lorsque $s = 6, 7, 8$, il y a respectivement 3, 2 et 1 valeurs de t.
Dans ce cas, il y a $3 \times 4 + 3 + 2 + 1 = 18$ triplets.

Supposons que $r = 4$. Alors $4 \leq s \leq t \leq 8$ et $t \leq s + 4$.
Cela signifie que lorsque $s = 4$, il y a 5 choix pour t.
Comme dans les cas précédents, lorsque $s = 5, 6, 7, 8$, il y a respectivement 4, 3, 2 et 1 choix pour t.
Dans ce cas, il y a $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ triplets.

Si l'on poursuit ce processus, lorsque $r = 5$, il y a $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ triplets, lorsque $r = 6$, il y a $3 + 2 + 1 = 6$ triplets, lorsque $r = 7$, il y a $2 + 1 = 3$ triplets et lorsque $r = 8$, il y a 1 triplet.
Le nombre total de triplets (r, s, t) est égal à $15 + 18 + 18 + 15 + 10 + 6 + 3 + +1 = 86$.
Puisque les triplets (r, s, t) correspondent aux triplets (a, b, c), alors le nombre de triplets (a, b, c) est égal à $N = 86$.

RÉPONSE : 86

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2023

(9e année – Secondaire III)

le mercredi 22 février 2023

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 23 février 2023

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Puisque 110 003 est supérieur à 110 000 et que chacun des quatre autres choix de réponse est inférieur à 110 000, alors l'entier 110 003 est celui dont la valeur est la plus grande.

   Réponse : (B)

2. De gauche à droite, le nombre de carrés ombrés dans chaque colonne qui en contient est 1, 3, 5, 4, 2.
   Donc, il y a $1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 15$ carrés ombrés.
   On aurait également pu remarquer qu'exactement la moitié des 30 carrés sont ombrés puisque chaque colonne qui contient des carrés ombrés peut être appariée avec une colonne contenant le même nombre de carrés non ombrés. (La 1re colonne est appariée avec la 8e colonne, la 2e colonne est appariée avec la 7e, la 3e avec la 6e et la 4e avec la 5e.)
   Donc, il y a effectivement $\frac{1}{2} \times 30 = 15$ carrés ombrés.

   Réponse : (C)

3. On a $2^3 - 2 + 3 = 2 \times 2 \times 2 - 2 + 3 = 8 - 2 + 3 = 9$.

   Réponse : (C)

4. Puisque $3 + \triangle = 5$, alors $\triangle = 5 - 3 = 2$.
   Puisque $\triangle + \square = 7$ et $\triangle = 2$, alors $\square = 5$.
   Donc, $\triangle + \triangle + \triangle + \square + \square = 3 \times 2 + 2 \times 5 = 6 + 10 = 16$.

   Réponse : (E)

5. On a $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 = 0{,}333$.

   Réponse : (A)

6. Puisque $\frac{1}{3}$ de x est égal à 4, alors x est égal à 3×4 ou 12. Donc, $\frac{1}{6}$ de x est égal à $12 \div 6 = 2$.
   On aurait pu dire que puisque $\frac{1}{6}$ est la moitié de $\frac{1}{3}$, alors $\frac{1}{6}$ de x est égal à la moitié de $\frac{1}{3}$ de x, soit $4 \div 2$ ou 2.

   Réponse : (C)

7. Jurgen fait ses bagages et se rend à la gare routière en $25 + 35 = 60$ minutes.
   Puisqu'il arrive à la gare routière 60 minutes avant le départ de son bus, alors il a commencé à faire ses bagages $60 + 60 = 120$ minutes, soit 2 heures, avant le départ de son bus.
   Puisque son bus part à 18 h 45, alors Jurgen a commencé à faire ses bagages à 16 h 45.

   Réponse : (A)

8. Puisque les lettres du mot RHOMBUS occupent 7 des 31 espaces, alors il y a $31 - 7 = 24$ espaces vides.
   Puisqu'il doit y avoir un nombre égal d'espaces vides de chaque côté du mot, alors il doit y avoir $24 \div 2 = 12$ espaces vides de chaque côté du mot.
   Donc, en comptant à partir de la gauche, la lettre R doit être placée dans l'espace numéro $12 + 1 = 13$.

   Réponse : (B)

9. La notation décimale de $\frac{1}{7}$ est composée d'un bloc de 6 chiffres qui se répète, soit les chiffres 142857.
   Puisque $16 \times 6 = 96$, alors le 96e chiffre après la virgule décimale est le dernier chiffre de l'un de ces blocs. C'est-à-dire que le 96e chiffre est 7.
   Cela signifie que le 97e chiffre est 1, le 98e chiffre est 4, le 99e chiffre est 2 et le 100e chiffre est 8.

   Réponse : (D)

10. Le chemin que la fourmi parcourt de A à B est vertical et a une longueur de 5.
Le chemin que la fourmi parcourt de B à C est horizontal et a une longueur de 8.
Le chemin que la fourmi parcourt de C à A ne suit pas les lignes du quadrillage. On peut déterminer la longueur de CA à l'aide du théorème de Pythagore car AB et BC forment un angle droit.
On a donc $CA^2 = AB^2 + BC^2 = 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$.
Puisque $CA > 0$, alors $CA = \sqrt{89}$.
Donc, la fourmi a parcouru une distance totale de $5 + 8 + \sqrt{89}$ ou $13 + \sqrt{89}$.
Réponse : (D)

11. Supposons que le prisme initial ait une longueur de ℓ cm, une largeur de w cm et une hauteur de h cm.
Puisque le prisme a un volume de 12 cm^3, alors $\ell wh = 12$.
Le nouveau prisme a une longueur de 2ℓ cm, une largeur de $2w$ cm et une hauteur de $3h$ cm.
Le volume de ce prisme, en cm^3, est égal à $(2l) \times (2w) \times (3h) = 2 \times 2 \times 3 \times lwh = 12 \times 12 = 144$.
Réponse : (E)

12. Puisque $31 = 3 \times 10 + 1$ et $94 = 3 \times 31 + 1$ et $331 = 3 \times 110 + 1$ et $907 = 3 \times 302 + 1$, alors 31, 94, 331 et 907 paraissent dans la deuxième colonne du tableur de Morgan.
Donc, 131 doit être l'entier qui ne parait pas dans le tableur de Morgan. (Remarquons que 131 est 2 de plus que $3 \times 43 = 129$ et n'est donc pas 1 de plus qu'un multiple de 3.)
Réponse : (C)

13. La température a baissé de $16{,}2°\text{C} - (-3{,}6°\text{C}) = 19{,}8°\text{C}$ entre ces deux moments.
Puisque l'on sait qu'il y a douze heures entre 15 h 00 un jour et 3 h du matin du lendemain, il s'ensuit que le temps qui s'est écoulé entre 15 h 00 un jour et 2 h du matin du lendemain est égal à onze heures.
Puisque la température a baissé de manière constante entre ces deux moments, alors le taux auquel la température a baissé est égal à $\dfrac{19{,}8°\text{C}}{11\text{ h}} = 1{,}8°\text{C/h}$.
Réponse : (B)

14. Chaque porte a 2 « états » possibles, soit ouverte ou fermée.
Donc, il y a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ combinaisons possibles d'états pour les 4 portes.
Si exactement deux des quatre portes sont ouvertes, ces portes peuvent être soit la 1$^{\text{re}}$ et la 2$^{\text{e}}$, soit la 1$^{\text{re}}$ et la 3$^{\text{e}}$, soit la 1$^{\text{re}}$ et la 4$^{\text{e}}$, soit la 2$^{\text{e}}$ et la 3$^{\text{e}}$, soit la 2$^{\text{e}}$ et la 4$^{\text{e}}$, soit la 3$^{\text{e}}$ et la 4$^{\text{e}}$. Donc, il y a 6 manières dont deux des quatre portes peuvent être « ouvertes ».
Puisque chacune des portes est aléatoirement ouverte ou fermée, alors la probabilité qu'exactement deux des quatre portes soient ouvertes est égale à $\frac{6}{16}$, soit $\frac{3}{8}$.
Réponse : (A)

15. Nasim peut acheter 24 cartes en achetant trois paquets de 8 cartes ($3 \times 8 = 24$).
Nasim peut acheter 25 cartes en achetant cinq paquets de 5 cartes ($5 \times 5 = 25$).
Nasim peut acheter 26 cartes en achetant deux paquets de 5 cartes et deux paquets de 8 cartes ($2 \times 5 + 2 \times 8 = 26$).
Nasim peut acheter 28 cartes en achetant quatre paquets de 5 cartes et un paquet de 8 cartes ($4 \times 5 + 1 \times 8 = 28$).
Nasim peut acheter 29 cartes en achetant un paquet de 5 cartes et trois paquets de 8 cartes ($1 \times 5 + 3 \times 8 = 29$).

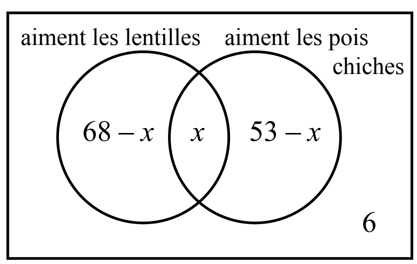
Nasim ne peut pas acheter exactement 27 cartes car le nombre de cartes qu'il peut obtenir à partir des paquets de 8 cartes est soit 0, 8, 16 ou 24, ce qui laisserait 27, 19, 11 ou 3 cartes à obtenir à partir des paquets de 5 cartes. Or, étant donné que 27, 19, 11 et 3 ne sont pas des multiples de 5, cela n'est pas possible.
Donc, Nasim peut acheter exactement n cartes pour cinq des six valeurs de n.

RÉPONSE : (A)

16. Supposons que Mathilde avait m pièces au début du mois dernier et que Salah avait s pièces au début du mois dernier.
D'après l'énoncé, 100 est 25 % de plus que m. Donc, $100 = 1{,}25m$, d'où on a donc $m = \frac{100}{1{,}25} = 80$.
D'après l'énoncé, 100 est 20 % de moins que s. Donc, $100 = 0{,}80s$, d'où on a donc $s = \frac{100}{0{,}80} = 125$.
Donc, au début du mois dernier, Mathilde et Salah avaient $m+s = 80+125 = 205$ pièces en tout.

RÉPONSE : (E)

17. Soit x le nombre d'élèves qui aiment à la fois les lentilles et les pois chiches.
Puisque 68 élèves aiment les lentilles, ces 68 élèves vont soit aimer les pois chiches, soit ne pas les aimer.
Puisque x élèves aiment à la fois les lentilles et les pois chiches, alors x des 68 élèves qui aiment les lentilles aiment également les pois chiches, d'où $68-x$ élèves aiment les lentilles mais n'aiment pas les pois chiches.
Puisque 53 élèves aiment les pois chiches, alors $53-x$ élèves aiment les pois chiches mais n'aiment pas les lentilles.
On sait qu'il y a 100 élèves en tout et que 6 d'entre eux n'aiment ni les lentilles ni les pois chiches.
On peut représenter ces résultats au moyen d'un diagramme de Venn :



Puisqu'il y a 100 élèves en tout, alors $(68 - x) + x + (53 - x) + 6 = 100$, d'où $127 - x = 100$ ou $x = 27$. Donc, il y a 27 élèves qui aiment à la fois les lentilles et les pois chiches.

RÉPONSE : (B)

18. Puisque $\angle ABD = 180°$ et que $\angle ABC = x°$, alors $\angle CBD = 180° - x°$.
Puisque les mesures des angles du triangle BCD ont une somme de 180°, alors

$$\angle BDC = 180° - (180° - x°) - 90° = x° - 90°$$

De même, $\angle GFD = 180°$ et $\angle FDE = y° - 90°$. Finalement, $\angle BDF = 180°$, d'où

$$\begin{aligned} \angle BDC + \angle CDE + \angle FDE &= 180° \\ (x° - 90°) + 80° + (y° - 90°) &= 180° \\ x + y - 100 &= 180 \end{aligned}$$

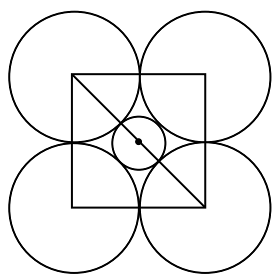
On a donc $x + y = 280$.

RÉPONSE : (D)

19. Avant que Kyne n'enlève les barrettes, Hélène avait 4 barrettes rouges et $4+5+7 = 16$ barrettes en tout. Donc, la probabilité pour qu'elle choisisse au hasard une barrette rouge était égale à $\frac{4}{16}$, soit $\frac{1}{4}$.
Après que Kyne a enlevé les barrettes, la probabilité pour qu'Hélène choisisse au hasard une barrette rouge est égale à $2 \times \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{2}$.
Puisque Hélène avait 4 barrettes rouges au départ, alors il ne lui reste que 4, 3, 2, 1 ou 0 barrettes rouges après que Kyne a enlevé k barrettes rouges.
Puisque la probabilité pour qu'Hélène choisisse une barrette rouge est supérieure à 0, il n'est pas possible qu'il ne lui reste plus de barrettes rouges.
Puisque la probabilité pour qu'elle choisisse une barrette rouge est égale à $\frac{1}{2}$, alors le nombre total de barrettes qu'il lui reste après que k barrettes ont été enlevées doit être égal au double du nombre de barrettes rouges. Donc, le nombre total de barrettes qu'il lui reste après que k barrettes ont été enlevées est soit 8, soit 6, soit 4, soit 2.
Donc, les valeurs possibles de k sont $16 - 8 = 8$ ou $16 - 6 = 10$ ou $16 - 4 = 12$ ou $16 - 2 = 14$.
Parmi ces valeurs possibles, 12 est l'un des choix de réponse. (Une possibilité est que Kyne enlève 2 des barrettes rouges, 5 des barrettes bleues et 5 des barrettes vertes, laissant ainsi 2 barrettes rouges et 2 barrettes vertes.)

Réponse : (C)

20. Dans la figure ci-dessous, on trace l'une des diagonales du carré qui passe au centre de ce dernier.



Par symétrie, le centre du petit cercle est le centre du carré. (Si cela n'était pas le cas, cela signifierait que l'un des quatre grands cercles est différent des autres d'une manière ou d'une autre, ce qui n'est pas le cas.)
De plus, les diagonales du carré passent par les points où le petit cercle est tangent aux grands cercles. (Le segment de droite allant de chaque sommet du carré au centre du petit cercle passe par le point de tangence. Ces quatre segments de droites sont de même longueur et se rejoignent à angle droit ; ce que l'on peut remarquer par le fait que l'apparence du diagramme demeure inchangée si on le fait tourner de 90 degrés. Donc, chacun de ces segments de droites est la moitié d'une diagonale.)
Puisque chacun des grands cercles a un rayon de 5, le carré a des côtés de longueur $5 + 5 = 10$.
Puisque le carré a des côtés de longueur 10, alors d'après le théorème de Pythagore, la longueur de ses diagonales est égale à $\sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}$.
Donc, $5 + 2r + 5 = \sqrt{200}$, d'où $2r = \sqrt{200} - 10$ ou $r \approx 2{,}07$.
Parmi les choix de réponse, r est plus près de 2,1, soit (C).

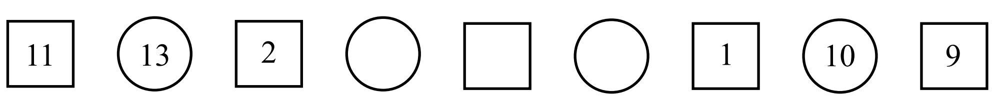
Réponse : (C)

21. Appliquons l'algorithme d'Alice :
   - Étape 1 : Alice écrit le nombre $m = 3$ comme premier terme.
   - Étape 2 : Puisque $m = 3$ est impair, alors elle pose $n = m + 1 = 4$.
   - Étape 3 : Alice écrit le nombre $m + n + 1 = 8$ comme deuxième terme.
   - Étape 4 : Alice pose $m = 8$.
   - Étape 2 : Puisque $m = 8$ est pair, Alice pose $n = \frac{1}{2}m = 4$.
   - Étape 3 : Alice écrit $m + n + 1 = 13$ comme troisième terme.
   - Étape 4 : Alice pose $m = 13$.
   - Étape 2 : Puisque $m = 13$ est impair, Alice pose $n = m + 1 = 14$.
   - Étape 3 : Alice écrit $m + n + 1 = 28$ comme quatrième terme.
   - Étape 4 : Alice pose $m = 28$.
   - Étape 2 : Puisque $m = 28$ est pair, Alice pose $n = \frac{1}{2}m = 14$.
   - Étape 3 : Alice écrit $m + n + 1 = 43$ comme cinquième terme.
   - Étape 5 : Puisqu'elle a cinq termes, elle s'arrête.

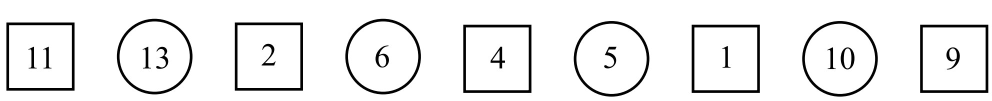
   Donc, le cinquième terme est 43.

   Réponse : 43

22. D'après les données de l'énoncé, si a et b se trouvent dans deux carrés consécutifs, alors $a + b$ se trouve dans le cercle qui les sépare.
   Comme tous les entiers que l'on peut utiliser sont positifs, alors $a + b$ est supérieur à a et à b.
   Cela signifie que le plus grand entier de la liste, soit 13, ne peut être ni x ni y (et ne peut être placé dans un carré) car l'entier dans le cercle à côté doit être inférieur à 13 (qui est le plus grand entier de la liste) et ne peut donc pas être égal à la somme de 13 et d'un autre entier positif de la liste.
   Donc, pour que la valeur de $x + y$ soit aussi grande que possible, il faudrait que x et y soient égaux à 10 et 11 dans un certain ordre. Or, on est confronté au même problème : il n'y a qu'un seul entier de la liste supérieur à 10 et à 11 (soit 13) qui pourrait aller dans les cercles à côté de 10 et 11 ; cependant, puisque chaque entier ne peut être utilisé qu'une seule fois, alors les cercles à côté de 10 et 11 ne peuvent contenir tous deux l'entier 13.
   Donc, la plus grande valeur possible suivante de $x + y$ se produit lorsque $x = 9$ et $y = 11$ (ou lorsque $y = 9$ et $x = 11$).
   Dans ce cas, on pourrait avoir $13 = 11 + 2$ et $10 = 9 + 1$, d'où on aurait la liste partielle suivante :



   Afin de remplir les conditions du problème, les entiers restants (4, 5 et 6) peuvent être placés dans les cercles et les carrés de la manière suivante :



   On voit donc que la plus grande valeur possible de $x + y$ est 20.

   Réponse : 20

23. Soit w, x, y, z les quatre entiers de Dewa.
À partir des quatre entiers, on peut former quatre groupes différents de trois entiers chacun. Les moyennes de ces groupes d'entiers sont :

$$\frac{w+x+y}{3}, \frac{w+x+z}{3}, \frac{w+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}$$

Ces moyennes sont égales à 32, 39, 40, 44, dans un ordre quelconque.
Chaque groupe de trois entiers a une somme qui est égale à 3 fois sa moyenne. Donc, les sommes des groupes d'entiers sont 96, 117, 120, 132, dans un ordre quelconque.
Autrement dit, $w+x+y$, $w+x+z$, $w+y+z$, $x+y+z$ sont égaux à 96, 117, 120, 132, dans un ordre quelconque.
Donc,

$$(w+x+y)+(w+x+z)+(w+y+z)+(x+y+z) = 96+117+120+132$$

d'où

$$3w+3x+3y+3z = 465$$

ou

$$w+x+y+z = 155$$

Puisque les quatre entiers ont une somme de 155 et que les groupes de trois entiers ont pour sommes 96, 117, 120, 132, alors les quatre entiers sont

$$155-96=59 \qquad 155-117=38 \qquad 155-120=35 \qquad 155-132=23$$

d'où l'entier le plus grand est 59.

Réponse : 59

24. Supposons que la pyramide à base triangulaire $APQR$ a pour base le triangle APQ et pour hauteur l'arête AR.
Puisque cette pyramide est construite à un sommet du cube, alors le triangle APQ est rectangle en A et AR est perpendiculaire à la base.
L'aire du triangle APQ est égale à $\frac{1}{2} \times AP \times AQ = \frac{1}{2}x(x+1)$. La hauteur de la pyramide est égale à $\frac{x+1}{2x}$.
Donc, le volume de la pyramide est égal à $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}x(x+1) \times \frac{x+1}{2x}$, ce qui est équivalent à $\frac{(x+1)^2}{12}$.
Puisque le cube a des arêtes de longueur 100, son volume est égal à 100^3, soit 1 000 000.
Donc, 1 % de 1 000 000 est égal à $\frac{1}{100}$ de 1 000 000, soit 10 000.
Donc, 0,01% de 1 000 000 est égal à $\frac{1}{100}$ de 10 000, soit 100.
On voit donc que 0,04 % de 1 000 000 est égal à 400 et que 0,08 % de 1 000 000 est égal à 800.
On veut déterminer le nombre d'entiers x pour lesquels $\frac{(x+1)^2}{12}$ est compris entre 400 et 800.
Cela revient à déterminer le nombre d'entiers x pour lesquels $(x+1)^2$ est compris entre $12 \times 400 = 4800$ et $12 \times 800 = 9600$.
Puisque $\sqrt{4800} \approx 69{,}28$ et $\sqrt{9600} \approx 97{,}98$, alors les carrés parfaits compris entre 4800 et 9600 sont $70^2, 71^2, 72^2, \ldots, 96^2, 97^2$.

Ces valeurs sont donc les valeurs possibles de $(x+1)^2$, d'où les valeurs possibles de x sont donc $69, 70, 71, \ldots, 95, 96$.
Il y a donc $96 - 69 + 1 = 28$ valeurs de x.

Réponse : 28

25. Puisque la liste a, b, c, d, e a une médiane de 2023 et que $a \leq b \leq c \leq d \leq e$, alors $c = 2023$.
Puisque 2023 parait plus d'une seule fois dans la liste, alors cet entier parait 5, 4, 3 ou 2 fois.

1er cas : 2023 parait 5 fois
Dans ce cas, la liste est 2023, 2023, 2023, 2023, 2023.
Il n'existe qu'une seule telle liste.

2e cas : 2023 parait 4 fois
Dans ce cas, la liste est 2023, 2023, 2023, 2023, x ; x étant soit inférieur, soit supérieur à 2023.
Puisque la moyenne de la liste est égale à 2023, les entiers de la liste ont pour somme 5×2023, ce qui signifie que $x = 5 \times 2023 - 4 \times 2023 = 2023$, ce qui est une contradiction.
Il y a donc 0 telles listes dans ce cas.

3e cas : 2023 parait 3 fois
Dans ce cas, la liste est a, b, 2023, 2023, 2023 (avec $a < b < 2023$) ou a, 2023, 2023, 2023, e (avec $a < 2023 < e$) ou 2023, 2023, 2023, d, e (avec $2023 < d < e$).
Dans le premier cas, la moyenne de la liste sera inférieure à 2023 puisque la somme des entiers sera inférieure à 5×2023.
Dans le troisième cas, la moyenne de la liste sera supérieure à 2023 puisque la somme des entiers sera supérieure à 5×2023.
Il faut donc considérer la liste a, 2023, 2023, 2023, e avec $a < 2023 < e$.
Puisque cette liste a une moyenne de 2023, alors la somme des cinq entiers de la liste est égale à 5×2023, ce qui signifie que $a + e = 2 \times 2023$.
Puisque a est un entier strictement positif, alors $1 \leq a \leq 2022$. Pour chaque telle valeur de a, il existe une valeur correspondante de e égale à $4046 - a$, qui est effectivement supérieure à 2023.
Puisqu'il existe 2022 choix possibles pour a, alors il y a 2022 listes dans ce cas.

4e cas (A) : 2023 parait 2 fois ; $c = d = 2023$
(Remarquons que si 2023 parait 2 fois et puisque $c = 2023$ et $a \leq b \leq c \leq d \leq e$, alors on a soit $c = d = 2023$, soit $b = c = 2023$.)
Dans ce cas, la liste est a, b, 2023, 2023, e avec $1 \leq a < b < 2023 < e$.
Cette liste a pour médiane 2023 et aucun autre entier ne parait plus d'une fois. Donc, il lui reste à remplir la condition relative à la moyenne.
Pour ce faire, la somme des entiers de cette liste doit être égale à 5×2023, ce qui signifie que $a + b + e = 3 \times 2023 = 6069$.
Toute paire de valeurs de a et b avec $1 \leq a < b < 2023$ donnera une telle liste en définissant $e = 6069 - a - b$. (Remarquons que puisque $a < b < 2023$, alors on aura effectivement $e > 2023$.)
Si $a = 1$, il y a 2021 valeurs possibles de b, soit $2 \leq b \leq 2022$.
Si $a = 2$, il y a 2020 valeurs possibles de b, soit $3 \leq b \leq 2022$.
Chaque fois que la valeur de a augmente de 1, il y aura 1 valeur possible de moins pour b, jusqu'à ce que $a = 2021$ et $b = 2022$ (une seule valeur).
Donc, le nombre de paires de valeurs de a et b dans ce cas est égal à

$$2021 + 2020 + \cdots + 2 + 1 = \tfrac{1}{2} \times 2021 \times 2022 = 2021 \times 1011$$

ce qui est égal au nombre de listes dans ce cas.

4$^{\text{e}}$ cas (B) : 2023 parait 2 fois ; $b = c = 2023$

Dans ce cas, la liste est a, 2023, 2023, d, e avec $1 \leq a < 2023 < d < e$.
Cette liste a pour médiane 2023 et aucun autre entier ne parait plus d'une fois. Donc, il lui reste à remplir la condition relative à la moyenne.
Pour ce faire, la somme des entiers de cette liste doit être égale à 5×2023, ce qui signifie que $a + d + e = 3 \times 2023 = 6069$.
Si $d = 2024$, alors $a + e = 4045$. Puisque $1 \leq a \leq 2022$ et que $2025 \leq e$, on pourrait avoir $e = 2025$ et $a = 2020$ ou $e = 2026$ et $a = 1019$ et ainsi de suite. Il y a 2020 telles paires puisqu'il n'y a plus de possibilités une fois que a ait atteint 1.
Si $d = 2025$, alors $a + e = 4044$. Puisque $1 \leq a \leq 2022$ et que $2026 \leq e$, on pourrait avoir $e = 2026$ et $a = 2018$ ou $e = 2027$ et $a = 1017$ et ainsi de suite. Il y a 2018 telles paires.
À mesure que d augmente de 1, la somme $a+e$ diminue de 1 et la valeur minimale de e augmente de 1, ce qui signifie que la valeur maximale de a diminue de 2, ce qui signifie à son tour que le nombre de paires de valeurs de a et e diminue de 2. Cela se poursuit jusqu'à ce qu'on atteigne $d = 3033$ (à ce point, il y a 2 paires de a et e).
Donc, le nombre de paires de valeurs de a et e dans ce cas est égal à

$$2020 + 2018 + 2016 + \cdots + 4 + 2$$

ce qui est égal à

$$2 \times (1 + 2 + \cdots + 1008 + 1009 + 1010)$$

qui est à son tour égal à $2 \times \frac{1}{2} \times 1010 \times 1011$, soit 1010×1011.

On voit donc que le nombre total de listes a, b, c, d, e est égal à

$$N = 1 + 2022 + 2021 \times 1011 + 1010 \times 1011 = 1 + 1011 \times (2 + 2021 + 1010) = 1 + 1011 \times 3033$$

Donc, $N = 3\,066\,364$.
La somme des chiffres de N est égale à $3 + 0 + 6 + 6 + 3 + 6 + 4$, soit 28.

Réponse : 28

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2022

(9^{e} année – Secondaire III)

le mercredi 23 février 2022

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 24 février 2022

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $\dfrac{20+22}{2} = \dfrac{42}{2} = 21$.

   Réponse : (D)

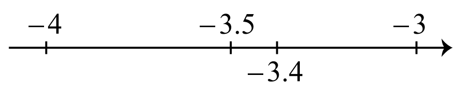
2. D'après le diagramme, Haofei a fait don de 2 \$, Mike a fait don de 6 \$, Pierre a fait don de 2 \$ et Ritika a fait don de 8 \$.
   En tout, les quatre élèves ont fait don de $2\ \$ + 6\ \$ + 2\ \$ + 8\ \$ = 18\ \$$.

   Réponse : (B)

3. Dans la somme donnée, chacune des quatre fractions est équivalente à $\dfrac{1}{2}$.
   On a donc $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 2$.

   Réponse : (E)

4. Sur une droite numérique, $-3{,}4$ est situé entre -4 et -3.
   Cela signifie que $-3{,}4$ est plus près de -4 et -3 que de 0, 3 ou 4. Donc, le bon choix de réponse est soit -4, soit -3.
   Si on part de -3 et qu'on se déplace dans le sens négatif (c'est-à-dire vers la gauche), on atteint $-3{,}4$ après s'être déplacé de 0,4 unités.
   À partir de $-3{,}4$, il faut se déplacer de 0,6 unités dans le sens négatif pour atteindre -4.
   Donc, $-3{,}4$ est plus près de -3 que de -4, d'où le bon choix de réponse est donc (B) ou -3.
   En comparant -3, -4 et $-3{,}4$ on pourrait aussi remarquer que $-3{,}4$ est situé entre $-3{,}5$ et -3. Donc, $-3{,}4$ est plus près de -3 :



   Réponse : (B)

5. D'après la droite numérique, $PR = 10 - 3 = 7$ et $QS = 17 - 5 = 12$. Donc, $PR : QS = 7 : 12$.

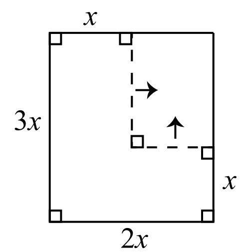
   Réponse : (A)

6. À elles deux, Rosalie et Sophie doivent accomplir $4 + 14 = 18$ tâches.
   Pour que Rosalie et Sophie accomplissent le même nombre de tâches, chacune doit accomplir $18 \div 2 = 9$ tâches.
   Cela signifie que Sophie devrait confier $9 - 4 = 5$ tâches à Rosalie.

   Réponse : (C)

7. Puisque tous les angles de la figure sont des angles droits, chaque segment de droite est soit horizontal, soit vertical.
   La figure a une hauteur de $3x$ et une largeur de $2x$.
   Cela signifie que le segment de droite vertical dont la longueur n'est pas indiquée a une longueur égale à $3x - x = 2x$.
   De plus, le segment de droite horizontal dont la longueur n'est pas indiquée a une longueur égale à $2x - x = x$.
   En partant du coin supérieur gauche et en additionnant les longueurs des côtés dans le sens des aiguilles d'une montre, on obtient un périmètre égal à $x + 2x + x + x + 2x + 3x = 10x$.

On peut aussi « compléter le rectangle » en décalant le côté horizontal le plus court et le côté vertical le plus court pour former un rectangle de hauteur $3x$ et de largeur $2x$, comme dans la figure ci-dessous :



Ce rectangle a donc un périmètre de $2 \times 2x + 2 \times 3x = 10x$.

Réponse : (E)

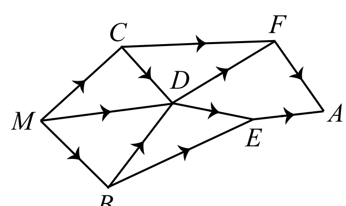
8. L'angle plein au centre d'un cercle a une mesure de 360°.
Puisque le secteur Vert a un angle au centre de 90°, cela correspond à $\frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$ du cercle.
Cela signifie que lorsqu'on fait tourner la flèche une fois, la probabilité pour qu'elle s'arrête sur le secteur Vert est égale à $\frac{1}{4}$.
De même, la probabilité pour que la flèche s'arrête sur le secteur Bleu est égale à $\frac{1}{4}$.
Puisque la flèche s'arrêtera forcément sur l'une des quatre couleurs, la probabilité pour qu'elle s'arrête sur le secteur Rouge ou le secteur Jaune est égale à $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Réponse : (D)

9. Puisque la droite d'équation $y = 2x + b$ passe au point $(-4, 0)$, les coordonnées du point doivent vérifier l'équation de la droite.
On reporte $x = -4$ et $y = 0$ dans l'équation pour obtenir $0 = 2(-4) + b$, d'où $0 = -8 + b$ ou $b = 8$.

Réponse : (E)

10. Dans la figure ci-dessous, on désigne Mathville par M, Algebratown par A et on nomme les points d'intersection des routes.



Il y a 1 itinéraire menant de M à C (soit $M \to C$) et 1 itinéraire menant de M à B (soit $M \to B$).
Il y a 3 itinéraires menant de M à D : soit $M \to D$, $M \to C \to D$ et $M \to B \to D$.
Cela signifie qu'il y a 4 itinéraires menant à F :

$$M \to C \to F \qquad M \to D \to F \qquad M \to C \to D \to F \qquad M \to B \to D \to F$$

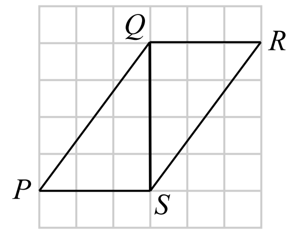
De même, 4 itinéraires mènent à E :

$$M \to B \to E \qquad M \to D \to E \qquad M \to C \to D \to E \qquad M \to B \to D \to E$$

Donc, $4+4 = 8$ itinéraires mènent à A puisque chaque itinéraire doit passer par E ou F, qu'aucun itinéraire ne passe à la fois par E et F, et que 4 itinéraires mènent à E et 4 itinéraires mènent à F.

Réponse : (C)

11. Étant donné que le quadrillage mesure 6×6, alors chaque petit carré mesure 1×1.
Cela signifie que $QR = PS = 3$.
On joint Q et S.



Puisque QS est vertical et que QR et PS sont tous deux horizontaux, alors $\angle RQS = 90°$ et $\angle PSQ = 90°$.
De plus, on remarque que $QS = 4$.
Puisque le triangle RQS est rectangle en Q, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$RS^2 = QR^2 + QS^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

Puisque $RS > 0$, alors $RS = 5$.
De même, $PQ = 5$.
Donc, le périmètre du parallélogramme $PQRS$ est égal à $PQ+QR+RS+PS = 5+3+5+3 = 16$.

Réponse : (C)

12. Parmi les entiers de 1 à 100, ceux ayant 6 pour chiffre des unités sont :

$$6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96.$$

Il y a donc 10 tels entiers.
Parmi les entiers de 1 à 100, ceux ayant 6 pour chiffre des dizaines sont :

$$60, 61, 62, 63, 64, 65, 67, 68, 69.$$

Il y a donc 9 tels entiers. (Remarquons que l'entier 66 figure uniquement dans l'une des deux listes (soit la première) car on cherche à compter les entiers et non le nombre total de 6).
Puisque le chiffre 6 doit paraitre soit comme chiffre des unités soit comme chiffre des dizaines, alors il y a $10 + 9 = 19$ entiers ayant au moins un chiffre égal à 6 parmi les entiers de 1 à 100.

Réponse : (C)

13. Supposons que Rose parcourt x mètres entre le moment où les deux filles commencent à courir et celui où elles se rencontrent.
Puisque Mayar court deux fois plus vite que Rose, alors Mayar parcourra $2x$ mètres en ce même montant de temps.
Lorsque Mayar et Rose se rencontreront, elles auront parcouru à elles deux un total de 90 m (soit la distance initiale qui les séparait).
Donc, $2x + x = 90$, d'où $3x = 90$ ou $x = 30$.
Puisque $2x = 60$, alors Mayar aura parcouru une distance de 60 m avant qu'elles ne se rencontrent.

Réponse : (D)

14. Les lettres A, B, C, D et E représentent respectivement André, Bev, Cao, Dhruv et Elcim.
Soit $D > B$ la représentation du fait que « Dhruv est plus âgé que Bev ».
D'après l'énoncé du problème, on a donc $D > B$, $B > E$, $A > E$, $B > A$ et $C > B$. On voit donc que Dhruv et Cao sont plus âgés que Bev tandis qu'Elcim et André sont plus jeunes qu'elle.
Cela signifie que deux personnes sont plus âgées que Bev tandis que deux personnes sont plus jeunes qu'elle. Donc, Bev est la troisième plus âgée.

Réponse : (B)

15. On remarque que toutes les sommes possibles données sont impaires. Rappelons que tous les nombres premiers sont impairs, à l'exception de 2 (qui est pair).
Lorsque deux entiers impairs sont additionnés, leur somme est paire.
Lorsque deux entiers pairs sont additionnés, leur somme est paire.
Lorsqu'un entier pair et un entier impair sont additionnés, leur somme est impaire.
Par conséquent, si la somme de deux entiers est impaire, alors cette somme doit être celle d'un entier pair et d'un entier impair.
Puisque le seul nombre premier pair est 2, alors pour qu'un entier impair puisse être exprimé comme la somme de deux nombres premiers, l'un des nombres premiers doit être égal à 2.
On remarque que

$$19 = 2 + 17 \qquad 21 = 2 + 19 \qquad 23 = 2 + 21 \qquad 25 = 2 + 23 \qquad 27 = 2 + 25$$

On remarque donc que 17, 19 et 23 sont des nombres premiers et que 21 et 25 ne le sont pas. Donc, parmi les cinq entiers, seuls trois peuvent être exprimés comme la somme de deux nombres premiers.

Réponse : (A)

16. Puisqu'un total de 60 parties a été joué et que chacun des 3 couples de joueurs a joué le même nombre de parties, alors chaque couple de joueurs a joué $60 \div 3 = 20$ parties.
Alodie a gagné 20 % des 20 parties qu'elle a jouées contre Bingyi. Donc, parmi ces 20 parties, Alodie en a gagné $\frac{20}{100} \times 20 = \frac{1}{5} \times 20 = 4$ tandis que Bingyi en a gagné $20 - 4 = 16$.
Bingyi a gagné 60 % des 20 parties qu'elle a jouées contre Cheska. Donc, parmi ces 20 parties, Bingyi en a gagné $\frac{60}{100} \times 20 = \frac{3}{5} \times 20 = 12$.
On ne considère pas les parties que jouent Cheska et Alodie car les résultats de ces parties n'affectent pas le nombre total de victoires de Bingyi.
Donc, Bingyi a gagné $16 + 12 = 28$ parties en tout.

Réponse : (C)

17. Puisque $a + 5 = b$, alors $a = b - 5$.
On reporte $a = b - 5$ et $c = 5 + b$ dans $b + c = a$ pour obtenir

$$\begin{aligned} b + (5 + b) &= b - 5 \\ 2b + 5 &= b - 5 \\ b &= -10 \end{aligned}$$

(Si $b = -10$, alors $a = b - 5 = -15$, $c = 5 + b = -5$ et $b + c = (-10) + (-5) = (-15) = a$.)

Réponse : (C)

18. À partir de l'ordre initial des boules (soit `1 2 3 4 5`), on construit un tableau pour tenir compte des positions des boules après chacune des 10 premières étapes :

Étape	Boule que l'on déplace	Ordre des boules après l'étape
1	la plus à droite	1 2 5 3 4
2	la plus à gauche	2 5 1 3 4
3	la plus à droite	2 5 4 1 3
4	la plus à gauche	5 4 2 1 3
5	la plus à droite	5 4 3 2 1
6	la plus à gauche	4 3 5 2 1
7	la plus à droite	4 3 1 5 2
8	la plus à gauche	3 1 4 5 2
9	la plus à droite	3 1 2 4 5
10	la plus à gauche	1 2 3 4 5

Après 10 étapes, les boules sont dans le même ordre qu'au début. Cela signifie que les boules se trouvent dans leur ordre initial après chaque séquence de 10 étapes.
Puisque 2020 est un multiple de 10, alors les boules seront dans leur ordre initial après 2020 étapes.
Les étapes 2021 à 2025 auront les mêmes résultats que les étapes 1 à 5 ci-dessus. Donc, après 2025 étapes, les boules seront dans l'ordre inverse de leur ordre initial.
Donc, 2025 est une valeur possible de N. On peut adapter cet argument pour démontrer qu'aucune des valeurs 2028, 2031 et 2027 n'est une valeur possible de N.

Réponse : (E)

19. L'entier de six chiffres que Miyuki a envoyé comprenait les chiffres 2022 dans cet ordre ainsi que deux 3. Si les deux 3 étaient des chiffres consécutifs, alors il y a 5 entiers possibles :

332022 233022 203322 202332 202233

Dans les cinq entiers ci-dessus, remarquons que les deux 3 semblent se décaler de gauche à droite dans l'entier. Si les deux 3 ne sont pas des chiffres consécutifs, alors il existe 10 couples de positions possibles pour ces chiffres dans l'entier : 1$^{\text{er}}$/3$^{\text{e}}$, 1$^{\text{er}}$/4$^{\text{e}}$, 1$^{\text{er}}$/5$^{\text{e}}$, 1$^{\text{er}}$/6$^{\text{e}}$, 2$^{\text{e}}$/4$^{\text{e}}$, 2$^{\text{e}}$/5$^{\text{e}}$, 2$^{\text{e}}$/6$^{\text{e}}$, 3$^{\text{e}}$/5$^{\text{e}}$, 3$^{\text{e}}$/6$^{\text{e}}$, 4$^{\text{e}}$/6$^{\text{e}}$. On a donc les entiers suivants :

323022 320322 320232 320223 230322 230232 230223 203232 203223 202323

(On peut penser au fait de déplacer le 3 le plus à gauche de gauche à droite dans l'entier tout en identifiant toutes les positions possibles pour le second 3.)
Donc, il y a $5 + 10 = 15$ entiers de six chiffres possibles que Miyuki aurait pu envoyer par SMS.

Réponse : (E)

20. *Solution 1*

Chacun des n amis reçoit $\frac{1}{n}$ de la pizza.

Puisqu'il y a deux parts qui correspondent chacune à $\frac{1}{6}$ de la pizza (et puisqu'on ne peut couper ces parts), alors chaque ami doit recevoir au moins $\frac{1}{6}$ de la pizza. Cela signifie qu'il ne peut y avoir plus de 6 amis. C'est-à-dire que $n \leq 6$.

Donc, $n = 7, 8, 9, 10$ ne sont pas possibles. Leur somme est égale à 34.

La valeur $n = 2$ est possible car on peut séparer les parts en deux groupes ; chacun des groupes correspondant à $\frac{1}{2}$ de la pizza.

Remarquons que $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Cela signifie que les 6 parts restantes correspondent également à $\frac{1}{2}$ de la pizza.

La valeur $n = 3$ est possible car on peut séparer les parts en trois groupes ; chacun des groupes correspondant à $\frac{1}{3}$ de la pizza.

Puisque $2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ et $4 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$, alors les 4 parts restantes doivent également correspondre à $\frac{1}{3}$ de la pizza (soit le tiers restant de la pizza). Donc, $n = 3$ est possible.

La valeur $n = 4$ est possible car $2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ (ce que l'on peut faire deux fois). Les 4 parts restantes doivent également correspondre à $\frac{1}{4}$ de la pizza.

La valeur $n = 6$ est possible car deux parts correspondent à $\frac{1}{6}$ à elles seules, on peut former deux groupes correspondant chacun à $\frac{1}{6}$ de la pizza à partir des 4 parts qui représentent chacune $\frac{1}{12}$ de la pizza, et $\frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{3}{24} + \frac{1}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ (ce que l'on peut faire deux fois). On a donc 6 groupes qui correspondent chacun à $\frac{1}{6}$ de la pizza.

Les valeurs de n pour lesquelles ceci n'est pas possible ont soit une somme de 34 (si $n = 5$ est possible), soit une somme de 39 (si $n = 5$ n'est pas possible). Puisque 34 n'est pas l'un des choix de réponse, alors 39 est le bon choix de réponse.

(On remarque que $n = 5$ n'est pas possible car on ne peut former un groupe de parts correspondant à $\frac{1}{5}$ de la pizza qui comprendrait une part correspondant à $\frac{1}{6}$ de la pizza ; il nous faudrait une part qui corresponderait à $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{6}{30} - \frac{5}{30} = \frac{1}{30}$ de la pizza. Cela n'est pas possible étant donné que chaque part de pizza est plus grande que $\frac{1}{30}$ de la pizza.)

Solution 2

Parmi les parts de la pizza, deux parts correspondent chacune à $\frac{1}{24}$ de la pizza, quatre correspondent chacune à $\frac{1}{12}$, deux correspondent chacune à $\frac{1}{8}$ et deux correspondent chacune à $\frac{1}{6}$.

On exprime chacune des fractions au moyen d'un dénominateur commun (soit 24). Donc, deux parts correspondent chacune à $\frac{1}{24}$ de la pizza, quatre correspondent chacune à $\frac{2}{24}$, deux correspondent chacune à $\frac{3}{24}$ et deux correspondent chacune à $\frac{4}{24}$.

Pour former des groupes de parts de taille égale, on peut analyser les différentes manières de séparer les entiers 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4 et 4 en groupes de taille égale. (Ces entiers représentent la taille de chaque part mesurée en unités de $\frac{1}{24}$ de la pizza.)

Puisque le plus grand entier de la liste est 4, chaque groupe doit avoir une taille d'au moins 4.

Puisque $4 = 24 \div 6$, alors on ne peut séparer les parts en plus de 6 groupes de taille égale. Cela signifie que $n = 7, 8, 9, 10$ ne sont pas possibles.

On peut séparer les parts en $n = 6$ groupes égaux, chacun ayant une taille totale de $24 \div 6 = 4$, de la manière suivante :

$$4 \qquad 4 \qquad 3+1 \qquad 3+1 \qquad 2+2 \qquad 2+2$$

On peut séparer les parts en $n = 4$ groupes égaux, chacun ayant une taille totale de $24 \div 4 = 6$, de la manière suivante :

$$4+2 \qquad 4+2 \qquad 3+3 \qquad 2+2+1+1$$

On peut séparer les parts en $n = 3$ groupes égaux, chacun ayant une taille totale de $24 \div 3 = 8$, de la manière suivante :

$$4+4 \qquad 2+2+2+2 \qquad 3+3+1+1$$

On peut séparer les parts en $n = 2$ groupes égaux, chacun ayant une taille totale de $24 \div 2 = 12$, de la manière suivante :

$$4+4+2+2 \qquad 3+3+2+2+1+1$$

Puisque 24 n'est pas un multiple de 5, on ne peut séparer les parts en 5 groupes égaux.

Donc, les valeurs de n pour lesquelles ceci n'est pas possible ont une somme de $5 + 7 + 8 + 9 + 10 = 39$.

Réponse : (D)

21. Un panneau de dimensions 10 cm × 10 cm comporte 9 rangées de 9 trous chacune. Le panneau comporte donc $9 \times 9 = 81$ trous en tout.

Des crochets droits sont placés dans les trous sur les deux diagonales principales du panneau.

Chaque diagonale comporte 9 trous. Puisqu'il y a un nombre impair de rangées, les deux diagonales partagent un trou (celui en leur centre).

Donc, les deux diagonales comportent en tout $9 + 9 - 1 = 17$ trous.

Cela signifie qu'il y a $81 - 17 = 64$ trous vides.

Réponse : 64

22. On cherche d'abord une régularité dans les deux chiffres les plus à droite des puissances de 4, de 5 et de 7.

On dresse la liste des quelques premières puissances de 5 :

$$5^1 = 5 \qquad 5^2 = \mathbf{25} \qquad 5^3 = 1\mathbf{25} \qquad 5^4 = 6\mathbf{25} \qquad 5^5 = 31\mathbf{25}$$

Il semblerait qu'à partir de 5^2, les deux chiffres les plus à droite des puissances de 5 sont toujours 25.
Si les deux chiffres les plus à droite d'une puissance de 5 sont 25, pourquoi les deux chiffres les plus à droite de la puissance de 5 suivante sont-ils également 25 ?
Les deux chiffres les plus à droite d'une puissance de 5 dépendent entièrement des deux chiffres les plus à droite de la puissance précédente ; dans la multiplication, les chiffres situés avant les deux chiffres les plus à droite n'affectent pas les deux chiffres les plus à droite du produit.
Cela signifie qu'à partir de 5^2, les deux chiffres les plus à droite de chaque puissance de 5 sont 25. Donc les deux chiffres les plus à droite de 5^{129} sont également 25.

On dresse la liste des quelques premières puissances de 4 :

$$4^1 = 4 \qquad 4^2 = \mathbf{16} \qquad 4^3 = \mathbf{64} \qquad 4^4 = 2\mathbf{56} \qquad 4^5 = 10\mathbf{24} \qquad 4^6 = 40\mathbf{96} \qquad 4^7 = 16\,3\mathbf{84}$$

$$4^8 = 65\,5\mathbf{36} \qquad 4^9 = 262\,1\mathbf{44} \qquad 4^{10} = 1\,048\,5\mathbf{76} \qquad 4^{11} = 4\,194\,3\mathbf{04} \qquad 4^{12} = 16\,777\,2\mathbf{16}$$

On remarque que les deux chiffres les plus à droite se répètent après 10 puissances de 4. Cela signifie que les deux chiffres les plus à droite des puissances de 4 se répètent selon un cycle de longueur 10.
Puisque 120 est un multiple de 10 et que 127 est 7 de plus qu'un multiple de 10, alors les deux chiffres les plus à droite de 4^{127} sont les mêmes que ceux de 4^7, soit 84.

On dresse la liste des quelques premières puissances de 7 :

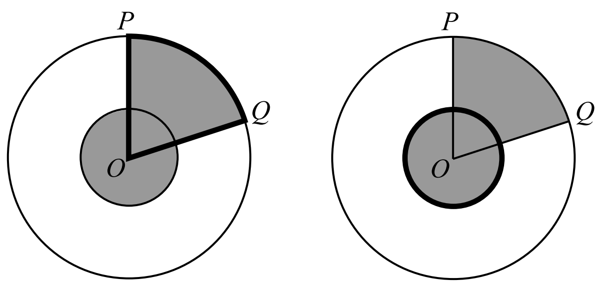
$$7^1 = 7 \qquad 7^2 = \mathbf{49} \qquad 7^3 = 3\mathbf{43} \qquad 7^4 = 24\mathbf{01} \qquad 7^5 = 16\,8\mathbf{07} \qquad 7^6 = 117\,6\mathbf{49}$$

On remarque que les deux chiffres les plus à droite se répètent après 4 puissances de 7. Cela signifie que les deux chiffres les plus à droite des puissances de 7 se répètent selon un cycle de longueur 4.
Puisque 128 est un multiple de 4 et que 131 est 3 de plus qu'un multiple de 4, alors les deux chiffres les plus à droite de 7^{131} sont les mêmes que ceux de 7^3, soit 43.

Donc, les deux chiffres les plus à droite de $4^{127} + 5^{129} + 7^{131}$ sont les deux chiffres les plus à droite de la somme $84 + 25 + 43 = 152$, soit 52. (Cela s'explique par le fait que lorsqu'on additionne des entiers de plus de deux chiffres, tous les chiffres à gauche des deux chiffres les plus à droite n'affectent pas les deux chiffres les plus à droite de la somme.)

Réponse : 52

23. Puisque les deux régions ombrées ont des aires égales, alors lorsqu'on ombre la région non ombrée du petit cercle, on constate que l'aire du secteur entièrement ombré du grand cercle est égale à l'aire du petit cercle.



Le petit cercle a un rayon de 1. Son aire est donc égale à $\pi \times 1^2 = \pi$.
Le grand cercle a un rayon de 3. Son aire est donc égale à $\pi \times 3^2 = 9\pi$.
Cela signifie que l'aire du secteur entièrement ombré du grand cercle est égale à π, d'où on comprend donc que ce secteur représente $\frac{1}{9}$ du grand cercle.

Cela signifie que l'angle POQ doit également représenter $\frac{1}{9}$ d'un angle plein. Donc, $\angle POQ = \frac{1}{9} \times 360^\circ = 40^\circ$.
Donc, $x = 40$.

Réponse : 40

24. Un nombre Pretti est un entier de 7 chiffres de la forme $a\,bcd\,efg$.
D'après l'énoncé, l'entier formé par les chiffres abc est un carré parfait.
Puisqu'un nombre Pretti est un entier strictement positif de sept chiffres, alors $a > 0$. Donc, abc est un entier de 100 à 999.
Puisque $9^2 = 81$ (qui est un entier de 2 chiffres), $10^2 = 100$ (qui est un entier de 3 chiffres), $31^2 = 961$ (qui est un entier de 3 chiffres) et $32^2 = 1024$ (qui est un entier de 4 chiffres), alors abc (qui est un entier de 3 chiffres) doit être l'un de $10^2, 11^2, \ldots, 30^2, 31^2$, puisque 32^2 a 4 chiffres.
D'après l'énoncé, l'entier formé par les chiffres $defg$ est un cube parfait.
Puisqu'un nombe Pretti ne peut avoir un chiffre des unités de mille égal à 0, alors $d > 0$.
Puisque $9^3 = 729$, $10^3 = 1000$, $21^3 = 9261$ et $22^3 = 10\,648$, alors $defg$ (qui est un entier de 4 chiffres) doit être l'un de $10^3, 11^3, \ldots, 20^3, 21^3$, puisque 22^3 a 5 chiffres.
Puisque le nombre initial a un chiffre des dizaines de mille égal à celui des unités, alors $c = g$.
Autrement dit, le chiffre des unités de abc et celui de $defg$ sont égaux.
Le chiffre des unités d'un carré parfait dépend uniquement du chiffre des unités de l'entier que l'on élève au carré ; dans la multiplication, aucun chiffre à gauche de ce chiffre n'affecte le chiffre des unités résultant.
Les carrés de 0^2 à 9^2 sont $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$.
On construit donc le tableau suivant :

Chiffre des unités de n^2	Chiffres des unités possibles de n
0	0
1	1, 9
4	2, 8
5	5
6	4, 6
9	3, 7

De même, le chiffre des unités d'un cube parfait ne dépend que du chiffre des unités de l'entier que l'on élève au cube.
Les cubes de 0^3 à 9^3 sont $0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729$.
On construit donc le tableau suivant :

Chiffre des unités de m^3	Chiffres des unités possibles de m
0	0
1	1
2	8
3	7
4	4
5	5
6	6
7	3
8	2
9	9

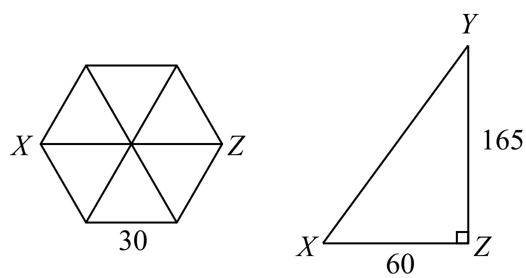
Donc, on peut dresser la liste des valeurs possibles de $c = g$ (d'après le premier tableau, celles-ci doivent être 0, 1, 4, 5, 6, 9), les carrés de 10^2 à 31^2 et les cubes de 10^3 à 21^3 ayant ce chiffre des unités :

Chiffre $c = g$	Carrés possibles	Cubes possibles	Nombres Pretti
0	10^2, 20^2, 30^2	10^3, 20^3	$3 \times 2 = 6$
1	11^2, 19^2, 21^2, 29^2, 31^2	11^3, 21^3	$5 \times 2 = 10$
4	12^2, 18^2, 22^2, 28^2	14^3	$4 \times 1 = 4$
5	15^2, 25^2	15^3	$2 \times 1 = 2$
6	14^2, 16^2, 24^2, 26^2	16^3	$4 \times 1 = 4$
9	13^2, 17^2, 23^2, 27^2	19^3	$4 \times 1 = 4$

Pour chaque carré de la deuxième colonne, chaque cube de la troisième colonne dans la même rangée est possible. (Par exemple, on peut obtenir le nombre Pretti 3 611 331 à partir de 19^2 et 11^3. De même, on peut obtenir le nombre Pretti 3 619 261 à partir de 19^2 et 21^3.) Donc, pour chacun des cas, le nombre de nombres Pretti est égal au produit du nombre de carrés possibles et nombre de cubes possibles.
Donc, il y a $6 + 10 + 4 + 2 + 4 + 4 = 30$ nombres Pretti.

Réponse : 30

25. Toute mesure présentée dans cette solution est en centimètres. Par souci de simplicité, les unités (cm) ont été omises.
Tout d'abord, on calcule la distance parcourue par la mouche. Soit m cette distance.
Soit Z le point au bas du prisme, directement au-dessous de Y.
Puisque la base hexagonale a des côtés de longueur 30, alors $XZ = 60$.
En effet, un hexagone peut être divisé en 6 triangles équilatéraux par ses diagonales. Donc, la longueur d'une diagonale est égale au double de la longueur du côté d'un triangle, d'où on comprend donc que la longueur d'une diagonale est égale au double de celle des côtés de l'hexagone.

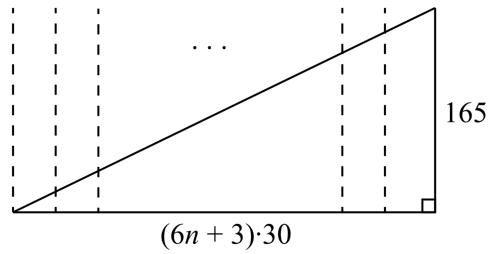


De plus, le triangle XZY est rectangle en Z puisque XZ est situé sur la base horizontale et que YZ est vertical.
D'après le théorème de Pythagore, puisque $XY > 0$, alors

$$XY = \sqrt{XZ^2 + YZ^2} = \sqrt{60^2 + 165^2}$$

Donc, $m = XY = \sqrt{60^2 + 165^2}$.

On calcule ensuite la distance parcourue par la fourmi. Soit f cette distance.
Puisque la fourmi fait le tour du prisme $n + \frac{1}{2}$ fois et qu'elle rampe sur les 6 faces verticales à chaque fois qu'elle fait le tour du prisme, alors elle rampe sur $6(n + \frac{1}{2}) = 6n + 3$ faces en tout.
Pour déterminer la valeur de f, on « déplie » l'extérieur du prisme.
Puisque la fourmi rampe sur $6n+3$ faces, elle parcourt une distance « horizontale » de $(6n+3) \cdot 30$.
De même, la fourmi parcourt une distance verticale égale à la hauteur du prisme, soit 165.
Puisque la fourmi rampe le long d'un chemin à pente constante, sa trajectoire forme l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont la base mesure $(6n + 3) \cdot 30$ et dont la hauteur mesure 165.



D'après le théorème de Pythagore, puisque $f > 0$, alors $f = \sqrt{((6n+3)\cdot 30)^2 + 165^2}$.

Étant donné que f doit être supérieur ou égal à $20m$, on veut déterminer la plus petite valeur possible de n telle que $f > 20m$.
Puisque ces quantités sont positives, les inéquations $f > 20m$ et $f^2 > 20^2m^2$ sont équivalentes.
Les inéquations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
f^2 &> 20^2m^2 \\
((6n+3)\cdot 30)^2 + 165^2 &> 400(60^2 + 165^2) \\
(6n+3)^2\cdot 30^2 + 165^2 &> 400(60^2 + 165^2) \\
(6n+3)^2\cdot 2^2 + 11^2 &> 400(4^2 + 11^2) \qquad \text{(on divise les deux membres par } 15^2\text{)} \\
4(6n+3)^2 + 121 &> 400\cdot 137 \\
4(6n+3)^2 &> 54\,679 \\
(6n+3)^2 &> \tfrac{54\,679}{4} \\
6n+3 &> \sqrt{\tfrac{54\,679}{4}} \qquad \text{(puisque les deux membres sont positifs)} \\
6n &> \sqrt{\tfrac{54\,679}{4}} - 3 \\
n &> \tfrac{1}{6}\left(\sqrt{\tfrac{54\,679}{4}} - 3\right) \approx 18{,}986
\end{aligned}$$

Donc, $n = 19$ est le plus petit entier strictement positif qui vérifie l'inéquation.

Réponse : 19

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2021

(9^e année – Secondaire III)

le mardi 23 février 2021

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 24 février 2021

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Puisque Q est situé entre P et R, alors $PQ + QR = PR$.
Puisque $PR = 12$ et $PQ = 3$, alors $QR = PR - PQ = 12 - 3 = 9$.

Réponse : (D)

2. La fraction $\frac{4}{8}$ est équivalente à la fraction $\frac{1}{2}$.
Donc, on devrait placer le nombre 4 dans le $\square$.

Réponse : (C)

3. Hélène travaille pendant 4 heures et gagne 13,25 \$ de l'heure.
Donc, elle gagnera un montant total de $4 \times 13{,}25$ \$ $= 53{,}00$ \$.

Réponse : (E)

4. Chacun des carrés ayant des côtés de longueur 1 a un périmètre de $4 \times 1 = 4$.
Puisque les 7 carrés dans la figure ont des périmètres qui ne se chevauchent pas, alors la figure entière a un périmètre de $7 \times 4 = 28$.

Réponse : (D)

5. Puisqu'il y a 60 secondes dans 1 minute, alors il y a $1{,}5 \times 60 = 90$ secondes dans 1,5 minutes.
Donc, Guillaume compléta son premier tour en 63 secondes, son deuxième tour en 60 secondes, son troisième tour en 90 secondes, son quatrième tour en 68 secondes et son cinquième tour en 57 secondes.
Donc, lorsqu'on place ces temps de parcours en ordre croissant, on obtient 57, 60, 63, 68, 90.
Donc, ces temps de parcours ont une médiane de 63 secondes.

Réponse : (A)

6. Le rectangle initial a une aire de $13 \times 10 = 130$.
Lorsque la longueur et la largeur du rectangle initial sont chacune augmentées de 2, on obtient un rectangle de dimensions 15×12.
Le nouveau rectangle a une aire de $15 \times 12 = 180$. Donc, l'aire a augmenté de $180 - 130 = 50$.

Réponse : (A)

7. *Solution 1*
10 % de 500 est égal à $\frac{1}{10}$ de 500, soit à 50.
Donc, 110 % de 500 est égal à $500 + 50$, soit à 550.

Solution 2
110 % de 500 est égal à $\frac{110}{100} \times 500 = 110 \times 5 = 550$.

Réponse : (E)

8. *Solution 1*
On annule chacune des opérations dans l'ordre inverse.
Le résultat final, 85, a été obtenu en multipliant un nombre par 5. Ce nombre était $85 \div 5 = 17$.
Le nombre 17 a été obtenu en soustrayant 2 de n. Donc, $n = 17 + 2 = 19$.

Solution 2
Lorsqu'on soustrait 2 de n, on obtient $n - 2$.
Lorsque $n - 2$ est multiplié par 5, on obtient $5 \times (n - 2)$.
D'après le problème, $5 \times (n - 2) = 85$, d'où on a donc $5n - 10 = 85$, soit $5n = 95$ ou $n = \frac{95}{5} = 19$.

Réponse : (B)

9. Puisque 2 cercles et 1 triangle s'équilibrent et que 1 triangle et 3 carrés s'équilibrent, alors 2 cercles et 3 carrés s'équilibrent.
Puisque 2 cercles et 3 carrés s'équilibrent, alors $2+2=4$ cercles et $3+3=6$ carrés s'équilibrent, ce qui correspond au choix de réponse (E).
(Pouvez-vous démontrer qu'aucun des autres choix n'équivaut à 6 carrés ?)

Réponse : (E)

10. Les entiers qui sont des multiples à la fois de 5 et de 7 sont ceux qui sont des multiples de 35.
Le plus petit multiple de 35 supérieur à 100 est $3 \times 35 = 105$. (Le multiple de 35 précédent étant $2 \times 35 = 70$.)
En comptant par bonds de 35 à partir de 105, on obtient 105, 140, 175, 210, 245, 280, 315.
Il y a 3 entiers dans cette liste qui sont entre 100 et 300 et qui ne sont pas des multiples de 10 (c.-à-d. ceux dont le chiffre des unités n'est pas 0). Ces entiers sont 105, 175 et 245.

Réponse : (C)

11. Puisque $a \nabla b = a^b \times b^a$, alors $2 \nabla 3 = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$.

Réponse : (B)

12. Puisque le triangle PQR est rectangle en Q, alors $\angle PRQ = 90^\circ - \angle QPR = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$.
Puisque $\angle PRS = \angle QRS$, alors $\angle QRS = \frac{1}{2}\angle PRQ = \frac{1}{2}(36^\circ) = 18^\circ$.
Puisque le triangle RQS est rectangle en Q, alors $\angle RSQ = 90^\circ - \angle QRS = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$.

Réponse : (E)

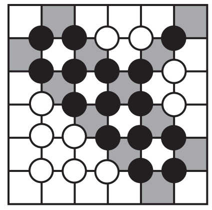
13. Puisque $m+1 = \dfrac{n-2}{3}$, alors $3(m+1) = n-2$.
On a donc $3m+3 = n-2$, d'où $3m - n = -2-3 = -5$.

Réponse : (B)

14. À partir de la case 38, le robot avance de 2 cases jusqu'à la case 36, se tourne de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre de manière à faire face à la case 29 et se déplace vers cette dernière.
À partir de la case 29, le robot avance de 2 cases jusqu'à la case 15, se tourne de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre de manière à faire face à la case 16 et se déplace vers cette dernière.

Réponse : (A)

15. Il y a 25 places possibles sur lesquelles on peut placer le cercle.
Dans la figure ci-dessous, ces places sont indiquées par un petit cercle noir si le cercle touche un nombre égal de carreaux ombrés et non ombrés (soit 2 de chaque) et par un petit cercle blanc s'il touche différents nombres de carreaux ombrés et non ombrés.



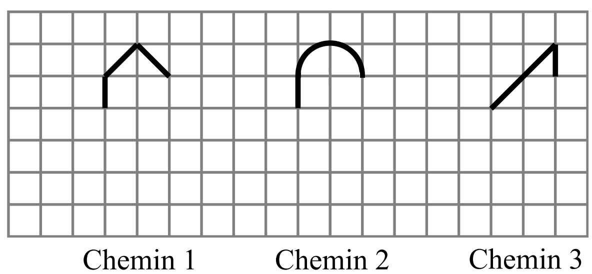
Donc, il y a 15 places où l'on peut placer le cercle de manière que ce dernier touche un nombre égal de carreaux ombrés et non ombrés.
On a donc une probabilité de $\frac{15}{25}$ (soit $\frac{3}{5}$) de placer le cercle de la manière souhaitée.

Réponse : (E)

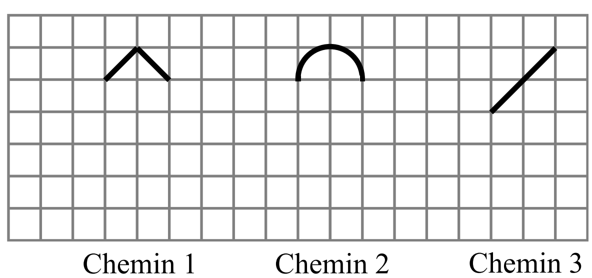
16. Lorsque l'on décompose un cube parfait en produit de facteurs premiers, le nombre de fois où chaque facteur premier parait est un multiple de 3 ; on peut donc séparer ces facteurs premiers en trois groupes identiques où le produit de chaque groupe est égal à la racine cubique du nombre initial.
En outre, si $n^3 = 2^4 \times 3^2 \times 5^5 \times k$, n étant un entier, alors l'entier n^3 admet les facteurs premiers 2, 3 et 5 un nombre de fois qui doit être un multiple de 3.
Puisque n^3 admet déjà quatre facteurs 2, alors k doit admettre au moins deux facteurs 2 supplémentaires afin que n^3 admette 2^6 comme facteur. (k pourrait également admettre plus de facteurs 2 à condition que le nombre total de facteurs 2 soit un multiple de 3.)
Puisque n^3 admet déjà deux facteurs 3, alors k doit admettre au moins un facteur 3 supplémentaire.
Puisque n^3 admet déjà cinq facteurs 5, alors k doit admettre au moins un facteur 5 supplémentaire.
Donc, k admet au moins deux facteurs 2, au moins un facteur 3 et au moins un facteur 5.
Cela signifie que la plus petite valeur possible de k est $2^2 \times 3 \times 5 = 60$. En principe, k pourrait admettre d'autres facteurs premiers. Or, puisque l'on veut la valeur la plus petite de k, on peut écarter cette idée.

Réponse : (C)

17. On commence la comparaison des longueurs de ces chemins en supprimant les portions identiques. Plus précisément, on supprime de chaque chemin le segment de droite horizontal de longueur 2, un segment de droite vertical de longueur 1 de la gauche et le segment de droite vertical de longueur 4 de la droite pour obtenir la figure ci-dessous :

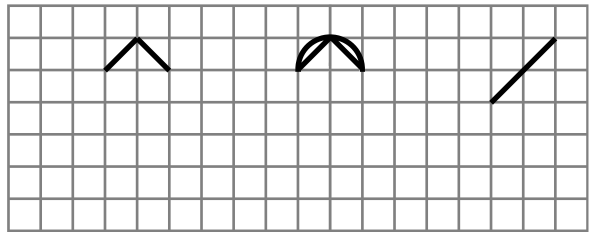


En supprimant les mêmes longueurs, on ne modifie pas les longueurs *relatives* des chemins.
Chacun des chemins contient toujours un segment vertical de longueur 1, on supprime donc chacun de ces segments tout en conservant les longueurs relatives des chemins.



Chacun des Chemins 1 et 3 est désormais composé des diagonales de deux des carrés du quadrillage. Donc, les Chemins 1 et 3 étaient initialement de même longueur, d'où on a donc $x = z$.
Cela signifie que le bon choix de réponse doit être (C) ou (E), selon que $x = z$ est inférieur à y ou supérieur à y.

Pour répondre à cette question, on trace les segments restants du Chemin 1 sous le Chemin 2 :



Puisque le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite reliant ces deux, alors le demi-cercle a une longueur supérieure à la longueur totale des diagonales de deux des carrés du quadrillage.
Cela signifie que $x = z$ et que $z < y$.
(Une autre approche consisterait à déterminer la longueur de chacun des chemins initiaux et les comparer par la suite. Pouvez-vous le faire ?)

Réponse : (C)

18. La durée entre 10 h 10 et 10 h 55 est de quarante-cinq minutes.
La durée entre 10 h 55 et 11 h 58 est de une heure et trois minutes, soit soixante-trois minutes.
Étant donné que les trains arrivent toutes les x minutes, y compris à 10 h 10, à 10 h 55 et à 11 h 58, alors 45 et 63 sont tous deux des multiples de x. (Autrement dit, si l'on commence à 10 h 10 et que l'on compte par bonds de x minutes, on devrait tomber sur 10 h 55 et sur 11 h 58.)
Parmi les choix de réponse (9, 7, 5, 10, 11), 9 est le seul qui est un facteur commun de 45 et 63.

Réponse : (A)

19. *Solution 1*
On procède à rebours.
Il reste 1 bonbon à la fin du cinquième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{5}{6}$ des bonbons au cinquième jour, le bonbon à la fin du cinquième jour représente $\frac{1}{6}$ des bonbons restants à la fin du quatrième jour.
Donc, il restait $6 \times 1 = 6$ bonbons à la fin du quatrième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{4}{5}$ des bonbons au quatrième jour, ces 6 bonbons représentent $\frac{1}{5}$ des bonbons restants à la fin du troisième jour.
Donc, il restait $5 \times 6 = 30$ bonbons à la fin du troisième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{3}{4}$ des bonbons au troisième jour, ces 30 bonbons représentent $\frac{1}{4}$ des bonbons restants à la fin du deuxième jour.
Donc, il restait $4 \times 30 = 120$ bonbons à la fin du deuxième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{2}{3}$ des bonbons au deuxième jour, ces 120 bonbons représentent $\frac{1}{3}$ des bonbons restants à la fin du premier jour.
Donc, il restait $3 \times 120 = 360$ bonbons à la fin du premier jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{1}{2}$ des bonbons au premier jour, ces 360 bonbons représentent $\frac{1}{2}$ des bonbons que contenait le sac initialement.
Donc, il y avait $2 \times 360 = 720$ bonbons dans le sac avant le premier jour.

Solution 2
Supposons qu'il y avait x bonbons dans le sac avant le premier jour.
Au premier jour, on a mangé $\frac{1}{2}$ des bonbons, cela signifie qu'il ne restait plus que $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ des bonbons.

Puisqu'il y avait x bonbons dans le sac avant le premier jour, il ne restait plus que $\frac{1}{2}x$ bonbons à la fin du premier jour.
Au deuxième jour, on a mangé $\frac{2}{3}$ des bonbons restants. Donc, des bonbons qu'il y avait au début du jour, il n'en reste plus que $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ à la fin du jour.
Puisqu'il y avait $\frac{1}{2}x$ bonbons au début du deuxième jour, il ne restait plus que $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}x = \frac{1}{6}x$ bonbons à la fin du deuxième jour.
Au troisième jour, on a mangé $\frac{3}{4}$ des bonbons restants. Donc, des bonbons qu'il y avait au début du jour, il n'en reste plus que $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ à la fin du jour.
Puisqu'il y avait $\frac{1}{6}x$ bonbons au début du troisième jour, il ne restait plus que $\frac{1}{4} \times \frac{1}{6}x = \frac{1}{24}x$ bonbons à la fin du troisième jour.
Au quatrième jour, on a mangé $\frac{4}{5}$ des bonbons restants. Donc, des bonbons qu'il y avait au début du jour, il n'en reste plus que $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ à la fin du jour.
Puisqu'il y avait $\frac{1}{24}x$ bonbons au début du quatrième jour, il ne restait plus que $\frac{1}{5} \times \frac{1}{24}x = \frac{1}{120}x$ bonbons à la fin du quatrième jour.
Au cinquième jour, on a mangé $\frac{5}{6}$ des bonbons restants. Donc, des bonbons qu'il y avait au début du jour, il n'en reste plus que $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ à la fin du jour.
Puisqu'il y avait $\frac{1}{120}x$ bonbons au début du cinquième jour, il ne restait plus que $\frac{1}{6} \times \frac{1}{120}x = \frac{1}{720}x$ bonbons à la fin du cinquième jour.
Puisqu'il ne reste qu'un seul bonbon, alors $\frac{1}{720}x = 1$, d'où $x = 720$. Donc, il y avait 720 bonbons dans le sac avant le premier jour.

Réponse : (B)

20. Dans le tableau ci-dessous, on dresse la liste des entiers possibles en déterminant leurs chiffres de gauche à droite. Dans chaque cas, on peut déterminer la divisibilité requise soit en effectuant la division ou en utilisant les critères de divisibilité suivants :
– Un entier est divisible par 3 lorsque la somme de tous ses chiffres est divisible par 3.
– Un entier est divisible par 4 lorsque le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.
– Un entier est divisible par 5 lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5.

$8R$	$8RS$	$N = 8RST$
81	812	8120
		8125
	816	8160
		8165
84	840	8400
		8405
	844	8440
		8445
	848	8480
		8485
87	872	8720
		8725
	876	8760
		8765

Dans la première colonne, on remarque que 81, 84 et 87 sont les entiers entre 80 et 89 qui sont des multiples de 3. Dans la deuxième colonne, on détermine les multiples de 4 entre 810 et 819, entre 840 et 849, et entre 870 et 879. Dans la troisième colonne, on ajoute les chiffres des unités

permis, soit 0 ou 5.
Cette analyse démontre qu'il y a 14 valeurs possibles de N.

Réponse : (E)

21. Puisque les trois cubes ont un volume moyen de 700 cm^3, leur volume total est de 3×700 cm^3 ou 2100 cm^3.
Un cube ayant des arêtes de s cm a un volume de s^3 cm^3.
Donc, $3^3 + 12^3 + x^3 = 2100$, d'où $27 + 1728 + x^3 = 2100$ ou $x^3 = 345$.
Puisque $x^3 = 345$, alors $x \approx 7{,}01$, d'où on a donc que 7 est le choix de réponse le plus près.

Réponse : (E)

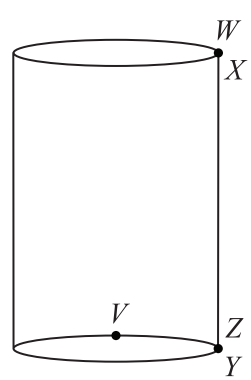
22. Chaque bloc a une hauteur de 2, de 3 ou de 6.
Donc, la hauteur totale d'une tour de quatre blocs est égale à la somme des hauteurs des 4 blocs.
Si les 4 blocs ont un hauteur de 6, alors la hauteur totale est égale à $4 \times 6 = 24$.
Si 3 blocs ont une hauteur de 6, le quatrième bloc a une hauteur de 3 ou de 2.
Donc, les hauteurs possibles sont $3 \times 6 + 3 = 21$ et $3 \times 6 + 2 = 20$.
Si 2 blocs ont une hauteur de 6, les troisième et quatrième blocs ont chacun une hauteur de 3 ou de 2.
Donc, les hauteurs possibles sont $2 \times 6 + 3 + 3 = 18$, $2 \times 6 + 3 + 2 = 17$ et $2 \times 6 + 2 + 2 = 16$.
Si 1 bloc a une hauteur de 6, les deuxième, troisième et quatrième blocs ont chacun une hauteur de 3 ou de 2.
Donc, les hauteurs possibles sont $6 + 3 + 3 + 3 = 15$, $6 + 3 + 3 + 2 = 14$, $6 + 3 + 2 + 2 = 13$ et $6 + 2 + 2 + 2 = 12$.
Si aucun des blocs n'a une hauteur de 6, les hauteurs possibles sont

$$3+3+3+3 = 12, 3+3+3+2 = 11, 3+3+2+2 = 10, 3+2+2+2 = 9, 2+2+2+2 = 8$$

Les hauteurs possibles sont donc $24, 21, 20, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8$.
Il y a 14 hauteurs possibles.

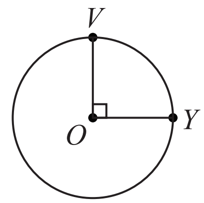
Réponse : (B)

23. Lorsque le cylindre est créé, W touche X tandis que Z touche Y.



Cela signifie que WY est vertical et est donc perpendiculaire au plan de la base circulaire du cylindre.
Cela signifie que le triangle VYW est rectangle en Y.
D'après le théorème de Pythagore, $WV^2 = WY^2 + VY^2$.
Remarquons que WY est égal à la hauteur du rectangle, soit 3 (la longueur de WZ) et que VY est désormais mesuré *à travers* le cylindre et non le long du segment de droite ZY.
Soit O le centre de la base circulaire du cylindre.

Dans le rectangle initial, $ZY = WX = 4$ et $ZV = 3$, d'où $VY = 1 = \frac{1}{4}ZY$.
Cela signifie que V est situé à un quart de la circonférence de la base circulaire en allant de Y à Z.



Donc, $\angle YOV = 90^\circ$ puisque 90° est égal au quart de l'angle plein autour du centre.
Donc, le triangle YOV est rectangle en O.
D'après le théorème de Pythagore, $VY^2 = VO^2 + OY^2$.
Puisque YO et OV sont des rayons de la base circulaire, alors $VO = OY$, d'où $YV^2 = 2VO^2$.
Puisque la base circulaire a une circonférence de 4 (la longueur initiale de ZY), alors si la base a un rayon de r, on a $2\pi r = 4$, d'où $r = \dfrac{4}{2\pi} = \dfrac{2}{\pi}$.
Puisque $VO = r$, alors $YV^2 = 2VO^2 = 2\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^2 = \dfrac{8}{\pi^2}$.
Cela signifie que

$$WV^2 = WY^2 + YV^2 = 9 + \frac{8}{\pi^2} = \frac{9\pi^2 + 8}{\pi^2} = \frac{8 + 9\pi^2}{\pi^2}$$

d'où $WV = \sqrt{\dfrac{8 + 9\pi^2}{1 \cdot \pi^2}}$.
Puisque π^2 a un coefficient de 1 dans le dénominateur, il n'est pas possible de « reduire » davantage les valeurs de a, b et c. On a donc $a = 8$, $b = 9$ et $c = 1$, d'où $a + b + c = 18$.

Réponse : (C)

24. Commençons avec une liste de $66 = 2 \times 33$ éléments. Les éléments aux 33 premières positions

$$1, 2, 3, \ldots, 31, 32, 33$$

subissent un entremêlement et sont placés respectivement aux positions impaires de la nouvelle liste, soit aux positions

$$1, 3, 5, \ldots, 61, 63, 65.$$

Cela signifie qu'un élément à la position x ($1 \leq x \leq 33$) est placé à la position $2x - 1$ après un entremêlement.
On peut constater l'efficacité de cette formule en déplaçant d'abord les éléments aux positions $1, 2, 3, \ldots, 31, 32, 33$ vers les positions paires $2, 4, 6, \ldots, 62, 64, 66$ (doublant ainsi les numéros de position initiales), puis en décalant chacun des éléments d'une position vers l'arrière à

$$1, 3, 5, \ldots, 61, 63, 65$$

De plus, les éléments aux 33 positions suivantes

$$34, 35, 36, \ldots, 64, 65, 66$$

subissent un entremêlement et sont placés respectivement aux positions paires de la nouvelle liste, soit aux positions

$$2, 4, 6, \ldots, 62, 64, 66.$$

Cela signifie qu'un élément à la position x ($34 \leq x \leq 66$) est placé à la position $2(x-33)$ après un entremêlement.
On peut constater l'efficacité de cette formule en décalant chacun des éléments aux positions $34, 35, 36, \ldots, 64, 65, 66$ en arrière de 33 positions, soit aux positions : $1, 2, 3, \ldots, 31, 32, 33$, puis en doublant leurs numéros de position pour obtenir $2, 4, 6, \ldots, 62, 64, 66$.

En résumé, lorsque l'élément à la position x subit un entremêlement, il est placé
– à la position $2x-1$ si $1 \leq x \leq 33$
– à la position $2(x-33)$ si $34 \leq x \leq 66$
Donc, l'entier 47 est déplacé successivement comme suit :

Liste	Position
1	47
2	$2(47-33) = 28$
3	$2(28) - 1 = 55$
4	$2(55-33) = 44$
5	$2(44-33) = 22$
6	$2(22) - 1 = 43$
7	$2(43-33) = 20$
8	$2(20) - 1 = 39$
9	$2(39-33) = 12$
10	$2(12) - 1 = 23$
11	$2(23) - 1 = 45$
12	$2(45-33) = 24$
13	$2(24) - 1 = 47$

Comme l'entier 47 revient à la position 47 dans la liste 13, cela signifie que ses positions vont se répéter selon un cycle de longueur 12 :

$$47, 28, 55, 44, 22, 43, 20, 39, 12, 23, 45, 24$$

car la position vers laquelle un entier se déplace est entièrement déterminée par sa position précédente. Ainsi, la liste se répétera aussitôt qu'une position se répète.
On remarque que l'entier 47 est à la position 24 dans chaque 12^e^ liste en commençant par la 12^e^ liste.
Puisque $12 \times 83 = 996$ et $12 \times 84 = 1008$, le cycle se répète 83 fois et donc l'entier 47 est en 24^e^ position dans 83 listes. Même si un 84^e^ cycle débute, ce cycle ne se termine par et donc 47 ne parait pas en 24^e^ position pour une 84^e^ fois parmi les 1001 listes.

Réponse : (C)

25. Après que Yann ait supprimé 4 des n entiers de sa liste, la liste ne contient plus que $n-4$ entiers.
Supposons que les $n-4$ entiers restants ont une somme de T.
Ces $n-4$ entiers one une moyenne de $89{,}5625 = 89{,}5 + 0{,}0625 = 89 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 89\frac{9}{16} = \frac{1433}{16}$.
Puisque les $n-4$ entiers ont une somme de T, alors $\frac{T}{n-4} = \frac{1433}{16}$, d'où $16T = 1433(n-4)$.
Puisque 1433 et 16 n'ont aucun diviseur commun supérieur à 1 (les diviseurs positifs de 16 sont 1, 2, 4, 8, 16, dont aucun autre que 1 n'est un diviseur de 1433), la valeur de $n-4$ est un multiple de 16.

Puisque $100 < p < q < r < s$, la liste initiale comprend plus de 100 nombres.
Puisque la liste initiale comprend des entiers consécutifs commençant à 1 et que seuls 4 nombres

sur plus de 100 sont supprimés, il semble probable que la moyenne de la liste initiale et la moyenne de la nouvelle liste soient assez rapprochées.
Puisque la nouvelle liste a une moyenne de 89,5625 (ce qui est près de 90), on peut suggérer avec grande confiance que la moyenne de la liste initiale est près de 90.
Puisque la liste initiale d'entiers strictement positifs commence à 1, alors on peut supposer que la liste initiale contient environ 180 entiers.
Autrement dit, n semblerait être près de 180.
On sait que $n-4$ est un multiple de 16. Les multiples de 16 les plus près de 180 sont 160, 176 et 192, ce qui correspond à $n = 164$, $n = 180$ et $n = 196$.

Supposons que $n = 180$, ce qui semble être la possibilité la plus probable. On montrera à la fin de la solution que celle-ci est la seule valeur possible de n.
À partir de l'équation $\dfrac{T}{n-4} = 89{,}5625$ on obtient $T = 176 \times 89{,}5625 = 15\,763$.
Les n entiers de la liste initiale ont une somme de

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Lorsque $n = 180$, les entiers $1, 2, 3, \ldots, 178, 179, 180$ ont une somme de $\frac{1}{2}(180)(181) = 16\,290$.
Puisque les nombres de la liste initiale ont une somme de 16 290 tandis que ceux de la liste ne contenant plus que $n-4$ entiers ont une somme de 15 763, les quatre entiers supprimés ont une somme de $16\,290 - 15\,763 = 527$.
Autrement dit, $p + q + r + s = 527$.

On veut déterminer le nombre de façons dont on peut choisir p, q, r, s tels que

$$100 < p < q < r < s \leq 180$$

que $p + q + r + s = 527$ et qu'au moins trois parmi les entiers p, q, r, s soient consécutifs.
Le quatrième de ces entiers est au moins 101 et au plus 180, ce qui signifie que la somme des trois entiers consécutifs est supérieure ou égale à $527 - 180 = 347$ et inférieure ou égale à $527 - 101 = 426$.
Cela signifie que les entiers consécutifs sont au moins $115, 116, 117$ (dont la somme est de 348) puisque $114 + 115 + 116 = 345$ (ce qui est trop petit et des entiers inférieurs à ces derniers auront des sommes encore plus petites).
Si p, q et r égalent 115, 116 et 117, alors $s = 527 - 348 = 179$.
Les entiers consécutifs sont au plus $141, 142, 143$ (dont la somme est de 426) puisque la somme $142 + 143 + 144 = 429$ (ce qui est trop grand et des entiers supérieurs à ces derniers auront des sommes encore plus grandes).
Si p, q, et r égalent 141, 142 et 143, alors $s = 527 - 426 = 101$.
Si l'on augmente chacun des trois entiers consécutifs de 1, on peut maintenir une somme constante en diminuant le quatrième entier de 3.
De tout cela, on obtient les listes p, q, r, s suivantes :

$$115, 116, 117, 179 \quad ; \quad 116, 117, 118, 176 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad 130, 131, 132, 134$$

$$128, 132, 133, 134 \quad ; \quad 125, 133, 134, 135 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad 101, 141, 142, 143$$

Remarquez qu'on ne peut utiliser 131, 132, 133, 131, puisque p, q, r, s doivent être distincts.
Il y a 26 listes d'entiers que l'on peut supprimer (16 dans le premier ensemble et 10 dans le

second ensemble).
Les valeurs correspondantes de s sont :

$$179, 176, 173, 170, 167, 164, 161, 158, 155, 152, 149, 146, 143, 140, 137, 134$$

$$134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143$$

Puisque les deux listes ont 4 valeurs de s en commun, alors il y a $26 - 4 = 22$ valeurs possibles de s.

Pourquoi $n = 180$ est-elle la seule valeur possible de n ?
Pour le voir, on utilise le fait que la moyenne d'une liste d'entiers consécutifs commençant par a et se terminant par b est égale à la moyenne de a et b, ou $\frac{a+b}{2}$. (Cela est vrai car les entiers de la liste ont une différence constante et sont donc uniformément répartis, ce qui signifie que la moyenne des premier et dernier entiers sera égale à la moyenne de tous les entiers de la liste.)
La liste initiale d'entiers est $1, 2, \dots, n-1, n$. Ces derniers ont une moyenne de $\frac{n+1}{2}$.
Si l'on supprime les quatre entiers les plus grands de la liste, les entiers de la nouvelle liste sont $1, 2, \dots, n-5, n-4$, dont la moyenne est de $\frac{n-3}{2}$.
Si l'on supprime les quatre entiers les plus petits de la liste, les entiers de la nouvelle liste sont $5, 6, \dots, n-1, n$, dont la moyenne est de $\frac{n+5}{2}$.
Si l'on supprime n'importe quels quatre entiers de la liste, la somme des entiers restants est supérieure ou égale à celle des entiers $1, 2, \dots, n-5, n-4$ et inférieur ou égale à celle des entiers $5, 6, \dots, n-1, n$. Puisque le dénominateur dans le calcul de la moyenne demeure constant, alors n'importe quelle liste dont on a supprimé les quatre entiers a une moyenne supérieure ou égale à $\frac{n-3}{2}$ et inférieure ou égale à $\frac{n+5}{2}$.

Cela signifie que la vraie moyenne (soit 89,5625) est supérieure ou égale à $\frac{n-3}{2}$ et inférieure ou égale à $\frac{n+5}{2}$.

Puisque $89{,}5625 \geq \frac{n-3}{2}$, alors $n - 3 \leq 179{,}125$, d'où $n \leq 182{,}125$.

Puisque $89{,}5625 \leq \frac{n+5}{2}$, alors $n + 5 \geq 179{,}125$, d'où $n \geq 174{,}125$.

Puisque n est un entier, alors $175 \leq n \leq 182$, d'où $171 \leq n - 4 \leq 178$.
Puisque $n - 4$ est un multiple de 16, alors $n - 4 = 176$, d'où $n = 180$, ce qu'il fallait démontrer.

RÉPONSE : 22

(La bonne réponse ne figurait pas parmi les choix de réponse de la version initiale du problème.)

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2020

(9e année – Secondaire III)

le mardi 25 février 2020

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 26 février 2020

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. La figure comprend 5 groupes de 5 carrés chacun.
Donc, il y a $5 \times 5 = 25$ carrés en tout.

Réponse : (E)

2. On a : $0{,}8 + 0{,}02 = 0{,}80 + 0{,}02 = 0{,}82$.

Réponse : (C)

3. *Solution 1*
Puisque $2x + 6 = 16$, alors $\dfrac{2x+6}{2} = \dfrac{16}{2}$, d'où $x + 3 = 8$.
Puisque $x + 3 = 8$, alors $x + 4 = (x + 3) + 1 = 8 + 1 = 9$.

Solution 2
Puisque $2x + 6 = 16$, alors $2x = 16 - 6 = 10$.
Puisque $2x = 10$, alors $\dfrac{2x}{2} = \dfrac{10}{2}$, d'où $x = 5$.
Puisque $x = 5$, alors $x + 4 = 5 + 4 = 9$.

Réponse : (C)

4. Les couples de diviseurs positifs de 24 sont :

1 et 24 2 et 12 3 et 8 4 et 6

Parmi ces couples, 3 et 8 sont les entiers strictement positifs dont la somme est 11.
Ces deux entiers strictement positifs ont une différence de $8 - 3 = 5$.

Réponse : (D)

5. *Solution 1*
Puisque le triangle a des côtés de longueurs $x - 1$, $x + 1$ et 7, alors son périmètre est égal à $(x - 1) + (x + 1) + 7$ ou $2x + 7$.
Puisque $x = 10$, le périmètre est égal à $2 \times 10 + 7$, soit 27.

Solution 2
Puisque $x = 10$, le triangle a des côtés de longueurs $x - 1 = 9$, $x + 1 = 11$ et 7.
Le périmètre du triangle est donc égal à $9 + 11 + 7$, soit 27.

Réponse : (D)

6. On remarque que $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ et que $2^4 = 2^3 \times 2 = 16$.
Donc, $\dfrac{2^4 - 2}{2^3 - 1} = \dfrac{16 - 2}{8 - 1} = \dfrac{14}{7} = 2$.
Par ailleurs, $\dfrac{2^4 - 2}{2^3 - 1} = \dfrac{2(2^3 - 1)}{2^3 - 1} = 2$.

Réponse : (E)

7. La suite d'Ewan commence par 3 et chaque nombre subséquent est 11 de plus que le nombre précédent.
Puisque chaque nombre dans la suite est égal à un multiple de 11 de plus que 3, alors, par la commutativité, chaque nombre dans la suite est 3 de plus qu'un multiple de 11. De plus, chaque tel entier strictement positif parait dans la suite d'Ewan.
Puisque $110 = 11 \times 10$ est un multiple de 11, alors $113 = 110 + 3$ est 3 de plus qu'un multiple de 11 et parait donc dans la suite d'Ewan.

Par ailleurs, on peut dresser la liste des termes de la suite d'Ewan de manière à atteindre la fourchette dans laquelle sont situés les choix de réponse :

$$3, 14, 25, 36, 47, 58, 69, 80, 91, 102, 113, 124, \ldots$$

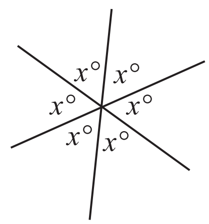
Réponse : (A)

8. Selon le graphique, Mathilde a vu 6 chardonnerets, 9 moineaux et 5 quiscales.
En tout, elle a vu $6 + 9 + 5 = 20$ oiseaux.
Donc, le pourcentage des oiseaux qui étaient des chardonnerets est égal à

$$\frac{6}{20} \times 100 \ \% = \frac{3}{10} \times 100 \ \% = 30 \ \%$$

Réponse : (C)

9. Puisque deux angles opposés par le sommet ont la même mesure, alors chacun des six angles qui forment l'angle plein au centre a une mesure de x°.



Sachant que l'angle plein au centre mesure 360°, alors $6 \times x^\circ = 360^\circ$.
Donc, $6x = 360$, d'où $x = 60$.

Réponse : (C)

10. Jorge a commencé à regarder une série de trois films à 13 heures.
Le premier film a duré 2 heures et 20 minutes et s'est donc terminé à 15 h 20.
Jorge a ensuite pris une pause de 20 minutes. Sa pause s'est donc terminée à 15 h 40.
Jorge a ensuite regardé le deuxième film dont la durée était de 1 heure et 45 minutes.
Après avoir regardé ce film pendant 20 minutes, il est 16 heures et il reste encore 1 heure et 25 minutes du film à regarder. Le deuxième film s'est donc terminé à 17 h 25.
Jorge a ensuite pris une pause de 20 minutes. Sa pause s'est donc terminée à 17 h 45.
Enfin, Jorge a regardé le troisième film dont la durée était de 2 heures et 10 minutes.
Ce dernier film s'est terminé à 19 h 55.

Réponse : (D)

11. Puisque 12 et 21 sont des multiples de 3 ($12 = 4 \times 3$ et $21 = 7 \times 3$), donc ni (A) ni (D) n'est le bon choix de réponse.
16 est un carré parfait ($16 = 4 \times 4$) donc (C) n'est pas le bon choix de réponse.
Les chiffres de 26 ont une somme de 8. Ce dernier n'étant pas un nombre premier, (E) n'est donc pas le bon choix de réponse.
Puisque 14 n'est pas un multiple de trois, puisqu'il n'est pas un carré parfait et puisque la somme de ses chiffres est égale à un nombre premier ($1 + 4 = 5$), alors (B) est le bon choix de réponse.

Réponse : (B)

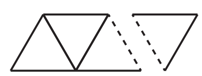
12. Puisque la moyenne des trois tailles est de 171 cm, ces trois tailles ont une somme de 3×171 cm, soit 513 cm.
Puisque Jiayin a une taille de 161 cm, alors Nathalie et Harpreet doivent avoir des tailles dont la somme est de 513 cm $-$ 161 cm $=$ 352 cm.
Puisque Harpreet et Nathalie sont de même taille, chacun d'eux a donc une taille de $\dfrac{352 \text{ cm}}{2}$ ou 176 cm.
Donc, Nathalie a une taille de 176 cm.

Réponse : (C)

13. Puisque le rapport du nombre de pommes au nombre de bananes est de 3 : 2, on représente respectivement les nombres de pommes et de bananes par $3n$ et $2n$, n étant un entier strictement positif quelconque.
Donc, le nombre total de pommes et de bananes est égal à $3n + 2n = 5n$. On remarque que ce dernier est un multiple de 5.
Parmi les choix de réponse, seul (E) 72 n'est pas un multiple de 5 et ne peut donc pas être égal au nombre total de pommes et de bananes.
(Chacun des autres choix de réponse est un multiple de 5 et peut être obtenu en choisissant la valeur appropriée de n.)

Réponse : (E)

14. La première figure comprend une seule tuile et a un périmètre de 3×7 cm $= 21$ cm.
À chaque fois que l'on ajoute une tuile, le périmètre de la figure augmente de 7 cm (soit la longueur d'un côté d'une tuile) car un des côtés de la nouvelle tuile recouvre un côté de la figure précédente et les longueurs de deux côtés de la nouvelle tuile sont ajoutées au périmètre total pour une augmentation nette d'une seule longueur de côté (ou 7 cm).



Puisque la première figure a un périmètre de 21 cm et qu'on veut créer la figure dont le périmètre est de 91 cm, le périmètre doit donc augmenter de 91 cm $-$ 21 cm $=$ 70 cm.
Puisque le périmètre augmente de 7 cm à chaque fois que l'on ajoute une tuile, on doit donc ajouter $\dfrac{70 \text{ cm}}{7 \text{ cm/tile}} = 10$ tuiles afin de créer la figure dont le périmètre est de 91 cm.
En tout, cette figure comprendra $1 + 10 = 11$ tuiles.

Réponse : (B)

15. L'aire totale des régions ombrées est égale à la somme de l'aire du petit carré (9) et de l'aire de la région située entre le grand carré et le carré moyen.
Puisque le grand carré a une aire de 49 et que le carré moyen a une aire de 25, alors la région située entre le grand carré et le carré moyen a une aire égale à $49 - 25 = 24$.
Donc, l'aire totale des régions ombrées est égale à $9 + 24 = 33$.

Réponse : (A)

16. On développe chacune des expressions des cinq choix de réponse :
(A) $3(x+2) = 3x+6$
(B) $\dfrac{-9x-18}{-3} = \dfrac{-9x}{-3} + \dfrac{-18}{-3} = 3x+6$
(C) $\dfrac{1}{3}(3x) + \dfrac{2}{3}(9) = x+6$
(D) $\dfrac{1}{3}(9x+18) = 3x+6$
(E) $3x - 2(-3) = 3x + (-2)(-3) = 3x+6$
L'expression qui n'est pas équivalente à $3x+6$ est celle de (C).

Réponse : (C)

17. Puisqu'il y a deux prix possibles que Jamie peut gagner et que les deux sont équiprobables, la probabilité que Jamie gagne 30 \$ est de $\frac{1}{2}$ et la probabilité que Jamie gagne 40 \$ est de $\frac{1}{2}$.
Si Jamie gagne 30 \$, Ben doit gagner 20 \$ afin que la somme de leurs prix soit égale à 50 \$. La probabilité que Ben gagne 20 \$ est de $\frac{1}{3}$ car le tirage au sort auquel il participe a trois résultats équiprobables.
Si Jamie gagne 40 \$, Ben doit gagner 10 \$ afin que la somme de leurs prix soit égale à 50 \$. La probabilité que Ben gagne 10 \$ est de $\frac{1}{3}$.
Puisque Ben et Jamie participent à deux tirages au sort différents, on peut supposer que les résultats sont indépendants, donc la probabilité que Jamie gagne 30 \$ et que Ben gagne 20 \$ est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
De même, la probabilité que Jamie gagne 40 \$ et que Ben gagne 10 \$ est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
Donc, la probabilité que leurs prix aient une somme de 50 \$ est égale à $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Réponse : (B)

18. Puisque la racine carrée de n est située entre 17 et 18, alors n est situé entre $17^2 = 289$ et $18^2 = 324$.
Puisque n est un multiple de 7, on doit compter le nombre de multiples de 7 entre 289 et 324.
Puisque $41 \times 7 = 287$ et $42 \times 7 = 294$, alors 294 est le plus petit multiple de 7 qui est supérieur à 289.
Puisque $46 \times 7 = 322$ et $47 \times 7 = 329$, alors 322 est le plus grand multiple de 7 qui est inférieur à 324.
Cela signifie que les multiples de 7 situés entre 289 et 324 sont : $42 \times 7 = 294$, $43 \times 7 = 301$, $44 \times 7 = 308$, $45 \times 7 = 315$ et $46 \times 7 = 322$. On a donc 5 tels multiples.
(Par ailleurs, on remarque qu'on aurait pu déterminer qu'il y avait 5 tels multiples en calculant $46 - 42 + 1$, d'où on obtient 5.)
Donc, il y a 5 valeurs possibles de n.

Réponse : (D)

19. Chaque carte appartient à exactement une des catégories suivantes :
(A) lettre minuscule d'un côté, entier pair de l'autre côté
(B) lettre minuscule d'un côté, entier impair de l'autre côté
(C) lettre majuscule d'un côté, entier pair de l'autre côté
(D) lettre majuscule d'un côté, entier impair de l'autre côté
Selon l'énoncé,

> « Si une carte a une face qui contient une lettre minuscule, l'autre face doit contenir un entier impair. »

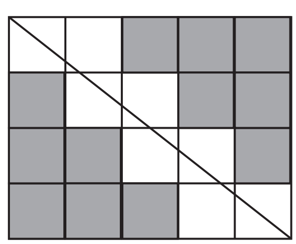
Si une carte appartient à la catégorie (B), (C) ou (D), elle ne va pas à l'encontre de l'énoncé. L'énoncé est donc vrai. Par contre, si une carte appartient à la catégorie (A), elle va à l'encontre de l'énoncé.
Par conséquent, il faut retourner toute carte qui pourrait appartenir à la catégorie (A). Des cartes données,
(i) 1 carte contient une lettre minuscule et pourrait appartenir à la catégorie (A),
(ii) 4 cartes contiennent chacune une lettre majuscule et n'appartiennent pas à la catégorie (A),
(iii) 2 cartes contiennent chacune un entier pair et pourraient appartenir à la catégorie (A) et
(iv) 8 cartes contiennent chacune un entier impair et n'appartiennent pas à la catégorie (A).
Afin de vérifier la véracité de l'énoncé, il faut retourner les 3 cartes dans (i) et (iii).

Réponse : (E)

20. Le cube $5 \times 5 \times 5$ initial a 6 faces dont chacune est de dimensions 5×5.
Lorsqu'on enlève les trois colonnes centrales du cube, un carré 1×1 disparait de chaque face du cube initial.
Cela signifie que l'aire de chaque face diminue de 1, soit $5 \times 5 - 1 = 24$. Donc, les 6 faces extérieures du cube ont une aire totale de $6 \times 24 = 144$.
Lorsqu'on enlève chacune des trois colonnes centrales du cube, on crée un « tube » de 5 cubes de long. Chacun de ces tubes est de dimensions $5 \times 1 \times 1$.
Puisque le cube central du cube $5 \times 5 \times 5$ initial est enlevé lorsqu'on enlève chacune des trois colonnes centrales, cela signifie que l'on peut séparer chacun des trois tubes $5 \times 1 \times 1$ en deux tubes de dimensions $2 \times 1 \times 1$.
L'aire latérale intérieure de chacun de ces tubes est composée de quatre faces dont chacune est de dimensions 2×1. (On pourrait aussi penser à la surface extérieure d'un prisme droit à base rectangulaire de dimensions $2 \times 1 \times 1$ tout en ignorant ses extrémités carrées.) Donc, l'aire latérale intérieure totale de 6 tubes ayant chacun 4 faces de dimensions 2×1 est égale à $6 \times 4 \times 2 \times 1 = 48$.
En tout, le solide a une aire totale de $144 + 48 = 192$.

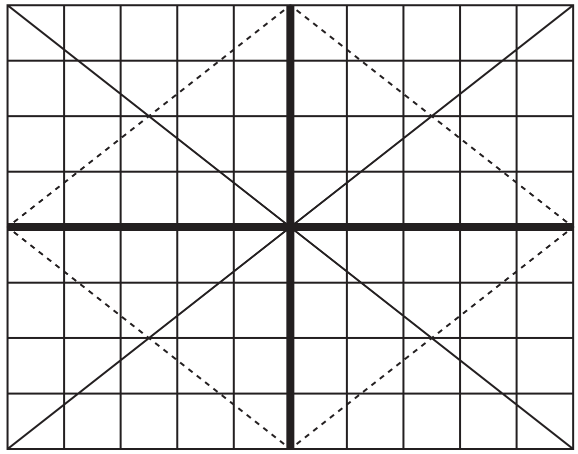
Réponse : (E)

21. Si on enlève une des deux diagonales du quadrillage 4×5, on remarque que 8 carrés sont traversés par l'autre diagonale tandis que 12 carrés ne le sont pas.



Le résultat est le même quelle que soit la diagonale que l'on enlève.

On peut construire un quadrillage 8×10 qui comprend deux diagonales à l'aide de quatre tels quadrillages 4×5 :



Lorsqu'on réunit les quatre quadrillages 4×5, on peut aligner leurs diagonales de manière à former les diagonales du quadrillage 8×10.
Dans chacun des quatre quadrillages 4×5, 12 des carrés 1×1 ne sont traversés par aucune des diagonales.
En tout, on a $4 \times 12 = 48$ carrés 1×1 qui ne sont traversés par aucune des diagonales.

Réponse : (D)

22. Puisque le point R est situé sur PQ, alors $PQ = PR + QR = 6 + 4 = 10$.
Les demi-cercles de diamètres 10, 6 et 4 sont respectivement de rayons 5, 3 et 2.
Un demi-cercle de diamètre PQ a une aire de $\frac{1}{2} \times \pi \times 5^2 = \frac{25}{2}\pi$.
Un demi-cercle de diamètre PR a une aire de $\frac{1}{2} \times \pi \times 3^2 = \frac{9}{2}\pi$.
Un demi-cercle de diamètre QR a une aire de $\frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 2\pi$.
La région ombrée est composée de deux sections dont une est à gauche de PQ et l'autre à droite de PQ.
La section à gauche de PQ a une aire égale à l'aire du demi-cercle de diamètre PQ moins l'aire du demi-cercle de diamètre PR.
La section à gauche de PQ a donc une aire égale à $\frac{25}{2}\pi - \frac{9}{2}\pi = 8\pi$.
La section à droite de PQ a une aire égale à l'aire du demi-cercle de diamètre QR.
La section à droite de PQ a donc une aire égale à 2π.
En tout, la région ombrée a donc une aire de $8\pi + 2\pi = 10\pi$.
Puisque le grand cercle a un rayon de 5, son aire est égale à $\pi \times 5^2 = 25\pi$.
Puisque la région ombrée a une aire de 10π, alors l'aire de la région non ombrée est égale à $25\pi - 10\pi = 15\pi$.
Le rapport de l'aire de la région ombrée à l'aire de la région non ombrée est égal à $10\pi : 15\pi$, ce qui est équivalent à $2 : 3$.

Réponse : (B)

23. Puisque 4 joueurs participent au tournoi de dames et que chaque joueur joue contre chacun des autres joueurs une seule fois, alors chaque joueur joue 3 matchs.

Puisque chaque victoire rapporte 5 points et chaque match nul rapporte 2 points, voici les résultats possibles pour chaque joueur :

- 3 victoires, 0 défaite, 0 match nul : 15 points
- 2 victoires, 0 défaite, 1 match nul : 12 points
- 2 victoires, 1 défaite, 0 match nul : 10 points
- 1 victoire, 0 défaite, 2 matchs nuls : 9 points
- 1 victoire, 1 défaite, 1 match nul : 7 points
- 1 victoire, 2 défaites, 0 match nul : 5 points
- 0 victoire, 0 défaite, 3 matchs nuls : 6 points
- 0 victoire, 1 défaite, 2 matchs nuls : 4 points
- 0 victoire, 2 défaites, 1 match nul : 2 points
- 0 victoire, 3 défaites, 0 match nul : 0 point

Dans le troisième tableau des pointages finaux proposés, on voit que Deb a 2 points. Cela signifie qu'elle a fait 1 match nul. Si un joueur a fait match nul, alors un autre joueur a dû aussi faire match nul. Or, on ne peut obtenir 5 points ou 15 points comme pointages finaux s'il y eut un match nul. Donc, le troisième tableau n'est pas possible.

De même, Ali a 12 points dans le quatrième tableau et a donc fait 1 match nul. Or, on ne peut obtenir 0 point, 5 points ou 10 points comme pointages finaux s'il y eut un match nul. Donc, le quatrième tableau n'est pas possible.

Dans le deuxième tableau, Che et Deb ont chacun fait 2 matchs nuls. Puisque Che et Deb ne se sont affrontés qu'une seule fois, alors chacun d'eux a dû faire match nul contre un autre joueur. Or, cela n'est pas possible car, ayant 10 points chacun, ni Ali ni Bea n'ont fait match nul. Par conséquent, le deuxième tableau n'est pas possible.

Le premier tableau est possible :

Résultat	Ali	Bea	Che	Deb
Ali gagne contre Bea	5 points	0 point		
Ali gagne contre Che	5 points		0 point	
Ali gagne contre Deb	5 points			0 point
Bea et Che font match nul		2 points	2 points	
Bea gagne contre Deb		5 points		0 point
Che et Deb font match nul			2 points	2 points
TOTAL	15 points	7 points	4 points	2 points

Donc, parmi les quatre pointages finaux proposés, un seul est possible.

Réponse : (B)

24. Si Lucas ne choisit qu'un seul nombre, on a 8 sommes possibles (soit les 8 nombres eux-mêmes : 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81).

Pour compter le nombre de sommes supplémentaires à inclure lorsque Lucas choisit deux nombres, on crée un tableau en ajoutant le nombre dans la colonne au nombre dans la rangée quand il est inférieur au nombre dans la rangée (on n'a pas besoin d'ajouter les nombres dans les deux sens ou d'ajouter un nombre à lui-même) :

+	2	5	7	12	19	31	50	81
2		7	9	14	21	33	52	83
5			12	17	24	36	55	86
7				19	26	38	57	88
12					31	43	62	93
19						50	69	100
31							81	112
50								131
81								

On remarque deux choses dans le tableau. Dans un premier temps, à chaque fois qu'on ajoute deux nombres consécutifs de la liste initiale dont la somme n'est pas trop grande, on obtient un autre nombre de la liste. On ne considère pas ce nombre comme étant une nouvelle somme car on l'a déjà pris en compte précédemment comme la somme d'un seul nombre. Dans un deuxième temps, les sommes restantes sont toutes distinctes et il y a 20 sommes supplémentaires qui sont inférieures ou égales à 100.

Enfin, on considère les sommes formées de trois nombres de la liste.
Dans ce cas, la propriété que la somme de deux nombres consécutifs de la liste est égale au nombre suivant de la liste devient très importante.
Si les trois nombres choisis sont trois nombres consécutifs de la liste et que leur somme n'est pas trop grande, il s'avère que cette somme est égale à la somme de deux nombres de la liste car, des trois nombres, les deux les plus grands peuvent être combinés en un nombre encore plus grand de la liste.
Par exemple, $5 + 7 + 12 = 5 + (7 + 12) = 5 + 19$, qui a déjà été pris en compte.
Si deux des trois nombres choisis sont consécutifs dans la liste, la même chose se produit. Par exemple, $12 + 19 + 50 = (12 + 19) + 50 = 31 + 50$ et $2 + 31 + 50 = 2 + (31 + 50) = 2 + 81$.
Donc, à ce point, toute somme supplémentaire doit provenir de trois nombres dont aucun n'est consécutif à un autre.
On compte ces cas individuellement et séquentiellement, sachant qu'on ne cherche que les sommes inférieures à 100 et qu'on ne peut inclure des nombres consécutifs de la liste :

- $2 + 7 + 19 = 28$; $2 + 7 + 31 = 40$; $2 + 7 + 50 = 59$; $2 + 7 + 81 = 90$
- $2 + 12 + 31 = 45$; $2 + 12 + 50 = 64$; $2 + 12 + 81 = 95$
- $2 + 19 + 50 = 71$
- $5 + 12 + 31 = 48$; $5 + 12 + 50 = 67$; $5 + 12 + 81 = 98$
- $5 + 19 + 50 = 74$
- $7 + 19 + 50 = 76$

Toute autre combinaison de 3 entiers de la liste comprend soit 2 nombres consécutifs (et donc a déjà été pris en compte), soit 81 et l'un de 31 ou 19 (ce qui est donc trop grand).
Dans ce cas, il y a 13 sommes supplémentaires.

En réunissant les trois cas, on a $8+20+13 = 41$ sommes distinctes qui sont inférieures ou égales à 100.

Réponse : (E)

25. Avant de commencer notre solution, on considère les faits suivants quant aux nombres premiers et aux factorisations premières :

F1. Le « théorème fondamental de l'arithmétique » s'énonce ainsi : Tout entier strictement positif supérieur à 1 peut être écrit comme un produit de nombres premiers d'une unique façon. (Si l'entier strictement positif est lui-même premier, ce produit n'est constitué que du nombre premier.) On voit ce théorème de manière implicite lorsqu'on crée l'arbre de facteurs pour un entier quelconque. Par exemple, 1500 est égal à $2^2 \times 3^1 \times 5^3$ et il n'existe aucune autre factorisation de 1500 sous forme de produits de nombres premiers. De plus, la factorisation première d'un nombre demeure inchangée même si l'on réorganise ses facteurs premiers dans un ordre différent.

F2. Si n est un entier strictement positif et d est un entier strictement positif qui est un diviseur de n, alors les seuls facteurs premiers possibles de d sont ceux de n. Par exemple, si d est un diviseur positif de $n = 1500$, alors les seuls facteurs premiers possibles de d sont 2, 3 et 5. Cela signifie, par exemple, que d n'est pas divisible par 7, par 11 ou par tout autre nombre premier qui n'est pas 2, 3 ou 5. d peut ou non être divisible par chacun des suivants : 2, 3 ou 5.

F3. Si n est un entier strictement positif, d est un entier strictement positif qui est un diviseur de n, et p est un facteur premier de n et de d, alors p ne peut diviser d « plus de fois » qu'il ne divise n. Par exemple, si d est un diviseur positif de $n = 1500 = 2^2 \times 3^1 \times 5^3$ qui est divisible par 5, alors d peut être divisible par 5 ou par 5^2 ou par 5^3 mais ne peut pas être divisible par 5^4 ou par 5^5 ou par quelconque puissance de 5 qui serait supérieure à ces derniers.

F4. Un entier strictement positif m supérieur à 1 est un carré parfait lorsque chaque puissance première de sa factorisation première a un exposant pair. Par example, $n = 1500 = 2^2 \times 3^1 \times 5^3$ n'est pas un carré parfait mais $m = 22500 = 2^2 \times 3^2 \times 5^4$ l'est. Ceci est vrai car si m est un carré parfait, alors $m = r^2$ (r étant un entier strictement positif quelconque) d'où on peut écrire la factorisation première de m en écrivant la factorisation première de r deux fois. Par exemple, si $r = 150 = 2^1 \times 3^1 \times 5^2$, alors $m = 2^1 \times 3^1 \times 5^2 \times 2^1 \times 3^1 \times 5^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^4$. De plus, si la factorisation première de m comprend une puissance première avec un exposant impair, alors ces nombres premiers ne peuvent pas être répartis de manière égale entre deux groupes égaux dont chacun représente la racine carrée de m ; ce qui signifierait que $\sqrt{m}$ n'est pas un entier.

F5. Une méthode pour trouver le plus grand commun diviseur (pgcd) de deux entiers strictement positifs n et t consiste à écrire la factorisation première des deux et de créer un nouvel entier d (le pgcd) qui est le produit des plus grandes puissances premières communes que n et t admettent comme diviseurs. Par exemple, si $n = 1500 = 2^2 \times 3^1 \times 5^3$ et $t = 7000 = 2^3 \times 5^3 \times 7^1$, alors le plus grand commun diviseur de n et de t est égal à $2^2 \times 5^3 = 500$. On justifie cette méthode à l'aide de l'information présentée dans F2 (puisque d est un diviseur de n et de t, il n'admet que des facteurs premiers qui sont communs aux deux) et dans F3 (puisque d ne peut comprendre une puissance première qui est trop grande si n et t doivent l'admettre tous les deux comme diviseur).

On peut maintenant commencer la solution.

Soit $(205\,800, 35k)$ un couple heureux.

On écrit la factorisation première de 205 800 :

$$\begin{aligned} 205\,800 &= 2058 \times 100 \\ &= 2 \times 1029 \times (2 \times 5)^2 \\ &= 2 \times 3 \times 343 \times 2^2 \times 5^2 \\ &= 2 \times 3 \times 7^3 \times 2^2 \times 5^2 \\ &= 2^3 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^3 \end{aligned}$$

On remarque aussi que $35k = 5^1 \times 7^1 \times k$.
Soit d le plus grand commun diviseur de 205 800 et $35k$.
On veut déterminer le nombre de valeurs possibles de $k \leq 2940$ pour lesquelles d est un carré parfait.
Puisque 5 et 7 sont chacun des diviseurs premiers de 205 800 et $35k$, alors 5 et 7 sont aussi des diviseurs premiers de d (F5).
Afin que d soit un carré parfait, 5 et 7 doivent tous les deux diviser d un nombre pair de fois (F4).
Puisque les puissances premières de 5 et de 7 dans la factorisation première de 205 800 sont respectivement 5^2 et 7^3, alors afin que d soit un carré parfait, 5^2 et 7^2 doivent tous les deux être des facteurs de d.
Puisque $d = 5 \times 7 \times k$, alors $k = 5 \times 7 \times j = 35j$, j étant un entier strictement positif quelconque.
Puisque $k \leq 2940$, alors $35j \leq 2940$, d'où $j \leq 84$.
On sait donc que d est le pgcd de $2^3 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^3$ et $5^2 \times 7^2 \times j$.
Quelles informations supplémentaires cela nous donne-t-il sur j ?

- j n'est pas divisible par 3, sinon d admettrait 3^1 comme facteur (puisque 205 800 et $35k$ seraient tous les deux divisibles par 3) et ne pourrait admettre 3^2 comme facteur (car 205 800 ne l'admet pas non plus) ce qui voudrait dire que d n'est pas un carré parfait.
- j n'est pas divisible par 7, sinon d admettrait 7^3 comme facteur et non une plus grande puissance de 7, dans ce cas d ne serait pas un carré parfait.
- Si j est divisible par 2, alors la factorisation première de j doit comprendre 2^2. Autrement dit, la factorisation première de j ne peut comprendre 2^1 ou 2^3.
- j est divisible par 5 car, même si c'est le cas, la puissance de 5 dans d est déjà limitée par la puissance de 5 dans 205 800.
- j est divisible par des nombres premiers autres que 2, 3, 5 ou 7 puisque 205 800 ne l'est pas et donc le pgcd ne sera pas affecté.

Finalement, on considère deux cas : j est divisible par 2^2 mais non par une plus grande puissance de 2, et j n'est pas divisible par 2.

1^er^ cas : j est divisible par 2^2 mais non par une plus grande puissance de 2

Dans ce cas, $j = 2^2h = 4h$, h étant un entier impair strictement positif quelconque.
Puisque $j \leq 84$, alors $4h \leq 84$, d'où $h \leq 21$.
Sachant que j n'est pas divisible par 3 ou par 7, cela signifie que les valeurs possibles de h sont $1, 5, 11, 13, 17, 19$.
Chacune de ces valeurs de h produit une valeur de j qui remplit les cinq conditions dans la liste ci-dessus.
Il y a donc 6 valeurs de j dans ce cas.

2^e^ cas : j n'est pas divisible par 2

Dans ce cas, j est impair.
Sachant que j n'est pas divisible par 3 ou par 7 et que $j \leq 84$, cela signifie que les valeurs possibles de j sont :

$$1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 55, 59, 61, 65, 67, 71, 73, 79, 83$$

Il y a donc 24 valeurs de j dans ce cas.

En tout, il y a 30 valeurs de j et donc 30 valeurs possibles de $k \leq 2940$ pour lesquelles $(205\,800, 35k)$ est un couple heureux.

Réponse : (D)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2019

(9e année – Secondaire III)

le mardi 26 février 2019
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 27 février 2019
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On évalue afin d'obtenir $2 \times 3 + 2 \times 3 = 6 + 6 = 12$.

Réponse : (D)

2. Puisqu'un carré a quatre côtés égaux, la longueur d'un côté doit être égale à un quart du périmètre du carré.
Donc, la longueur des côtés d'un carré dont le périmètre est de 28 sera de $28 \div 4 = 7$.

Réponse : (E)

3. Dans la figure, il y a 9 hexagones dont 5 sont ombrés.
Donc la fractions de tous les hexagones qui est ombrée est égale à $\frac{5}{9}$.

Réponse : (B)

4. Puisque 38 % des élèves pmt reçu un muffin, donc $100\ \% - 38\ \% = 62\ \%$ des élèves n'ont pas reçu de muffin.
Autrement, on aurait pu utiliser les pourcentages d'élèves qui ont reçu un yaourt, un fruit ou une barre de céréales afin d'obtenir le pourcentage d'élèves qui n'ont pas reçu de muffin, soit : $10\ \% + 27\ \% + 25\ \% = 62\ \%$.

Réponse : (D)

5. On sait que $\frac{1}{2} = 0{,}5$. Puisque $\frac{4}{9} \approx 0{,}44$ est inférieur à $\frac{1}{2} = 0{,}5$, alors on ne peut pas placer un 4 (ou quelconque entier inférieur à 4) dans la boîte. Puisque $\frac{5}{9} \approx 0{,}56$ est supérieur à $\frac{1}{2} = 0{,}5$, donc 5 est le plus petit entier que l'on peut placer dans la boîte.

Réponse : (D)

6. Puisque $4x + 14 = 8x - 48$, alors $14 + 48 = 8x - 4x$ ou $62 = 4x$.
On divise les deux côtés de l'équation par 2 afin d'obtenir $\frac{4x}{2} = \frac{62}{2}$, d'où $2x = 31$.

Réponse : (B)

7. Le segment de la droite numérique qui se trouve entre les valeurs de 3 et de 33 a une longueur égale à $33 - 3 = 30$.
Puisque ce segment est divisé en six parties égales, la longueur de chaque partie est égale à $30 \div 6 = 5$.
Le segment PS comprend trois telles parties et a donc une longueur égale à $3 \times 5 = 15$.
Le segment TV comprend deux telles parties et a donc une longueur égale à $2 \times 5 = 10$.
Ainsi la somme des longueurs de PS et TV est de $15 + 10$, soit 25.

Réponse : (A)

8. Puisque $\frac{20}{19}$ est supérieur à 1 et est inférieur à 2 et que $20 \times 19 = 380$, donc $\frac{20}{19} < 20 \times 19 < 2019$.
On remarque d'ailleurs que $19^{20} > 10^{20} > 10\,000$ et que $20^{19} > 10^{19} > 10\,000$.
Cela signifie que 19^{20} et 20^{19} sont tous les deux supérieurs à 2019.
Autrement dit, si les cinq nombres $19^{20}, \frac{20}{19}, 20^{19}, 2019, 20 \times 19$ étaient arrangés en ordre croissant, 2019 serait le troisième dans la liste. De plus, 2019 serait aussi la médiane de la liste car étant le troisième nombre dans la liste de cinq nombres.
(On remarque qu'il importe peu que 19^{20} soit supérieur ou inférieur à 20^{19}.)

Réponse : (D)

9. Puisque la mesure totale de l'angle au centre de chaque cercle est de 360° et que la partie non ombrée du cercle n'a qu'une mesure d'angle de 90°, alors la partie non ombrée de chaque cercle ne représente que $\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$ de l'aire totale du cercle.
Autrement dit, chaque cercle n'est qu'à $\frac{3}{4}$ ombré. Il y a 12 cercles dans le diagramme.
Puisque chaque cercle a un rayon de 1, donc chaque cercle a une aire de $\pi \times 1^2$ ou π.
Ainsi, l'aire totale de la région ombrée est égale à $\frac{3}{4} \times 12 \times \pi$ ou 9π.
Réponse : (D)

10. Supposons que soixante cubes $1 \times 1 \times 1$ sont joints face à face en rangée sur une table.
Chacun des soixante cubes a donc trois faces exposées, soit la face supérieure, la face d'avant et la face d'arrière.
De plus, la face gauche du cube au bout gauche de la rangée est exposée. De même, la face droite du cube au bout droit de la rangée est aussi exposée. Aucune autre face n'est exposée.
Ainsi, le nombre de faces 1×1 qui sont exposées est égal à $60 \times 3 + 2$, soit 182.
Réponse : (C)

11. À l'aide de la deuxième rangée, on comprend que la somme des nombres dans chaque rangée, dans chaque colonne et dans chaque diagonale doit être égale à $3{,}6 + 3 + 2{,}4 = 9$.
Puisque la somme des nombres dans la première colonne doit être égale à 9, alors le nombre en bas à gauche doit être égal à $9 - 2{,}3 - 3{,}6 = 9 - 5{,}9 = 3{,}1$
Sachant que la diagonale qui passe du coin supérieur gauche au coin inférieur droit du carré magique doit contenir des nombres dont la somme est égale à 9, on comprend alors que le nombre en bas à droite doit être égal à $9 - 2{,}3 - 3 = 9 - 5{,}3 = 3{,}7$
Puisque la rangée inférieure du carré magique doit contenir des nombres dont la somme est égale à 9, alors $3{,}1 + x + 3{,}7 = 9$, d'où $x + 6{,}8 = 9$ ou $x = 9 - 6{,}8 = 2{,}2$.
On peut remplir le carré magique de la manière suivante :

2,3	3,8	2,9
3,6	3	2,4
3,1	2,2	3,7

Réponse : (E)

12. Puisque le triangle PQX est rectangle en Q, alors

$$\angle PXQ = 90^\circ - \angle QPX = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$$

Puisque $\angle PXQ$ et $\angle SXR$ sont des angles opposés, alors $\angle SXR = \angle PXQ = 28^\circ$.
Puisque le triangle RXS est un triangle isocèle où $RX = SX$, alors $\angle XRS = \angle XSR = y^\circ$.
Sachant que la somme des angles d'un triangle est égale à 180°, alors :

$$\begin{aligned} \angle XRS + \angle XSR + \angle SXR &= 180^\circ \\ y^\circ + y^\circ + 28^\circ &= 180^\circ \\ 2y + 28 &= 180 \\ 2y &= 152 \end{aligned}$$

donc $y = 76$.
Réponse : (C)

13. *Solution 1*
Étant donné que p, q, r, s est une liste d'entiers consécutifs arrangés en ordre croissant, on en déduit que q est 1 de plus que p et que r est 1 de moins que s.
Cela signifie que $q + r = (p + 1) + (s - 1) = p + s = 109$.

Solution 2
Étant donné que p, q, r, s est une liste d'entiers consécutifs arrangés en ordre croissant, on en déduit que $q = p + 1$, que $r = p + 2$ et que $s = p + 3$.
Puisque $p + s = 109$, donc $p + p + 3 = 109$ d'où $2p = 106$ ou $p = 53$.
Cela signifie que $q = 54$ et que $r = 55$. Donc, $q + r = 109$.

Réponse : (B)

14. Puisque le rapport du nombre de planches à roulettes au nombre de vélos était de 7 : 4, le nombre de planches à roulettes peut être exprimé de la forme $7k$ tandis que le nombre de vélos peut être exprimé de la forme $4k$, k étant un entier positif dans les deux cas.
Puisqu'il y avait 12 planches à roulettes de plus que de vélos, alors $7k - 4k = 12$ d'où $3k = 12$ ou $k = 4$.
Ainsi, le nombre total de planches à roulettes et de vélos est de $7k + 4k = 11k = 11 \times 4 = 44$.

Réponse : (A)

15. Afin que la moyenne de Sophie soit égale à 80 %, la somme de ses notes aux cinq épreuves doit être égale à $5 \times 80\ \% = 400\ \%$.
Après les trois premières épreuves, la somme de ses notes est égale à $73\ \% + 82\ \% + 85\ \% = 240\ \%$.
Par conséquent, elle atteindra son but tant que la somme de ses notes aux deux épreuves restantes soit égale à *au moins* $400\ \% - 240\ \% = 160\ \%$.
Dans les choix de réponse, les sommes des couples de notes sont égales à (A) 161 %, (B) 161 %, (C) 162 %, (D) 156 %, (E) 160 %.
Ainsi, le couple de notes qui ne permettrait pas à Sophie d'atteindre son but serait le couple du choix (D).

Réponse : (D)

16. *Solution 1*
Puisque le résultat doit être le même pour tout nombre réel x inférieur à -2, on reporte $x = -4$ dans chacune des cinq expressions :

(A) $x = -4$ (B) $x + 2 = -2$ (C) $\frac{1}{2}x = -2$ (D) $x - 2 = -6$ (E) $2x = -8$

Donc, $2x$ est l'expression avec la moindre valeur lorsque $x = -4$ et doit donc être l'expression dont la valeur est toujours la plus petite.

Solution 2
Pour tout nombre réel x, on sait que $x - 2$ est inférieur à x et que ce dernier est inférieur à $x + 2$.
Donc, parmi les cinq valeurs, ni x ni $x + 2$ ne peuvent être les plus petites.
Pour tout nombre réél négatif x, la valeur de $2x$ sera inférieure à la valeur de $\frac{1}{2}x$.
Donc, parmi les cinq valeurs, $\frac{1}{2}x$ ne peut pas être la plus petite.
Ainsi, la plus petite valeur est soit $x - 2$ soit $2x$.
Lorsque $x < -2$, on sait que $2x - (x - 2) = x + 2 < 0$.
Puisque $2x$ et $x - 2$ ont une différence qui est négative, donc $2x$ est la plus petite valeur parmi les cinq.

Réponse : (E)

17. Chaque animal est soit rayé ou tacheté. Aucun animal n'est à la fois rayé et tacheté.
Puisqu'il y a 100 animaux dont 62 sont tachetés, il y a donc $100 - 62 = 38$ animaux rayés.
Chaque animal rayé doit avoir soit des ailes, soit des cornes. Aucun animal n'a les deux.
Puisqu'il y a 28 animaux rayés dotés d'ailes, il y a donc $38 - 28 = 10$ animaux rayés dotés de cornes.
Tout animal à cornes doit être rayé ou tacheté.
Puisqu'il y a 36 animaux à cornes, il y a donc $36 - 10 = 26$ animaux tachetés qui sont dotés de cornes.

RÉPONSE : (E)

18. À l'aide du théorème de Pythagore,

$$QT^2 = QP^2 + PT^2 = k^2 + k^2 = 2k^2$$

Puisque $QT > 0$, alors $QT = \sqrt{2}k$.
Puisque le triangle QTS est un triangle isocèle, alors $TS = QT = \sqrt{2}k$.
À l'aide du théorème de Pythagore,

$$QS^2 = QT^2 + TS^2 = (\sqrt{2}k)^2 + (\sqrt{2}k)^2 = 2k^2 + 2k^2 = 4k^2$$

Puisque $QS > 0$, alors $QS = 2k$.
Puisque le triangle QSR est un triangle isocèle, alors $SR = QS = 2k$.
Puisque le triangle QPT est rectangle en P, son aire est égale à $\frac{1}{2}(QP)(PT) = \frac{1}{2}k^2$.
Puisque le triangle QTS est rectangle en T, son aire est égale à

$$\tfrac{1}{2}(QT)(TS) = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}k)(\sqrt{2}k) = \tfrac{1}{2}(2k^2) = k^2$$

Puisque le triangle QSR est rectangle en S, son aire est égale à $\frac{1}{2}(QS)(SR) = \frac{1}{2}(2k)(2k) = 2k^2$.
Puisque les trois triangles ont une aire totale de 56, alors $\frac{1}{2}k^2 + k^2 + 2k^2 = 56$ ou $\frac{7}{2}k^2 = 56$, d'où $k^2 = 16$.

Puisque $k > 0$, alors $k = 4$.

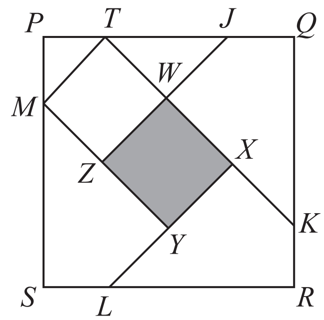
RÉPONSE : (C)

19. Étant donné qu'il y a six boules rouges et trois boules vertes et qu'on en sélectionne quatre au hasard, ces quatre boules pourraient être :
- 4 boules rouges, ou
- 3 boules rouges et 1 boule verte, ou
- 2 boules rouges et 2 boules vertes, ou
- 1 boule rouge et 3 boules vertes.

Un groupe de 4 boules rouges n'a qu'un seul arrangement visiblement différent.
Un groupe composé de 3 boules rouges et d'une boule verte n'a que quatre arrangements visiblement différents : dans les arrangements, la boule verte peut être dans la 1^re^, 2^e^, 3^e^ ou 4^e^ position.
Un groupe composé de 2 boules rouges et de 2 boules vertes n'a que six arrangements visiblement différents car les boules rouges peuvent se trouver dans les couples de positions suivantes : 1^re^/2^e^, 1^re^/3^e^, 1^{re}/4^e^, 2^e^/3^e^, 2^e^/4^e^ ou 3^e^/4^e^.
Un groupe composé d'une boule rouge et de 3 boules vertes n'a que quatre arrangements visiblement différents : dans les arrangements, la boule rouge peut être dans la 1^re^, 2^e^, 3^e^ ou 4^e^ position.
En tout, il y a $1 + 4 + 6 + 4 = 15$ arrangements visiblement différents.

RÉPONSE : (A)

20. Puisque les côtés du quadrilatère $WXYZ$ sont parallèles aux diagonales du carré $PQRS$ (et que les diagonales d'un carré sont perpendiculaires l'une à l'autre), donc les côtés adjacents du quadrilatère $WXYZ$ sont perpendiculaires les uns aux autres.
Cela signifie que le quadrilatère $WXYZ$ a quatre angles droits et est donc un rectangle.
Puisque la figure ne change pas lorsqu'elle subit une rotation de 90°, de 180° ou de 270°, donc $WX = XY = YZ = YW$. On en déduit alors que la figure $WXYZ$ est un carré.
Il faut avant tout déterminer la longueur de WZ afin de pouvoir calculer l'aire de $WXYZ$.
On ralonge le segment de droite KW afin qu'il coupe PQ en T. On relie aussi le point M au point T.



Puisque TK est parallèle à la diagonale PR, donc $\angle QTK = \angle QKT = 45°$, cela signifie que le triangle TQK est un triangle isocèle où $QT = QK$.
Puisque $QR = 40$ et que $KR = 10$, donc $QK = QR - KR = 30$, d'où $QT = 30$.
Puisque $PQ = 40$, donc $PT = PQ - QT = 10$.
Puisque $PM = PT = 10$, alors MPT est un triangle rectangle et est aussi isocèle, cela signifie que MT est parallèle à la diagonale SQ. (On n'a pas construit MT en s'attendant à ce que cela soit vrai mais il s'est avéré que ça l'était).
Puisque les côtés de $MTWZ$ sont parallèles aux diagonales du carré, donc $MTWZ$ est aussi un rectangle, cela signifie que $WZ = MT$.
Puisque $PM = PT$, donc

$$MT = \sqrt{PM^2 + PT^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}$$

à l'aide du théorème de Pythagore.
Ainsi, $WZ = MT = \sqrt{200}$. Donc l'aire du carré $WXYZ$ est égale à WZ^2 ou 200.

Réponse : (B)

21. Le chiffre des unités de 5^{2019} est un 5 car le chiffre des unités de toute puissance de 5 sera toujours un 5.
On peut constater cela en dressant la liste des quelques premières puissances de 5 :

$$5^1 = 5 \quad 5^2 = 25 \quad 5^3 = 125 \quad 5^4 = 625 \quad 5^5 = 3125 \quad 5^6 = 15\,625$$

Lors de la multiplication d'entiers, le chiffre des unités du produit ne dépend que des chiffres des unités du multiplicande et du multiplicateur. Puisque $5 \times 5 = 25$ (et que les chiffres des unités sont 5), le chiffre des unités de toute puissance de 5 sera toujours un 5.

Le chiffre des unités de 3^{2019} est un 7 car il existe une régularité cyclique pour les chiffres des unités des puissances de 3, cette régularité est comme suit : 3,9,7,1,3,9,7,1,...
On peut constater cela en dressant la liste des quelques premières puissances de 3 :

$$3^1 = 3 \quad 3^2 = 9 \quad 3^3 = 27 \quad 3^4 = 81 \quad 3^5 = 243 \quad 3^6 = 729$$

Puisque le chiffre des unités d'un produit ne dépend que des chiffres des unités du multiplicande et du multiplicateur et que nous multiplions par 3 pour passer d'une puissance à l'autre, alors une régularité s'établit car on finit par multiplier de manière cyclique la même suite de chiffres d'unités.
Puisque les chiffres des unités des puissances de 3 forment une suite cyclique de 4 chiffres d'unités et que 2016 est un multiple de 4, donc le chiffre des unités de 3^{2016} est un 1.
En suivant la suite cyclique des chiffres des unités des puissances de 3, le chiffre des unités de 3^{2019} sera donc un 7.

Puisque le chiffre des unités de 5^{2019} est un 5 et que le chiffre des unités de 3^{2019} est un 7, donc le chiffre des unités de leur différence est un 8. (Lorsqu'un entier dont le chiffre des unités est un 7 est soustrait d'un entier plus grand dont le chiffre des unités est un 5, leur différence aura un 8 comme chiffre des unités.)

Réponse : (E)

22. *Solution 1*
En respectant les conditions imposées dans le problème, le plus petit entier supérieur à 2019 peut être formé à l'aide des deux prochains entiers consécutifs, soit 20 et 21, afin d'obtenir l'entier à quatre chiffres 2120.
Le plus grand entier que l'on peut former de cette manière est 9998.
Donc, voici la liste des entiers qui peuvent être formés de cette manière :

$$2120, 2221, 2322, \ldots, 9796, 9897, 9998$$

Entre chaque paire d'entiers consécutifs, on constate une différence de 101 (car de nombre en nombre, le chiffre des centaines augmente de 1 et le chiffre des unités augmente aussi de 1).
Puisque les entiers dans cette liste sont équidistants, leur somme sera égale au produit de la multiplication du nombre d'entiers dans la liste par l'entier qui représente la moyenne de la liste.
L'entier qui représente la moyenne de la liste est égal à $\dfrac{2120 + 9998}{2} = \dfrac{12118}{2} = 6059$.
Puisque la différence entre chaque paire d'entiers consécutifs est de 101, il doit donc exister $\dfrac{9998 - 2120}{101} = \dfrac{7878}{101} = 78$ incréments de 101 dans la liste au complet.
Puisqu'il y a 78 incréments, il y a donc 79 entiers.
Cela signifie que la somme des entiers de la liste est égale à $79 \times 6059 = 478\,661$.

Solution 2
Comme dans la solution 1, voici la liste des entiers qui peuvent être formés de cette manière : $2120, 2221, 2322, \ldots, 9796, 9897, 9998$.
Si la somme de ces entiers est égale à S, alors

$$\begin{aligned}
S &= 2120 + 2221 + 2322 + \ldots + 9796 + 9897 + 9998 \\
&= (2100 + 2200 + 2300 + \cdots + 9700 + 9800 + 9900) \\
&\qquad + (20 + 21 + 22 + \cdots + 96 + 97 + 98) \\
&= 100(21 + 22 + 23 + \cdots + 96 + 97 + 98 + 99) \\
&\qquad + (20 + 21 + 22 + \cdots + 96 + 97 + 98) \\
&= 100(21 + 22 + 23 + \cdots + 96 + 97 + 98 + 99) \\
&\qquad + (21 + 22 + \cdots + 96 + 97 + 98 + 99) + 20 - 99 \\
&= 101(21 + 22 + 23 + \cdots + 96 + 97 + 98 + 99) - 79
\end{aligned}$$

Il y a 79 nombres dans la liste d'entiers consécutifs de 21 à 99 ; le nombre du milieu étant 60.
Donc, $S = 101 \times 79 \times 60 - 79 = 478\,661$.

Réponse : (C)

23. Puisque la roue roule à vitesse constante, alors le pourcentage de temps qu'une partie ombrée de la roue touche une partie ombrée du chemin sera égal au pourcentage de la longueur totale du chemin où il y a un contact «ombré sur ombré».
Puisque la roue a un rayon de 2 m, donc sa circonférence est égale à $2\pi \times 2$ m, c.-à-d. 4π m.
Puisque la roue est divisée en quatre quarts, alors la partie de la circonférence qu'occupe chaque quart est égale à π m.
Soit l'extrémité gauche du chemin 0 m.
Lorsque la roue tourne une première fois, la première partie ombrée de la roue touche le chemin entre 0 m et $\pi \approx 3{,}14$ m.
Alors que la route continue à tourner, la deuxième partie ombrée de la roue touche le chemin entre $2\pi \approx 6{,}28$ m et $3\pi \approx 9{,}42$ m.
À chaque multiple impair de 1 m, 1 m du chemin est ombré. À chaque multiple pair de 1 m, 1 m du chemin est non ombré.
Donc, la première partie ombrée de la roue touche une partie ombrée du chemin entre 1 m et 2 m et entre 3 m et π m.
La deuxième partie ombrée de la roue touche une partie ombrée du chemin entre 7 m et 8 m et entre 9 m et 3π m.
Donc, la longueur totale de «ombré sur ombré» est égale à $1 \text{ m} + (\pi - 3) \text{ m} + 1 \text{ m} + (3\pi - 9) \text{ m}$ ou $(4\pi - 10)$ m.
La longueur totale du chemin sur lequel roule la roue est de 4π m.
Cela signifie que le pourcentage de temps requis est égal à $\dfrac{(4\pi - 10) \text{ m}}{4\pi \text{ m}} \times 100\ \% \approx 20{,}4\ \%$.
Parmi les choix de réponse, (A) 20 % est le choix le plus proche à cette réponse.

Réponse : (A)

24. On remarque avant tout que $88\,663\,311\,000$ est divisible par 792. (Chose qu'on pourrait vérifier en effectuant la division.)
Ainsi, $88\,663\,311\,000\,000$ est aussi divisible par 792.
Puisque $88\,663\,311\,000\,000$ est divisible par 792, donc $88\,663\,311\,pqr\,s48$ est seulement divisible par 792 lorsque $pqr\,s48$ est divisible par 792. (Car si la différence entre deux nombres entiers est divisible par d, soit ces nombres sont tous les deux divisibles par d, soit ils ne le sont pas.)
48 est le plus petit entier de la forme $pqr\,s48$ (qui est "000 048") et $999\,948$ est le plus grand entier de la forme $pqr\,s48$.
Puisque $999\,948 \div 792 \approx 1262{,}6$, alors les multiples de 792 entre 48 et $999\,948$ sont des entiers de la forme $792 \times n$ où $1 \leq n \leq 1262$.
Supposons que $792 \times n = pqr\,s48$, n étant un entier.
En comparant les chiffres des unités, on voit que le chiffre des unités de n doit être un 4 ou un 9.
Cela signifie que $n = 10c + 4$ ou $n = 10c + 9$, c étant un entier supérieur ou égal à 0 ($c \geq 0$).

Dans le premier cas, $792(10c + 4) = 7920c + 3168$.
Cet entier a un 8 comme chiffre des unités.
Afin que cet entier ait un 4 comme chiffre des dizaines, $2c + 6$ doit avoir un 4 comme chiffre des unités. Ceci est vrai uniquement lorsque c a un 4 ou un 9 comme chiffre des unités.
Cela signifie que c peut être égal à $4, 9, 14, 19, 24, \ldots$.
Cela signifie aussi que n peut être égal à $44, 94, 144, 194, 244, \ldots$.
Puisque $1 \leq n \leq 1262$, donc il existe 25 valeurs possibles de n où ce dernier aurait un 4 comme

chiffre des unités car il y a 2 valeurs de n entre 0 et 100, 2 telles valeurs entre 100 et 200, et ainsi de suite jusqu'à 1200. La dernière telle valeur se trouve entre 1200 et 1262, soit 1244.

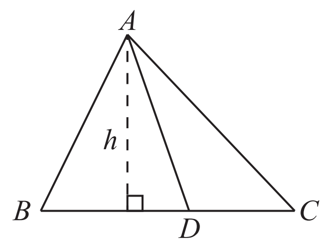
Dans le deuxième cas, $792(10c + 9) = 7920c + 7128$.
Cet entier a un 8 comme chiffre des unités.
Afin que cet entier ait un 4 comme chiffre des dizaines, $2c + 2$ doit avoir un 4 comme chiffre des unités. Ceci est vrai uniquement lorsque c a un 1 ou un 6 comme chiffre des unités.
Cela signifie que c peut être égal à $1, 6, 11, 16, 21, \ldots$.
Cela signifie aussi que n peut être égal à $19, 69, 119, 169, 219, \ldots$.
Puisque $1 \leq n \leq 1262$, donc il existe 25 valeurs possibles de n où ce dernier aurait un 9 comme chiffre des unités.

En tout, il y a $25 + 25 = 50$ entiers positifs à 14 chiffres de la forme $88\,663\,311\,pqr\,s48$ qui sont divisibles par 792.

Réponse : (E)

25. Dans le triangle ABC, si D est situé sur BC, alors

$$\frac{\text{Aire du triangle } ABD}{\text{Aire du triangle } ACD} = \frac{BD}{CD}$$



car les triangles ABD et ACD ont la même hauteur, h, d'où

$$\frac{\text{Aire du triangle } ABD}{\text{Aire du triangle } ACD} == \frac{\frac{1}{2} \times BD \times h}{\frac{1}{2} \times CD \times h} = \frac{BD}{CD}$$

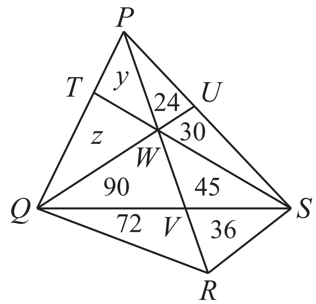
De plus, sachant que le point V est situé sur le côté QS du triangle WQS et sur le côté QS du triangle RQS, on comprend alors que

$$\frac{\text{Aire du triangle } QVW}{\text{Aire du triangle } SVW} = \frac{QV}{SV} = \frac{\text{Aire du triangle } QVR}{\text{Aire du triangle } SVR}$$

On combine la première et la troisième partie de cette égalité afin d'obtenir les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{8x + 50}{5x + 20} &= \frac{8x + 32}{5x + 11} \\ (8x + 50)(5x + 11) &= (8x + 32)(5x + 20) \\ 40x^2 + 88x + 250x + 550 &= 40x^2 + 160x + 160x + 640 \\ 338x + 550 &= 320x + 640 \\ 18x &= 90 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Puisque $x = 5$, donc on peut calculer les aires de plusieurs parties de la figure, ces aires seront inscrites dans les parties correspondantes de la figure :



Soit y l'aire du triangle PTW. Soit z l'aire du triangle QTW.
On sait que

$$\frac{\text{Aire du triangle } QVW}{\text{Aire du triangle } SVW} = \frac{QV}{SV}$$

donc $\dfrac{QV}{SV} = \dfrac{90}{45} = 2$.
Puisque V est situé sur le côté QS du triangle PQS, alors

$$\frac{\text{Aire du triangle } PQV}{\text{Aire du triangle } PSV} = \frac{QV}{SV} = 2$$

donc $\dfrac{y+z+90}{99} = 2$, d'où $y + z + 90 = 198$ ou $y + z = 108$.
Enfin, sachant que le point W se trouve sur le côté TS du triangle PTS ainsi que sur le côté TS du triangle QTS, alors

$$\frac{y}{54} = \frac{TW}{WS} = \frac{z}{135}$$

d'où $135y = 54z$ ou $5y = 2z$ ou $z = \frac{5}{2}y$.
Donc, $y + \frac{5}{2}y = 108$ ou $\frac{7}{2}y = 108$ d'où $y = \frac{216}{7} = 30\frac{6}{7}$.
Parmi les choix de réponse, (E) 31 est le choix le plus proche à cette réponse.

Réponse : (E)

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2018

(9e année – Secondaire III)

le mardi 27 février 2018

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 28 février 2018

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Lorsqu'on place les cinq choix de réponse en ordre croissant, on obtient : 1,2; 1,4; 1,5; 2,0; 2,1. Le plus petit est 1,2.

Réponse : (B)

2. On a $\frac{2018 - 18 + 20}{2} = \frac{2000 + 20}{2} = \frac{2020}{2} = 1010$.

Réponse : (A)

3. Le 14 juillet survient 11 jours après le 3 juillet de la même année.
Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine, le 10 juillet et le 3 juillet tombent le même jour de la semaine, soit un mercredi.
Le 14 juillet survient 4 jours après le 10 juillet. Le 14 juillet est donc un dimanche.

Réponse : (C)

4. Puisque la batterie est chargée 3 fois par semaine pendant 52 semaines, elle est chargée 156 fois en tout ($3 \times 52 = 156$).
Puisque chaque charge coute 0,75 \$ et que $156 \times 0{,}78\,\$ = 121{,}68\,\$$, le cout total des charges est de 121,65 \$.

Réponse : (E)

5. Puisque

$$3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 9 = 3 \times 3 \times 7 \times n \times n,$$

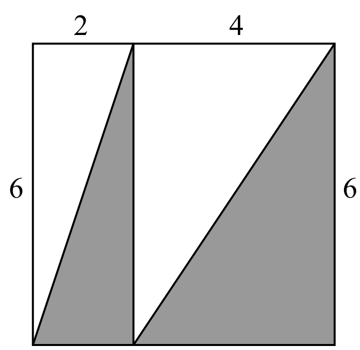
alors :

$$n \times n = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 9}{3 \times 3 \times 7} = 5 \times 5 \times 9 = 5 \times 5 \times 3 \times 3$$

Puisque $n \times n = 5 \times 5 \times 3 \times 3$, alors une valeur possible de n est $n = 5 \times 3$, ou $n = 15$.

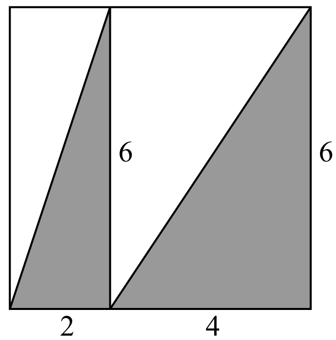
Réponse : (A)

6. *Solution 1*
On considère le carré 6×6 comme la juxtaposition d'un rectangle 2×6 sur la gauche et d'un rectangle 4×6 sur la droite.



Chacun de ces rectangles est divisé en deux parties égales par sa diagonale. La moitié de chaque rectangle est donc ombrée.
Donc, 50 % de la surface du carré est ombrée.

Solution 2
Le carré 6×6 a une aire égale à 6^2, ou 36.
Chaque triangle ombré a une hauteur de 6, soit la hauteur du carré.
Un triangle a une base de 2 et l'autre a une base de 4 :



Le triangle ombré à gauche a une aire égale à $\frac{1}{2} \times 2 \times 6$, ou 6.
Le triangle ombré à droite a une aire égale à $\frac{1}{2} \times 4 \times 6$, ou 12.
La partie ombrée du carré a une aire totale de $6 + 12$, ou 18, soit la moitié (ou 50 %) de l'aire du carré. Elle occupe donc 50 % de la surface du carré.

Réponse : (A)

7. Il y a 20 cravates en tout $(5 + 7 + 8 = 20)$ dans la boite, doit 8 sont roses.
Lorsque Stéphane choisit une cravate au hasard, il y a donc 20 choix équiprobables dont 8 sont favorables. La probabilité de choisir une cravate rose est donc égale à $\frac{8}{20}$, ou $\frac{2}{5}$.

Réponse : (C)

8. La section de la droite numérique de 0 à 5 a une longueur de 5 $(5 - 0 = 5)$.
Puisque la section est divisée en 20 parties égales, chaque partie a une largeur égale à $\frac{5}{20}$, ou $\frac{1}{4}$, ou 0,25.
Puisque S est situé à 5 espaces à la droite de 0, alors $S = 0 + 5 \times 0{,}25$, ou $S = 1{,}25$.
Puisque T est situé à 5 espaces à la gauche de 5, alors $T = 5 - 5 \times 0{,}25$, ou $T = 3{,}75$.
Donc $S + T = 1{,}25 + 3{,}75$, ou $S + T = 5$.

Réponse : (E)

9. Si $\heartsuit = 1$, alors $\nabla = \heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = 1 \times 1 \times 1 = 1$, ce qui est impossible puisque ∇ et $\heartsuit$ sont deux entiers différents.
Si $\heartsuit = 2$, alors $\nabla = \heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = 2 \times 2 \times 2 = 8$, ce qui est possible.
Si $\heartsuit = 3$, alors $\nabla = \heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = 3 \times 3 \times 3 = 27$, ce qui est impossible puisque ∇ doit être inférieur à 20.
Si $\heartsuit$ est supérieur à 3, alors ∇ sera supérieur à 27, ce qui est impossible. Donc, $\heartsuit$ ne peut être supérieur à 3.
On a donc $\heartsuit = 2$ et $\nabla = 8$.
Donc $\nabla \times \nabla = 8 \times 8$, ou $\nabla \times \nabla = 64$.

Réponse : (D)

10. La droite qui passe aux points $(-2, 1)$ et $(2, 5)$ a une pente de $\dfrac{5 - 1}{2 - (-2)}$, ou $\dfrac{4}{4}$, ou 1.
Donc si on se déplace de 1 unité vers la droite sur cette droite, on monte de 1 unité.
Donc si on se déplace de 2 unités vers la droite sur cette droite à partir du point $(-2, 1)$, on monte de 2 unités pour aboutir au point $(-2 + 2, 1 + 2)$, ou $(0, 3)$.

Réponse : (C)

11. Les mesures des angles au centre des trois secteurs ont une somme de 360°.
Le secteur *À jouer* a donc un angle au centre égal à $360^\circ - 130^\circ - 110^\circ$, ou 120°.
Un angle au centre de 120° représente $\frac{120^\circ}{360^\circ}$ ou $\frac{1}{3}$ d'un angle plein.
Donc, le bébé ours polaire a passé $\frac{1}{3}$ de la journée à jouer, ce qui correspond à $\frac{1}{3} \times 24$ heures, ou 8 heures.

Réponse : (C)

12. Parmi les numéros sur les uniformes, on remarque que :
   - 11 et 13 sont des nombres premiers
   - 16 est un carré parfait
   - 12, 14 et 16 sont pairs

   Puisque les numéros de Karl et de Liu étaient des nombres premiers, il s'agissait de 11 et de 13 dans un ordre quelconque.
Puisque le numéro de Gina était un carré parfait, il s'agissait de 16.
Puisque Helga et Julie avaient chacune un numéro pair, il s'agissait de 12 et 14 dans un ordre quelconque. (Le numéro 16 est déjà choisi.)
Donc, Ioana portait donc le numéro restant, soit le 15.

Réponse : (D)

13. Puisque le triangle équilatéral a des côtés de longueur 10, il a un périmètre de 3×10, ou 30.
En fonction de x, le rectangle a un périmètre de $x + 2x + x + 2x$, ou $6x$.
Puisque les deux périmètres sont égaux, alors $6x = 30$, d'où $x = 5$.
Or, le rectangle mesure x sur $2x$, ou 5 sur 10.
Il a donc une aire de 5×10, ou 50.

Réponse : (B)

14. La moyenne des quatre nombres $7, 9, 10$ et 11 est égale à $\frac{7+9+10+11}{4}$, ou $\frac{37}{4}$, ou 9,25, ce qui n'est pas égal au cinquième nombre, 18.
La moyenne des quatre nombres $7, 9, 10$ et 18 est égale à $\frac{7+9+10+18}{4}$, ou $\frac{44}{4}$, ou 11, ce qui est égal au cinquième nombre, 11.
On peut vérifier que la moyenne des trois autres combinaisons de quatre nombres n'est pas égale au cinquième nombre.
La réponse est donc 11.
(On remarque que la moyenne des cinq nombres donnés est égale à $\frac{7+9+10+11+18}{5}$, ou $\frac{55}{5}$, ou 11. Or, lorsqu'on enlève un nombre qui est égal à la moyenne d'un ensemble de nombres, la moyenne ne change pas. Pourquoi ?)

Réponse : (D)

15. On cherche la première fois, après 4:56, où les chiffres de l'heure seront consécutifs en ordre croissant.
Il serait bon d'essayer 5:67, mais il ne s'agit pas d'une heure valable.
De même, l'heure ne peut pas commencer par un 6, un 7, un 8 ou un 9.
Une heure qui commence par 10 ou par 11 n'a pas ses chiffres consécutifs en ordre croissant.
Si l'heure commence par 12, on obtient l'heure 12:34. Il s'agit bien de la première fois après 4:56.
On doit déterminer le nombre de minutes entre 4:56 et 12:34.

De 4:56 à 11:56, il y a 7 heures, c'est-à-dire 7×60 minutes, ou 420 minutes.
De 11:56 à 12:00, il y a 4 minutes.
De 12:00 à 12:34, il y a 34 minutes.
Donc de 4:56 à 12:34, il y a 458 minutes ($420 + 4 + 34 = 458$).

Réponse : (A)

16. On sait que $n > 6$, puisque les 6 premières lettres sont des X.
Après avoir lu 6 lettres X et 3 lettres Y, on a lu deux fois plus de X que de Y. Dans ce cas, $n = 6 + 3$, ou $n = 9$.
Après avoir lu 6 lettres X et 12 lettres Y, on a lu deux fois plus de Y que de X. Dans ce cas, $n = 6 + 12$, ou $n = 18$.
Les 12 lettres suivantes sont des Y. Après les avoir lues, on a lu 6 lettres X et 24 lettres Y.
Toutes les 96 lettres suivantes sont des X. Si on lit 6 de ces nouvelles lettres, on aura lu 12 lettres X et 24 lettres Y, soit deux fois plus de Y que de X. Dans ce cas, $n = 24 + 12$, ou $n = 36$.
Si on lit 36 autres lettres X, on aura lu 48 lettres X et 24 lettres Y, soit deux fois plus de X que de Y. Dans ce cas, $n = 24 + 48$, ou $n = 72$.
Selon l'énoncé, il y a quatre valeurs possibles de n. On les a donc toutes déterminées. Leur somme est égale à $9 + 18 + 36 + 72$, ou 135.

Réponse : (C)

17. On sait que $n = p^2q^2 = (pq)^2$.
Puisque $n < 1000$, alors $(pq)^2 < 1000$, d'où $pq < \sqrt{1000} \approx 31{,}6$.
Déterminer le nombre de valeurs possibles de n est donc équivalent à déterminer le nombre d'entiers m ($1 \leq m \leq 31 < \sqrt{1000}$) qui sont le produit de deux nombres premiers différents.
Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 31 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 et 31.
Les produits distincts, inférieurs ou égaux à 31, de deux de ces nombres sont :

$$2 \times 3 = 6 \quad 2 \times 5 = 10 \quad 2 \times 7 = 14 \quad 2 \times 11 = 22 \quad 2 \times 13 = 26$$

$$3 \times 5 = 15 \quad 3 \times 7 = 21$$

Tout autre produit est supérieur à 31.
Il y a donc 7 valeurs de n.

Réponse : (E)

18. On considère le triangle PQR.
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors :

$$\angle QPR + \angle QRP = 180^\circ - \angle PQR = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Puisque $\angle QPS = \angle RPS$, alors $\angle RPS = \frac{1}{2}\angle QPR$.
Puisque $\angle QRS = \angle PRS$, alors $\angle PRS = \frac{1}{2}\angle QRP$.
Donc :

$$\begin{aligned}\angle RPS + \angle PRS &= \tfrac{1}{2}\angle QPR + \tfrac{1}{2}\angle QRP \\ &= \tfrac{1}{2}(\angle QPR + \angle QRP) \\ &= \tfrac{1}{2} \times 60^\circ \\ &= 30^\circ\end{aligned}$$

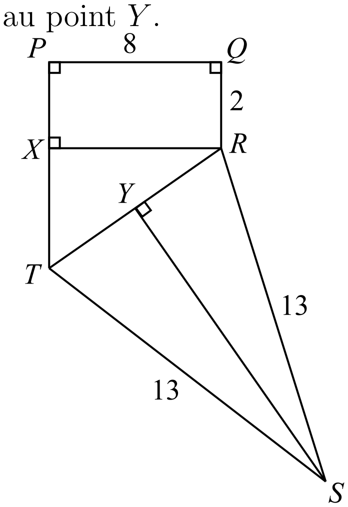
Puisque $\angle PSR = 180^\circ - (\angle RPS + \angle PRS)$, alors $\angle PSR = 180^\circ - 30^\circ$, ou $\angle PSR = 150^\circ$.

Réponse : (E)

19. On rappelle que temps $= \dfrac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$. Pour parcourir x km à 90 km/h, il faut $\dfrac{x}{90}$ heures.
Pour parcourir x km à 120 km/h, il faut $\dfrac{x}{120}$ heures.
On sait qu'il y a une différence de 16 minutes entre ces deux intervalles de temps.
Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure, 16 minutes correspondent à $\dfrac{16}{60}$ heures.
Puisque le temps écoulé à 120 km/h est 16 minutes de moins que le temps écoulé à 90 km/h, alors $\dfrac{x}{90} - \dfrac{x}{120} = \dfrac{16}{60}$. On utilise un dénominateur commun de 360 ($360 = 4 \times 90 = 3 \times 120$) pour soustraire les fractions du membre de gauche. Le membre de gauche est donc égal à $\dfrac{x}{90} - \dfrac{x}{120}$, ou $\dfrac{4x}{360} - \dfrac{3x}{360}$, ou $\dfrac{x}{360}$. L'équation est donc $\dfrac{x}{360} = \dfrac{16}{60}$.
Puisque $360 = 6 \times 60$, le membre de droite est égal à $\dfrac{16}{60}$, ou $\dfrac{16 \times 6}{360}$, ou $\dfrac{96}{360}$. L'équation est donc $\dfrac{x}{360} = \dfrac{96}{360}$, d'où $x = 96$.

Réponse : (D)

20. Au point R, on abaisse une perpendiculaire jusqu'au point X sur PT. On trace RT et on abaisse une perpendiculaire à RT du point S au point Y.



Puisque le quadrilatère $PQRX$ a trois angles droits (en P, Q et X), son quatrième angle doit être droit. $PQRX$ est donc un rectangle. Son aire est donc égale à 8×2, ou 16.
Le triangle RXT est rectangle en X.
Puisque $PQRX$ est un rectangle, alors $XR = PQ = 8$ et $PX = QR = 2$.
Puisque $PX = 2$ et que $XT = PT - PX$, alors $XT = 8 - 2$, ou $XT = 6$.
L'aire du triangle RXT est égale à $\frac{1}{2} \times XT \times XR$, ou $\frac{1}{2} \times 6 \times 8$, ou 24.
D'après le théorème de Pythagore, $TR = \sqrt{XT^2 + XR^2}$.
Donc $TR = \sqrt{6^2 + 8^2}$, ou $TR = \sqrt{36 + 64}$, ou $T = \sqrt{100}$. Donc $TR = 10$, puisque $TR > 0$.
Puisque le triangle TSR est isocèle ($ST = SR$) et que SY est perpendiculaire à TR, alors Y est le milieu de TR.
Puisque $TY = YR = \frac{1}{2}TR$, alors $TY = YR = 5$.
D'après le théorème de Pythagore, $SY = \sqrt{ST^2 - TY^2}$.
Donc $SY = \sqrt{13^2 - 5^2}$, ou $SY = \sqrt{169 - 25}$, ou $SY = \sqrt{144}$. Donc $SY = 12$, puisque $SY > 0$.
L'aire du triangle STR est égale à $\frac{1}{2} \times TR \times SY$, ou $\frac{1}{2} \times 10 \times 12$, ou 60.
L'aire du pentagone $PQRST$ est égale à la somme des aires de ses morceaux. Elle est donc égale à $60 + 24 + 16$, ou 100.

Réponse : (D)

21. On détermine le nombre de façons de se rendre à chacune des cases blanches du quadrillage en suivant les conditions données.
Dans la première rangée, il y a 1 façon de se rendre à chacune des cases blanches, soit en commençant un trajet dans cette case.
Dans chacune des rangées suivantes, le nombre de façons de se rendre à une case blanche est égal à la somme des façons de se rendre à chacune des cases blanches de la rangée précédente qui est diagonalement en haut à gauche ou en haut à droite de la case donnée. En effet, n'importe quel trajet qui passe par une case blanche doit parvenir d'une de ces cases blanches de la rangée précédente.
Dans la deuxième rangée, il y a 2 façons de se rendre à chacune des cases blanches, soit 1 façon à partir de la case blanche en haut à sa gauche et 1 façon à partir de la case blanche en haut à sa droite.
Dans la troisième rangée, il y a 2 façons de se rendre à la 1^{re} case blanche, 4 façons de se rendre à la 2^{e} case blanche et 2 façons de se rendre à la 3^{e} case blanche.
On continuant de la sorte, on obtient les nombres de façons suivants de se rendre dans les diverses cases blanches :

1		1		1
	2		2	
2		4		2
	6		6	
6		12		6

Puisqu'il y a 6, 12 et 6 façons de se rendre dans les trois cases blanches de la dernière rangée, il y a 24 trajets possibles $(6 + 12 + 6 = 24)$ de la rangée du haut jusqu'à la rangée du bas.

Réponse : (D)

22. Chaque fil a deux extrémités.
Dans un circuit Miniou de 13 788 fils, il y a donc 27 576 extrémités $(13\,788 \times 2 = 27\,576)$.
Dans un circuit Miniou, chaque noeud est relié à exactement trois fils.
Donc, 3 extrémités de fils arrivent à chaque noeud. Il y a donc 9192 noeuds $(27\,576 \div 3 = 9192)$.

Réponse : (B)

23. Le cercle de centre P a un rayon de 1 et passe au point Q. Donc $PQ = 1$.
Le cercle de diamètre PQ a donc un rayon de $\frac{1}{2}$ et une aire égale à $\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$, ou $\frac{1}{4}\pi$.
Pour déterminer l'aire de la région ombrée, on déterminera l'aire de la partie commune aux deux grands cercles et on soustraira l'aire du cercle de diamètre PQ.
Soit X et Y les points d'intersection des deux cercles.
On trace les segments XY, PQ, PX, PY, QX et QY (Figure 1).
Par symétrie, l'aire de la région ombrée de part et d'autre de XY est la même.
L'aire de la région ombrée à la droite de XY est égale à l'aire du secteur $PXQY$ du cercle gauche moins l'aire du triangle PXY (Figure 2).

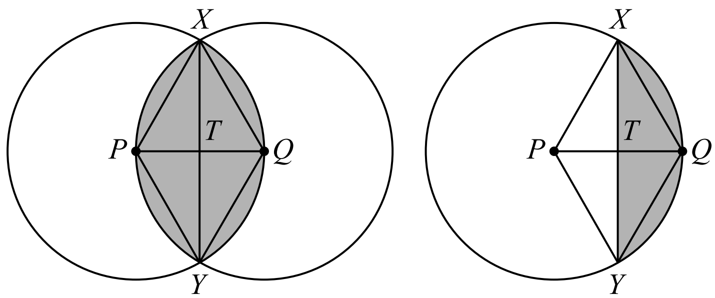


Figure 1 Figure 2

Puisque chaque grand cercle a un rayon de 1, alors $PQ = PX = PY = QX = QY = 1$.
Les triangles XPQ et YPQ sont donc équilatéraux. Donc $\angle XPQ = \angle YPQ = 60^\circ$.
Donc $\angle XPY = 120^\circ$. Puisque $\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$, le secteur $PXQY$ est $\frac{1}{3}$ d'un disque. Son aire est donc égale à $\frac{1}{3}\pi 1^2$, ou $\frac{1}{3}\pi$.
On considère le triangle PXY.
On sait que $PX = PY = 1$ et que $\angle XPQ = \angle YPQ = 60^\circ$.
Puisque le triangle PXY est isocèle et que PQ est la bissectrice de l'angle XPY, PQ est perpendiculaire à XY au point T. Donc $XT = TY$.
Par symétrie, $PT = TQ$. Puisque $PQ = 1$, alors $PT = \frac{1}{2}$.
Le triangle PTX est rectangle en T. D'après le théorème de Pythagore,

$$XT = \sqrt{PX^2 - PT^2} = \sqrt{1^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

puisque $XT > 0$.
Donc $XY = 2XT = \sqrt{3}$.
L'aire du triangle PXY est égale à $\frac{1}{2}(XY)(PT)$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}(\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}\right)$, ou $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
L'aire de la région ombrée à la droite de XY est donc égale à $\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (la différence entre l'aire du secteur $PXQY$ et celle du triangle PXT).
L'aire de la région ombrée de la figure 1 moins celle du petit cercle de diamètre PQ est donc égale à :

$$2\left(\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right) - \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{2}{3}\pi - \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{5}{12}\pi - \tfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}443$$

Parmi les choix de réponse, elle est plus près de 0,44.

Réponse : (E)

24. On dira que les élèves qui ont une taille de 1,60 m sont grands et que ceux qui ont une taille de 1,22 m sont petits.
Pour que la taille moyenne de quatre élèves soit supérieure à 1,50 m, la somme de leurs tailles doit être supérieure à 6,00 m ($4 \times 1{,}50$ m $= 6{,}00$ m).
Si on considère 2 grands élèves et 2 petits élèves, la somme de leurs tailles est égale à 5,64 m ($2 \times 1{,}60$ m $+ 2 \times 1{,}22$ m $= 5{,}64$ m), ce qui est insuffisant.
Dans un groupe de 4 élèves consécutifs, il doit donc y avoir plus de grands élèves et moins de petits élèves.
Si on considère 3 grands élèves et 1 petit élève, la somme de leurs tailles est égale à 6,02 m ($3 \times 1{,}60$ m $+ 1 \times 1{,}22$ m $= 6{,}02$ m), ce qui est suffisant.
Dans l'alignement des élèves de madame Wagner, n'importe quel groupe de 4 élèves consécutifs doit donc contenir au moins 3 grands élèves et au plus 1 petit élève. (4 grands élèves et 0 petit élève donnent aussi une moyenne supérieure à 1,50 m.)
Pour que la taille moyenne de 7 élèves soit inférieure à 1,50 m, la somme de leurs tailles doit être inférieure à $7 \times 1{,}50$ m, ou 10,50 m.
On remarque que la somme des tailles de 6 grands élèves et 1 petit élève est égale à $6 \times 1{,}60$ m $+ 1 \times 1{,}22$ m, ou 10,82 m, tandis que celle de 5 grands élèves et 2 petits élèves est égale à $5 \times 1{,}60$ m $+ 2 \times 1{,}22$ m, ou 10,44 m.
Dans l'alignement des élèves de madame Wagner, n'importe quel groupe de 7 élèves consécutifs.doit donc contenir au plus 5 grands élèves et au moins 2 petits élèves
On détermine maintenant la longueur maximale d'un tel alignement. Un grand élève sera représenté par G et un petit élève sera représenté par P.
Après certains tâtonnements, on découvre GGPGGGPGG.
L'alignement GGPGGGPGG a une longueur de 9. Chaque sous-groupe de 4 élèves consécutifs contient exactement 3 G et chaque sous-groupe de 7 élèves consécutifs contient exactement 5 G. Les moyennes sont donc respectées.
On prétend qu'il s'agit de l'alignement le plus long. La réponse est donc 9, ou (D).
Supposons, au contraire, qu'il y a un alignement de longueur supérieure ou égale à 10 et soit $abcdefghjk$ les 10 premières tailles. On considère le tableau suivant de tailles :

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \\ b & c & d & e & f & g & h \\ c & d & e & f & g & h & j \\ d & e & f & g & h & j & k \end{array}$$

Ce tableau démontre qu'il est impossible d'avoir au moins 10 élèves dans l'alignement.
Chaque rangée du tableau est une liste de tailles de 7 élèves consécutifs de l'alignement $abcdefghjk$.
La somme de chaque rangée est donc inférieure à 10,50 m.
Chaque colonne du tableau est une liste de tailles de 4 élèves consécutifs de l'alignement $abcdefghjk$.
La somme de chaque colonne est donc supérieure à 6,00 m.
La somme des nombres du tableau est la somme des nombres des 4 rangées. Elle doit être inférieure à $4 \times 10{,}50$ m, ou 42,00 m.
La somme des nombres du tableau est la somme des nombres des 7 colonnes. Elle doit être supérieure à $7 \times 6{,}00$ m, ou 42,00 m.
Or, la somme ne peut être inférieure et supérieure à 42,00 m.
Notre hypothèse est donc infirmée et il est donc impossible d'avoir un alignement de longueur supérieure ou égale à 10.
(Il existe plus d'une façon de se convaincre qu'il ne peut pas y avoir plus de 9 élèves dans l'alignement.)

Réponse : (D)

25. On suppose que $m = 500$, $1 \leq n \leq 499$, $1 \leq r \leq 15$, $2 \leq s \leq 9$ et $t = 0$.
Puisque $s > 0$, alors selon l'algorithme, t est égal au reste lorsque r est divisé par s.
Puisque $t = 0$, alors r est un multiple de s. Donc $r = as$, a étant un entier strictement positif.
Puisque $r > 0$, alors selon l'algorithme, s est égal au reste lorsque n est divisé par r.
En d'autres mots, $n = br + s$, b étant un entier strictement positif.
Puisque $r = as$, alors $n = bas + s$, ou $n = (ba + 1)s$.
En d'autres mots, n est un multiple de s. On a donc $n = cs$, c étant un entier strictement positif.
Puisque $n > 0$, alors r est égal au reste lorsque m est divisé par n.
En d'autres mots, $m = dn + r$, d étant un entier strictement positif.
Puisque $r = as$ et $n = cs$, alors $m = dcs + as$, ou $m = (dc + a)s$.
En d'autres mots, m est un multiple de s. On a donc $m = es$, e étant un entier strictement positif.
Or $m = 500$ et $2 \leq s \leq 9$.
Puisque m est un multiple de s, alors s est un diviseur de 500. Les valeurs possibles de s sont donc $s = 2, 4, 5$. (Aucun des nombres $1, 3, 6, 7, 8, 9$ n'est un diviseur de 500.)
On sait que r est un multiple de s, que $r > s$ (puisque s est égal au reste lorsque n est divisé par r) et que $1 \leq r \leq 15$.
Si $s = 5$, alors $r = 10$ ou $r = 15$.
Si $s = 4$, alors $r = 8$ ou $r = 12$.
Si $s = 2$, alors $r = 4, 6, 8, 10, 12, 14$.

Supposons que $s = 5$ et $r = 10$.
Puisque $m = dn + r$, alors $500 = dn + 10$, d'où $dn = 490$.
Donc n est un diviseur de 490. Il est un multiple de 5 (puisque $n = cs$) et doit être supérieur à $r = 10$. Il doit aussi être 5 de plus qu'un multiple de 10 (puisque le reste est s lorsque n est divisé par r).
Puisque $490 = 5 \times 2 \times 7^2$, alors les diviseurs de 490 qui sont multiples de 5 sont les nombres $5, 10, 35, 70, 245$ et 490 (ces nombres sont 5 fois les diviseurs de 2×7^2). Parmi ces nombres, ceux qui sont supérieurs à $r = 10$ et qui ont un reste de 5 lorsqu'on les divise par 10 sont 35 et 245. Dans ce cas, les valeurs possibles de n sont 35 et 245.

Pour chaque paire de valeurs de s et de r, on détermine les valeurs de n qui vérifient les conditions suivantes :

- n est un diviseur de $500 - r$,
- n est un multiple de s,
- n est supérieur à r et
- s est le reste lorsque n est divisé par r.

On remplit le tableau suivant :

s	r	$500 - r$	Diviseurs de $500 - r$ qui sont multiples de s	Valeurs possibles de n
5	10	$490 = 5 \times 2 \times 7^2$	$5, 10, 35, 70, 245, 490$	$35, 245$
5	15	$485 = 5 \times 97$	$5, 485$	485
4	8	$492 = 4 \times 3 \times 41$	$4, 12, 164, 492$	$12, 164, 492$
4	12	$488 = 4 \times 2 \times 61$	$4, 8, 244, 488$	244
2	4	$496 = 2 \times 2^3 \times 31$	$2, 4, 8, 16, 62, 124, 248, 496$	62
2	6	$494 = 2 \times 13 \times 19$	$2, 26, 38, 494$	$26, 38, 494$
2	8	$492 = 2 \times 2 \times 3 \times 41$	$2, 4, 6, 12, 82, 164, 246, 492$	82
2	10	$490 = 2 \times 5 \times 7^2$	$2, 10, 14, 70, 98, 490$	Aucune
2	12	$488 = 2 \times 2^2 \times 61$	$2, 4, 8, 122, 244, 488$	122
2	14	$486 = 2 \times 3^5$	$2, 6, 18, 54, 162, 486$	Aucune

Dans chaque rangée, on écrit $500 - r$ en factorisation première dans la troisième colonne, on écrit les diviseurs de $500 - r$ qui sont multiples de s dans la quatrième colonne et on détermine lesquels sont supérieurs à r et donnent un reste égal à s lorsqu'on les divise par r dans la cinquième colonne.

Les valeurs possibles de n sont $35, 245, 485, 12, 164, 492, 244, 62, 26, 38, 494, 82$ et 122.
Il y en a 13.

Réponse : (E)

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2017

(9^e année – Secondaire III)

le mardi 28 février 2017

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 1er mars 2017

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $\dfrac{4 \times 3}{2+1} = \dfrac{12}{3} = 4$.

Réponse : (A)

2. Dans chacune des rangées, il y a 6 petits carrés dont 1 n'est pas ombré. Il y a donc 5 carrés ombrés par rangée.
Puisqu'il y a 6 rangées, il y a 30 carrés ombrés ($6 \times 5 = 30$).
On peut aussi compter 36 petits carrés dans le quadrillage ($6 \times 6 = 36$) dont 6 ne sont pas ombrés. Il y a donc 30 carrés ombrés ($36 - 6 = 30$) dans le quadrillage.

Réponse : (B)

3. Dans la figure, il y a 5 triangles ombrés et 3 triangles non ombrés. Le rapport du nombre de triangles ombrés au nombre de triangles non ombrés est donc de 5 : 3.

Réponse : (B)

4. On sait que $7 = \sqrt{49}$ et que $\sqrt{40} < \sqrt{49} < \sqrt{50} < \sqrt{60} < \sqrt{70} < \sqrt{80}$.
Parmi les choix, $\sqrt{40}$ ou $\sqrt{50}$ doit donc avoir une valeur plus près de 7.
Puisque $\sqrt{40} \approx 6{,}32$ et $\sqrt{50} \approx 7{,}07$, alors $\sqrt{50}$ a une valeur plus près de 7.

Réponse : (C)

5. On cherche l'heure qui correspond à 30 heures après 14 heures vendredi.
On sait que 24 heures après 14 heures vendredi correspondent à 14 heures samedi.
Or, 30 heures après 14 heures vendredi correspondent à 6 heures plus tard.
Cela correspond à 20 heures samedi.

Réponse : (E)

6. L'intervalle de temps dans lequel le nombre de personnes au zoo a subi la plus grande augmentation correspond à celui dans lequel la longueur du bâton a le plus augmenté dans le diagramme. Il s'agit de l'intervalle de 11 h à 12 h.
(On remarque que les trois premiers bâtons représentent des nombres entre 200 et 400, tandis que les trois derniers bâtons représentent des nombres entre 600 et 800. Seul l'intervalle de 11 h à 12 h indique une augmentation supérieure à 200.)

Réponse : (C)

7. Puisque $2x - 3 = 10$, alors $2x = 13$. On double chaque membre de l'équation pour obtenir $4x = 26$. (Il n'était pas nécessaire d'obtenir la valeur de x.)

Réponse : (D)

8. Les trois entiers dans la liste qui ont un produit de 80 sont 1, 4 et 20, puisque $1 \times 4 \times 20 = 80$. Ces entiers ont une somme de 25 ($1 + 4 + 20 = 25$).
(Puisque 80 est un multiple de 5 et que 20 est le seul entier de la liste qui est un multiple de 5, 20 doit être un des trois entiers que l'on cherche. On doit donc choisir deux autres entiers qui doivent avoir un produit de $\dfrac{80}{20}$, ou 4. Seuls les entiers 1 et 4, dans la liste, satisfont à cette condition.)

Réponse : (C)

9. Puisque Jovin, Anna et Olivia prennent respectivement $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{4}$ de la pizza, la fraction de la pizza qu'il reste pour Wadi est donc égal à :

$$1 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{12}{12} - \tfrac{4}{12} - \tfrac{2}{12} - \tfrac{3}{12} = \tfrac{3}{12} = \tfrac{1}{4}$$

Réponse : (B)

10. Lorsque $n = 1$, les cinq expressions ont pour valeurs respectives $2014, 2018, 2017, 2018$ et 2019.
Lorsque $n = 2$, les cinq expressions ont pour valeurs respectives $2011, 2019, 4034, 2021$ et 2021.
Seule la cinquième expression $(2017 + 2n)$ a une valeur impaire pour ces deux valeurs de n. Elle doit donc être la bonne expression.
On remarque aussi que 2017 est un entier impair et que la valeur de $2n$ est toujours un entier pair. La valeur de $2017 + 2n$ est donc toujours un entier impair.

Réponse : (E)

11. Lorsque Ursula parcourt 30 km à une vitesse de 10 km/h, elle met 3 heures pour le faire $\left(\dfrac{30 \text{ km}}{10 \text{ km/h}} = 3 \text{ h}\right)$.
Puisque Jean met une heure de moins, il met 2 heures pour parcourir 30 km.
Il court donc à une vitesse de 15 km/h $\left(\dfrac{30 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 15 \text{ km/h}\right)$.

Réponse : (D)

12. Puisque l'aire du grand carré est égale à l'aire de la région ombrée plus celle de la région non ombrée, l'aire du grand carré est égale à $2 \times 18 \text{ cm}^2$, ou 36 cm^2.
Les côtés du grand carré ont donc une longueur de $\sqrt{36 \text{ cm}^2}$, ou 6 cm.

Réponse : (C)

13. *Solution 1*
On procède à rebours.
En partant de 28, on ajoute 4 (pour obtenir 32), on divise ce nombre par 2 (pour obtenir 16), puis on soustrait 7 (pour obtenir 9).
Janie a choisi le nombre 9.

Solution 2
On suppose que Janie choisit x.
Après avoir ajouté 7 à ce nombre, elle obtient $x + 7$.
Après avoir multiplié cette somme par 2, elle obtient $2(x + 7)$, ou $2x + 14$.
Après avoir soustrait 4 de ce résultat, elle obtient $(2x + 14) - 4$, ou $2x + 10$.
Puisque son résultat final est 28, alors $2x + 10 = 28$, d'où $2x = 18$, ou $x = 9$.

Réponse : (A)

14. Puisqu'il y a une taxe de 10 % sur chaque appli de 2,00 \$, cette taxe correspond à $2{,}00\,\$ \times \dfrac{10}{100}$, ou 0,20 \$.
Chaque appli coute donc 2,00 \$ + 0,20 \$, ou 2,20 \$ taxe incluse.
Puisque Tristan dépense 52,80 \$ en tout et que $\dfrac{52{,}80}{2{,}20} = 24$, il achète 24 applis en tout.
Donc $m = 24$.

Réponse : (D)

15. Soit c la longueur de chaque côté du carré d'aire k.
Les hauteurs des carrés à la droite ont une somme de $3 + 8$, ou 11.
Les hauteurs des carrés à la gauche ont une somme de $1 + c + 4$, ou $c + 5$.
Puisque ces deux sommes sont égales, alors $c + 5 = 11$, d'où $c = 6$.
Le carré d'aire k a donc des côtés de longueur 6. Son aire est donc égale à 6^2, ou 36.
Donc $k = 36$.

Réponse : (C)

16. Les mesures des six angles au centre ont une somme de 360°.
Donc $140^\circ + 20^\circ + 4x^\circ = 360^\circ$, d'où $4x = 360 - 140 - 20$, ou $4x = 200$. Donc $x = 50$.
La somme des mesures des angles des régions ombrées est donc égale à $140^\circ + 50^\circ + 50^\circ$, ou 240°.
La partie favorable de l'angle plein au centre occupe donc un angle de 240° et l'angle plein au centre mesure 360° La probabilité pour que la flèche s'arrête dans un secteur ombré est égale à $\frac{240^\circ}{360^\circ}$, ou $\frac{2}{3}$. (On omet la possibilité que la flèche s'arrête sur une ligne entre les secteurs en supposant que les lignes sont infiniment minces.)

Réponse : (A)

17. Puisqu'Igor est plus petit que Jie, Igor ne peut être le plus grand.
Puisque Faye est plus grande que Goa, Goa ne peut être la plus grande.
Puisque Jie est plus grande que Faye, Faye ne peut être la plus grande.
Puisque Han est plus petit que Goa, Han ne peut être le plus grand.
Seule Jie n'a pas été éliminée. Elle est donc la plus grande.

Réponse : (E)

18. D'après la droite numérique, on peut conclure que $x < x^3 < x^2$.
Si $x > 1$, les puissances successives de x sont croissantes (c.-à-d. que $x < x^2 < x^3$).
Puisque ce n'est pas le cas ici, ce n'est pas vrai que $x > 1$.
Si $x = 0$ ou $x = 1$, les puissances successives de x sont égales. Or, ce n'est pas le cas ici non plus.
Si $0 < x < 1$, les puissances successives de x sont décroissantes (c.-à-d. que $x^3 < x^2 < x$). Or, ce n'est pas le cas ici non plus.
On doit donc avoir $x < 0$.
Si $x < -1$, on doit avoir $x^3 < x < 0 < x^2$. En effet lorsque $x < -1$, x est négatif et en plus, $x^2 > 1$. On a donc $x^3 = x^2 \times x < 1 \times x$. Or, ce n'est pas le cas ici non plus.
Par élimination, on doit donc avoir $-1 < x < 0$.
Parmi les choix de réponse, la seule valeur possible de x est $-\frac{2}{5}$.
On peut vérifier. Lorsque $x = -\frac{2}{5} = -0{,}4$, alors $x^2 = 0{,}16$ et $x^3 = -0{,}064$ et on a donc $x < x^3 < x^2$. On peut aussi vérifier qu'aucun autre choix de réponse ne place x, x^2 et x^3 dans l'ordre approprié.

Réponse : (C)

19. Puisque $\angle XMZ = 30^\circ$ et $\angle XMY = 180^\circ - \angle XMZ$, alors $\angle XMY = 150^\circ$.
Puisque les mesures des angles du triangle XMY ont une somme de 180°, alors :

$$\angle YXM = 180^\circ - \angle XYZ - \angle XMY = 180^\circ - 15^\circ - 150^\circ = 15^\circ$$

(OU : Puisque l'angle XMZ est un angle extérieur du triangle XMY, alors

$$\angle XMZ = \angle YXM + \angle XYM$$

d'où $\angle YXM = 15^\circ$.)
Puisque $\angle XYM = \angle YXM$, le triangle XMY est isocèle et $MX = MY$.
Puisque M est le milieu de YZ, alors $MY = MZ$.
Puisque $MX = MY$ et $MY = MZ$, alors $MX = MZ$.
Le triangle XMZ est donc isocèle et $\angle XZM = \angle ZXM$.
Donc $\angle XZY = \angle XZM$, d'où $\angle XZY = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle XMZ)$, ou $\angle XZY = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ)$, ou $\angle XZY = 75^\circ$.

Réponse : (A)

20. Le cube $n \times n \times n$ est appelé *grand cube* et les cubes $1 \times 1 \times 1$ sont appelés *cubes unités*.
Les cubes unités ayant 0 face dorée sont ceux qui sont à l'intérieur du grand cube. En d'autres mots, ce sont les cubes unités qui n'ont aucune face sur la surface extérieure du grand cube.
Ces cubes unités forment un cube de dimensions $(n-2) \times (n-2) \times (n-2)$.
Pour s'en convaincre, on imagine le grand cube initial, recouvert de peinture dorée, que l'on a posé sur une table.
Tous les cubes unités qui ont au moins une face dorée ont au moins une face sur la surface extérieure du grand cube.
On enlève d'abord les cubes unités qui forment la face inférieure et la face supérieure du grand cube. Il reste alors un prisme droit à base rectangulaire dont la base mesure toujours $n \times n$ et qui a une hauteur de $n-2$.
On enlève maintenant les cubes unités qui forment les faces du devant, de l'arrière, du côté droit et du côté gauche du prisme.
Il reste un cube de dimensions $(n-2) \times (n-2) \times (n-2)$.
Il reste donc $(n-2)^3$ cubes unités ayant 0 face dorée.

Les cubes unités qui ont exactement 1 face dorée sont ceux qui formaient une face extérieure du grand cube, mais qui ne formaient pas une arête du grand cube.
Chacune des six faces de dimensions $n \times n$ du grand cube est formée de n^2 unités.
Les cubes unités qui ont 1 face dorée ont une face sur la surface extérieure du grand cube, mais leur face dorée ne touche pas à une arête du grand cube. À l'aide d'un argument semblable à l'argument précédent, on peut conclure que les cubes unités qui ont exactement 1 face dorée forment un carré de dimensions $(n-2) \times (n-2)$ sur chaque face du grand cube.
Sur chacune des 6 faces du grand cube, il y a donc $(n-2)^2$ cubes unités qui ont exactement une face dorée, c'est-à-dire $6(n-2)^2$ cubes unités en tout qui ont exactement une face dorée.
On calcule les valeurs de $(n-2)^3$ et de $6(n-2)^2$ pour chacun des choix de réponse pour n :

Choix	n	$(n-2)^3$	$6(n-2)^2$
(A)	7	125	150
(B)	8	216	216
(C)	9	343	294
(D)	10	512	384
(E)	4	8	24

D'après ce tableau, la plus petite valeur de n pour laquelle la valeur de $(n-2)^3$ est supérieure à celle de $6(n-2)^2$ doit être $n = 9$.

On peut le voir de façon différente en posant la question « Quant la valeur de $(n-2)^3$ est-elle plus grande que celle de $6(n-2)^2$? ».
On remarque que $(n-2)^3 = (n-2) \times (n-2)^2$ et que $6(n-2)^2 = 6 \times (n-2)^2$. Donc $(n-2)^3$ est supérieur à $6(n-2)^2$ lorsque $(n-2)$ est supérieur à 6, c'est-à-dire lorsque n supérieur à 8.
La plus petite valeur possible de n pour laquelle le nombre de cubes unités ayant 0 face dorée est plus grand que le nombre de cubes unités ayant exactement 1 face dorée est $n = 9$.

Réponse : (C)

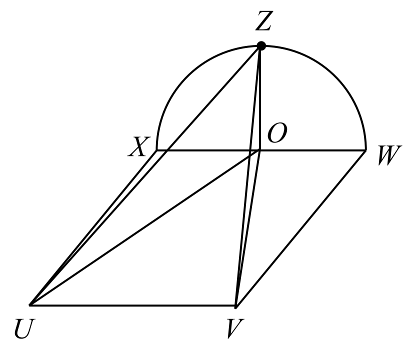
21. Les moyennes des groupes de trois nombres sont égales lorsque les sommes des trois nombres dans chaque groupe sont égales, puisque chaque moyenne est égale à la somme divisée par 3.
Donc dans ce problème, les trois moyennes des trois groupes de trois nombres sont égales lorsque les sommes des trois nombres des trois groupes sont égales.
Les neuf nombres donnés ont une somme égale à :

$$1 + 5 + 6 + 7 + 13 + 14 + 17 + 22 + 26 = 111$$

Lorsqu'on les partage en trois groupes ayant une même somme, chaque groupe a une somme de $\frac{111}{3}$, ou 37.
Dans le groupe du milieu, deux des trois nombres sont 13 et 17 et ils ont une somme de 30. Le troisième nombre doit donc être $37 - 30$, ou 7. On remarque que les autres nombres peuvent être séparés en deux groupes ayant chacun une somme de 37, soit $5, 6, 26$ et $1, 14, 22$.
Donc, le nombre 7 a été placé dans le cercle ombré.

Réponse : (D)

22. Le périmètre du triangle UVZ est égal à $UV + UZ + VZ$.
On sait que $UV = 20$. Il reste à déterminer UZ et VZ.
Soit O le point sur XW qui est directement en dessous de Z.
Puisque Z est le point le plus haut sur le demi-disque de diamètre XW, alors O est le centre du demi-disque.
On trace les segments UO, VO, UZ et VZ.



Puisque $UVWX$ est un rectangle, alors $XW = UV = 20$ et $UX = VW = 30$.
Puisque XW est un diamètre du demi-disque de centre O, alors O est le milieu de XW. Donc $XO = WO = 10$.
Le demi-disque a donc un rayon de 10, d'où $OZ = 10$.
Les triangles UXO et VWO sont rectangles puisque $UVWX$ est un rectangle.
D'après le théorème de Pythagore,

$$UO^2 = UX^2 + XO^2$$

d'où $UO^2 = 30^2 + 10^2$, ou $UO^2 = 900 + 100$, ou $UO^2 = 1000$. De même, $VO^2 = VW^2 + WO^2$, d'où $VO^2 = 30^2 + 10^2$, ou $VO^2 = 1000$.
Chacun des triangles UOZ et VOZ est rectangle en O, puisque le demi-disque est vertical et le rectangle est horizontal.
D'après le théorème de Pythagore, $UZ^2 = UO^2 + OZ^2$ et $VZ^2 = VO^2 + OZ^2$.
Puisque $UO^2 = VO^2 = 1000$, alors $UZ^2 = VZ^2 = 1000 + 10^2$, d'où $UZ^2 = VZ^2 = 1100$.
Donc $UZ = VZ = \sqrt{1100}$.
Le périmètre du triangle UVZ est donc égal à $20 + 2\sqrt{1100}$, ou environ 86,332.
Le choix de réponse le plus près est 86.

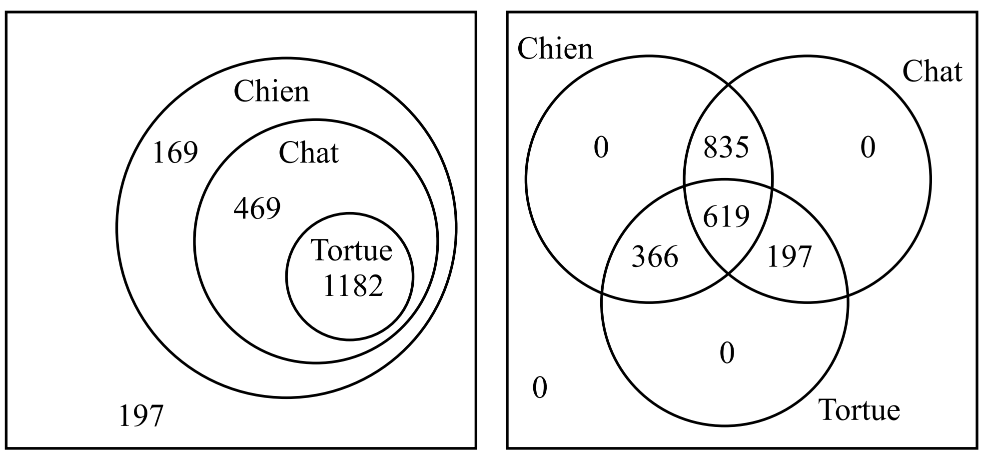
Réponse : (B)

23. Les entiers strictement positifs d'un chiffre, $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, ont pour carrés respectifs $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64$ et 81.
Parmi ces carrés $1, 25$ et 36 se terminent par le même chiffre que celui de leur racine carrée.
En d'autres mots, 1, 5 et 6 sont des nombres Anderson.
Donc, 6 est le seul nombre Anderson pair d'un chiffre.
Pour déterminer tous les nombres Anderson de deux chiffres, on remarque qu'un tel nombre k doit avoir 6 pour chiffre des unités. En effet, le chiffre des unités de k doit être le même que celui de k^2 (selon la définition des nombres Anderson) et chaque chiffre des unités de k détermine complètement celui de k^2. (On peut le voir en faisant des multiplications à la main.)
On cherche donc des nombres Anderson k de deux chiffres ayant pour chiffres $c6$.
Puisque le chiffre c représente le nombre de dizaines et que le 6 représente le nombre d'unités, ce nombre $c6$ peut s'écrire sous forme $k = 10c + 6$.
Donc $k^2 = (10c+6)^2 = (10c+6)(10c+6) = (10c)^2 + 6(10c) + 10c(6) + 6^2 = 100c^2 + 120c + 36$.
On remarque que $k^2 = 100(c^2 + c) + 10(2c + 3) + 6$. Le chiffre des unités de k^2 est donc 6.
Pour que k soit un nombre Anderson, il faut que le chiffre des dizaines de k^2 soit c, c'est-à-dire que les deux derniers chiffres de k^2 soient $c6$.
Donc, le chiffre des dizaines de k^2 doit être égal au chiffre des unités de $2c + 3$.
Donc $k = 10c + 6$ est un nombre Anderson lorsque le chiffre des unités de $2c + 3$ est le chiffre c.
On vérifie les 9 valeurs possibles de c pour conclure que la seule qui vérifie la condition est $c = 7$.
Donc, $k = 76$ est le seul nombre Anderson pair de deux chiffres.
On peut vérifier que $76^2 = 5776$ et que ce dernier nombre se termine par 76.
On cherche maintenant un nombre Anderson pair k de trois chiffres.
En utilisant un argument semblable au précédent, on conclut que les chiffres de k sont $b76$.
En d'autres mots, $k = 100b + 76$ pour un chiffre b quelconque.
On a $k^2 = (100b + 76)^2 = 10000b^2 + 15200b + 5776$.
Les chiffres des dizaines et des unités de k^2 sont 76. Pour que k soit un nombre Anderson, le chiffre des centaines de k^2 doit être b.
Or, $k^2 = 1000(10b^2 + 15b + 5) + 100(2b + 7) + 76$.
Donc, k est un nombre Anderson lorsque le chiffre des unités de $2b + 7$ est b.
On vérifie les 9 valeurs possibles de b pour conclure que la seule qui vérifie la condition est $b = 3$.
Donc, $k = 376$ est le seul nombre Anderson pair de trois chiffres.
On peut vérifier que $376^2 = 141\,376$ et que ce nombre se termine par 376.
Puisque les nombres Anderson sont inférieurs à $10\,000$, il nous reste à déterminer les nombres Anderson pairs de quatre chiffres.
En utilisant un argument semblable au précédent, on conclut que les chiffres de k sont $a376$.
En d'autres mots, $k = 1000a + 376$ pour un chiffre a quelconque.
On a $k^2 = (1000a + 376)^2 = 1\,000\,000a^2 + 752000a + 141\,376$.
Les chiffres des centaines, des dizaines et des unités de k^2 sont 376. Pour que k soit un nombre Anderson, le chiffre des milliers de k^2 doit être a.
Or, $k^2 = 10000(100a^2 + 75a + 14) + 1000(2a + 1) + 376$.
Donc, k est un nombre Anderson lorsque le chiffre des unités de $2a + 1$ est a.
On vérifie les 9 valeurs possibles de a pour conclure que la seule qui vérifie la condition est $a = 9$.
Donc, $k = 9376$ est le seul nombre Anderson pair de quatre chiffres.
On peut vérifier que $9376^2 = 87\,909\,376$ et que ce nombre se termine par 9376.
Donc S, la somme des tous les nombres Anderson pairs, est égale à $6 + 76 + 376 + 9376$, ou 9834.
La somme de tous les chiffres de S est égale à $9 + 8 + 3 + 4$, ou 24.

Réponse : (E)

24. Puisque 1182 maisons abritent une tortue, il ne peut y avoir plus de 1182 maisons qui abritent un chien, un chat et une tortue.
Puisqu'il y a plus de maisons qui abritent un chien et plus de maisons qui abritent un chat que de maisons qui abritent une tortue, il est possible que toutes les 1182 qui abritent une tortue abritent aussi un chien et un chat.
Puisque le plus grand nombre possible de maisons qui abritent un chien, un chat et une tortue est égal à 1182, on a $x = 1182$.

Puisque 1182 maisons abritent une tortue et qu'il y a 2017 maisons en tout, il y a 835 maisons qui n'abritent aucune tortue ($2017 - 1182 = 835$).
Or, 1651 maisons abritent un chat.
Puisque 835 maisons n'abritent aucune tortue, il y a au plus 835 maisons qui abritent un chat, mais pas une tortue. En d'autres mots, les maisons qui n'abritent une tortue n'abritent pas nécessairement toutes un chat.
Il y a donc au moins 816 maisons ($1651 - 835 = 816$) qui abritent une tortue et un chat.
Enfin, 1820 maisons abritent un chien.
Puisqu'au moins 816 maisons qui abritent une tortue et un chat, il y a au plus 1201 maisons ($2017 - 816 = 1201$) qui n'abritent aucune tortue ou aucun chat (ou ni l'un, ni l'autre).
Puisque 1820 maisons abritent un chat, il y a au moins 619 maisons ($1820 - 1201 = 619$) qui abritent un chien, un chat et une tortue.
En d'autres mots, le plus petit nombre possible de maisons qui abritent un chien, un chat et une tortue est égal à 619. Donc $y = 619$.
Les deux diagrammes de Venn suivants montrent que chacune de ces situations est possible :



Puisque $x = 1182$ et $y = 619$, alors $x - y = 563$.

Réponse : (C)

25. Soit $vwxyz$ le nombre de 5 chiffres choisi par Sam, chaque lettre étant un chiffre indiquant la valeur positionnelle.
Puisque $vwxyz$ et 71794 ont 0 chiffre conforme, alors $v \neq 7$ et $w \neq 1$ et $x \neq 7$ et $y \neq 9$ et $z \neq 4$.
Puisque $vwxyz$ et 71744 ont un chiffre conforme, alors selon ce qui précède, on a $y = 4$.
Puisque $vwx4z$ et 51545 ont deux chiffres conformes et que $w \neq 1$, alors $vwxyz$ doit avoir une des formes suivantes : $5wx4z$ ou $vw54z$ ou $vwx45$.

1^er^ cas : $vwxyz = 5wx4z$

Puisque $5wx4z$ et 21531 ont 1 chiffre conforme et que $w \neq 1$, alors $x = 5$ ou $z = 1$.
Si $x = 5$, alors $5wx4z$ et 51545 auraient 3 chiffres conformes, ce qui contredit la condition donnée.
Donc $z = 1$.
Donc $vwxyz = 5wx41$ et on sait que $w \neq 1$ et $x \neq 5, 7$.

Jusqu'à maintenant, ce nombre satisfait aux 1re, 2e, 3e et 7e rangées du tableau.
Puisque $5wx41$ et 59135 ont 1 chiffre conforme et que $v = 5$, on a $w \neq 9$ et $x \neq 1$.
Puisque $5wx41$ et 58342 ont 2 chiffres conformes et que $v = 5$ et $y = 4$, on a $w \neq 8$ et $x \neq 3$.
Puisque $5wx41$ et 37348 ont 2 chiffres conformes et que $y = 4$, alors $w = 7$ ou $x = 3$.
Or, on sait déjà que $x \neq 3$. Donc $w = 7$.
On a donc $vwxyz = 57x41$ avec $x \neq 1, 3, 5, 7$ comme restrictions.
Les entiers $57041, 57241, 57441, 57641, 57841$ et 57941 vérifient ces conditions. Ce sont donc des candidats pour le nombre que Sam a choisi.

2e cas : $vwxyz = vw54z$
Puisque $vw54z$ et 51545 ont 2 chiffres conformes, alors $v \neq 5$ et $z \neq 5$.
Puisque $vw54z$ et 21531 ont 1 chiffre conforme et que $x = 5$, alors $v \neq 2$ et $z \neq 1$. (On sait déjà que $w \neq 1$.)
Puisque $vw54z$ et 59135 ont 1 chiffre conforme, alors $v = 5$ ou $w = 9$ ou $z = 5$.
On doit donc avoir $w = 9$, car on a déjà $v \neq 5$ et $z \neq 5$.
Donc $vwxyz = v954z$ et $v \neq 2, 7, 5$ et $z \neq 1, 4, 5$.
Jusqu'à maintenant, ce nombre satisfait aux 1re, 2e, 3e, 4e et 7e rangées du tableau.
Puisque $v954z$ et 58342 ont 2 chiffres conformes et que $v \neq 5$, alors $z = 2$.
Puisque $v9542$ et 37348 ont 2 chiffres conformes, alors $v = 3$.
Dans ce cas, l'entier 39542 est le seul entier possible. Il vérifie toutes les conditions.

3e cas : $vwxyz = vwx45$
Puisque $vwx45$ et 21531 ont 1 chiffre conforme et que $w \neq 1$, alors $v = 2$ ou $x = 5$.
Or si $x = 5$, alors $vw545$ et 51545 auraient 3 chiffres conformes. Donc $x \neq 5$ et $v = 2$.
Donc, $vwxyz = 2wx45$ et on sait que $w \neq 1$ et $x \neq 5, 7$.
Jusqu'à maintenant, ce nombre satisfait aux 1re, 2e, 3e et 7e rangées du tableau.
Puisque $2wx45$ et 59135 ont 1 chiffre conforme et que $z = 5$, on a $w \neq 9$ et $x \neq 1$.
Puisque $2wx45$ et 58342 ont 2 chiffres conformes, alors $w = 8$ ou $x = 3$, mais pas les deux.
Puisque $2wx45$ et 37348 ont 2 chiffres conformes, alors $w = 7$ ou $x = 3$, mais pas les deux.
Si $w = 8$, on doit avoir $x \neq 3$. Donc ni $w = 7$, ni $x = 3$ n'est vrai.
On doit donc avoir $x = 3$ et $w \neq 7, 8$.
On a donc $vwxyz = 2w345$, avec $w \neq 1, 7, 8, 9$ comme restrictions.
Les entiers $20345, 22345, 23345, 24345, 25345$ et 26345 vérifient ces conditions. Ce sont donc des candidats pour le nombre que Sam a choisi

Il y a donc 13 possibilités pour le nombre que Sam a choisi. Leur somme est égale à 526758.

Réponse : (E)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2016

(9^{e} année – Secondaire III)

le mercredi 24 février 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 25 février 2016
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $300 + 2020 + 10001 = 12321$

Réponse : (E)

2. On évalue chacune des cinq expressions :

$$4^2 = 16 \qquad 4 \times 2 = 8 \qquad 4 - 2 = 2 \qquad \frac{4}{2} = 2 \qquad 4 + 2 = 6$$

L'expression qui a la plus grande valeur est 4^2 qui a une valeur de 16.

Réponse : (A)

3. Puisque le quadrillage est formé de carrés 1×1, les six segments de droites continus, dans l'ordre du haut vers le bas, ont pour longueurs respectives 5, 1, 4, 2, 3 et 3.
La longueur totale de ces segments est égale à $5 + 1 + 4 + 2 + 3 + 3$, ou 18.

On pourrait aussi combiner les deux premiers segments pour faire un segment de longueur 6. Il en est de même pour les deux segments suivants et pour les deux derniers segments. La longueur totale est donc égale à 3×6, ou 18.

Réponse : (D)

4. Chacun des cinq carrés mesure 1×1. La surface totale a donc une aire de 5 et les deux carrés ombrés ont une aire totale de 2.
Le rapport de l'aire de la partie ombrée à l'aire totale est égal à : $\frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\,\%$
Donc, $40\,\%$ de la surface totale est ombrée.

Réponse : (D)

5. Sur une droite numérique, la graduation est régulière. Puisqu'il y a 6 espaces entre 0 et 30, chaque espace a une longueur égale à $\frac{30}{6}$, ou 5.
Puisque n est situé à 2 espaces à la droite de 60, alors $n = 60 + 2 \times 5$, ou $n = 70$.
Puisque m est situé à 3 espaces à la gauche de 30, alors $m = 30 - 3 \times 5$, ou $m = 15$.
Donc $n - m = 70 - 15$, ou $n - m = 55$.

Réponse : (C)

6. D'après la définition, on a : $\begin{array}{c|c} 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \end{array} = 4 \times 3 - 5 \times 2 = 12 - 10 = 2$

Réponse : (C)

7. Puisque 100 cm font 1 m, alors 1 cm vaut 0,01 m. Donc, 3 cm valent 0,03 m.
Puisque 1000 mm font 1 m, alors 1 mm vaut 0,001 m. Donc, 5 mm valent 0,005 m.
Donc, 2 m plus 3 cm plus 5 mm valent $(2 + 0{,}03 + 0{,}005)$ m, ou 2,035 m.

Réponse : (A)

8. Puisque $x = 3$ et $y = 2x$, alors $y = 2 \times 3$, ou $y = 6$
Puisque $y = 6$ et $z = 3y$, alors $z = 3 \times 6$, ou $z = 18$
La moyenne de x, y et z est donc égale à : $\dfrac{x + y + z}{3} = \dfrac{3 + 6 + 18}{3} = 9$

Réponse : (D)

9. Si une équipe A rencontre une équipe B et que l'équipe B remporte une victoire, alors celle-ci a marqué plus de buts que l'équipe A ; dans le cas d'une égalité, les deux équipes ont marqué un même nombre de buts.

Donc si une équipe a 0 victoire, 1 défaite et 2 égalités, elle a marqué moins de buts que l'équipe adverse une fois (lors de la défaite) et le même nombre de buts que l'équipe adverse deux fois (lors des deux égalités).
Dans ces trois rencontres, elle a donc marqué moins de buts contre ses adversaires que ceux-ci n'ont marqués contre elle.
Or, selon l'énoncé, l'équipe a compté plus de buts que ses adversaires n'en ont comptés contre elle. Il est donc impossible qu'elle ait 0 victoire, 1 défaite et 2 égalités.

Si on examine chacun des choix de réponse (A), (B), (D) et (E), on voit qu'il est possible pour l'équipe d'obtenir le résultat indiqué et de marquer plus de buts que les adversaires n'en ont comptés contre elle.
Ceci élimine chacun de ces choix et indique que le choix (C) est impossible.
(A) : Si l'équipe gagne 2-0 et 3-0 et fait match nul 1-1, elle a marqué 6 buts et les adversaires ont marqué 1 but.
(B) : Si l'équipe gagne 4-0 et perd 1-2 et 2-3, elle a marqué 7 buts et les adversaires ont marqué 5 buts.
(D) : Si l'équipe gagne 4-0, perd 1-2 et fait match nul 1-1, elle a marqué 6 buts et les adversaires ont marqué 3 buts.
(E) : Si l'équipe gagne 2-0 et fait deux matchs nuls 1-1 et 2-2, elle a marqué 5 buts et les adversaires ont marqué 3 buts.
Donc, seul le résultat de 0 victoire, 1 défaite et 2 égalités est impossible étant donné que l'équipe a compté plus de buts que ses adversaires n'en ont comptés contre elle.

Réponse : (C)

10. *Solution 1*
Dans la figure, on peut voir 3 des 6 faces du cube, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ du cube.
Les 3 autres faces (c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ du cube) ne sont pas ombrées.
On voit que $\frac{1}{2}$ de la surface des faces visibles est ombrée.
Donc $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{4}$ de la surface totale du cube est ombrée.

Solution 2
Puisque le cube mesure $2 \times 2 \times 2$, chaque face a une aire égale à 2×2, ou 4.
Puisque le cube a 6 faces, la surface totale du cube a une aire égale à 6×4, ou 24.
Chaque face visible est à moitié ombrée, puisque chaque face carrée est coupée en deux parties égales par une diagonale.
Donc, chaque surface ombrée a une aire de 2. Donc $\frac{6}{24}$, ou $\frac{1}{4}$ de la surface totale est ombrée.

Réponse : (B)

11. Le 7^{e} nombre oblong est le nombre de points dans un tableau rectangulaire de 7 colonnes et 8 rangées. Il est donc égal à 7×8, ou 56.

Réponse : (C)

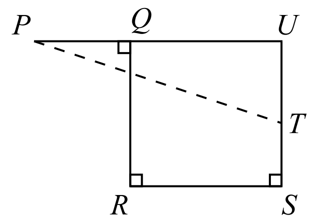
12. Puisque le carré $QRST$ a une aire de 36, ses côtés ont une longueur de $\sqrt{36}$, ou 6.
Donc $QR = 6$ et $RS = 6$.
Puisque $PQ = \frac{1}{2}QR$, alors $PQ = 3$.
Or $PR = PQ + QR$, d'où $PR = 3 + 6$, ou $PR = 9$.
Le rectangle $PRSU$ a une hauteur de 6 et une largeur de 9.
Donc, $PRSU$ a pour périmètre $2(6) + 2(9)$, ou $12 + 18$, ou 30.

Réponse : (B)

13. D'après l'énoncé, on a $10x = x + 20$.
Donc $9x = 20$, d'où $x = \frac{20}{9}$.

Réponse : (B)

14. On prolonge PQ et ST jusqu'à ce qu'ils se coupent en U.



Puisque $QUSR$ admet trois angles droits, son quatrième angle doit aussi être droit. $QUSR$ est donc un rectangle.
Le triangle PUT est donc rectangle en U.
D'après le théorème de Pythagore, $PT^2 = PU^2 + UT^2$.
Or $PU = PQ + QU$ et $QU = RS$. Donc $PU = 4 + 8$, ou $PU = 12$.
De plus, $UT = US - ST$ et $US = QR$. Donc $UT = 8 - 3$, ou $UT = 5$.
Donc $PT^2 = 12^2 + 5^2$, ou $PT^2 = 144 + 25$, ou $PT^2 = 169$.
Puisque $PT > 0$, alors $PT = \sqrt{169}$, ou $PT = 13$.

Réponse : (E)

15. Puisque $75 = 3 \times 5 \times 5$, on peut exprimer 75 comme produit de deux entiers de trois façons différentes :

$$75 = 1 \times 75 = 3 \times 25 = 5 \times 15$$

Puisque p et q sont des entiers positifs et que $pq = 75$, les valeurs possibles de p sont donc $1, 3, 5, 15, 25, 75$.
La somme de toutes ces valeurs est donc égale à $1 + 3 + 5 + 15 + 25 + 75$, ou 124.

Réponse : (E)

16. De 10 à 99, il y a 90 entiers. (On pouvait faire $99 - 9 = 90$ ou $90 = 99 - 10 + 1$.) Il y a donc 90 choix équiprobables possibles.
Les choix favorables sont les nombres qui admettent au moins un chiffre 6. Le chiffre 6 peut être un chiffre des unités ou un chiffre des dizaines.
Parmi les choix possibles, les nombres dont le chiffre des unités est un 6 sont 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96.
Parmi les choix possibles, les nombres dont le chiffre des dizaines est un 6 sont 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69.
En tout, il y a 18 nombres favorables. (Puisque 66 fait partie des deux listes, on ne le compte qu'une fois et on a donc $9 + 10 - 1 = 18$.)
La probabilité pour qu'au moins un des chiffres du nombre choisi soit un 6 est donc égale à $\frac{18}{90}$, ou $\frac{1}{5}$.

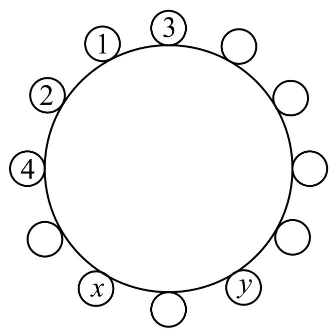
Réponse : (A)

17. Le nombre que l'on cherche est un multiple commun des nombres 10, 11, 12, 13, 14 et 15.
Parmi ces nombres, 11 et 13 sont des nombres premiers.
De plus, $10 = 2 \times 5$, $12 = 2 \times 2 \times 3$, $14 = 2 \times 7$ et $15 = 3 \times 5$.
Un entier N est un multiple commun des nombres 10, 11, 12, 13, 14 et 15, s'il admet deux facteurs 2, un facteur 3, un facteur 5, un facteur 7, un facteur 11 et un facteur 13.

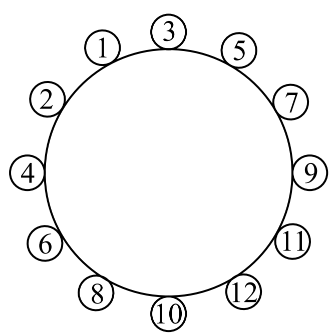
Or $2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 60\,060$.
(Ce nombre est le plus petit commun multiple de 10, 11, 12, 13, 14 et 15.)
Pour trouver le plus petit entier positif de six chiffres qui est divisible par chacun des nombres 10, 11, 12, 13, 14 et 15, on peut chercher le plus petit multiple de 60 060 qui est composé de six chiffres.
Or, $1 \times 60\,060 = 60\,060$ et $2 \times 60\,060 = 120\,120$.
Le plus petit entier positif de six chiffres qui est divisible par chacun des nombres 10, 11, 12, 13, 14 et 15 est donc 120 120.
Le chiffre des dizaines de ce nombre est 2.

Réponse : (C)

18. Puisque deux entiers en positions adjacentes doivent avoir une différence de 2 ou moins, les voisins possibles de 1 sont 2 et 3.
Puisque 1 a exactement deux voisins, il doit donc être placé entre 2 et 3. Mais doit-on le placer à la droite ou à la gauche du 3 ?
Les voisins possibles du 2 sont 1, 3 et 4. Or, on sait que 1 est un voisin de 2. Il reste 3 et 4 comme autre voisin possible de 2. Le nombre 3 ne peut être un voisin de 2, car le 1 est entre 2 et 3. Donc, le 2 est entre le 1 et le 4.
On a donc la situation suivante :



Les voisins possibles de 3 sont 1, 2, 4 et 5. On sait que le 1 est déjà un voisin de 3 et que les nombres 2 et 4 ne le sont pas. Donc, le 5 doit être un voisin de 3.
Les voisins possibles de 4 sont 2, 3, 5 et 6. On sait que le 2 est déjà un voisin de 4 et que les nombres 3 et 5 ne le sont pas. Donc, le 6 doit être un voisin de 4.
On continue de la même manière pour obtenir la situation suivante :



On remarque que les nombres pairs se suivent sur la gauche et que les nombres impairs se suivent sur la droite et que lorsqu'ils se rencontrent (avec 12 et 11), la condition est toujours satisfaite. Donc $x = 8$ et $y = 12$. On a donc $x + y = 20$.

Réponse : (D)

19. Soit n le nombre de questions dans le test.
Puisque Camille a obtenu un résultat de 50 % sur le test, il a répondu correctement à $\frac{1}{2}n$ questions.
Puisqu'il y avait n questions en tout, après les 20 premières questions il restait $n - 20$ questions.
Or, on sait que Camille a répondu à 16 des 20 premières questions et à 25 % des questions suivantes.
Camille a donc répondu correctement à $\frac{1}{4}(n-20)$ des questions suivantes.
Le nombre total de réponses correctes est donc égal à $\frac{1}{2}n$ et à $13 + \frac{1}{4}(n-20)$.
Donc $\frac{1}{2}n = 13 + \frac{1}{4}(n-20)$, d'où $2n = 52 + (n-20)$, d'où $n = 32$.

Réponse : (C)

20. Puisque les angles TQP et RQU sont opposés par le sommet, alors $\angle RQU = \angle TQP = x^\circ$.
De même, $\angle QRU = \angle VRS = y^\circ$.
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors :

$$\angle QUR = 180^\circ - \angle RQU - \angle QRU = 180^\circ - x^\circ - y^\circ$$

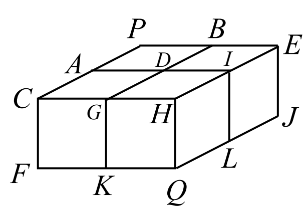
Or, les angles WQP et WQR sont supplémentaires, puisqu'ils forment un angle plat.
Donc $\angle WQR = 180^\circ - \angle WQP$, ou $\angle WQR = 180^\circ - 2x^\circ$.
De même, $\angle WRQ = 180^\circ - \angle WRS$, ou $\angle WRQ = 180^\circ - 2y^\circ$.
Puisque les mesures des angles du triangle WQR ont une somme de 180°, alors :

$$\begin{array}{rcl} 38^\circ + (180^\circ - 2x^\circ) + (180^\circ - 2y^\circ) & = & 180^\circ \\ 218^\circ & = & 2x^\circ + 2y^\circ \\ x^\circ + y^\circ & = & 109^\circ \end{array}$$

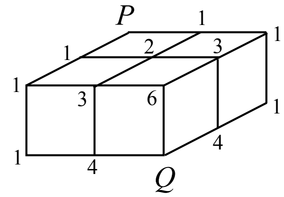
Aussi, $\angle QUR = 180^\circ - x^\circ - y^\circ$, ou $\angle QUR = 180^\circ - (x^\circ + y^\circ)$. Donc $\angle QUR = 180^\circ - 109^\circ$, ou $\angle QUR = 71^\circ$.

Réponse : (A)

21. On nomme les points de la figure comme suit :



Pour se rendre à n'importe quel des points A, C, F, B, E ou J, il n'y a qu'un seul chemin correspondant. Par exemple, pour se rendre au point F, l'écureuil doit marcher de P à A à C à F.
Pour se rendre au point D, il y a 2 chemins, soit 1 chemin qui passe par A et 1 chemin qui passe par B.
De même, le nombre de chemins pour se rendre au point G est égal au nombre de chemins qui se rendent à C plus le nombre de chemins qui se rendent à D (c.-à-d. $1 + 2 = 3$), car pour se rendre au point G, on doit prendre exactement un chemin qui passe par C ou un chemin qui passe par D.
On continue de la sorte pour indiquer sur la figure les nombres de chemins qui se rendent à chacun des points H, I, K et L.



Pour se rendre à Q, l'écureuil doit emprunter un des chemins qui passent par H, K ou L. Le nombre de chemins qui mènent à Q est donc égal à $6 + 4 + 4$, ou 14.

Réponse : (A)

22. *Solution 1*

Lorsque les n élèves sont placés en groupes de 2, soit g le nombre de groupes complets et il y a un groupe incomplet.
Puisque ce sont des groupes de 2, le groupe incomplet doit donc avoir 1 élève.
Donc $n = 2g + 1$.
Puisque le nombre de groupes complets de 2 élèves est 5 de plus que le nombre de groupes complets de 3 élèves, il y avait $g - 5$ groupes complets de 3 élèves.
Après que les élèves sont en groupes de 3, il reste un groupe incomplet qui doit comprendre 1 ou 2 élèves.
On a donc $n = 3(g - 5) + 1$ ou $n = 3(g - 5) + 2$.
Si $n = 2g + 1$ et $n = 3(g - 5) + 1$, alors $2g + 1 = 3(g - 5) + 1$, ou $2g + 1 = 3g - 14$, d'où $g = 15$.
Dans ce cas, puisque $n = 2g + 1$, alors $n = 31$. Il y avait donc 15 groupes complets de 2 élèves et 10 groupes complets de 3 élèves.
Si $n = 2g + 1$ et $n = 3(g - 5) + 2$, alors $2g + 1 = 3(g - 5) + 2$, ou $2g + 1 = 3g - 13$, d'où $g = 14$.
Dans ce cas, puisque $n = 2g + 1$, alors $n = 29$. Il y avait donc 14 groupes complets de 2 élèves et 9 groupes complets de 3 élèves.
Si $n = 31$, on pourrait diviser 31 élèves en 7 groupes complets de 4 élèves et 1 groupe incomplet.
Si $n = 29$, on pourrait diviser 29 élèves en 7 groupes complets de 4 élèves et 1 groupe incomplet.
Or, l'énoncé indique que le nombre de groupes complets de 3 élèves est 3 de plus que le nombre de groupes complets de 4 élèves. On doit donc avoir $n = 31$.
Dans ce cas, on a $n^2 - n = 31^2 - 31$, ou $n^2 - n = 930$.
La somme des chiffres de l'entier égal à $n^2 - n$ est donc égale à 12.

Solution 2

Puisque les n élèves ne peuvent pas être placés en groupes complets de 2, 3 ou 4 élèves, alors n n'est pas un multiple de 2, 3 ou 4.
Voici les premiers entiers supérieurs à 1 qui ne sont pas divisibles par 2, 3 ou 4 : 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35.
Dans chaque cas, on indique le nombre de groupes complets de chaque grandeur :

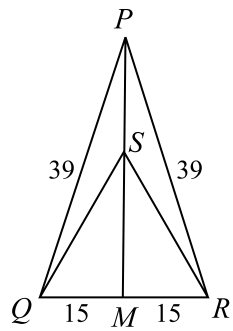
n	5	7	11	13	17	19	23	25	29	31	35
N$^{\text{bre}}$ de groupes complets de 2 élèves	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17
N$^{\text{bre}}$ de groupes complets de 3 élèves	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N$^{\text{bre}}$ de groupes complets de 4 élèves	1	1	2	3	4	4	5	6	7	7	8

Puisque le nombre de groupes complets de 2 élèves est 5 de plus que le nombre de groupes complets de 3 élèves qui est lui-même 3 de plus que le nombre de groupes complets de 4 élèves, on voit que parmi ces résultats, $n = 31$ satisfait aux conditions.
Dans ce cas, on a $n^2 - n = 31^2 - 31$, ou $n^2 - n = 930$. La somme des chiffres de l'entier égal à $n^2 - n$ est donc égale à 12.
(Puisqu'il s'agit d'un problème à choix multiple et qu'on a trouvé une valeur de n qui vérifie les

condidions données, cette réponse doit être bonne. La solution 1 indique pourquoi 31 est la seule valeur de n qui satisfait aux conditions données.)

Réponse : (B)

23. On joint S au milieu M de QR.
Le triangle SQR est équilatéral avec des côtés de longueur 30. Donc $QM = MR = \frac{1}{2}QR = 15$.



Puisque le triangle SQR est équilatéral, alors SM est perpendiculaire à QR.
Puisque le triangle PQR est isocèle et que $PQ = PR$, alors PM aussi est perpendiculaire à QR.
Puisque PM est perpendiculaire à QR et que SM est perpendiculaire à QR, alors PM et SM sont superposés. Donc, S est situé sur PM.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$PM = \sqrt{PQ^2 - QM^2} = \sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{1521 - 225} = \sqrt{1296} = 36$$

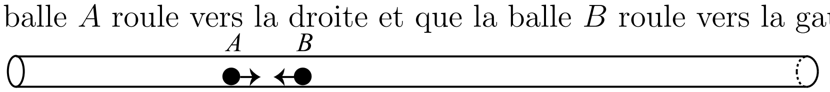
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$SM = \sqrt{SQ^2 - QM^2} = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{900 - 225} = \sqrt{675} = 15\sqrt{3}$$

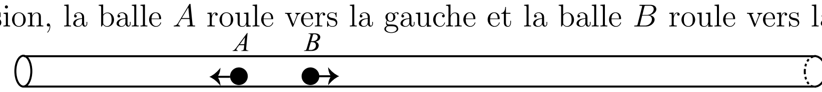
Or $PS = PM - SM$. Donc $PS = 36 - 15\sqrt{3}$.
Puisque QM est perpendiculaire au prolongement de PS, l'aire du triangle PQS est égale à $\frac{1}{2}(PS)(QM)$.
(On considère PS comme base et QM comme hauteur correspondante.)
L'aire du triangle PQS est donc égale à $\frac{1}{2}(36 - 15\sqrt{3})(15) \approx 75{,}14$.
Parmi les choix de réponse, 75 plus près de 75,14.

Réponse : (B)

24. Puisque les balles de caoutchouc sont très petites et que le tube est très long (55 m), on considère que les balles sont des points de largeur négligeable.
Puisque les distances sont égales entre les balles et qu'elles sont égales aux distances entre le bout d'un tube et la balle la plus près du bout, alors les 10 balles forment 11 espaces dans le tube et chaque espace a une longueur de $\frac{55}{11}$ m, ou 5 m.
Quand deux balles se frappent, elles changent instantanément de direction. Avant une collision, supposons que la balle A roule vers la droite et que la balle B roule vers la gauche.

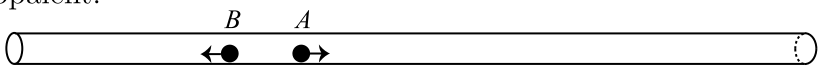


Après cette collision, la balle A roule vers la gauche et la balle B roule vers la droite.



Puisque les balles ont une largeur négligeable, on peut faire semblant que les balles A et B ont passé l'une à travers l'autre et que la balle A continue de rouler vers la droite et que la balle

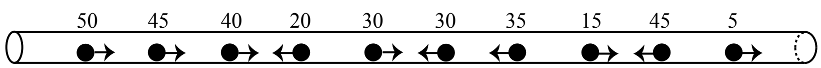
B continue de rouler vers la gauche. La grandeur négligeable des balles est importante, car elle nous permet d'ignorer que les balles voyageront un peu plus en passant à travers l'une l'autre que si elles se frappaient.



Donc, si une balle roule vers la droite et une autre roule vers la gauche, il n'est pas important de les nommer pour les distinguer.
On peut donc traiter chaque balle comme si elle roulait dans un tube particulier et déterminer le temps qu'elle mettrait avant de tomber du tube si elle roulait dans sa direction initiale.
Dans (A),

- la 1$^{\text{re}}$ balle est à 50 m du bout droit du tube et elle mettra donc 50 s avant de tomber ;
- la 2$^{\text{e}}$ balle est à 45 m du bout droit du tube et elle mettra donc 45 s avant de tomber ;
- la 3$^{\text{e}}$ balle est à 40 m du bout droit du tube et elle mettra donc 40 s avant de tomber ;
- la 4$^{\text{e}}$ balle est à 20 m du bout gauche du tube et elle mettra donc 20 s avant de tomber ; (on rappelle que cette balle roule vers la gauche) ;

et ainsi de suite.
Ainsi pour la configuration (A), on peut utiliser cette méthode et inscrire le nombre de secondes que mettra chaque balle pour sortir du tube :



On peut ensuite inscrire ces résultats dans un tableau :

Configuration	N° 1	N° 2	N° 3	N° 4	N° 5	N° 6	N° 7	N° 8	N° 9	N° 10
(A)	50	45	40	20	30	30	35	15	45	5
(B)	5	45	15	35	30	25	20	40	45	50
(C)	50	10	15	35	30	30	35	15	45	5
(D)	5	45	40	20	30	30	35	40	45	5
(E)	50	10	40	20	30	30	35	15	45	50

Puisqu'il y a 10 balles, plus de la moité des balles auront tombé lorsque 6 balles auront tombé.
Dans (A), les balles tombent après 5, 15, 20, 30, 30, 35, 40, 45, 45 et 50 secondes. Donc, 6 balles auront tombé après 35 secondes.
Dans (B), (C), (D) et (E) 6 balles auront tombé après 35, 30, 35 et 35 secondes respectivement.
Donc, la configuration (C) est celle qui prendra le moins de temps pour que plus de la moitié des balles tombent du tube.

Réponse : (C)

25. Puisque chaque rangée du quadrillage doit contenir au moins un 1, il doit y avoir au moins trois 1 dans le quadrillage.
Puisque chaque rangée du quadrillage doit contenir au moins un 0, il doit y avoir au moins trois 0 dans le quadrillage. Puisque le quadrillage contient neuf cases, il peut contenir au plus six 1.
Le quadrillage peut donc contenir trois 1 et six 0, quatre 1 et cinq 0, cinq 1 et quatre 0 ou six 1 et trois 0.
Le nombre de dispositions de trois 1 et six 0 doit être égal au nombre de dispositions de trois 0 et six 1, car on peut toujours transformer une disposition en une autre en remplaçant tous les 1 par des 0 et tous les 0 par des 1.
De même, le nombre de dispositions de quatre 1 et cinq 0 doit être égal au nombre de dispositions de quatre 0 et cinq 1.
On comptera donc le nombre de dispositions de trois 1 et six 0, ainsi que le nombre de dispositions de quatre 1 et cinq 0 et on doublera le nombre total.

Dispositions qui contiennent exactement trois 1
Puisque chaque rangée doit contenir au moins un 1 et qu'il n'y a que trois 1 en tout, chaque rangée doit contenir exactement un 1.
Puisque chaque colonne doit aussi contenir un 1, les trois rangées doivent donc être $\boxed{1\ 0\ 0}$, $\boxed{0\ 1\ 0}$ et $\boxed{0\ 0\ 1}$ dans un ordre quelconque.
Il y a 3 choix pour la première rangée.
Pour chacun de ces choix, il y a 2 choix pour la deuxième rangée. Pour chacun des choix précédents, il n'y a qu'un choix pour la troisième rangée.
Il y a donc 3×2 (ou $3 \times 2 \times 1$) dispositions, ou 6 dispositions pour le quadrillage.
On remarque que dans chaque disposition, chaque rangée et chaque colonne contient au moins un 0.

Dispositions qui contiennent exactement quatre 1
Puisque chaque rangée doit contenir au moins un 1 et qu'il n'y a que quatre 1 en tout, il doit y avoir deux 1 dans une rangée et un 1 dans chacune des deux autres rangées. Ceci nous assure que chaque rangée contienne au moins un 1.
Supposons que la rangée qui contient deux 1 est $\boxed{1\ 1\ 0}$.
Une des deux autres rangées doit avoir un 1 dans la troisième colonne. Elle doit donc être $\boxed{0\ 0\ 1}$.
La rangée qui reste peut être $\boxed{1\ 0\ 0}$, $\boxed{0\ 1\ 0}$ ou $\boxed{0\ 0\ 1}$.
On remarque que dans n'importe quelle disposition de ces trois rangées, chaque colonne contiendra au moins un 0.
Il y a 3 arrangements des rangées $\boxed{1\ 1\ 0}$, $\boxed{0\ 0\ 1}$ et $\boxed{0\ 0\ 1}$. En effet, il y a 3 choix pour le placement de la rangée $\boxed{1\ 1\ 0}$; les deux autres rangées étant identiques, il n'y a plus de choix.
Il y a 6 arrangements des rangées $\boxed{1\ 1\ 0}$, $\boxed{0\ 0\ 1}$ et $\boxed{0\ 1\ 0}$. (En effet, on utilise un argument semblable à celui utilisé pour le cas des trois 1 ci-dessus.)
De même, il y a 6 arrangements des rangées $\boxed{1\ 1\ 0}$, $\boxed{0\ 0\ 1}$ et $\boxed{1\ 0\ 0}$.
Il y a donc $(3 + 6 + 6)$ dispositions, ou 15 dispositions qui incluent la rangée $\boxed{1\ 1\ 0}$.
De même, on obtient 15 dispositions qui incluent la rangée $\boxed{1\ 0\ 1}$ et 15 dispositions qui incluent la rangée $\boxed{0\ 1\ 1}$.
Il y a donc $3 \cdot 15$ dispositions, ou 45 dispositions qui contiennent exactement quatre 1.

D'après l'argument initial, il y a $2(6 + 45)$ dispositions, ou 102 dispositions en tout.

Réponse : (D)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2015

(9^{e} année – Secondaire III)

le mardi 24 février 2015

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

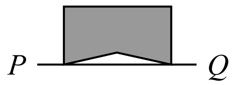
le mercredi 25 février 2015

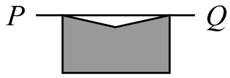
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a $\dfrac{20+15}{30-25}=\dfrac{35}{5}=7$.

Réponse : (D)

2. Lorsque la figure  est réfléchie par rapport au segment PQ, on obtient la figure :



En effet, puisque la figure initiale est au-dessus du segment, l'image est au-dessous du segment. De plus, puisque la figure initiale touche le segment en deux points, l'image touche aussi le segment en deux points.

Réponse : (A)

3. Puisque $8+6=n+8$, on soustrait 8 de chaque membre pour obtenir $6=n$, ou $n=6$.

OU Puisque l'ordre dans lequel on additionne deux nombres ne change pas le résultat, alors $8+6=6+8$, d'où $n=6$.

Réponse : (C)

4. Chacun des nombres 0,07, −0,41, 0,35 et −0,9 est inférieur à 0,7 (c'est-à-dire que chacun est situé à la gauche de 0,7 sur la droite numérique).
Le nombre 0,8 est plus grand que 0,7.

Réponse : (C)

5. On écrit chaque nombre sous forme décimale : $4+\frac{3}{10}+\frac{9}{1000}=4+0{,}3+0{,}009=4{,}309$.

Réponse : (B)

6. Puisque les trois ont une moyenne d'âge de 22 ans, alors la somme de leur âge est égale à $3\cdot 22$ ans, ou 66 ans.
Puisqu'Abel a 23 ans et que France a 24 ans, alors l'âge de Gerta est de $(66-23-24)$ ans, ou 19 ans.

Réponse : (A)

7. Lorsque $n=7$, on a :

$$9n=63 \qquad n+8=15 \qquad n^2=49 \qquad n(n-2)=7(5)=35 \qquad 8n=56$$

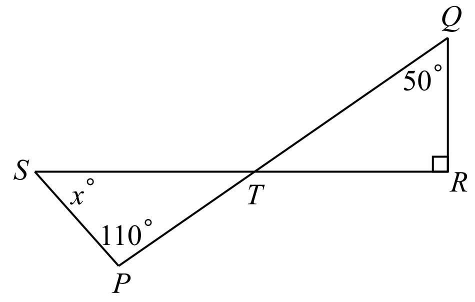
Donc $8n$ a pour valeur un entier pair.
On remarque que pour tout entier n, l'expression $8n$ a pour valeur un entier pair, puisque 8 est pair et que le produit d'un entier pair et de n'importe quel autre entier est pair.
Si n est pair, les cinq expressions auraient pour valeur un entier pair. Si n est impair, seule l'expression $8n$ a pour valeur un entier pair.

Réponse : (E)

8. Après avoir parcouru 60 % de la longueur du sentier, il reste 40 % du sentier à parcourir, car $100\,\% - 60\,\% = 40\,\%$.
D'après l'énoncé, 40 % de la longueur du sentier correspond à 8 km.
Donc, 10 % de la longueur du sentier correspond à un quart de 8 km, ou 2 km.
Puisque 10 % de la longueur du sentier correspond à 2 km, alors la longueur du sentier correspond à $10\cdot 2$ km, ou 20 km.

Réponse : (E)

9. Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors $\angle QTR = 180^\circ - \angle TQR - \angle QRT$, d'où $\angle QTR = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ$, ou $\angle QTR = 40^\circ$.
Puisque des angles opposés par le sommet sont égaux, alors $\angle STP = \angle QTR = 40^\circ$.
Puisque les mesures des angles du triangle STP ont une somme de 180°, alors :



$$\begin{aligned} \angle PST + \angle SPT + \angle STP &= 180^\circ \\ x^\circ + 110^\circ + 40^\circ &= 180^\circ \\ x + 150 &= 180 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Donc, x a une valeur de 30.

RÉPONSE : (A)

10. On a :

$$\sqrt{16 \times \sqrt{16}} = \sqrt{16 \times 4} = \sqrt{64} = 8$$

Puisque $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$, alors $\sqrt{16 \times \sqrt{16}} = 2^3$.

RÉPONSE : (C)

11. *Solution 1*
La suite de signes comprend 5 signes $\heartsuit$ et 2 signes $\spadesuit$.
Chaque fois que Jamil écrit la suite, il écrite 3 signes $\heartsuit$ de plus que de signes $\spadesuit$ $(5 - 2 = 3)$.
Lorsqu'il a écrit la suite 50 fois, Jamil a écrit 150 signes $\heartsuit$ de plus que de signes $\spadesuit$ $(50 \cdot 3 = 150)$.

Solution 2
La suite de signes comprend 5 signes $\heartsuit$ et 2 signes $\spadesuit$.
Lorsque Jamil a écrit la suite 50 fois, il aura écrit 250 signes $\heartsuit$ $(50 \cdot 5 = 250)$ et 100 signes $\spadesuit$ $(50 \cdot 2 = 100)$.
Jamil aura donc écrit 150 signes $\heartsuit$ de plus que de signes $\spadesuit$ $(250 - 100 = 150)$.

RÉPONSE : (B)

12. Puisque 9 est un multiple de 3, alors chaque entier qui est multiple de 9 est aussi multiple de 3.
On cherche donc le plus petit entier positif qui est un multiple de 5, de 7 et de 9.
Le plus petit entier positif qui est un multiple de 7 et de 9 est $7 \cdot 9$, ou 63, puisque 7 et 9 n'admettent aucun diviseur commun supérieur à 1. (On aurait pu écrire les multiples de 9 jusqu'à ce que l'on obtienne le premier multiple qui est aussi multiple de 7.)
Donc, les entiers positifs qui sont multiples de 7 et de 9 sont ceux qui sont multiples de 63.
On écrit les multiples de 63 jusqu'à ce que l'on obtienne le premier qui est aussi multiple de 5 (c.-à-d. qui se termine par un 0 ou un 5) :

$$63 \cdot 1 = 63 \qquad 63 \cdot 2 = 126 \qquad 63 \cdot 3 = 189 \qquad 63 \cdot 4 = 252 \qquad 63 \cdot 5 = 315$$

Le plus petit entier positif qui est un multiple de 3, de 5, de 7 et de 9 est donc 315.

RÉPONSE : (D)

13. Chaque carré qui a une aire de 400 m^2 a des côtés de longueur 20 m, car $\sqrt{400} = 20$.
Le sentier d'Anna parcourt 20 côtés de ces carrés. Il a donc une longueur de $20 \cdot 20$ m, ou 400 m.
Le sentier d'Aaron parcourt 12 côtés de ces carrés. Il a donc une longueur de $12 \cdot 20$ m, ou 240 m.
La distance totale parcourue est donc de 400 m + 240 m, ou 640 m.

Réponse : (E)

14. D'après la définition, on a :

$$4 \otimes 8 = \frac{4}{8} + \frac{8}{4} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

Réponse : (E)

15. On remplit un tableau qui indique l'argent que Steve et Wilfrid ont à la fin de chaque année. Après l'année 2000, la donnée dans la colonne de Steve est le double de celle de l'année précédente, tandis que la donnée dans la colonne de de Wilfrid est la moitié de celle de l'année précédente. On s'arrête lorsque la donnée dans la colonne de Steve est plus grande que celle dans la colonne de Wilfrid :

Année	Steve	Wilfrid
2000	100 \$	10 000 \$
2001	200 \$	5000 \$
2002	400 \$	2500 \$
2003	800 \$	1250 \$
2004	1600 \$	625 \$

Donc à la fin de 2004, Steve a plus d'argent que Wilfrid pour la première fois.

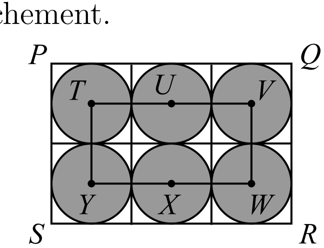
Réponse : (C)

16. Puisque Boris a parcouru 200 km à une vitesse de 50 km/h, il a mis 4 heures pour le faire, car $\frac{200}{50} = 4$.
Anca a parcouru les mêmes 200 km à une vitesse de 60 km/h, avec un arrêt en chemin.
Puisqu'Anca a parcouru 200 km à une vitesse de 60 km/h, le temps qu'elle a mis pour conduire sur la route est de $3\frac{1}{3}$ heures, car $\frac{200}{60} = 3\frac{1}{3}$.
Le temps d'arrêt d'Anca est égal à la différence entre les deux temps sur la route. Il est donc égal à $4\,\text{h} - 3\frac{1}{3}\,\text{h}$, ou $\frac{2}{3}$ h.
Puisque $\frac{2}{3}$ d'une heure vaut 40 minutes, Anca s'est arrêtée 40 minutes pour se reposer.

Réponse : (A)

17. Soit r le rayon de chacun des six cercles.
On a donc $TY = TU = UV = YX = XW = VW = 2r$, $PQ = SR = 6r$ et $PS = QR = 4r$:

Puisque chaque cercle a un rayon de r, chacun a un diamètre de $2r$. Chaque cercle peut donc être inscrit dans un carré dont les côtés de longueur $2r$ sont parallèles aux côtés du rectangle $PQRS$.
Chaque cercle touche aux quatre côtés du carré dans lequel il est inscrit.
Chacun des cercles touche à un ou deux des côtés du rectangle $PQRS$ et chacun des cercles touche à un ou deux des autres cercles. Les six carrés recouvrent donc le rectangle $PQRS$ sans chevauchement.



Donc $PQ = SR = 6r$ et $PS = QR = 4r$, puisque le rectangle $PQRS$ a trois carrés de largeur et deux carrés de hauteur.
Puisque le centre de chaque carré est aussi le centre du cercle inscrit dans le carré, alors les centres de deux cercles qui se touchent ont une distance de $2r$ entre eux (cette distance est aussi deux fois la moitié de la longueur d'un côté d'un carré).

Le périmètre du rectangle $TVWY$ est donc égal à :

$$TV + TY + YW + VW = 2r + 4r + 4r + 2r = 12r$$

Puisque le rectangle $TVWY$ a un périmètre de 60, alors $12r = 60$, d'où $r = 5$.
Puisque $r = 5$, alors dans le grand rectangle, on a $PQ = SR = 30$ et $PS = QR = 20$.
Le rectangle $PQRS$ a donc une aire de $PQ \cdot PS$, ou $30 \cdot 20$, ou 600.

Réponse : (A)

18. Dans un carré magique, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont la même somme.
Puisque les nombres de la première rangée ont la même somme que les nombres de la première colonne, alors $a + 13 + b = a + 19 + 12$, d'où $b = 19 + 12 - 13$, ou $b = 18$.
Les nombres de la troisième colonne ont une somme de $18 + 11 + 16$, ou 45. Les nombres de n'importe quelle rangée, colonne ou diagonale ont donc une somme de 45.
Dans la première colonne, on a $a + 19 + 12 = 45$, d'où $a = 14$.
Dans la deuxième rangée, on a $19 + c + 11 = 45$, d'où $c = 15$.
Donc $a + b + c = 14 + 18 + 15$, ou $a + b + c = 47$.

Réponse : (C)

19. *Solution 1*
On procède à rebours.
Katia avait 16 raisins après qu'elle eut donné la moitié des raisins qui restaient à Anna.
Juste avant de donner ces raisins à Anna, Katia avait donc 32 raisins, car $2 \cdot 16 = 32$.
Avant de donner les raisins à Anna, Katia a mangé 4 raisins. Avant de manger ces 4 raisins, elle avait donc 36 raisins, car $32 + 4 = 36$.
Avant de manger les 4 raisins, Katia a donné à Michel un tiers des raisins qu'elle avait au départ. Il lui restait donc deux tiers des raisins qu'elle avait au départ.
Donc deux tiers des raisins qu'elle avait au départ correspondent à 36 raisins. Un tiers de ces raisins correspond donc à 18 raisins, car $\frac{36}{2} = 18$.
Elle a donc donné 18 raisins à Michel. Au départ, elle avait donc 54 raisins, car $36 + 18 = 54$.

Solution 2
On suppose que Katia avait x raisins au départ.
Elle donne $\frac{1}{3}x$ raisins à Michel. Il lui reste donc $\frac{2}{3}x$ raisins, car $x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$.
Katia mange ensuite 4 raisins. Il lui reste donc $\frac{2}{3}x - 4$ raisins.
Katia donne ensuite la moitié des raisins qui restent à Anna. Elle garde donc l'autre moitié des raisins qui restent. Elle a donc $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x - 4\right)$ raisins.
On simplifie pour obtenir $\frac{2}{6}x - \frac{4}{2}$ raisins, ou $\frac{1}{3}x - 2$ raisins.
Puisqu'il lui reste 16 raisins à la fin, alors $\frac{1}{3}x - 2 = 16$, d'où $\frac{1}{3}x = 18$, ou $x = 54$.
Donc, Katia avait 54 raisins au départ.

Réponse : (B)

20. Puisque $10\,\$ = 2 \cdot 5\,\$$, alors on peut former $10\,\$$ en utilisant 0, 1 ou 2 billets de $5\,\$$, mais on ne peut pas former $10\,\$$ en utilisant plus de 2 billets de $5\,\$$.

Avec 2 billets de $5\,\$$, on obtient exactement $10\,\$$. Avec 2 billets de $5\,\$$, il y a donc exactement une façon d'obtenir $10\,\$$.

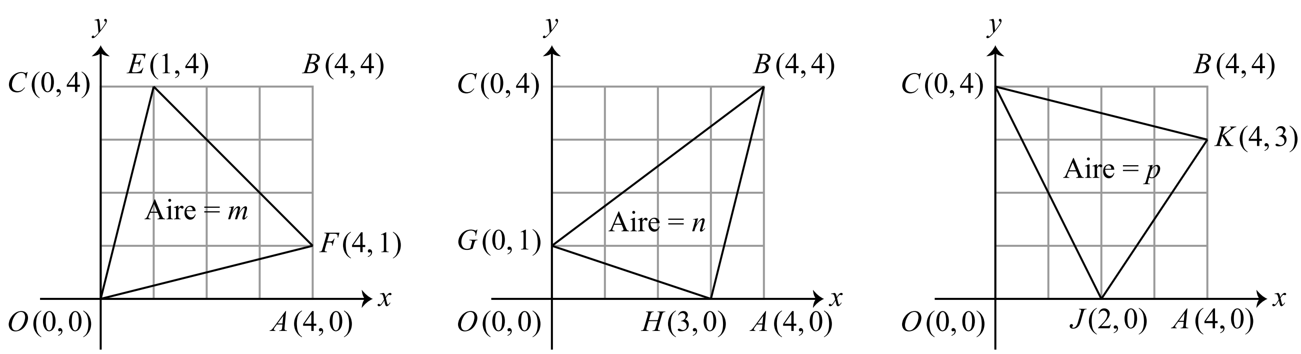
Avec 1 billet de $5\,\$$, il faut ajouter $5\,\$$ en pièces de monnaie pour obtenir $10\,\$$.
Puisque 5 est impair et que toute quantité de pièces de $2\,\$$ ajoute un nombre pair de dollars, il faut un nombre impair de pièces de $1\,\$$.
Pour ajouter $5\,\$$, il faut ajouter 5 pièces de $1\,\$$ et 0 pièce de $2\,\$$ ou 3 pièces de $1\,\$$ et 1 pièce de $2\,\$$ ou 1 pièce de $1\,\$$ et 2 pièces de $2\,\$$.
Donc avec 1 billet de $5\,\$$, il y a 3 façons d'obtenir $10\,\$$.

Avec 0 billet de $5\,\$$, il faut ajouter $10\,\$$ en pièces de monnaie pour obtenir $10\,\$$.
Puisque 10 est un nombre pair et que toute quantité de pièces de $2\,\$$ ajoute un nombre pair de dollars, il faut un nombre pair de pièces de $1\,\$$.
Les nombres respectifs de pièces de $1\,\$$ et de $2\,\$$ qu'il faut pour obtenir $10\,\$$ sont 10 et 0, 8 et 1, 6 et 2, 4 et 3, 2 et 4 ou 0 et 5.
Avec 0 billets de $5\,\$$, il y a donc 6 façons d'obtenir $10\,\$$.

En tout, il y a $(1 + 3 + 6)$ façons, c'est-à-dire 10 façons pour André d'obtenir $10\,\$$.

Réponse : (A)

21. Dans chaque figure, l'origine O a pour coordonnées $(0, 0)$, le point A a pour coordonnées $(4, 0)$, le point B a pour coordonnées $(4, 4)$ et le point C a pour coordonnées $(0, 4)$.
Dans chaque figure, le carré $OABC$ a pour dimensions 4 sur 4 et il a donc une aire de 16.
Dans la première figure, les points E et F ont pour coordonnées respectives $(1, 4)$ et $(4, 1)$.
Dans la deuxième figure, les points G et H ont pour coordonnées respectives $(0, 1)$ et $(3, 0)$.
Dans la troisième figure, les points J et K ont pour coordonnées respectives $(2, 0)$ et $(4, 3)$.



Dans la première figure, l'aire du triangle OEF est égale à l'aire du carré $OABC$ moins l'aire des triangles OCE, EBF et FAO.
Chacun de ces trois triangles est rectangle, car il partage un angle droit avec un angle du carré.
Puisque $OC = 4$ et $CE = 1$, l'aire du triangle OCE est égale à $\frac{1}{2}(4)(1)$, ou 2.
Puisque $EB = 3$ et $BF = 3$, l'aire du triangle EBF est égale à $\frac{1}{2}(3)(3)$, ou $\frac{9}{2}$.
Puisque $FA = 1$ et $AO = 4$, l'aire du triangle FAO est égale à $\frac{1}{2}(1)(4)$, ou 2.
Donc, l'aire du triangle OEF est égale à $16 - 2 - \frac{9}{2} - 2$, ou $\frac{15}{2}$. Donc $m = \frac{15}{2}$.

Dans la deuxième figure, l'aire du triangle GBH est égale à l'aire du carré $OABC$ moins l'aire des triangles GCB, BAH et HOG.
Chacun de ces trois triangles est rectangle, car il partage un angle droit avec un angle du carré.
Puisque $GC = 3$ et $CB = 4$, l'aire du triangle GCB est égale à $\frac{1}{2}(3)(4)$, ou 6.

Puisque $BA = 4$ et $AH = 1$, l'aire du triangle BAH est égale à $\frac{1}{2}(4)(1)$, ou 2.
Puisque $HO = 3$ et $OG = 1$, l'aire du triangle HOG est égale à $\frac{1}{2}(1)(3)$, ou $\frac{3}{2}$.
Donc, l'aire du triangle HOG est égale à $16 - 6 - 2 - \frac{3}{2}$, ou $\frac{13}{2}$. Donc $n = \frac{13}{2}$.

Dans la troisième figure, l'aire du triangle CKJ est égale à l'aire du carré $OABC$ moins l'aire des triangles CBK, KAJ et JOC.
Chacun de ces trois triangles est rectangle, car il partage un angle droit avec un angle du carré.
Puisque $CB = 4$ et $BK = 1$, l'aire du triangle CBK est égale à $\frac{1}{2}(4)(1)$, ou 2.
Puisque $KA = 3$ et $AJ = 2$, l'aire du triangle KAJ est égale à $\frac{1}{2}(3)(2)$, ou 3.
Puisque $JO = 2$ et $OC = 4$, l'aire du triangle JOC est égale à $\frac{1}{2}(2)(4)$, ou 4.
Donc, l'aire du triangle CKJ est égale à $16 - 2 - 3 - 4$, ou 7. Donc $p = 7$.

Puisque $m = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$, $n = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$ et $p = 7$, alors $n < p < m$.

Réponse : (D)

22. *Solution 1*
Soit c \$ le coût d'installation du tapis par mètre carré.
Dans chaque situation, le coût d'installation dans une salle est égal au produit du coût par mètre carré et de l'aire de la salle.
D'après la première ligne, première colonne du tableau, on a $15 \cdot 10 \cdot c\,\$ = 397{,}50\,\$$.
D'après la première ligne, deuxième colonne du tableau, on a $15 \cdot y \cdot c\,\$ = 675{,}75\,\$$.
D'après la deuxième ligne, première colonne du tableau, on a $x \cdot 10 \cdot c\,\$ = 742{,}00\,\$$.
D'après la deuxième ligne, deuxième colonne du tableau, on a $x \cdot y \cdot c\,\$ = z\,\$$.
Or :

$$z = x \cdot y \cdot c = x \cdot y \cdot c \cdot \frac{10 \cdot 15 \cdot c}{10 \cdot 15 \cdot c} = \frac{(x \cdot 10 \cdot c) \cdot (15 \cdot y \cdot c)}{15 \cdot 10 \cdot c} = \frac{(742{,}00) \cdot (675{,}75)}{397{,}50} = 1261{,}40$$

Donc $z = 1261{,}40$.

Solution 2
Soit c \$ le coût d'installation du tapis par mètre carré.
Dans chaque situation, le coût d'installation dans une salle est égal au produit du coût par mètre carré et de l'aire de la salle.
D'après la première ligne, première colonne du tableau, on a $15 \cdot 10 \cdot c\,\$ = 397{,}50\,\$$.
Donc $c = \dfrac{397{,}50}{15 \cdot 10} = 2{,}65$.
D'après la première ligne, deuxième colonne du tableau, on a $15 \cdot y \cdot c\,\$ = 675{,}75\,\$$.
Donc $y = \dfrac{675{,}75}{15 \cdot 2{,}65} = 17$.
D'après la deuxième ligne, première colonne du tableau, on a $x \cdot 10 \cdot c\,\$ = 742{,}00\,\$$.
Donc $x = \dfrac{742{,}00}{10 \cdot 2{,}65} = 28$.
D'après la deuxième ligne, deuxième colonne du tableau, on a $x \cdot y \cdot c\,\$ = z\,\$$.
Donc $z = 28 \cdot 17 \cdot 2{,}65 = 1261{,}40$.
Donc $z = 1261{,}40$.

Réponse : (E)

23. Puisque le membre de gauche de l'équation est un multiple de 6, alors le membre de droite, soit c^2, est aussi un multiple de 6.
Puisque c^2 est un multiple de 6, alors c^2 est un multiple de 2 et un multiple de 3.
Puisque 2 et 3 sont des nombres premiers distincts, alors c doit être est un multiple de 2 et un multiple de 3. En effet, si c n'était pas est un multiple de 3, alors c^2 ne pourrait pas être est un multiple de 3 et si c n'était pas pair, alors c^2 ne pourrait pas être pair.
Donc, c est un multiple de 2 et de 3 et il est donc est un multiple de 6.
Dans l'intervalle donné, il y a donc cinq valeurs possibles de c, soit 6, 12, 18, 24 et 30.
Si $c = 6$, alors $6ab = 36$, d'où $ab = 6$.
Puisque $1 \leq a < b < 6$ (car $c = 6$), alors $a = 2$ et $b = 3$.
Si $c = 12$, alors $6ab = 144$, d'où $ab = 24$.
Puisque $1 \leq a < b < 12$, alors $a = 3$ et $b = 8$ ou bien $a = 4$ et $b = 6$.
(Les paires de diviseurs de 24 sont $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Seules les paires $24 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$ donnent des solutions qui satisfont aux restrictions données, car dans les deux autres paires, le plus grand diviseur ne satisfait pas à la restriction d'être inférieur à 12.)
Si $c = 18$, alors $6ab = 324$, d'où $ab = 54$.
Puisque $1 \leq a < b < 18$, alors $a = 6$ et $b = 9$.
(Les paires de diviseurs de 54 sont $54 = 1 \cdot 54 = 2 \cdot 27 = 3 \cdot 18 = 6 \cdot 9$.)
Si $c = 24$, alors $6ab = 576$, d'où $ab = 96$.
Puisque $1 \leq a < b < 24$, alors $a = 6$ et $b = 16$ ou bien $a = 8$ et $b = 12$.
(Les paires de diviseurs de 96 sont $96 = 1 \cdot 96 = 2 \cdot 48 = 3 \cdot 32 = 4 \cdot 24 = 6 \cdot 16 = 8 \cdot 12$.)
Si $c = 30$, alors $6ab = 900$, d'où $ab = 150$.
Puisque $1 \leq a < b < 30$, alors $a = 6$ et $b = 25$ ou bien $a = 10$ et $b = 15$.
(Les paires de diviseurs de 150 sont $150 = 1 \cdot 150 = 2 \cdot 75 = 3 \cdot 50 = 5 \cdot 30 = 6 \cdot 25 = 10 \cdot 150$.)
Donc, les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs qui vérifient l'équation $6ab = c^2$ et qui satisfont à la condition $a < b < c \leq 35$ sont :

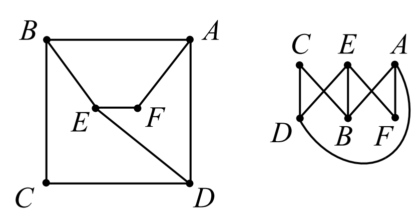
$$(2,3,6), (3,8,12), (4,6,12), (6,9,18), (6,16,24), (8,12,24), (6,25,30), (10,15,30)$$

Il y a 8 triplets.

Réponse : (B)

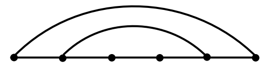
24. On montrera que deux des diagrammes peuvent représenter l'information donnée.
Dans chaque diagramme, un point est appelé un *sommet* et chaque ligne ou courbe entre deux sommets est appelée une *arête*. Le nombre d'arêtes qui arrivent ou qui quittent un sommet est appelé le *degré* du sommet.
Les lettres A, B, C, D, E et F représentent respectivement Ali, Bob, Chi, Dai, Eve et Fay.

On peut attribuer les noms aux deux diagrammes suivants pour représenter les liens :

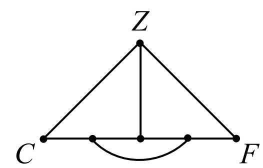


Les 8 liens donnés, $AB, BC, CD, DE, EF, FA, AD$ et BE, sont représentés par des arêtes et il n'y a aucune autre arête dans les diagrammes.
Donc, les diagrammes représentent la situation.

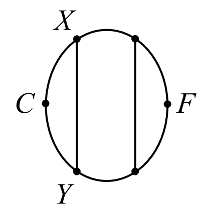
Le premier diagramme donné ne peut représenter la situation, car il ne contient que 7 arêtes et 8 liens doivent être représentés.



Pour analyser les troisième et cinquième diagrammes, on remarque qu'il y a exactement deux suspects (Chi et Fay) qui sont associés à exactement deux liens (Chi : BC et CD ; Fay : EF et FA).



Dans le cinquième diagramme, il y a exactement deux sommets de degré 2 (c.-à-d. d'où partent ou arrivent exactement 2 arêtes). Si ce diagramme peut représenter l'information, ces sommets doivent représenter C et F dans un ordre quelconque. Puisque le diagramme est symétrique, on peut attribuer les sommets C et F comme dans le diagramme ci-contre.
On considère le sommet Z.
Puisqu'il est relié à C, ce sommet doit être B ou D.
Or, Z est aussi relié à F et ni B ni D n'est relié à F.
Donc, ce diagramme ne peut représenter l'information donnée.



Le troisième diagramme donné a deux sommets de degré 2. Si ce diagramme peut représenter l'information, ces sommets doivent représenter C et F dans un ordre quelconque. Puisque le diagramme est symétrique, on peut attribuer les sommets C et F comme dans le diagramme ci-contre.
On considère les sommets X et Y.
Puisqu'ils sont reliés à C, ils doivent être B et D dans un ordre quelconque.
Or, X et Y sont reliés par une arête, tandis que B et D ne le sont pas, selon l'information donnée.
Donc, ce diagramme ne peut représenter l'information donnée.

Donc, deux des diagrammes donnés peuvent représenter l'information donnée.

Réponse : (B)

25. On remarque d'abord que tout entier strictement positif parait dans le tableau, soit dans la colonne V, soit dans une ou plusieurs des colonnes W, X, Y et Z :

Si un entier v parait dans la colonne V, il ne peut avoir paru dans une des rangées précédentes selon l'énoncé du problème. De façon particulière, v ne peut avoir paru dans une des colonnes W, X, Y ou Z plus tôt dans le tableau.
De plus, v ne peut paraitre plus loin dans le tableau, puisque chaque nombre de sa rangée est plus grand que lui et chaque nombre des rangées suivantes est encore plus grand (puisque les nombres qui suivent dans la colonne V sont plus grands que v).

Si un entier a parait dans une ou plusieurs colonnes W, X, Y ou Z, il ne pourra pas paraitre plus loin dans la colonne V, puisque chaque nombre de la colonne V est un nombre qui n'a pas encore paru dans le tableau.
De plus, a ne peut avoir paru plus tôt dans la colonne V, puisque chaque nombre de la colonne V, avant que a ne paraisse dans la colonne W, X, Y ou Z, est plus petit que a.

Donc si un entier parait dans le tableau, il parait dans la colonne V ou il parait dans une ou plusieurs des colonnes W, X, Y et Z.

Si un entier v n'a pas paru dans le tableau, il sera éventuellement le plus petit entier strictement positif qui ne parait pas encore dans le tableau et il paraitra donc dans la colonne V de la rangée suivante.

On vérifie si 2731 parait dans la colonne Z.

Puisque $2731 = 7(390) + 1$, alors 2731 parait dans la colonne Z si 390 parait dans la colonne V.
Puisque 389 n'est pas un multiple de 2, de 3, de 5 ou de 7 (on peut le vérifier en divisant 389 par chacun de ces nombres), alors 390 ne peut paraitre dans une des colonnes W, X, Y ou Z (car 390 ne peut être exprimé sous la forme $2n+1$, $3n+1$, $5n+1$ ou $7n+1$, n étant un entier positif quelconque).
Donc, 390 parait dans la colonne V. Donc, 2731 parait dans la colonne Z dans la même rangée que 390, car $2731 = 7(390) + 1$.
Ceci élimine donc le choix de réponse (A).
On remarque aussi que puisque 2731 parait dans la colonne Z, il ne peut paraitre dans la colonne V.

On montre ensuite que 2731 parait dans la colonne Y.
Puisque $2731 = 5(546) + 1$, alors 2731 parait dans la colonne Y si 546 parait dans la colonne V.
On montre que 546 parait dans la colonne V.
Puisque 545 est un multiple de 5, mais pas de 2, de 3 ou de 7, alors 546 parait dans la colonne V ou dans la colonne Y, comme il est expliqué au début.
On montre que 546 ne parait pas dans la colonne Y.
Puisque $546 = 5(109) + 1$, alors 546 parait dans la colonne Y si 109 parait dans la colonne V.
On montre que 109 ne parait pas dans la colonne V.
Puisque 108 est un multiple de 2 et de 3, mais pas de 5 ou de 7, alors 109 pourrait paraitre dans une des colonnes V, W ou X.
On montre que 109 parait dans la colonne X.
Puisque $109 = 3(36) + 1$, alors 109 parait dans la colonne X si 36 parait dans la colonne V.
On montre que 36 parait dans la colonne V.
Puisque 35 est un multiple de 5 et de 7, mais pas de 2 ou de 3, alors 36 pourrait paraitre dans une des colonnes V, Y ou Z.
Si 36 paraissait dans la colonne Z, alors 5 paraitrait dans la colonne V, dans la même rangée.
Si 36 paraissait dans la colonne Y, alors 7 paraitrait dans la colonne V, dans la même rangée.
Or, ni 5 ni 7 ne parait dans la colonne V. (Chacun parait dans la deuxième rangée.)
Donc, 36 parait dans la colonne V, ce qui indique que 109 parait dans la colonne X.
Donc, 109 ne parait pas dans la colonne V. Donc, 546 ne parait pas dans la colonne Y.
Puisque 546 parait dans la colonne V ou Y, alors 546 parait dans la colonne V, ce qui indique que 2731 parait dans la colonne Y.
Ceci élimine les choix de réponse (C) et (E).

Enfin on montre que 2731 ne parait pas dans la colonne X.
Puisque 29 n'est pas un multiple de 2, de 3, de 5 ou de 7, alors 30 doit paraitre dans la colonne V.
Puisque 30 parait dans la colonne de V et que $151 = 5(30)+1$, alors 151 parait dans la colonne Y.
Puisque 151 parait dans la colonne Y, il ne parait pas dans la colonne V.
Puisque 151 ne parait pas dans la colonne V et que $303 = 2(151) + 1$, 303 ne parait pas dans la colonne W.
Puisque 303 ne parait pas dans la colonne W, alors 303 parait dans la colonne V. (En effet, 302 n'est pas un multiple de 3, de 5 ou de 7 et 303 ne peut donc pas paraitre dans une des colonnes X, Y ou Z.)
Puisque 303 parait dans la colonne V et que $910 = 3(303)+1$, alors 303 parait dans la colonne X.
Puisque 910 parait dans la colonne X, alors 910 ne parait pas dans la colonne V.
Puisque 910 ne parait pas dans la colonne V et que $2731 = 3(910) + 1$, alors 2731 ne parait pas dans la colonne X.

Donc, 2731 parait dans les colonnes W, Y et Z.

Réponse : (D)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2014

(9^{e} année – Secondaire III)

le jeudi 20 février 2014

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 21 février 2014

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On évalue d'abord les expressions entre parenthèses :

$$(8 \times 6) - (4 \div 2) = 48 - 2 = 46$$

Réponse : (C)

2. Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors $50^\circ + x^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, d'où $x + 95 = 180$.
Donc $x = 85$.

Réponse : (C)

3. $30\,\%$ de 200 est égal à $\frac{30}{100} \times 200$, ou 60.
On aurait pu dire que $30\,\%$ de 100 est égal à 30 et puisque $200 = 2 \times 100$, alors $30\,\%$ de 200 est égal à 30×2, ou 60.

Réponse : (D)

4. Puisque $x = 3$, les côtés de la figure ont des longueurs de 4, 3, 6 et 10.
La figure a donc un périmètre de $4 + 3 + 6 + 10$, ou 23.
On aurait pu dire que le périmètre est représenté par l'expression $x + 6 + 10 + (x + 1)$, ou $2x + 17$.
Lorsque $x = 3$, cette expression est égale à $2(3) + 17$, ou 23.

Réponse : (A)

5. L'équipe gagne 2 points par victoire. Donc, 9 victoires rapportent 2×9 points, ou 18 points.
L'équipe gagne 0 point par défaite. Donc, 3 défaites rapportent 0 point.
L'équipe gagne 1 point par match nul. Donc, 4 matchs nuls rapportent 4 points.
Puisque $18 + 0 + 4 = 22$, l'équipe gagne 22 points.

Réponse : (E)

6. La ligne qui représente une température de $3\,^\circ$C est la droite horizontale à mi-chemin entre la marque de 2 et celle de 4 sur l'axe vertical.
Deux points sur cette droite représentent des données : un à 14 h et un à 21 h.
L'heure demandée est 21 h.

Réponse : (A)

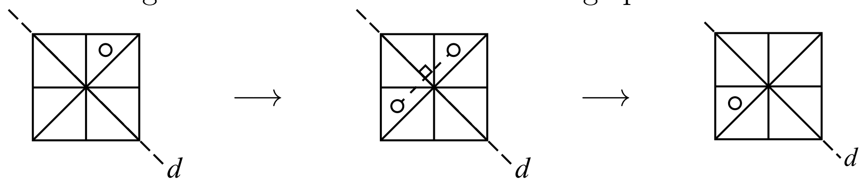
7. *Solution 1*
On récrit le membre de gauche de l'équation sous la forme $5 \times 6 \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$.
Puisque $5 \times 6 \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) = 5 \times 6 \times n \times n$, alors n pourrait être égal à 2×3, ou 6.

Solution 2
Puisque $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 6 = 5 \times 6 \times n \times n$, alors $1080 = 30n^2$, d'où $n^2 = 36$.
Donc, n pourrait être égal à 6. (n pourrait aussi être égal à -6.)

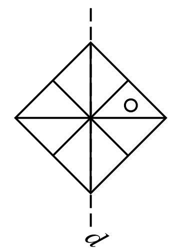
Solution 3
On divise chaque membre de l'équation par 5×6. L'équation devient $2 \times 2 \times 3 \times 3 = n \times n$, ou $n^2 = 36$.
Donc, n pourrait être égal à 6. (n pourrait aussi être égal à -6.)

Réponse : (E)

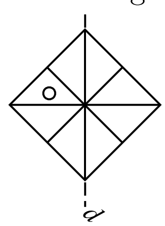
8. *Solution 1*
Le carré, ses 8 morceaux et ses deux diagonales sont symétriques par rapport à la droite d. Dans la deuxième figure ci-dessous, on voit la figure initiale et son image par la réflexion. On voit que la position initiale du petit cercle et celle de son image sont symétriques par rapport à la droite d. La troisième figure ci-dessous est celle de l'image par la réflexion.



Solution 2
On peut voir que la figure (D) représente l'image par la réflexion si on fait d'abord subir à la figure initiale une rotation de 45° dans le sens des aiguilles d'une montre pour obtenir



et si on fait subir à cette figure une réflexion par rapport à la droite qui est maintenant verticale pour obtenir :



Lorsqu'on fait subir à cette figure une rotation de 45° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, on obtient la figure (D).

Réponse : (D)

9. On a $2^2 = 2 \times 2 = 4$, $2^3 = 2^2 \times 2 = 4 \times 2 = 8$ et $2^4 = 2^2 \times 2^2 = 4 \times 4 = 16$.
Donc $2^4 - 2^3 = 16 - 8$, ou $2^4 - 2^3 = 8$, d'où $2^4 - 2^3 = 2^3$.

Réponse : (D)

10. Puisque $\dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{\square} = 1$, on a $\dfrac{4}{\square} = 1 - \dfrac{3}{4}$, ou $\dfrac{4}{\square} = \dfrac{1}{4}$.
Or $\dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{16}$. On récrit le membre de gauche en utilisant le même numérateur : $\dfrac{4}{\square} = \dfrac{4}{16}$.
Donc, l'équation est vraie si $\square = 16$. (On peut vérifier que $\dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{16} = 1$.)

Réponse : (E)

11. *Solution 1*
Les faces non visibles du cube supérieur portent respectivement 2, 3 et 6 points.
Les faces non visibles du cube inférieur portent respectivement 1, 3, 4 et 5 points.
Le nombre total de points sur ces sept autres faces est donc de $2 + 3 + 6 + 1 + 3 + 4 + 5$, ou 24.

Solution 2
Puisque les faces respectives de chaque cube portent 1, 2, 3, 4, 5 et 6 points et que $1+2+3+4+5+6=21$, alors le nombre total de points sur les faces des deux cubes est de 2×21, ou 42.
Les cinq faces visibles portent un total de $4+1+5+6+2$ points, ou 18 points.
Le nombre total de points sur ces sept autres faces est donc de $42-18$, ou 24.

Réponse : (E)

12. Puisque chaque a une longueur de $\frac{2}{3}$, alors une bande de trois a une longueur de $3\times\frac{2}{3}$, ou 2. Il faut donc deux bandes de longueur 2 pour former une bande de longueur 4.
Puisque 3 forment une bande de longueur 2, alors 6 forment une bande de longueur 4.

Réponse : (A)

13. On récrit l'énoncé de soustraction sous la forme d'un énoncé d'addition, soit $45+8Y=1X2$.
On considère ensuite les chiffres des unités.
D'après l'énoncé d'addition, $5+Y$ a pour chiffre des unités 2. Donc $Y=7$. C'est la seule réponse possible. On a donc $45+87=1X2$.
Puisque $45+87=132$, alors $X=3$.
Donc $X+Y=3+7$, ou $X+Y=10$. (On peut vérifier que $132-87=45$.)

Réponse : (C)

14. On simplifie d'abord l'expression, puis on reporte $x=2y$:

$$(x+2y)-(2x+y)=x+2y-2x-y=y-x=y-2y=-y$$

On peut aussi reporter $x=2y$ d'abord, puis simplifier :

$$(x+2y)-(2x+y)=(2y+2y)-(2(2y)+y)=4y-5y=-y$$

Réponse : (B)

15. *Solution 1*
Puisque le triangle RPS est rectangle en P, alors d'après le théorème de Pythagore, on a $PR^2+PS^2=RS^2$, ou $PR^2+18^2=30^2$.
Donc $PR^2=30^2-18^2$, ou $PR^2=900-324$, ou $PR^2=576$. Puisque $PR>0$, alors $PR=24$.
Puisque P, S et Q sont alignés et que RP est perpendiculaire au segment PQ, alors RP est perpendiculaire à PS. RP est donc la hauteur du triangle QRS qui correspond à la base SQ.
Le triangle QRS a donc une aire de $\frac{1}{2}(24)(14)$, ou 168.

Solution 2
Puisque le triangle RPS est rectangle en P, alors d'après le théorème de Pythagore, on a $PR^2+PS^2=RS^2$, ou $PR^2+18^2=30^2$.
Donc $PR^2=30^2-18^2$, ou $PR^2=900-324$, ou $PR^2=576$. Puisque $PR>0$, alors $PR=24$.
L'aire du triangle QRS est égale à l'aire du triangle RPQ moins celle du triangle RPS.
Puisque le triangle RPQ est rectangle en P, son aire est égale à $\frac{1}{2}(PR)(PQ)$, ou $\frac{1}{2}(24)(18+14)$, ou 384. Puisque le triangle RPS est rectangle en P, son aire est égale à $\frac{1}{2}(PR)(PS)$, ou $\frac{1}{2}(24)(18)$, ou 216.
Le triangle QRS a donc une aire de $384-216$, ou 168.

Réponse : (B)

16. D'après la deuxième rangée, $\triangle + \triangle + \triangle + \triangle = 24$, ou $4\triangle = 24$. Donc $\triangle = 6$.
D'après la première rangée, $\heartsuit + \triangle + \triangle + \heartsuit = 26$, ou $2\heartsuit + 2\triangle = 26$.
Puisque $\triangle = 6$, l'équation devient $2\heartsuit = 26 - 12$. Donc $2\heartsuit = 14$, ou $\heartsuit = 7$.
D'après la quatrième rangée, $\square + \heartsuit + \square + \triangle = 33$.
Puisque $\triangle = 6$ et $\heartsuit = 7$, l'équation devient $2\square + 7 + 6 = 33$. Donc $2\square = 20$, ou $\square = 10$.
D'après la troisième rangée, cette équation devient $\square + \blacklozenge + \heartsuit + \blacklozenge = 27$.
Puisque $\square = 10$ et $\heartsuit = 7$, alors $2\blacklozenge = 27 - 10 - 7$, ou $2\blacklozenge = 10$.
Donc $\blacklozenge = 5$.

Réponse : (A)

17. Le cube a six faces identiques dont les côtés ont une longueur de 30.
L'aire totale du cube est donc égale à $6(30^2)$, ou 5400.
Le prisme à base rectangulaire a deux faces de dimensions 20 sur 30, deux faces de dimensions 20 sur L et deux faces de dimensions 30 sur L.
L'aire totale du prisme est donc égale à $2(20)(30) + 2(20L) + 2(30L)$, ou $100L + 1200$.
Puisque le cube et le prisme ont la même aire totale, alors $100L + 1200 = 5400$, ou $100L = 4200$, d'où $L = 42$.

Réponse : (C)

18. Puisque les rapports $x : 4$ et $9 : y$ sont égaux, on a $\frac{x}{4} = \frac{9}{y}$. (On remarque que puisque x et y sont strictement positifs, on ne divise par par 0.)
Cette équation est équivalente à l'équation $xy = 4(9)$, ou $xy = 36$.
On cherche donc le nombre de couples (x, y) d'entiers strictement positifs tels que $xy = 36$.
Or, les diviseurs positifs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36. Les couples sont donc :

$$(x, y) = (1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6), (9, 4), (12, 3), (18, 2), (36, 1)$$

Il y a 9 couples.

Réponse : (D)

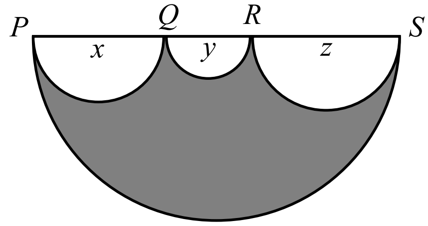
19. La première fois que la flèche tourne, il y a 4 résultats équiprobables, soit 1, 2, 3 et 4. Pour chacun de ces résultats, il y a 4 résultats équiprobables pour le deuxième tour, soit 1, 2, 3 et 4. Il y a donc 16 résultats équiprobables pour les deux tours de la flèche. Chacun de ces 16 résultats nous donne un produit, car Diane multiplie les deux numéros obtenus. On place les produits dans le tableau suivant. La colonne de gauche représente les résultats possibles lors du premier tour de la flèche et la rangée du dessus représente les résultats possibles lors du deuxième tour. Les produits correspondants se trouvent dans les cellules correspondantes du tableau :

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Puisque les 16 résultats possibles sont équiprobables, les 16 produits le sont aussi.
Or, le produit 4 survient le plus souvent, soit trois fois. Il est donc le plus probable.

Réponse : (B)

20. Le contour de la région ombrée est formé de quatre demi-cercles, soit un demi-cercle de diamètre PS, un demi-cercle de diamètre PQ, un demi-cercle de diamètre QR et un demi-cercle de diamètre RS.
Puisqu'un cercle de diamètre d a une circonférence de πd, alors un demi-cercle de diamètre d a une longueur de $\frac{1}{2}\pi d$. (À noter que le demi-cercle est un arc seulement.)
Soit x la longueur PQ, y la longueur QR et z la longueur RS.



Or, on sait que le segment PS a une longueur de 4.
Puisque $PQ + QR + RS = PS$, alors $x + y + z = 4$.
Le périmètre de la région ombrée est donc égal à :

$$\tfrac{1}{2}\pi(PQ)+\tfrac{1}{2}\pi(QR)+\tfrac{1}{2}\pi(RS)+\tfrac{1}{2}\pi(PS) = \tfrac{1}{2}\pi x+\tfrac{1}{2}\pi y+\tfrac{1}{2}\pi z+\tfrac{1}{2}\pi(4) = \tfrac{1}{2}\pi(x+y+z+4) = \tfrac{1}{2}\pi(4+4) = 4\pi$$

On cherche l'aire d'un carré ayant le même périmètre que la région ombrée (c'est-à-dire un périmètre de 4π).
Un carré qui a un périmètre de 4π a des côtés de longueur $\frac{1}{4}(4\pi)$, ou π. Il a donc une aire de π^2.

Puisqu'il s'agit d'un problème à choix multiple, on devrait obtenir la même réponse quelles que soient les longueurs particulières de PQ, QR et RS, puisque celles-ci ne sont pas données. On peut donc leur attribuer des valeurs arbitraires, à condition que $PQ+QR+RS = 4$. Par exemple, si on choisit $PQ = QR = 1$ et $RS = 2$, le périmètre de la région ombrée est égal à :

$$\tfrac{1}{2}\pi(PQ) + \tfrac{1}{2}\pi(QR) + \tfrac{1}{2}\pi(RS) + \tfrac{1}{2}\pi(PS) = \tfrac{1}{2}\pi(1) + \tfrac{1}{2}\pi(1) + \tfrac{1}{2}\pi(2) + \tfrac{1}{2}\pi(4) = \tfrac{1}{2}\pi(1+1+2+4) = 4\pi$$

On obtient donc la même réponse.

Réponse : (C)

21. *Solution 1*
Les longueurs des côtés du quadrillage 4×6 sont dans un rapport de 4 : 6, ce qui est équivalent au rapport de 2 : 3.
Si on trace un quadrillage 30×45, les longueurs de ses côtés seront dans un rapport de 30 : 45, ce qui est équivalent au rapport de 2 : 3.
On peut donc tracer le quadrillage 30×45 en utilisant des morceaux de dimensions 2×3. On peut considérer ce grand quadrillage comme un tableau 15×15 de morceaux 2×3.
La diagonale du tableau 30×45 a une pente de $\frac{30}{45}$, ou $\frac{2}{3}$. Elle passe donc par le coin inférieur gauche et par le coin supérieur droit de chaque morceau 2×3 du tableau 15×15. Chacun de ces coins est donc un point de treillis. Comme on le voit dans le quadrillage donné 4×6, la diagonale ne passe pas par d'autres points de treillis à l'intérieur d'un morceau 2×3.
Puisque le coin supérieur droit d'un morceau 2×3 est le même que le coin inférieur gauche du morceau suivant, il faut faire attention à la façon de compter les points de treillis.
La diagonale passe par 15 morceaux 2×3. Elle passe donc par 15 coins inférieurs gauches. Parmi ces coins, on a compté les coins supérieurs droits des 14 premiers morceaux 2×3. On doit aussi compter le coin supérieur droit du 15^{e} morceau.
La diagonale passe donc par $1 + 15$ points de treillis, ou 16 points de treillis.

Solution 2

On place le grillage 30×45 dans un plan cartésien de manière que son coin inférieur gauche soit à l'origine, $(0, 0)$, le côté vertical gauche soit sur la partie positive de l'axe des ordonnées, de $(0, 0)$ à $(0, 30)$ et le côté horizontal inférieur soit sur la partie positive de l'axe des abscisses, de $(0, 0)$ à $(45, 0)$.

Le coin supérieur droit a pour coordonnées $(45, 30)$. Les lignes horizontales du grillage ont pour équations $y = 0$, $y = 1$, ..., $y = 29$ et $y = 30$ et les lignes verticales ont pour équations $x = 0$, $x = 1$, ..., $x = 44$ et $x = 45$.

Les points de treillis du quadrillage sont les points dont les coordonnées sont des entiers.

On considère la diagonale qui joint les points $(0, 0)$ et $(45, 30)$.

Cette diagonale a pour pente $\frac{30-0}{45-0}$, ou $\frac{2}{3}$.

Puisqu'elle passe par l'origine, elle a pour équation $y = \frac{2}{3}x$.

On cherche donc le nombre de points de treillis situés sur la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x$ dont les abscisses varient de $x = 0$ à $x = 45$.

Soit (a, b) un point de treillis sur cette diagonale. Donc, a et b sont tous deux des entiers.

Puisque $b = \frac{2}{3}a$, alors a doit être un multiple de 3 pour que b soit un entier.

Les multiples de 3, de 0 à 45, sont $0, 3, 6, \ldots, 42, 45$.

Puisque $45 = 15(3)$, il y a 16 multiples de 3 dans cette liste.

Chacune de ces valeurs de a donne une valeur entière de b et ainsi un point de treillis sur la diagonale.

Il y a donc 16 points de treillis sur la diagonale.

Réponse : (B)

22. Puisque le drapeau est composé de quatre triangles, il nous faut au plus quatre couleurs différentes. Puisque deux triangles qui partagent un même côté doivent être de couleurs différentes, il nous faut au moins deux couleurs. (Par exemple, le triangle Gauche et le triangle Haut doivent être de couleurs différentes.)

On peut donc utiliser 2, 3 ou 4 couleurs.

On considère le nombre de drapeaux que l'on peut former dans chaque cas.

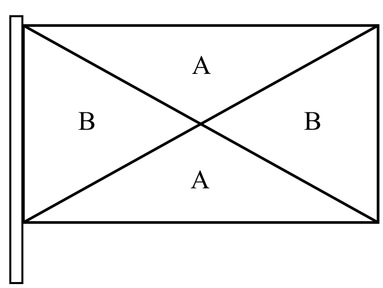
<u>1er cas : 2 couleurs</u>

On nomme les deux couleurs A et B.

On attribue la couleur A au triangle Haut.

Puisqu'il n'y a que deux couleurs et que les triangles Gauche et Droite ne peuvent être de la couleur A, ils doivent être de la couleur B.

Le triangle Bas ne peut être de la couleur B, puisqu'il partage un côté avec le triangle Gauche et un côté avec le triangle Droite. Il est donc de la couleur A. On a donc :



Cette situation est conforme à la règle.

Il y a 5 couleurs possibles pour A, soit rouge, blanc, bleu, vert ou mauve.

Pour chaque couleur choisie, il reste 4 couleurs possibles pour B, soit n'importe quelle autre couleur sauf celle de A.

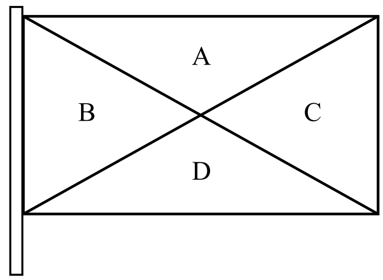
Dans ce cas, le nombre de drapeaux possibles est égal à 5(4), ou 20.

2^e cas : 4 couleurs

On nomme les quatre couleurs A, B, C et D.

Puisqu'il y a 4 triangles et 4 couleurs, les triangles sont de couleurs différentes.

On attribue les couleurs comme suit :



Cette situation est conforme à la règle.

Il y a 5 couleurs possibles pour A. Pour chacune de ces 5 couleurs, il y a 4 couleurs possibles pour B. Il y a donc 5×4 choix, ou 20 choix, pour les couleurs des triangles A et B. Pour chacun de ces 20 choix, il y a 3 couleurs possibles pour C. Il y a donc 20×3 choix, ou 60 choix pour les couleurs des triangles A, B et C. Pour chacun de ces 60 choix, il y a 2 couleurs possibles pour D. Il y a donc 60×2 choix, ou 120 choix pour les couleurs des triangles A, B, C et D.

Dans ce cas, le nombre de drapeaux possibles est égal à 5(4)(3)(2), ou 120.

3^e cas : 3 couleurs

On nomme les trois couleurs A, B et C.

On attribue la couleur A au triangle Haut.

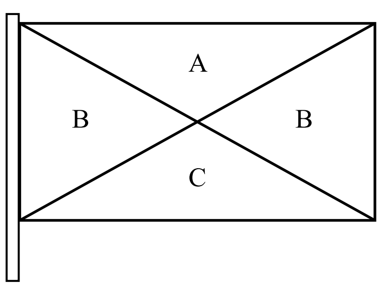
Puisque le triangle Gauche ne peut être de la couleur A, on lui attribue la couleur B.

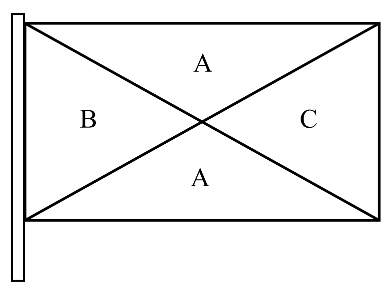
Le triangle Droite ne peut être de la couleur A. Il pourrait donc être de la couleur B ou C.

Si le triangle Droite est de couleur B, le triangle Bas doit être de couleur C, puisqu'on utilise trois couleurs.

Si le triangle Droite est de couleur C, le triangle Bas doit être de couleur A, puisqu'il partage un côté avec le triangle Gauche et un côté avec le triangle Droite.

On a donc deux situations possibles :





Chaque situation est conforme à a règle.

Dans chaque situation, il y a 5 couleurs possibles pour A. Pour chacune de ces 5 couleurs, il y a 4 couleurs possibles pour B. Pour chacun des 20 choix de couleurs possibles précédents, il y a 3 choix de couleurs pour C.

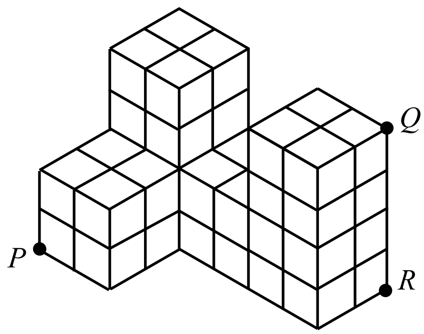
Pour chacune des deux situations, le nombre de drapeaux possibles est égal à 5(4)(3), ou 60.

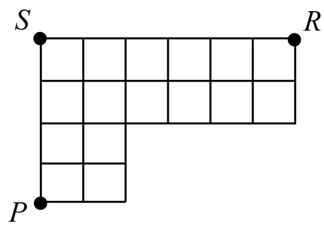
Dans ce cas, le nombre de drapeaux possibles est égal à 2(60), ou 120.

En tout, le nombre de drapeaux possibles est égal à $20 + 120 + 120$, ou 260.

Réponse : (E)

23. On calculera d'abord la distance PQ en fonction de n.
Soit R le point au bas du solide, directement au-dessous de Q et soit S le coin arrière gauche au bas du solide (on ne peut le voir dans la figure donnée).
Puisque QR est perpendiculaire à la surface au bas du solide, le triangle PRQ est rectangle en R. On a donc $PQ^2 = PR^2 + RQ^2$.
On sait aussi que le triangle PSR est rectangle en S, puisque le solide est formé de cubes.
On a donc $PR^2 = PS^2 + SR^2$.





D'après ces deux égalités, on a $PQ^2 = PS^2 + SR^2 + RQ^2$.
On remarque que la distance PS est 4 fois la longueur d'une arête d'un petit cube, SR est 6 fois la longueur d'une telle arête et RQ est 4 fois la longueur d'une telle arête.
Puisque chaque arête d'un petit cube a une longueur de $\sqrt{n}$, alors $PS = 4\sqrt{n}$, $SR = 6\sqrt{n}$ et $RQ = 4\sqrt{n}$.
Donc $PQ^2 = (4\sqrt{n})^2 + (6\sqrt{n})^2 + (4\sqrt{n})^2$, d'où $PQ^2 = 16n + 36n + 16n$, ou $PQ^2 = 68n$.
Donc $PQ = \sqrt{68n}$.
On cherche la plus petite valeur de n pour laquelle $\sqrt{68n}$ est un entier.
$\sqrt{68n}$ est un entier si $68n$ est un carré parfait.
On écrit 68 en factorisation première : $68 = 2 \times 2 \times 17$. Donc $68n = 2(2)(17)(n)$.
Un entier strictement positif est un carré parfait si ses facteurs premiers paraissent un nombre pair de fois.
Pour que $68n$ soit un carré parfait, il faut donc que n ait 17 comme diviseur.
La plus petite valeur de n pour laquelle $68n$ est un carré parfait est $n = 17$.
Lorsque $n = 17$, on a $68n = 2(2)(17)(17)$, ou $68n = (2 \times 17)^2$, ce qui est un carré parfait.
Donc, la plus petite valeur de n pour laquelle la distance de P à Q est un entier est $n = 17$.
(Après avoir déterminé que $PQ = \sqrt{68n}$, on aurait pu utiliser les cinq choix de réponse l'un après l'autre, en ordre croissant, jusqu'à ce qu'on obtienne une valeur entière de PQ.)

Réponse : (A)

24. Lorsque Nadia marche de N à G, soit x km la distance parcourue en montant et y km la distance parcourue en descendant. On sait que Nadia parcourt 2,5 km sur terrain plat.
Donc en marchant de G à N, elle parcourt x km en descendant, y km en montant et 2,5 km sur terrain plat. En effet, ce qu'elle parcourt en montant à l'aller est parcouru en descendant au retour et ce qu'elle parcourt en descendant à l'aller est parcouru en montant au retour.
Or, on sait que Nadia marche à une vitesse de 5 km/h sur terrain plat, de 4 km/h en montant et de 6 km/h en descendant.
Lorsque la distance est constante, on a vitesse $= \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$ ou distance $=$ vitesse $\times$ temps ou temps $= \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$. D'après cette dernière formule, en marchant de N à G, Nadia met $\frac{x}{4}$ heures en montant, $\frac{y}{6}$ heures en descendant et $\frac{2{,}5}{5}$ heures sur terrain plat.
On sait qu'elle met 1 heure et 36 minutes pour aller de N à G, soit 96 minutes ou $\frac{96}{60}$ heure. Donc :

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{2{,}5}{5} = \frac{96}{60}$$

De la même façon, lorsque Nadia revient de G à N, on a :

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{2{,}5}{5} = \frac{99}{60}$$

On cherche la distance totale de N à G, qui est égale à $(x+y+2{,}5)$ km. On doit donc déterminer la valeur de $x + y$.
On additionne les deux équations précédentes, membre par membre, et on simplifie pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{y}{4} + 1 &= \frac{195}{60} \\
x\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + y\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) &= \frac{135}{60} \\
\frac{5}{12}x + \frac{5}{12}y &= \frac{9}{4} \\
x + y &= \frac{12}{5}\left(\frac{9}{4}\right)
\end{aligned}$$

Donc $x + y = \frac{108}{20}$, ou $x + y = \frac{27}{5}$, ou $x + y = 5{,}4$ km.
La distance de N à G est donc égale à 5,4 km + 2,5 km, ou 7,9 km.

Réponse : (E)

25. On simplifie $\dfrac{2009}{2014}+\dfrac{2019}{n}$ pour obtenir $\dfrac{2009n+2014(2019)}{2014n}$, ou $\dfrac{2009n+4\,066\,266}{2014n}$.

Puisque $\dfrac{2009n+4\,066\,266}{2014n}=\dfrac{a}{b}$ et que $\dfrac{a}{b}$ est irréductible, alors $2009n+4\,066\,266=ka$ et $2014n=kb$, k étant un entier strictement positif.

Puisque $2009n+4\,066\,266=ka$, alors si a est un multiple de 1004, alors $2009n+4\,066\,266$ doit aussi être un multiple de 1004.

On détermine donc les valeurs de n pour lesquelles $2009n+4\,066\,266$ est divisible par 1004 et parmi ces valeurs de n, on détermine la plus petite valeur pour laquelle a est divisible par 1004. (On remarque que si $2009n+4\,066\,266$ est divisible par 1004, il n'est pas nécessaire que a soit divisible par 1004, puisqu'en réduisant la fraction $\dfrac{2009n+4\,066\,266}{2014n}$, on pourrait éliminer certains des diviseurs premiers de 1004 dans le numérateur.)

Puisque $2008=2\times 1004$ et $4\,066\,200=4050\times 1004$, on a

$$2009n+4\,066\,266=(2008n+4\,066\,200)+(n+66)=1004(2n+4050)+(n+66)$$

(2008 et 4 066 200 sont les plus grands multiples de 1004 qui sont inférieurs à 2009 et à 4 066 266, respectivement.)

Puisque $1004(2n+4050)$ est un multiple de 1004, alors $2009n+4\,066\,266$ est un multiple de 1004 si $n+66$ est un multiple de 1004. Posons $n+66=1004m$.

Donc, $2009n+4\,066\,266$ est un multiple de 1004 si $n=1004m-66$, m étant un entier strictement positif quelconque.

Ce sont les valeurs de n pour lesquelles l'expression $2009n+4\,066\,266$ est divisible par 1004. Parmi ces valeurs de n, on doit maintenant déterminer la plus petite valeur pour laquelle a est divisible par 1004.

Lorsque $m=1$, on a $n=1004-66$, ou $n=938$. Dans ce cas,

$$\frac{2009n+4\,066\,266}{2014n}=\frac{2009(938)+4\,066\,2006}{2014(938)}=\frac{5\,950\,708}{1\,889\,132}=\frac{1\,487\,677}{472\,283}$$

(dans la dernière étape, on a divisé le numérateur et le dénominateur par 4).

Que cette dernière fraction soit irréductible ou non, son numérateur est impair. Donc dans la fraction $\dfrac{a}{b}$ (la fraction irréductible équivalente) a sera impair et ne peut donc pas être divisible par 1004. On considère la valeur suivante de m.

Lorsque $m=2$, on a $n=2008-66$, ou $n=1942$. Dans ce cas,

$$\frac{2009n+4\,066\,266}{2014n}=\frac{2009(1942)+4\,066\,2006}{2014(1942)}=\frac{7\,967\,744}{3\,911\,188}=\frac{1\,991\,936}{977\,797}$$

(dans la dernière étape, on a divisé le numérateur et le dénominateur par 4).

Or $1004=4\times 251$ et 251 est un nombre premier. (251 est un nombre premier, puisqu'il n'est pas divisible par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11 ou 13, soit tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{251}$.)

Or, $1\,991\,936=1984\times 1004$. Donc, 1 991 936 est un multiple de 1004 et 977 797 n'est pas divisible par 4 ou par 251. Lorsqu'on écrit $\dfrac{1\,991\,936}{977\,797}$ sous forme irréductible $\dfrac{a}{b}$, alors a sera divisible par 1004.

Le plus petit entier positif n pour lequel a est un multiple de 1004 est $n=1942$. La somme de ses chiffres est égale à $1+9+4+2$, ou 16.

Réponse : (A)

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2013

(9^e^ année – Secondaire III)

le jeudi 21 février 2013

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 22 février 2013

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

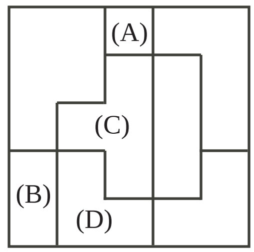
1. On simplifie d'abord ce qui est entre parenthèses : $(4 + 44 + 444) \div 4 = 492 \div 4 = 123$

Réponse : (B)

2. Puisque 8 items identiques ont couté 26 \$ en tout, il faut diviser le cout total par 8 pour déterminer le cout à l'unité.
La réponse est donc $26 \div 8$, ou (A).

Réponse : (A)

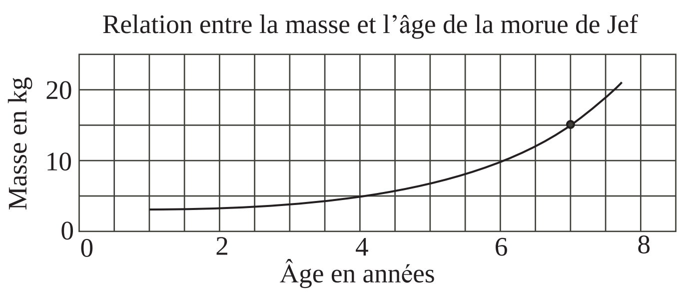
3. Chacune des figures (A), (B), (C) et (D) parait comme morceau du grand carré.



La figure (E) ne parait pas comme morceau du carré.

Réponse : (E)

4. Une masse de 15 kg est située à mi-chemin entre 10 kg et 20 kg sur l'axe vertical.
Le point où la courbe atteint le niveau de 15 kg est situé à mi-chemin entre 6 et 8 sur l'axe horizontal.



Donc, la morue a 7 ans lorsqu'elle a une masse de 15 kg.

Réponse : (B)

5. On évalue les exposants d'abord, puis on additionne.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 + 4 \times 4 \times 4 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

Puisque $100 = 10^2$, alors $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$.

Réponse : (C)

6. Puisque Élise parcourt $\frac{3}{5}$ du chemin à sa maison en 30 minutes, alors elle parcourt $\frac{1}{5}$ du chemin, à la même vitesse, en 10 minutes.
Puisque $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, il lui reste $\frac{2}{5}$ du chemin à parcourir pour arriver à la maison.
Or, elle marche à la même vitesse et $\frac{2}{5}$ du chemin correspond à 2 fois $\frac{1}{5}$ du chemin. Puisqu'elle met 10 minutes pour parcourir $\frac{1}{5}$ du chemin, elle mettra 2 fois 10 minutes, ou 20 minutes, pour parcourir le reste du chemin jusqu'à sa maison.

Réponse : (B)

7. On simplifie : $(\sqrt{100}+\sqrt{9})\times(\sqrt{100}-\sqrt{9}) = (10+3)\times(10-3) = 13\times 7 = 91$

Réponse : (A)

8. Puisque $PQRS$ est un rectangle, alors $QR = PS = 6$.
Donc $UR = QR - QU$, d'où $UR = 6 - 2$, ou $UR = 4$.
Puisque $PQRS$ est un rectangle et que TU est perpendiculaire à QR, alors TU est parallèle et isométrique à SR. Donc $TU = 3$.
D'après le triangle de Pythagore, et puisque $TR > 0$, alors :

$$TR = \sqrt{TU^2 + UR^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Donc $TR = 5$. (On aurait pu reconnaitre le triangle remarquable 3-4-5.)

Réponse : (C)

9. Puisque 1 L d'essence permet de parcourir 12,5 km, alors Paul dépense 1,20 \$ en essence pour parcourir 12,5 km.
Puisque $50 \div 12{,}5 = 4$, d'où $4 \times 12{,}5 = 50$, Paul parcourt 4 fois 12,5 km pour parcourir 50 km.
Puisque $4 \times 1{,}20\,\$ = 4{,}80\,\$$, Paul dépense 4,80 \$ en essence pour parcourir 50 km.

Réponse : (A)

10. En utilisant chacun des chiffres 2, 3 et 5 exactement une fois, il est possible de former six heures différentes, soit: 2:35, 2:53, 3:25, 3:52, 5:23 et 5:32.
La première de ces heures qui se présente après 3:52 est 5:23.
De 3:52 à 4:00, il s'écoule 8 minutes.
De 4:00 à 5:00, il s'écoule 60 minutes.
De 5:00 à 5:23, il s'écoule 23 minutes.
Donc de 3:52 à 5:23, soit l'intervalle de temps avant que le téléphone n'indique la prochaine fois chacun des chiffres 2, 3 et 5 exactement une fois, il s'écoule 91 minutes (car $8 + 60 + 23 = 91$) .

Réponse : (D)

11. Puisque la séquence de quatre figures est répétée et que $13 \times 4 = 52$, alors le 52e symbole est le dernier symbole de la séquence de quatre figures.
Les 52 premières figures de la régularité représentent 13 fois la séquence de quatre figures.
Or, chaque séquence de quatre figures comprend 2 $\heartsuit$. Donc, les 52 premières figures de la régularité comprennent 13×2 $\heartsuit$, ou 26 $\heartsuit$.
La 53e figure de la régularité est la 1re figure de la séquence de quatre figures, c'est-à-dire un $\heartsuit$.
Dans les 53 premières figures de la régularité, la figure $\heartsuit$ parait donc $26 + 1$ fois, ou 27 fois.

Réponse : (C)

12. Puisque $x = 11$ et $y = -8$, l'équation $2x - 3z = 5y$ devient $2 \times 11 - 3z = 5 \times (-8)$, ou $22 - 3z = -40$.
Donc $3z = 22 + 40$, ou $3z = 62$, d'où $z = \frac{62}{3}$.

Réponse : (D)

13. L'ensemble initial contient 11 nombres qui ont une somme de 66.
Si on enlève un nombre de l'ensemble, il restera 10 nombres dans l'ensemble.
Ces 10 nombres auront une moyenne de 6,1 s'ils ont une somme de $10 \times 6{,}1$, ou 61.
Puisque les 11 nombres de l'ensemble initial ont une somme de 66 et que les 10 nombres du nouvel ensemble ont une somme de 61, le nombre qui a été enlevé doit être 5, car $66 - 61 = 5$.

Réponse : (B)

14. On a $\angle QTS = 76^\circ$. Or, le triangle QTS est isocèle (car $QS = QT$). Donc $\angle QST = \angle QTS = 76^\circ$. Puisque les mesures d'angles du triangle QTS ont une somme de 180°, alors :

$$\angle SQT = 180^\circ - \angle QTS - \angle QST = 180^\circ - 76^\circ - 76^\circ = 28^\circ$$

Puisque PQR est un segment de droite, alors $\angle PQS + \angle SQT + \angle TQR = 180^\circ$.
On a donc $x^\circ + 28^\circ + 3x^\circ = 180^\circ$.
Donc $4x + 28 = 180$, d'où $4x = 152$, ou $x = 38$.

Réponse : (B)

15. On remarque que $64 = 4 \times 4 \times 4$.
Donc $64^2 = 64 \times 64 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$.
Puisque $4^n = 64^2$, alors $4^n = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$, d'où $n = 6$.

Réponse : (C)

16. *Solution 1*
Si $x = 1$, l'expression $3x + 1$ a une valeur de 4, ce qui est un entier pair.
Pour cette valeur de x, voici les valeurs des expressions des cinq choix de réponses :

(A) $x + 3 = 4$ (B) $x - 3 = -2$ (C) $2x = 2$ (D) $7x + 4 = 11$ (E) $5x + 3 = 8$

Seule l'expression (D) a une valeur impaire. Puisque $x = 1$ répond au critère initial, soit que l'expression prend une valeur entière impaire, la réponse doit être (D).

Solution 2
Soit x un entier tel que l'expression $3x+1$ prenne une valeur entière paire. Donc $3x$ est un entier impair, car il est 1 de moins qu'un entier pair.
Puisque $3x$ a une valeur entière impaire, alors x est un entier impair (si x était pair, $3x$ serait le produit d'un entier pair et d'un entier impair, ce qui serait un entier pair).
Puisque x est un entier impair, alors $x + 3$ est un entier pair (la somme de deux entiers impairs est toujours paire). Donc, le choix (A) n'est pas le bon.
Puisque x est un entier impair, alors $x - 3$ est un entier pair (un entier impair moins un entier impair est toujours un entier pair). Donc, le choix (B) n'est pas le bon.
Puisque x est un entier impair, alors $2x$ est un entier pair (le produit d'un entier pair et d'un entier impair est toujours pair). Donc, le choix (C) n'est pas le bon.
Puisque x est un entier impair, alors $7x$ est un entier impair (le produit de deux entiers impairs est toujours impair. Donc $7x+4$ est un entier impair (la somme d'un entier impair et d'un entier pair est toujours impaire).
Puisque x est un entier impair, alors $5x$ est un entier impair (le produit de deux entiers impairs est toujours impair. Donc $5x+3$ est un entier pair (la somme de deux entiers impairs est toujours paire). Donc, le choix (E) n'est pas le bon.
La seule expression qui doit être impaire est $7x + 4$.

Réponse : (D)

17. Puisque 40 % des chansons de la nouvelle liste sont de style country, alors les 60 % des chansons qui restent (100 % − 40 % = 60 %) doivent être de style pop ou hip-hop .
Puisque le rapport du nombre de chansons hip-hop au nombre de chansons pop reste le même, alors 65 % de 60% des chansons qui restent doivent être de style hip-hop.
Or, 65 % de 60 % = 65 % × 60 % = 0,65 × 0,6 = 0,39 = 39 %. Donc, les chansons hip-hop représentent maintenant 39 % des chansons sur la liste de lecture.

Réponse : (E)

18. L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du carré $PQRS$ moins l'aire totale des quatre régions non ombrées à l'intérieur du carré.
Puisque le carré $PQRS$ a des côtés de longueur 2, son aire est égale à 2^2, ou 4.
Puisque $PQRS$ est un carré, alors l'angle à chacun des sommets P, Q, R et S mesure 90°.
Or chacun des points P, Q, R et S est le centre d'un cercle de rayon 1. Donc, chacune des quatre régions non ombrées à l'intérieur du carré est un quart d'un cercle. (Un angle au centre de 90° donne un quart de cercle.)
Donc, l'aire totale des quatre régions non ombrées à l'intérieur du carré correspond à l'aire de quatre quarts de cercles de rayons 1, ou à l'aire d'un cercle de rayon 1.
Cette aire est égale à $\pi(1)^2$, ou π.
L'aire de la région ombrée est égale à $4 - \pi$.

Réponse : (E)

19. Puisque le drapeau est de forme rectangulaire, son aire est égale au produit de sa longueur et de sa largeur, c'est-à-dire à $h \times 2h$, ou $2h^2$.
Puisque le rectangle est divisé en sept rayures de même hauteur et de même longueur, les rayures ont toutes la même aire.
Puisque les quatre rayures ombrées ont une aire totale de 1400 cm^2, alors chaque rayure a une aire de 1400 cm^2 $\div$ 4, ou 350 cm^2.
Puisque le drapeau est composé de 7 rayures, son aire totale est de 350 cm^2 $\times$ 7, ou 2450 cm^2.
Puisque le drapeau mesure h sur $2h$, alors $2h^2 = 2450$ cm^2, ou $h^2 = 1225$ cm^2.
Donc $h = \sqrt{1225}$ cm, ou $h = 35$ cm (puisque $h > 0$).
Le drapeau a une hauteur de 35 cm.

Réponse : (C)

20. On crée un tableau qui fait correspondre à chacun des 4 résultats possibles de Simon (puisqu'il jette un dé à 4 faces) les 6 résultats possibles de Théo (puisqu'il jette un dé à 6 faces. Le nombre de résultats équiprobables est donc égal à 4×6, ou 24. On remplit le tableau en inscrivant un O lorsque Simon obtient un plus grand nombre que Théo et un N autrement.

		Jet de Théo					
		1	2	3	4	5	6
Jet de Simon	1	N	N	N	N	N	N
	2	O	N	N	N	N	N
	3	O	O	N	N	N	N
	4	O	O	O	N	N	N

Puisqu'il y a 6 résultats favorables sur 24 résultats équiprobables possibles, la probabilité pour que Simon obtienne un plus grand nombre que Théo est de $\frac{6}{24}$, ou $\frac{1}{4}$.

Réponse : (E)

21. On exprime le nombre en factorisation première.
Puisque le chiffre des unités de 636 405 est un 5, le nombre est divisible par 5. On a donc :

$$636\,405 = 5 \times 127\,281$$

Puisque la somme des chiffres du nombre 127 281 est un multiple de 3, ce nombre est un multiple de 3. On a donc :

$$636\,405 = 5 \times 3 \times 42\,427$$

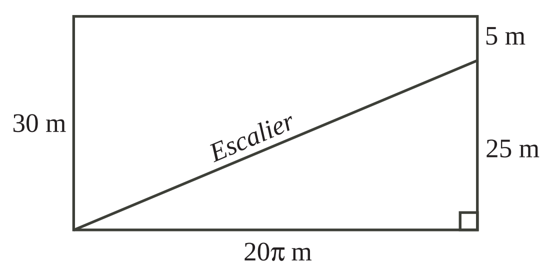
On voit facilement que 42 427 est divisible par 7. On a donc :

$$636\,405 = 5 \times 3 \times 7 \times 6061$$

On peut procéder par essais systématiques pour vérifier si le nombre 6061 est divisible par les nombres premiers suivants, soit 11, 13, 17, 19, ... On obtient $6061 = 11 \times 551 = 11 \times 19 \times 29$.
Donc $636\,405 = 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 19 \times 29$.
On veut récrire ce produit comme produit de trois entiers de deux chiffres.
Le produit des trois plus petits facteurs est égal à $3 \times 5 \times 7$, ou 105, ce qui est un nombre de trois chiffres. Tout autre produit de trois facteurs premiers serait donc plus grand que 105. Il est donc impossible de former un facteur de deux chiffres en multipliant trois facteurs premiers de 636 405.
Il faut donc combiner les six facteurs premiers en paires pour que le produit de chaque paire donne un nombre de deux chiffres.
Le facteur premier 29 peut seulement être multiplié par 3 (puisque $29 \times 3 = 87$, un nombre de deux chiffres), mais il ne peut pas être multiplié par un facteur premier plus grand, car $29 \times 5 = 145$, un nombre de trois chiffres.
On a donc $636\,405 = 87 \times 5 \times 7 \times 11 \times 19$.
Le facteur premier 19 peut être multiplié par 5 (puisque $19 \times 5 = 95$, un nombre de deux chiffres) mais il ne peut pas être multiplié par un facteur premier plus grand, car $19 \times 7 = 133$, un nombre de trois chiffres.
On a donc $636\,405 = 87 \times 95 \times 7 \times 11 = 87 \times 95 \times 77$.
La somme de ces trois diviseurs de deux chiffres est égale à $87 + 95 + 77$, ou 259.

Réponse : (A)

22. La distance totale est égale à la somme de la longueur de l'escalier et de la longueur de l'échelle.
L'escalier en spirale fait une fois le tour du château d'eau.
Puisque le château d'eau a un rayon de 10 m, il a une circonférence de $2 \times \pi \times 10$ m, ou 20π m.
On peut donc « dérouler » le château d'eau et l'aplatir pour former un rectangle de longueur 20π m et de hauteur 30 m.
Puisque l'escalier a une pente constante, il forme une ligne droite sur ce rectangle.
L'échelle a une longueur de 5 m et elle compte pour les derniers 5 m du château d'eau. Puisque celui-ci a une hauteur de 30 m, alors le haut de l'escalier est à 25 m au-dessus de la base $(30 - 5 = 25)$.



On utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur de l'escalier en mètres. Puisque cette longueur est positive, on a :

$$\sqrt{(20\pi)^2 + (25)^2} \approx 67{,}62$$

La distance totale le long de l'escalier et ensuite le long de l'échelle est environ égale à
5 m + 67,62 m, ou 72,62 m.
Le choix de réponse le plus près est 72,6 m.

Réponse : (A)

23. On suppose que les cinq nombres distincts que Julien choisit sont V, W, X, Y, Z et que $V < W < X < Y < Z$.
On veut attribuer ces nombres aux variables p, q, r, s et t de manière que $p < s$ et $q < s$ et $r < t$ et $s < t$.
On remarque que t doit avoir la plus grande valeur parmi les variables p, q, r, s et t. En effet, on doit avoir $r < t$ et $s < t$. De plus, puisque $p < s$ et $q < s$, on doit avoir $p < s < t$ et $q < s < t$, d'où $p < t$ et $q < t$.
Puisque t doit avoir la plus grande valeur, on doit avoir $t = Z$.

Or ni p, ni q, ne peut avoir la deuxième plus grande valeur Y, puisque p et q sont tous les deux inférieurs à s et à t.
Il y a donc deux possibilités : $Y = r$ ou $Y = s$.

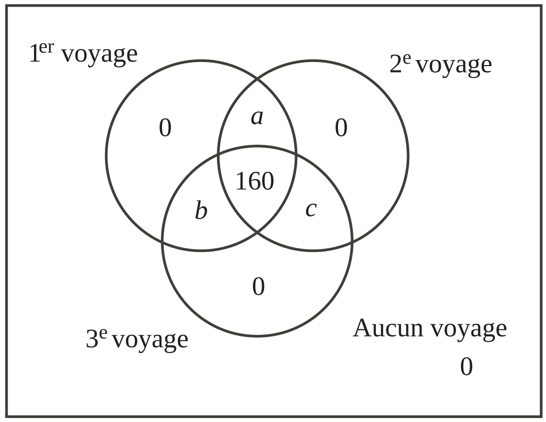
1re possibilité : $Y = r$
On a $Y = r$ et $Z = t$.
On doit donc attribuer les valeurs V, W et X (telles que $V < W < X$) aux variables p, q et s (telles que $p < s$ et $q < s$).
Puisque X est le plus grand des nombres V, W et X et que s doit avoir la plus grande valeur parmi les variables p, q et s, alors $X = s$.
Il reste à attribuer les valeurs V et W aux variables p et q.
Puisqu'il n'y a aucune contrainte entre p et q, il y a deux possibilités : ou bien $V = p$ et $W = q$, ou bien $V = q$ et $W = p$.
Donc si $Y = r$, il y a 2 façons possibles d'attribuer les valeurs.

2e possibilité : $Y = s$
On a $Y = s$ et $Z = t$.
On doit donc attribuer les valeurs V, W et X (telles que $V < W < X$) aux variables p, q et r.
Il n'y a aucune contrainte entre p, q et r.
Il y a donc 3 façons d'attribuer une des valeurs V, W et X à p.
Pour chacune de ces 3 façons, il y a 2 façons d'attribuer une des deux autres valeurs à q.
Pour chacune de ces 3×2 façons, il y a 1 façon d'attribuer la dernière valeur à r.
En tout, le nombre de façons d'attribuer les valeurs est égal à $3 \times 2 \times 1$, ou 6. (Les 6 façons d'attribuer les valeurs respectives V, W et X aux variables p, q et r sont VWX, VXW, WVX, WXV, XVW et XWV.)
Donc si $Y = s$, il y a 6 façons possibles d'attribuer les valeurs.

Selon les deux possibilités, le nombre de façons possibles d'attribuer les valeurs est égal à $2 + 6$, ou 8.

Réponse : (D)

24. Soit x le nombre d'élèves à l'école secondaire Pascal.
Soit a le nombre total d'élèves qui ont fait les deux premiers voyages, mais pas le troisième.
Soit b le nombre total d'élèves qui ont fait le premier et le troisième voyage, mais pas le deuxième.
Soit c le nombre total d'élèves qui ont fait les deux derniers voyages, mais pas le premier.
On sait aussi qu'aucun élève a fait un voyage seulement et que 160 élèves ont fait les trois voyages.
On représente la situation par un diagrame de Venn :



Puisque x représente le nombre total d'élèves dans l'école et que chaque nombre ou inconnue représente le nombre d'élèves dans une section particulière du diagramme, alors :

$$x = a + b + c + 160$$

D'après les renseignements donnés :

- 50 % des élèves de l'école ont fait le premier voyage. Donc $0{,}5x = a + b + 160$.
- 80 % des élèves de l'école ont fait le deuxième voyage. Donc $0{,}8x = a + c + 160$.
- 90 % des élèves de l'école ont fait le troisième voyage. Donc $0{,}9x = b + c + 160$.

On utilise ces résultats comme suit :

$$\begin{aligned}
x &= a + b + c + 160 \\
2x &= 2a + 2b + 2c + 160 + 160 \\
2x &= (a + b + 160) + (a + c + 160) + (b + c) \\
2x &= 0{,}5x + 0{,}8x + (0{,}9x - 160) \\
2x &= 2{,}2x - 160 \\
160 &= 0{,}2x \\
x &= 800
\end{aligned}$$

Il y a donc 800 élèves à l'école secondaire Pascal.

Réponse : (D)

25. La suite formée par les différences entre toutes les paires de termes consécutifs est appelée la suite des différences.
Puisque la suite GEB est croissante et que tout entier positif qui ne parait pas dans la suite GEB parait exactement une fois dans la suite des différences, alors chaque entier de 1 à 12, à l'exception de 1, 3, 7 et 12 (soit un total de 8 entiers positifs) doit paraitre dans la suite des différences.
Puisque la suite des différences est croissante, alors ces 8 entiers doivent paraitre en ordre croissant. La suite des différences commence donc par les nombres $2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, \ldots$
On peut prolonger la suite GEB en utilisant la suite des différences. Par exemple, puisque le 4e terme de la suite GEB est 12 et que la 4e différence est 6, le 5e terme de la suite GEB est égal à $12 + 6$, ou 18.
On continue de cette façon pour déterminer quelques autres termes de la suite GEB :

$$1, 3, 7, 12, 18, 26, 35, 45, 56, \ldots$$

De même, chaque entier de 1 à 26, à l'exception de 1, 3, 7, 12, 18 et 26 (soit un total de 20 entiers positifs) doit paraitre dans la suite des différences.
Puisque la suite des différences est croissante, alors ces 20 entiers doivent paraitre en ordre croissant. On peut donc prolonger la suite des différences :

$$2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, \ldots$$

Ceci nous permet de prolonger la suite GEB :

$$1, 3, 7, 12, 18, 26, 35, 45, 56, 69, 83, 98, 114, 131, \ldots$$

De même, tous les entiers de 1 à 114, à l'exception des 13 premiers termes de la suite GEB, doivent paraitre en ordre croissant dans la suite des différences. Il y en a $114 - 13$, ou 101 en tout.
On veut déterminer le 100e terme de la suite GEB. On peut le faire en partant du premier terme de la suite GEB, soit 1, et en additionnant à 1 chacun des 99 premiers termes de la suite des différences. En effet, les termes de la suite des différences sont les différences entre les termes consécutifs de la suite GEB. Donc, après chaque addition, on obtient le terme suivant de la suite GEB.
D'après ce qui précède, 113 est le 101e terme de la suite des différences. Donc 112 est le 100e terme et 111 est le 99e terme.
Puisque les 99 premiers termes de la suite des différences contiennent la plupart des entiers de 2 à 111, à l'exception des quelques entiers qui sont des termes de la suite GEB, on peut déterminer la somme de ces termes en additionnant les entiers de 2 à 111 et en soustrayant les exceptions.
Le 100e terme de la suite GEB est donc égal à :

$$\begin{aligned}
&1 + (2 + 4 + 5 + 6 + 8 + \cdots + 109 + 110 + 111) \\
&\quad = \; 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 109 + 110 + 111) \\
&\qquad\qquad - (1 + 3 + 7 + 12 + 18 + 26 + 35 + 45 + 56 + 69 + 83 + 98) \\
&\quad = \; 1 + \tfrac{1}{2}(111)(112) - (453) \\
&\qquad\qquad \text{(on sait que la somme des entiers de 1 à } n \text{ est égale à } \tfrac{1}{2}n(n+1)) \\
&\quad = \; 1 + 111(56) - 453 \\
&\quad = \; 5764
\end{aligned}$$

Le 100e terme de la suite GEB est donc égal à 5764.

Réponse : (E)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2012

(9e année – Secondaire III)

le jeudi 23 février 2012
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 24 février 2012
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On tient compte de la priorité des opérations : $\dfrac{1+(3\times 5)}{2} = \dfrac{1+15}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$.

RÉPONSE : (D)

2. La moitié (50 %) des 200 élèves ont choisi un mets grec.
Puisque la moitié de 200 est égale à 100, alors 100 élèves ont choisi un mets grec.

RÉPONSE : (E)

3. Puisque $\frac{60}{8} = 60 \div 8 = 7{,}5$, ce choix de réponse n'est pas un nombre entier.
On remarque que $\frac{60}{12} = 5$, $\frac{60}{5} = 12$, $\frac{60}{4} = 15$ et $\frac{60}{3} = 20$. Ces choix de réponse sont tous des entiers.

RÉPONSE : (B)

4. Puisqu'il était 7 h 30 il y a 16 minutes, il est maintenant 16 minutes après 7 h 30. Il est donc $(30+16)$ minutes après 7 h 00. Il est donc 7 h 46.
Or, 8 h 00 est 60 minutes après 7 h 00. Puisque $60-46=14$, il sera 8 h 00 dans 14 minutes.

RÉPONSE : (B)

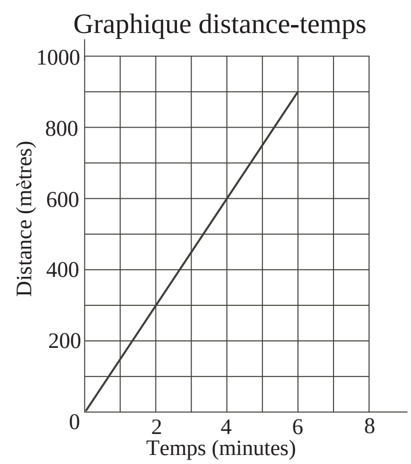
5. On développe les puissances de 10 pour obtenir $8\times 100\,000 + 4\times 1000 + 9\times 10 + 5$.
On obtient donc $800\,000 + 4000 + 90 + 5$, ou $804\,095$.

RÉPONSE : (A)

6. On écrit les nombres en ordre croissant : 0,023; 0,032; 0,203; 0,302; 0,320.
La différence entre le plus grand et le plus petit des nombres est égale à $0{,}320 - 0{,}023$, ou 0,297.

RÉPONSE : (E)

7. Anna marche à une vitesse constante et elle a parcouru 600 mètres en 4 minutes. Puisque $600 \div 4 = 150$, alors elle a parcouru 150 mètres à chaque minute.
Puisque $6\times 150 = 900$, elle parcourt 900 mètres en 6 minutes.



RÉPONSE : (D)

8. *Solution 1*
Chaque segment entre deux entiers consécutifs sur la règle est divisé en 4 parties égales, c'est-à-dire en quarts.
Le point Q est donc situé à $2+\frac{3}{4}$, ou $2\frac{3}{4}$, tandis que le point P est situé à $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$.
Le segment PQ a donc une longueur de $2\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$, ou $2\frac{3}{4} - \frac{2}{4}$, ou $2\frac{1}{4}$, ou 2,25.

Solution 2
Chaque segment entre deux entiers consécutifs sur la règle est divisé en 4 parties égales, c'est-à-dire en quarts.
De P à Q, il y a 9 quarts. Le segment PQ a donc une longueur de $\frac{9}{4}$, ou 2,25.

RÉPONSE : (A)

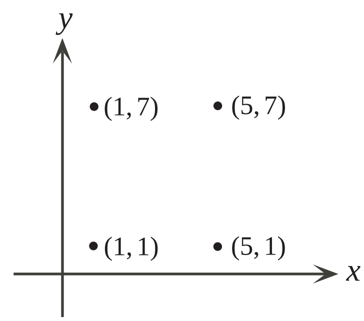
9. On reporte $y = 1$ dans la deuxième équation pour obtenir $4x - 2(1) + 3 = 3x + 3(1)$.
On simplifie pour obtenir $4x - 2 + 3 = 3x + 3$, ou $4x + 1 = 3x + 3$.
Donc $4x - 3x = 3 - 1$, d'où $x = 2$.

Réponse : (C)

10. Puisque Émilie est médecin et qu'à part elle, il y a 5 médecins et 3 infirmiers à l'hôpital, alors il y a 6 médecins et 3 infirmiers en tout.
Puisque Robert est infirmier, alors à part lui, il y a 6 médecins et 2 infirmiers à l'hôpital.
Donc $m = 6$ et $i = 2$, d'où $mi = 12$.

Réponse : (B)

11. Puisque les trois points donnés forment un angle droit, le quatrième sommet du rectangle doit être situé au-dessus du point $(5, 1)$ et à la droite du point $(1, 7)$.
Le quatrième sommet a donc une abscisse de 5 et une ordonnée de 7.
Le quatrième sommet a pour coordonnées $(5, 7)$.



Réponse : (C)

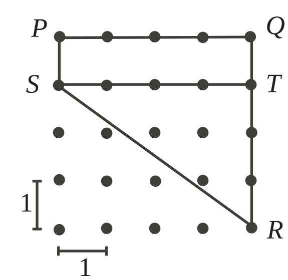
12. On peut exprimer l'énoncé de façon différente en disant que chaque élève a payé 3,71 \$ et que quelques-uns ont payé 0,01 \$ de plus.
Or $7 \times 3{,}71\,\$ = 25{,}97\,\$$ et la pizza a coûté 26,00 \$ en tout. Donc, les élèves qui ont payé 0,01 \$ de plus ont défrayé la différence de 0,03 \$.
Donc, 3 élèves ont payé 0,01 \$ de plus, c'est-à-dire que 3 élèves ont payé 3,72 \$.

Réponse : (B)

13. Puisque $g \nabla 6 = 45$, alors d'après la définition de l'opération, on a $g^2 - 6^2 = 45$.
Donc $g^2 = 45 + 36$, ou $g^2 = 81$.
Puisque $g > 0$, alors $g = \sqrt{81}$, ou $g = 9$.

Réponse : (E)

14. Le périmètre du quadrilatère $PQRS$ est égal à $PQ + QR + RS + SP$.
Puisqu'il y a une distance de 1 entre deux points adjacents à l'horizontale ou à la verticale, alors $PQ = 4$, $QR = 4$ et $PS = 1$.
Le périmètre est donc égal à $4 + 4 + RS + 1$, ou $RS + 9$.
On doit déterminer la longueur du côté RS.
Au point S, on trace un segment horizontal jusqu'au point T sur QR. On forme donc un triangle rectangle STR dans lequel $ST = 4$ et $TR = 3$.
Il s'agit donc du triangle rectangle remarquable 3-4-5. (Ou, puisque le triangle est rectangle, alors selon le théorème de Pythagore, on a $RS^2 = ST^2 + TR^2$, ou $RS^2 = 4^2 + 3^2$, ou $RS^2 = 25$, d'où $RS = 5$, car $RS > 0$.) Donc $RS = 5$.
Le quadrilatère $PQRS$ a donc un périmètre de $5 + 9$, ou 14.



Réponse : (C)

15. *Solution 1*

Soit r le nombre de casques rouges. Puisque l'équipe compte 6 casques rouges de plus que de casques bleus, elle compte $r-6$ casques bleus.

Puisque le rapport du nombre de casques rouges au nombre de casques bleus est de 5 : 3, alors $\frac{r}{r-6}=\frac{5}{3}$, d'où $3r=5(r-6)$, ou $3r=5r-30$.

Donc $2r=30$, d'où $r=15$.

L'équipe compte donc 15 casques rouges et 9 casques bleus pour un total de 24 casques.

Solution 2

Puisque le rapport du nombre de casques rouges au nombre de casques bleus est de 5 : 3, on peut multiplier les deux membres du rapport tour à tour par divers nombres jusquà ce que les deux membres du rapport diffèrent de 6.

Si on multiplie par 2, on obtient $5:3=10:6$, ce qui ne convient pas, car $10-6\neq 6$.

Si on multiplie par 3, on obtient $5:3=15:9$. Puisque $15-9=6$, on a le bon nombre de casques de chaque couleur.

L'équipe compte donc 15 casques rouges et 9 casques bleus pour un total de 24 casques.

(Si on continue de multiplier les membres du rapport par des nombres supérieurs à 3, on obtient de plus grands nombres avec une différence entre eux qui est supérieure à 6. Donc, la réponse est unique.)

RÉPONSE : (C)

16. La courtepointe est formée de 25 carrés identiques.

On voit que 4 des 25 carrés sont entièrement ombrés, 8 contiennent un triangle ombré qui couvre la moitié du carré et 4 contiennent deux petits triangles qui couvrent chacun un quart d'un carré.

Cela est égal à un nombre équivalent de carrés ombrés, soit $4+8\times\frac{1}{2}+4\times 2\times\frac{1}{4}$, ou 10.

Pour obtenir le pourcentage de la courtepointe qui est ombrée, on a $\frac{10}{25}=\frac{40}{100}=40\,\%$.

Donc, 40 % de la courtepointe est ombrée.

RÉPONSE : (B)

17. Puisque $PR=PS$ dans le triangle PRS, alors $\angle PRS=\angle PSR$.

Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, alors dans le triangle PRS, on a $\angle PRS+\angle PSR+34^\circ=180^\circ$, ou $\angle PRS+\angle PSR=146^\circ$.

Donc, les angles PRS et PSR mesurent chacun $146^\circ\div 2$, ou 73°.

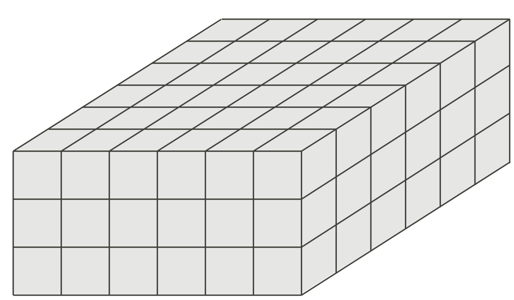
Dans le triangle PQT, on a $PQ=PT$. Donc $\angle PQT=\angle PTQ=62^\circ$.

Puisque l'angle PRS est extérieur au triangle PQR, alors $\angle PRS=\angle PQR+\angle QPR$, ou $73^\circ=62^\circ+x^\circ$, d'où $x=11$.

(On aurait pu déterminer que $\angle PRQ=180^\circ-\angle PRS$, d'où $\angle PRQ=107^\circ$, et utiliser la somme des mesures d'angles du triangle PQR pour obtenir $62^\circ+x^\circ+107^\circ=180^\circ$, d'où $x=11$.)

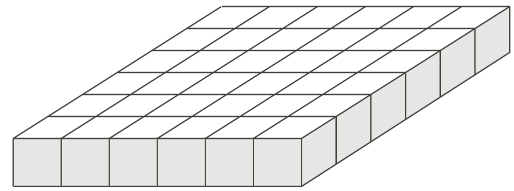
RÉPONSE : (A)

18. On considère le prisme comme un prisme à base carrée, de 6 sur 6, avec une hauteur de 3. On peint l'extérieur et on le découpera le long des lignes.



On voit que le prisme est composé de trois étages. Or, chaque petit cube de l'étage supérieur et chaque petit cube de l'étage inférieur a au moins une face peinte. On enlève tous les petits cubes sur ces deux étages.

Il reste donc l'étage du milieu. Chaque petit cube sur la surface latérale de cet étage a reçu de la peinture.
Si on enlève ces petits cubes, il nous reste un carré 4×4 formé de petits cubes non peints. Il y a donc 16 petits cubes qui n'ont aucune face peinte.



Réponse : (A)

19. Soit $PQ = a$, $QR = b$, $PW = c$ et $WV = d$.
Puisque le grand rectangle a été divisé en petits rectangles, alors $PQ = WX = VU = a$, $QR = XS = UT = b$, $PW = QX = RS = c$ et $WV = XU = ST = d$.
Puisque le rectangle $PQXW$ a une aire de 9, alors $ac = 9$.
Puisque le rectangle $QRSX$ a une aire de 10, alors $bc = 10$.
Puisque le rectangle $XSTU$ a une aire de 15, alors $bd = 15$.
L'aire du rectangle $WXUV$ est égale à ad. On cherche donc une expression pour ad.
Si on multiplie les équations $ac = 9$ et $bd = 15$, membre par membre, on obtient $(ac)(bd) = 9 \times 15$, ou $abcd = 135$.
On divise cette équation, membre par membre, par l'équation $bc = 10$.
On obtient $\dfrac{abcd}{bc} = \dfrac{135}{10} = \dfrac{27}{2}$, d'où $ad = \dfrac{27}{2}$.

Réponse : (B)

20. *Solution 1*
Lorsqu'on divise N par 10, par 11 ou par 12, on a un reste de 7.
Cela signifie que le nombre $N - 7$ est divisible par 10, par 11 et par 12. Soit $M = N - 7$.
Puisque M est divisible par 10, par 11 et par 12, alors M est divisible par le plus petit commun multiple de 10, de 11 et de 12.
Or $10 = 2 \times 5$, $12 = 2 \times 2 \times 3$ et 11 est un nombre premier. Donc, le plus petit commun multiple de 10, de 11 et de 12 est égal à $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11$, ou 660. (Pour déterminer le PPCM, on multiplie la plus grande puissance de 2, de 3, de 5 et de 11 dans les trois nombres.)
Puisque M est divisible par 660 et que $N = M + 7$ est un entier de trois chiffres, alors M doit être égal à 660. (Le prochain multiple de 660 est 1320.)
Donc $N = 660 + 7$, ou $N = 667$. La somme des chiffres de N est égale à $6 + 6 + 7$, ou 19.

Solution 2
Lorsqu'on divise N par 10, par 11 ou par 12, on a un reste de 7.
Cela signifie que le nombre $N - 7$ est divisible par 10, par 11 et par 12. Soit $M = N - 7$.
Puisque M est divisible par 10 et par 11, il doit être divisible par 110.
On vérifie les premiers multiples de 110 jusqu'à ce qu'on en trouve un qui est divisible par 12.
Les multiples 110, 220, 330, 440 et 550 ne sont pas divisibles par 12, mais 660 l'est.
Donc, M peut être égal à 660. (Puisque M doit avoir 3 chiffres, il doit être égal à 660.)
Donc $N = 660 + 7$, ou $N = 667$. La somme des chiffres de N est égale à $6 + 6 + 7$, ou 19.

Réponse : (E)

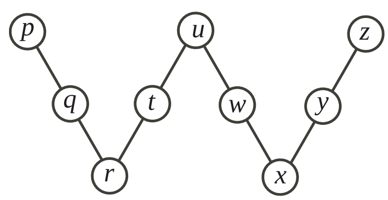
21. Soit L la longueur de la ficelle et soit x la longueur du plus petit morceau.
Puisque chaque longueur est 2 fois celle du morceau précédent, les autres morceaux ont pour longueurs respectives $2x$, $4x$ et $8x$.
Puisque les longueurs des quatre petits morceaux donnent la longueur de la ficelle, alors $x + 2x + 4x + 8x = L$, ou $15x = L$, d'où $x = \frac{1}{15}L$.
La longueur du plus grand morceau est donc égale à $8x$, ou $\frac{8}{15}L$, c'est-à-dire à $\frac{8}{15}$ de la longueur de la ficelle initiale.

Réponse : (A)

22. Soit r le rayon de chaque cercle.
Puisque les cercles ont le même rayon, ils ont la même aire.
Puisque la partie ombrée est commune aux deux cercles, alors l'aire de la partie non ombrée de chaque cercle doit être ma même.
Puisque l'aire de la région ombrée est égale à la somme de l'aire des deux régions non ombrées, chaque région non ombrée a une aire de $\frac{1}{2} \times 216\pi$, ou 108π.
L'aire d'un cercle doit être égale à la somme de l'aire d'une région non ombrée et de la région ombrée. Elle est donc égale à $216\pi + 108\pi$, ou 324π.
Puisque le rayon d'un cercle est égal à r, alors $\pi r^2 = 324\pi$, d'où $r^2 = 324$.
Puisque $r > 0$, alors $r = \sqrt{324}$, ou $r = 18$.
Chaque cercle a donc une circonférence égale à $2\pi r$, ou $2\pi(18)$, ou 36π.
Réponse : (C)

23. Soit h cm la profondeur de l'eau dans chaque contenant.
Puisque le premier contenant est un prisme dont la base rectangulaire mesure 2 cm sur 4 cm, alors le volume d'eau qu'il contient, en cm^3, est égal à $2 \times 4 \times h$, ou $8h$.
Puisque le deuxième contenant est un cylindre qui a un rayon de 1 cm, alors le volume d'eau qu'il contient, en cm^3, est égal à $\pi \times 1^2 \times h$, ou πh.
Puisque le volume total d'eau dans les deux contenants est de 80 cm^3, alors $8h + \pi h = 80$.
Donc $h(8 + \pi) = 80$, d'où $h = \dfrac{80}{8+\pi}$, ou $h \approx 7{,}18$.
Le choix de réponse le plus près est 7,2 (c.-à-d. que la profondeur de l'eau est près de 7,2 cm).
Réponse : (B)

24. Si on réussit à placer les nombres de manière à respecter la condition de l'énoncé, on peut ensuite ajouter un même nombre à chaque cercle ou soustraire un même nombre de chaque cercle, tout en respectant la condition. (Cela tient au fait qu'il y a le même nombre d'entiers sur chaque segment.)
On peut donc soustraire 2012 de chaque nombre donné et tenter de placer les entiers de 0 à 8 dans les cercles de manière à respecter la condition.
On nomme donc les entiers p, q, r, t, u, w, x, y et z. Soit S la somme des entiers sur n'importe quel segment.

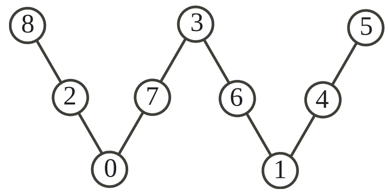


Puisque p, q, r, t, u, w, x, y et z représentent les entiers de 1 à 8 dans un certain ordre , on a :

$$p + q + r + t + u + w + x + y + z = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

D'après la condition de l'énoncé, on a $S = p + q + r = r + t + u = u + w + x = x + y + z$.
Donc $(p + q + r) + (r + t + u) + (u + w + x) + (x + y + z) = 4S$.
Donc $(p + q + r + t + u + w + x + y + z) + r + u + x = 4S$, d'où $r + u + x = 4S - 36$, ou $r + u + x = 4(S - 9)$.
On remarque que le membre de droite est un entier qui est divisible par 4.
Or, on veut que S soit le plus petit possible. On veut donc que $r+u+x$ soit le plus petit possible.
Puisque $r+u+x$ est un entier strictement positif qui est divisible par 4, alors sa valeur minimale est $r + u + x = 4$.
Si $r + u + x = 4$, alors r, u et x doivent avoir pour valeurs 0, 1 et 3 dans un ordre quelconque,

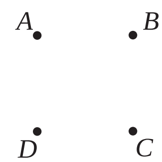
puisque r, u et x représentent des entiers distincts de 0 à 8.
Dans ce cas, on a $4 = 4S - 36$, d'où $S = 10$.
Puisque $S = 10$, alors r et u ou bien u et x ne peuvent pas avoir pour valeurs 0 et 1, dans un ordre quelconque, parce que le troisième nombre aurait alors une valeur de 9, ce qui est interdit.
Donc, u doit avoir une valeur de 3, tandis que r et x ont des valeurs de 0 et de 1 dans un ordre quelconque.
Voici un placement des nombre qui respecte la condition de l'énoncé :



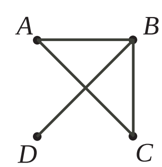
Donc dans l'énoncé, la valeur de u est égale à $3 + 2012$, ou 2015.

Réponse : (D)

25. Soit A, B, C et D les quatre personnes dans la salle. On représente chacune par un point.
Il y a six paires possibles d'amis, soit AB, AC, AD, BC, BD et CD. Si deux personnes sont des amies, on unit les points correspondants par un segment. Ainsi si deux personnes ne sont pas amies, leurs points ne seront pas unis par un segment.



On considère la paire AB. Il y a 50 % de chances que A et B soient amis. Les chances sont donc égales qu'il y ait ou non un segment qui relie A et B. Dans chacun de ces 2 cas, les chances sont égales qu'il y ait ou non un segment qui relie A et C. On peut continuer de cette façon pour les autres paires de personnes. Le nombre total de dessins que l'on peut tracer avec des segments ou non entre les 6 paires de points est donc égal à $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, ou 2^6, ou 64.
Par exemple, supposons que A et B, B et C, A et C, ainsi que B et D sont amis. Cette situation serait représentée par le dessin ci-contre.



Puisque chacun des choix de tracer ou non un segment est équiprobable, chacun des 64 dessins est équiprobable. Chacun a donc une probabilité de $\frac{1}{64}$.

D'après la définition, les personnes A et B, sont *reliées* si :

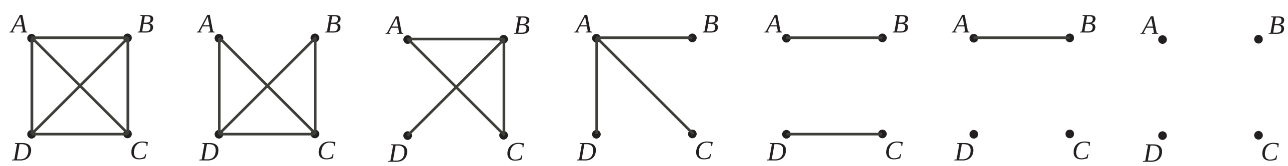
- il y a un segment entre les points A et B ou
- s'il y a un segment entre C et chacun des points A et B ou
- s'il y a un segment entre D et chacun des deux points A et B ou
- s'il y a un segment entre C et un des deux points, un autre entre D et l'autre point, ainsi qu'un segment entre C et D.

En d'autres mots, les points A et B sont reliés si l'on peut se déplacer de A à B en suivant des segments et en passant ou non par C et/ou par D.
Si, dans un dessin. toutes les paires de points sont reliées, on dira que le dessin est *complètement relié*.
Puisqu'on cherche la probabilité pour que chaque paire de personnes dans la salle soit reliée, on cherche le nombre de dessins qui sont complètement reliés. Ce nombre sera divisé par 64 pour obtenir la probabilité.

On examine d'abord le nombre de dessins de chaque type, selon qu'ils contiennent 0 segment, 1 segment, 2 segments et ainsi de suite jusqu'à 6 segments. Ensuite, on examinera chaque type pour déterminer le nombre de dessins de ce type qui sont complètement reliés.

- 0 segment : Il y a 1 dessin possible.
- 6 segments : Il y a 1 dessin possible.
- 1 segment : Il y a 6 dessins possibles, car il est possible de joindre n'importe quelle des 6 paires de points possibles.
- 5 segments : Il y a 6 dessins possibles. En effet, on peut commencer avec un dessin de 6 segments et enlever n'importe quel des 6 segments.
- 2 segments : Il y a 15 dessins possibles. En effet, il y a 6 façons de choisir le premier segment et pour chacun de ces choix, il y a 5 façons de choisir le deuxième segment, pour un total de 30 choix. Or, chaque paire de segments a été comptée deux fois. (Par exemple le choix AB suivi de BD, ainsi que le choix BD suivi de AB). Le nombre de dessins est donc égal à $30 \div 2$, ou 15.
- 4 segments : Il y a 15 dessins possibles. En effet, on peut commencer avec un dessin de 6 segments et enlever n'importe quels deux segments. Il y a 15 façons de choisir les deux segments qui seront enlevés.
- 3 segments : Il y a 20 dessins possibles. En effet, il y a 64 dessins possibles et le nombre de dessins qui ont déjà été comptés est égal à $1 + 1 + 6 + 6 + 15 + 15$, ou 44.

Voici un exemple de chaque type de dessin :



6 segments 5 segments 4 segments 3 segments 2 segments 1 segment 0 segment

On examine maintenant chaque type de dessin pour déterminer le nombre de dessins de ce type qui sont complètement reliés :

- <u>0 segment</u>
  Ce dessin n'est pas complètement relié.
- <u>6 segments</u>
  Ce dessin est complètement relié.
- <u>1 segment</u>
  Aucun de ces 6 dessins n'est complètement relié, car dans chaque dessin, seuls deux points sont reliés.
- <u>5 segments</u>
  Chacun des 6 dessins est complètement relié. En effet, dans chaque dessin, seule une paire de points n'est pas unie par un segment. Or, il est possible de se déplacer d'un point à l'autre en passant par un autre point qui est uni aux deux autres par des segments. Par exemple, si le segment AB est absent (voir le dessin ci-haut pour le type « 5 segments »), on peut se déplacer de A à B en passant par C, car C est relié à A et à B.
- <u>2 segments</u>
  Aucun de ces 15 dessins n'est complètement relié. En effet, les deux segments peuvent relier 3 points (p. ex., de B à A et de B à C) ou ils peuvent relier deux paires de points (voir le dessin ci-haut pour le type « 2 segments »).

- 4 segments
  Chacun des 15 dessins est complètement relié. En effet, supposons que l'on commence par un dessin qui compte 6 segments et qu'on enlève ensuite 2 segments.
  Il y a deux possibilités : soit que les deux segments partagent un même point (p. ex., on enlève AB et BC pour obtenir la figure 1 ci-dessous) ou qu'ils n'en partagent aucun (p. ex., on enlève AB et CD pour obtenir la figure 2 ci-dessous).

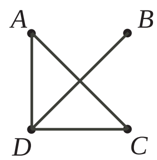


Figure 1

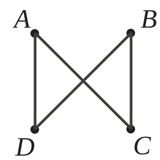
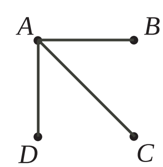


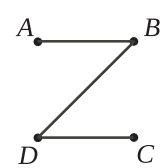
Figure 2

  Dans les deux cas, on obtient un dessin complètement relié. Ainsi chacun des 15 dessins est complètement relié.

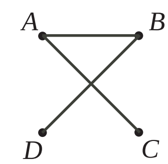
- 3 segments
  Il y a 20 dessins possibles.
  Dans chacun de ces dessins, il est question de joindre au moins 3 points, car 2 points ne peuvent être joints que par 1 segment.
  Il y a plusieurs possibilités :
  - Dans quelques-uns de ces 20 dessins, les segments relient 3 points. Ils ont l'apparence d'un triangle et d'un point extérieur. Il y a 4 tels dessins, soit un pour chacun des points qui est extérieur au triangle. Aucun de ces dessins n'est complètement relié.
  - Dans quelques-uns des 16 autres dessins, un point est relié à chacun des 3 autres points. Par exemple, A est joint à chacun des autres points, comme dans la figure ci-contre.



    On voit que le dessin est complètement relié. En effet, on peut se déplacer directement de A à B, à C et à D ; on peut se déplacer de B à A, et de B à C ou à D en passant par A ; on peut se déplacer de C à A et de C à B ou D en passant par A ; on peut se déplacer de D à A et de D à B ou à C en passant par A.
    Il y a 4 tels dessins, chacun ayant un point particulier, soit A, B, C ou D relié aux trois autres points.
  - On considère maintenant les 12 dessins qui restent ($20 - 4 - 4 = 12$). Dans chacun, les 4 points sont reliés à d'autres points et aucun point n'est relié aux trois autres points. Par exemple, on commence par un segment AB.
    Si le segment CD est tracé, alors un des segments AC, AD, BC ou BD est tracé, ce qui signifie que l'on peut se déplacer de A et de B à C et à D.
    Chacun de ces dessins est donc complètement relié.



Si le segment CD n'est pas tracé, alors deux des segments AC, AD, BC et BD sont tracés. Or, AC et AD ne peuvent pas être tracés tous les deux, car on ne peut tracer 3 segments à partir du même point. De même, BC et BD ne peuvent pas être tracés tous les deux.
De plus, AC et BC ne peuvent pas être tracés tous les deux, ni AD et BD tous les deux, car on ne peut pas inclure 3 points seulement.
Donc, il faut que AC et BD soient tracés, ou bien que AD et BC soient tracés.
Ce type de dessin est complètement relié.



Donc parmi les 64 dessins possibles, le nombre de dessins qui sont complètement reliés est égal à $1 + 6 + 15 + 4 + 12$, ou 38.
Donc, la probabilité pour que chaque paire de personnes dans la salle soit reliée est de $\frac{38}{64}$, ou $\frac{19}{32}$.

Réponse : (D)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Concours Pascal 2011

(9e année – Secondaire III)

le jeudi 24 février 2011

Solutions

1. On a $6 \times (5-2)+4 = 6 \times 3 + 4 = 18 + 4 = 22$.

   Réponse : (B)

2. L'expression est équivalente à $943 - 87$, qui est égale à 856.

   Réponse : (E)

3. Puisque $2011^2 = 4\,044\,121$ et que $\sqrt{2011} \approx 44{,}8$, alors les nombres, en ordre croissant, sont $\sqrt{2011}, 2011$ et 2011^2.
   (Si n est un entier supérieur à 1, alors $n^2 > n$ et $\sqrt{n} < n$. Les nombres $\sqrt{n}, n$ et n^2 sont alors toujours en ordre croissant.)

   Réponse : (C)

4. D'après le diagramme, il y a 32 g de matières grasses et 48 g de glucides.
   Le rapport de la masse de matière grasse à la masse des glucides est donc de 32 : 48.
   Puisque 32 et 48 sont tous deux divisibles par 16, on peut réduire le rapport en divisant chaque membre par 16, ce qui donne un rapport irréductible de 2 : 3.

   Réponse : (B)

5. Lorsque $x = -2$, l'expression $(x+1)^3$ est égale à $(-2+1)^3$, ou $(-1)^3$, ou -1.

   Réponse : (A)

6. Il y avait déjà 30 L d'huile dans le récipient. Après l'ajout de 15 L d'huile, le récipient contient 45 L d'huile et 15 L de vinaigre, soit 60 L de liquide en tout.
   Puisque $\frac{45}{60} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\,\%$, alors $75\,\%$ du nouveau mélange est constitué d'huile.

   Réponse : (A)

7. Lorsque les trois cubes mesurant 1 sur 1 sur 1 sont joints comme dans la figure, le prisme qui en résulte a deux faces carrées mesurant 1 sur 1, aux extrémités, et quatre faces rectangulaires mesurant 3 sur 1. Les faces carrées ont donc chacune une aire de 1 et les quatre faces rectangulaires ont chacune une aire de 3.
   L'aire totale du prisme est donc égale à $2 \times 1 + 4 \times 3$, ou 14.

   Réponse : (B)

8. Puisque le 17e jour du mois est un samedi et qu'il y a 7 jours dans une semaine, alors le 10e jour du mois est aussi un samedi, car $17 - 7 = 10$. De même, le 3e jour du mois est aussi un samedi, car $10 - 7 = 3$.
   Puisque le 3e jour est un samedi, le 2e jour est un vendredi et le 1er jour du mois est un jeudi.

   Réponse : (D)

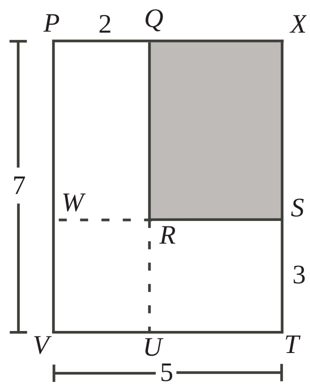
9. *Solution 1*
   Puisque $PQUV$ et $WSTV$ sont des rectangles qui partagent un angle droit en V, alors PQ, WS et VT sont parallèles, comme le sont PV, QU et ST. On en conclut que tous les angles de la figure sont droits.
   Puisque $PQUV$ est un rectangle, alors $VU = PQ = 2$.
   Puisque $VT = 5$ et $VU = 2$, alors $UT = 3$.
   On remarque que $RSTU$ est un rectangle, puisque ses angles sont tous droits.
   L'aire de la figure $PQRSTV$ est égale à la somme de l'aire des rectangles $PQUV$ et $RSTU$, soit $2 \times 7 + 3 \times 3$, ou 23.

(On peut aussi considérer que l'aire de $PQRSTV$ est égale à la somme de l'aire des rectangles $PQRW$ et $WSTV$.)

Solution 2

Puisque $PQUV$ et $WSTV$ sont des rectangles qui partagent un angle droit en V, alors PQ, WS et VT sont parallèles, comme le sont PV, QU et ST. On en conclut que tous les angles de la figure sont droits.

On considère que la figure $PQRSTV$ est un grand rectangle $PXTV$ dont on a retranché le rectangle $QXSR$.



L'aire du rectangle $PXTV$ est égale à 7×5, ou 35.

Puisque $PQUV$ est un rectangle, alors $QU = PV = 7$.

Puisque PV est parallèle à QU et à ST, alors $RU = ST = 3$.

On a donc $QR = QU - RU$, d'où $QR = 7 - 3$, ou $QR = 4$.

Puisque $WSTV$ est un rectangle, alors $WS = VT = 5$.

Puisque VT est parallèle à WS et à PQ, alors $WR = PQ = 2$.

Donc $RS = WS - WR$, d'où $RS = 5 - 2$, ou $RS = 3$.

Le rectangle $QXSR$ mesure 4 sur 3. Il a donc une aire de 12.

La figure $PQRSTV$ a donc une aire de $35 - 12$, ou 23.

Solution 3

Puisque $PQUV$ et $WSTV$ sont des rectangles qui partagent un angle droit en V, alors PQ, WS et VT sont parallèles, comme le sont PV, QU et ST. On en conclut que tous les angles de la figure sont droits.

Si on additionne l'aire des rectangles $PQUV$ et $WSTV$, on semble obtenir l'aire de la figure $PQRSTV$, mais l'aire du rectangle $WRUV$ a été additionnée deux fois. Donc, l'aire de la figure $PQRSTV$ est égale à l'aire du rectangle $PQUV$ plus l'aire du rectangle $WSTV$ moins l'aire du rectangle $WRUV$.

Or, le rectangle $PQUV$ mesure 2 sur 7, le rectangle $WSTV$ mesure 3 sur 5 et le rectangle $WRUV$ mesure 2 sur 3 (puisque $WR = PQ = 2$ et $RU = ST = 3$).

Donc, l'aire de la figure $PQRSTV$ est égale à $2 \times 7 + 3 \times 5 - 2 \times 3$, ou $14 + 15 - 6$, ou 23.

Réponse : (E)

10. Jean écrit les entiers de 1 à 20 en ordre croissant.

Lorsqu'il efface la première moitié des entiers de la liste, il efface les nombres de 1 à 10 et les récrit en ordre à la fin de la liste initiale.

Donc, il y a 10 entiers à la gauche du nombre 1 (soit $11, 12, \ldots, 20$).

Il y a donc 11 entiers à la gauche du nombre 2 et 12 entiers à la gauche du nombre 3.

(On pourrait écrire la nouvelle liste au complet pour le vérifier.)

Réponse : (C)

11. On écrit les choix de réponse sous forme décimale pour obtenir 1,1, 1,11, 1,101, 1,111 et 1,011. Le dernier nombre est le seul qui soit supérieur à 1 et inférieur à 1,1. Il est donc le plus près du nombre 1.

Réponse : (E)

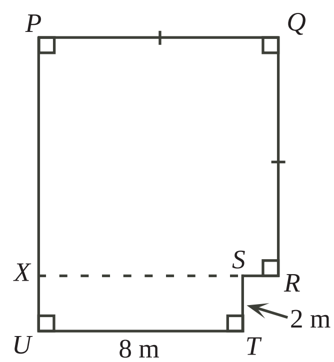
12. On sait que $\frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$ et que $\frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$.
Les entiers entre ces deux nombres sont donc les entiers de 5 à 17.
Les entiers impairs entre ces deux nombres sont $5, 7, 9, 11, 13, 15$ et 17. Il y en a 7.

Réponse : (D)

13. Les quatre premiers termes de la suite sont $1, 4, 2, 3$.
Or, à partir du cinquième terme, chaque terme est égal à la somme des quatre termes précédents.
Le cinquième terme est donc égal à $1 + 4 + 2 + 3$, ou 10.
Le sixième terme est égal à $4 + 2 + 3 + 10$, ou 19 ; le septième terme est égal à $2 + 3 + 10 + 19$, ou 34 ; le huitième terme est égal à $3 + 10 + 19 + 34$, ou 66.

Réponse : (A)

14. On prolonge le côté RS jusqu'au point X sur le côté PU.



Puisque le quadrilatère $PQRX$ a trois angles droits, son quatrième angle doit être droit. $PQRX$ est donc un rectangle.
Puisque $PQ = QR$, alors $PQRX$ est un carré.
Les segments PQ, XS et UT sont parallèles, à cause des angles droits. Donc, $XSTU$ est un rectangle. Il mesure 2 m sur 8 m. Il a donc une aire de 16 m^2.
Puisque le jardin a une aire de 97 m^2, $PQRX$ a une aire de 97 m^2 $-$ 16 m^2, ou 81 m^2.
Puisque $PQRX$ est un carré, ses côtés ont une longueur 9 m.
Donc $PQ = QR = RX = XP = 9$ m.
Puisque $XSTU$ est un rectangle, alors $XS = UT = 8$ m et $XU = ST = 2$ m.
Donc $PU = PX + XU$, d'où $PU = 9 \text{ m} + 2 \text{ m}$, ou $PU = 11$ m. De plus, $SR = XR - XS$, d'où $SR = 9 \text{ m} - 8 \text{ m}$, ou $SR = 1$ m.
On calcule le périmètre en commençant au point P et en procédant dans le sens des aiguilles d'une montre. On a $9 + 9 + 1 + 2 + 8 + 11 = 40$.
Donc, le clôture qui entoure le jardin a une longueur de 40 m.

Réponse : (C)

15. Puisque chacune des cinq amies a payé 3 \$ de plus pour couvrir la part de Ludivine, alors la part de Ludivine était de 5×3 \$, ou 15 \$.
Puisque l'addition est partagée de façon équitable, chacune paie 15 \$. L'addition totale est donc de 6×15 \$, ou 90 \$.

Réponse : (A)

16. L'ensemble S contient 25 multiples de 2, soit les entiers pairs.
Lorsqu'on a enlevé ces nombres, il ne reste plus dans l'ensemble S que les entiers impairs de 1 à 49. L'ensemble S ne contient plus que 25 nombres, car on en a enlevé 25.
On doit aussi enlever les multiples de 3 de l'ensemble S.
Puisque S ne contient plus que des entiers impairs, il faut enlever les multiples impairs de 3 situés entre 1 et 49, soit 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39 et 45. Il y en a 8.
Il reste 17 entiers dans l'ensemble S, car $25 - 8 = 17$.

Réponse : (D)

17. *Solution 1*
On procède de droite à gauche, comme pour le calcul papier-crayon.
Dans la colonne des unités, on a $L - 4 = 1$. Donc $L = 5$. On a donc :

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & K & 0 & 5 \\ - & M & 9 & N & 4 \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Dans la colonne des dizaines, on a $0 - N = 1$. Il faut donc décomposer 1 centaine en 10 dizaines de manière à obtenir $10 - N = 1$, d'où $N = 9$. On a donc :

$$\begin{array}{ccccc} & & {\scriptstyle K-1} & {\scriptstyle 10} & \\ & 6 & \cancel{K} & \cancel{0} & 5 \\ - & M & 9 & 9 & 4 \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Dans la colonne des centaines, on a $(K - 1) - 9 = 0$.
Cela semble indiquer que $K = 10$. Puisque K est un chiffre, il est égal à 0 et pour effectuer la soustraction, il faut décomposer un millier en 10 centaines de manière que la soustraction, dans la colonne des centaines, soit $10 + (K - 1) - 9 = 0$. On a donc :

$$\begin{array}{ccccc} & {\scriptstyle 5} & & & \\ & \cancel{6} & 0 & 0 & 5 \\ - & M & 9 & 9 & 4 \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Dans la colonne des milliers, on a $5 - M = 2$, d'où $M = 3$.
La soustraction devient donc $6005 - 3994 = 2011$, ce qui est exact.
Donc, $K + L + M + N$ a une valeur de $0 + 5 + 3 + 9$, ou 17.

Solution 2
Puisque $6K0L - M9N4 = 2011$, alors $M9N4 + 2011 = 6K0L$.
On procède de droite à gauche, comme pour le calcul papier-crayon.
Dans la colonne des unités, on a $4 + 1 = L$. Donc $L = 5$. On a donc :

$$\begin{array}{ccccc} & M & 9 & N & 4 \\ + & 2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 6 & K & 0 & 5 \end{array}$$

Dans la colonne des dizaines, la somme de $N+1$ indique un 0. On doit donc avoir « N dizaines$+$ 1 dizaine $=$ 10 dizaines ». Donc $N = 9$. Il y a donc une retenue de 1 dans la colonne des centaines. On a donc :

$$\begin{array}{ccccc} & & {\scriptstyle 1} & & \\ & M & 9 & 9 & 4 \\ + & 2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 6 & K & 0 & 5 \end{array}$$

Dans la colonne des centaines, on a « 10 centaines + 0 centaine = 10 centaines ». Donc $K = 0$ et il y a une retenue de 1 dans la colonne des milliers. On a donc :

$$\begin{array}{ccccc} & {}^{1} & & & \\ & M & 9 & 9 & 4 \\ + & 2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 6 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

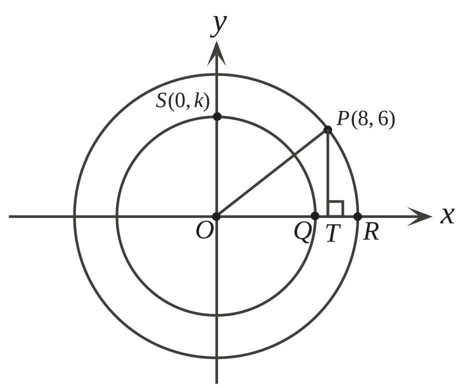
Dans la colonne des milliers, on a « 1 millier + M milliers + 2 milliers = 6 milliers », d'où $M = 3$.
L'addition devient donc $3994 + 2011 = 6005$, d'où $6005 - 3994 = 2011$, ce qui est exact.
Donc, $K + L + M + N$ a une valeur de $0 + 5 + 3 + 9$, ou 17.

Réponse : (A)

18. La différence entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{12}$ est égale à $\frac{1}{6} - \frac{1}{12}$, ou $\frac{2}{12} - \frac{1}{12}$, ou $\frac{1}{12}$. Donc $LP = \frac{1}{12}$.
Puisque le segment LP est divisé en trois parties égales, chaque partie aura une longueur égale à $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{12}$, ou $\frac{1}{3} \times \frac{1}{12}$, ce qui est égal à $\frac{1}{36}$.
Donc, M est situé à une distance de $\frac{1}{36}$ à la droite de L.
Donc, le nombre qui correspond au point M est égal à $\frac{1}{12} + \frac{1}{36}$, ou $\frac{3}{36} + \frac{1}{36}$, ce qui est égal à $\frac{4}{36}$, ou $\frac{1}{9}$.

Réponse : (C)

19. Pour déterminer la distance de O à P (le rayon du grand cercle), on abaisse une perpendiculaire PT à l'axe des abscisses au point P.



Dans le triangle rectangle OPT, on a $OT = 8$ et $PT = 6$. D'après le théorème de Pythagore :

$$OP^2 = OT^2 + PT^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

Puisque $OP > 0$, alors $OP = 10$.
Le grand cercle a donc un rayon de 10. Donc $OR = 10$.
Puisque $OR = 10$ et $QR = 3$, alors $OQ = 7$.
Le petit cercle a donc un rayon de 7.
Le point S est situé sur la partie positive de l'axe des ordonnées, à une distance de 7 de l'origine.
Il a donc pour coordonnées $(0, 7)$. Donc $k = 7$.

Réponse : (E)

20. *Solution 1*
On considère le triangle UPV.
Puisque $PU = PV$, le triangle est isocèle et les angles PUV et PVU sont donc congrus.
Puisque $180° - 24° = 156°$ et que $156° \div 2 = 78°$, alors $\angle PUV = \angle PVU = 78°$.
Puisque l'angle PVS est plat, alors $\angle QVS = 180° - 78°$, d'où $\angle QVS = 102°$.

On considère le triangle QVS.
La somme des mesures d'angles de ce triangle est égale à $180°$. Donc $102 + x + y = 180$, d'où $x + y = 78$.

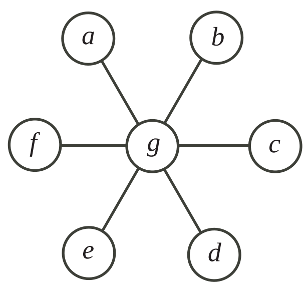
Solution 2
On considère le triangle UPV.
Puisque $PU = PV$, le triangle est isocèle et les angles PUV et PVU sont donc congrus.
Puisque $180° - 24° = 156°$ et que $156° \div 2 = 78°$, alors $\angle PUV = \angle PVU = 78°$.
Puisque l'angle PVU est extérieur au triangle QVS, alors $\angle PVU = \angle VQS + \angle VSQ$.
Donc $78° = y° + x°$, d'où $x + y = 78$.

Réponse : (D)

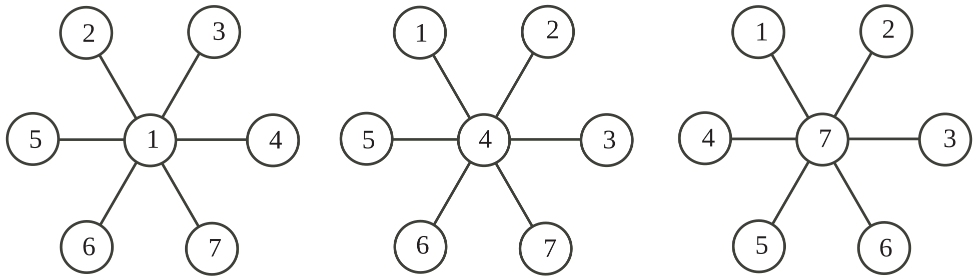
21. Au niveau C, il y a le même nombre de points qu'au niveau B ; au niveau D, il y a deux fois plus de points qu'au niveau C. Donc au niveau D, il y a deux fois plus de points qu'au niveau B.
De même, il y a deux fois plus de points au niveau F qu'au niveau D, il y a deux fois plus de points au niveau H qu'au niveau F, et ainsi de suite.
On peut donc dire que le nombre de points double lorsqu'on passe du niveau B au niveau D, du niveau D au niveau F, du niveau F au niveau H, et ainsi de suite.
Puisqu'il y a 26 niveaux, il y a 24 niveaux après le niveau B.
Puisque $24 \div 2 = 12$, le nombre de points double 12 fois du niveau B au niveau Z.
Donc, le nombre de points au niveau Z est égal à 2×2^{12}, ou 2^{13}, ou 8192.

Réponse : (D)

22. On place les entiers a, b, c, d, e, f et g comme dans la figure suivante.



Soit S la somme des entiers dans l'importe quelle ligne droite.
Donc $S = a + g + d = b + g + e = c + g + f$.
Donc $3S = (a + g + d) + (b + g + e) + (c + g + f)$, ou $3S = a + b + c + d + e + f + 3g$.
Puisque les variables de a à g prennent pour valeurs les entiers de 1 à 7, dans un certain ordre, alors $a + b + c + d + e + f + g = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, d'où $a + b + c + d + e + f + g = 28$.
On a donc $3S = (a + b + c + d + e + f + g) + 2g$, d'où $3S = 28 + 2g$.
Puisque S est un entier, $3S$ est un entier divisible par 3. Donc, $28 + 2g$ est un entier divisible par 3.
Puisque g est un entier de 1 à 7, on on lui attribue successivement ces valeurs pour constater que $28 + 2g$ est divisible par 3 lorsque g est égal à 1, 4 ou 7.
On vérifie qu'il est possible de compléter la figure avec ces valeurs :



Il y a donc 3 façons de remplir le cercle au milieu.

Réponse : (C)

23. On comptera d'abord le nombre de quadruplets (p, q, r, s) d'entiers non négatifs qui vérifient l'équation $2p + q + r + s = 4$. On déterminera ensuite combien de ces quadruplets vérifient l'équation $p + q + r + s = 3$. Cela nous donnera le nombre de choix possibles et le nombre de choix favorables, ce qui nous permettra de calculer la probabilité.
Puisque p, q, r et s sont tous des entiers non négatifs et que $2p+q+r+s = 4$, il n'y a que trois valeurs possibles de p, soit $p = 2$, $p = 1$ et $p = 0$.
Dans chaque cas, on peut dire que $q + r + s = 4 - 2p$.

1^er^ cas : $p = 2$
Dans ce cas, on a $q + r + s = 4 - 2(2)$, ou $q + r + s = 0$.
Puisque q, r et s sont tous non négatifs, alors $q = r = s = 0$. Donc $(p, q, r, s) = (2, 0, 0, 0)$.
Donc dans ce cas, l'équation $2p + q + r + s = 4$ admet 1 solution.

2^e^ cas : $p = 1$
Dans ce cas, on a $q + r + s = 4 - 2(1) = 2$.
Puisque q, r et s sont tous non négatifs, alors q, r et s doivent avoir pour valeurs 0, 0 et 2, dans un ordre quelconque, ou 1, 1 et 0, dans un ordre quelconque.
Or, il y a trois façons de placer trois nombres en ordre lorsque deux des nombres sont identiques. (Étant donné les nombres a, a et b, on peut les placer en ordre pour former aab, aba et baa.)
Donc, les quadruplets possibles sont :

$$(p, q, r, s) = (1, 2, 0, 0), (1, 0, 2, 0), (1, 0, 0, 2), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1)$$

Donc dans ce cas, l'équation $2p + q + r + s = 4$ admet 6 solutions.

3^e^ cas : $p = 0$
Dans ce cas, on a $q + r + s = 4$.
On cherche d'abord les entiers non négatifs q, r et s, $q \geq r \geq s$, qui vérifient l'équation. On déterminera ensuite les autres solutions en changeant l'ordre des nombres.
Si $q = 4$, alors $r + s = 0$, d'où $r = s = 0$.
Si $q = 3$, alors $r + s = 1$, d'où $r = 1$ et $s = 0$.
Si $q = 2$, alors $r + s = 2$, d'où $r = 2$ et $s = 0$, ou bien $r = s = 1$.
La valeur de q ne peut être égale à 1 ou à 0, car si elle l'était, $r + s$ aurait une valeur supérieure ou égale à 3, selon l'équation, et r ou s aurait alors une valeur supérieure ou égale à 2, ce qui contredirait $r \leq q$.
Donc, l'équation $q + r + s = 4$ admet comme solutions les nombres 4, 0 et 0 dans un ordre quelconque, les nombres 3, 1 et 0 dans un ordre quelconque, les nombres 2, 2 et 0 dans un ordre quelconque, et les nombres 2, 1 et 1 dans un ordre quelconque.
Dans le 2^e^ cas, ci-haut, on a vu qu'il y avait 3 façons de placer trois nombres en ordre lorsque deux des nombres sont identiques.

Aussi, il y a 6 façons de placer trois nombres en ordre lorsque les nombres sont différents les uns des autres. (Étant donné les nombres a, b et c, on peut les placer en ordre pour former abc, acb, bac, bca, cab et cba.)
La solution $(p, q, r, s) = (0, 4, 0, 0)$ génère 3 arrangements.
La solution $(p, q, r, s) = (0, 3, 1, 0)$ génère 6 arrangements.
La solution $(p, q, r, s) = (0, 2, 2, 0)$ génère 3 arrangements.
La solution $(p, q, r, s) = (0, 2, 1, 1)$ génère 3 arrangements.
(Dans chacun de ces cas, on sait que $p = 0$. Les arrangements viennent donc en changeant les valeurs de q, de r et de s les unes pour les autres.)
Dans ce cas, l'équation $2p + q + r + s = 4$ admet 15 solutions.

En tout, le nombre de solutions de l'équation $2p + q + r + s = 4$ est égal à $1 + 6 + 15$, ou 22.
Lorsqu'on choisira des solutions au hasard, il y aura donc un total de 22 possibilités.
Il reste à déterminer les solutions qui vérifient l'équation $p + q + r + s = 3$.
Les quadruplets qui vérifient cette équation sont ceux du 2e cas.
En effet, si un quadruplet vérifie l'équation $2p + q + r + s = 4$ et l'équation $p + q + r + s = 3$, alors on doit avoir :

$$p = (2p + q + r + s) - (p + q + r + s) = 4 - 3 = 1$$

Donc parmi les 22 solutions de l'équation $2p + q + r + s = 4$, il y en a 6 qui vérifient aussi l'équation $p + q + r + s = 3$. Il y a donc 6 choix favorables sur 22. La probabilité est donc de $\frac{6}{22}$, ou $\frac{3}{11}$.

Réponse : (B)

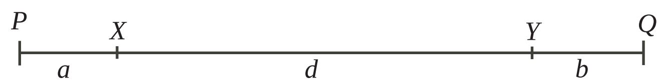
24. Le plus grand entier de 100 chiffres est le nombre formé de 100 fois le chiffre 9. Cet entier est égal à $10^{100} - 1$.
On cherche donc le plus grand entier n pour lequel $14n \leq 10^{100} - 1$.
Puisque $14n$ est un entier, on cherche le plus grand entier n pour lequel $14n < 10^{100}$.
On cherche donc le plus grand entier n pour lequel $n < \dfrac{10^{100}}{14} = \dfrac{10}{14} \times 10^{99} = \dfrac{5}{7} \times 10^{99}$.
Cela équivaut à calculer au long le nombre $\dfrac{5}{7} \times 10^{99}$ et à le tronquer à l'unité près, c'est-à-dire en coupant ses décimales après la virgule.
On peut exprimer la fraction $\dfrac{5}{7}$ sous forme décimale. On obtient $0{,}\overline{714285}$. (On peut le voir en utilisant une calculatrice ou en divisant au long.)
On obtient donc l'entier que l'on cherche en multipliant le nombre $0{,}\overline{714285}$ par 10^{99} et en tronquant la réponse à la virgule décimale.
Pour le faire, on doit déplacer de 99 places vers la gauche les décimales du nombre $0{,}\overline{714285}$ et ensuite ignorer les décimales qui restent à la droite de la virgule.
Puisque les chiffres du développement décimal ont une période de 6, il y aura 16 copies des chiffres 714285, suivies des chiffres 714. (Le nombre de chiffres sera donc égal à $16 \times 6 + 3$, ou 99.)
Il faut maintenant déterminer le 68e chiffre en comptant de droite à gauche.
Le nombre ressemble à 714 285714. . .285714 285714 285714. Si on écrit les chiffres à partir de la droite, on aura 11 copies des chiffres 285714, pour un total de 66 chiffres, suivies des chiffres 14, ce qui donne 68 chiffres en tout.
Le 68e chiffre, en comptant de droite à gauche, est donc un 1.

Réponse : (A)

25. On remarque que l'on peut changer des personnes l'une pour l'autre. Il n'est pas important de spécifier qui marche et qui se promène en moto. On nomme les trois personnes A, D et E.
Le point de départ est nommé P et le point d'arrivée est nommé Q.
Voici une stratégie dans laquelle les trois personnes avancent à tous moments et arrivent au point P en même temps :

A et D montent en moto, tandis que E marche.
A et D se rendent en moto à un point Y situé avant le point Q.
A laisse D et retourne en moto, tandis que D et E marchent vers le point Q.
A rencontre E au point X.
E monte sur la moto et avec A, se déplace vers le point Q de manière à arriver au point Q en même temps que D.
Le point Y est choisi de manière que A, D et E arrivent en même temps au point Q.

Soit a km la distance de P à X, d km la distance de X à Y et b km la distance de Y à Q.



Pendant que E marche de P à X à une vitesse de 6 km/h, A se déplace en moto de P à Y et de retour jusqu'à X à une vitesse de 90 km/h. Or, la distance de P à X est de a km, tandis que la distance de P à Y, puis de Y à X est de $(a+d+d)$ km, ou $(a+2d)$ km.

Puisque E et A mettent le même temps pour effectuer ces trajets, alors $\frac{a}{6} = \frac{a+2d}{90}$, d'où $15a = a + 2d$, ou $7a = d$.

Pendant que D marche de Y à Q à une vitesse de 6 km/h, A se rend de Y à X et de X à Q à une vitesse de 90 km/h.
Or, la distance de Y à Q est de b km, tandis que la distance de Y à X et de X à Q est de $(d+d+b)$ km, ou $(b+2d)$ km.

Puisque D et A mettent le même temps pour effectuer ces trajets, alors $\frac{b}{6} = \frac{b+2d}{90}$, d'où $15b = b + 2d$, ou $7b = d$.

Donc $d = 7a = 7b$. On peut conclure que $b = a$.
La distance totale de P à Q est égale à $(a+d+b)$ km, ou $(a+7a+a)$ km, ou $9a$ km.
Or, on sait que cette distance est de 135 km. Donc $9a = 135$, ou $a = 15$.
On rappelle que A se déplace de P à Y à X à Q, une distance de $[(a+7a)+7a+(7a+a)]$ km, ou $23a$ km.
Puisque $a = 15$ km et que A se déplace à une vitesse de 90 km/h, le temps qu'elle met pour effectuer cette stratégie est égal à $\frac{23\times 15}{90}$ h, ou $\frac{23}{6}$ h, ou environ 3,83 h.
Puisque cette stratégie prend 3,83 h, alors la plus petite valeur possible de t ne peut dépasser 3,83 h. Peux-tu expliquer pourquoi il s'agit bien de la plus petite valeur possible de t ?

Si on n'avait pas pensé à la stratégie précédente, on aurait pu penser à la suivante :

A et D montent en moto, tandis que E marche.
A et D se rendent jusqu'au point Q.
A laisse D au point Q et retourne rencoutrer E qui marche toujours.
D laisse E monter sur la moto et les deux se rendent à Q. (D se repose au point Q.)

Cette stratégie met 4,125 h, ce qui est supérieur au temps requis par la stratégie précédente, car D ne bouge pas pendant un certain temps.

Réponse : (A)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Pascal 2010

(9e année – Secondaire III)

le jeudi 25 février 2010

Solutions

1. Les cinq choix correspondent à 50 ¢, 90 ¢, 95 ¢, 101 ¢ et 115 ¢.
On vérifie la différence entre chacun de ces choix et 100 ¢ (soit 1 \$) :

$$100 - 50 = 50 \quad 100 - 90 = 10 \quad 100 - 95 = 5 \quad 101 - 100 = 1 \quad 115 - 100 = 15$$

Le quatrième choix nous donne la plus petite différence, soit 1 ¢. Donc, la somme de 1,01 \$ est la plus près de 1,00 \$.

Réponse : (D)

2. On utilise la priorité des opérations :

$$\frac{(20-16)\times(12+8)}{4} = \frac{4\times 20}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

Réponse : (C)

3. On cherche le nombre de portions de 250 mL de farine dans 750 mL de farine. On a $750 \div 250 = 3$.
Donc, il y a 3 portions de 250 mL de farine.
Puisqu'il faut 50 mL pour chaque portion de 250 mL de farine, il faut 3 portions de 50 mL de lait, soit 150 mL de lait, car $3 \times 50 = 150$.

Réponse : (C)

4. Il y a 8 figures en tout, dont 3 triangles. Il y a donc 3 choix favorables.
Donc, la probabilité de choisir un triangle est égale à $\frac{3}{8}$.

Réponse : (A)

5. On simplifie le membre de gauche et on exprime la réponse comme fraction ayant un numérateur de 1 :

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{2}{18} + \frac{1}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

Donc, le nombre 6 remplace le $\square$.

Réponse : (C)

6. Le contour de la figure est formé de 16 segments horizontaux de longueur 1 et de 10 segments verticaux de longueur 1.
Donc, le périmètre de la figure est égal à $10 + 16$, ou 26.
(On aurait pu faire le tour de la figure en commençant à un coin et compter le nombre de segments.)

Réponse : (E)

7. Puisque $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 3 = 27$, alors :

$$\sqrt{3^3 + 3^3 + 3^3} = \sqrt{27 + 27 + 27} = \sqrt{81} = 9$$

Réponse : (B)

8. La différence des deux nombres est égale à $7{,}62 - 7{,}46$, ou 0,16.
La portion de droite entre les deux nombres est divisée en 8 segments de même longueur.
Chacun de ces segments a donc une longueur égale à $0{,}16 \div 8$, ou 0,02.
Le point P est situé à trois segments à la droite du point 7,46.
Le nombre représenté par le point P est donc égal à $7{,}46 + 3(0{,}02)$, ou $7{,}46 + 0{,}06$, ou 7,52.

Réponse : (E)

9. Un quadrillage 12 sur 12 contiendra 11 lignes verticales intérieures et 11 lignes horizontales intérieures. (Dans le quadrillage 4 sur 4 donné, il y a 3 lignes verticales intérieures et 3 lignes horizontales intérieures.)
Chacune des 11 lignes verticales intérieures coupe chacune des 11 lignes horizontales intérieures pour créer un point d'intersection intérieur.
Ainsi chaque ligne intérieure verticale produit 11 points d'intersection intérieurs.
Le nombre de points d'intersection intérieurs est donc égal à 11×11, ou 121.

Réponse : (B)

10. Puisque l'angle au centre du secteur « Moins de 1 » mesure 90°, alors la fraction des élèves qui consacrent moins d'une heure par jour à leurs devoirs est égale à $\frac{90^\circ}{360^\circ}$, ou $\frac{1}{4}$.
Donc, 25 % des élèves consacrent moins d'une heure par jour à leurs devoirs.
Donc, le pourcentage des élèves qui consacrent au moins une heure par jour à leurs devoirs est égal à 100 % − 25 %, ou 75%.

Réponse : (E)

11. *Solution 1*
Puisqu'il y a plus d'une table à quatre pieds, il y en a au moins deux.
Puisqu'il y a 23 pieds en tout, il y a moins de six tables à quatre pieds, puisque six de ces tables aurait un total de 6×4 pieds, ou 24 pieds.
Il y a donc de 2 à 5 tables à quatre pieds.
S'il y a 2 tables à quatre pieds, elles contribuent 2×4 pieds au total, ou 8 pieds. Il reste donc $23 - 8$ pieds, ou 15 pieds pour les tables à trois pieds.
Puisque 15 est divisible par 3, le nombre de tables à trois pieds est égal à $15 \div 3$, ou 5.
(On peut vérifier que s'il y avait 3 ou 4 tables à quatre pieds, alors le nombre de pieds qu'il y aurait pour les tables à trois pieds ne serait pas divisible par 3 et que s'il y avait 5 tables à quatre pieds, alors il n'y aurait qu'une table à trois pieds, ce qui n'est pas permis.)

Solution 2
Puisqu'il y a plus d'une table de chaque sorte, il y a au moins 2 tables à quatre pieds et 2 tables à trois pieds.
En tout, ces 4 tables ont un total de $2(3) + 2(4)$ pieds, ou 14 pieds.
Le nombre de pieds qu'il reste est égal à $23 - 14$, ou 9.
La seule façon d'obtenir un total de 9 en additionnant des 4 et des 3 est d'utiliser trois fois 3.
Le nombre de tables à trois pieds est donc égal à $2 + 3$, ou 5.

Réponse : (E)

12. *Solution 1*
L'aire du rectangle est égale à 3×4, ou 12.
L'aire totale des régions ombrées est égale à l'aire du rectangle moins l'aire de la région non ombrée.
La région non ombrée est un triangle qui a une base de 1 et une hauteur de 4. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(1)(4)$, ou 2.
Donc, l'aire totale des régions ombrées est égale à $12 - 2$, ou 10.

Solution 2
Le triangle ombré à gauche a une base de 2 et une hauteur de 4. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(2)(4)$, ou 4. Le triangle ombré à droite (au-dessus) a une base de 3 et une hauteur de 4. Son aire est

donc égale à $\frac{1}{2}(3)(4)$, ou 6.
Donc, l'aire totale des régions ombrées est égale à $4 + 6$, ou 10.

Réponse : (C)

13. Puisque le rapport du nombre de garçons au nombre de filles à l'école secondaire Cayley est de 3 : 2, alors $\frac{3}{5}$ des élèves de l'école Cayley sont des garçons (car $\frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$).
Le nombre de garçons à l'école Cayley est donc égal à $\frac{3}{5}(400)$, c'est-à-dire $3(\frac{400}{5})$, ou 240.
Le nombre de filles à l'école Cayley est donc égal à $400 - 240$, ou 160.
Puisque le rapport du nombre de garçons au nombre de filles à l'école secondaire Fermat est de 2 : 3, alors $\frac{2}{5}$ des élèves de l'école Fermat sont des garçons (car $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$).
Le nombre de garçons à l'école Fermat est donc égal à $\frac{2}{5}(600)$, c'est-à-dire $2(\frac{600}{5})$, ou 240.
Le nombre de filles à l'école Fermat est donc égal à $600 - 240$, ou 360.
Le nombre total de garçons dans les deux écoles est égal à $240 + 240$, ou 480. Le nombre total de filles dans les deux écoles est égal à $160 + 360$, ou 520.
Le rapport du nombre total de garçons au nombre total de filles est donc égal à 480 : 520, ou 48 : 52, ou 12 : 13.

Réponse : (B)

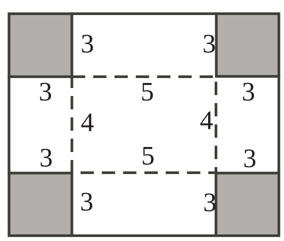
14. Lorsque le développement est plié pour former un cube, la face numéro 5 est opposée à la face numéro 1. Les quatre autres faces partagent donc une arêtre avec la face numéro 1.
Le produit des nombres sur ces quatre faces est égal à $2 \times 3 \times 4 \times 6$, ou 144.

Réponse : (B)

15. On sait que 10 % est équivalent à la fraction $\frac{1}{10}$.
Donc $t = \frac{1}{10}s$, d'où $s = 10t$.

Réponse : (D)

16. Puisque la base de la boîte mesure 5 cm sur 4 cm, la base a une aire de $5(4)$ cm^2, ou 20 cm^2.
Puisque la boîte a un volume de 60 cm^3 et que sa base a une aire de 20 cm^2, alors la boîte a une hauteur de 3 cm, car $3 \times 20 = 60$ ou $\frac{60}{20} = 3$.
Donc, chacun des carrés ombrés a des côtés de longueur 3 cm, puisque des côtés de ces carrés forment les arêtes verticales de la boîte.



La feuille de carton initiale a donc une longueur de 3 cm + 5 cm + 3 cm, ou 11 cm, et une largeur de 3 cm + 4 cm + 3 cm, ou 10 cm. Son aire est donc égale à $11(10)$ cm^2, ou 110 cm^2.

Réponse : (B)

17. *Solution 1*
Puisque SUR est un segment de droite, alors $\angle RUV = 180° - \angle SUV$, d'où $\angle RUV = 180° - 120°$, ou $\angle RUV = 60°$.
Puisque PW est parallèle à QX, alors $\angle RVW = \angle VTX = 112°$.
Puisque UVW est un segment de droite, alors $\angle RVU = 180° - \angle RVW$, ou $\angle RVU = 180° - 112°$, ou $\angle RVU = 68°$.
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors :

$$\angle URV = 180° - \angle RUV - \angle RVU = 180° - 60° - 68° = 52°$$

Solution 2
Puisque SUR est un segment de droite, alors $\angle RUV = 180° - \angle SUV$, ou $\angle RUV = 180° - 120°$, ou $\angle RUV = 60°$.
Puisque PW est parallèle à QX, alors $\angle RST = \angle RUV = 60°$.
Puisque STX est un segment de droite, alors $\angle RTS = 180° - \angle VTX$, ou $\angle RTS = 180° - 112°$, ou $\angle RTS = 68°$.
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors :

$$\angle URV = \angle SRT = 180° - \angle RST - \angle RTS = 180° - 60° - 68° = 52°$$

Réponse : (A)

18. *Solution 1*
Lorsque Catherine ajoute 30 litres d'essence, le réservoir passe de $\frac{1}{8}$ de sa capacité à $\frac{3}{4}$ de sa capacité. Puisque $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$, alors $\frac{5}{8}$ de la capacité correspond à 30 litres. Donc, $\frac{1}{8}$ de la capacité du réservoir correspond à 6 litres (car $30 \div 5 = 6$). Donc, le réservoir plein correspond à 48 litres d'essence (car $8 \times 6 = 48$).
Pour remplir le dernier quart du réservoir, Catherine doit ajouter 12 litres d'essence (car $\frac{1}{4}$ de $48 = 12$). Puisque chaque litre coûte 1,38 \$, Catherine devra dépenser $12 \times 1{,}38$ \$, ou 16,56 \$.

Solution 2
Soit x litres la capacité du réservoir de la voiture.
Lorsque Catherine ajoute 30 litres d'essence, le réservoir passe de $\frac{1}{8}$ de sa capacité à $\frac{3}{4}$ de sa capacité. Donc $\frac{1}{8}x + 30 = \frac{3}{4}x$, d'où $\frac{5}{8}x = 30$, ou $x = 48$.
Le dernier quart du réservoir correspond à $\frac{1}{4}x$ litres, soit $\frac{1}{4}(48)$ litres, ou 12 litres.
Puisque chaque litre coûte 1,38 \$, Catherine devra dépenser $12 \times 1{,}38$ \$, ou 16,56 \$.

Réponse : (C)

19. Un demi-disque de rayon r a une aire de $\frac{1}{2}\pi r^2$. Donc, un demi-disque de diamètre d a une aire égale à $\frac{1}{2}\pi(\frac{1}{2}d)^2$, ou $\frac{1}{8}\pi d^2$.
Les demi-disques de rayons UV, VW, WX, XY et YZ ont tous le même diamètre et donc la même aire. Chacun a une aire égale à $\frac{1}{8}\pi(5^2)$, ou $\frac{25}{8}\pi$.
Le diamètre UZ du grand demi-disque est égal à $5(5)$, ou 25. Son aire est donc égale à $\frac{1}{8}\pi(25^2)$, ou $\frac{625}{8}\pi$.
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du grand demi-disque moins l'aire de deux petits demi-disques plus l'aire de trois petits demi-disques, ce qui équivaut à l'aire du grand demi-disque plus l'aire d'un petit demi-disque.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $\frac{625}{8}\pi + \frac{25}{8}\pi$, ou $\frac{650}{8}\pi$, ou $\frac{325}{4}\pi$.

Réponse : (A)

20. La somme des entiers impairs de 5 à 21 est égale à :

$$5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 117$$

Donc, la somme des nombres dans n'importe quelle rangée est égale à un tiers de cette somme, soit 39.
La somme des nombres dans n'importe quelle colonne ou n'importe quelle diagonale est aussi égale à 39.
Puisque les nombres de la 2e rangée ont une somme de 39, alors le 2e nombre est égal à 13, car $9 + 13 + 17 = 39$.
Puisque les nombres de la 2e colonne ont une somme de 39, alors le 3e nombre est égal à 21, car $5 + 13 + 21 = 39$.

	5	
9	13	17
x	21	

Puisque les nombres de la 3e rangée ont une somme de 39, alors le 3e nombre est égal à $39-x-21$, ou $18 - x$.
Puisque les nombres de la diagonale qui contient x ont une somme de 39, alors le nombre de la case supérieure droite est égal à $39 - x - 13$, ou $26 - x$.
Puisque les nombres de la 3e colonne ont une somme de 39, alors $(26 - x) + 17 + (18 - x) = 39$, d'où $61 - 2x = 39$, ou $2x = 22$, ou $x = 11$.
Le carré magique au complet est donc :

19	5	15
9	13	17
11	21	7

Réponse : (B)

21. Soit y et z les deux nombres dans les cases ombrées vides. De gauche à droite, les nombres sont donc $8, y, z, 26, x$.
Puisque la moyenne de z et de x est égale à 26, alors $x + z = 2(26)$, ou $x + z = 52$. Donc $z = 52 - x$. Les nombres, dans l'ordre, sont donc $8, y, 52 - x, 26, x$.
Puisque la moyenne de 26 et de y est égale à $52-x$, alors $26+y = 2(52-x)$, d'où $y = 104-26-2x$, ou $y = 78 - 2x$. Les nombres, dans l'ordre, sont donc $8, 78 - 2x, 52 - x, 26, x$.
Puisque la moyenne de 8 et de $52 - x$ est égale à $78 - 2x$, alors :

$$\begin{aligned} 8 + (52 - x) &= 2(78 - 2x) \\ 60 - x &= 156 - 4x \\ 3x &= 96 \\ x &= 32 \end{aligned}$$

Donc $x = 32$.

Réponse : (D)

22. Puisque $JKLM$ est un rectangle, les angles J et K sont droits et les triangles SJP et QKP sont rectangles.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle SJP :

$$SP^2 = JS^2 + JP^2 = 52^2 + 39^2 = 2704 + 1521 = 4225$$

Puisque $SP > 0$, alors $SP = \sqrt{4225}$, d'où $SP = 65$.
Puisque $PQRS$ est un losange, alors $PQ = PS = 65$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle QKP :

$$KP^2 = PQ^2 - KQ^2 = 65^2 - 25^2 = 4225 - 625 = 3600$$

Puisque $KP > 0$, alors $KP = \sqrt{3600}$, d'où $KP = 60$.
(Au lieu d'utiliser le théorème de Pythagore, on aurait pu dire que le triangle SJP est semblable au triangle rectangle remarquable 3-4-5 (ses cathètes mesurent 13×3 et 13×4 et l'hypoténuse mesure donc 13×5) et que le triangle SJP est semblable au triangle rectangle remarquable 5-12-13, d'où $KP = 5 \times 12$.)
Puisque KQ est parallèle à PZ et que PK est parallèle à WQ, alors $PKQW$ est un rectangle.
Donc $PW = KQ = 25$.
De même, $JPZS$ est un rectangle, d'où $PZ = JS = 52$.
Donc $WZ = PZ - PW$, d'où $WZ = 52 - 25$, ou $WZ = 27$.
De plus, $SYRM$ est un rectangle. Puisque JM est parallèle à KL (car $JKLM$ est un rectangle), que JK est parallèle à ML et que PQ est parallèle à SR (car $PQRS$ est un losange), alors $\angle MSR = \angle KQP$ et $\angle SRM = \angle QPK$.
Puisque les triangles SMR et QKP ont deux paires d'angles congrus deux à deux, ils sont semblables. Puisque les hypoténuses ont la même longueur, les triangles doivent être congruents.
Donc $MR = KP = 60$.
Donc $ZY = SY - SZ = MR - JP$, d'où $ZY = 60 - 39$, ou $ZY = 21$.
Donc, le périmètre du rectangle $WXYZ$ est égal à $2(21) + 2(27)$, ou 96.

Réponse : (D)

23. On remarque d'abord que $2010 = 10(201) = 2(5)(3)(67)$. Donc $2010^2 = 2^2 3^2 5^2 67^2$.
On considère N entiers positifs consécutifs de quatre chiffres.
Pour que le produit de ces N entiers soit divisible par 2010^2, il faut que deux entiers différents soient divisibles par 67 (ce qui indique que la liste contient au moins 68 entiers) ou qu'un des entiers soit divisible par 67^2.
Puisqu'on veut minimiser la valeur de N (et que tous les choix de réponse sont inférieurs à 68), on cherche une liste de nombres dont un des nombres est divisible par 67^2, ou 4489.
Puisque les nombres ont quatre chiffres, les seuls multiples de 4489 qu'il faut considérer sont 4489 et 8978.

On considère d'abord une liste de N entiers consécutifs qui incluent le nombre 4489.
Puisque le produit des entiers doit admettre deux diviseurs 5 et que des entiers divisibles par 25 sont plutôt éloignés de 4489, il faut inclure dans la liste deux entiers divisibles par 5. Pour minimiser le nombre d'entiers dans la liste, on tente d'inclure 4485 et 4490.
Notre liste provisoire est donc 4485, 4486, 4487, 4488, 4489, 4490.
Le produit de ces nombres inclut deux diviseurs 67 (dans 4489), deux diviseurs 5 (dans 4485 et 4490), deux diviseurs 2 (dans 4486 et 4488) et deux diviseurs 3 (car 4485 et 4488 sont divisibles par 3). Donc, le produit de ces 6 entiers est divisible par 2010^2.
Donc, la liste la plus courte qui contient 4489 a une longueur de 6.

On considère ensuite une liste de N entiers consécutifs qui incluent le nombre 8978.
Cet entier a un voisin plutôt rapproché, soit 8975, qui admet deux diviseurs 5. On considère donc la liste 8975, 8976, 8977, 8978 et on vérifie si elle satisfait à la condition donnée.
Le produit de ces nombres inclut deux diviseurs 67 (dans 8978), deux diviseurs 5 (dans 8975) et deux diviseurs 2 (dans 8976). Dans cette liste, seul le nombre 8976 est divisible par 3, mais il n'est pas divisible par 9.
Pour obtenir un deuxième diviseur 3, il faut ajouter à la liste un autre nombre divisible par 3. On prolonge la liste d'un nombre, soit 8979, qui est divisible par 3.
Donc, le produit des nombres de la liste $8975, 8976, 8977, 8978, 8979$ est divisible par 2010^2. La liste a une longueur de 5. Donc, la plus petite valeur possible de N est 5.
(On signale qu'on peut vérifier rapidement si un entier est divisible par 3 en additionnant les chiffres et en vérifiant si cette somme est divisible par 3. Par exemple, les chiffres du nombre 8979 ont une somme de 33 ; puisque 33 est divisible par 3, alors 8979 est divisible par 3.)

Réponse : (A)

24. Soit $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2009}, x_{2010}$ les termes de la suite.
Soit S la somme de chaque deuxième terme, en commençant par le premier et en terminant par l'avant dernier. Donc :

$$S = x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{2007} + x_{2009}$$

On sait que la somme de tous les termes est égale à 5307, c'est-à-dire que :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{2009} + x_{2010} = 5307$$

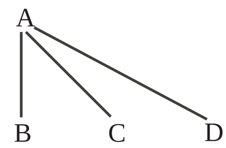
On compare ensuite les termes comme suit : le deuxième au premier, le quatrième au troisième, le sixième au cinquième, et ainsi de suite. Dans chaque cas, le nombre qui suit est 1 de plus que le nombre précédent, c'est-à dire que $x_2 = x_1 + 1$, $x_4 = x_3 + 1$, $x_6 = x_5 + 1$ et ainsi de suite.
Donc, chacun des 1005 termes $x_2, x_4, x_6, \ldots$ est 1 de plus que le terme correspondant de la liste $x_1, x_3, x_5, \ldots$
Donc $x_2 + x_4 + x_6 + \cdots + x_{2010}$ est 1005 de plus que $x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{2009}$.
Donc $x_2 + x_4 + x_6 + \cdots + x_{2010} = S + 1005$.
Puisque la somme de tous les termes est égale à la somme de $x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{2009}$ plus la somme de $x_2 + x_4 + x_6 + \cdots + x_{2010}$, ou $S + 1005$, elle est égale à $S + (S + 1005)$. Donc $S + (S + 1005) = 5307$, d'où $2S = 4302$, ou $S = 2151$.
Donc, si on additionne chaque deuxième terme, en commençant par le premier et en terminant par l'avant dernier, on obtient une somme de 2151.

Réponse : (C)

25. Avant de répondre, on détermine le nombre de façons qu'il y a de choisir 2 objets parmi 5 objets et le nombre de façons qu'il y a de choisir 3 objets parmi 5.
On considère 5 objets, B, C, D, E et F.
Les choix de 2 de ces 5 objets sont : BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF et EF. Il y en a 10.
Les choix de 3 de ces 5 objets sont : DEF, CEF, CDF, CDE, BEF, BDF, BDE, BCF, BCE et BCD. Il y en a 10.
(Pouvez-vous voir pourquoi il y a autant de choix de 3 objets que de choix de 2 objets ?)

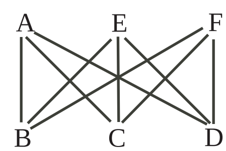
Soit A, B, C, D, E et F les six équipes.
On considère l'équipe A.
L'équipe A joue trois parties. Il faut donc choisir 3 des 5 autres équipes qui peuvent jouer contre elle. On a vu qu'il y a 10 façons de le faire.
On considère maintenant un de ces 10 choix de 3 équipes. Disons que l'équipe A joue contre les

équipes B, C et D.
On tient compte des possibilités en utilisant une figure dans laquelle chaque joute est indiquée par une ligne qui joint deux équipes.
Jusqu'à présent, on a :



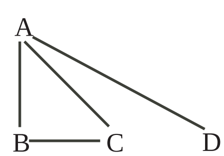
Deux possibilités se présentent : il n'y a aucune rencontre entre les équipes B, C et D ou il y a au moins une rencontre entre les équipes B, C et D.

1^{er} cas : Il n'y a aucune rencontre entre les équipes B, C et D.
Dans la figure précédente, chacune des équipes B, C et D joue deux autres parties. Puisqu'elles ont rencontré A et qu'elle ne se rencontrent pas entre elles, chacune doit donc rencontrer E et F. On a donc :

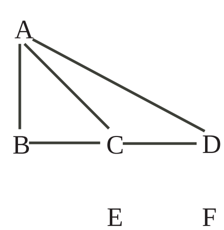


Dans cette figure, chaque équipe joue trois fois et la figure représente donc un programme complet.
Or, l'équipe A peut rencontrer 10 choix différents de 3 équipes, ce qui fait qu'il y a 10 programmes possibles dans ce cas.

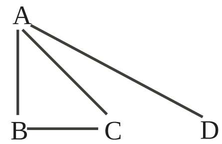
2^{e} cas : Il y a au moins une rencontre entre les équipes B, C et D.
Il y a 3 choix pour une de ces rencontres, soit BC, BD ou CD.
On considère la rencontre BC.



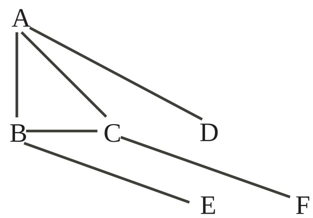
Il est maintenant impossible pour l'équipe B ou C de rencontrer l'équipe D. En effet, si C rencontrait D, par exemple, on aurait la situation suivante :



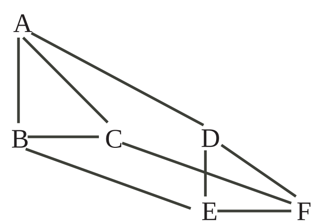
Dans cette situation, les équipes A et C ont chacune joué 3 parties, les équipes B et D en ont chacune joué 2 et les équipes E et F n'en ont joué aucune. Il est alors impossible pour les équipes B et D de jouer exactement 3 parties, car les adversaires possibles de E sont B, D et F, tandis que les adversaires possibles de F sont B, D et E, ce qui ferait que B et D joueraient 4 parties.
Un argument semblable indique qu'il est impossible pour B de rencontrer D.
On a donc la situation suivante :



Dans cette situation, l'équipe A a joué 3 parties, les équipes B et C ont joué 2 parties et l'équipe D a joué 1 partie.
Les équipes B et C doivent jouer une autre partie, sans rencontrer l'équipe D ou l'équipe A.
Elles doivent donc rencontrer les équipes E et F dans un ordre quelconque. Il y a 2 façons de le faire (BE et CF ou bien BF et CE.) À date, dans le 2e cas, il y a 3×2 programmes, ou 6 programmes.
Supposons que B rencontre E et que C rencontre F.



À date, les équipes A, B et C ont chacune joué 3 parties, tandis que les équipes E, F et D ont chacune joué 1 partie.
La seule façon de terminer le programme est de joindre D, E et F.



En partant du choix des équipes B, C et D comme adversaires de A, il y a donc 6 programmes possibles. Puisqu'il y a 10 choix possibles comme adversaires de A, il y a un total de 10×6 programmes, ou 60 programmes dans le 2e cas.

En tout, il y a $10 + 60$ programmes possibles, ou 70 programmes possibles.

Réponse : (E)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Pascal 2009

(9^{e} année – Secondaire III)

le mercredi 18 février 2009

Solutions

1. On a : $2 \times 9 - \sqrt{36} + 1 = 18 - 6 + 1 = 13$

Réponse : (D)

2. Samedi, Deepit a travaillé 6 heures. Dimanche, il a travaillé 4 heures.
Samedi et dimanche, il a travaillé un total de 10 heures $(6 + 4 = 10)$.

Réponse : (E)

3. Puisqu'une gomme à mâcher coûte 1 cent, 1000 gommes à mâcher coûtent 1000 cents.
Puisqu'il y a 100 cents dans un dollar, le coût total est de 10,00 \$.

Réponse : (D)

4. Puisque chacune des 18 classes compte 28 élèves, l'école compte 18×28 élèves, ou 504 élèves.
Puisque 496 élèves étaient présents lundi, 8 élèves étaient absents $(504 - 496 = 8)$.

Réponse : (A)

5. La somme de la mesure des angles autour de n'importe quel point est égale à 360°.
Donc $5x^\circ + 4x^\circ + x^\circ + 2x^\circ = 360^\circ$, d'où $12x = 360$, ou $x = 30$.

Réponse : (D)

6. Une puissance paire de -1 est égale à 1.
Une puissance impaire de -1 est égale à -1.
Donc $(-1)^5 - (-1)^4 = -1 - 1 = -2$.

Réponse : (A)

7. Puisque PQ est horizontal et que P a une ordonnée de 1, alors Q a une ordonnée de 1.
Puisque QR est vertical et que R a une abscisse de 5, alors Q a une abscisse de 5.
Q a donc pour coordonnées $(5, 1)$.

Réponse : (C)

8. Lorsque $y = 3$, alors $\dfrac{y^3 + y}{y^2 - y} = \dfrac{3^3 + 3}{3^2 - 3} = \dfrac{27 + 3}{9 - 3} = \dfrac{30}{6} = 5$.

Réponse : (D)

9. Puisqu'il y a quatre $\clubsuit$ dans chacune des deux premières colonnes, il faut donc déplacer au moins un $\clubsuit$ de chacune de ces colonnes de manière que chaque colonne contienne trois $\clubsuit$.
Il faut donc déplacer au moins deux $\clubsuit$ en tout.
Si on déplace le $\clubsuit$ du coin supérieur gauche au coin inférieur droit

	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$		$\clubsuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$			
$\clubsuit$	$\clubsuit$		$\clubsuit$	
		$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$

et le $\clubsuit$ de la deuxième rangée, deuxième colonne à la troisième rangée, cinquième colonne,

	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	
$\clubsuit$		$\clubsuit$		$\clubsuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$			$\clubsuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$		$\clubsuit$	
		$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$

on obtient trois $\clubsuit$ dans chaque rangée et chaque colonne.

Puisqu'il faut déplacer au moins deux ♣ et que l'on peut réussir en déplaçant deux ♣, alors le plus petit nombre de ♣ qu'il faut déplacer est bien 2.
(D'autres combinaisons de deux déplacements sont possibles.)

Réponse : (B)

10. *Solution 1*
Puisque $z = 4$ et $x + y = 7$, alors $x + y + z = (x + y) + z = 7 + 4 = 11$.

Solution 2
Puisque $z = 4$ et $x + z = 8$, alors $x + 4 = 8$, ou $x = 4$.
Puisque $x = 4$ et $x + y = 7$, alors $4 + y = 7$, ou $y = 3$.
Donc $x + y + z = 4 + 3 + 4$, ou $x + y + z = 11$.

Réponse : (C)

11. On écrit les cinq nombres en utilisant cinq décimales, sans arrondir :

$$\begin{aligned} 5{,}07\overline{6} &= 5{,}07666\ldots \\ 5{,}0\overline{76} &= 5{,}07676\ldots \\ 5{,}07 &= 5{,}07000 \\ 5{,}076 &= 5{,}07600 \\ 5{,}\overline{076} &= 5{,}07607\ldots \end{aligned}$$

Les cinq décimales nous permettent de placer les nombres en ordre croissant :

$$5{,}07000,\quad 5{,}07600,\quad 5{,}07607\ldots,\quad 5{,}07666\ldots,\quad 5{,}07676\ldots$$

Le nombre $5{,}\overline{076}$ se trouve au milieu.

Réponse : (E)

12. *Solution 1*
Puisqu'il y a 24 heures dans une journée, Francis passe $\frac{1}{3}$ de 24 heures, soit 8 heures, à dormir. Il passe aussi $\frac{1}{4}$ de 24 heures, soit 6 heures, à étudier et $\frac{1}{8}$ de 24 heures, soit 3 heures, à manger. Il lui reste donc $24 - 8 - 6 - 3$ heures, ou 7 heures.

Solution 2
La fraction totale de la journée que Francis passe à dormir, à étudier et à manger est égale à $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, ou $\frac{8+6+3}{24}$, ou $\frac{17}{24}$.
La fraction de la journée qu'il lui reste est égale à $1 - \frac{17}{24}$, ou $\frac{7}{24}$.
Puisqu'il y a 24 heures dans une journée, il lui reste 7 heures.

Réponse : (D)

13. *Solution 1*
Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, alors :

$$\angle QPS = 180^\circ - \angle PQS - \angle PSQ = 180^\circ - 48^\circ - 38^\circ = 94^\circ$$

Donc $\angle RPS = \angle QPS - \angle QPR$, d'où $\angle RPS = 94^\circ - 67^\circ$, ou $\angle RPS = 27^\circ$.

Solution 2
Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, alors :

$$\angle QRP = 180^\circ - \angle PQR - \angle QPR = 180^\circ - 48^\circ - 67^\circ = 65^\circ$$

Donc $\angle PRS = 180^\circ - \angle PRQ$, d'où $\angle PRS = 180^\circ - 65^\circ$, ou $\angle PRS = 115^\circ$.
Dans le triangle PRS, on a :

$$\angle RPS = 180^\circ - \angle PRS - \angle PSR = 180^\circ - 115^\circ - 38^\circ = 27^\circ$$

Réponse : (A)

14. Le périmètre de la région ombrée est égal à la somme des longueurs OP et OQ et de la longueur de l'arc PQ.
Les segments OP et OQ ont chacun une longueur de 5.
L'arc PQ correspond à $\frac{3}{4}$ d'un cercle de centre O et de rayon 5, car la partie manquante correspond à un arc dont l'angle au centre mesure 90°, soit $\frac{1}{4}$ du cercle.
La longueur de l'arc PQ est donc égale à $\frac{3}{4}$ de la circonférence du cercle, soit $\frac{3}{4}(2\pi(5))$, ou $\frac{15}{2}\pi$.
Le périmètre est donc égal à $5 + 5 + \frac{15}{2}\pi$, soit environ 33,56. Parmi les choix de réponse, le plus près est 34.

Réponse : (A)

15. On peut procéder par tâtonnements pour obtenir les listes $\{4, 5, 7, 8, 9\}$ et $\{3, 6, 7, 8, 9\}$.
Y en a-t-il d'autres ?

Si le plus grand nombre de la liste était 8, la plus grande somme possible serait égale à $8+7+6+5+4$, ou 30, ce qui est trop petit. Il faut donc inclure le nombre 9 dans la liste. (On ne peut inclure un nombre supérieur à 9, car la liste ne doit contenir que des entiers de un chiffre.) Donc, la somme des quatre autres nombres doit être égale à $33 - 9$, ou 24.

Si le plus grand des quatre nombres restants était 7, la plus grande somme possible serait égale à $7 + 6 + 5 + 4$, ou 22, ce qui est trop petit. Il faut donc inclure le nombre 8 dans la liste.
Donc, la somme des trois autres nombres doit être égale à $24 - 8$, ou 16.

Si le plus grand des trois autres nombres était 6, la plus grande somme possible serait égale à $6 + 5 + 4$, ou 15, ce qui est trop petit. Il faut donc inclure le nombre 7 dans la liste.
Donc, la somme des deux autres nombres doit être égale à $16 - 7$, ou 9.

Il nous faut donc deux nombres différents, chacun inférieur à 7, qui ont une somme de 9. Les nombres doivent donc être 3 et 6 ou bien 4 et 5.
On obtient donc les deux listes ci-dessus et on a démontré que ce sont les deux seules listes possibles.

Réponse : (B)

16. Le quadrillage $PQTV$ étant formé de 36 carrés-unités, il a une aire de 36.
L'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2}(QR)(PQ)$, soit $\frac{1}{2}(3)(4)$, ou 6.
L'aire du triangle STU est égale à $\frac{1}{2}(ST)(UT)$, soit $\frac{1}{2}(4)(3)$, ou 6.
Le rectangle ayant pour base RS a une aire égale à 2×4, ou 8.
L'aire totale de la partie ombrée est égale à $6 + 6 + 8$, ou 20 et l'aire de la partie non ombrée est donc égale à $36 - 20$, ou 16.
Le rapport de l'aire de la partie ombrée à l'aire de la partie non ombrée est égal à $20 : 16$, ou $5 : 4$.

Réponse : (E)

17. On peut supposer que chaque épreuve comportait un total de 100 points.
Puisque la moyenne des cinq épreuves était de 73 %, Nérissa a obtenu un total de 5×73 points,

ou 365 points.
Lorsque le résultat d'une épreuve a été annulé, la moyenne est montée à 76 %. Sur les quatre épreuves restantes, Nérissa a donc obtenu un total de 4×76 points, ou 304 points.
Puisque $365 - 304 = 61$, la note sur l'épreuve dont le résultat a été annulé était de 61 %.

Réponse : (B)

18. *Solution 1*
Du 31 décembre 1988 au 31 décembre 2008, 20 ans se sont écoulés.
Une période de 20 ans équivaut à cinq périodes de 4 ans.
Donc dans cette période, le nombre d'habitants de la ville a doublé cinq fois pour atteindre 3456.
Doubler cinq fois est l'équivalent de multiplier par 2^5, ou 32.
Donc, le 31 décembre 1988, la population de la ville était de $3456 \div 32$, ou 108.

Solution 2
Puisque la population de la ville double à tous les 4 ans lorsqu'on avance dans le temps, elle est coupée de moitié à tous les 4 ans lorsqu'on recule dans le temps.
Le 31 décembre 2008, la population était de 3456.
Le 31 décembre 2004, la population était de $3456 \div 2$, ou 1728.
Le 31 décembre 2000, la population était de $1728 \div 2$, ou 864.
Le 31 décembre 1996, la population était de $864 \div 2$, ou 432.
Le 31 décembre 1992, la population était de $432 \div 2$, ou 216.
Le 31 décembre 1988, la population était de $216 \div 2$, ou 108.

Réponse : (D)

19. Puisque Patrick parcourt 60 km à une vitesse de 80 km/h, le temps qu'il met pour cette partie du trajet est égal à $\dfrac{60 \text{ km}}{80 \text{ km/h}}$, ou $\frac{3}{4}$ h.
Puisque Patrick dispose de 2 heures pour parcourir le trajet au complet, il lui reste $(2-\frac{3}{4})$ heure, ou $\frac{5}{4}$ heure pour terminer le trajet de $(150 - 60)$ km, ou 90 km.
Il doit donc continuer à une vitesse de $\dfrac{90 \text{ km}}{\frac{5}{4} \text{ h}}$, ou $\frac{360}{5}$ km/h, ou 72 km/h.

Réponse : (C)

20. Puisque les trois entiers sur n'importe quelle ligne droite ont un produit de 3240 et qu'ils incluent 45, les deux autres entiers sur chaque droite doivent donc avoir un produit de $\frac{3240}{45}$, ou 72.
Les paires d'entiers possibles sont 1 et 72, 2 et 36, 3 et 24, 4 et 18, 6 et 12, ainsi que 8 et 9.
Ces paires d'entiers ont pour sommes respectives 73, 38, 27, 22, 18 et 17.
Pour maximiser la somme des huit nombres qui entourent 45, on choisit les paires qui ont les plus grandes sommes. On choisit donc les quatre premières paires.
Donc, la plus grande somme possible des huit nombres qui entourent 45 est égale à $73+38+27+22$, ou 160.

Réponse : (E)

21. Puisque Alice et Bruno jettent chacun un dé, il y a un total de 36 résultats possibles $(6\times 6 = 36)$.
Ces 36 résultats sont équiprobables.
Alice gagne si les valeurs indiquées sur les dés diffèrent de 1. Les résultats possibles qui diffèrent de 1 sont $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$ et $(6, 5)$.
Il y a donc 10 résultats possibles où Alice gagne.
La probabilité pour qu'Alice gagne est donc égale à $\frac{10}{36}$, ou $\frac{5}{18}$.

Réponse : (C)

22. Les diamètres PQ et RS se coupent au centre du cercle. Soit O ce centre.
L'aire de la région ombrée est égale à la somme de l'aire du triangle POS et de celle du triangle ROQ, plus la somme de l'aire du secteur POR et de celle du secteur SOQ.
Les triangles POS et ROQ sont tous deux rectangles et ils ont chacun des cathètes de longueur 4 (le rayon du cercle).
Chaque triangle a donc une aire égale à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8.
Le secteur POR et le secteur SOQ ont chacun une aire égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire du cercle, puisque chacun a un angle au centre de 90° (c'est-à-dire que $\angle POR = \angle SOQ = 90°$) et que 90° correspond à un quart de l'angle au centre du cercle au complet.
Chaque secteur a donc une aire égale à $\frac{1}{4}(\pi(4^2))$, ou $\frac{1}{4}(16\pi)$, ou 4π.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $2(8) + 2(4\pi)$, ou $16 + 8\pi$.

Réponse : (E)

23. La masse maximale d'une pièce est de $(1 + 0{,}0214) \times 7$ g, ou $1{,}0214 \times 7$ g, ou 7,1498 g.
La masse minimale d'une pièce est de $(1 - 0{,}0214) \times 7$ g, ou $0{,}9786 \times 7$ g, ou 6,8502 g.
Quels sont les nombres possibles de pièces qui peuvent avoir une masse totale de de 1000 g ?
Pour déterminer le plus grand nombre de pièces, il faut que celles-ci soient aussi légères que possible. Si toutes les pièces étaient aussi légères que possible, on aurait $\dfrac{1000}{6{,}8502}$ pièces, soit environ 145,98 pièces. Puisque le nombre de pièces doit être un entier, on peut avoir un maximum de 145 pièces. (Si on avait 146 pièces, leur masse totale serait de $146 \times 6{,}8502$ g, ou 1000,1292 g, ce qui dépasse 1 kg.)
Pour déterminer le plus petit nombre de pièces, il faut que celles-ci soient aussi lourdes que possible. Si toutes les pièces étaient aussi lourdes que possible, on aurait $\dfrac{1000}{7{,}1498}$ pièces, soit environ 139,86 pièces. Puisque le nombre de pièces doit être un entier, on doit avoir au moins 140 pièces. (Si on avait 139 pièces, leur masse totale serait de $139 \times 7{,}1498$ g, ou 993,8222 g, ce qui est inférieur à 1 kg.)
Donc, la différence entre le plus grand nombre et le plus petit nombre de pièces qu'il pourrait avoir est égale à $145 - 140$, ou 5.

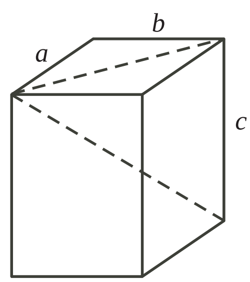
Réponse : (C)

24. On divise le grand cube (ayant des arêtes de longueur 40) en 8 petits cubes ayant des arêtes de longueur 20 en tranchant trois fois, de manière que chaque coupe passe par le centre du grand cube et soit parallèle à deux faces parallèles du grand cube.
Le centre du grand cube est maintenant un sommet de chacun des huit petits cubes.
Chaque petit cube contient une des sphères, c'est-à-dire que chaque sphère touche aux six faces d'un petit cube.
La sphère qui doit être placée au milieu du cube sera appelée *sphère intérieure*. Pour que cette sphère soit aussi grande que possible, il faudra que son centre soit le centre du grand cube. (Autrement, son centre serait à l'extérieur d'un des petits cubes et il serait plus éloigné d'une sphère que des autres).
Pour déterminer le rayon de la sphère intérieure, il faut déterminer la plus petite distance du centre du grand cube (c'est-à-dire du centre de la sphère intérieure) à une des sphères. (On peut imaginer qu'on crée une sphère intérieure au centre du cube et qu'on la gonfle jusqu'à ce qu'elle touche les autres sphères.)

On considère un des petits cubes et la sphère qu'il contient.
On forme un segment en joignant le centre du cube à un de ses sommets.
Puisque ce cube a des arêtes de longueur 20, ce segment a une longueur égale à $\sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2}$,

ou $\sqrt{300}$, puisque pour passer du centre au sommet, il faut parcourir 10 sur la largeur, 10 sur la longueur et 10 sur la hauteur. (Voir ci-dessous une explication de la raison pour laquelle la distance est de $\sqrt{300}$.)
La sphère intérieure touchera la grande sphère le long de ce segment.
Le rayon de la sphère intérieure sera donc égal à cette distance ($\sqrt{300}$) moins le rayon de la grande sphère (10). Il sera donc égal à $\sqrt{300} - 10$, ou environ 7,32.
Parmi les choix de réponse donnés, le nombre 7,3 est la meilleure approximation du rayon.

(On doit justifier pourquoi la distance du centre du petit cube à un de ses sommets est égale à $\sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2}$.
On divise le petit cube en 8 cubes minuscules ayant des arêtes de longueur 10. La distance du centre du petit cube à un de ses sommets est égale à la longueur d'une diagonale d'un de ces cubes minuscules.
On considère un prisme droit à base rectangulaire ayant des arêtes de longueurs a, b et c. Quelle est la longueur d d'une diagonale du prisme ?
D'après le théorème de Pythagore, une face ayant des côtés de longueurs a et b a une diagonale de longueur $\sqrt{a^2 + b^2}$.
On considère un triangle formé par cette diagonale, la diagonale du prisme et une des arêtes verticales du prisme de longueur c.



Ce triangle est rectangle, puisque l'arête verticale est perpendiculaire à la face supérieure. D'après le théorème de Pythagore, $d^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2$, d'où $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, ou $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.)

Réponse : (B)

25. Les trois machines fonctionnent de manière que si les deux nombres de la sortie ont un diviseur commun supérieur à 1, alors les deux nombres de l'entrée doivent avoir un diviseur commun supérieur à 1.
Pour le vérifier, on considère chaque machine séparément. On utilise le fait que si deux nombres sont des multiples de d, alors leur somme et leur différence sont aussi des multiples de d.
Supposons que (m, n) est une entrée de la machine A. La sortie est donc (n, m). Si n et m ont un diviseur commun supérieur à 1, alors m et n en ont un aussi.
Supposons que (m, n) est une entrée de la machine B. La sortie est donc $(m + 3n, n)$. Si $m + 3n$ et n ont un diviseur commun d, alors d est un diviseur de $(m + 3n) - n - n - n$, c'est-à-dire de m, puisque chaque terme de la soustraction est un multiple de d. Donc, m et n ont un diviseur commun d.
Supposons que (m, n) est une entrée de la machine C. La sortie est donc $(m - 2n, n)$. Si $m - 2n$ et n ont un diviseur commun d, alors d est un diviseur de $(m - 2n) + n + n$, c'est-à-dire de m, puisque chaque terme de l'addition est un multiple de d. Donc, m et n ont un diviseur commun d.

Dans chaque cas, tout diviseur commun des nombres de l'entrée est un diviseur commun des nombres de la sortie.

On examine les nombres qui paraissent dans les choix de réponse. On écrit les six nombres en factorisation première :

$$\begin{aligned}
2009 &= 7(287) = 7(7)(41)\\
1016 &= 8(127) = 2(2)(2)(127)\\
1004 &= 4(251) = 2(2)(251)\\
1002 &= 2(501) = 2(3)(167)\\
1008 &= 8(126) = 8(3)(42) = 16(3)(3)(7) = 2(2)(2)(2)(3)(3)(7)\\
1032 &= 8(129) = 8(3)(43) = 2(2)(2)(3)(43)
\end{aligned}$$

Parmi les nombres 1002, 1004, 1008, 1016 et 1032, seul le nombre 1008 a un diviseur commun avec 2009, soit 7.
Puisque 2009 et 1008 ont un diviseur commun 7, alors quelle que soit l'entrée qui a produit la sortie $(2009, 1008)$, 7 doit être un diviseur commun des deux nombres de l'entrée. Il en est de même des deux nombres qui servent d'entrée à n'importe quelle étape, peu importe les machines utilisées.
Donc, $(2009, 1008)$ ne peut provenir du couple initial $(0, 1)$.

Remarques

- Cet argument ne nous dit pas que les autres couples peuvent être le résultat du couple initial $(0, 1)$. Il démontre seulement que $(2009, 1008)$ ne peut provenir de ce couple initial.
- Il est possible, avec un certain effort, de partir du couple initial $(0, 1)$ pour obtenir chacun des autres couples. (Le processus est plus facile à suivre qu'à décrire !)
  On remarque d'abord que si la sortie de la machine A est (a, b), alors l'entrée était (b, a), puisque la machine A intervertit l'ordre des nombres du couple.
  De plus, si la sortie de la machine B est (a, b), alors son entrée était $(a - 3b, b)$, puisque la machine B ajoute trois fois le deuxième nombre au premier.
  Enfin si la sortie de la machine C est (a, b), alors son entrée était $(a + 2b, b)$, puisque la machine C soustrait deux fois le deuxième nombre du premier.
  On considère le couple $(2009, 1016)$. On cherche une suite d'opérations qui nous permettent de reculer de $(2009, 1016)$ à $(0, 1)$. On cherche n'importe quelle suite qui fonctionne plutôt qu'une suite particulière.

  Avant de procéder, on remarque que si le couple (m, n) est utilisé comme entrée dans la machine B et que la sortie est utilisée comme entrée dans la machine C, on a pour sortie $((m+3n)-2n, n)$, ou $(m+n, n)$. Donc, si l'utilisation de la machine B suivie de la machine C (on dira « machine BC ») donne une sortie (a, b), l'entrée devait être $(a-b, b)$. On utilisera cette combinaison pour travailler à rebours et en arriver à $(0, 1)$. Cela simplifiera les choses et évitera les nombres négatifs.
  On utilise un tableau et notre stratégie, à chaque étape, est d'obtenir des nombres de plus en plus petits :

Sortie	Machine	Entrée
$(2009, 1016)$	BC	$(993, 1016)$
$(993, 1016)$	A	$(1016, 993)$
$(1016, 993)$	BC	$(23, 993)$
$(23, 993)$	A	$(993, 23)$
$(993, 23)$	BC, 43 fois	$(4, 23)$
$(4, 23)$	A	$(23, 4)$
$(23, 4)$	BC, 5 fois	$(3, 4)$
$(3, 4)$	A	$(4, 3)$
$(4, 3)$	BC	$(1, 3)$
$(1, 3)$	A	$(3, 1)$
$(3, 1)$	B	$(0, 1)$

En procédant à rebours dans ce tableau, on voit comment on peut commencer par le couple $(0, 1)$ pour en arriver au couple $(2009, 1016)$.
De façon semblable, il est possible d'en arriver à chacun des couples $(2009, 1004)$, $(2009, 1002)$ et $(2009, 1032)$.

Réponse : (D)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Pascal 2008

(9^e^ année – Secondaire III)

le mardi 19 février 2008

Solutions

1. On a : $\dfrac{2+3+4}{2\times 3\times 4} = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8}$

RÉPONSE : (E)

2. Puisque $3x - 9 = 12$, alors $3x = 12 + 9$, ou $3x = 21$.
Puisque $3x = 21$, alors $2(3x) = 2(21)$, ou $6x = 42$.
(Remarquer qu'on n'a pas demandé de déterminer la valeur de x.)

RÉPONSE : (A)

3. On a : $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

RÉPONSE : (B)

4. *Solution 1*
Puisque $JLMR$ est un rectangle et que $JR = 2$, alors $LM = 2$.
De même, puisque $JL = 8$, alors $RM = 8$.
Puisque $RM = 8$ et $RQ = 3$, alors $QM = 8 - 3$, ou $QM = 5$.
Puisque $KLMQ$ est un rectangle et que $QM = 5$ et $LM = 2$, son aire est égale à 5×2, ou 10.

Solution 2
Puisque $JL = 8$ et $JR = 2$, alors l'aire du rectangle $JLMR$ est égale à 2×8, ou 16.
Puisque $RQ = 3$ et $JR = 2$, alors l'aire du rectangle $JKQR$ est égale à 2×3, ou 6.
L'aire du rectangle $KLMQ$ est égale à la différence de ces aires, soit $16 - 6$, ou 10.

RÉPONSE : (C)

5. Puisque $x = 12$ et $y = -6$, alors :

$$\frac{3x+y}{x-y} = \frac{3(12)+(-6)}{12-(-6)} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$$

RÉPONSE : (C)

6. *Solution 1*
Puisque l'angle PQS est un angle extérieur du triangle QRS, alors $\angle PQS = \angle QRS + \angle QSR$.
Donc $136^\circ = x^\circ + 64^\circ$, d'où $x = 136 - 64$, ou $x = 72$.

Solution 2
Puisque $\angle PQS = 136^\circ$, alors $\angle RQS = 180^\circ - \angle PQS$, d'où $\angle RQS = 180^\circ - 136^\circ$, ou $\angle RQS = 44^\circ$.
Puisque la somme de la mesure des angles du triangle QRS est égale à 180°, alors $44^\circ + 64^\circ + x^\circ = 180^\circ$, d'où $x = 180 - 44 - 64$, ou $x = 72$.

RÉPONSE : (A)

7. Le nombre de bonbons dans le sac est égal à $5 + 6 + 7 + 8$, ou 26.
Puisqu'il y a 8 bonbons bleus, la probabilité de choisir un bonbon bleu est égale à $\frac{8}{26}$, ou $\frac{4}{13}$.

RÉPONSE : (D)

8. Puisque Odile a vendu 108 pommes en 6 heures, alors à chaque heure, elle a vendu 18 pommes ($108 \div 6 = 18$). Ceci est équivalent à 9 pommes à chaque demi-heure.
Dans une heure et 30 minutes, il y a 3 demi-heures. Odile a donc vendu 3×9 pommes, soit 27 pommes, en une heure et 30 minutes.

Réponse : (A)

9. Puisque le grillage rectangulaire a une longueur de 10 et qu'il y a 5 carrés sur sa longueur, chaque carré a des côtés de longueur $10 \div 5$, ou 2.
Il y a 4 fils horizontaux, chacun de longueur 10, pour une longueur totale de 4×10, ou 40.
Puisque chaque petit carré a des côtés de longueur 2 et que le grillage est 3 carrés de haut, il a une hauteur de 3×2, ou 6.
Il y a 6 fils verticaux, chacun de longueur 6, pour une longueur totale de 6×6, ou 36.
Pour construire le grillage, il faut du fil de fer d'une longueur de $40 + 36$, ou 76.

Réponse : (E)

10. *Solution 1*
Puisque Q est à 46 et que P est à -14, alors la distance de P à Q, sur la droite numérique, est égale à $46 - (-14)$, ou 60.
Puisque le point S est situé aux trois quarts du chemin de P à Q, alors S est à $-14 + \frac{3}{4}(60)$, c'est-à-dire à $-14 + 45$, ou 31.
Puisque le point T est situé à un tiers du chemin de P à Q, alors T est à $-14 + \frac{1}{3}(60)$, c'est-à-dire à $-14 + 20$, ou 6.
La distance, sur la droite numérique, du point T au point S, est égale à $31 - 6$, ou 25.

Solution 2
Puisque Q est à 46 et que P est à -14, alors la distance de P à Q, sur la droite numérique, est égale à $46 - (-14)$, ou 60.
Puisque le point S est situé aux trois quarts du chemin de P à Q et que le point T est situé à un tiers du chemin de P à Q, alors la distance de T à S est égale à $60\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)$, c'est-à-dire à $60\left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right)$, soit $60\left(\frac{5}{12}\right)$, ou 25.

Réponse : (D)

11. Le nombre total d'élèves de l'école secondaire de Mathville qui ont participé au concours Pascal est égal à $30 + 20$, ou 50.
Puisque 30 % (ou $\frac{3}{10}$) des garçons et 40 % (ou $\frac{4}{10}$) des filles ont reçu un certificat, le nombre d'élèves qui ont reçu un certificat est égal à $\frac{3}{10}(30) + \frac{4}{10}(20)$, soit $9 + 8$, ou 17.
Donc, 17 des 50 participantes et participants ont reçu un certificat. Puisque $\frac{17}{50} = \frac{34}{100}$, ceci correspond à 34 % des participants.

Réponse : (A)

12. Puisque le rectangle a un périmétre de 56, alors :

$$\begin{aligned} 2(x+4) + 2(x-2) &= 56 \\ 2x + 8 + 2x - 4 &= 56 \\ 4x + 4 &= 56 \\ 4x &= 52 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

On a donc $x + 4 = 17$ et $x - 2 = 11$. Le rectangle mesure donc 17 sur 11 et son aire est égale à 17×11, ou 187.

Réponse : (B)

13. D'après les lois d'exposants, on a : $2^3 \times 2^2 \times 3^3 \times 3^2 = 2^{3+2} \times 3^{3+2} = 2^5 \times 3^5 = (2 \times 3)^5 = 6^5$

Réponse : (A)

14. *Solution 1*

L'énoncé du problème laisse entendre que la valeur de $a + b + c + d + e + f$ est la même, peu importe les nombres abc et def choisis qui vérifient les conditions données.
Voici un exemple qui vérifie les conditions données : $889 + 111 = 1000$
On a alors $a+b+c+d+e+f = 8+8+9+1+1+1 = 28$, ce qui doit être la valeur constante.

Solution 2

On considère l'addition, colonne par colonne, en commençant par la colonne des unités.
Puisque $c + f$ se termine par un 0, alors $c + f = 0$ ou $c + f = 10$. (L'expression $c + f$ ne peut avoir une valeur supérieure ou égale à 20, puisque c et f prennent des valeurs de 1 à 9.)
Puisqu'aucun chiffre n'est égal à 0, on ne peut avoir $c+f = 0+0$. Donc $c+f = 10$. (Il y a donc une retenue de 1 dans la 2e colonne.)
Puisque le chiffre des dizaines de la somme est égal à 0 et qu'il y a une retenue de 1, alors $b+e$ se termine par un 9. On a donc $b+e = 9$. (Puisque b et e sont des chiffres, $b+e$ ne peut prendre une valeur de 19 ou plus.)
Dans la colonne des dizaines, on a $b + e = 9$ plus la retenue de 1, ce qui donne le chiffre 0 dans la somme, ainsi qu'une retenue de 1 dans la colonne des centaines.
On utilise un argument semblable pour conclure que $a + d = 9$.
Donc, $a + b + c + d + e + f = (a + d) + (b + e) + (c + f) = 9 + 9 + 10 = 28$.

Réponse : (D)

15. Chacun des triangles PSQ et RSQ est rectangle en S. On peut donc utiliser le théorème de Pythagore dans chaque triangle.
Dans le triangle RSQ, on a $QS^2 = QR^2 - SR^2$, d'où $QS^2 = 25^2 - 20^2$, ou $QS^2 = 225$.
Donc $QS = 15$, puisque $QS > 0$.
Dans le triangle PSQ, on a $PQ^2 = PS^2 + QS^2$, d'où $PQ^2 = 8^2 + 15^2$, ou $PQ^2 = 289$.
Donc $PQ = 17$, puisque $PQ > 0$.
Le périmètre du triangle PQR est égal à $PQ + QR + RP$, soit $17 + 25 + (20 + 8)$, ou 70.

Réponse : (E)

16. Supposons que le rayon du cercle est égal à r cm. On a donc $M = \pi r^2$ et $N = 2\pi r$.
Donc $\dfrac{\pi r^2}{2\pi r} = 20$, d'où $\dfrac{r}{2} = 20$, ou $r = 40$.

Réponse : (C)

17. *Solution 1*

Le grand cube a une aire totale de $5400\ \text{cm}^2$ et sa surface est composée de six carrés identiques.
L'aire de chaque face, en centimètres carrés, est donc égale à $5400 \div 6$, ou 900.
Puisque chaque face est un carré, la longueur des côtés des carrés est égale à $\sqrt{900}$ cm, ou 30 cm.
Chaque arête du grand cube a donc une longueur de 30 cm.
Le grand cube a donc un volume de $30^3\ \text{cm}^3$, soit $27\,000\ \text{cm}^3$. Puisqu'il a été coupé en petits cubes qui ont un volume de $216\ \text{cm}^3$, le nombre de petits cubes est égal à $27\,000 \div 216$, ou 125.

Solution 2

Le grand cube a une aire totale de 5400 cm^2 et sa surface est composée de six carrés identiques. L'aire de chaque face, en centimètres carrés, est donc égale à $5400 \div 6$, ou 900.

Puisque chaque face est un carré, la longueur des côtés des carrés est égale à $\sqrt{900}$ cm, ou 30 cm. Chaque arête du cube a donc une longueur de 30 cm.

Puisque chaque petit cube a un volume de 216 cm^3, chacun a des arêtes de longueur $\sqrt[3]{216}$ cm, ou 6 cm.

Puisque le grand cube a des arêtes de 30 cm et que les petits cubes ont des arêtes de 6 cm, alors on peut placer 5 petits cubes le long de chaque arête du grand cube ($30 \div 6 = 5$).

Le grand cube est donc formé de 5^3 petits cubes, soit 125 petits cubes.

Réponse : (B)

18. *Solution 1*

Alex a 265 cents en tout.

Puisque 265 n'est pas divisible par 10, Alex ne peut avoir que des pièces de 10 ¢. Il doit avoir au moins une pièce de 25 ¢.

S'il a 1 pièce de 25 ¢, alors la valeur de ses pièces de 10 ¢, en cents, est égale à $265 - 25$, ou 240. Il a donc 24 pièces de 10 ¢.

Il ne peut avoir 2 pièces de 25 ¢, car $265 - 2(25) = 215$, ce qui n'est pas divisible par 10.

S'il a 3 pièces de 25 ¢, alors la valeur de ses pièces de 10 ¢, en cents, est égale à $265 - 3(25)$, ou 190. Il a donc 19 pièces de 10 ¢.

On voit qu'Alex ne peut avoir un nombre pair de pièces de 25 ¢, car la valeur de ces pièces, en cents, se terminerait par un 0, ce qui ferait que la valeur des pièces de 10 ¢, en cents, se terminerait par un 5, ce qui est impossible.

S'il a 5 pièces de 25 ¢, alors la valeur de ses pièces de 10 ¢, en cents, est égale à $265 - 5(25)$, ou 140. Il a donc 14 pièces de 10 ¢.

S'il a 7 pièces de 25 ¢, alors la valeur de ses pièces de 10 ¢, en cents, est égale à $265 - 7(25)$, ou 90. Il a donc 9 pièces de 10 ¢.

S'il a 9 pièces de 25 ¢, alors la valeur de ses pièces de 10 ¢, en cents, est égale à $265 - 9(25)$, ou 40. Il a donc 4 pièces de 10 ¢.

Si Alex a plus de 9 pièces de 25 ¢, il a moins de 4 pièces de 10 ¢. Or, on sait qu'il a plus de pièces de 10 ¢ que de pièces de 25 ¢. Il n'est donc pas nécessaire d'examiner d'autres possibilités.

Les possibilités pour le nombre total de pièces sont donc $1 + 24 = 25$, $3 + 19 = 22$, $5 + 14 = 19$ et $7 + 9 = 16$.

Le plus petit nombre de pièces de monnaie qu'Alex pourrait avoir est donc 16.

(Remarquer que chaque fois qu'on augmentait le nombre de pièces de 25 ¢, ci-haut, on échangeait 2 pièces de 25 ¢, qui valent 50 cents, pour 5 pièces de 10 ¢, qui valent aussi 50 cents.)

Solution 2

Supposons qu'Alex a d pièces de 10 ¢ et v pièces de 25 ¢, d et v étant des entiers non négatifs.

Puisque Alex a 2,65 \$, alors $10d + 25v = 265$, ou $2d + 5v = 53$.

Puisque le membre de droite est impair, le membre de gauche doit l'être aussi. Donc, $5v$ doit être impair, ce qui implique que v doit être impair.

Si $v \geq 11$, alors $5v \geq 55$, ce qui est trop grand.

Donc $v < 11$, ce qui implique que $v = 1$, 3, 5, 7 ou 9 et $d = 24$, 19, 14, 9 ou 4.

La solution pour laquelle $d > v$ et $d + v$ est un minimum est $v = 7$ et $d = 9$, ce qui donne 16 pièces de monnaie en tout.

Réponse : (B)

19. D'après la définition d'un nombre montant, les deux premiers chiffres d'un nombre montant déterminent automatiquement le troisième chiffre.
On considère d'abort les nombres montants qui commencent par 1.
On obtient 101, 112, 123, 134, 145, 156, 167, 178 et 189, puisque $1+0=1$, $1+1=2$ et ainsi de suite. (Le deuxième chiffre ne peut être un 9, car $1+9=10$, ce qui n'est pas un chiffre.) On obtient donc 9 nombres montants.
Les nombres montants qui commencent par 2 sont 202, 213, 224, 235, 246, 257, 268 et 279. Il y en a 8.
On continue de la sorte pour déterminer qu'il y a respectivement 7, 6, 5, 4, 3, 2 et 1 nombres montants qui commencent par 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Le nombre d'entiers positifs de trois chiffres qui sont montants est donc égal à $9+8+7+6+5+4+3+2+1$, ou 45.

Réponse : (D)

20. La somme des six nombres est égale à $1867+1993+2019+2025+2109+2121$, ou 12 134.
Les quatre nombres qui ont une moyenne de 2008 doivent avoir une somme de 4×2008, ou 8032. (On ne sait pas de quels nombres il s'agit, mais il n'est pas nécessaire de le savoir.)
La somme des deux autres nombres est donc égale à $12\,134-8032$, ou 4102.
La moyenne de ces deux nombres est donc égale à $\frac{4102}{2}$, ou 2051.
(On peut vérifier que 1867, 2019, 2025 et 2121 ont bien une moyenne de 2008 et que 1993 et 2109 ont une moyenne de 2051.)

Réponse : (D)

21. L'expression $\dfrac{p}{q}$ prend la plus grande valeur possible lorsque p prend la plus grande valeur possible, soit 10, et q prend la plus petite valeur possible, soit 12. La plus grande valeur possible de $\dfrac{p}{q}$ est donc égale à $\dfrac{10}{12}$, ou $\dfrac{5}{6}$.
Elle prend la plus petite valeur possible lorsque p prend la plus petite valeur possible, soit 3, et q prend la plus grande valeur possible, soit 21. La plus petite valeur possible de $\dfrac{p}{q}$ est donc égale à $\dfrac{3}{21}$, ou $\dfrac{1}{7}$.
La différence entre ces deux valeurs est égale à $\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{7}$, soit $\dfrac{35}{42}-\dfrac{6}{42}$, ou $\dfrac{29}{42}$.

Réponse : (A)

22. Soit d km la distance de la maison de Gaël à l'école.
Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure, alors $3\frac{3}{4}$ minutes (ou $\frac{15}{4}$ minutes) correspondent à $\frac{15}{4}\times\frac{1}{60}$ heure, ou $\frac{1}{16}$ heure.
Puisque Gaël marche à une vitesse de 4 km/h, alors elle met $\dfrac{d}{4}$ heure pour marcher à l'école.
Puisque Gaël court à une vitesse de 6 km/h, alors elle met $\dfrac{d}{6}$ heure pour courir à l'école.
Puisqu'elle épargne $\frac{1}{16}$ heure en courant, alors la différence entre ces deux temps est égale à

$\frac{1}{16}$ heure. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{4} - \frac{d}{6} &= \frac{1}{16} \\ \frac{3d}{12} - \frac{2d}{12} &= \frac{1}{16} \\ \frac{d}{12} &= \frac{1}{16} \\ d &= \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

La distance de sa maison à l'école est égale à $\frac{3}{4}$ km.

Réponse : (E)

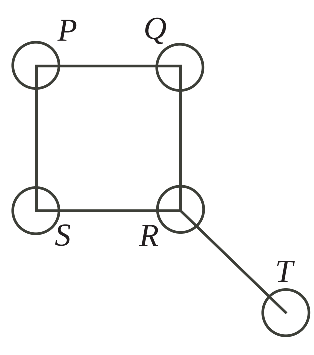
23. Soit d m la distance de la droite M à la droite L.
La partie du morceau W à gauche de la coupure a donc une longueur de d m.
Puisque le morceau X est à 3 m de la droite M, alors la partie du morceau X à la gauche de la coupure a une longueur de $(d - 3)$ m, car 3 des d mètres à la gauche de la coupure sont vides.
De même, les parties des morceaux Y et Z à la gauche de la coupure ont une longueur respective de $(d - 2)$ m et $(d - 1{,}5)$ m.
Donc, la longueur totale, en mètres, des parties à la gauche de la coupure est égale à :

$$\begin{aligned} &d + (d - 3) + (d - 2) + (d - 1{,}5) \\ = {}& 4d - 6{,}5 \end{aligned}$$

Puisque la longueur totale des morceaux de part et d'autre de la coupure est la même, cette longueur est égale à $\frac{1}{2}(5 + 3 + 5 + 4)$ m, ou 8,5 m.
(On aurait pu déterminer la longueur des parties à la droite des coupures, soit $5 - d$, $6 - d$, $7 - d$ et $5{,}5 - d$, et former une équation entre la somme des longueurs de part et d'autre de la coupure.)
Donc $4d - 6{,}5 = 8{,}5$, d'où $4d = 15$, ou $d = 3{,}75$. La partie du morceau W à la gauche de la coupure a une longueur de 3,75 m.

Réponse : (D)

24. Les cercles sont nommés P, Q, R, S et T, comme dans la figure suivante.

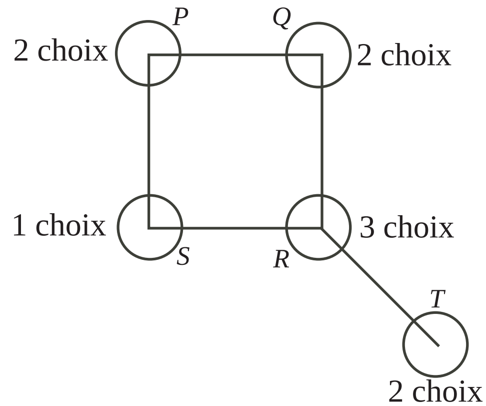


On remarque qu'il y a 3 couleurs possibles et que deux cercles adjacents ne peuvent avoir la même couleur.
On considère le cercle R. Il y a 3 choix de couleur pour ce cercle.
Pour chacun de ces choix, il y a 2 choix de couleur pour T (l'une ou l'autre couleur non utilisée pour R), puisque l'on doit utiliser une couleur différente de celle de R.
Les cercles Q et S peuvent être de la même couleur ou de couleurs différentes.

1$^{\text{er}}$ cas : Q et S sont de la même couleur

Pour chacun des choix précédents, il y a 2 choix de couleur pour Q (l'une ou l'autre couleur non utilisée pour R) ; pour chacun de ces choix, il y a 1 choix pour la couleur de S (la même couleur que Q).

Pour chacun des choix précédents, il y a 2 choix pour la couleur de P (l'une ou l'autre des couleurs non utilisée pour Q et S).

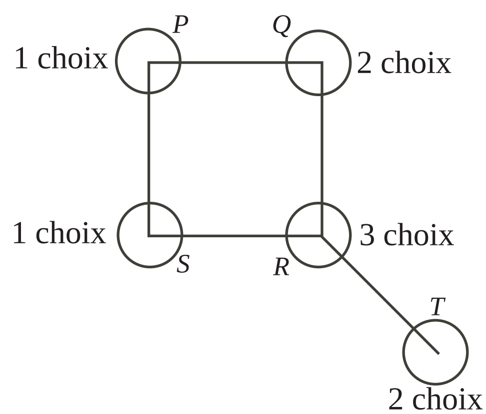


Dans ce cas, le nombre de façons de colorier les cercles est égal à $3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2$, ou 24.

2 $^{\text{e}}$ cas : Q et S sont de couleurs différentes

Dans ce cas, il y a 2 choix de couleur pour Q (l'une ou l'autre couleur non utilisée pour R) ; pour chacun de ces choix, il y a 1 choix de couleur pour S (elle doit être différente de celles de R et de Q).

Pour chacun des choix de couleur pour R, Q et S, il y a 1 choix de couleur possible pour P (il ne peut avoir la même couleur que Q ou S, qui sont de couleurs différentes, et il n'y a que 3 couleurs en tout).



Dans ce cas, le nombre de façons de colorier les cercles est égal à $3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1$, ou 12.

En tout, le nombre de façons de colorier les cercles est égal à $24 + 12$, ou 36.

Réponse : (D)

25. Puisque $PQ = 2$ et que M est le milieu du côté PQ, alors $PM = MQ = \frac{1}{2}(2) = 1$.
Puisque le triangle PQR est rectangle en P, alors selon le théorème de Pythagore :

$$RQ = \sqrt{PQ^2 + PR^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

(On peut ajouter que le triangle PQR est un triangle remarquable 30°-60°-90°, mais on n'utilisera pas cette propriété.)

Puisque PL est une hauteur, alors $\angle PLR = 90°$. Donc, les triangles RLP et RPQ sont semblables (ils sont rectangles et ils ont un angle commun, soit l'angle R).

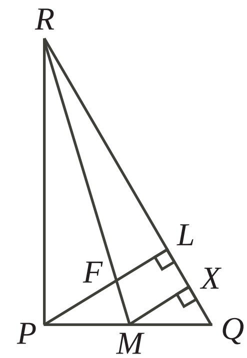
Donc $\dfrac{PL}{QP} = \dfrac{RP}{RQ}$, c'est-à-dire que $PL = \dfrac{(QP)(RP)}{RQ}$, d'où $PL = \dfrac{2(2\sqrt{3})}{4}$, ou $PL = \sqrt{3}$.

De même, $\dfrac{RL}{RP} = \dfrac{RP}{RQ}$, c'est-à-dire que $RL = \dfrac{(RP)(RP)}{RQ}$, d'où $RL = \dfrac{(2\sqrt{3})(2\sqrt{3})}{4}$, ou $RL = 3$.

Donc $LQ = RQ - RL$, d'où $LQ = 4 - 3$, ou $LQ = 1$. Or $PF = PL - FL$, ou $PF = \sqrt{3} - FL$.

Il faut donc déterminer la longueur de FL.

Au point M, on abaisse une perpendiculaire MX à RQ.



Les triangles MXQ et PLQ sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont un angle commun, soit l'angle Q. Puisque $MQ = \frac{1}{2}PQ$, alors les côtés du triangle MXQ ont la moitié de la longueur des côtés correspondants du triangle PLQ.

Donc $QX = \frac{1}{2}QL$, d'où $QX = \frac{1}{2}(1)$, ou $QX = \frac{1}{2}$. De plus, $MX = \frac{1}{2}PL$, d'où $MX = \frac{1}{2}(\sqrt{3})$, ou $MX = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Puisque $QX = \frac{1}{2}$, alors $RX = RQ - QX$, d'où $RX = 4 - \frac{1}{2}$, ou $RX = \frac{7}{2}$.

Les triangles RLF et RXM sont semblables (ils sont rectangles et ont un angle commun, soit l'angle R).

Donc $\dfrac{FL}{MX} = \dfrac{RL}{RX}$, c'est-à-dire que $FL = \dfrac{(MX)(RL)}{RX}$, d'où $FL = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}(3)}{\frac{7}{2}}$, ou $FL = \frac{3\sqrt{3}}{7}$.

Donc $PF = \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{7}$, ou $PF = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

Réponse : (C)

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Pascal 2007

(9^e année ou Secondaire III)

le mardi 20 février 2007

Solutions

1. On a : $3 \times (7 - 5) - 5 = 3 \times 2 - 5 = 6 - 5 = 1$

Réponse : (B)

2. Puisque x est inférieur à -1 et supérieur à -2, alors parmi les choix, $-1{,}3$ représente le mieux la valeur de x.

Réponse : (B)

3. Le carré ombré a des côtés de longueur 1. Son aire est donc égale à 1^2, soit 1.
Le grand rectangle mesure 3 sur 5. Son aire est donc égale à 3×5, soit 15.
L'aire du carré ombré est donc $\frac{1}{15}$ de l'aire du grand rectangle.

Réponse : (A)

4. On a : $2^5 - 5^2 = 32 - 25 = 7$

Réponse : (E)

5. En 3 heures, Léone gagne 24,75 \$. En une heure, elle gagne donc $24{,}75$ \$ $\div\, 3$, soit 8,25 \$.
Pendant un quart de 5 heures, Léone gagne donc $5 \times 8{,}25$ \$, soit 41,25 \$.

Réponse : (E)

6. On a : $\dfrac{\sqrt{64} + \sqrt{36}}{\sqrt{64 + 36}} = \dfrac{8 + 6}{\sqrt{100}} = \dfrac{14}{10} = \dfrac{7}{5}$

Réponse : (A)

7. *Solution 1*
En tout, Mégane et Daniel ont reçu 1 010 000 \$.
Puisque chacun donne 10 %, alors en tout, ils ont donné 10 % de 1 010 000 \$, soit 101 000 \$.

Solution 2
Mégane donne 10 % de 1 000 000 \$, soit 100 000 \$.
Daniel donne 10 % de 10 000 \$, soit 1000 \$.
En tout, ils ont donné 100 000 \$ + 1000 \$, soit 101 000 \$.

Réponse : (A)

8. On considère la base BC du triangle ABC. Elle a une longueur de 12.
Puisque le point A a une ordonnée de 9, la hauteur correspondante du triangle est égale à 9.
L'aire du triangle ABC est donc égale à $\frac{1}{2}(12)(9)$, soit 54.

Réponse : (B)

9. On soustrait au moyen d'un dénominateur commun pour obtenir $\frac{5}{8} - \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$.
Puisque $\frac{9}{16}$ est supérieur à $\frac{7}{16}$ et à $\frac{1}{2}$, qui est égal à $\frac{8}{16}$, alors (E) et (D) sont faux.
Puisque $\frac{9}{16}$ est inférieur à $\frac{3}{4}$, qui est égal à $\frac{12}{16}$, alors (A) est faux.
Or $\frac{9}{16} = 0{,}5625$.
Puisque $\frac{3}{5} = 0{,}6$, alors (B) est faux. Puisque $\frac{5}{9} = 0{,}\overline{5}$, alors $\frac{9}{16} > \frac{5}{9}$. Donc, le bon choix est (C).

Réponse : (C)

10. Puisque $M = 2007 \div 3$, alors $M = 669$.
Puisque $N = M \div 3$, alors $N = 669 \div 3$, ou $N = 223$.
Puisque $X = M - N$, alors $X = 669 - 223$, ou $X = 446$.

Réponse : (E)

11. La moyenne de 6, de 9 et de 18 est égale à $\frac{6+9+18}{3}$, soit $\frac{33}{3}$, ou 11.
Donc, la moyenne de 12 et de y est égale à 11. La somme de 12 et de y est donc égale à 2(11), soit 22. Donc $y = 10$.

Réponse : (C)

12. Dans le triangle PQR, on a $\angle RPQ = \angle PQR = 48^\circ$, puisque $PR = RQ$.
Puisque les angles MPN et RPQ sont opposés par le sommet, alors $\angle MPN = \angle RPQ = 48^\circ$.
Dans le triangle PMN, $PM = PN$. Donc $\angle PMN = \angle PNM$.
Donc $\angle PMN = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MPN)$, d'où $\angle MPN = \frac{1}{2}(180^\circ - 48^\circ)$, ou $\angle MPN = 66^\circ$.

Réponse : (D)

13. Les nombres premiers inférieurs à 10 sont 2, 3, 5 et 7.
Parmi eux, les deux nombres différents qui ont une somme de 10 sont 3 et 7.
Le produit de 3 et de 7 est égal à 21.

Réponse : (B)

14. Puisque 21 garçons participent et que le rapport du nombre de garçons qui participent au nombre de filles qui participent est de 3 : 7, alors le nombre de filles qui participent est égal à $\frac{7}{3} \times 21$, soit 49. (On peut aussi penser que le rapport indique que 3 groupes de 7 garçons ont participé. Donc, 7 groupes de 7 filles ont participé.)
Le nombre total d'élèves qui ont participé est égal à $49 + 21$, soit 70.

Réponse : (D)

15. *Solution 1*
Le nombre de blocs dans la 1^{re} structure est égal à $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, soit 15.
Le nombre de blocs dans la 2^{e} structure est égal à $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, soit 21.
Clara a donc 36 blocs en tout.
On commence à construire la nouvelle structure à partir du haut.
Puisqu'il y a plus de 21 blocs, la structure aura au moins 6 étages.
Pour 7 étages, il faut $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ blocs, soit 28 blocs.
Pour 8 étages, il faut $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ blocs, soit 36 blocs.
Clara peut donc construire une structure de 8 étages et il ne lui restera aucun bloc inutilisé.

Solution 2
Puisque la nouvelle structure sera plus grande que la 2^{e} structure, on considère ajouter des étages au bas de celle-ci en prenant les blocs de la 1^{re} structure.
Le nombre de blocs dans la 1^{re} structure est égal à $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, soit 15.
Or, les deux premièrs étages qu'on ajouterait au bas de la 2^{e} structure contiendraient 7 et 8 blocs, respectivement, pour un total de 15 blocs.
On a donc une structure semblable, mais plus grande, et il ne reste aucun bloc non utilisé.

Réponse : (A)

16. *Solution 1*

Dans la 2e ligne, on a $10 + 16 + 22 = 48$. Donc, la somme des nombres de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est égale à 48.
Dans la 1re ligne, on a $P + 4 + Q = 48$, d'où $P + Q = 44$.
Dans la 3re ligne, on a $R + 28 + S = 48$, d'où $R + S = 20$.
Donc $P + Q + R + S = 44 + 20$, c'est-à-dire que $P + Q + R + S = 64$.

Solution 2

Dans la 2e ligne, on a $10 + 16 + 22 = 48$. Donc, la somme des nombres de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est égale à 48.
Dans la 1re ligne, on a $P + 4 + Q = 48$, d'où $P + Q = 44$.
Dans la 1re colonne, on a $P + 10 + R = 48$, d'où $P + R = 38$.
On soustrait ces deux équations, membre par membre, pour obtenir $(P+Q)-(P+R) = 44-38$, d'où $Q - R = 6$.
Dans une des diagonales, on a $R + 16 + Q = 48$, d'où $Q + R = 32$.
On additionne ces deux dernières équations, membre par membre, pour onbtenir $2Q = 38$, ou $Q = 19$. Puisque $R = 32 - Q$, alors $R = 13$.
Puisque $P = 44 - Q$, alors $P = 25$.
Dans la 3e ligne, on a $13 + 28 + S = 48$, d'où $S = 7$.
Donc $P + Q + R + S = 25 + 19 + 13 + 7$, ou $P + Q + R + S = 64$.

Solution 3

La somme de tous les nombres du tableau est égale à $P + Q + R + S + 10 + 16 + 22 + 28 + 4$, c'est-à-dire à $P + Q + R + S + 80$. Or, dans la 2e colonne, on a $4 + 16 + 28 = 48$. Donc, la somme des nombres de chaque colonne est égale à 48.
Donc, la somme des neuf nombres du tableau est égale à 3(48), ou 144.
Donc $P + Q + R + S + 80 = 144$, d'où $P + Q + R + S = 64$.

Réponse : (C)

17. À l'heure actuelle, la somme de l'âge de Norma et du nombre d'années qu'elle a travaillé est égale à $50 + 19$, soit 69.
Cette somme doit augmenter de $85 - 69$, ou 16, avant qu'elle puisse prendre sa retraite.
Chaque année, cette somme augmente de 2. En effet, son âge augmente de 1 et le nombre d'années qu'elle a travaillé augmente de 1.
Donc, dans 8 ans la somme passera de 69 à 85. Elle aura 58 ans $(50 + 8)$ lorsqu'elle pourra prendre sa retraite.

Réponse : (C)

18. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PQR, $PQ^2 = PR^2-QR^2$, d'où $PQ^2 = 13^2-5^2$, ou $PQ^2 = 144$. Donc $PQ = 12$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PQS, $QS^2 = PS^2-PQ^2$, d'où $QS^2 = 37^2-12^2$, ou $QS^2 = 1225$. Donc $QS = 35$.
Le triangle PQS a donc un périmètre de $12 + 35 + 37$, soit 84.

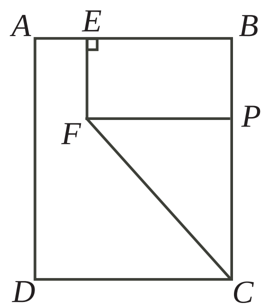
Réponse : (D)

19. Puisque l'inverse de $\frac{3}{10}$ est égal à $\left(\frac{1}{x}+1\right)$, alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+1 &= \frac{10}{3}\\ \frac{1}{x} &= \frac{7}{3}\\ x &= \frac{3}{7}\end{aligned}$$

Réponse : (C)

20. Au point F, on abaisse une perpendiculaire FP au côté BC.



Puisque EB est parallèle à FP et que $\angle FEB = 90^\circ$, alors $EBPF$ est un rectangle.
Puisque $EB = 40$, alors $FP = 40$; puisque $EF = 30$, alors $BP = 30$.
Puisque $AD = 80$, alors $BC = 80$. Donc $PC = 80 - 30$, d'où $PC = 50$.
L'aire du quadrilatère $EBCF$ est égale à la somme de l'aire du rectangle $EBPF$ (qui est égale à 30×40, soit 1200) et de l'aire du triangle FPC (qui est égale à $\frac{1}{2}(40)(50)$, soit 1000). L'aire du quadrilatère $EBCF$ est donc égale à 2200.
Puisque les régions $AEFCD$ et $EBCF$ ont la même aire, chacune a une aire de 2200. Le rectangle $ABCD$ a donc une aire de 4400.
Puisque $AD = 80$, alors $AB = 4400 \div 80$, ou $AB = 55$.
Donc $AE = AB - EB$, d'où $AE = 55 - 40$, ou $AE = 15$.

Réponse : (D)

21. On considère d'abord les possibilités pour chaque entier :
- Les nombres premiers de deux chiffres sont 11, 13, 17 et 19. Le seul dont la somme des chiffres est un nombre premier est 11. Donc $P = 11$.
- Puisque Q est un multiple de 5, de 2 à 19, les valeurs possibles de Q sont 5, 10 et 15.
- Les nombres impairs, de 2 à 19, qui ne sont pas des nombres premiers sont 9 et 15. Donc, les valeurs possibles de R sont 9 et 15.
- Les carrés de 2 à 19 sont 4, 9 et 16. Or, seuls 4 et 9 sont des carrés de nombres premiers. Donc, les valeurs possibles de S sont 4 et 9.
- Puisque $P = 11$, que les valeurs possibles de Q sont 5, 10 et 15, et que T est égal à la moyenne de P et de Q, alors T peut être égal à 8, à 10,5 ou à 13. Puisque T est un nombre premier, alors T doit être égal à 13. Donc $Q = 15$.

On sait donc que $P = 11$, $Q = 15$ et $T = 13$.
Puisque les cinq entiers sont différents, R ne peut être égal à 15. Donc $R = 9$.
Puisque $R = 9$, S ne peut être égal à 9. Donc $S = 4$.
Donc, le plus grand des nombres est Q, qui est égal à 15.

Réponse : (B)

22. Selon le théorème de Pythagore, $PR = \sqrt{QR^2 + PQ^2}$, d'où $PR = \sqrt{15^2 + 8^2}$, ou $PR = 17$ km.
Artus a couru une distance totale de $(8 + 15 + 7)$ km, soit 30 km, à une vitesse de 21 km/h. En même temps, Florence a couru une distance totale de $(17 + 7)$ km, soit 24 km.
Puisque $\frac{30}{24} = \frac{5}{4}$, la vitesse d'Artus est égale à $\frac{5}{4}$ de la vitesse de Florence. La vitesse de Florence est donc égale à $\frac{4}{5} \times 21$ km/h, soit $\frac{84}{5}$ km/h.

Artus parcourt les derniers 7 km en $\frac{7}{21}$ heure, soit $\frac{1}{3}$ heure, ou 20 minutes.
Florence parcourt les derniers 7 km en $\dfrac{7}{\frac{84}{5}}$ heure, c'est-à-dire en $\frac{35}{84}$ heure, soit $\frac{5}{12}$ heure, ou 25 minutes.
Puisque Artus et Florence sont arrivés au point S en même temps, alors Florence est arrivée au point R 5 minutes avant Artus.

Réponse : (E)

23. Le grand cercle a une aire de $\pi(2)^2$, soit 4π.
Donc, l'aire totale des régions ombrées est égale à $\frac{5}{12}(4\pi)$, soit $\frac{5}{3}\pi$.

Soit $\angle ADC = x^\circ$.
L'aire de la partie non ombrée du petit cercle est donc égale à $\dfrac{x}{360}$ de l'aire de ce cercle, soit $\dfrac{x}{360}(\pi(1)^2)$, ou $\dfrac{x}{360}\pi$ (puisque $\angle ADC$ est égal à $\dfrac{x}{360}$ de l'angle plein mesuré au centre du cercle).
L'aire de la partie ombrée du petit cercle est égale à $\pi - \dfrac{x}{360}\pi$, soit $\dfrac{360 - x}{360}\pi$.

L'aire de l'anneau entre les cercles est égale à la différence de l'aire des cercles, soit $\pi(2)^2 - \pi(1)^2$, ou 3π.
L'aire de la partie ombrée de l'anneau est égale à $\dfrac{x}{360}$ de cette aire, puisque $\angle ADC$ est égal à $\dfrac{x}{360}$ de l'angle plein mesuré au centre du cercle.
L'aire de la partie ombrée de l'anneau est donc égale à $\dfrac{x}{360}(3\pi)$, soit $\dfrac{3x}{360}\pi$.

L'aire totale des régions ombrées est donc égale à $\dfrac{3x}{360}\pi + \dfrac{360 - x}{360}\pi$, ou $\dfrac{360 + 2x}{360}\pi$.
Puisqu'elle est égale à $\dfrac{5}{3}\pi$, alors $\dfrac{360 + 2x}{360} = \dfrac{5}{3}$, ou $\dfrac{360 + 2x}{360} = \dfrac{600}{360}$, d'où $360 + 2x = 600$, ou $x = 120$.
Donc $\angle ADC = 120^\circ$.

Réponse : (B)

24. On remplit d'abord plusieurs cases pour mieux saisir la régularité :

17	16	15	14	13	
18	5	4	3	12	
19	6	1	2	11	
20	7	8	9	10	
21	22	23	24	25	26

On remarque que les carrés parfaits impairs sont placés en diagonale, à partir du 1, en descendant vers la droite. En effet, on voit que lorsqu'on place les nombres 1, 9, 25, ..., on remplit la dernière

case d'un carré. (On peut mieux le voir si on cache les nombres plus grands.)
Le premier carré parfait impair supérieur à 2007 est 45^2, soit 2025.
Le nombre 2007 sera situé à 18 cases à la gauche du nombre 2025. (En effet, la ligne de la spirale qui contient 2025 est suffisamment longue pour permettre de reculer de 18 cases dans cette ligne.)
Le carré parfait impair qui précède 2025 est le nombre 43^2, soit 1849. Donc, le nombre 1850 sera placé directement au-dessus du nombre 2025, puisque la ligne qui contient le nombre 1949 continuera d'une case vers la droite avant que la spirale ne monte.
Puisque 1850 est directement au-dessus de 2025, alors 1832 est directement au-dessus de 2007.
Le carré parfait impair qui suit 2025 est 47^2, soit 2209. Donc, le nombre 2208 sera placé directement au-dessous de 2025, puisque 2209 est placé une position à la droite et une position au-dessous 2025.
Puisque 2208 est directement au-dessous de 2025, alors 2190 est directement au-dessous de 2007.
Donc, le nombre qui paraît directement au-dessus de 2007 et le nombre qui paraît directement au-dessous de 2007 ont une somme de $1832 + 2190$, soit 4022.

Réponse : (E)

25. Pour que les chiffres de x et de $3x$ soient pairs, x doit avoir une des formes suivantes. (Dans cette liste, a, b et c représentent des chiffres qui ne peuvent être que 0, 2 ou 8 ; n est un chiffre qui ne peut être que 2 ou 8.)
- $nabc$ ($2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$ possibilités)
- $na68$ ($2 \times 3 = 6$ possibilités)
- $n68a$ ($2 \times 3 = 6$ possibilités)
- $68ab$ ($3 \times 3 = 9$ possibilités)
- $n668$ (2 possibilités)
- $668a$ (3 possibilités)
- 6668 (1 possibilité)
- 6868 (1 possibilité)

En tout, il y a 82 valeurs possibles de x.

Ces formes sont les seules formes possibles, car lorsqu'on multiplie par 3 les chiffres 0, 2 et 8 de x, on obtient des chiffres pairs et des retenues paires. Il est possible d'utiliser un chiffre 6, pourvu qu'il soit suivi de 8, de 68 ou de 668 de manière à donner une retenue de 2.

Voici une explication plus précise.
On remarque que $3 \times 0 = 0$, $3 \times 2 = 6$, $3 \times 4 = 12$, $3 \times 6 = 18$ et $3 \times 8 = 24$.
Donc, chaque chiffre pair de x produit un chiffre pair dans la position correspondante de $3x$, mais il peut produire dans le nombre $3x$ un chiffre impair dans la position suivante, sur la gauche, à cause d'une retenue impaire.
On remarque qu'un chiffre 0 ou 2, dans x, ne produit aucune retenue, tandis qu'un chiffre 8, dans x, produit une retenue paire. Donc, aucun de ces chiffres, dans x, ne peut produire un chiffre impair dans $3x$. (On remarque qu'aucune retenue ne peut être supérieure à 2. Il est donc impossible pour un chiffre 0 ou 2 de x de produire une retenue de 1, ou pour un chiffre 8 de x de produire une retenue de 3, même lors de retenues consécutives.)
Donc, un chiffre 2 ou 8 peut paraître dans n'importe quelle position de x et un chiffre 0 peut paraître dans n'importe quelle position de x, sauf la première.

Le chiffre 4 ne peut jamais paraître dans x, puisqu'il produit une retenue de 1 et produira alors un chiffre impair dans $3x$.

Le chiffre 6 peut paraître dans x, à condition que la retenue de la multiplication du chiffre précédent ait produit une retenue de 2. (On a vu que la retenue ne peut être supérieure à 2.) On a alors $3 \times 6 + \text{Retenue} = 20$, ce qui produit une retenue de 2 et ce qui ne change pas la parité du chiffre suivant.
Il peut y avoir une retenue de 2 si le chiffre qui suit le 6 est un 8 ou si le chiffre qui précède le 6 est un 6 qui est précédé par 8 ou par 68.

Si on traite de toutes ces conditions sur les chiffres 0, 2, 6 et 8, on obtient la liste des formes possibles de x, ci-haut, ainsi que les 82 valeurs possibles de x.

Réponse : (A)

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Pascal 2006

(9^{e} année ou Secondaire III)

le mercredi 22 février 2006

Solutions

1. On calcule d'abord le numérateur et le dénominateur : $\dfrac{550+50}{5^2+5} = \dfrac{600}{25+5} = \dfrac{600}{30} = 20$

Réponse : (E)

2. On simplifie d'abord les expressions dans chaque racine carrée :
$\sqrt{36+64} - \sqrt{25-16} = \sqrt{100} - \sqrt{9} = 10 - 3 = 7$

Réponse : (B)

3. Les diviseurs positifs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18. Il y en a six.

Réponse : (D)

4. L'expression $B - 3 + A$ est égale à $(A + B) - 3$. Elle est égale à $5 - 3$, puisque $A + B = 5$. L'expression est donc égale à 2.

Réponse : (A)

5. La base du prisme a une aire de 2×4, ou 8. Le prisme a donc un volume de 8×8, ou 64. Si chaque arête du cube a une longueur de s, alors le volume du cube est égal à s^3. Donc $s^3 = 64$, d'où $s = 4$. Chaque arête du cube a une longueur de 4.

Réponse : (B)

6. Puisque Ravi a mangé $\frac{2}{5}$ de la pizza et que Helena a mangé la moitié de la quantité que Ravi a mangée, Helena a mangé la moitié de $\frac{2}{5}$ de la pizza, soit $\frac{1}{5}$ de la pizza.
Il reste donc $1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{5}$ de la pizza, c'est-à-dire $\frac{2}{5}$ de la pizza.
Or, la fraction $\frac{2}{5}$ équivaut à 40 %. Il reste donc 40 % de la pizza complète.

Réponse : (C)

7. Puisque 1 triangle peut équilibrer 2 carrés, alors 2 triangles peuvent équilibrer 4 carrés.
Puisque 2 triangles peuvent aussi équilibrer 3 cercles, alors 3 cercles peuvent équilibrer 4 carrés.

Réponse : (E)

8. Puisque les carrés ont une aire respective de 16, 49 et 169, alors les côtés des carrés ont une longueur respective de 4, 7 et 13. En effet, $4^2 = 16$, $7^2 = 49$ et $13^2 = 169$.
Donc, la moyenne des longueurs de côté des trois carrés est égale à $\dfrac{4+7+13}{3}$, c'est-à-dire à 8.

Réponse : (A)

9. Puisque le rectangle a un périmètre de 24, il a un demi-périmètre de 12. Donc $l + 8 = 12$, d'où $l = 4$. Le rapport de la largeur à la longueur est donc égal à $4 : 8$, c'est-à-dire à $1 : 2$.

Réponse : (C)

10. *Solution 1*
La soustraction peut s'écrire sous forme $M4 - 3N = 16$, ou $M4 = 3N + 16$.
Pour que l'expression $3N + 16$ admette 4 comme chiffre des unités, il faut que N soit égal à 8.
Donc $M4 = 38 + 16$, c'est-dire que $M4 = 54$.
Donc, le chiffre M est un 5 et l'expression $M + N$ est égale à $5 + 8$, ou 13.

Solution 2
La soustraction peut s'écrire sous forme $M4 - 3N = 16$.
Pour que l'expression $M4 - 3N$ admette 6 comme chiffre des unités, il faut que N soit égal à 8.
Donc $M4 = 38 + 16$, c'est-dire que $M4 = 54$.
Donc, le chiffre M est un 5 et l'expression $M + N$ est égale à $5 + 8$, ou 13.

Réponse : (D)

11. On évalue chacun des choix de réponse en utilisant $x = 9$:

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \frac{9}{2} = 4\tfrac{1}{2} \qquad 9 - 5 = 4 \qquad \frac{40}{9} = 4\tfrac{4}{9} \qquad \frac{9^2}{20} = \frac{81}{20} = 4\tfrac{1}{20}$$

Puisque $\frac{1}{2}$ est supérieur à $\frac{4}{9}$ et à $\frac{1}{20}$, l'expression $\dfrac{x}{2}$ a la plus grande valeur.

Réponse : (B)

12. Puisque le triangle a un périmètre de 36, alors $7 + (x + 4) + (2x + 1) = 36$, ou $3x + 12 = 36$.
Donc $3x = 24$, ou $x = 8$.
L'expression $x + 4$ est égale à $8 + 4$, ou 12, et l'expression $2x + 1$ est égale à $2(8) + 1$, ou 17. Les côtés du triangle ont pour longueurs 7, 12 et 17. Le plus grand côté a donc une longueur de 17.

Réponse : (C)

13. *Solution 1*
Selon les renseignements donnés, $P + Q = 16$ et $P - Q = 4$.
On additionne ces équations, membre par membre, pour obtenir $P + Q + P - Q = 16 + 4$, d'où $2P = 20$, ou $P = 10$.

Solution 2
La valeur de P a été augmentée de Q pour donner 16 et elle a été diminuée de Q pour donner 4.
La différence de 12 entre ces deux réponses correspond donc à 2 fois la valeur de Q. Donc $Q = 6$.
Puisque $P + Q = 16$, on a $P + 6 = 16$, d'où $P = 10$.

Réponse : (D)

14. On utilise le dénominateur commun 12. L'équation devient $\dfrac{6}{12} + \dfrac{8}{12} + \dfrac{9}{12} + \dfrac{n}{12} = \dfrac{24}{12}$, ou
$\dfrac{23 + n}{12} = \dfrac{24}{12}$. Puisque les dénominateurs sont égaux, les numérateurs doivent être égaux.
Donc $23 + n = 24$, ou $n = 1$.

Réponse : (E)

15. *Solution 1*
Puisque Jules conduit de 19 h 45 à 21 h 30, il conduit pendant 1 heure et 45 minutes, c'est-à-dire $1\frac{3}{4}$ heure, ou $\frac{7}{4}$ heure.
Puisqu'il parcourt 84 km en $\frac{7}{4}$ heure à une vitesse constante, sa vitesse est égale à $\dfrac{84}{\frac{7}{4}}$ km/h, c'est-à-dire à $84 \times \frac{4}{7}$ km/h, ou 48 km/h.

Solution 2

Puisque Jules conduit de 19 h 45 à 21 h 30, il conduit pendant 1 heure et 45 minutes, ce qui correspond à 7 quarts d'heure. Il parcourt 84 km en 7 quarts d'heure, ou 12 km par quart d'heure. Il parcourt donc 4×12 km, ou 48 km, en une heure. Sa vitesse est donc égale à 48 km/h.

Réponse : (E)

16. On place les sommes possibles dans un tableau. Les nombres de la colonne de gauche représentent les résultats possibles du 1er dé, tandis que les nombres de la ligne du dessus repésentent ceux du 2^{e} dé. Par exemple, le nombre de la 4^{e} ligne, 5^{e} colonne est la somme du 4^{e} résultat du 1er dé et du 5^{e} résultat du 2^{e} dé, soit $3 + 5 = 8$.

	2	2	3	3	5	8
2	4	4	5	5	7	10
2	4	4	5	5	7	10
3	5	5	6	6	8	11
3	5	5	6	6	8	11
5	7	7	8	8	10	13
8	10	10	11	11	13	16

Les sommes possibles sont 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13 et 16. Il y en a neuf.
(On aurait pu raccourcir en omettant les répétitions de 2 et de 3. De plus, on aurait pu s'en tenir aux sommes sur la diagonale et au-dessus de celle-ci à cause de la symétrie des résultats.)

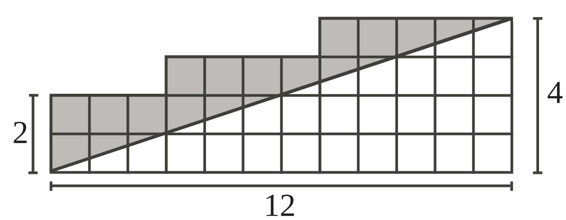
Réponse : (D)

17. Puisque le triangle ADE est isocèle, alors $\angle AED = \angle EAD = 70^\circ$.
Puisque la somme de la mesure des angles du triangle ADE est égale à 180°, alors $\angle ADE = 180^\circ - 2(70^\circ)$, c'est-à-dire que $\angle ADE = 40^\circ$.
Puisque $\angle DEC = 2(\angle ADE)$, alors $\angle DEC = 2(40^\circ)$, ou $\angle DEC = 80^\circ$.
Puisque AEB est un segment de droite, $\angle CEB = 180^\circ - 80^\circ - 70^\circ$, d'où $\angle CEB = 30^\circ$.
Puisque le triangle EBC est isocèle, alors $\angle ECB = \angle EBC$. Dans le triangle EBC, on a donc $30^\circ + 2(\angle EBC) = 180^\circ$, d'où $2(\angle EBC) = 150^\circ$, ou $\angle EBC = 75^\circ$.

Réponse : (A)

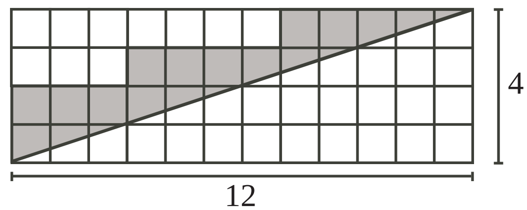
18. *Solution 1*

Le quadrillage a une aire de 38. (On peu compter les carrés un par un, ou diviser le quadrillage pour former un rectangle 3 sur 2, un rectangle 4 sur 3 et un rectangle 5 sur 4.)



L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du quadrillage moins l'aire du triangle non ombré. Ce triangle rectangle a une base de 12 et une hauteur de 4. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(12)(4)$, ou 24. L'aire de la région ombrée est égale à $38 - 24$, ou 14.

Solution 2
On ajoute des carrés non ombrés pour compléter un rectangle ayant une base de 12 et une hauteur de 4. Son aire est égale à 4(12), ou 48.



On a ajouté 10 carrés non ombrés dont l'aire totale est de 10. L'aire du triangle sous la diagonale est égale à la moitié de l'aire du rectangle, c'est-à-dire à la moitié de 48, ou 24.
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du rectangle moins l'aire de la région non ombrée, soit $48 - 24 - 10$, ou 14.

Réponse : (C)

19. *Solution 1*
Soit n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$, $n+7$, $n+8$ et $n+9$ les dix entiers consécutifs.
Donc $S = n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5)+(n+6)+(n+7)+(n+8)+(n+9)$, c'est-à-dire que $S = 10n + 45$, et $T = 10n$.
On a donc $S - T = (10n + 45) - 10n$, d'où $S - T = 45$.

Solution 2
Puisque la question et les choix de réponse indiquent que la réponse est la même, peu importe les entiers consécutifs choisis, on calcule la valeur de $S - T$ pour les entiers de 1 à 10.
On a $S = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$, d'où $S = 55$ et $T = 10(1)$, ou $T = 10$.
Donc $S - T = 45$.

Réponse : (A)

20. Soit y la largeur de chacun des rectangles identiques.
Puisque $PQ = 3y$, $RS = 2x$ et $PQ = RS$ (car $PQRS$ est un rectangle), alors $2x = 3y$, d'où $y = \frac{2}{3}x$.
Puisque l'aire du grand rectangle est égale à 4000, chacun des 5 petits rectangles a une aire de 800. Or, l'aire de chaque petit rectangle est égale à $x\left(\frac{2}{3}x\right)$, c'est-à-dire à $\frac{2}{3}x^2$.
Donc $\frac{2}{3}x^2 = 800$, d'où $2x^2 = 2400$, ou $x^2 = 1200$. Donc $x \approx 34,6$. Le choix de réponse le plus près est 35.

Réponse : (A)

21. *Solution 1*
D'après la 3e ligne du tableau, $(m+8)+(4+n) = 6$, ou $m+n+12 = 6$, d'où $m+n = -6$.
La somme des neuf nombres du tableau est égale à $m+4+m+4+8+n+8+n+m+8+4+n+6$.
Cette expression est égale à $3(m+n)+42$, c'est-à-dire à $3(-6)+42$, ou 24

Solution 2

D'après les choix de réponse, la somme ne dépend pas de la valeur des variables. Posons $m = 0$.

Le tableau devient $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 4 & 4 \\ \hline 8 & n & 8+n \\ \hline 8 & 4+n & 6 \\ \hline \end{array}$.

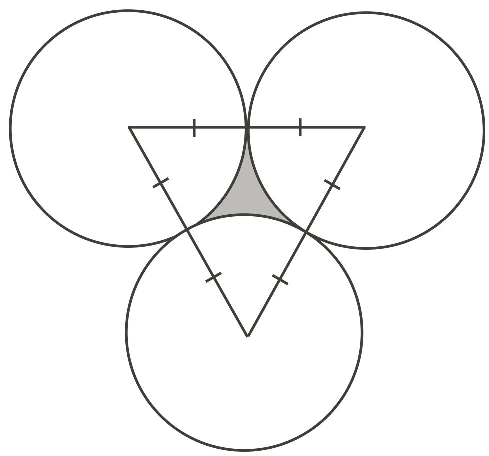
D'après la 3^e ligne du tableau, $8 + (4 + n) = 6$, ou $n + 12 = 6$, d'où $n = -6$.

Le tableau devient donc $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 4 & 4 \\ \hline 8 & -6 & 2 \\ \hline 8 & -2 & 6 \\ \hline \end{array}$.

La somme des neuf nombres du tableau est égale à $0+4+4+8+(-6)+2+8+(-2)+6$, ou 24.

Réponse : (E)

22. On joint le centre de chaque cercle aux deux autres centres.
Puisque chaque cercle touche les deux autres, chaque segment passe par un point de contact de deux cercles. Chaque segment a donc la même longueur que deux rayons. Les trois segments sont donc congrus.



Ils forment donc un triangle équilatéral dont chaque angle mesure $60°$.
Or, la région ombrée est limitée par trois arcs, chacun provenant d'un des cercles. Le périmètre de la région ombrée est donc égal à la somme des longueurs d'arcs. Chaque extrémité d'un arc est un point de contact de deux cercles.
D'après le triangle équilatéral, chaque arc a un angle de $60°$. Puisque $\dfrac{60°}{360°} = \dfrac{1}{6}$, chaque arc a une longueur égale à $\frac{1}{6}$ de la circonférence d'un cercle, c'est-à-dire à $\frac{1}{6}(36)$, ou 6.
Le périmètre de la région ombrée est donc égal à $3(6)$, ou 18.

Réponse : (A)

23. *Solution 1*
On considère qu'au départ, Anne a A disques et Benoît en a B.
Si Anne donne 6 disques à Benoît, elle a maintenant $A - 6$ disques et Benoît en a $B + 6$. D'après l'énoncé, on a $B + 6 = 2(A - 6)$.
Par contre, si Anne reçoit 6 disques de Benoît, elle a maintenant $A + 6$ disques et Benoît en a $B - 6$. D'après l'énoncé, on a $A + 6 = B - 6$.
D'après la 1^{re} équation, $B = 2A - 18$; d'après la 2^e équation, $B = A + 12$.
Donc $2A - 18 = A + 12$, d'où $A = 30$. Puisque $B = A + 12$, alors $B = 42$.
Anne et Benoît ont donc un total de $(30 + 42)$ disques, ou 72 disques.

Solution 2
On sait que si Anne reçoit 6 disques de Benoît, les deux auront le même nombre de disques. Benoît a donc 12 disques de plus qu'Anne.
Supposons que Anne a A disques au départ. Benoît en a donc $A + 12$.
Si Anne donne 6 disques à Benoît, elle a maintenant $A-6$ disques et Benoît en a $A+18$. D'après l'énoncé, on a $2(A - 6) = A + 18$, d'où $A = 30$. Anne a donc 30 disques et Benoît en a 12 de plus, soit 42.
Anne et Benoît ont donc un total de $(30 + 42)$ disques, ou 72 disques.

Réponse : (C)

24. *Solution 1*
Supposons que Igor enlève un nombre de billes du sac et que les billes qui restent dans le sac ne satisfont pas à la condition donnée. Quel est le nombre maximal de billes qui peuvent rester ?
Pour ne pas satisfaire à la condition donnée, ou bien il n'y a pas au moins quatre billes d'une couleur (et il y a alors au plus 9 billes dans le sac, soit 3 billes de chaque couleur) ou bien il y a au moins 4 billes d'une couleur et il n'y a pas 3 billes de chaque autre couleur.
Dans ce dernier cas, on pourrait avoir autant de billes que possible d'une couleur (soit 8 billes jaunes) et 2 billes de chaque autre couleur pour un total de 12 billes qui restent dans le sac.
Donc, si Igor enlève 8 billes ou plus, les boules qui restent dans le sac ne satisfont pas à la condition donnée.
Par contre, si Igor enlève 7 billes ou moins, les billes qui restent satisfont à la condition donnée.
La plus grande valeur possible de N est 7.

Solution 2
Puisqu'on cherche la plus grande valeur possible de N, on commence par le plus grand nombre parmi les choix de répones et on élimine les choix jusqu'à ce que l'on obtienne la bonne réponse.
Si Igor a enlevé 10 billes, il peut avoir enlevé 5 billes rouges et 5 billes noires, laissant 8 billes jaunes, 2 billes rouges et 0 bille noire dans le sac, ce qui ne satisfait pas à la condition donnée.
Donc, la réponse n'est pas 10.
Si Igor a enlevé 9 billes, il peut avoir enlevé 5 billes rouges et 4 billes noires, laissant 8 billes jaunes, 2 billes rouges et 1 bille noire dans le sac, ce qui ne satisfait pas à la condition donnée.
Donc, la réponse n'est pas 9.
Si Igor a enlevé 8 billes, il peut avoir enlevé 5 billes rouges et 3 billes noires, laissant 8 billes jaunes, 2 billes rouges et 2 billes noires dans le sac, ce qui ne satisfait pas à la condition donnée.
Donc, la réponse n'est pas 8.

La réponse est-elle 7 ?
Il y a 20 billes au départ. Si on en enlève 7, il en reste 13 dans le sac.
Puisqu'il reste 13 billes, il ne peut y en avoir 4 ou moins de chacune des trois couleurs (sinon il y aurait au plus 12 billes dans le sac). Il y a donc au moins 5 billes d'une couleur dans le sac.
Peut-il y avoir 2 billes ou moins de chacune des deux autres couleurs ? Si oui, il doit y avoir au moins 9 billes de la première couleur pour qu'il reste 13 billes dans le sac. Or, il y avait un maximum de 8 billes d'une même couleur au départ. Donc, il doit y avoir au moins 3 billes d'une des deux autres couleurs.
Donc, si on enlève 7 billes, il reste au moins 5 billes d'une couleur et 3 billes d'une autre couleur.
En choisissant $N = 7$, les billes qui restent dans le sac satisfont à la condition donnée.
La plus grande valeur possible de N est donc 7.

Réponse : (B)

25. On décrit les chiffres des deux nombres en partant de la gauche. Par exemple, « le 1^{er} chiffre » est le premier chiffre à gauche.

Si le 1^{er} chiffre de Jean est 1, alors le nombre de Judith commence par 112.
Si le 1^{er} chiffre de Jean est 2, alors le nombre de Judith commence par 111.
Dans les deux cas, le nombre de Judith commence par 1. Puisque les 2187 premiers chiffres de chaque nombre sont les mêmes, le nombre de Jean commence par 1.

Puisque le nombre de Jean commence par 1, celui de Judith commence par 112 et celui de Jean doit donc commencer par 112.
Puisque le nombre de Jean commence par 112, celui de Judith commence par 112112111 et celui de Jean doit donc commencer par 112112111.
À chaque fois qu'on répète l'argument, la longueur de la séquence est multipliée par 3.
On répète donc jusqu'à ce qu'on obtienne les 2187 (c.-à-d. les 3^7) chiffres du nombre de Jean.

On tient compte de certains renseignements dans un tableau. Dans la colonne *Étape*, on indique le nombre de fois que l'argument a été utilisé. On constate que si une séquence se termine par 1, la séquence suivante se termine par 2, puisque le 1 devient 112. De même, si une séquence se termine par 2, la séquence suivante se termine par 1, puisque le 2 devient 111. De plus, puisque chaque 1 devient 112 et que chaque 2 devient 111, le nombre de 2 d'une séquence est égal au nombre de 1 de la séquence précédente. De même, le nombre de 1 d'une séquence est égal à 2 fois le nombre de 1 de la séquence précédente plus 3 fois le nombre de 2 de la séquence précédente. (On aurait pu s'y prendre d'une autre façon et déterminer le nombre de 1 en soustrayant le nombre de 2 de la longueur de la séquence.)

Étape	Longueur	N^{bre} de 1	N^{bre} de 2	Se termine par
0	1	1	0	1
1	3	2	1	2
2	9	7	2	1
3	27	20	7	2
4	81	61	20	1
5	243	182	61	2
6	729	547	182	1
7	2187	1640	547	2

Comment peut-on obtenir cinq 1 consécutifs (c.-à-d. 11111) à l'étape 7 ?
Il ne peut jamais y avoir deux 2 consécutifs dans une séquence, car chaque 2 paraît à la fin d'un bloc de trois chiffres.
Donc, on ne peut pas obtenir 111111 à partir de deux 2 consécutifs dans la séquence précédente.
Donc, 11111 doit provenir de 21 dans la séquence précédente.
À l'étape 7, 11111 se produit à chaque fois que l'on trouve 21 à l'étape 6. Or, chaque 2 de l'étape 6 est suivi d'un 1 (puisque la séquence de l'étape 6 ne se termine pas par 2). Donc, 11111 se produit à l'étape 7 à chaque fois que l'on trouve un 2 à l'étape 6.
On retrouve donc 182 fois cinq 1 consécutifs dans les 2187 chiffres du nombre de Jean.

RÉPONSE : (A)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Pascal 2005

(9e année ou Secondaire III)

Le mercredi 23 février 2005

Solutions

1. On calcule d'abord le numérateur et le dénominateur : $\dfrac{200+10}{20+10} = \dfrac{210}{30} = 7$

Réponse : (E)

2. On simplifie les termes en paires : $6a - 5a + 4a - 3a + 2a - a = a + a + a = 3a$

Réponse : (A)

3. Lorsqu'on reporte $x = 3$ dans l'expression, celle-ci devient $3(2)(1)(0)(-1)$.
Puisque un des facteurs est égal à 0, le produit est égal à 0.

Réponse : (C)

4. Parmi les numéros de boules, soit 2, 3, 4, 5, 6 et 7, seuls 2, 3, 5 et 7 sont des nombres premiers. Puisque 4 des 6 numéros sont des nombres premiers, la probabilité de choisir un nombre premier est égale à $\frac{4}{6}$, c'est-à-dire à $\frac{2}{3}$.

Réponse : (D)

5. On calcule de l'intérieur vers l'extérieur : $\sqrt{36 \times \sqrt{16}} = \sqrt{36 \times 4} = \sqrt{144} = 12$

Réponse : (A)

6. Lorsqu'on enlève la moitié de l'eau du verre, la masse passe de 1000 g à 700 g.
Elle baisse donc de 300 g.
Si on vide le verre, c'est-à-dire si on enlève l'autre moitié de l'eau du verre, la masse du verre baissera encore de 300 g. Elle passera donc de 700 g à 400 g.
Le verre vide a donc une masse de 400 g.

Réponse : (D)

7. *Solution 1*
Puisque $\frac{1}{3}x = 12$, alors $x = 3 \times 12$, c'est-à-dire que $x = 36$.
Donc $\frac{1}{4}x = \frac{1}{4}(36)$, ou $\frac{1}{4}x = 9$.

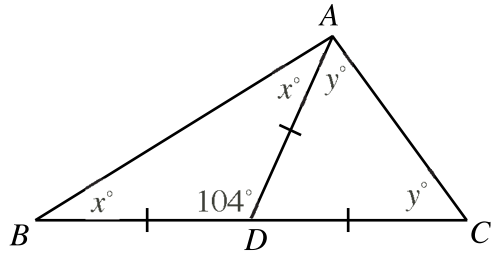
Solution 2
Puisque $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, alors $\frac{1}{4}x = \frac{3}{4} \times (\frac{1}{3}x)$. Donc $\frac{1}{4}x = \frac{3}{4}(12)$, ou $\frac{1}{4}x = 9$.

Réponse : (C)

8. On calcule le carré de chaque nombre : $(-5)^2 = 25$, $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$, $2^2 = 4$, $(\frac{3}{5})^2 = \frac{9}{25}$ et $8^2 = 64$.
On voit immédiatement que chacun des nombres -5, 2 et 8 est plus petit que son carré.
Puisque $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ et que $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, alors $\frac{3}{2}$ est aussi plus petit que son carré.
Or $\frac{3}{5} = \frac{15}{25}$, ce qui indique que $\frac{3}{5}$ est plus grand que son carré $\frac{9}{25}$.

Réponse : (D)

9. *Solution 1*
Puisque le triangle BDA est isocèle, $\angle BAD = \angle ABD = x^\circ$.
Puisque le triangle CDA est isocèle, $\angle CAD = \angle ACD = y^\circ$.

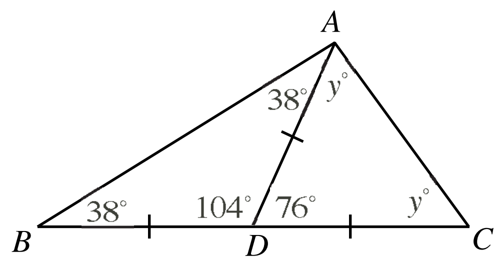


Donc $\angle BAC = (x+y)^\circ$.
Puisque la somme de la mesure des angles du triangle ABC est égale à 180°, alors :

$$\begin{aligned} x + y + (x+y) &= 180 \\ 2x + 2y &= 180 \\ x + y &= 90 \end{aligned}$$

Donc $x + y = 90$.

Solution 2
Puisque le triangle BDA est isocèle, $\angle BAD = \angle ABD = x^\circ$.
Puisque la somme de la mesure des angles du triangle ABD est égale à 180°, alors $x + x + 104 = 180$, c'est-à-dire que $2x + 104 = 180$, d'où $2x = 76$, ou $x = 38$.
Puisque les angles BDA et ADC sont supplémentaires, alors $\angle ADC = 180^\circ - 104^\circ$, ou $\angle ADC = 76^\circ$.
Puisque le triangle CDA est isocèle, $\angle CAD = \angle ACD = y^\circ$.



Puisque la somme de la mesure des angles du triangle CDA est égale à 180°, alors $y + y + 76 = 180$, c'est-à-dire que $2y + 76 = 180$, d'où $2y = 104$, ou $y = 52$.
Donc $x + y = 38 + 52$, ou $x + y = 90$.

Réponse : (D)

10. D'après la définition de la suite, le 3^e terme est égal à la moyenne des deux termes précédents, soit 8 et 32. Il est donc égal à $\frac{1}{2}(32+8)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(40)$, ou 20.
Le 4^e terme est égal à la moyenne du 2^e et du 3^e. Il est donc égal à $\frac{1}{2}(8+20)$, c'est-à-dire à 14.
Le 5^e terme est égal à la moyenne du 3^e et du 4^e. Il est donc égal à $\frac{1}{2}(20+14)$, c'est-à-dire à 17.
Donc $x = 17$.

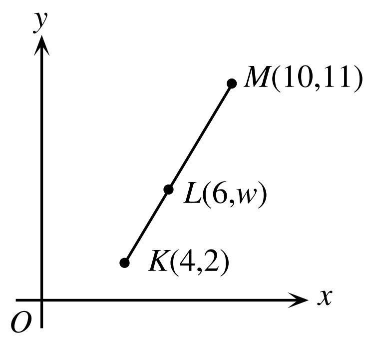
Réponse : (A)

11. Puisque a et b sont des entiers positifs, que $a \times b = 13$ et que 13 est un nombre premier, alors soit que $a = 13$ et $b = 1$, soit que $a = 1$ et $b = 13$.
Supposons que $b = 1$. Puisque $b \times c = 52$, il faut donc que $c = 52$. Il est alors impossible d'avoir $c \times a = 4$. Donc, b ne peut être égal à 1.
On a donc $b = 13$, $a = 1$ et $c = 4$ (cette dernière conclusion provient de $b = 13$ et de $b \times c = 52$,

ou encore de $a = 1$ et de $c \times a = 4$).
Donc $a \times b \times c = 1 \times 13 \times 4$, ou $a \times b \times c = 52$.

Réponse : (E)

12. *Solution 1*
Pour se rendre de K à M, on doit monter de 9 unités et aller de 6 unités vers la droite.



Puisque L est situé sur le segment KM et que pour se rendre de K à L, on doit aller de 2 unités vers la droite, c'est-à-dire de $\frac{1}{3} \times 6$ unités, il faut monter de $\frac{1}{3} \times 9$ unités, c'est-à-dire de 3 unités. Donc $w = 2 + 3$, ou $w = 5$.

Solution 2
La pente du segment KM est égale à $\dfrac{11-2}{10-4}$, c'est-à-dire à $\frac{9}{6}$, ou $\frac{3}{2}$.
Puisque L est situé sur le segment KM, la pente du segment KL est aussi égale à $\frac{3}{2}$.
Donc $\dfrac{w-2}{6-4} = \dfrac{3}{2}$, ou $\dfrac{w-2}{2} = \dfrac{3}{2}$, d'où $w - 2 = 3$, ou $w = 5$.

Réponse : (B)

13. *Solution 1*
Chaque cube-unité a trois faces exposées sur le grand cube et trois faces cachées.
Donc, lorsque le grand cube est peint, 3 des 6 faces de chaque cube-unité sont peintes (c'est-à-dire que $\frac{1}{2}$ de l'aire de chaque cube-unité est peinte). Donc, $\frac{1}{2}$ de l'aire totale des cubes-unités est peinte.

Solution 2
Le grand cube mesure 2 sur 2 sur 2. Donc, chacune de ses six faces mesure 2 sur 2. Son aire totale est donc égale à $6 \times 2 \times 2$ unités carrées, c'est-à-dire à 24 unités carrées, ce qui est l'aire totale de la surface peinte.
Chaque cube-unité a une aire de 6 unités carrées (puisque chacune de ses faces mesure 1 sur 1).
L'aire totale des 8 cubes-unités est donc égale à 8×6 unités carrées, c'est-à-dire à 48 unités carrées.
Or, 24 des 48 unités carrées sont peintes, ce qui correspond à la fraction $\frac{24}{48}$, ou $\frac{1}{2}$.

Réponse : (C)

14. Chaque entier, entre 2005 et 3000, est composé de quatre chiffres.
Puisqu'un palindrome se lit de gauche à droite ou de droite à gauche, chaque palindrome de quatre chiffres doit être de la forme $xyyx$, x et y étant des chiffres.
Un palindrome entre 2005 et 3000 doit avoir 2 pour premier chiffre. Il doit donc être de la forme $2yy2$. De plus, y peut prendre n'importe quelle valeur de 1 à 9.

Il y a donc 9 palindromes entre 2005 et 3000, soit 2112, 2222, 2332, 2442, 2552, 2662, 2772, 2882 et 2992.

Réponse : (C)

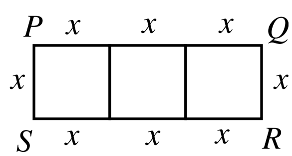
15. Lorsqu'on divise 14 par n, le reste est égal à 2. Donc, n doit être un diviseur de $14-2$, c'est-à-dire de 12.
Donc, n pourrait être égal à 1, 2, 3, 4, 6 ou 12.
Or, le reste doit être *inférieur* au diviseur. Donc, n ne peut être égal à 1 ou à 2.
n peut donc être égal à 3, 4, 6 ou 12. Il y a donc 4 valeurs possibles de n.

Réponse : (D)

16. Pour former le plus grand nombre possible en utilisant chacun des chiffres 1, 2, 5, 6 et 9 une fois chacun, le plus grand chiffre doit paraître en premier, le deuxième plus grand en deuxième position, et ainsi de suite. Le plus grand nombre possible est donc 96 521.
Le deuxième plus grand nombre est 96 512. En effet, tous les autres sont plus petits que 96 500. Donc, 96 512 est le plus grand nombre pair formé de ces chiffres.
On utilise une logique semblable, mais renversée, pour conclure que 12 569 est le plus petit nombre formé de ces chiffres. Le plus petit nombre pair formé de ces chiffres est 12 596. En effet, tous les autres nombres sont plus grands que 12 600.
La différence entre le plus grand et le plus petit est égale à $96\,512 - 12\,596$, c'est-à-dire à 83 916.

Réponse : (A)

17. Soit x la longueur des côtés des carrés en centimètres.



Le périmètre de $PQRS$ est égal à $8x$. Donc $8x = 120$, d'où $x = 15$.
Puisque $PQRS$ est formé de trois carrés ayant des côtés de 15 cm, son aire est égale à $3(15^2)$ cm^2, c'est-à-dire à $3(225)$ cm^2, ou 675 cm^2.

Réponse : (B)

18. D'abord, $2005^2 = 4020025$. Les deux derniers chiffres de 2005^2 sont donc 25.
On doit aussi examiner 2005^5. Puisqu'on veut connaître les deux derniers chiffres seulement, il n'est pas nécessaire de tout calculer.
On considère 2005^3, qui est égal à $2005^2 \times 2005$, c'est-à-dire à 4020025×2005. Lorsqu'on multiplie au long, seuls les deux derniers chiffres de chaque facteur participent à déterminer les deux derniers chiffres du produit (on peut l'essayer !). Les deux derniers chiffres de 2005^3 sont les mêmes que les deux derniers chiffres du produit de 25×5, qui est égal à 125. Les deux derniers chiffres sont 25.
De même, pour déterminer les deux derniers chiffres de 2005^4, on multiplie les deux derniers chiffres de 2005^3 par ceux de 2005. On multiplie donc 25 par 5. Les deux derniers chiffres de 2005^4 sont donc 25.
De même, les deux derniers chiffres de 2005^5 sont 25.
Or $2005^0 = 1$. La somme des deux derniers chiffres de la somme est égale à $\ldots 25 + 1 + 1 + \ldots 25$, c'est-à-dire à $\ldots 52$.

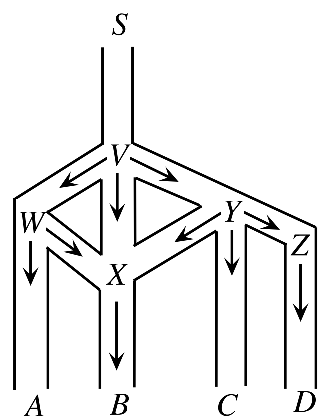
Les deux derniers chiffres sont 52.

Réponse : (A)

19. La façon la plus facile de procéder, c'est d'écrire les nombres, en ordre, en regardant d'abord le chiffre des centaines.
Le chiffre des centaines est 1 : Il n'y a aucun entier décroissant, car le chiffre des dizaines doit être 0 et il ne reste aucun chiffre pour le chiffre des unités.
Le chiffre des centaines est 2 : Il y a un seul nombre possible, soit 210.
Le chiffre des centaines est 3 : Le chiffre des dizaines peut être 2 ou 1, ce qui donne les nombres 321, 320 et 310.
Le chiffre des centaines est 4 : Le chiffre des dizaines peut être 3, 2 ou 1, ce qui donne les nombres 432, 431, 430, 421, 420 et 410.
Il y a 10 entiers décroissants entre 100 et 500.

Réponse : (B)

20. On nomme les bifurcations V, W, X, Y et Z.



D'après les flèches, on voit que pour se rendre à B, Henri doit d'abord se rendre à X (et de X, il doit continuer jusqu'à B). On calcule donc la probabilité pour qu'il se rende à X.
Pour se rendre à X, Henri peut aller de S à V à W à X, ou de S à V à Y à X, ou encore de S à V et directement à X.
À V, la probabilité pour qu'Henri emprunte n'importe quel des chemins (c'est-à-dire vers W, X ou Y) est égale à $\frac{1}{3}$.
Donc, la probabilité pour qu'Henri aille directement de V à X est égale à $\frac{1}{3}$.
À W, la probabilité pour qu'Henri tourne en direction de X est égale à $\frac{1}{2}$. La probabilité pour qu'il aille de V à W à X est égale à $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{6}$.
À Y, la probabilité pour qu'Henri aille vers X est égale à $\frac{1}{3}$. Donc, la probabilité pour qu'il aille de V à Y à X est égale à $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{9}$.
Donc, la probabilité pour qu'Henri aboutisse à X (et donc à B) est égale à $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}$, c'est-à-dire à $\frac{6+3+2}{18}$, ou $\frac{11}{18}$.

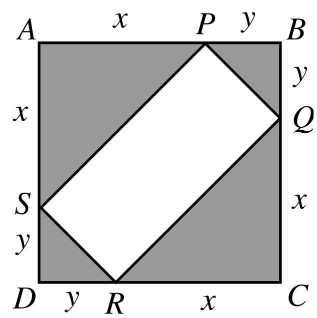
Réponse : (C)

21. On examine chacun des cinq choix de réponse.
Si $m : n = 9 : 1$, on pose $m = 9x$ et $n = x$. On a donc $9x + x = 300$, d'où $10x = 300$, ou $x = 30$. Donc $m = 9(30)$, d'où $m = 270$ et $n = 30$.
Si $m : n = 17 : 8$, on pose $m = 17x$ et $n = 8x$. On a donc $17x + 8x = 300$, d'où $25x = 300$, ou $x = 12$. Donc $m = 17(12)$ et $n = 8(12)$, d'où $m = 204$ et $n = 96$.

Si $m : n = 5 : 3$, on pose $m = 5x$ et $n = 3x$. On a donc $5x + 3x = 300$, d'où $8x = 300$, ou $x = \frac{75}{2}$.
Donc $m = 5(\frac{75}{2})$ et $n = 3(\frac{75}{2})$, d'où $m = \frac{375}{2}$ et $n = \frac{225}{2}$.
Si $m : n = 4 : 1$, on pose $m = 4x$ et $n = x$. On a donc $4x + x = 300$, d'où $5x = 300$, ou $x = 60$.
Donc $m = 4(60)$, d'où $m = 240$ et $n = 60$.
Si $m : n = 3 : 2$, on pose $m = 3x$ et $n = 2x$. On a donc $3x + 2x = 300$, d'où $5x = 300$, ou $x = 60$.
Donc $m = 3(60)$ et $n = 2(60)$, d'où $m = 180$ et $n = 120$.
La seule possibilité pour laquelle m et n sont des entiers supérieurs à 100 est $m : n = 3 : 2$.

Réponse : (E)

22. Soit $AS = x$ et $SD = y$.
Puisque les triangles SAP et SDR sont isocèles, alors $AP = x$ et $DR = y$.
Puisqu'il y a deux paires de triangles identiques, alors $BP = BQ = y$ et $CQ = CR = x$.



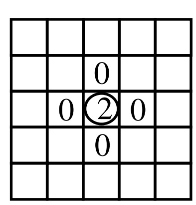
Le triangle SDR est rectangle (puisque $ABCD$ est un carré) et isocèle. Son aire (et celle du triangle BPQ) est égale à $\frac{1}{2}y^2$.
De même, l'aire du triangle SAP (et celle du triangle QCR) est égale à $\frac{1}{2}x^2$.
L'aire totale des quatre triangles est donc égale à $2(\frac{1}{2}x^2) + 2(\frac{1}{2}y^2)$, c'est-à-dire à $x^2 + y^2$.
Donc $x^2 + y^2 = 200$.
D'après le triangle de Pythagore dans le triangle PRS, puis dans les triangles SAP et SDR :

$$\begin{aligned} PR^2 &= PS^2 + SR^2 \\ &= (SA^2 + AP^2) + (SD^2 + DR^2) \\ &= 2x^2 + 2y^2 \\ &= 2(200) \\ &= 400 \end{aligned}$$

Donc $PR = 20$ m.

Réponse : (B)

23. En partant du centre, soit à 2, on peut se déplacer vers huit chiffres 0, soit quatre « 0 latéraux ».



et quatre « 0 de coins ».

	0		0	
		2		
	0		0	

À partir d'un 0 latéral, on peut se déplacer vers quatre chiffres 0, soit deux 0 latéraux et deux 0 de coin.

	0	0	0	
	0		0	

À partir d'un 0 de coin, on peut se déplacer vers deux chiffres 0, soit deux 0 latéraux.

	0	0		
	0			

À partir d'un 0 latéral, on peut se déplacer vers trois chiffres 5.

5				
5	0			
5				

À partir d'un 0 de coin, on peut se déplacer vers cinq chiffres 5.

5	5	5		
5	0			
5				

Les trois combinaisons possibles de deux 0 sont donc « latéral-latéral », « latéral-coin » et « coin-latéral ».
Le nombre de chemins qui correspondent à la combinaison « latéral-latéral » est égal à $4 \times 2 \times 3$, c'est-à-dire à 24, car au départ, il y a quatre 0 latéraux et pour *chacun*, on peut se rendre à deux 0 latéraux et pour *chacun* de ces 0 latéraux, on peut se rendre à trois 5.
Le nombre de chemins qui correspondent à la combinaison « latéral-coin » est égal à $4 \times 2 \times 5$, c'est-à-dire à 40.
Le nombre de chemins qui correspondent à la combinaison « coin-latéral » est égal à $4 \times 2 \times 3$, c'est-à-dire à 24.
En tout, on peut emprunter $24+40+24$ chemins, c'est-à-dire 88 chemins, pour former le nombre 2005.

Réponse : (E)

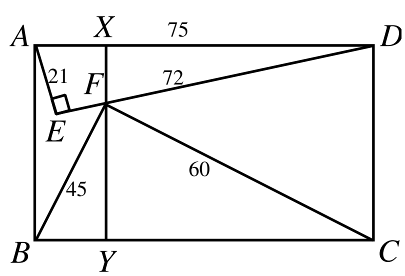
24. Puisque la suite est croissante, le 1000^e^ terme est supérieur ou égal à 1000.
On détermine d'abord le nombre de puissances parfaites parmi les nombres de 1 à 1000. (Ceci nous dira combien d'entiers, de 1 à 1000, ont été laissés de côté pour former la suite.)
Or, on ira même jusqu'à 1100, car le 1000^e^ terme sera plus grand que 1000.

Carrés parfaits : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089
Cubes parfaits : 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000
4^e^ puissances parfaites : 1, 16, 81, 256, 625
5^e^ puissances parfaites : 1, 32, 243, 1024
6^e^ puissances parfaites : 1, 64, 729
7^e^ puissances parfaites : 1, 128
8^e^ puissances parfaites : 1, 256
9^e^ puissances parfaites : 1, 512
10^e^ puissances parfaites : 1, 1024

Cette liste compte 41 puissances parfaites distinctes inférieures ou égales à 1000.
De 1 à 1000, il y a donc 959 entiers qui ne sont pas des puissances parfaites.
Donc, le 959^e^ terme de la suite est 999. (Si 1000 n'était pas une puissance parfaite, il serait le 959^e^ terme.)
Donc, le 960^e^ terme est 1001 et le 961^e^ terme est 1002. On continue de la sorte jusqu'à la prochaine puissance parfaite, soit 1024.
Les 982^e^ et 983^e^ termes sont donc 1023 et 1025.
On peut continuer de la sorte jusqu'au 1000^e^ terme, soit 1042, car la prochaine puissance parfaite est 1089.
La somme des carrés des chiffres de 1042 est égale à $1^2 + 0^2 + 4^2 + 2^2$, c'est-à-dire à 21.

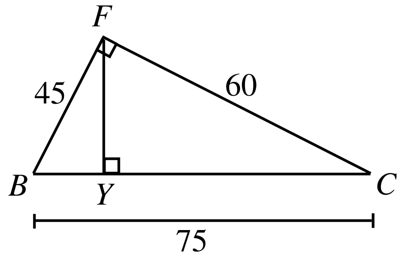
Réponse : (E)

25. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AED, $AD^2 = AE^2 + ED^2$.
Donc $AD^2 = 21^2 + 72^2$, d'où $AD^2 = 5625$ et $AD = 75$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, $BC = AD = 75$. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BFC, $FC^2 = BC^2 - BF^2$. Donc $FC^2 = 75^2 - 45^2$, d'où $FC^2 = 3600$ et $FC = 60$.
Au point F, on trace une droite parallèle à AB, qui coupe AD en X et BC en Y.
Pour déterminer la longueur AB, on déterminera les longueurs FY et FX.



1^re^ étape : Calcul de la longueur FY

Pour le faire, on calculera l'aire du triangle BFC de deux façons.
On sait que le triangle BFC est rectangle en F. Donc, BF est une base et FC est la hauteur correspondante. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}(BF)(FC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(45)(60)$, ou 1350.
De plus, FY est la hauteur qui correspond à la base BC du même triangle. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}(FY)(BC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(FY)(75)$.



Donc $\frac{1}{2}(FY)(75) = 1350$, d'où $FY = 36$.

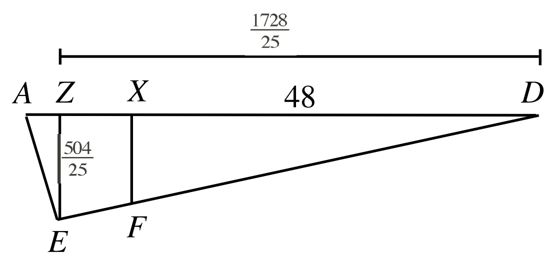
(On aurait pu prendre une autre approche en posant $FY = h$ et $BY = x$. On aurait alors $YC = 75 - x$. En utilisant ensuite le théorème de Pythagore dans les deux petits triangles, on aurait obtenu deux équations à deux inconnues.)

Puisque $FY = 36$, alors d'après le théorème de Pythagore dans le triangle BFY, $BY^2 = BF^2 - FY^2$. Donc $BY^2 = 45^2 - 36^2$, d'où $BY^2 = 729$ et $BY = 27$.
Donc $YC = BC - BY$, ou $YC = 48$.

2^e^ étape : Calcul de la longueur FX

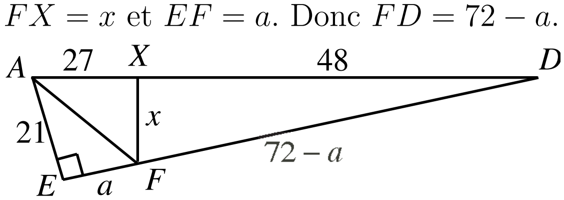
1^re^ méthode – Triangles semblables
Puisque les triangles AED et FXD sont rectangles et qu'ils partagent un angle, soit l'angle D, ils sont semblables.
Puisque $YC = 48$, alors $XD = 48$.
Puisque les triangles AED et FXD sont semblables, alors $\dfrac{FX}{XD} = \dfrac{AE}{ED}$, c'est-à-dire que $\dfrac{FX}{48} = \dfrac{21}{72}$, d'où $FX = 14$.

2^e^ méthode – Imitation de l'étape 1
Au point E, on abaisse une perpendiculaire EZ au côté AD.



On utilise le même argument que dans la 1^re^ étape pour montrer que $EZ = \frac{504}{25}$ et que $ZD = \frac{1728}{25}$.
Puisque les points D, F et E sont alignés, alors le rapport $FX : EZ$ est égal au rapport $DX : DZ$, c'est-à-dire que $\dfrac{FX}{\frac{504}{25}} = \dfrac{48}{\frac{1728}{25}}$, ou $\dfrac{FX}{504} = \dfrac{48}{1728}$, d'où $FX = 14$.

3^e^ méthode – Aires
On joint A et F. Soit $FX = x$ et $EF = a$. Donc $FD = 72 - a$.



Puisque $AE = 21$ et $ED = 72$, alors l'aire du triangle AED est égale à $\frac{1}{2}(21)(72)$, c'est-à-dire à 756.

Or, l'aire du triangle AED est égale à la somme de l'aire des triangles AEF et AFD. Donc :

$$756 = \frac{1}{2}(21)(a) + \frac{1}{2}(75)(x),$$

d'où $21a + 75x = 1512$, ou $a + \frac{25}{7}x = 72$.
Or, dans le triangle FXD, on a $FX = x$, $GD = 48$ et $FD = 72 - a$.
D'après le théorème de Pythagore, $x^2 + 48^2 = (72 - a)^2$, d'où $x^2 + 48^2 = (\frac{25}{7}x)^2$, ou $x^2 + 48^2 = \frac{625}{49}x^2$.
On a donc $48^2 = \frac{576}{49}x^2$, d'où $x = 14$.

Puisque $AB = XY = FX + FY$, alors $AB = 36 + 14$, ou $AB = 50$.

Réponse : (A)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo,

2004 Solutions
Concours Pascal (9e – année)

(Secondaire III au Québec)

pour les prix du

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

2004 Solutions Concours Pascal

1. D'après la priorité des opérations :

$$\begin{aligned}&5\times(10-6)\div 2\\ &=5\times 4\div 2\\ &=10\end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

2. *Solution 1*

Puisque la moyenne de 2, x et 12 est égale à 8, alors $\frac{2+x+12}{3}=8$, d'où $x+14=24$ et $x=10$.

Solution 2

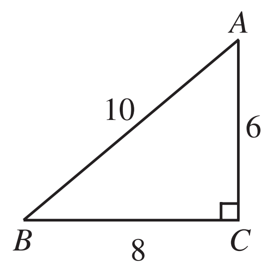
Puisque la moyenne des trois nombres est égale à 8, leur somme doit être égale à 24. Puisque la somme de 2, x et 12 est égale à 24, alors x est égal à 10.

RÉPONSE : (E)

3. Le plus petit dénominateur des trois fractions est le plus petit commun multiple des trois dénominateurs. Le plus petit commun multiple de 9, 4 et 18 est 36.

RÉPONSE : (D)

4. Puisque le triangle est rectangle, alors $AC^2+BC^2=AB^2$ selon le théorème de Pythagore. Donc $AC^2+8^2=10^2$, d'où $AC^2=36$ et $AC=6$. L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(BC)(AC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(8)(6)$ ou 24.



RÉPONSE : (E)

5. On calcule :

$\frac{5-\sqrt{4}}{5+\sqrt{4}}$ est égal à $\frac{5-2}{5+2}$ ou $\frac{3}{7}$.

RÉPONSE : (A)

6. On calcule :

$4^1+3^2-2^3+1^4$ est égal à $4+9-8+1$ ou 6.

RÉPONSE : (C)

7. On reporte $x=-3$ dans l'expression $3x^2+2x$ pour obtenir $3(-3)^2+2(-3)$, c'est-à-dire $3(9)-6$ ou 21.

RÉPONSE : (D)

8. *Solution 1*

Puisque 18 % de 42 est égal à 27 % de x, alors :

$$\frac{18}{100}(42) = \frac{27}{100}x$$
$$18(42) = 27x$$
$$x = 28$$

Solution 2

Puisque 18 % est égal à deux tiers de 27 % et que 18 % de 42 est égal à 27 % de x, alors x doit être égal à deux tiers de 42. Donc x est égal à 28.

RÉPONSE : (A)

9. Un cube a six faces, chacune étant un carré.

Puisque l'aire de la surface du cube est égale à 96 cm^2, alors chaque face a une aire de 16 cm^2.

Chaque arête du cube doit donc mesurer 4 cm.

Le volume du cube est donc égal à 4^3 cm^3 ou 64 cm^3.

RÉPONSE : (B)

10. *Solution 1*

Puisque $y = 3x - 5$ et $z = 3x + 3$, alors $z - y = (3x + 3) - (3x - 5)$, c'est-à-dire que $z - y = 8$.

z est donc 8 de plus que y. Puisque $y = 1$, alors $z = 9$.

Solution 2

Puisque $y = 3x - 5$ et $y = 1$, alors $3x - 5 = 1$, d'où $x = 2$.

Puisque $x = 2$, alors $z = 3(2) + 3$ ou $z = 9$.

RÉPONSE : (E)

11. Le carré a une aire de 16 unités carrées. Il a été divisé en quatre rectangles. Chaque rectangle a été divisé en deux triangles congruents, soit un blanc et un ombré. Dans chaque rectangle, l'aire de la partie ombrée est égale à l'aire de la partie non ombrée. L'aire totale de la partie ombrée est donc égale à la moitié de l'aire du carré. Elle est donc égale à la moitié de 16, ou 8.

RÉPONSE : (B)

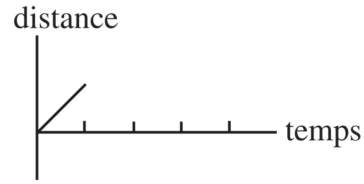
12. D'après la figure, il faut 3 ▲ pour équilibrer 5 ● et 1 ▲ pour équilibrer 2 ■ et 1 ●.

Si on triple les quantités sur la deuxième balance, on a 3 ▲ pour équilibrer 6 ■ et 3 ●.

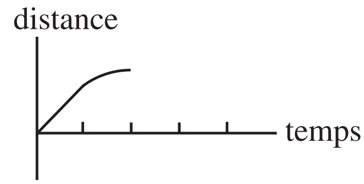
En comparant cette balance à la première, on a 5 ● pour équilibrer 6 ■ et 3 ●. On enlève alors 3 ● de chaque plateau pour constater qu'on a 2 ● pour équilibrer 6 ■. Il faut donc 3 ■ pour équilibrer 1 ●.

RÉPONSE : (C)

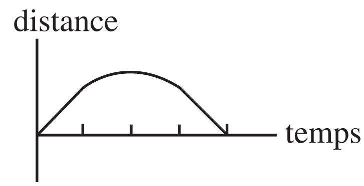
13. On suppose que les côtés du parc ont une longueur de 1 unité. Lorsque Nadia atteint le premier coin, elle est à une distance de 1 du point D.



Pendant qu'elle marche le long du 2^e^ côté du parc, elle s'éloigne toujours du point D. Arrivée au 2^e^ coin, après avoir parcouru la moitié du tour, elle sera à une distance de $\sqrt{2}$ du point D (d'après le théorème de Pythagore, la diagonale du carré a une longueur de $\sqrt{2}$).



En continuant son trajet, elle se rapproche du point D et le graphique aura l'apparence suivante.



Parmi les choix de réponse, le seul graphique qui vérifie ces conditions est le (C). (Le graphique est légèrement arrondi au milieu.)

RÉPONSE : (C)

14. *Solution 1*
Dans la 1^re^ figure, il y a 8 carrés blancs. Dans la 2^e^ figure, il y a 12 carrés blancs. Dans la 3^e^ figure, il y a 16 carrés blancs. Le nombre de carrés blancs augmente de 4 à chaque figure. Dans la 10^e^ figure, le nombre de carrés blancs doit donc être égal à $8+4(9)$, ou 44. (Pour passer de la 1^ère^ figure à la 2^e^, puis de la 2^e^ à la 3^e^, ainsi de suite jusqu'à la 10^e^, il faut ajouter 4 neuf fois.)

Solution 2
La 1^re^ figure est un carré 3 sur 3 contenant un carré noirci 1 sur 1. La 2^e^ figure est un carré 4 sur 4 contenant un carré noirci 2 sur 2. La 3^e^ figure est un carré 5 sur 5 contenant un carré noirci 3 sur 3. La 10^e^ figure est donc un carré 12 sur 12 contenant un carré noirci 10 sur 10. Le nombre de carrés blancs est donc égal à 12^2-10^2, ou 44.

RÉPONSE : (D)

15. Puisque chaque enfant a au moins 2 frères, chaque garçon a au moins frères. Il doit donc y avoir au moins 3 garçons dans la famille.
Puisque chaque enfant a au moins 1 sœur, chaque sœur a au moins 1 sœur. Il doit donc y avoir au moins 2 filles dans la famille.
Dans la famille Pascal, il y a donc au moins 5 enfants.

RÉPONSE : (C)

16. On attribue des valeurs à a et on vérifie si la valeur correspondante de b est un entier strictement positif.

Si $a=1$, alors $a^2=1$. Donc $3b=32$ et b n'est pas un entier.
Si $a=2$, alors $a^2=4$. Donc $3b=29$ et b n'est pas un entier.
Si $a=3$, alors $a^2=9$. Donc $3b=24$, d'où $b=8$.
Si $a=4$, alors $a^2=16$. Donc $3b=17$ et b n'est pas un entier.
Si $a=5$, alors $a^2=25$. Donc $3b=8$ et b n'est pas un entier.
Si a est supérieur ou égal à 6, alors a^2 est supérieur à 36. Donc $3b$ a une valeur négative et b n'est pas un entier positif.
Il n'y a donc qu'une seule valeur entière strictement positive pour a et une pour b, soit $a=3$ et $b=8$. Donc $ab=24$.

RÉPONSE : (B)

17. Puisque $0,\overline{12}$ a une période de longueur 2 et que $0,\overline{123}$ a une période de longueur 3, il faut examiner le développement décimal des trois nombres jusqu'à six places décimales.

$0,\overline{1}=0,111111\ldots$
$0,\overline{12}=0,121212\ldots$
$0,\overline{123}=0,123123\ldots$

Si on additionne ces nombres, on obtient :

$0,\overline{1}+0,\overline{12}+0,\overline{123}=0,355446\ldots$

D'après les choix de réponses, on doit avoir $0,\overline{1}+0,\overline{12}+0,\overline{123}=0,355446$.

RÉPONSE : (D)

18. D'après l'énoncé et la définition du symbole, on a :

$$\begin{aligned}(x-1)(-5)-(2)(3)&=9\\ -5x+5-6&=9\\ -5x&=10\\ x&=-2\end{aligned}$$

RÉPONSE : (C)

19. Chaque semaine, une branche qui est vieille d'au moins deux semaines produit une nouvelle branche. À la fin d'une semaine, le nombre total de branches est égal au nombre de branches au début de la semaine plus le nombre de branches qui n'étaient pas nouvelles (le nombre de vieilles branches). On utilise un tableau :

Numéro de la semaine	Nombre de branches au début	Nombre de vieilles branches au début	Nombre de branches à la fin
1	0	0	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21

À la fin de la huitième semaine, il y aura 21 branches.

RÉPONSE : (A)

20. On utilise un tableau pour tenir compte des positions, tout en cherchant une régularité.

Position au début d'un tour	Position à la fin du tour
1	2
2	4
3	6
4	1
5	3
6	5
7	7

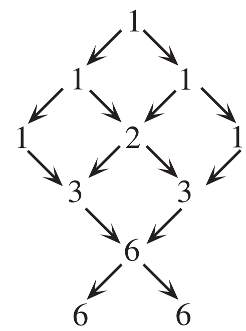
D'après la 3^e ligne, si la flèche aboutit sur le 6 à la fin du 21^e tour, elle a dû aboutir sur le 3 à la fin du 20^e tour. Pour aboutir sur le 3 à la fin du 20^e tour, elle a dû aboutir sur le 5 à la fin du 19^e tour et sur le 6 à la fin du 18^e tour.
On a maintenant une régularité cyclique. On voit que la flèche a dû aboutir sur le 6 à la fin des 21^e, 18^e, 15^e, 12^e, 9^e, 6^e et 3^e tours.
Puisqu'elle aboutit sur le 6 à la fin du 3^e tour, elle a dû aboutir sur le 3 à la fin du 2^e tour et sur le 5 à la fin du 1er tour. Sa position initiale était donc le 6.

RÉPONSE : (B)

21. On remarque que chacun des chemins qui descend du P jusqu'à un des deux L épèle le mot « PASCAL ». Il faut donc compter le nombre de chemins qui vont du haut jusqu'en bas.
On comptera d'abord le nombre de chemins qui mènent à chaque lettre de la figure. On voit que le nombre de chemins qui mènent à une lettre, par exemple le premier C, est la somme des nombres de chemins $(1+2)$ qui mènent à toutes les lettres de la ligne précédente (les deux premiers S) qui mènent directement à la lettre en question (C).

On indique donc le nombre de chemins qui mènent à chaque lettre.

Il y a donc 12 chemins qui mènent au premier L et 12 chemins qui mènent au deuxième L pour un total de 12 chemins.



RÉPONSE : (C)

22. Soit p la profondeur initiale de l'eau.
Le volume de l'eau dans le contenant est donc égal à $20 \times 20 \times p$, ou $400p$.
Le volume du cube en or est égal à $15 \times 15 \times 15$, ou 3375.
Après que l'on a placé le cube dans le contenant, le volume total occupé par l'eau et le cube est égal à $20 \times 20 \times 15$, ou 6000, car la base du contenant mesure 20 cm sur 20 cm et le contenant est rempli jusqu'à une profondeur de 15 cm.
On a donc $400p + 3375 = 6000$, d'où $400p = 2625$ ou $p = 6{,}5625$. La valeur 6,56 cm représente le mieux la profondeur initiale de l'eau dans le contenant.

RÉPONSE : (A)

23. On représente les deux pièces de 25 cents par V_1 et V_2, les deux pièces de 10 cents D_1 et D_2 et les deux pièces de 5 cents par C_1 et C_2. On construit ensuite un tableau. La colonne de gauche indique la première pièce choisie et la ligne du dessus indique la deuxième pièce choisie. Dans la table, on indique par un Oui que la combinaison de pièces choisies permet de payer les 30 cents demandés et par un Non que la combinaison ne le permet pas. (La diagonale est laissée vide, car il est impossible que la deuxième pièce soit aussi la première.)

	V_1	V_2	D_1	D_2	C_1	C_2
V_1		Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
V_2	Oui		Oui	Oui	Oui	Oui
D_1	Oui	Oui		Non	Non	Non
D_2	Oui	Oui	Non		Non	Non
C_1	Oui	Oui	Non	Non		Non
C_2	Oui	Oui	Non	Non	Non	

Par exemple, si le chauffeur choisit V_1, suivi de C_1, il a choisi 30 cents et il peut payer. S'il choisit D_2 en premier, suivi de D_1, il a choisi 20 cents et ne peut pas payer les 30 cents demandés.

D'après le tableau, il y a 30 choix possibles dont 18 permettent de payer.

La probabilité pour qu'il puisse payer est égale à $\frac{18}{30}$ ou $\frac{3}{5}$.

RÉPONSE : (A)

24. On remarque que la suite donnée est formée de plusieurs suites consécutives. Chacune de ces suites a la forme

$$\frac{n}{1},\ \frac{n-1}{2},\ \frac{n-2}{3},\ \ldots,\ \frac{3}{n-2},\ \frac{2}{n-1},\ \frac{1}{n}$$

dans laquelle les dénominateurs augmentent de 1 à n et les numérateurs diminuent de n à 1.
On remarque que la première suite est composée de 1 terme, la deuxième est composée de 2 termes et ainsi de suite. On peut donc récrire la suite donnée en ajoutant des parenthèses qui regroupent les termes des petites suites :

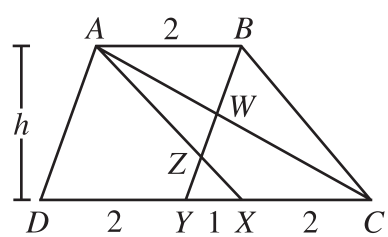
$$\left(\tfrac{1}{1}\right),\ \left(\tfrac{2}{1},\ \tfrac{1}{2}\right),\ \left(\tfrac{3}{1},\ \tfrac{2}{2}\ \tfrac{1}{3}\right),\ \left(\tfrac{4}{1},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4}\right),\ \ldots,\ \left(\tfrac{9}{1},\ \tfrac{8}{2},\ \tfrac{7}{3},\ \tfrac{6}{4},\ \tfrac{5}{5},\ \tfrac{4}{6},\ \tfrac{3}{7},\ \tfrac{2}{8},\ \tfrac{1}{9}\right),\ \ldots$$

Si on choisit n'importe quel terme dans une de ces petites suites, on remarque que la somme de son numérateur et de son dénominateur est 1 de plus que le nombre de termes dans la petite suite. Par exemple, la fraction $\frac{3}{7}$ paraît pour la première fois dans la petite suite de 9 termes.
La cinquième fraction équivalente à $\frac{3}{7}$, soit $\frac{5\times3}{5\times7}$ ou $\frac{15}{35}$, paraît donc dans la petite suite de 49 termes, dans la 35e position de cette suite.
Puisque les petites suites précédentes ont respectivement 1, 2, 3, …, 48 termes, la position du terme $\frac{15}{35}$ dans la suite donnée est $(1+2+\cdots+47+48)+35$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(48)(49)+35$ ou 1211.

RÉPONSE : (E)

25. Soit h la hauteur du trapèze $ABCD$.
L'aire du trapèze est donc égale à $\frac{1}{2}(AB+CD)h$ ou $\frac{7}{2}h$.
Puisque $AB=2$ et que AX est parallèle à BC, alors $XC=2$.
Puisque $AB=2$ et que BY est parallèle à AD, alors $DY=2$.
Puisque $CD=5$, $XC=2$ et $DY=2$, alors $YX=1$.
Pour déterminer l'aire du triangle AZW, on utilisera :

aire du triangle AZW = aire du triangle AZB − aire du triangle AWB



On détermine d'abord l'aire du triangle AZB. Puisque AB est parallèle à CD, alors $\angle ZAB = \angle ZXY$ et $\angle ZBA = \angle ZYX$. Les triangles AZB et XZY sont donc semblables.
Puisque $AB:XY = 2:1$ et que les triangles sont semblables, le rapport de leur hauteur doit être égal à $2:1$. Or par rapport aux bases AB et XY, la somme des hauteurs est égale à la hauteur du trapèze, soit h. La hauteur du triangle AZB est donc égale à $\frac{2}{3}h$. L'aire du triangle AZB est donc égale à $\frac{1}{2}(2)\left(\frac{2}{3}h\right)$ ou $\frac{2}{3}h$.

On détermine ensuite l'aire du triangle AWB. Puisque *AB* est parallèle à *CD*, alors $\angle WAB = \angle WCY$ et $\angle WBA = \angle WYC$. Les triangles AWB et CWY sont donc semblables. Puisque $AB{:}CY = 2{:}3$, le rapport de leur hauteur doit être égal à $2{:}3$. Or par rapport aux bases *AB* et *CY*, la somme des hauteurs est égale à la hauteur du trapèze, soit *h*. La hauteur du triangle AWB est donc égale à $\frac{2}{5}h$. L'aire du triangle AWB est donc égale à $\frac{1}{2}(2)\left(\frac{2}{5}h\right)$ ou $\frac{2}{5}h$.

L'aire du triangle AZW est égale à l'aire du triangle *AZB* moins celle du triangle *AWB*, soit $\frac{2}{3}h - \frac{2}{5}h$ ou $\frac{4}{15}h$. Le rapport de l'aire du triangle AZW à l'aire du trapèze est égal à $\frac{4}{15}h : \frac{7}{2}h$. Ce rapport est égal à $\frac{8}{30}{:}\frac{105}{30}$ ou $8{:}105$. RÉPONSE : (B)

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre
en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo,

2003 Solutions
Concours Pascal (9e – année)

(Secondaire III au Québec)

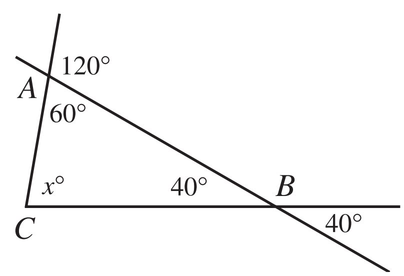
pour les prix du

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. On calcule : $\sqrt{169}-\sqrt{25}$ est égal à $13-5$, ou 8. RÉPONSE : (A)

2. On voit la régularité : pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par 3. (On voit que $3\times 2=6$, $3\times 6=18$, etc.) Le terme manquant est donc 3×54, ou 162. (On peut vérifier en confirmant que $3\times 162=486$.)
[L'expression « suite géométrique » signifie que chaque terme est obtenu en multipliant le terme précédent par un même nombre. On pouvait répondre sans en connaître le sens.]
RÉPONSE : (D)

3. On utilise la priorité des opérations.
$\dfrac{6+6\times 3-3}{3}$ est égal à $\dfrac{6+18-3}{3}$, c'est-à-dire à $\dfrac{21}{3}$, ou 7. RÉPONSE : (B)

4. Soit A, B et C les points indiqués dans le diagramme.


Puisqu'on a deux angles opposés par le sommet, $\angle ABC=40^\circ$.
Puisque l'angle CAB est le supplément d'un angle de 120°, alors $\angle CAB=60^\circ$. Dans le triangle ABC :
$$x^\circ+60^\circ+40^\circ=180^\circ$$
$$x=80$$
RÉPONSE : (E)

5. *Solution 1*
D'après les lois des exposants :
$$\frac{2^8}{8^2}=\frac{2^8}{\left(2^3\right)^2}=\frac{2^8}{2^6}=2^2=4$$
Solution 2
En calculant :
$$\frac{2^8}{8^2}=\frac{256}{64}=4$$
RÉPONSE : (C)

6. On évalue chacun des choix :
(A) $\dfrac{6^2}{10}=\dfrac{36}{10}=\dfrac{18}{5}$ (B) $\frac{1}{5}[6(3)]=\frac{1}{5}[18]=\dfrac{18}{5}$ (C) $\dfrac{18+1}{5+1}=\dfrac{19}{6}\neq\dfrac{18}{5}$
(D) $3{,}6=\dfrac{36}{10}=\dfrac{18}{5}$ (E) $\sqrt{\frac{324}{25}}=\sqrt{\frac{18^2}{5^2}}=\dfrac{18}{5}$
Seul le choix (C) n'est pas égal à $\frac{18}{5}$. RÉPONSE : (C)

7. On peut déterminer la valeur de F au bas du diagramme. D'après la définition, on a $F - 7 = 3$ ou $7 - F = 3$. Puisque F doit égaler un des nombres 1, 2, 4, 5, 6 et 8, alors $F = 4$, ce qui donne :

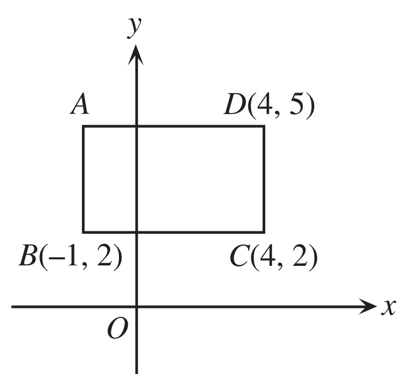
$$\begin{array}{ccccccc} A & & 10 & & B & & C \\ & D & & 9 & & E & \\ & & 7 & & 4 & & \\ & & & 3 & & & \end{array}$$

De même, on obtient $E = 5$ et $D = 2$, ce qui donne :

$$\begin{array}{ccccccc} A & & 10 & & B & & C \\ & 2 & & 9 & & 5 & \\ & & 7 & & 4 & & \\ & & & 3 & & & \end{array}$$

On obtient alors $A = 8$, $B = 1$ et $C = 6$. (On remarque que chacun des six nombres donnés est utilisé une fois.) Donc, $A + C = 14$. RÉPONSE : (E)

8. Puisque les côtés du rectangle sont parallèles aux axes, on peut déterminer les longueurs des côtés à partir des coordonnées.
La longueur BC est égale à la différence des abscisses, soit $4 - (-1)$, ou 5.
La longueur DC est égale à la différence des ordonnées, soit $5 - 2$, ou 3.
L'aire du rectangle est égale à 3×5, ou 15.



RÉPONSE : (A)

9. Chaque nombre premier, après 2, est impair. Pour qu'un nombre premier soit la somme de deux nombres premiers, il doit être la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair. Le nombre en question doit donc être la somme de 2 et d'un nombre premier impair.
En ordre descendant, les nombres premier inférieurs à 30 sont 29, 23, 19, 17, 13, 11, 7, 5, 3 et 2. Le plus grand de ces nombres qui est la somme de 2 et d'un autre nombre premier est 19. RÉPONSE : (C)

10. On écrit chaque nombre sous forme développée à huit décimales près.
(A) $3{,}2571 = 3{,}25710000...$
(B) $3{,}\overline{2571} = 3{,}25712571...$
(C) $3{,}2\overline{571} = 3{,}25715715...$
(D) $3{,}25\overline{71} = 3{,}25717171...$

(E) $3{,}257\bar{1} = 3{,}25711111...$

Ces cinq nombres sont identiques pour les quatre premières décimales. Chacun a une cinquième décimale distincte. Le nombre $3{,}25\overline{71}$ est le plus grand. RÉPONSE : (D)

11. Puisque $x = 2$ et $y = -3$ vérifient l'équation, on a :

$$\begin{aligned} 2(2)^2 + k(2)(-3) &= 4 \\ 8 - 6k &= 4 \\ 4 &= 6k \\ k &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

12. D'après le premier taux, 1 calculatrice vaut 100 règles.

D'après le deuxième taux, 100 règles valent $\frac{100}{10}(30)$, ou 300 compas.

D'après le troisième taux, 300 compas valent $\frac{300}{25}(50)$, ou 600 rapporteurs.

Il faut donc 600 rapporteurs pour obtenir une calculatrice. RÉPONSE : (B)

13. Si on examine le bloc de 4 carrés, formé par les deux premiers carrés des deux premières rangées, on voit qu'il faut au moins 4 couleurs, car les carrés ont un côté ou un sommet commun. Peut-on continuer avec ces 4 mêmes couleurs? On peut le faire en prenant ce bloc de 4 carrés et en le faisant glisser dans le diagramme. (Dans le diagramme, chaque couleur est représentée par un numéro.) On constate que 4 couleurs sont suffisantes. Qu'arriverait-il si le diagramme était plus grand que 3 sur 5? Aurait-on besoin de plus de 4 couleurs? Ce problème est relié au célèbre problème des 4 couleurs. Une recherche sur Internet vous en dira davantage.

1	2	1	2	1
3	4	3	4	3
1	2	1	2	1

RÉPONSE : (B)

14. *Solution 1*

Puisque x et y sont des entiers strictement positifs dont la somme est 5, on peut former un tableau des possibilités :

x	y	$2x - y$
1	4	-2
2	3	1
3	2	4
4	1	7

Parmi les choix donnés, seul –2 est une valeur possible.

Solution 2
On peut récrire l'expression $2x - y$ sous les formes suivantes : $3x - x - y$, $3x - (x + y)$, $3x - 5$.
Parmi les cinq choix, le seul qui est 5 de moins qu'un multiple de 3 est –2.

RÉPONSE : (D)

15. *Solution 1*
On peut obtenir l'aire du carré *KLMN* en soustrayant l'aire des triangles *KAN*, *NDM*, *MCL* et *LBK* de l'aire du carré *ABCD*.
On remarque que le carré *ABCD* a des côtés de longueur 6 et que chacun des triangles est rectangle avec une cathète de longueur 2 et l'autre de longueur 4. (Dans un triangle rectangle, une cathète est un côté autre que l'hypoténuse.)
L'aire du carré *KLMN* est égale à $6^2 - 4\left[\frac{1}{2}(2)(4)\right]$, c'est-à-dire à $36 - 4[4]$, ou 20 unités carrées.

Solution 2
Puisque *KLMN* est un carré, son aire est le carré de la longueur d'un de ses côtés. Donc l'aire est égale à NM^2.
Puisque le triangle *DNM* est rectangle, on peut déterminer NM^2 à partir du théorème de Pythagore :

$$NM^2 = ND^2 + DM^2$$
$$NM^2 = 2^2 + 4^2$$
$$NM^2 = 20$$

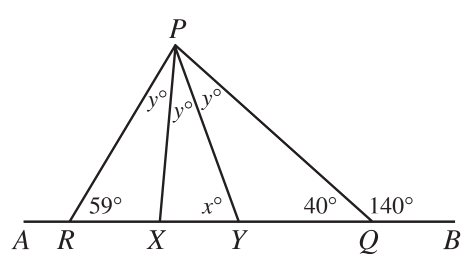
Donc l'aire du carré est égale à 20 unités carrées.

RÉPONSE : (D)

16. Puisque n peut représenter n'importe quel entier, posons $n = 0$. Les cinq autres entiers sont alors 3, -9, -4, 6 et -1. Si on les place en ordre croissant, on obtient -9, -4, -1, 3 et 6. Le nombre du milieu est -1, qui est une valeur particulière de $n-1$.

RÉPONSE : (E)

17. On nomme certains sommets comme dans le diagramme.



On a alors $\angle PQR = 180^\circ - \angle PQB$, d'où $\angle PQR = 40°$.
Dans le triangle PQR :

$$59^\circ + 3y^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$
$$3y = 81$$
$$y = 27$$

Dans le triangle PRY :

$$59^\circ + 2y^\circ + x^\circ = 180^\circ$$
$$x = 180 - 59 - 2(27)$$
$$x = 67$$

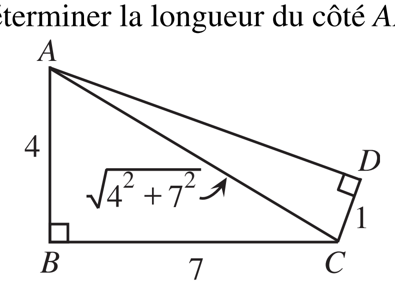
RÉPONSE : (A)

18. La moyenne d'une liste de nombres est égale à la somme des nombres divisée par le nombre d'éléments de la liste. Puisque n nombres on une moyenne de 7, leur somme est égale à $7n$.
Lorsqu'on ajoute le nombre -11 à la liste, on a alors $n+1$ nombres dont la somme est égale à $7n-11$. On a donc :

$$\frac{7n-11}{n+1} = 6$$
$$7n - 11 = 6n + 6$$
$$n = 17$$

RÉPONSE : (E)

19. On joint A et C, de manière à diviser le quadrilatère en deux triangles rectangles.
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(4)(7)$, ou 14.
Pour calculer l'aire du triangle ADC, il faut d'abord déterminer la longueur du côté AD.
On utilise le théorème de Pythagore dans chacun des triangles :



$$AD^2 = AC^2 - DC^2$$
$$AD^2 = \left(AB^2 + BC^2\right) - 1^2$$
$$AD^2 = 7^2 + 4^2 - 1^2$$
$$AD^2 = 64$$
$$AD = 8$$

L'aire du triangle ADC est égale à $\frac{1}{2}(1)(8)$, ou 4.
L'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à la somme de l'aire des triangles. Elle est donc égale à $14+4$, ou 18.

RÉPONSE : (C)

20. *Solution 1*
Au lieu d'utiliser les chiffres 0, 2, 4, 6, 8, supposons que les Pairiens utilisent les chiffres 0, 1, 2, 3, 4 (chacun des chiffres précédents divisé par 2).
On voit alors que le système des Pairiens correspond à notre système de numération base 5, où tous les chiffres sont doublés.

On écrit le nombre 111 comme somme de puissances de 5 : $111 = 4\left(5^2\right) + 2\left(5^1\right) + 1\left(5^0\right)$.
Le nombre 111 est donc égal à 421_{cinq}. Les Pairiens doublent ces chiffres et écrivent donc 842 pour représenter le nombre 111.

Solution 2

Pour déterminer la façon dont les Pairiens écrivent le nombre 111, on cherche une régularité dans leurs nombres. Voici comment on écrit les 20 premiers nombres entiers positifs :

2, 4, 6, 8, 20, 22, 24, 26, 28, 40, 42, 44, 46, 48, 60, 62, 64, 66, 68, 80, …

On voit que le dernier chiffre suit un cycle de cinq chiffres (2, 4, 6, 8, 0). Le dernier chiffre du nombre 111 sera donc un 2.

Pour déterminer les autres chiffres, on doit poursuivre l'écriture des nombres. Voici comment on écrit les nombres de 20 à 30 :

80, 82, 84, 86, 88, 200, 202, 204, 206, 208, 220, …

Les nombres de trois chiffres qui ont 2 comme premier chiffre verront les deux autres chiffres aller de 00 à 88. Après le nombre 288, on verra le nombre 400 et le cycle recommencera.

Combien les Pairiens ont-ils de nombres de trois chiffres qui commencent par 2? Puisque les nombres vont de 200 à 288, il y en a autant que pour les nombres de 00 à 88, soit 25 nombres, puisque 88 correspond à notre nombre 24.

Donc 200 représente notre nombre 25, 400 représente notre nombre 50, 600 représente notre nombre 75 et 800 représente notre nombre 100.

Pour passer de notre nombre 100 à notre nombre 111, on peut continuer à écrire chaque nombre à la façon des Pairiens ou encore utiliser le 11^{e} nombre de la première liste, 42 et le placer après le chiffre 8. Le nombre 111 s'écrit 842 à la façon des Pairiens.

RÉPONSE : (D)

21. Puisque chaque feu a le même cycle et que chaque feu devient rouge 10 secondes après le feu précédent, alors chaque feu devient vert 10 secondes après le feu précédent.

Supposons que le premier feu devient vert au temps 0 seconde. Quand le dernier feu devient-il vert?

Puisqu'il s'agit du 8^{e} feu, il deviendra vert 70 secondes (sept intervalles de 10 secondes) après le premier feu.

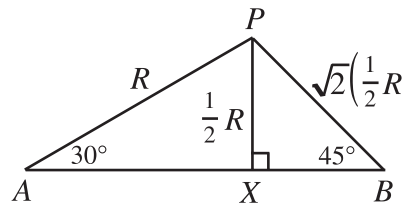
(Le premier feu deviendra jaune au temps 90 secondes et rouge au temps 93 secondes. Tour à tour, chaque autre feu deviendra rouge, jusqu'au 8^{e} au temps 163 secondes. À ce temps-là, le premier feu sera encore rouge.)

L'intervalle de temps que l'on a décrit plus haut est donc le seul où tous les feux sont verts en même temps. Il dure 20 secondes.

(On remarque que la durée du feu jaune n'a aucun effet sur la situation.)

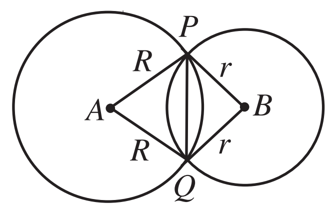
RÉPONSE : (C)

22. *Solution 1*



On trace le segment AB qui coupe PQ en X. On considère le triangle APB.
Par symétrie, $\angle PAB = 30^\circ$, $\angle PBA = 45^\circ$ et PX est perpendiculaire à AB. Soit R le rayon du cercle à gauche et r le rayon du cercle à droite.
Puisque $AP = R$ et que le triangle APX est un triangle 30°-60°-90°, alors $PX = \frac{1}{2}R$.
Puisque le triangle BPX est un triangle 45°-45°-90°, alors $PB = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}R\right)$.
Donc $r = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}R\right)$, ou $r^2 = \frac{1}{2}R^2$.
Puisque les cercles ont une aire respective de πR^2 et de πr^2, le rapport de l'aire du premier à l'aire du deuxième est égal à 2:1.

Solution 2



Soit R le rayon du cercle à gauche et r le rayon du cercle à droite. On trace la corde commune PQ. Puisque cette corde est commune, on tentera de déterminer sa longueur en fonction de R et en fonction de r, de manière à établir une relation entre ces inconnues.
On considère d'abord le triangle APQ. On a $AP = AQ = R$ et $\angle PAQ = 60^\circ$. Le triangle APQ est donc isocèle avec un angle de 60°. Il est donc équilatéral. Donc $PQ = R$, ou $PQ^2 = R^2$.
On considère ensuite le triangle BPQ. On a $BP = BQ = r$ et $\angle PBQ = 90^\circ$. D'après le théorème de Pythagore, $PQ^2 = r^2 + r^2$, ou $PQ^2 = 2r^2$.
On a donc $R^2 = 2r^2$, d'où $\pi R^2 = 2\left(\pi r^2\right)$.
Or l'expression du membre de gauche est l'aire du cercle de centre A et l'expression dans la parenthèse est l'aire du cercle de centre B. Le rapport de l'aire du cercle de centre A à l'aire du cercle de centre B est donc égal à 2:1. RÉPONSE : (D)

23. *Solution 1*

Supposons que l'escalier est deux fois plus long, reliant le premier étage au troisième, et que Jean et Josée partent en même temps. Jean atteindra le troisième étage au même moment où Josée atteindra le deuxième, car Josée prend deux fois plus de temps pour faire le même trajet. Pendant ce temps, Jean aura monté $2(29)$ des marches à pied, tandis que Josée en aura monté 11. À la fin de cet intervalle de temps, il y aura $2(29) - 11$, ou 47 marches entre eux.
Ces 47 marches représentent donc le nombre de marches entre deux étages.

Solution 2

Soit N le nombre de marches entre les deux étages.

En montant un étage, Jean monte 29 marches à pied. Il est donc transporté par l'escalier sur une longueur de $N-29$ marches.

En montant un étage, Josée monte 11 marches à pied. Elle est donc transportée par l'escalier sur une longueur de $N-11$ marches.

Puisque Josée prend deux fois plus de temps pour faire le même trajet, elle est transportée sur une longueur deux fois plus grande que celle de Jean. Donc :

$$\begin{aligned} N-11 &= 2(N-29) \\ N-11 &= 2N-58 \\ N &= 47 \end{aligned}$$

Il y a donc 47 marches entre deux étages.

RÉPONSE : (A)

24. *Solution 1*

On suppose que l'artiste utilise des carrés dont les côtés mesurent c et que M carrés sont utilisés sur la longueur et N sur la largeur. D'après la première phrase de l'énoncé, M et N doivent être des entiers positifs.

On a donc $Mc = 60\frac{1}{2}$ cm et $Nc = 47\frac{2}{3}$ cm, ou $Mc = \frac{121}{2}$ cm et $Nc = \frac{143}{3}$ cm.

Puisqu'on cherche M et N, on peut diviser, membre par membre, pour éliminer c.

$$\begin{aligned} \frac{Mc}{Nc} &= \frac{121}{2} \div \frac{143}{3} \\ \frac{M}{N} &= \frac{11\times 11}{2} \times \frac{3}{11\times 13} \\ &= \frac{33}{26} \end{aligned}$$

On veut donc déterminer les plus petites valeurs possibles de M et de N de manière que $\frac{M}{N} = \frac{33}{26}$. Puisque la fraction $\frac{33}{26}$ est irréductible, les plus petites valeurs sont $M = 33$ et $N = 26$. Le plus petit nombre de carrés qu'il faut est donc égal à 33×26, ou 858.

Solution 2

L'aire du rectangle, en centimètres carrés, est égale à $\frac{121}{2}\times\frac{143}{3}$, ou $\frac{11\times 11}{2}\times\frac{11\times 13}{3}$.

On veut écrire cette expression sous la forme du nombre de carrés, multiplié par l'aire d'un carré, c'est-à-dire sous forme d'un entier multiplié par le carré d'un nombre.

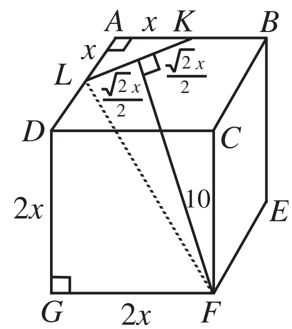
On peut écrire $\frac{11\times 11}{2}\times\frac{11\times 13}{3} = \frac{11\times 13}{6}\times 11^2$. Or le premier facteur doit être un entier.

On doit donc placer le 6 dans la partie qui sera au carré.

$$\frac{11\times 13}{6}\times 11^2 = \frac{6\times 11\times 13}{6^2}\times 11^2$$
$$= [6\times 11\times 13]\times\left(\frac{11}{6}\right)^2$$
$$= 858\times\left(\frac{11}{6}\right)^2$$

Il faut donc 858 carrés mesurant $\frac{11}{6}$ cm sur $\frac{11}{6}$ cm. RÉPONSE : (B)

25. Soit $AK = x$. On a donc $AL = x$, $DG = 2x$ et $FG = 2x$. Puisque $AL = AK$, le triangle ALK est un triangle rectangle isocèle. On a donc $LK = \sqrt{2}x$.
Au point *F*, on abaisse une perpendiculaire FQ au segment *LK*. Puisque le triangle ALK est isocèle, *Q* est le milieu de *LK*. On a donc $FQ = 10$ et $LQ = \frac{\sqrt{2}x}{2}$.



D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle DGF, $DF^2 = (2x)^2 + (2x)^2$, ou $DF^2 = 8x^2$.
Puisque le triangle FDL est rectangle en *D*, on obtient, d'après le théorème de Pythagore, $FL^2 = 8x^2 + x^2$, ou $FL^2 = 9x^2$.
D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle LQF, on a :

$$LF^2 = LQ^2 + QF^2$$
$$9x^2 = \left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^2 + 10^2$$
$$9x^2 = \frac{1}{2}x^2 + 100$$
$$\frac{17}{2}x^2 = 100$$
$$x \approx 3{,}429$$

Le volume du cube est égal à $8x^3$, ou approximativement à 322,82. À l'entier près, il est égal à 323. RÉPONSE : (A)

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2002 Solutions

Concours Pascal (9[e] - Sec. III)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. Selon l'ordre prioritaire des opérations, on a :
$$\begin{aligned}\frac{15+9-6}{3\times 2} &= \frac{18}{6}\\ &= 3\end{aligned}$$
RÉPONSE : (C)

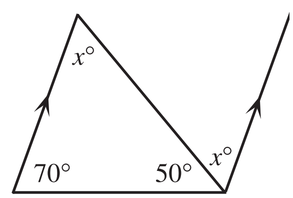
2. 50 % de 2002, c'est $\frac{1}{2}$ de 2002, ce qui est égal à 1001. RÉPONSE : (E)

3. Puisque $x+2=10$, alors $x=8$. Puisque $y-1=6$, alors $y=7$. Donc $x+y=15$.
RÉPONSE : (B)

4. On a :
$$\begin{aligned}\left(3^2-3\right)^2 &= (9-3)^2\\ &= 36\end{aligned}$$
RÉPONSE : (A)

5. Puisque l'ascenseur a monté 7 étages, qu'il a ensuite descendu 6 étages et remonté 5 étages, le nombre d'étages qu'il a montés est égal à $7-6+5$, ou 6. Puisqu'elle est sortie au 20e étage, elle est entrée dans l'ascenseur au 14e étage. RÉPONSE : (A)

6. À cause des angles alternes-internes, le troisième angle du triangle mesure x°. Puisque la somme des mesures des angles du triangle est égale à 180°, alors :
$$\begin{aligned}x+70+50 &= 180\\ x &= 60\end{aligned}$$



RÉPONSE : (B)

7. Puisque $n=\frac{5}{6}(240)$, alors :
$$\begin{aligned}\frac{2}{5}n &= \frac{2}{5}\left(\frac{5}{6}\right)(240)\\ &= \frac{1}{3}(240)\\ &= 80\end{aligned}$$
RÉPONSE : (B)

8. On a :
$$\begin{aligned}1-\left(5^{-2}\right) &= 1-\frac{1}{5^2}\\ &= 1-\frac{1}{25}\\ &= \frac{24}{25}\end{aligned}$$
RÉPONSE : (A)

9. On peut déterminer la réponse en obtenant, par tâtonnements, les dimensions des divers rectangles. Si on suppose que le petit rectangle, en haut à gauche, a une largeur de 2 et une

hauteur de 3, alors le rectangle à sa droite, qui a lui aussi une hauteur de 3, doit avoir une largeur de 5. On conclut que le rectangle, en bas à droite, a une hauteur de 5, de même que le rectangle ombré. Celui-ci a une largeur de 2, comme le premier rectangle. Le rectangle ombré a donc une largeur de 2 et une hauteur de 5, ce qui donne une aire de 10. On peut aussi résoudre le problème de façon algébrique, mais la stratégie présentée est probablement la plus efficace. RÉPONSE : (E)

10. On remarque qu'il faut toujours ajouter 3 cure-dents à la figure précédente pour obtenir la figure suivante. Pour obtenir la 10e figure, formée de 10 carrés, il faut donc ajouter 9 fois 3 cure-dents aux 4 cure-dents de la première figure. Pour former cette figure, il faut donc $4+9\times 3$, ou 31 cure-dents. RÉPONSE : (C)

11. Puisque $ABCD$ est un carré, alors $AB=BC$. Donc :

$$\begin{aligned} x+16 &= 3x \\ 16 &= 2x \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Chaque côté a donc une longueur de $8+16$, ou 24. Le carré a donc un périmètre de 96.
RÉPONSE : (C)

12. Soit a le premier nombre de la suite. Le deuxième nombre est donc $2a$ et le troisième est $4a$. On a donc $2a+4a=24$, d'où $a=4$. Les quatrième, cinquième et sixième nombres sont respectivement $8a$, $16a$ et $32a$. Le sixième nombre est donc $32(4)$, ou 128.
RÉPONSE : (E)

13. Le côté AC du triangle ABC est parallèle à l'axe des y. Il est donc perpendiculaire à l'axe des x. Il traverse donc l'axe des x au point $(1,0)$. Si on considère que AC est la base du triangle ABC, alors la hauteur du triangle est déterminée par la longueur de l'axe des x à l'intérieur du triangle. Le triangle a donc une hauteur de 3 et une base de 6. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(6)(3)$, ou 9. RÉPONSE : (E)

14. On peut supposer que chacun des 25 élèves qui ont une moyenne de 75 % a une note de 75 sur 100, pour un total de 25×75, ou 1875. On peut aussi supposer que chacun des 5 autres élèves qui ont une moyenne de 40 % a une note de 40 sur 100, pour un total de 5×40, ou 200. La moyenne de la classe est donc égale à :

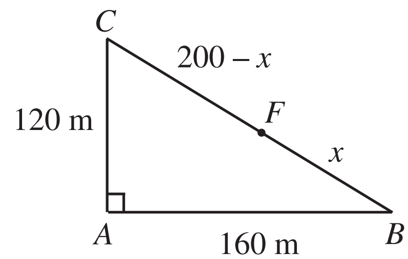
$$\begin{aligned} \frac{\text{Total des notes}}{\text{Nombre d'élèves}} &= \frac{1875+200}{30} \\ &= \frac{2075}{30} \\ &= 69{,}2 \end{aligned}$$

Le choix de réponse le plus près est 69 %. RÉPONSE : (B)

15. D'après la relation de Pythagore :

$$BC^2 = 120^2 + 160^2$$
$$BC^2 = 40\,000$$
$$BC = 200$$

Soit $FB = x$. Donc $FC = 200 - x$.



La distance parcourue par Jean est égale à $AB + BF$, ou $160 + x$. La distance parcourue par Julie est égale à $AC + CF$, ou $120 + 200 - x$. Puisque chacun parcourt la même distance, alors :

$$160 + x = 120 + 200 - x$$
$$2x = 160$$
$$x = 80$$

La distance de F à B est égale à 80 m. RÉPONSE : (D)

16. Puisque 5^3 et 7^{52} sont des entiers impairs, leur produit est un entier impair. Puisque 5^3 est un multiple de 5, $\left(5^3\right)\left(7^{52}\right)$ est un multiple impair de 5. Or tous les multiples impairs de 5 ont 5 comme chiffre des unités. Le chiffre des unités du nombre $\left(5^3\right)\left(7^{52}\right)$ est donc 5.

RÉPONSE : (A)

17. On sait que $1000 = 10 \times 10 \times 10 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$. Pour exprimer le nombre 1000 sous la forme du produit de deux entiers positifs de manière que ni l'un, ni l'autre de ces entiers ne contienne le chiffre zéro, il faut séparer les facteurs 2 des facteurs 5. On a donc $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 8 \times 125$ et $8 + 125 = 133$. RÉPONSE : (C)

18. Puisque Akira et Louis, ensemble, pèsent 101 kg et que Akira et Rabia, ensemble, pèsent 91 kg, Louis pèse 10 kg de plus que Rabia. Si Rabia pèse x kg, alors Louis pèse $(10 + x)$ kg. D'après le troisième renseignement donné, on a :

$$x + x + 10 = 88$$
$$2x = 78$$
$$x = 39$$

Ensemble, Akira et Rabia pèsent 91 kg. Puisque Rabia pèse 39 kg, alors Akira pèse 52 kg.

RÉPONSE : (D)

19. On divise 2002 par 7 pour obtenir 286, d'où $2002 = 7 \times 286$. Puisqu'il y a 7 entiers par rangée et que le dernier nombre de chaque rangée est le multiple de 7 qui correspond au numéro de la rangée, alors le nombre 2002 doit être situé dans la 7ᵉ colonne et dans la 286ᵉ rangée. Donc $m = 7$ et $n = 286$, d'où $m + n = 293$. RÉPONSE : (D)

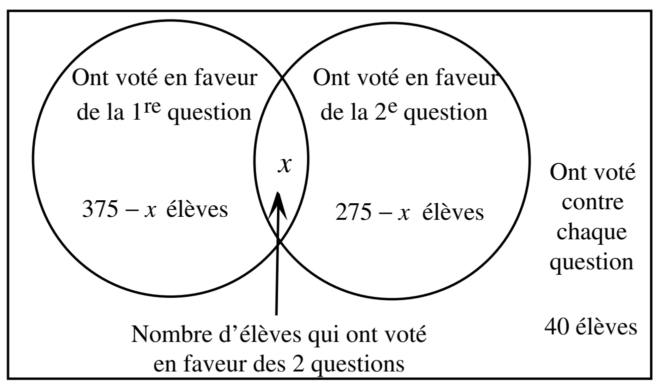
20. L'expression $\sqrt{25-x^2}$ est définie si $25-x^2 \geq 0$, c'est-à-dire si $-5 \leq x \leq 5$. À l'aide d'un tableau, on vérifie les valeurs de x pour lesquelles $\sqrt{25-x^2}$ est un entier, c'est-à-dire pour lesquelles $25-x^2$ est un carré parfait.

x	$25-x^2$	Carré parfait?
0	25	Oui
± 1	24	Non
± 2	21	Non
± 3	16	Oui
± 4	9	Oui
± 5	0	Oui

Il y a donc 7 valeurs entières de x (les nombres 0, 3, –3, 4, –4, 5 et –5) pour lesquelles $\sqrt{25-x^2}$ est égal à un entier. RÉPONSE : (A)

21. Le premier prisme à base rectangulaire a pour dimensions 4 cm, 5 cm et 6 cm. Il est donc composé de $4 \times 5 \times 6$, ou 120 petits cubes. Le plus grand cube que l'on puisse former en enlevant des petits cubes mesure 4 cm sur 4 cm sur 4 cm. Il est formé de 64 petits cubes. Il faut donc enlever 56 des 120 petits cubes pour le former. RÉPONSE : (E)

22. Soit x le nombre d'élèves qui ont voté en faveur de chaque question. On peut représenter les résultats du vote au moyen d'un diagramme de Venn. Puisque 500 élèves ont voté, on a :

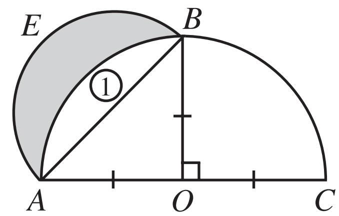


$$375 - x + x + 275 - x + 40 = 500$$
$$690 - x = 500$$
$$x = 190$$

Donc 190 élèves ont voté en faveur de chaque question. RÉPONSE : (C)

23. On cherche le nombre de couples (a, b) d'entiers qui vérifient l'équation $a^b = 64$, ou $a^b = 2^6$. Si a et b sont positifs, alors les seules possibilités sont $64 = 64^1 = 8^2 = 4^3 = 2^6$, puisque a doit être une puissance de 2. Si a est négatif, b doit être un nombre positif pair. On a alors les possibilités suivantes : $64 = (-8)^2 = (-2)^6$. On sait que b ne peut être négatif, car a^b est un entier. Il y a donc 6 couples (a, b) qui vérifient l'équation. RÉPONSE : (D)

24. L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du demi-cercle *AEB* moins celle de la région 1. Or l'aire de la région 1 est égale à l'aire du quart de cercle *ABO* moins celle du triangle *ABO*. On calcule donc l'aire de ces régions.



Puisque $AO = BO = 1$, alors l'aire du triangle ABO est égale à $\frac{1}{2}(1)(1)$, ou $\frac{1}{2}$.
Puisque $AO = BO = 1$, le quart de cercle *ABO* a un rayon de 1 et une aire de $\frac{1}{4}\pi(1)^2$, ou $\frac{\pi}{4}$.
Puisque $AO = BO = 1$, alors $AB = \sqrt{2}$, selon la relation de Pythagore, et le rayon du demi-cercle *AEB* est donc égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. L'aire du demi-cercle *AEB* est donc égale à $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, ou $\frac{\pi}{4}$.

L'aire de la région ombrée est égale à :

(Aire du demi-cercle *AEB*) – (Aire de la région 1)

$$= (\text{Aire du demi-cercle } AEB) - [(\text{Aire du quart de cercle } AOB) - (\text{Aire du triangle } AOB)]$$
$$= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{2}$$

RÉPONSE : (B)

25. On calcule d'abord le volume de chaque contenant de forme cylindrique :

$$V_{\text{grand}} = \pi(6)^2(20) = 720\pi \text{ cm}^3$$
$$V_{\text{petit}} = \pi(5)^2(18) = 450\pi \text{ cm}^3$$

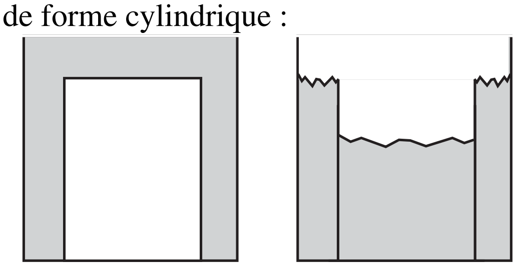


Figure 3 Figure 4

Le volume initial d'eau dans le grand cylindre est égal à :

$$V_{\text{initial d'eau}} = \pi(6)^2(17) = 612\pi \text{ cm}^3$$

Si le petit contenant était fermé à l'aide d'un couvercle et qu'on le baissait jusqu'au fond du grand contenant, comme dans la Figure 3, il serait complètement recouvert d'eau et une partie de l'eau aurait été versée à l'extérieur du grand contenant. De plus, le niveau de l'eau irait jusqu'au haut du grand contenant, puisque le volume initial d'eau et le volume du petit contenant dépassent le volume du grand contenant.

Si on enlevait le couvercle, toute l'eau qui est au-dessus du petit contenant s'écoulerait dans le petit contenant. Cette eau est au départ dans une région de forme cylindrique de rayon 6 cm et de hauteur 2 cm. Son volume est égal à $\pi(6)^2(2)$, ou 72π cm^3. Il s'agit donc du volume d'eau dans le petit contenant à la toute fin, lorsque celui-ci repose au fond du grand. On a donc $72\pi = \pi(5)^2 h$, où h représente la profondeur d'eau dans le petit contenant. Donc $h = \frac{72\pi}{25\pi}$, ou $h = 2{,}88$ cm. RÉPONSE : (D)

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2001 Solutions
Concours Pascal (9[e] - Sec. III)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Partie A

1. La valeur de $\frac{5(6)-3(4)}{6+3}$ est :

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 6 (**D**) 12 (**E**) 31

Solution

$$\begin{aligned}\frac{5(6)-3(4)}{6+3} &= \frac{30-12}{9}\\ &= \frac{18}{9}\\ &= 2\end{aligned}$$

RÉPONSE : (B)

2. Lorsqu'on divise $12\,345\,678$ par 10, le reste est égal à :

(**A**) 0 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 8

Solution

On peut diviser au long pour obtenir un reste de 8, car :

$$12\,345\,678 = 10(1\,234\,567)+8$$

RÉPONSE : (E)

3. La valeur de $\frac{2^5-2^3}{2^2}$ est :

(**A**) 6 (**B**) 1 (**C**) $\frac{1}{4}$ (**D**) 0 (**E**) 30

Solution

$$\begin{aligned}\frac{2^5-2^3}{2^2} &= \frac{32-8}{4}\\ &= \frac{24}{4}\\ &= 6\end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

4. Si $x=\frac{1}{4}$, laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur?

(**A**) x (**B**) x^2 (**C**) $\frac{1}{2}x$ (**D**) $\frac{1}{x}$ (**E**) $\sqrt{x}$

Solution

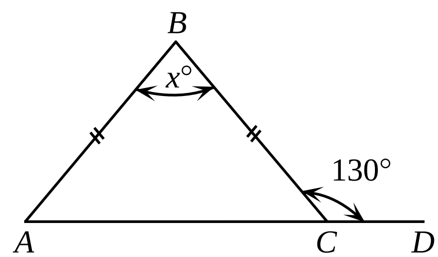
On calcule la valeur de chaque expression.

(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ (**C**) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$ (**D**) $\dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 1 \times 4 = 4$ (**E**) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

RÉPONSE : (D)

5. D'après le diagramme, la valeur de x est :

(**A**) 100 (**B**) 65 (**C**) 80
(**D**) 70 (**E**) 50



Solution
Puisque les angles sont supplémentaires, on a $\angle ACB + \angle BCD = 180°$, d'où $\angle ACB = 50°$.
Puisque le triangle est isocèle, $\angle BAC = 50°$.
Donc $x° = 180° - (50° + 50°)$

$x° = 80°$

La valeur de x est 80. RÉPONSE : (C)

6. Anne a obtenu une note de 80 % pour le semestre et une note de 90 % à l'examen. Pour calculer sa note finale, la note du semestre a un poids de 70 % et la note de l'examen a un poids de 30 %. Quelle est sa note finale?

(**A**) 81 % (**B**) 83 % (**C**) 84 % (**D**) 85 % (**E**) 87 %

Solution
Sa note finale est égale à : 0,70 de 80 + 0,30 de 90
$= 0{,}70 \times 80 + 0{,}30 \times 90$
$= 56 + 27$
$= 83$

RÉPONSE : (B)

7. La plus petite valeur de x pour laquelle $\dfrac{24}{x-4}$ est un entier est :

(**A**) -44 (**B**) -28 (**C**) -20 (**D**) -8 (**E**) 0

Solution
On calcule la valeur de l'expression pour chacune des valeurs données de x.

(A) $\dfrac{24}{-44-4}$	(B) $\dfrac{24}{-28-4}$	(C) $\dfrac{24}{-20-4}$	(D) $\dfrac{24}{-8-4}$	(E) $\dfrac{24}{0-4}$
$=\frac{24}{-48}$	$=\frac{24}{-32}$	$=\frac{24}{-24}$	$=\frac{24}{-12}$	$=-6$
$=\frac{-1}{2}$	$=\frac{-3}{4}$	$=-1$	$=-2$	

La plus petite valeur de x pour laquelle l'expression est un entier est donc –20.

RÉPONSE : (C)

8. Le 50^e terme de la suite 5, $6x$, $7x^2$, $8x^3$, $9x^4$, … est :

(**A**) $54x^{49}$ (**B**) $54x^{50}$ (**C**) $45x^{50}$ (**D**) $55x^{49}$ (**E**) $46x^{51}$

Solution

On remarque d'abord que le coefficient numérique de chaque terme est 4 de plus que le rang du terme. Le coefficient du 50^e terme est donc 54.

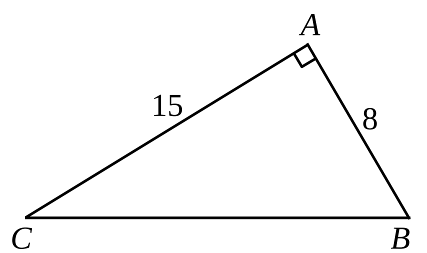
Le degré de chaque terme est 1 de moins que le rang du terme. Le degré du 50^e terme est donc 49.

Le 50^e terme est donc $54x^{49}$. RÉPONSE : (A)

9. Le périmètre du triangle ABC est égal à :

(**A**) 23 (**B**) 40 (**C**) 42

(**D**) 46 (**E**) 60



Solution

Puisque le triangle est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} BC^2 &= 8^2 + 15^2 \\ &= 289 \end{aligned}$$

Donc $BC = 17$.

Le périmètre est égal à $15+8+17$, ou 40. RÉPONSE : (B)

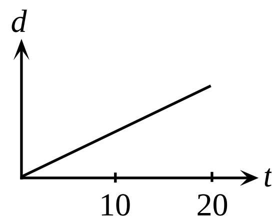
10. Dino a compté un total de 252 points dans 28 parties de basket-ball. Rima a joué 10 parties de moins que Dino. Sa moyenne de points par partie était supérieure de 0,5 point à celle de Dino. Combien de points Rima a-t-elle comptés?

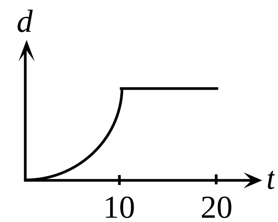
(**A**) 153 (**B**) 171 (**C**) 180 (**D**) 266 (**E**) 144

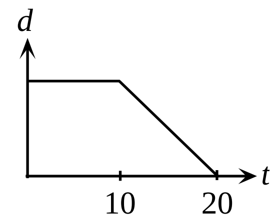
Solution
Puisque Dino a compté 252 points en 28 parties, sa moyenne est égale à $\frac{252}{28}$, ou 9 points par partie.
Rima a donc une moyenne de 9,5 points par partie. En 18 parties, elle a donc compté $9,5 \times 18$, ou 171 points.
RÉPONSE : (B)

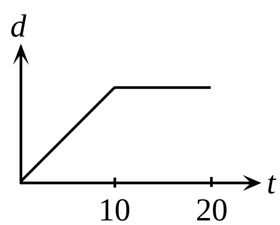
Partie B

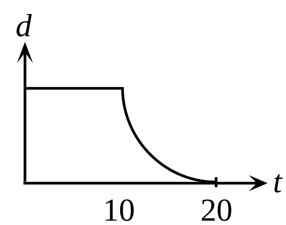
11. Sylvie marche à une vitesse constante pendant 10 minutes, puis se repose pendant 10 minutes. Les graphiques suivants représentent une distance *d* par rapport au temps *t*. Lequel représente le mieux le mouvement de Sylvie pendant les 20 minutes?

(**A**)


(**B**)


(**C**)


(**D**)


(**E**)


Solution
(A) Puisqu'il s'agit d'une droite, Sylvie marche à une vitesse constante pendant 20 minutes.
(B) La partie courbe du graphique indique que la vitesse augmente pendant les 10 premières minutes. La deuxième partie du graphique est plate, ce qui indique que Sylvie s'est reposée pendant 10 minutes.
(C) La première partie du graphique est plate, ce qui indique que Sylvie s'est reposée pendant les 10 premières minutes. Pendant les 10 dernières minutes, le graphique est une droite avec une pente négative, ce qui indique que Sylvie revient à son point de départ.
(D) Ce graphique représente la situation présentée dans l'énoncé.
(E) Ce graphique indique que Sylvie s'est reposée pendant 10 minutes, puis qu'elle est revenue vers son point de départ à une vitesse qui diminue pendant les 10 dernières minutes.
RÉPONSE : (D)

12. Un sac contient 20 bonbons : 4 au chocolat, 6 à la menthe et 10 au caramel. Des bonbons sont retirés du sac, au hasard, et mangés. Quel est le nombre minimum de bonbons qu'il faut retirer du sac pour être *certain* qu'au moins deux bonbons de chaque sorte ont été mangés?

(**A**) 6 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 16 (**E**) 18

Solution
Au plus, on pourrait retirer 17 bonbons avant de retirer un deuxième bonbon au chocolat, soit tous les 6 bonbons à la menthe, les 10 bonbons au caramel et un bonbon au chocolat.
Il faut donc retirer au moins 18 bonbons du sac pour être certain qu'au moins deux bonbons de chaque sorte ont été mangés. RÉPONSE : (E)

13. Pierre a célébré son anniversaire de naissance le 2 février 2001. Ce jour-là, son âge était égal à la somme des chiffres de l'année de sa naissance. En quelle année Pierre est-il né?

(**A**) 1987 (**B**) 1980 (**C**) 1979 (**D**) 1977 (**E**) 1971

Solution
On procède à rebours. Le tableau suivant présente l'année actuelle selon les dates présentées.

	Année de naissance	Âge (somme des chiffres)	Année actuelle selon son âge
(A)	1987	$1+9+8+7=25$	$1987+25=2012$
(B)	1980	$1+9+8+0=18$	$1980+18=1998$
(C)	1979	$1+9+7+9=26$	$1979+26=2005$
(D)	1977	$1+9+7+7=24$	$1977+24=2001$
(E)	1971	$1+9+7+1=18$	$1971+18=1989$

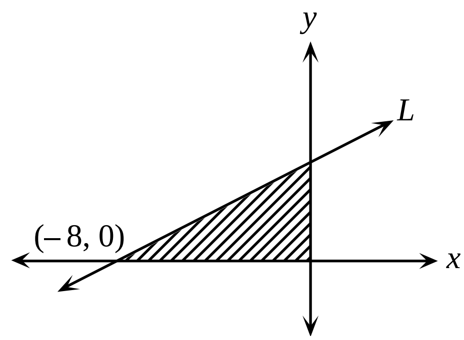
D'après le tableau, Pierre est né en 1977. RÉPONSE : (D)

14. Vingt billets sont numérotés de un à vingt. On tire un billet au hasard, chacun ayant une chance égale d'être choisi. Quelle est la probabilité pour que le nombre sur le billet soit un multiple de 3 ou de 5?

(**A**) $\frac{3}{10}$ (**B**) $\frac{11}{20}$ (**C**) $\frac{2}{5}$ (**D**) $\frac{9}{20}$ (**E**) $\frac{1}{2}$

Solution
Les nombres, de 1 à 20, qui sont des multiples de 3 ou de 5 sont : 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20. La probabilité pour que le nombre sur le billet soit un multiple de 3 ou de 5 est $\frac{9}{20}$. RÉPONSE : (D)

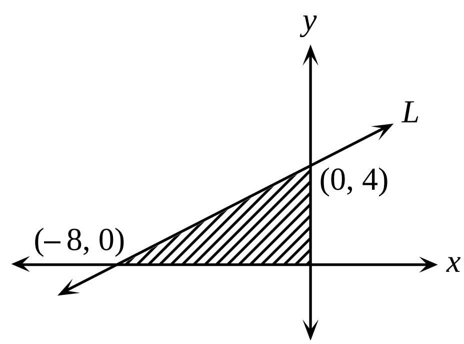
15. La droite L croise l'axe des x au point $(-8, 0)$. L'aire de la partie ombrée est égale à 16. Quelle est la pente de la droite L?



(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) 4 (**C**) $-\frac{1}{2}$
(**D**) 2 (**E**) -2

Solution
Puisque l'aire de la partie ombrée est égale à 16 et que la base a une longueur de 8, la hauteur doit être égale à 4.
La droite croise donc l'axe des y au point $(0, 4)$, car sa pente est positive selon le diagramme.

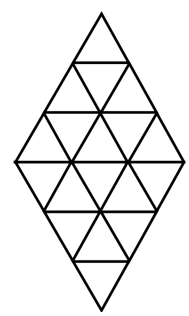
La pente est donc égale à $\frac{4-0}{0-(-8)}$, ou $\frac{1}{2}$.



$$\text{Aire} = \frac{8 \times 4}{2}$$
$$= 16$$

RÉPONSE : (A)

16. Dans le diagramme, tous les triangles sont équilatéraux. Le nombre total de triangles équilatéraux de toutes les dimensions est égal à :



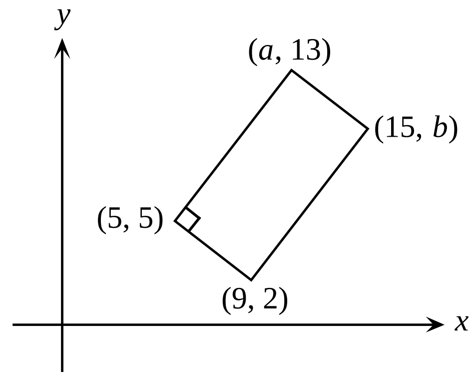
(**A**) 18 (**B**) 20 (**C**) 24
(**D**) 26 (**E**) 28

Solution
D'après le diagramme, il y a 18 petits triangles.
On considère maintenant les triangles ayant des côtés de longueur 2. Il y en a 4 qui pointent vers le haut et 4 autres qui pointent vers le bas.
Il y a aussi 2 triangles ayant des côtés de longueur 3. En tout, il y a 28 triangles équilatéraux.

RÉPONSE : (E)

17. D'après le rectangle, quelle est la valeur de $a-b$?

(**A**) -3 (**B**) -1 (**C**) 0
(**D**) 3 (**E**) 1



Solution
Pour se rendre du point $(5,5)$ au point $(9,2)$, il faut se déplacer de 4 unités vers la droite et de 3 unités vers le bas.
Puisqu'il s'agit d'un rectangle, il en est de même pour se déplacer du point $(a,13)$ au point $(15,b)$.
Donc $a+4=15$ et $13-3=b$, d'où $a=11$ et $b=10$. Donc $a-b=1$. RÉPONSE : (E)

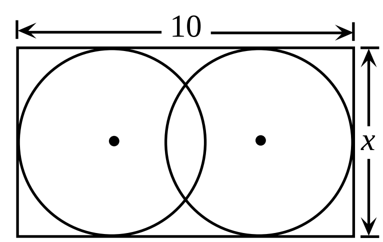
18. Le plus grand nombre de quatre chiffres dont la somme des chiffres est égale à 17 est 9800. Le 5^{e} plus grand nombre de quatre chiffres dont la somme des chiffres est égale à 17 est :

(**A**) 9521 (**B**) 9620 (**C**) 9611 (**D**) 9602 (**E**) 9530

Solution
Le plus grand nombre de quatre chiffres dont la somme des chiffres est égale à 17 est 9800.
Les deux plus grands nombres suivants sont 9710 et 9701. Les trois plus grands nombres suivants sont 9620, 9611 et 9602. Le 5^{e} plus grand est donc 9611. RÉPONSE : (C)

19. Les deux cercles dans le rectangle ont des rayons égaux. La distance entre les centres des cercles est égale à $\frac{2x}{3}$. Quelle est la valeur de x?

(**A**) $\frac{15}{4}$ (**B**) 5 (**C**) 6
(**D**) $\frac{60}{7}$ (**E**) $\frac{15}{2}$

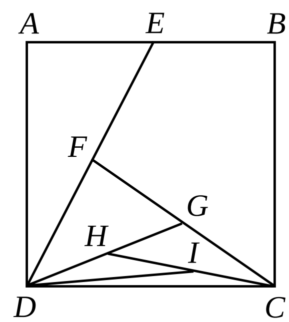


Solution
On remarque d'abord que la hauteur du rectangle, x, est égale au diamètre des cercles. La base du rectangle est égale à deux rayons plus la distance entre les centres.
Donc : $x+\frac{2}{3}x=10$

$$\frac{5}{3}x = 10$$
$$x = 6$$

RÉPONSE : (C)

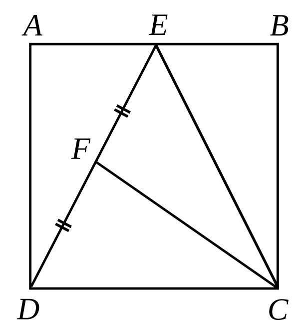
20. Le carré $ABCD$ a une aire de 4. E est le milieu de AB. De même, F, G, H et I sont les milieux respectifs de DE, CF, DG et CH. L'aire du triangle IDC est égale à :



(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{1}{16}$

(D) $\frac{1}{32}$ **(E)** $\frac{1}{64}$

Solution



On joint les points E et C. L'aire du triangle CDE est la moitié celle du carré. Elle est donc égale à 2.
Puisque F est le milieu de DE, les triangles DFC et EFC ont des bases égales et la même hauteur. Ils ont donc la même aire. Le triangle DFC a donc une aire de 1.
De la même façon, le triangle DGC a une aire de $\frac{1}{2}$, le triangle CHD a une aire de $\frac{1}{4}$ et le triangle IDC a une aire de $\frac{1}{8}$.

RÉPONSE : (B)

Partie C

21. À chaque jour, Carla quitte l'école à la même heure. Si elle pédale à une vitesse de 20 km/h, elle arrive à la maison à 16 h 30. Si elle pédale à une vitesse de 10 km/h, elle arrive à la maison à 17 h 15. À quelle vitesse, en km/h, doit-elle pédaler pour arriver à la maison à 17 h?

(A) $16\frac{2}{3}$ **(B)** 15 **(C)** $13\frac{1}{3}$ **(D)** 12 **(E)** $18\frac{3}{4}$

Solution

On sait que la distance à parcourir est la même dans tous les cas. On a donc une équation :

Distance parcourue à 20 km/h = Distance parcourue à 10 km/h

Soit t le temps, en heures, que prend Carla lorsqu'elle pédale à une vitesse de 20 km/h.
Lorsqu'elle pédale à une vitesse de 10 km/h, elle prend 45 minutes de plus et le temps qu'elle

prend est donc égal à $t + \frac{3}{4}$. L'équation devient donc :

$$20t = 10\left(t + \frac{3}{4}\right)$$
$$20t = 10t + \frac{30}{4}$$
$$10t = \frac{15}{2}$$
$$t = \frac{15}{20} \text{ ou } \frac{3}{4}$$

Donc $d = 20 \times \frac{3}{4}$, ou $d = 15$ km.

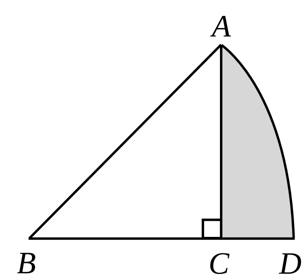
Si elle arrive à 17 h, alors $t = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$, ou $t = \frac{5}{4}$. Soit v sa vitesse lorsqu'elle arrive à cette heure.

Donc $v = \frac{d}{t}$.

$$v = \frac{15}{\frac{5}{4}}$$
$$v = 15 \times \frac{4}{5}$$
$$v = 12 \text{ km/h}$$

Carla doit pédaler à une vitesse de 12 km/h pour arriver à 17 h. RÉPONSE : (D)

22. Dans le diagramme, AB et BD sont des rayons d'un cercle de centre B. L'aire du secteur ABD est égale à 2π, ce qui représente un huitième de l'aire du cercle. L'aire de la partie ombrée est égale à :



(**A**) $2\pi - 4$ (**B**) π (**C**) $2\pi - 2$

(**D**) $2\pi - 4{,}5$ (**E**) $2\pi - 8$

Solution

Puisque l'aire du secteur ABD représente un huitième de l'aire du cercle, l'aire du cercle est égale à $8 \times 2\pi$, ou 16π.

Si r est le rayon du cercle, on a $\pi r^2 = 16\pi$, d'où $r = 4$, car $r > 0$.

Puisqu'un angle plein (l'angle dont l'arc est un cercle) mesure 360°, $\angle ABD = \frac{360°}{8} = 45°$.

Puisque $\angle ABC = 45°$, alors $\angle BAC = 45°$ et le triangle ABC est donc isocèle.

Puisque $AB = 4$, alors $AC = BC = 2\sqrt{2}$ (ou selon le théorème de Pythagore, $AC = BC = \sqrt{8}$).

L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}\right)$ (ou $\frac{1}{2}\left(\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{8}\right)$), c'est-à-dire à 4.

Or l'aire de la partie ombrée est égale à l'aire du secteur moins l'aire du triangle ABC.

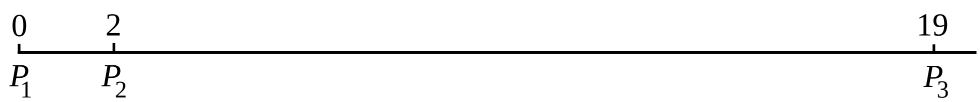
L’aire de la partie ombrée est donc égale à $2\pi - 4$. RÉPONSE : (A)

23. Cinq points sont situés sur une droite. Lorsqu’on écrit, en ordre croissant, les dix distances entre les paires de points, on obtient 2, 4, 5, 7, 8, k, 13, 15, 17, 19. Quelle est la valeur de k?

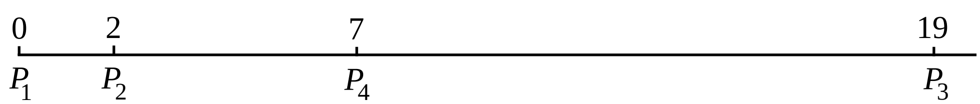
(**A**) 11 (**B**) 9 (**C**) 13 (**D**) 10 (**E**) 12

Solution

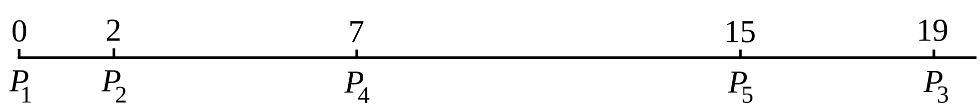
Il est plutôt difficile d’écrire une solution, puisqu’elle fait appel à des tâtonnements de façon systématique. On commence par placer deux points d’abscisses 0 et 19. Puisqu’il y a une distance de 2, on place le troisième point comme dans le diagramme suivant.



Puisqu’il nous faut une distance de 7, on place un point d’abscisse 7 sur la droite. On obtient des distances entre les points qui sont compatibles avec les données.



On a donc des distances de 2, 7, 19, 5, 17 et 12.
Si on place un point d’abscisse 15, on obtient la situation suivante.



Si on place le point ailleurs, on obtient des distances qui ne sont pas données. Les points du diagramme précédent donnent les distances $\{2, 7, 15, 19, 5, 13, 17, 8, 12, 4\}$.
La valeur de k est donc 12. RÉPONSE : (E)

24. Une bouteille fermée, contenant de l’eau, a été construite en attachant un cylindre de rayon 1 cm à un cylindre de rayon 3 cm, comme dans la Figure A. Lorsque la bouteille est tenue à l’endroit, le niveau de l’eau est à une hauteur de 20 cm, comme l’illustre la vue de face dans la Figure B. Lorsque la bouteille est tenue à l’envers, le niveau de l’eau est à une hauteur de 28 cm, comme l’illustre la Figure C. Quelle est la hauteur totale de la bouteille, en centimètres?

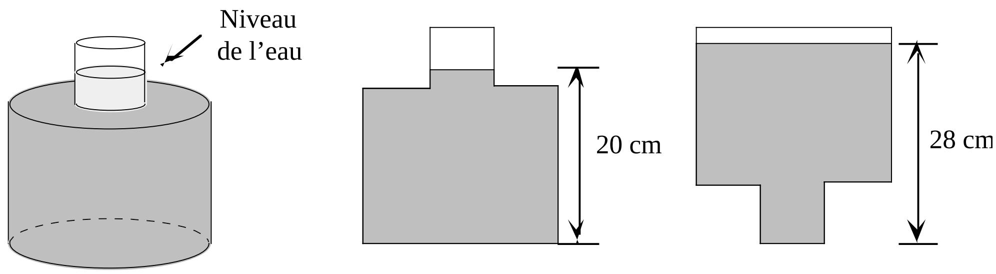


Figure A Figure B Figure C

(**A**) 29 (**B**) 30 (**C**) 31 (**D**) 32 (**E**) 48

Solution

Soit h la hauteur totale de la bouteille, en centimètres.

Le volume de l'eau est le même dans les deux positions. De même, le volume de la partie vide est le même dans les deux positions. Or il est plus facile de calculer le volume des deux parties vides.

Dans la figure B, la partie vide a une hauteur égale à $h-20$.

Son volume est donc égal à $\pi \times 1^2 \times (h-20)$, ou $\pi(h-20)$.

Dans la figure C, la partie vide a une hauteur égale à $h-28$.

Son volume est donc égal à $\pi \times 3^2 \times (h-28)$, ou $9\pi(h-28)$.

Puisque ces volumes sont égaux, on a :

$$\begin{aligned} \pi(h-20) &= 9\pi(h-28) \\ h-20 &= 9h-252 \\ 8h &= 232 \\ h &= 29 \end{aligned}$$

La hauteur totale de la bouteille est de 29 cm. RÉPONSE : (A)

25. Un palindrome est un entier strictement positif dont les chiffres peuvent être lus de gauche à droite ou de droite à gauche, tout en donnant le même nombre. Par exemple, le nombre 2882 est un palindrome de quatre chiffres et le nombre 49194 est un palindrome de cinq chiffres. Il existe des paires de palindromes de quatre chiffres dont la somme est un palindrome de cinq chiffres. À titre d'exemple, les nombres 2882 et 9339. Combien de telles paires existe-t-il?

(**A**) 28 (**B**) 32 (**C**) 36 (**D**) 40 (**E**) 44

Solution

Puisqu'on additionne deux palindromes de quatre chiffres pour obtenir un palindrome de cinq chiffres, il doit s'agir de nombres de la forme suivante,

$$\begin{array}{r} a\,b\,b\,a \\ c\,d\,d\,c \\ \hline 1\,e\,f\,e\,1 \end{array}$$

c'est-à-dire que le premier chiffre de la somme doit être 1.
On conclut que $a+c=11$, puisque le chiffre des unités de $a+c$ est 1 et que $10<a+c<20$.
Il y a quatre valeurs possibles de *a* et de *c* :

a	2	3	4	5
c	9	8	7	6

On remarque que l'on pourrait prolonger le tableau, mais on obtiendrait les valeurs de *a* attribuées à *c* et vice versa.
On considère un de ces cas, $a=2$ et $c=9$.

$$\begin{array}{r} 2\,b\,b\,2 \\ 9\,d\,d\,9 \\ \hline 1\,e\,f\,e\,1 \end{array}$$

On voit que l'on peut former des palindromes de deux façons possibles, selon qu'il y a une retenue ou non. En effet, si on porte attention au *e* dans la colonne des milliers, on voit que $e=1$ s'il n'y a aucune retenue ou que $e=2$ s'il y a une retenue.
Si $e=1$, on voit, d'après les colonnes des dizaines et des centaines, que $b+d=0$, c'est-à-dire que $b=d=0$.
Si $e=2$, on voit, d'après les colonnes des dizaines et des centaines, que $b+d=11$.
Quelles que soient les valeurs de *a* et de *c* choisies, on doit avoir $b=d=0$ ou $b+d=11$.
On revient à la situation générale en examinant ces deux cas.

1^er^ cas : $b=d=0$
Il y a 4 possibilités pour les valeurs de *a* et de *c*. Dans chaque cas, on a $b=d=0$ puisque $b+d=0$.

2^e^ cas : $b+d=11$
Pour chacune des 4 possibilités pour les valeurs de *a* et de *c*, il y a 8 façons de choisir des valeurs de *b* et de *d* pour que $b+d=11$. Il y a donc 32 possibilités dans ce cas.
Il y a un total de $4+32$, ou 36 possibilités.

RÉPONSE : (C)

✿✿✿✿✿✿✿✿✿✿

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2000 Solutions
Concours Pascal (9e - Sec. III)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Partie A

1. La valeur de $5^2 + 2(5-2)$ est :

(**A**) 16 (**B**) 19 (**C**) 31 (**D**) 36 (**E**) 81

Solution

Selon l'ordre priotaire des opérations, on a : $5^2 + 2(5-2)$

$$\begin{aligned} &= 25 + 2(3) \\ &= 25 + 6 \\ &= 31 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (C)

2. La somme de $29 + 12 + 23$ est égale à :

(**A**) 32^2 (**B**) 2^6 (**C**) 3^4 (**D**) 1^{64} (**E**) 64^0

Solution

On évalue chacun des choix : $32^2 = 1024$, $2^6 = 64$, $3^4 = 81$, $1^{64} = 1$ et $64^0 = 1$.

Puisque $29 + 12 + 23 = 64$, la réponse est B. RÉPONSE : (B)

3. Si $x = 4$ et $y = -3$, alors la valeur de $\dfrac{x-2y}{x+y}$ est :

(**A**) $-\frac{1}{2}$ (**B**) -2 (**C**) $\frac{10}{7}$ (**D**) $-\frac{2}{7}$ (**E**) 10

Solution

Si $x = 4$ et $y = -3$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{x-2y}{x+y} &= \frac{4-2(-3)}{4+(-3)} \\ &= \frac{10}{1} \\ &= 10 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (E)

4. Si la suite de cinq flèches, illustrée ci-dessous, se répète sans cesse, quelle flèche sera située dans la 48e position?

$\longrightarrow$, $\nearrow$, $\nwarrow$, $\longleftarrow$, $\downarrow$

(A) $\longrightarrow$ **(B)** $\nearrow$ **(C)** $\nwarrow$ **(D)** $\longleftarrow$ **(E)** $\downarrow$

Solution

Puisque la suite se répète, après neuf cycles, la cinquième flèche sera dans la 45^e position. La troisième flèche sera donc dans la 48^e position.

RÉPONSE : (C)

5. Si $y = 6 + \frac{1}{6}$, alors $\frac{1}{y}$ est égal à :

(A) $\frac{6}{37}$ **(B)** $\frac{37}{6}$ **(C)** $\frac{6}{7}$ **(D)** $\frac{7}{6}$ **(E)** 1

Solution

On a $6 + \frac{1}{6} = \frac{36}{6} + \frac{1}{6}$, ou $\frac{37}{6}$. Puisque $y = \frac{37}{6}$, $\frac{1}{y} = \frac{6}{37}$.

RÉPONSE : (A)

6. Si les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{23}{30}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{11}{15}$ et $\frac{4}{5}$ sont écrites en ordre, de la plus petite à la plus grande, la fraction du milieu sera :

(A) $\frac{23}{30}$ **(B)** $\frac{4}{5}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{9}{10}$ **(E)** $\frac{11}{15}$

Solution

Pour comparer les fractions, on les exprime au moyen d'un dénominateur commun. Puisque le plus petit commun multiple de 3, 30, 10, 15 et 5 est 30, on a :

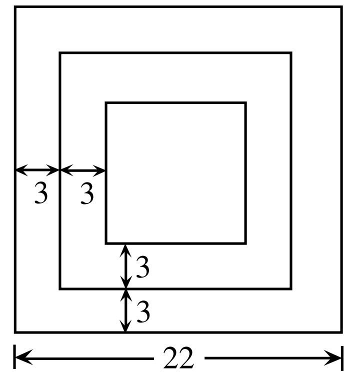
Fraction donnée	Fraction équivalente
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{10}{10} = \frac{20}{30}$
$\frac{23}{30}$	$\frac{23}{30}$
$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10} \times \frac{3}{3} = \frac{27}{30}$
$\frac{11}{15}$	$\frac{11}{15} \times \frac{2}{2} = \frac{22}{30}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5} \times \frac{6}{6} = \frac{24}{30}$

On les place en ordre croissant : $\frac{20}{30}$, $\frac{22}{30}$, $\frac{23}{30}$, $\frac{24}{30}$ et $\frac{27}{30}$

La fraction du milieu est $\frac{23}{30}$.

RÉPONSE : (A)

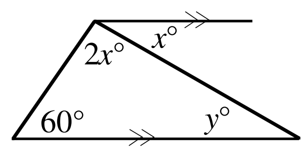
7. Le diagramme illustre trois carrés ayant un même centre et dont les côtés correspondants sont parallèles. Il y a une distance de 3 unités entre les côtés correspondants. Le plus grand carré a des côtés de 22 unités. Quel est le périmètre du plus petit carré?



(**A**) 40 (**B**) 100 (**C**) 10
(**D**) 64 (**E**) 20

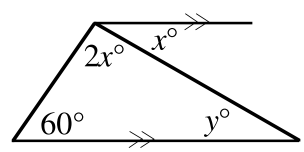
Solution
Les côtés du carré du milieu mesurent chacun 6 unités de moins que ceux du grand carré. Ils mesurent donc 16 unités. De même, les côtés du petit carré mesurent chacun 6 unités de moins que ceux du carré du milieu. Ils mesurent donc 10 unités.
Le petit carré a donc un périmètre de 4×10, ou 40 unités. RÉPONSE : (A)

8. D'après le diagramme, la valeur de y est :



(**A**) 30 (**B**) 20 (**C**) 80
(**D**) 60 (**E**) 40

Solution
Puisque les lignes horizontales sont parallèles, on a des angles alternes-internes congrus, d'où $x = y$. Dans le triangle, on a donc $2x° + x° + 60° = 180°$. Donc $3x° = 120°$, d'où $x = 40$. Puisque $x = y$, alors $y = 40$.



RÉPONSE : (E)

9. Trois candidats du concours Pascal sont âgés de 14 ans et 9 mois, 15 ans et 1 mois et 14 ans et 8 mois. La moyenne de leur âge est :

(**A**) 14 ans et 8 mois (**B**) 14 ans et 9 mois (**C**) 14 ans et 10 mois
(**D**) 14 ans et 11 mois (**E**) 15 ans

Solution 1
On choisit l'âge du plus jeune comme repère. Les deux autres candidats ont respectivement un mois de plus et cinq mois de plus. Puisque $\frac{0+1+5}{3} = 2$, la moyenne de leur âge est 2 mois de plus que l'âge du plus jeune. La moyenne de leur âge est donc 14 ans et 10 mois.

Solution 2
Cette solution exige plus de calculs. Puisqu'il y a 12 mois dans une année, le premier est âgé de $14 \times 12 + 9$, ou 177 mois. De même, les deux autres candidats sont âgés de 181 et de 176 mois. La moyenne de leur âge est égale à $\frac{177+181+176}{3}$, ou 178 mois. Puisque $178 = 12 \times 14 + 10$, la moyenne de leur âge est de 14 ans et 10 mois. RÉPONSE : (C)

10. Le nombre d'entiers entre les nombres $-\sqrt{8}$ et $\sqrt{32}$ est :

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 19

Solution
Puisque $-\sqrt{8} \doteq -2{,}8$ et $\sqrt{32} \doteq 5{,}7$, les entiers entre les nombres $-2{,}8$ et $5{,}7$ sont -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 et 5. Il y a huit entiers. RÉPONSE : (D)

Partie B

11. Un magasin de vêtements met ses tee-shirts en solde. Pour chaque achat de deux tee-shirts au prix régulier, on obtient un troisième tee-shirt au prix de 1 $. Si on obtient 12 tee-shirts pour 120 $, quel est le prix régulier d'un tee-shirt?

(**A**) 10,00 $ (**B**) 13,50 $ (**C**) 14,00 $ (**D**) 14,50 $ (**E**) 15,00 $

Solution 1
On a acheté quatre lots de trois tee-shirts au prix de 120 $. Chaque lot a donc coûté 30 $. Puisque le troisième tee-shirt coûte 1 $, les deux autres ont coûté 29 $, soit 14,50 $ chacun.

Solution 2
Soit x dollars le prix régulier d'un tee-shirt. Si on achète un lot de trois tee-shirts, on paiera donc $(2x+1)$ dollars. Puisque 12 tee-shirts coûtent 120 $, un lot de trois tee-shirts coûte 30 $. Donc $2x+1=30$, d'où $x = 14{,}50$. Le prix régulier d'un tee-shirt est de 14,50 $.

RÉPONSE : (D)

12. Dans ce diagramme, chaque nombre à partir de 30 est égal au double de la somme des deux nombres qui le précèdent, à sa gauche. Quelle est la valeur de c?

10	a	30	b	c

(**A**) 50 (**B**) 70 (**C**) 80 (**D**) 100 (**E**) 200

Solution

D'après les trois premières cases, on a :

$$30 = 2(10 + a)$$
$$15 = a + 10$$
$$a = 5$$

Puisque $a = 5$, alors $b = 2(30 + 5)$, ou 70 et $c = 2(70 + 30)$, ou 200. RÉPONSE : (E)

13. Dans l'expression $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$, chaque lettre est remplacée par un nombre différent choisi parmi 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Quelle est la plus grande valeur possible de cette expression?

(**A**) $8\frac{2}{3}$ (**B**) $9\frac{5}{6}$ (**C**) $9\frac{1}{3}$ (**D**) $9\frac{2}{3}$ (**E**) $10\frac{1}{3}$

Solution

Pour obtenir la plus grande valeur possible de l'expression, il faut maximiser chaque fraction. On choisira donc le plus grand nombre possible comme numérateur d'une fraction et le plus petit nombre possible comme dénominateur. La première fraction sera donc $\frac{6}{1}$. On choisit parmi les nombres qui restent pour obtenir $\frac{5}{2}$ et $\frac{4}{3}$. On obtient donc :

$$6 + \frac{5}{2} + \frac{4}{3}$$
$$= \frac{36 + 15 + 8}{6}$$
$$= \frac{59}{6}, \text{ ou } 9\frac{5}{6}$$

RÉPONSE : (B)

14. Les nombres 6, 14, x, 17, 9, y et 10 ont une médiane de 12 et une moyenne de 13. Quelle est la valeur de $x + y$?

(**A**) 20 (**B**) 21 (**C**) 23 (**D**) 25 (**E**) 35

Solution

Puisque sept nombres ont une moyenne de 13, leur somme est égale à 7×13, ou 91. Donc $6 + 14 + x + 17 + 9 + y + 10 = 91$, d'où $x + y = 35$. RÉPONSE : (E)

15. Les chiffres 1, 1, 2, 2, 3 et 3 sont placés de manière à former un entier impair de six chiffres. Les « 1 » sont séparés par un chiffre, les « 2 » sont séparés par deux chiffres et les « 3 » sont séparés par trois chiffres. Quels sont les trois derniers chiffres de l'entier?

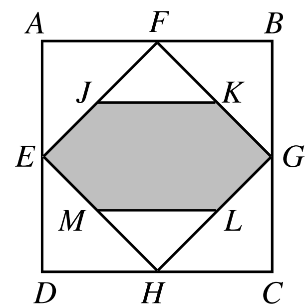
(**A**) 3 1 2 (**B**) 1 2 3 (**C**) 1 3 1 (**D**) 1 2 1 (**E**) 2 1 3

Solution

Deux nombres, soit 312132 et 231213, satisfont aux conditions de séparation. Puisque le nombre doit être impair, il s'agit donc de 231213. Les trois derniers chiffres sont 2 1 3.

RÉPONSE : (E)

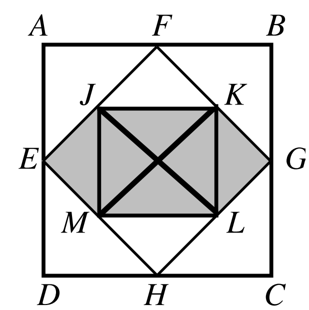
16. Le carré $ABCD$ a une aire de 64. On joint les milieux de ses côtés pour former le carré $EFGH$. Les points J, K, L et M sont les milieux des côtés de $EFGH$. L'aire de la partie ombrée est égale à :



(**A**) 32 (**B**) 24 (**C**) 20
(**D**) 28 (**E**) 16

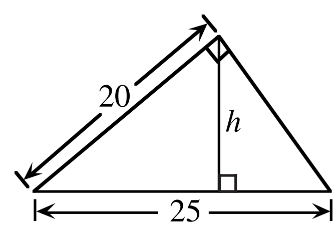
Solution

On trace les segments illustrés dans le diagramme. Le carré $FGHE$ est divisé en huit triangles congruents dont six sont ombrés. Or l'aire du carré $FGHE$ est la moitié de l'aire du carré $ABCD$. L'aire de la partie ombrée est égale à $\frac{6}{8}\times\left(\frac{1}{2}\times 64\right)$, ou 24.



RÉPONSE : (B)

17. Dans ce diagramme, la valeur de la hauteur h est :



(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 10
(**D**) 12 (**E**) 15

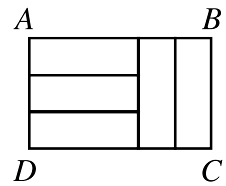
Solution

Puisque le grand triangle est semblable à un triangle $3:4:5$, le troisième côté a une longueur de 15 car $3:4:5 = 15:20:25$. (On peut utiliser le théorème de Pythagore et calculer $\sqrt{25^2 - 20^2} = 15$.) On peut calculer l'aire du triangle en utilisant la base de 20 ou la base de 25. On obtient alors

$$\frac{1}{2}(20)(15) = \frac{1}{2}(h)(25)$$
$$300 = 25h$$
$$h = 12$$

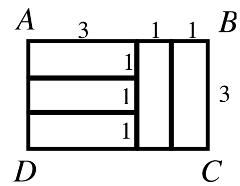
RÉPONSE : (D)

18. Les cinq petits rectangles du diagramme sont identiques. Le rapport $AB{:}BC$ est égal à :



(**A**) 3:2 (**B**) 2:1 (**C**) 5:2
(**D**) 5:3 (**E**) 4:3

Solution
Si chaque petit rectangle a une largeur de 1 unité, chacun a une longueur de 3 unités comme l'indique le diagramme.
On voit que $AB:BC = 5{:}3$.



RÉPONSE : (D)

19. L'année 2000 est bissextile. L'année 2100 ne sera pas bissextile. Voici les règles pour établir une année bissextile :
i L'année A n'est pas bissextile si A n'est pas divisible par 4.
ii L'année A est bissextile si A est divisible par 4, mais pas par 100.
iii L'année A n'est pas bissextile si A est divisible par 100, mais pas par 400.
iv L'année A est bissextile si A est divisible par 400.
Combien y aura-t-il d'années bissextiles de l'an 2000 à l'an 3000 inclusivement?

(**A**) 240 (**B**) 242 (**C**) 243 (**D**) 244 (**E**) 251

Solution
Si on considère les 1001 années de l'an 2000 à l'an 3000, il y a 251 années dont le numéro est divisible par 4. Chacune est une année bissextile sauf les années 2100, 2200, 2300, 2500, 2600, 2700, 2900 et 3000. Il y a donc $251-8$, ou 243 années bissextiles de l'an 2000 à l'an 3000.

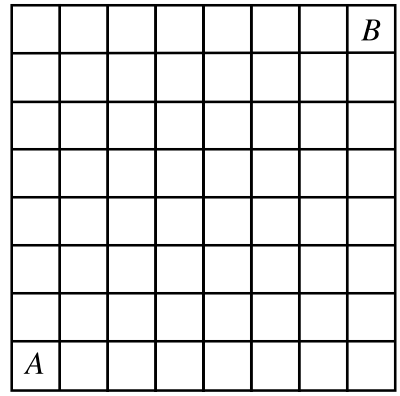
RÉPONSE : (C)

20. On trace une ligne droite au travers d'un échiquier 8 sur 8. Quel est le plus grand nombre de carrés 1 sur 1 que la droite peut traverser?

(**A**) 12 (**B**) 14 (**C**) 16 (**D**) 11 (**E**) 15

Solution

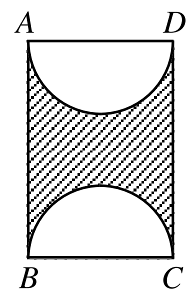
Supposons que la ligne droite part du carré A et se termine dans le carré B. Pour traverser le plus grand nombre de carrés, il faut traverser sept lignes horizontales et sept lignes verticales. On peut traverser un nouveau carré chaque fois que l'on traverse une ligne si on évite de traverser la ligne à un coin. On peut donc traverser 14 nouveaux carrés pour un total de 15 carrés.



RÉPONSE : (E)

Partie C

21. $ABCD$ est un rectangle et $AD = 10$. Si la partie ombrée a une aire de 100, quelle est la plus petite distance entre les deux demi-cercles?



(**A**) $2{,}5\pi$ (**B**) 5π (**C**) π
(**D**) $2{,}5\pi + 5$ (**E**) $2{,}5\pi - 2{,}5$

Solution

Puisque $AD = 10$, chaque demi-cercle a un rayon de 5 unités. Puisque les deux demi-cercles forment un cercle de rayon 5, leur aire totale est égale à $\pi(5)^2$, ou 25π. Le rectangle a donc une aire de $25\pi + 100$. Puisque sa largeur est égale à 10, on a $10(AB) = 25\pi + 100$, d'où $AB = 2{,}5\pi + 10$. La plus petite distance entre les deux demi-cercles est donc égale à $(2{,}5\pi + 10) - 10$, ou $2{,}5\pi$.

RÉPONSE : (A)

22. On considère un morceau de bois ayant la forme d'un prisme droit à base rectangulaire et dont les dimensions sont 4 sur 5 sur 6. On recouvre ce morceau de bois d'une couche de peinture verte, puis on le découpe en petits cubes mesurant 1 sur 1 sur 1. Le rapport du nombre de cubes ayant exactement deux faces vertes au nombre de cubes ayant trois faces vertes est égal à :

(**A**) 9:2 (**B**) 9:4 (**C**) 6:1 (**D**) 3:1 (**E**) 5:2

Solution

Les cubes dans les coins ont trois faces vertes. Il y en a huit. Les cubes ayant exactement deux faces vertes sont placés le long des arêtes sans être dans les coins. Chaque arête de longueur 4 compte donc deux tels cubes. Chaque arête de longueur 5 en compte trois et chaque arête de longueur 6 en compte quatre. Le nombre de cubes ayant exactement deux faces vertes est donc égal à $4(4)+4(3)+4(2)$, ou 36. Le rapport demandé est égal à $36:8$, ou $9:2$. RÉPONSE : (A)

23. On considère un entier de 2000 chiffres dont le premier chiffre, à l'extrême gauche, est un 3. Les chiffres de l'entier sont placés de manière que n'importe quels deux chiffres consécutifs forment un nombre divisible par 17 ou par 23. Le 2000^{e} chiffre peut être a ou b. Quelle est la valeur de $a+b$?

(**A**) 3 (**B**) 7 (**C**) 4 (**D**) 10 (**E**) 17

Solution
On remarque que les multiples de 17 formés de deux chiffres sont 17, 34, 51, 68 et 85. De même, les multiples de 23 formés de deux chiffres sont 23, 46, 69 et 92. Puisque le premier chiffre de l'entier est un 3 et que seul le nombre 34 dans la liste des multiples commence par un 3, le deuxième chiffre de l'entier doit être un 4. De même, le troisième chiffre doit être un 6. Le quatrième chiffre peut être un 8 ou un 9. On considère deux cas.

1er cas
Le quatrième chiffre est un 8. Les chiffres suivants sont 5, 1 et 7. Puisqu'il n'y aucun multiple dans la liste qui commence par un 7, l'entier est 3468517.

2^{e} cas
Le quatrième chiffre est un 9. On obtient alors 34692 34692 34… Les cinq chiffres '34692' se répéteront à l'infini tant que l'on choisit le chiffre 9 après le chiffre 6.

Un entier de 2000 chiffres doit contenir 399 groupes des chiffres '34692'. Les cinq derniers chiffres peuvent être 34692 ou 34685. Le 2000^{e} chiffre peut donc être un 2 ou un 5. Donc $a+b=2+5=7$.

RÉPONSE : (B)

24. Il y a sept points sur une feuille de papier. Exactement quatre de ces points sont placés en ligne droite. Aucune autre droite ne contient plus de deux des points. Si on forme des triangles dont les sommets sont choisis parmi ces points, combien de triangles peut-on former?

(**A**) 18 (**B**) 28 (**C**) 30 (**D**) 31 (**E**) 33

Solution
On considère trois cas par rapport aux quatre points qui sont situés sur une même droite.

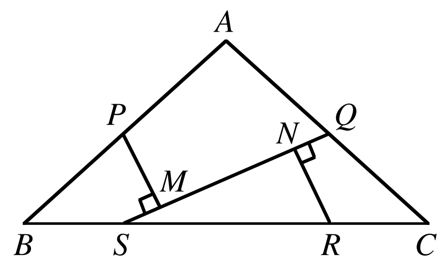
1^er^ cas Les triangles n'ont aucun sommet sur la droite.
Puisqu'il n'y a que trois points qui ne sont pas sur la droite, on ne peut former qu'un triangle avec ces points.

2^e^ cas Les triangles ont chacun un sommet sur la droite.
Il y a quatre choix possibles pour le point sur la droite. Pour chacun de ces choix, il y a trois façons de choisir deux des trois points qui ne sont pas sur la droite. Il y a donc 4×3, ou 12 triangles possibles.

3^e^ cas Les triangles ont chacun deux sommets sur la droite.
Il y a six façons de choisir deux points sur la droite. Pour chaque choix, on peut choisir un des trois points qui ne sont pas sur la droite. Il y a donc 6×3, ou 18 triangles possibles.

En tout, il y a $1+12+18$, ou 31 triangles possibles. RÉPONSE : (D)

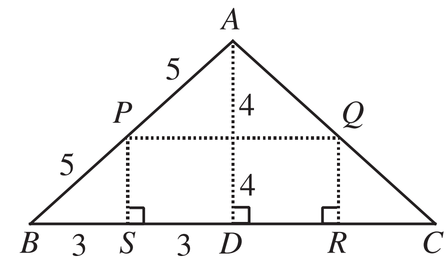
25. Le triangle ABC est isocèle, où $AB = AC = 10$ et $BC = 12$. Les points S et R sont situés sur BC de manière que $BS:SR:RC = 1:2:1$. P et Q sont les milieux respectifs de AB et de AC. PM et RN sont des perpendiculaires à SQ. La longueur de MN est égale à :



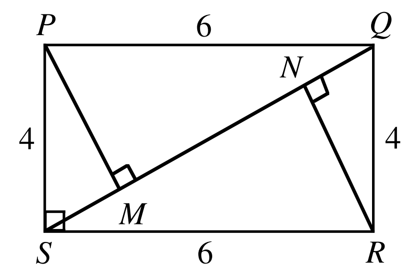
(A) $\frac{9}{\sqrt{13}}$ (B) $\frac{10}{\sqrt{13}}$ (C) $\frac{11}{\sqrt{13}}$ (D) $\frac{12}{\sqrt{13}}$ (E) $\frac{5}{2}$

Solution

On trace la hauteur AD. Puisque le triangle ABC est isocèle, $BD = 6$ et $AP = PB = AQ = QC = 5$. Puisque le triangle ABD est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $AD = 8$. On trace les segments PQ, PS et QR. Les triangles ABD et PBS sont semblables. En effet, ils ont un angle commun et $AB{:}PB = BD{:}BS = 2{:}1$. Donc $PS = 4$ et le côté PS est parallèle au côté AD. Par symétrie, $QR = 4$ et le côté QR est parallèle au côté AD. $PQRS$ est donc un rectangle et $PQ = 6$ puisque $SR = 6$.



On a donc le diagramme ci-contre.



Puisque le triangle QRS est rectangle, $SQ^2 = 4^2 + 6^2$, d'où $SQ = \sqrt{52}$ ou $SQ = 2\sqrt{13}$.
Le rectangle a une aire de 24. Le triangle QRS a donc une aire de 12. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(SQ)(NR) &= 12\\ \frac{1}{2}\left(2\sqrt{13}\right)(NR) &= 12\\ NR &= \frac{12}{\sqrt{13}}\end{aligned}$$

Puisque le triangle NQR est rectangle :

$$\begin{aligned}NR^2 + NQ^2 &= QR^2\\ \left(\frac{12}{\sqrt{13}}\right)^2 + NQ^2 &= 4^2\\ \frac{144}{13} + NQ^2 &= 16\\ NQ^2 &= 16 - \frac{144}{13}\\ &= \frac{208}{13} - \frac{144}{13}\\ &= \frac{64}{13}\end{aligned}$$

Donc $NQ = \dfrac{8}{\sqrt{13}}$. De même, $MS = \dfrac{8}{\sqrt{13}}$.

Puisque $SQ = 2\sqrt{13}$:

$$
\begin{aligned}
MN &= 2\sqrt{13} - 2\left(\frac{8}{\sqrt{13}}\right) \\
&= \frac{26}{\sqrt{13}} - \frac{16}{\sqrt{13}} \\
&= \frac{10}{\sqrt{13}}
\end{aligned}
$$

RÉPONSE : (B)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1999 Solutions
Concours Pascal (9[e] - Sec. III)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

Partie A

1. La valeur de $\dfrac{4\times4+4}{2\times2-2}$ est :

(**A**) 2 (**B**) 6 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 18

Solution

$$\frac{4\times4+4}{2\times2-2}=\frac{20}{2}$$
$$=10$$

RÉPONSE : (C)

2. Si $k=2$, alors $(k^3-8)(k+1)$ est égal à :

(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) -6

Solution

Si $k=2$, $(k^3-8)(k+1)$
$$=(2^3-8)(2+1)$$
$$=0(3)$$
$$=0.$$

RÉPONSE : (A)

3. Si $4(♥)^2=144$, alors une valeur de ♥ est :

(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 18

Solution

$4(♥)^2=144$

$♥^2=36$

$♥=\pm6$

RÉPONSE : (B)

4. Lequel des nombres suivants est un diviseur du nombre $\left(15+\sqrt{49}\right)$?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 11

Solution

$$15+\sqrt{49}=15+7$$
$$=22$$

Parmi les cinq choix, le seul diviseur de 22 est 11.

RÉPONSE : (E)

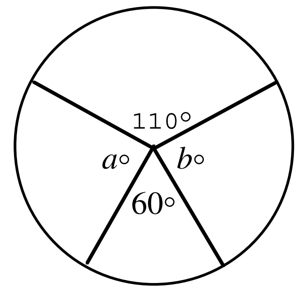
5. Si 10 % de 400 est diminué de 25, le résultat est égal à :

(**A**) 15 (**B**) 37,5 (**C**) 65 (**D**) 260 (**E**) 3975

Solution
10 % de 400 est égal à 40.
$40 - 25 = 15$ RÉPONSE : (A)

6. D'après le diagramme, $a + b$ est égal à :

(**A**) 10 (**B**) 85 (**C**) 110
(**D**) 170 (**E**) 190



Solution
Les mesures des angles au centre du cercle ont une somme de 360°.
Donc $a + b + 110 + 60 = 360$.
Donc $a + b = 190$. RÉPONSE : (E)

7. Si $2x - 1 = 5$ et $3y + 2 = 17$, alors la valeur de $2x + 3y$ est :

(**A**) 8 (**B**) 19 (**C**) 21 (**D**) 23 (**E**) 25

Solution
Puisque $2x - 1 = 5$, alors $2x = 6$.
Puisque $3y + 2 = 17$, alors $3y = 15$.
Donc : $2x + 3y = 6 + 15$
$= 21$ RÉPONSE : (C)

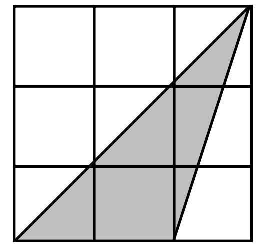
Remarque : Il n'était pas nécessaire de résoudre les deux équations au complet pour déterminer la réponse. Il suffisait de déterminer les valeurs de $2x$ et $3y$.

8. La moyenne des notes de quatre épreuves est égale à 60. Les trois premières notes sont 30, 55 et 65. Quelle est la quatrième note?

(**A**) 40 (**B**) 55 (**C**) 60 (**D**) 70 (**E**) 90

Solution
La somme des notes des quatre épreuves est égale à 4×60, ou 240. La somme des notes des trois premières épreuves est égale à 150. La quatrième note est égale à $240 - 150$, ou 90.
RÉPONSE : (E)

9. Chaque petit carré du diagramme mesure 1 cm sur 1 cm. L'aire de la région ombrée, en centimètres carrés, est égale à :



(**A**) 2,75 (**B**) 3 (**C**) 3,25
(**D**) 4,5 (**E**) 6

Solution
Le triangle ombré a une base de 2 cm et une hauteur de 3 cm.
Son aire est égale à $\frac{2\times 3}{2}$, ou 3 cm^2. RÉPONSE : (B)

10. $10+10^3$ est égal à :

(**A**) $2,0\times 10^3$ (**B**) $8,0\times 10^3$ (**C**) $4,0\times 10^1$ (**D**) $1,0\times 10^4$ (**E**) $1,01\times 10^3$

Solution
$$\begin{aligned}10+10^3 &= 10+1000\\ &= 1010\\ &= 1,01\times 10^3\end{aligned}$$
RÉPONSE : (E)

Partie B

11. Nous sommes aujourd'hui mercredi. Quel jour de la semaine serons-nous dans 100 jours?

(**A**) lundi (**B**) mardi (**C**) jeudi (**D**) vendredi (**E**) samedi

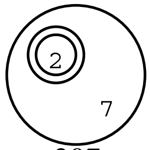
Solution
Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine et que $98 = 7\times 14$, nous serons un mercredi dans 98 jours. Dans 100 jours, nous serons donc un vendredi. RÉPONSE : (D)

12. Une montre à affichage digital indique 5:55. Combien de minutes s'écouleront avant que la montre indique de nouveau des chiffres qui sont tous identiques?

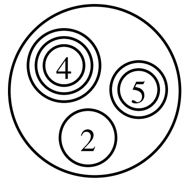
(**A**) 71 (**B**) 72 (**C**) 255 (**D**) 316 (**E**) 436

Solution
Les prochains chiffres identiques seront 11:11. Cela représente une différence de 316 minutes. (On remarque que les affichages 6:66, 7:77, etc., sont impossibles.) RÉPONSE : (D)

13. Au *Pays des ronds*, on représente les nombres 207 et 4520 de la façon suivante :

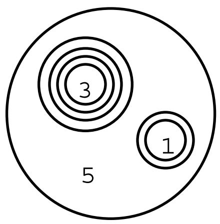


207



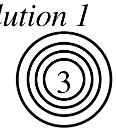
4520

Au *Pays des ronds*, quel nombre est représenté par le diagramme suivant?



(**A**) 30 105 (**B**) 30 150 (**C**) 3105 (**D**) 3015 (**E**) 315

Solution 1



$= 3 \times 10^4$
$= 30\,000$

$= 1 \times 10^2$
$= 100$

$5 \; = 5 \times 10^0$
$= 5$

Le nombre représenté est égal à $30\,000 + 100 + 5$, ou $30\,105$.

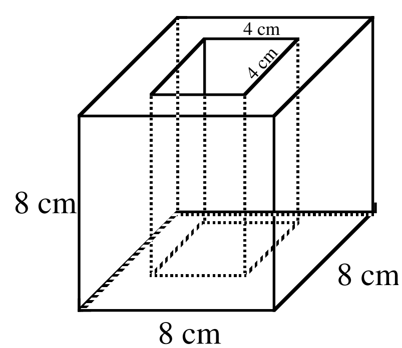
Solution 2

Puisqu'il y a quatre ronds autour du '3', cela représente le nombre 3×10^4, ou $30\,000$.
Le '5' représente 5 unités. Le seul nombre possible parmi les cinq choix est donc $30\,105$.

RÉPONSE : (A)

14. Le diagramme illustre un cube de 8 cm dans lequel on a creusé un trou ayant la forme d'un carré de 4 cm. Quel est le volume, en cm^3, du bloc troué?

(**A**) 64 (**B**) 128 (**C**) 256
(**D**) 384 (**E**) 448



Solution
Le volume du bloc troué, en cm^3, est égal à :
$8 \times 8 \times 8 - 8 \times 4 \times 4 = 384$ RÉPONSE : (D)

15. Pour combien de valeurs de *k* le nombre de quatre chiffres $7k52$ est-il divisible par 12?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

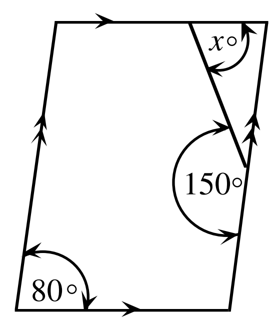
Solution
Puisque $12 = 4 \times 3$, le nombre $7k52$ doit être divisible par 4 et par 3 pour être divisible par 12. Puisque le nombre 52, formé des deux derniers chiffres, est divisible par 4 alors le nombre $7k52$ est lui-même divisible par 4, peu importe la valeur de *k*. Pour que le nombre $7k52$ soit divisible par 3, il faut que la somme de ses chiffres, $7 + k + 5 + 2$, ou $14 + k$, soit divisible par 3. Les seules valeurs possibles de *k* sont 1, 4 et 7. On peut vérifier que les nombres 7152, 7452 et 7752 sont divisibles par 12.
Il y a donc 3 valeurs possibles de *k*. RÉPONSE : (D)

16. Lors d'une élection, Hubert a reçu 60 % des votes et Jeanne a reçu tous les autres votes. Si Hubert a gagné par 24 votes, combien de personnes ont voté?

(**A**) 40 (**B**) 60 (**C**) 72 (**D**) 100 (**E**) 120

Solution
Puisque Hubert a reçu 60 % des votes, Jeanne a reçu 40 % des votes. Il y a donc une différence de 20 % des votes entre eux, soit 24 votes.
Le nombre de personnes qui ont voté est donc égal à 5×24, ou 120. RÉPONSE : (E)

17. Le diagramme illustre un parallélogramme. Quelle est la valeur de *x*?

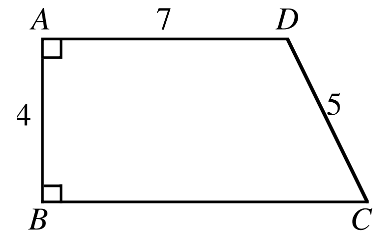


(**A**) 30 (**B**) 50 (**C**) 70
(**D**) 80 (**E**) 150

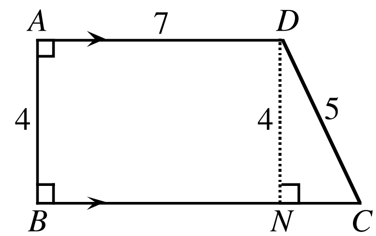
Solution
Dans le parallélogramme, l'angle opposé à l'angle de $80°$ mesure lui-même $80°$.
Le supplément de l'angle de $150°$ mesure $30°$.
Dans le triangle, on a donc $x° + 80° + 30° = 180°$.
Donc $x = 70$. RÉPONSE : (C)

18. Dans le diagramme, on a $AD < BC$. Quel est le périmètre de $ABCD$?

(**A**) 23 (**B**) 26 (**C**) 27
(**D**) 28 (**E**) 30



Solution
Au point D, on abaisse une perpendiculaire DN à BC. Puisque $ADNB$ est un rectangle, alors $DN = 4$ et $BN = 7$. Puisque le triangle CDN est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $NC = 3$. On a donc $BC = 7 + 3$, ou 10.
Le périmètre est égal à $7 + 5 + 10 + 4$, ou 26.



RÉPONSE : (B)

19. On place les nombres 49, 29, 9, 40, 22, 15, 53, 33, 13 et 47 en paires de manière que la somme des nombres de chaque paire soit la même. Quel nombre forme une paire avec 15?

(**A**) 33 (**B**) 40 (**C**) 47 (**D**) 49 (**E**) 53

Solution 1
Si on place les nombres en ordre ascendant, on obtient 9, 13, 15, 22, 29, 33, 40, 47, 49, 53.
Pour obtenir des sommes égales, on forme les paires suivantes : $9 \leftrightarrow 53$, $13 \leftrightarrow 49$, $15 \leftrightarrow 47$, $22 \leftrightarrow 40$, $29 \leftrightarrow 33$.

Solution 2
La somme des 10 nombres est égale à 310. Chacune des cinq paires doit donc avoir une somme de $\frac{310}{5}$, ou 62. Le nombre 47 forme donc une paire avec 15. RÉPONSE : (C)

20. Le chiffre des unités du produit $(5+1)\left(5^3+1\right)\left(5^6+1\right)\left(5^{12}+1\right)$ est :

(**A**) 6 (**B**) 5 (**C**) 2 (**D**) 1 (**E**) 0

Solution
Si on développe les nombres 5^3, 5^6 et 5^{12}, le chiffre des unités de chaque nombre est 5. Si on développe les nombres $5+1$, 5^3+1, 5^6+1 et $5^{12}+1$, le chiffre des unités de chaque nombre est donc 6.
Si on multiplie deux nombres ayant chacun 6 pour chiffre des unités, le produit aura aussi 6 pour chiffre des unités. Le chiffre des unités du produit $(5+1)\left(5^3+1\right)\left(5^6+1\right)\left(5^{12}+1\right)$ est donc 6.

RÉPONSE : (A)

Partie C

21. Un nombre est *Beprisque* s'il est le seul nombre naturel situé entre un nombre premier et un carré parfait (p. ex., 10 est Beprisque, mais 12 ne l'est pas). Combien y a-t-il de nombres de deux chiffres qui sont Beprisque, incluant le nombre 10?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution
On cherche les suites de trois entiers consécutifs du genre {C, B, P} ou {P, B, C}, où C est un carré parfait et P est un nombre premier. B est alors un nombre Beprisque.
Puisque B doit être un nombre de deux chiffres, $P \neq 2$. Donc P, qui est un nombre premier, doit être impair. C doit aussi être impair, puisqu'il est deux de plus ou deux de moins que P.
On examine les possibilités à partir des carrés parfaits impairs 9, 25, 49 et 81 : {9, **10**, 11}, {23, **24**, 25}, {25, 26, 27}, {47, **48**, 49}, {49, 50, 51}, {79, **80**, 81}, {81, **82**, 83}
Les nombres Beprisque sont en caractères gras. Il y en a cinq. RÉPONSE : (E)

22. Si $w = 2^{129} \times 3^{81} \times 5^{128}$, $x = 2^{127} \times 3^{81} \times 5^{128}$, $y = 2^{126} \times 3^{82} \times 5^{128}$ et $z = 2^{125} \times 3^{82} \times 5^{129}$, alors ces nombres, placés en ordre du plus petit au plus grand, sont :

(**A**) *w*, *x*, *y*, *z* (**B**) *x*, *w*, *y*, *z* (**C**) *x*, *y*, *z*, *w* (**D**) *z*, *y*, *x*, *w* (**E**) *x*, *w*, *z*, *y*

Solution
Le plus grand commun diviseur des quatre nombres donnés est $k = 2^{125} \times 3^{81} \times 5^{128}$.
On écrit les quatre nombres sous la forme suivante, ce qui permet de les comparer :

$$w = 2^4\left(2^{125} \times 3^{81} \times 5^{128}\right), \qquad \text{ou} \qquad w = 16k,$$
$$x = 2^2\left(2^{125} \times 3^{81} \times 5^{128}\right), \qquad \text{ou} \qquad x = 4k,$$
$$y = 2 \cdot 3\left(2^{125} \times 3^{81} \times 5^{128}\right), \qquad \text{ou} \qquad y = 6k$$
$$z = 3 \cdot 5\left(2^{125} \times 3^{81} \times 5^{128}\right), \qquad \text{ou} \qquad z = 15k.$$

Donc $x < y < z < w$. RÉPONSE : (C)

23. Alain et Brigitte doivent se rendre à la ville voisine à une distance de 22,5 km. Ils partagent une bicyclette et doivent arriver en même temps. Brigitte part à bicyclette à une vitesse de 8 km/h. Plus tard, elle laisse la bicyclette et se met à marcher à une vitesse de 5 km/h. Alain marche d'abord à une vitesse de 4 km/h, puis en arrivant à la bicyclette, se met à pédaler à une vitesse de 10 km/h. Pendant combien de minutes la bicyclette a-t-elle été laissée de côté?

(**A**) 60 (**B**) 75 (**C**) 84 (**D**) 94 (**E**) 109

Solution
Dans ce genre de problème, il est important d'identifier une égalité dans l'énoncé. Puisque Alain et Brigitte doivent arriver en même temps, on a :

temps mis par Alain (pour se rendre à destination) = temps mis par Brigitte

Soit x la distance parcourue par Brigitte à bicyclette.

Dans le diagramme suivant, P est le point de départ, Q est l'endroit où la bicyclette est laissée et R est le point d'arrivée.

Alain parcourt les x km de P à Q à pied, à une vitesse de 4 km/h. Il met $\frac{x}{4}$ heures.

Il parcourt les $(22{,}5-x)$ km de Q à R à bicyclette, à une vitesse de 10 km/h.

Il met $\frac{22{,}5-x}{10}$ heures.

Brigitte parcourt les x km de P à Q à bicyclette, à une vitesse de 8 km/h. Elle met $\frac{x}{8}$ heures.

Elle parcourt les $(22{,}5-x)$ km de Q à R à pied, à une vitesse de 5 km/h.

Elle met $\frac{22{,}5-x}{5}$ heures.

L'égalité devient donc $\frac{x}{4}+\frac{22{,}5-x}{10}=\frac{x}{8}+\frac{22{,}5-x}{5}$.

$$40\left(\frac{x}{4}+\frac{22{,}5-x}{10}\right)=40\left(\frac{x}{8}+\frac{22{,}5-x}{5}\right)$$
$$10x+90-4x=5x+180-8x$$
$$6x+90=-3x+180$$
$$9x=90$$
$$x=10$$

Brigitte a donc utilisé la bicyclette pendant $\frac{10}{8}$, ou 1,25 heure. Alain a marché pendant $\frac{10}{4}$, ou 2,5 heures avant de prendre la bicyclette. La bicyclette a donc été laissée de côté pendant 1,25 heure, ou 75 minutes. RÉPONSE : (B)

24. On forme un nombre en utilisant les chiffres 1, 2, ..., 9. N'importe quel chiffre peut être utilisé plus d'une fois, mais deux chiffres en positions adjacentes doivent être différents. Lorsque deux chiffres paraissent en positions adjacentes, ces deux chiffres ne peuvent plus paraître ensemble dans le même ordre. Si on forme le plus grand nombre possible de cette façon, combien a-t-il de chiffres?

(**A**) 72 (**B**) 73 (**C**) 144 (**D**) 145 (**E**) 91

Solution

Il est possible de former 9×8, ou 72 paires différentes de chiffres, chaque paire étant composée de chiffres différents.

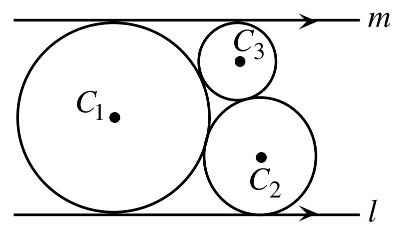
Or un nombre de n chiffres contient $(n-1)$ paires de chiffres en positions adjacentes. Par exemple, le nombre de 5 chiffres, 98712, contient 4 paires de chiffres en positions adjacentes, soit 98, 87, 71 et 12.

Donc le plus grand nombre pouvant contenir 72 paires différentes de chiffres en positions adjacentes ne peut avoir plus de 73 chiffres, autrement il y aurait des répétions. Un tel nombre existe-t-il? Oui. Le plus grand est le suivant :

98 97 96 95 94 93 92 91 87 86 85 84 83 82 81 76 75 74 73 72 71 65 64 63 62 61
54 53 52 51 43 42 41 32 31 21 9.

On peut vérifier qu'il contient 73 chiffres. RÉPONSE : (B)

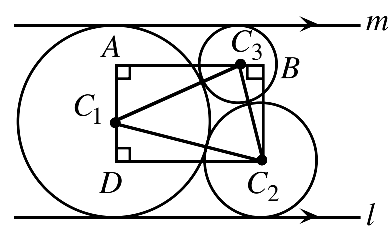
25. Deux cercles, C_1 et C_2, se touchent extérieurement. La droite l est une tangente commune. La droite m est parallèle à l et touche les deux cercles C_1 et C_3. Les trois cercles sont tangents l'un à l'autre. Si C_2 a un rayon de 9 et C_3 a un rayon de 4, quel est le rayon de C_1?



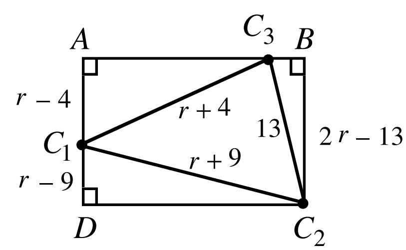
(**A**) 10.4 (**B**) 11 (**C**) $8\sqrt{2}$
(**D**) 12 (**E**) $7\sqrt{3}$

Solution

On joint d'abord les centres pour former le triangle $C_1C_2C_3$. Chaque segment joignant deux centres passe par le point de tangence des deux cercles. Sa longueur est donc égale à la somme des rayons des deux cercles.



On construit ensuite le rectangle ABC_2D illustré dans le diagramme. Soit r le rayon du cercle de centre C_1. Alors $C_1C_2 = r+9$, $C_1C_3 = r+4$ et $C_2C_3 = 13$.



On peut ensuite représenter certaines longueurs comme dans le diagramme en comparant les rayons des cercles. Par exemple, la longueur C_1D est égale au rayon du grand cercle moins le rayon du cercle de centre C_2. Donc $C_1D = r-9$.

Un raisonnement semblable donne $C_1A = r-4$ et $BC_2 = 2r-13$.

Puisque les triangles suivants sont rectangles, on utilise le théorème de Pythagore.

Dans le triangle AC_3C_1 :

$$\begin{aligned}(C_3A)^2 &= (r+4)^2 - (r-4)^2\\ &= 16r\\ C_3A &= 4\sqrt{r}.\end{aligned}$$

Dans le triangle DC_1C_2 :

$$\begin{aligned}(DC_2)^2 &= (r+9)^2 - (r-9)^2\\ &= 36r\\ DC_2 &= 6\sqrt{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}BC_3 &= DC_2 - C_3A\\ &= 2\sqrt{r}\end{aligned}$$

Dans le triangle BC_3C_2 :

$$(2r-13)^2+\left(2\sqrt{r}\right)^2=13^2$$
$$4r^2-52r+169+4r=169$$
$$4r^2-48r=0$$
$$4r(r-12)=0$$

Donc $r=0$ ou $r=12$.

On rejète $r=0$ d'après l'énoncé. Donc $r=12$. RÉPONSE : (D)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

35e Anniversaire 1963 – 1998

1998 Solutions

Concours Pascal (9e - Sec. III)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

PARTIE A :

1. La valeur de $\frac{1+3+5}{10+6+2}$ est :

(**A**) $\frac{1}{6}$ (**B**) 2 (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) $1\frac{1}{2}$ (**E**) $3\frac{1}{10}$

Solution 1

$$\frac{1+3+5}{10+6+2} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

Solution 2

$$\frac{1+3+5}{10+6+2} = \frac{(1+3+5)}{2(5+3+1)} = \frac{1}{2}$$

RÉPONSE : (C)

2. Si $3(x-5)=3(18-5)$, alors x est égal à :

(**A**) $\frac{44}{3}$ (**B**) $\frac{32}{3}$ (**C**) 9 (**D**) 18 (**E**) 81

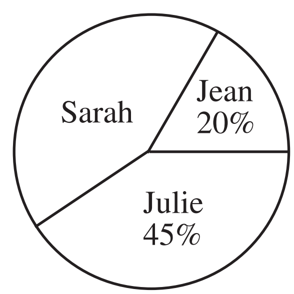
Solution

Puisque $3(x-5)=3(18-5)$, on peut diviser chaque membre de l'équation par 3 pour obtenir $(x-5)=(18-5)$.

Donc $x=18$. RÉPONSE : (D)

3. Le diagramme circulaire indique les pourcentages des 1000 votes reçus par les candidats lors d'une élection à l'école. Combien de votes Sarah a-t-elle reçus?

(**A**) 550 (**B**) 350 (**C**) 330
(**D**) 450 (**E**) 935



Solution

Le pourcentage des votes reçus par Sarah est égal à $100-(20+45)$, c'est-à-dire à 35. Or 35 % de 1000 est égal à $0,35(1000)$, c'est-à-dire à 350. Sarah a reçu 350 votes.

RÉPONSE : (B)

4. La valeur de $\left(\sqrt{169}-\sqrt{25}\right)^2$ est :

(**A**) 64 (**B**) 8 (**C**) 16 (**D**) 144 (**E**) 12

Solution

$$\left(\sqrt{169}-\sqrt{25}\right)^2 = (13-5)^2$$
$$= 8^2$$
$$= 64$$

RÉPONSE : (A)

5. La valeur de $\dfrac{5^6 \times 5^9 \times 5}{5^3}$ est :

(**A**) 5^{18} (**B**) 25^{18} (**C**) 5^{13} (**D**) 25^{13} (**E**) 5^{51}

Solution

$$\frac{5^6 \times 5^9 \times 5}{5^3} = \frac{5^{16}}{5^3}$$
$$= 5^{13}$$

RÉPONSE : (C)

6. Si $x = 3$, laquelle des expressions suivantes représente un nombre pair?

(**A**) $9x$ (**B**) x^3 (**C**) $2\left(x^2+9\right)$ (**D**) $2x^2+9$ (**E**) $3x^2$

Solution 1

Puisque l'expression $2\left(x^2+9\right)$ a 2 pour facteur, elle donnera un nombre pair, quelle que soit la valeur entière de *x*.

Solution 2

Si $x = 3$, alors $9x = 27$, $x^3 = 27$, $2\left(x^2+9\right) = 36$, $2x^2+9 = 27$ et $3x^2 = 27$.

L'expression $2\left(x^2+9\right)$ est donc la seule qui représente un nombre pair lorsque $x = 3$.

RÉPONSE : (C)

7. La valeur de $490-491+492-493+494-495+\ldots-509+510$ est :

(**A**) 500 (**B**) -10 (**C**) -11 (**D**) 499 (**E**) 510

Solution

$$\begin{aligned}
&490-491+492-493+494-495+\ldots-509+510\\
&=(490-491)+(492-493)+(494-495)+\ldots+(508-509)+510\\
&=\underbrace{(-1)+(-1)+(-1)+\ldots+(-1)}_{\text{10 parenthèses}}+510\\
&=-10+510\\
&=500
\end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

8. La moyenne d'une liste de 10 nombres est 0. Si on ajoute les nombres 72 et -12 à la liste, la nouvelle moyenne sera égale à :

(**A**) 30 (**B**) 6 (**C**) 0 (**D**) 60 (**E**) 5

Solution

Puisque la moyenne des 10 nombres est 0, la somme de ces nombres est égale à 10×0 ou 0. Lorsqu'on ajoute les nombres 72 et -12 à la liste, la somme des 12 nombres est égale à $0 + 72 + (-12)$, c'est-à-dire à 60.

La nouvelle moyenne est donc égale à $60 \div 12$, c'est-à-dire à 5. RÉPONSE : (E)

9. Quelle est la moitié de $1,2 \times 10^{30}$?

(**A**) $6,0 \times 10^{30}$ (**B**) $6,0 \times 10^{29}$ (**C**) $0,6 \times 5^{30}$ (**D**) $1,2 \times 10^{15}$ (**E**) $1,2 \times 5^{30}$

Solution

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(1,2 \times 10^{30}\right) &= 0,6 \times 10^{30} \\ &= 0,6 \times 10 \times 10^{29} \\ &= 6,0 \times 10^{29} \end{aligned}$$

RÉPONSE : (B)

10. Si $x + y + z = 25$ et $y + z = 14$, alors x est égal à :

(**A**) 8 (**B**) 11 (**C**) 6 (**D**) -6 (**E**) 31

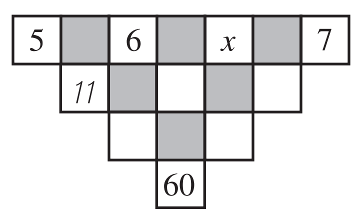
Solution

Puisque $y + z = 14$, la première équation devient $x + 14 = 25$.

Donc $x = 11$. RÉPONSE : (B)

PARTIE B :

11. Un nombre dans une case blanche est obtenu en additionnant les nombres des deux cases blanches de la rangée précédente qui sont tout près. (Le '11' a été obtenu de cette façon.) La valeur de x est :



(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 9

(**D**) 15 (**E**) 10

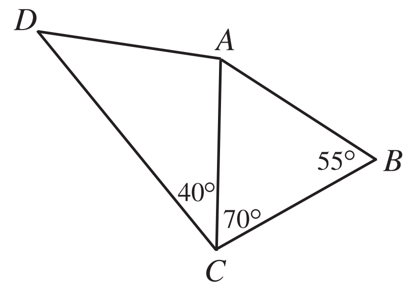
Solution

De gauche à droite, les trois nombres des cases blanches de la deuxième rangée sont 11, $6 + x$ et $x + 7$. De gauche à droite, les deux nombres des cases blanches de la troisième rangée sont $11 + (6 + x)$ et $(6 + x) + (x + 7)$, c'est-à-dire $17 + x$ et $2x + 13$. Le nombre de la quatrième rangée est $(17 + x) + (2x + 13)$, c'est-à-dire $3x + 30$. Donc :

$$\begin{aligned}3x+30&=60\\3x&=30\\x&=10\end{aligned}$$

RÉPONSE : (E)

12. Dans le diagramme, $DA = CB$. Quelle est la mesure de $\angle DAC$?



(**A**) 70° (**B**) 100° (**C**) 95°
(**D**) 125° (**E**) 110°

Solution
Dans le triangle ABC :
$$\begin{aligned}\angle BAC &= 180° - (70° + 55°)\\ &= 55°\end{aligned}$$
Puisque $\angle BAC = \angle ABC$, le triangle ABC est isocèle et $AC = CB$.
Puisque $DA = CB$ et $AC = CB$, alors $DA = AC$ et le triangle ADC est donc isocèle.
Donc $\angle ADC = \angle ACD$ et alors $\angle ADC = 40^\circ$.
Donc $\angle DAC = 180^\circ - \left(40^\circ + 40^\circ\right)$
$= 100^\circ$.

RÉPONSE : (B)

13. Une voiture à trois roues parcourt 100 km. La voiture a deux roues de rechange. Pendant ce trajet, si chacune des cinq roues est utilisée sur une même distance, combien de kilomètres chaque roue parcourt-elle?

(**A**) 20 (**B**) 25 (**C**) $33\frac{1}{3}$ (**D**) 50 (**E**) 60

Solution
Puisqu'il y a toujours trois roues qui roulent à la fois, la distance totale parcourue par les roues est égale à 3×100 km, c'est-à-dire à 300 km. Puisque chacune des cinq roues est utilisée sur une même distance et que $300 \div 5 = 60$, chacune parcourt 60 km. RÉPONSE : (E)

14. La somme des chiffres d'un nombre entier positif de cinq chiffres est égale à 2. (Un nombre entier de cinq chiffres ne peut pas commencer par un zéro.) Combien y a-t-il de tels entiers?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

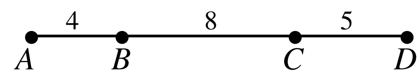
Solution
Puisque la somme des chiffres est égale à 2, les seules possibilités sont $20\,000$, $11\,000$, $10\,100$, $10\,010$ et $10\,001$. Il y a en a cinq. RÉPONSE : (E)

15. Le diagramme montre quatre points sur un segment de droite. Si $AB:BC = 1:2$ et $BC:CD = 8:5$, alors $AB:BD$ est égal à :

(**A**) $4:13$ (**B**) $1:13$ (**C**) $1:7$
(**D**) $3:13$ (**E**) $4:17$

Solution

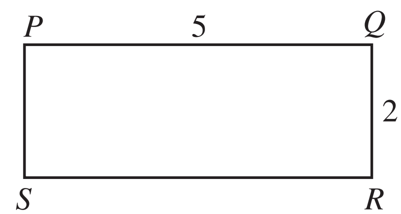
Pour comparer les rapports, il faut écrire $AB:BC = 1:2$ sous la forme $AB:BC = 4:8$, de manière que les deux rapports, $AB:BC = 4:8$ et $BC:CD = 8:5$, indiquent que $BC = 8$ unités.
On peut donc écrire $AB:BC:CD = 4:8:5$.
Comme dans le diagramme ci-contre, on a $AB = 4$ unités, $BC = 8$ unités et $CD = 5$ unités.



Donc $AB:BD = 4:13$.

RÉPONSE : (A)

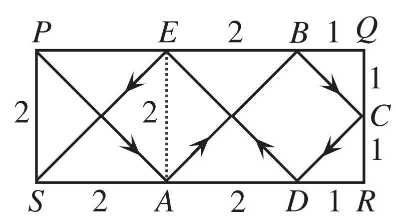
16. Le diagramme illustre une table de billard de forme rectangulaire. La table a une longueur de 5 unités et une largeur de 2 unités. À partir du point *P*, on fait rouler une boule à un angle de $45°$ par rapport à PQ. La boule ira rebondir sur SR. La boule rebondit plusieurs fois, sur divers côtés, à un angle de $45°$, jusqu'à ce qu'elle arrive au point *S*. Combien de fois la boule rebondit-elle avant d'arriver à *S*?



(**A**) 9 (**B**) 8 (**C**) 7 (**D**) 5 (**E**) 4

Solution

Puisque la balle rebondit toujours à un angle de $45°$, son trajet forme des triangles rectangles isocèles, comme dans le diagramme. La balle part du point *P*, puis elle rebondit aux points *A*, *B*, *C*, *D* et *E* avant d'arriver au point *S*.
Elle rebondit donc 5 fois.



RÉPONSE : (D)

17. Soit *p*, *q* et *r* des nombres premiers tels que $1998 = p^s q^t r^u$. Quelle est la valeur de $p+q+r$?

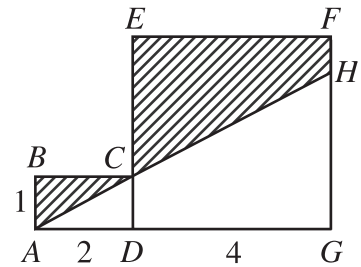
(**A**) 222 (**B**) 48 (**C**) 42 (**D**) 66 (**E**) 122

Solution

La factorisation première de 1998 est $2 \times 3^3 \times 37$. Les nombres *p*, *q* et *r* ont donc les valeurs respectives de 2, 3 et 37. Donc $p+q+r = 42$.

RÉPONSE : (C)

18. Le diagramme illustre un carré $DEFG$ et un rectangle $ABCD$. On a tracé un segment de droite à partir du point A, en passant au point C, jusqu'au point H sur FG. L'aire de la région ombrée est égale à :



(**A**) 8 (**B**) 8,5 (**C**) 10
(**D**) 9 (**E**) 10,5

Solution

Les points A, C et H sont alignés. Les triangles ADC et AGH sont donc semblables.
Puisque $AD : DC = 2:1$, alors $AG : GH = 2:1$. Puisque $AG = 6$, alors $GH = 3$.
Aire de la région ombrée = aire de $ABCD$ + aire de $DEFG$ − aire du triangle AGH

$$= 2\times1+4\times4-\frac{3\times6}{2}$$
$$= 2+16-9$$
$$= 9$$

RÉPONSE : (D)

19. On utilise seulement les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 pour former une suite de nombres comme suit : un 1, deux 2, trois 3, quatre 4, cinq 5, six 1, sept 2, ainsi de suite.
Voici le début de la suite : 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, ...
Le 100^{e} nombre de la suite est :

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution

Le nombre total de nombres dans les n premiers groupes de la suite est égal à $1+2+3+...+n$. Pour déterminer le 100^{e} nombre de la suite, on doit d'abord déterminer la valeur de n pour laquelle la somme est près de 100.
Or $1+2+3+...+n=\dfrac{n\times(n+1)}{2}$. Cette formule nous permet d'obtenir rapidement, par tâtonnement, $1+2+3+...+13=91$ et $1+2+3+...+13+14=105$.
Le 100^{e} nombre de la suite est donc situé dans le 14^{e} groupe. Il s'agit donc d'un 4.

RÉPONSE : (D)

20. Si on parcourt la distance entre deux villes à une vitesse de 110 km/h, au lieu de 100 km/h, on épargne 9 minutes. La distance entre les deux villes, en kilomètres, est égale à :

(**A**) 210 (**B**) 99 (**C**) 165 (**D**) 9900 (**E**) 150

Solution

On peut écrire l'énoncé sous la forme suivante :
(durée du parcours à 100 km/h) – (durée du parcours à 110 km/h) = 9 minutes ou

(durée du parcours à 100 km/h) – (durée du parcours à 110 km/h) = $\frac{9}{60}$ heure (1)

Soit d la distance, en kilomètres, entre les deux villes.

On peut exprimer la relation entre la distance d, la vitesse v et le temps t écoulé au moyen de la formule $d = v \times t$ que l'on peut transformer sous la forme $v = \frac{d}{t}$ ou $t = \frac{d}{v}$.

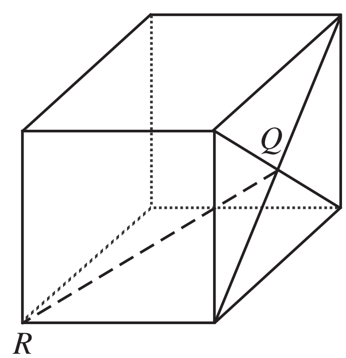
D'après cette dernière forme, la durée du parcours à 100 km/h est égale à $\frac{d}{100}$ et la durée du parcours à 110 km/h est égale à $\frac{d}{110}$. On peut donc écrire l'équation (1) sous la forme :

$$\frac{d}{100} - \frac{d}{110} = \frac{9}{60}$$
$$\frac{d}{10} - \frac{d}{11} = \frac{9}{6}$$
$$\frac{d}{110} = \frac{3}{2}$$
$$d = \frac{3}{2} \times 110$$
$$d = 165$$

La distance entre les deux villes est égale à 165 km. RÉPONSE : (C)

PARTIE C :

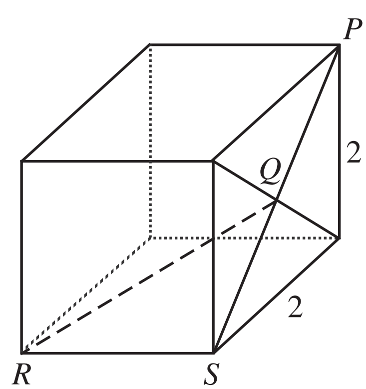
21. Les arêtes d'un cube ont une longueur de 2 unités. Le point Q est le point d'intersection des diagonales d'une des faces. La longueur du segment QR est égale à :



(**A**) 2 (**B**) $\sqrt{8}$ (**C**) $\sqrt{5}$
(**D**) $\sqrt{12}$ (**E**) $\sqrt{6}$

Solution

On considère les points P et S illustrés dans le diagramme. Sachant que les arêtes ont une longueur de 2 unités, on utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur de la diagonale PS.



$$PS^2 = 2^2 + 2^2$$
$$PS^2 = 8$$
$$PS = \sqrt{8} \text{ ou } 2\sqrt{2}$$

Donc $QS = \frac{\sqrt{8}}{2}$ ou $\sqrt{2}$.

Puisqu'il s'agit d'un cube, le triangle QRS est rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

$$QR^2 = 2^2 + \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad QR^2 = 2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$QR^2 = 4 + \frac{8}{4} \qquad\qquad QR^2 = 4 + 2$$

$$QR^2 = 6 \qquad\qquad QR^2 = 6$$

$$QR = \sqrt{6} \qquad\qquad QR = \sqrt{6}$$

RÉPONSE : (E)

22. Un jeu compte 100 cartes numérotées de 1 à 100. Chaque carte a une face jaune et une face rouge, le même numéro paraissant sur chaque face. Jérôme place toutes les cartes sur une table, de manière à montrer les faces rouges. Il retourne d'abord chaque carte portant un nombre divisible par 2. En examinant ensuite toutes les cartes, il retourne chaque carte portant un numéro divisible par 3. Combien de cartes montrent une face rouge à la fin?

(**A**) 83 (**B**) 17 (**C**) 66 (**D**) 50 (**E**) 49

Solution

Au début, toutes les cartes montrent une face rouge. Après avoir retourné chaque carte portant un nombre divisible par 2, seules les 50 cartes portant un nombre impair montrent une face rouge.

La deuxième fois, il retourne chaque carte portant un numéro divisible par 3. Les cartes portant un numéro impair divisible par 3 passeront alors du rouge au jaune. Il y a 17 tels numéros, soit 3, 9, 15, 21, …, 93 et 99. De plus, les cartes portant un numéro pair divisible par 3 passeront du jaune au rouge. Il y a 16 tels numéros, soit 6, 12, 18, 24, …, 90 et 96.

À la fin, les cartes montrant une face rouge sont les 50 cartes portant un numéro impair, moins les 17 cartes portant un numéro impair divisible par 3, plus les 16 cartes portant un numéro pair divisible par 3.

Le nombre de telles cartes est égal à $50 - 17 + 16$, c'est-à-dire 49. RÉPONSE : (E)

23. On multiplie les nombres $123\,456\,789$ et $999\,999\,999$. Combien des chiffres de la réponse sont des 9?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 17

Solution

On récrit la multiplication sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}(123\,456\,789)(999\,999\,999) &= (123\,456\,789)\left(10^9 - 1\right)\\ &= (123\,456\,789)\times 10^9 - (123\,456\,789)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{array}{r} 123\,456\,789\,000\,000\,000 \\ -\qquad\qquad\quad 123\,456\,789 \\ \hline 123\,456\,788\,876\,543\,211 \end{array}$$

Il n'y a aucun chiffre 9 dans la réponse. RÉPONSE : (A)

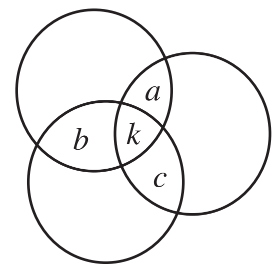
24. Trois tapis ont une aire totale de 200 m^2. En les superposant partiellement, on recouvre une surface de 140 m^2. La partie recouverte par exactement deux tapis a une aire de 24 m^2. Quelle est l'aire de la surface recouverte par trois tapis?

(**A**) 12 m^2 (**B**) 18 m^2 (**C**) 24 m^2 (**D**) 36 m^2 (**E**) 42 m^2

Solution

On illustre les trois tapis comme dans le diagramme. $a+b+c$ représente l'aire de la surface recouverte par exactement deux tapis et k représente l'aire de la surface recouverte par trois tapis.

On donne $a+b+c=24$ (1).



Puisque les trois tapis ont une aire totale de 200 m^2 et puisqu'ils recouvrent une surface de 140 m^2 lorsqu'ils sont partiellement superposés, il y a alors une surface de 60 m^2 qui est « gaspillée » par les deux ou trois couches de tapis superposés.

Donc $a+b+c+2k=60$ (2). On soustrait l'équation (1) de l'équation (2), membre par membre, pour obtenir $2k=36$, d'où $k=18$.

L'aire de la surface recouverte par trois tapis est donc égale à 18 m^2. RÉPONSE : (B)

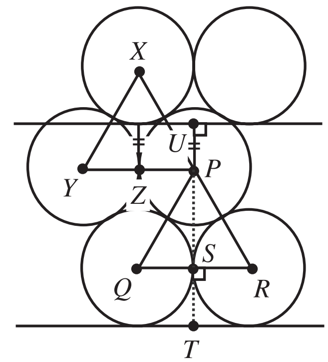
25. On veut placer 10 000 cercles, ayant chacun un diamètre de 1, dans un carré mesurant 100 sur 100. On peut le faire en plaçant les cercles en 100 rangées de 100 cercles. Si on place plutôt les cercles de manière que les centres de n'importe quels trois cercles tangents l'un à l'autre forment un triangle équilatéral, quel est le nombre maximal de cercles additionnels que l'on peut placer?

(**A**) 647 (**B**) 1442 (**C**) 1343 (**D**) 1443 (**E**) 1344

Solution

Pour commencer, on retire un cercle de chaque deuxième rangée et on déplace ces rangées de manière que les centres de n'importe quels trois cercles tangents l'un à l'autre forment un triangle équilatéral. Le diagramme illustre quelques-uns de ces cercles. Puisque chaque cercle a un diamètre de 1, les triangles PQR et PXY sont équilatéraux avec des côtés de longueur 1.

Dans le triangle PQR, on abaisse la hauteur PS.



Le triangle PRS est rectangle. D'après le triangle de Pythagore, on a :

$$PS^2 = (1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$PS^2 = \frac{3}{4}$$

$$PS = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De même, $XZ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Puisque chaque cercle a un rayon de $\frac{1}{2}$, alors $PU = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ et $TU = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire $TU = \sqrt{3}$. Ayant placé deux rangées de cercles, ceux-ci occupent donc une hauteur de $\sqrt{3}$ avant de permettre le placement d'une troisième rangée. Cette hauteur est la hauteur entre les lignes horizontales du diagramme. Or $\frac{100}{\sqrt{3}} \approx 57{,}7$.

On peut placer 57 rangées doubles, chaque rangée double contenant $100 + 99 = 199$ cercles.

Est-il possible de placer une rangée additionnelle? Oui. Le carré a des côtés de longueur 100, tandis que les 57 rangées doubles occupent une hauteur de $57\sqrt{3}$ et $57\sqrt{3} \approx 98{,}7$. Il reste donc assez de place pour une rangée additionnelle de 100 cercles.

Le nombre total de cercles que l'on peut placer est égal à $57(199) + 100$, c'est-à-dire à 11 443.

Le nombre maximal de cercles additionnels que l'on peut placer est égal à $11\,443 - 10\,000$, c'est-à-dire à 1443.

RÉPONSE : (D)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1999 Solutions et Concours Pascal (9^e - Sec. III)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

PARTIE A

1. $\frac{4+35}{8-5}$ est égal à :

(A) $\frac{11}{7}$ **(B)** 8 **(C)** $\frac{7}{2}$ **(D)** -12 **(E)** 13

Solution

$$\frac{4+35}{8-5} = \frac{39}{3} = 13$$

RÉPONSE : (E)

2. Dans la soustraction $\begin{array}{ccc} 4 & ♥ & 7 \\ 1 & 8 & 9 \\ \hline 2 & 6 & 8 \end{array}$, le ♥ représente le chiffre :

(A) 2 **(B)** 8 **(C)** 7 **(D)** 5 **(E)** 4

Solution

Puisque $268 + 189 = 457$, le ♥ représente le chiffre 5.

RÉPONSE : (D)

3. La valeur de $2\frac{1}{10} + 3\frac{11}{100} + 4\frac{111}{1000}$ est :

(A) 9,321 **(B)** 9,111 **(C)** 9,123 **(D)** 9,111111 **(E)** 9,11081081

Solution

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{10} + 3\frac{11}{100} + 4\frac{111}{1000} &= 2{,}1 + 3{,}11 + 4{,}111 \\ &= 9{,}321 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

4. $(1)^{10} + (-1)^8 + (-1)^7 + (1)^5$ est égal à :

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 16 **(E)** 4

Solution

$$\begin{aligned} (1)^{10} + (-1)^8 + (-1)^7 + (1)^5 &= 1 + 1 - 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (C)

5. Si 60 % d'un nombre égale 42, quel est 50 % du même nombre?

(A) 25 **(B)** 28 **(C)** 30 **(D)** 35 **(E)** 40

Solution 1

Puisque 60 % du nombre égale 42, alors 1 % du nombre égale $\frac{42}{60}$.

Donc 50 % du nombre égale $50 \times \frac{42}{60} = 35$.

Solution 2

Soit x le nombre.

Alors : $0,6x = 42$

$x = 70$

Donc 50 % du nombre égale $0,5(70) = 35$. Réponse : (D)

6. Si $x = -2$, la valeur de $(x)(x^2)\left(\frac{1}{x}\right)$ est :

(A) 4 **(B)** $-8\frac{1}{2}$ **(C)** -4 **(D)** -8 **(E)** 16

Solution

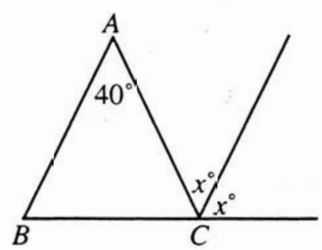
On réduit l'expression.

$$(x)(x^2)\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

Si $x = -2$, la valeur de l'expression est $(-2)^2 = 4$. Réponse : (A)

7. Le triangle ABC est isocèle, avec $AB = AC$. La valeur de x est :

(A) 40 **(B)** 55 **(C)** 35
(D) 50 **(E)** 35



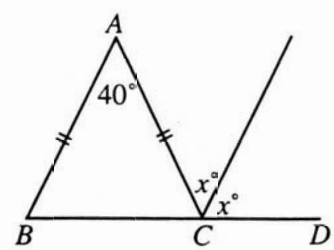
Solution

Puisque le triangle ABC est isocèle, $\angle ABC = \angle ACB$.

Chacun de ces angles mesure $\frac{(180° - 40°)}{2} = 70°$.

Puisque les points B, C et D sont alignés :

$$70 + 2x = 180$$
$$2x = 110$$
$$x = 55$$



Réponse : (B)

8. Dans les 45 premiers jours de l'année, le plus grand nombre de lundis qu'il peut y avoir est :

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9

Solution

Si le premier jour de l'année est un lundi, alors ce sera aussi lundi 7 jours plus tard. Les lundi tomberont donc les jours suivants : 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43.

Dans les 45 premiers jours de l'année, il peut y avoir au plus sept lundis. Réponse : (C)

9. Lorsqu'on divise un certain nombre par 9, le quotient est 6 et le reste est 4. Le nombre est :

(A) 58 **(B)** 42 **(C)** 33 **(D)** 67 **(E)** 49

Solution

Le nombre est $9 \times 6 + 4 = 58$.

RÉPONSE : (A)

10. La somme de neuf entiers positifs consécutifs est égale à 99. Le plus grand de ces entiers est :

(A) 9 **(B)** 11 **(C)** 19 **(D)** 7 **(E)** 15

Solution

Puisque la somme des neuf entiers est égale à 99, leur moyenne est égale à $\frac{99}{9}$ ou 11.

Puisqu'il y a un nombre impair d'entiers consécutifs, le nombre du milieu est 11 et le plus grand est donc 15.

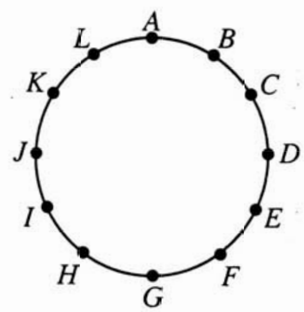
RÉPONSE : (E)

PARTIE B

11. On a placé douze ballons en cercle, tel qu'illustré. En procédant dans le sens des aiguilles d'une montre, on crève chaque troisième ballon. Le premier ballon crevé est le C. On continue de la sorte jusqu'à ce qu'il ne reste que deux ballons non crevés. Ces deux derniers ballons sont :

(A) B, H **(B)** B, G **(C)** A, E

(D) E, J **(E)** F, K



Solution

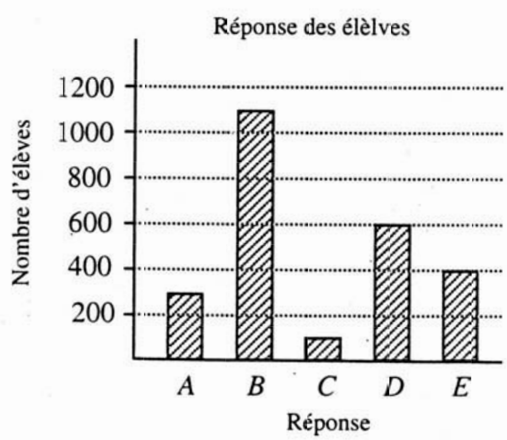
On crève les dix premiers ballons dans l'ordre suivant : C, F, I, L, D, H, A, G, B et K. Les deux derniers ballons sont E et J.

RÉPONSE : (D)

12. Le diagramme indique le nombre d'élèves qui ont choisi chacune des cinq réponses possibles d'une question. La bonne réponse est celle qui a été choisie le plus souvent. Le pourcentage d'élèves qui ont choisi la bonne réponse est égal à :

(A) 14 **(B)** 56 **(C)** 50

(D) 11 **(E)** 44



Solution

Le nombre total d'élèves qui ont répondu à la question est égal à $300 + 1100 + 100 + 600 + 400 = 2500$.

Le pourcentage d'élèves qui ont choisi la bonne réponse est donc égal à $\left(\frac{1100}{2500}\right) \times 100$ ou 44 %.

RÉPONSE : (E)

13. Jeanne a 10 pièces de monnaie, soit des pièces de 5 cents, de 10 cents et de 25 cents. Sept d'entre elles sont des pièces de 10 cents ou de 25 cents. Huit des pièces sont des pièces de 10 cents ou de 5 cents. Combien Jeanne a-t-elle de pièces de 10 cents?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

Solution 1

Jeanne a 10 pièces de monnaie dont sept sont des pièces de 10 cents ou de 25 cents.
Donc trois des pièces sont des pièces de 5 cents.
Puisque huit des pièces sont des pièces de 10 cents ou de 5 cents, alors cinq des pièces sont des pièces de 10 cents.

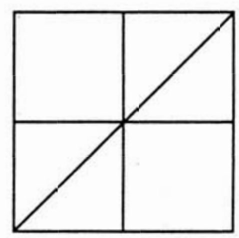
Solution 2

Si Jeanne a c pièces de 5 cents, d pièces de 10 cents et v pièces de 25 cents, on peut écrire :

$$c + d + v = 10 \qquad (1)$$
$$d + v = 7 \qquad (2)$$
$$c + d = 8 \qquad (3)$$

Si on soustrait, membre par membre, l'équation (2) de l'équation (1), on obtient .
Si on reporte $c = 3$ dans l'équation (3), on obtient $3 + d = 8$, d'où $d = 5$.
Jeanne a cinq pièces de 10 cents. RÉPONSE : (D)

14. Dans le jeu de « TRICARRÉ », on reçoit trois points pour chaque triangle que l'on trouve et quatre points pour chaque carré. Le plus grand nombre de points que l'on peut obtenir pour le diagramme ci-contre est :



(A) 38 **(B)** 36 **(C)** 34
(D) 32 **(E)** 28

Solution

Le diagramme contient quatre petits triangles et deux grands triangles, pour un total de 18 points. Le diagramme contient aussi quatre petits carrés et un grand carré pour un total de 20 points. On peut obtenir un maximum de 38 points. RÉPONSE : (A)

15. Chacun des nombres 1, 2, 3 et 4 prend la place d'une des lettres p, q, r et s dans un certain ordre.

La plus grande valeur possible de $p^q + r^s$ est :

(A) 14 **(B)** 19 **(C)** 66 **(D)** 83 **(E)** 162

Solution

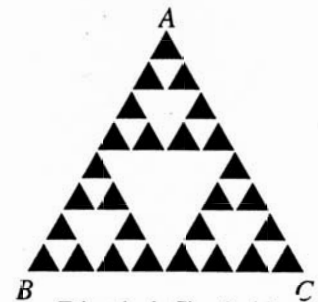
La plus grande valeur possible de p^q est 3^4 ou 81.

La plus grande valeur possible de $p^q + r^s$ est $3^4 + 2^1$ ou 83. RÉPONSE : (D)

16. Tous les triangles du diagramme sont équilatéraux. Quelle fraction du triangle ABC est colorée en noir?

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{9}{16}$

(D) $\frac{4}{9}$ (E) $\frac{27}{64}$



Triangle de Sierpinski

Solution

Le diagramme compte 27 triangles noirs. Si on divise le grand triangle en petits triangles, alors en comptant du bas jusqu'en haut, le nombre de petits triangles est égal à : $8+2(7)+2(6)+2(5)+2(4)+2(3)+2(2)+2(1)=64$. Donc $\frac{27}{64}$ du triangle ABC est colorée en noir.

RÉPONSE : (E)

17. En changeant l'ordre des chiffres 1, 2, 3 et 4, on peut former vingt-quatre nombres différents de quatre chiffres. Si on écrit ces vingt-quatre nombres en ordre, du plus petit au plus grand, dans quelle position le nombre 3142 se trouve-t-il?

(A) 13ᵉ (B) 14ᵉ (C) 15ᵉ (D) 16ᵉ (E) 17ᵉ

Solution

Les douze premiers nombres commencent par un 1 ou un 2. Les six nombres suivants commencent par un 3. Ces six nombres, dans l'ordre, sont 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421.
Le nombre 3142 est en 14ᵉ position.

RÉPONSE : (B)

18. On écrit le produit de 20^{50} et de 50^{20} sous la forme développée d'un entier régulier. En partant de la droite, le nombre de zéros consécutifs qui paraissent dans le nombre est :

(A) 70 (B) 71 (C) 90 (D) 140 (E) 210

Solution

Chaque facteur 10 forme un zéro à la fin du produit. On veut donc compter le nombre de facteurs 10 qu'il y a dans le produit. On remarque que 10 est formé en multipliant 2 et 5. On décomposera 20 et 50 pour les écrire sous forme $2\cdot 2\cdot 5$ et $2\cdot 5\cdot 5$.

On peut récrire le produit de 20^{50} et de 50^{20} comme suit :

$$\begin{aligned}
\left(20^{50}\right)\left(50^{20}\right) &= \left(2^2\cdot 5\right)^{50}\left(5^2\cdot 2\right)^{20}\\
&= 2^{100}\cdot 5^{50}\cdot 5^{40}\cdot 2^{20}\\
&= 2^{120}\cdot 5^{90}\\
&= 2^{30}\left(2^{90}\cdot 5^{90}\right)\\
&= 2^{30}\cdot 10^{90}
\end{aligned}$$

Essentiellement, les deux dernières lignes indiquent que puisque le produit contient 120 facteurs 2, soit 2^{120}, et 90 facteurs 5, soit 5^{90}, il est possible de former 90 produits $(2\cdot 5)$ ou 90 zéros. En partant de la droite, il y a donc 90 zéros.

RÉPONSE : (C)

19. Trois balles, numérotées 1, 2 et 3, sont placées dans un sac. On choisit, au hasard, une balle du sac et on inscrit le numéro sur une feuille. On remet ensuite la balle dans le sac. Si on répète cette expérience deux autres fois, quelle est la probabilité pour que la somme des trois nombres inscrits sur la feuille soit inférieure à 8?

(A) $\frac{23}{27}$ **(B)** $\frac{5}{7}$ **(C)** $\frac{5}{9}$ **(D)** $\frac{8}{9}$ **(E)** $\frac{22}{27}$

Solution

Chaque fois que l'on choisit une balle, il y a trois choix possibles. Puisqu'on choisit trois fois, il y a $3^3 = 27$ possibilités : 111, 112, 113, …, 331, 332, 333.

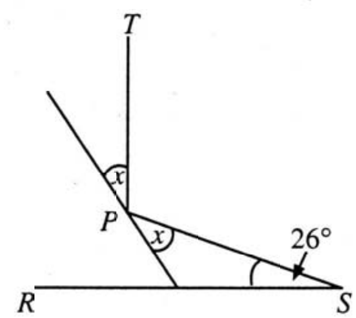
Plutôt que de compter le nombre de possibilités d'une somme inférieure à 8, on compte le nombre de possibilités d'une somme égale à 8 ou à 9. Il y a quatre possibilités : $2+3+3$, $3+2+3$, $3+3+2$ et $3+3+3$. Il y a donc $27-4=23$ possibilités d'une somme inférieure à 8.

La probabilité pour que la somme des trois nombres inscrits sur la feuille soit inférieure à 8 est égale à $\frac{23}{27}$.

RÉPONSE : (A)

20. Un faisceau de lumière est projeté à partir du point S. Il est réfléchi dans un miroir au point P pour atteindre le point T, de manière que PT soit perpendiculaire à RS. Alors la mesure de x est égale à :

(A) 26° **(B)** 32° **(C)** 37°
(D) 38° **(E)** 45°



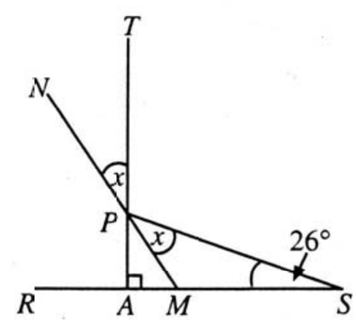
Solution

On prolonge le segment TP jusqu'au point A sur RS. Puisque TP et RS sont perpendiculaires, alors $\angle SPA = 180° - 90° - 26°$
$= 64°$.

Soit les points M et N indiqués sur le diagramme. Puisque les angles TPN et MPA sont opposés par le sommet, $\angle MPA = x$.

Puisque $\angle SPA = 2x$, alors $2x = 64°$, d'où $x = 32°$.

Alors la mesure de x est égale à $32°$.

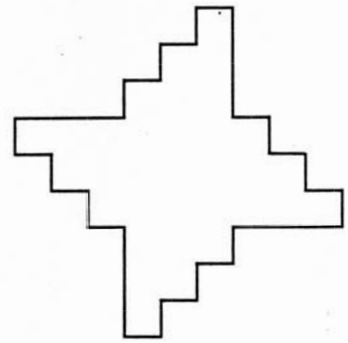


RÉPONSE : (B)

PARTIE C

21. Dans le diagramme, tous les segments adjacents forment des angles droits. Les quatre grands segments ont une même longueur et tous les petits segments ont une même longueur. La figure a une aire de 528. Quel est le périmètre de la figure?

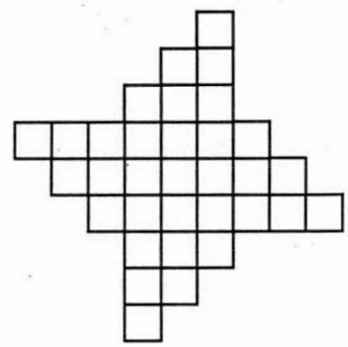
(**A**) 132 (**B**) 264 (**C**) 144
(**D**) 72 (**E**) 92



Solution

Puisque les petits segments ont une même longueur et que tous les grands segments ont une même longueur, on peut diviser le diagramme en 33 petits carrés. Chaque petit carré a une aire de $\frac{528}{33} = 16$ unités carrées. Chacun a donc des côtés de $\sqrt{16} = 4$ unités.

On peut compter pour constater que la figure a un périmètre de 36 petits segments pour un total de 144 unités.



RÉPONSE : (C)

22. Si w, x et y sont des entiers positifs et si $\frac{97}{19} = w + \frac{1}{x + \frac{1}{y}}$, alors $w + x + y$ est égal à :

(**A**) 16 (**B**) 17 (**C**) 18 (**D**) 19 (**E**) 26

Solution

On récrit $\frac{97}{19}$ sous la forme $5 + \frac{2}{19} = 5 + \frac{1}{\left(\frac{19}{2}\right)}$

$$= 5 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2}}$$

On compare à l'expression donnée pour obtenir $w = 5$, $x = 9$ et $y = 2$.
Donc, $w + x + y = 16$. RÉPONSE : (A)

23. On détermine tous les couples (x, y) qui vérifient $(x - y)^2 + x^2 = 25$, x et y étant des entiers et $x \geq 0$. Le nombre de valeurs différentes de y que l'on obtient est égal à :

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Solution

Par expérience, on sait que $0^2 + 5^2 = 25$ et que $3^2 + 4^2 = 25$. Les valeurs possibles de x sont donc 0, 3, 4, et 5. On reporte ces valeurs de x dans l'équation pour obtenir cinq différentes valeurs de y.

RÉPONSE : (C)

24. Deux navires voyagent à des vitesses différentes, mais constantes. Le premier a une longueur de 200 m et le second a une longueur de 100 m. Lorsqu'ils voyagent dans des directions opposées, ça prend 10 secondes pour qu'ils se croisent au complet. Lorsqu'ils voyagent dans la même direction, ça prend 25 secondes pour que le plus rapide dépasse le plus lent au complet. La vitesse du navire le plus rapide, en mètres par seconde, est égale à :

(A) 12 **(B)** 14 **(C)** 18 **(D)** 21 **(E)** 30

Solution

Soit x la vitesse du navire rapide, en mètres par seconde, et y la vitesse du navire lent, en mètres par seconde.

Lorsque les navires voyagent dans des directions opposées, leur vitesse relative est égale à $x + y$. La distance relative qu'ils doivent parcourir pour se croiser est égale à 300 m. Ceci nous donne l'équation $10(x+y) = 300$.

Lorsque les navires voyagent dans la même direction, leur vitesse relative est égale à $x - y$. La distance relative qu'ils doivent parcourir pour se croiser est toujours égale à 300 m. Ceci nous donne l'équation $25(x-y) = 300$.

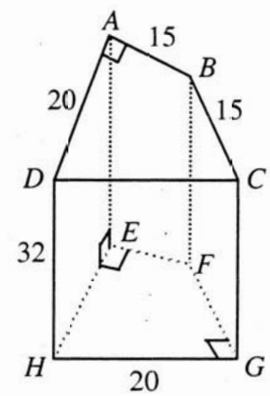
On résout les deux équations pour obtenir $x = 21$.

Le navire le plus rapide voyage à une vitesse de 21 mètres par seconde. RÉPONSE : (D)

25. Le diagramme illustre un prisme droit dont la base est le quadrilatère $EFGH$. Les angles E et G du quadrilatère sont droits. La hauteur AE est égale à 32. La distance de A à G est égale à :

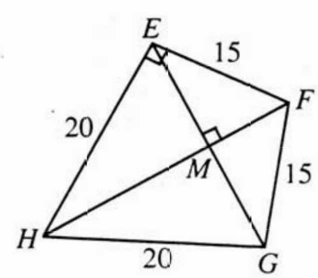
(A) 41 **(B)** 40 **(C)** 34

(D) 36 **(E)** 44



Solution

On considère la base du prisme, le quadrilatère $EFGH$. Puisque les triangles EFG et EHG sont tous les deux isocèles, les diagonales sont perpendiculaires. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle FGH, on a $FH = 25$. Les triangles FGH et FMG ont chacun un angle droit et un angle commun. Ils sont donc semblables.



Donc $\dfrac{MG}{FG} = \dfrac{GH}{FH}$.

$$\frac{MG}{15} = \frac{20}{25}$$

Donc $MG = 12$. Donc $EG = 24$.

Puisque le triangle AEG est rectangle, le théorème de Pythagore nous donne $AG = 40$.

RÉPONSE : (B)