Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatia 2024

le jeudi 4 avril 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 5 avril 2024
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Sur les 4050 camions qui ont été vendus, 32 % étaient blancs. Donc, $\frac{32}{100} \cdot 4050 = 1296$ camions blancs ont été vendus.

   (b) *Solution 1*

   Sur les 4050 camions qui ont été vendus, 24 % étaient gris. Donc, $\frac{24}{100} \cdot 4050 = 972$ camions gris ont été vendus.
   Puisque $\frac{1}{4}$ des camions gris vendus étaient électriques, alors $\frac{1}{4} \cdot 972 = 243$ camions vendus étaient à la fois gris et électriques.

   Solution 2

   Puisque 24 % des camions vendus étaient gris et que $\frac{1}{4}$ de ceux-ci étaient électriques, alors $\frac{24}{100} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{100}$ (soit 6 %) des camions qui ont été vendus étaient à la fois gris et électriques.
   Donc, sur les 4050 camions vendus, $\frac{6}{100} \cdot 4050 = 243$ étaient à la fois gris et électriques.

   (c) *Solution 1*

   Sur les 4050 camions vendus, 44 % étaient noirs. Donc, $\frac{44}{100} \cdot 4050 = 1782$ camions noirs ont été vendus.
   Donc, le nombre total de camions noirs, vendus et invendus, est égal à $1782+k$ et le nombre total de camions, vendus et invendus, est égal à $4050 + k$.
   Puisque 46 % de tous les camions, vendus et invendus, étaient noirs, alors $\frac{1782 + k}{4050 + k} = \frac{46}{100}$.
   On résout cette équation pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{1782 + k}{4050 + k} &= \frac{46}{100} \\
\frac{1782 + k}{4050 + k} &= \frac{23}{50} \\
50(1782 + k) &= 23(4050 + k) \\
89\,100 + 50k &= 93\,150 + 23k \\
27k &= 4050 \\
k &= 150
\end{aligned}$$

   Donc, il y avait 150 camions invendus, tous noirs.

   Solution 2

   Sur les 4050 camions vendus, 44 % étaient noirs. Donc, 100 % − 44 % = 56 % camions n'étaient pas noirs.
   Donc, $\frac{56}{100} \cdot 4050 = 2268$ camions vendus n'étaient pas noirs.
   Puisque tous les camions invendus étaient noirs, il y avait donc 2268 camions, vendus et invendus, qui n'étaient pas noirs.
   Puisque 46 % de tous les camions, vendus et invendus, étaient noirs, alors 100 % − 46 % = 54 % de tous les camions, vendus et invendus, n'étaient pas noirs.
   Le nombre total de camions, vendus et invendus, est égal à $4050+k$ et 54 % de ces camions n'étaient pas noirs. Donc, $\frac{2268}{4050 + k} = \frac{54}{100}$.

On résout cette équation pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{2268}{4050+k} &= \frac{54}{100} \\
\frac{2268}{4050+k} &= \frac{27}{50} \\
50(2268) &= 27(4050+k) \\
113\,400 &= 109\,350 + 27k \\
4050 &= 27k \\
k &= 150
\end{aligned}$$

Donc, il y avait 150 camions invendus, tous noirs.

2. (a) On a $f(132) = 132 + 1 + 3 + 2 = 138$.

(b) Soit n égal à l'entier strictement positif de trois chiffres abc.
Donc, $f(n) = f(abc) = 100a + 10b + c + a + b + c = 101a + 11b + 2c$.
Puisque $f(n) = 175$, alors $101a + 11b + 2c = 175$.
On ne peut avoir $a \geq 2$ car sinon on aurait $101a \geq 202$, ce qui est trop grand. Remarquons que $11b + 2c$ est toujours au moins 0.
Donc, $a < 2$, ce qui signifie que $a = 1$.
Lorsque $a = 1$, on obtient $101 + 11b + 2c = 175$ ou $11b + 2c = 74$.
On ne peut avoir $b \geq 7$ car sinon on aurait $11b \geq 77$, ce qui est trop grand. Remarquons que $2c$ est toujours au moins 0.
Donc, $b < 7$. Si $b = 6$, alors $66 + 2c = 74$ ou $2c = 8$, donc $c = 4$.
Si $b \leq 5$, alors $11b \leq 55$. Donc, $2c \geq 74 - 55 = 19$, ce qui n'est pas possible puisque $c \leq 9$.
On peut confirmer que $f(164) = 164 + 1 + 6 + 4 = 175$. Donc, $n = 164$.

(c) Soit n égal à l'entier strictement positif de trois chiffres pqr.
Donc, $f(pqr) = 100p + 10q + r + p + q + r$. On a donc $101p + 11q + 2r = 204$.
Si $p \geq 3$, alors $101p \geq 303$, donc $p = 1$ ou $p = 2$.

Si $p = 1$, alors $101 + 11q + 2r = 204$ ou $11q + 2r = 103$.
Puisque $r \leq 9$, alors $2r \leq 18$, donc $11q \geq 103 - 18 = 85$.
Donc, $q = 8$ ou $q = 9$.
Si $q = 8$, alors $88 + 2r = 103$ ou $2r = 15$, ce qui est impossible puisque r est un entier.
Si $q = 9$, alors $99 + 2r = 103$ ou $2r = 4$, donc $r = 2$.
Dans ce cas, $n = 192$ et on peut confirmer que $f(192) = 192 + 1 + 9 + 2 = 204$.

Si $p = 2$, alors $202 + 11q + 2r = 204$ ou $11q + 2r = 2$.
Donc, l'équation $11q + 2r = 2$ admet une seule solution, soit $q = 0$ et $r = 1$.
Dans ce cas, $n = 201$ et on peut confirmer que $f(201) = 201 + 2 + 0 + 1 = 204$.
Donc, si $f(n) = 204$, alors les valeurs possibles de n sont 192 et 201.

3. (a) Pour déterminer les coordonnées de F, on trouve le point d'intersection de la droite passant par A et C et de la droite passant par B et E.
La droite passant par $A(0,0)$ et $C(12,12)$ a une pente de $\frac{12-0}{12-0} = 1$.
Puisqu'elle passe par $(0,0)$, cette droite a pour équation $y = x$.
La droite passant par $B(12,0)$ et $E(0,6)$ a une pente de $\frac{6-0}{0-12} = -\frac{1}{2}$.
Puisqu'elle passe par $(0,6)$, cette droite a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + 6$.
Pour déterminer l'abscisse du point d'intersection, F, on résout $x = -\frac{1}{2}x + 6$, d'où $\frac{3}{2}x = 6$ ou $3x = 12$, soit $x = 4$.
Puisque F est situé sur la droite d'équation $y = x$, alors F a pour coordonnées $(4,4)$.

(b) *Solution 1*

On considère que le triangle AEF a pour base $AE = 6$.

Donc, la hauteur du triangle AEF est égale à la distance perpendiculaire de F à AE. Cette distance est égale à 4, soit l'abscisse de F.

L'aire du triangle AEF est donc égale à $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.

Solution 2

On peut déterminer l'aire du triangle AEF en soustrayant l'aire du triangle AFB de l'aire du triangle AEB.

On considère que le triangle AFB a pour base $AB = 12$.

Donc, la hauteur du triangle AFB est égale à la distance perpendiculaire de F à AB. Cette distance est égale à 4, soit l'ordonnée de F.

L'aire du triangle AFB est donc égale à $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24$.

L'aire du triangle AEB est égale à $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36$. Donc, l'aire du triangle AEF est égale à $36 - 24 = 12$.

(c) Pour déterminer l'aire du quadrilatère $GDEF$, on va soustraire l'aire du triangle AEF et l'aire du triangle CDG de l'aire du triangle ACD.

Pour déterminer l'aire du triangle CDG, il nous faut les coordonnées de G.

On peut trouver les coordonnées de G en déterminant le point d'intersection entre la droite passant par A et C et le cercle de diamètre EB.

Donc, on doit d'abord déterminer l'équation du cercle.

Puisque le cercle a pour diamètre EB, alors son centre est le milieu de EB, soit $\left(\frac{0+12}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$ ou $(6, 3)$.

La longueur du diamètre est $EB = \sqrt{(12-0)^2 + (0-6)^2}$ ou $EB = \sqrt{180}$, soit $EB = 6\sqrt{5}$.

Donc, le cercle a pour rayon $r = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ et pour équation $(x-6)^2 + (y-3)^2 = (3\sqrt{5})^2$ ou $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 45$.

Soit g l'abscisse du point G.

Puisque G est situé sur la droite d'équation $y = x$, alors G a pour coordonnées (g, g).

Puisque le point G est également situé sur le cercle, alors ses coordonnées vérifient l'équation du cercle.

On a donc $(g-6)^2 + (g-3)^2 = 45$, que l'on résout pour obtenir :

$$\begin{aligned}
g^2 - 12g + 36 + g^2 - 6g + 9 &= 45 \\
2g^2 - 18g + 45 &= 45 \\
2g^2 - 18g &= 0 \\
2g(g-9) &= 0
\end{aligned}$$

Donc, $g = 0$ ou $g = 9$.

Puisque A et G sont distincts, alors $g = 9$ et G a donc pour coordonnées $(9, 9)$.

On peut maintenant déterminer l'aire du triangle CDG.

On considère que le triangle CDG a pour base $CD = 12$.

Donc, la hauteur du triangle CDG est égale à la distance perpendiculaire de G à CD (soit $12 - 9 = 3$) puisque CD est situé sur la droite d'équation $y = 12$ et que l'ordonnée de G est 9.

L'aire du triangle CDG est égale à $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 = 18$.

L'aire du triangle ACD est la moitié de l'aire du carré $ABCD$. Donc, l'aire du triangle ACD est égale à $\frac{1}{2} \cdot 12^2 = 72$.

D'après la partie (b), le triangle AEF a une aire de 12. Donc, l'aire de $GDEF$ est égale à $72 - 18 - 12 = 42$.

4. (a) On peut exprimer chaque nombre Hewitt, H sous la forme $H = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$, n étant un entier tel que $n \geq 2$.
(On a opté pour $H = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ plutôt que $H = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ car, en simplifiant l'expression, le terme du second degré ainsi que le terme constant sont éliminés.)
On développe et on simplifie pour obtenir

$$\begin{aligned} H &= (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \\ &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= 3n^3 + 6n \\ &= 3n(n^2+2) \end{aligned}$$

Un nombre Hewitt est divisible par 10 uniquement lorsque son chiffre des unités est égal à 0.
Si, par exemple, le chiffre des unités de n est 9, alors le chiffre des unités de $3n$ est 7, le chiffre des unités de $n^2 + 2$ est 3 et donc le chiffre des unités de $H = 3n(n^2 + 2)$ est 1 (car 7×3 a 1 pour chiffre des unités).
Dans le tableau ci-dessous, on détermine le chiffre des unités de H pour chaque chiffre des unités possible de n.

Chiffre des unités de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de $3n$	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
Chiffre des unités de n^2+2	2	3	6	1	8	7	8	1	6	3
Chiffre des unités de $H = 3n(n^2+2)$	0	9	6	9	6	5	4	1	4	1

Donc, pour qu'un nombre Hewitt soit divisible par 10, le chiffre des unités de n doit être 0.
Donc n doit être divisible par 10.
Lorsque $n = 10$, $H = 3(10)(10^2 + 2) = 3060$. Ce nombre est inférieur à 10 000.
Lorsque $n = 20$, $H = 3(20)(20^2 + 2) = 24\,120$. Ce nombre est situé entre 10 000 et 100 000.
Lorsque $n = 30$, $H = 3(30)(30^2 + 2) = 81\,180$. Ce nombre est situé entre 10 000 et 100 000.
Lorsque $n \geq 40$, $H \geq 3(40)(40^2 + 2) = 192\,240$. Ce nombre est supérieur à 100 000.
Donc, il y a 2 nombres Hewitt entre 10 000 et 100 000 qui sont divisibles par 10.

(b) D'après la partie (a), chaque nombre Hewitt peut être exprimé sous la forme $H = 3n(n^2 + 2)$, n étant un entier tel que $n \geq 2$.
Puisque $216 = 2^3 \cdot 3^3$, alors un nombre Hewitt est divisible par 216 uniquement lorsque $3n(n^2 + 2)$ est divisible par $2^3 \cdot 3^3$ ou uniquement lorsque $n(n^2 + 2)$ est divisible par $2^3 \cdot 3^2$.
Cela signifie qu'il faut que $n(n^2 + 2)$ soit divisible par $2^3 = 8$ et par $3^2 = 9$.

On examine d'abord les conditions nécessaires pour que $n(n^2 + 2)$ soit divisible par 8.
Si $n(n^2 + 2)$ est divisible par 8, alors $n(n^2 + 2)$ est divisible par 2. Donc, $n(n^2 + 2)$ est pair.
Si n est impair, alors $n(n^2 + 2)$ est impair. Donc, n doit être pair.
Puisque n est pair, alors $n = 2a$, a étant un entier strictement positif quelconque. Donc, $n^2 + 2 = 4a^2 + 2$, ce qui est 2 de plus qu'un multiple de 4 et donc $n^2 + 2$ n'est pas divisible par 4 (bien qu'il soit divisible par 2).
Puisque $n(n^2 + 2)$ est divisible par 8 et que $n^2 + 2$ contient exactement un facteur 2, alors n doit être divisible par 4.

On examine ensuite les conditions nécessaires pour que $n(n^2 + 2)$ soit divisible par 9. Si $n(n^2 + 2)$ est divisible par 9, alors au moins l'une des affirmations suivantes doit être vraie :

(i) n est divisible par 3 et $n^2 + 2$ est divisible par 3

(ii) n est divisible par 9

(iii) $n^2 + 2$ est divisible par 9.

Supposons que n soit divisible par 9 et donc par 3.
Donc, $n = 3b$, b étant un entier strictement positif. Donc, $n^2+2 = 9b^2+2 = 3(3b^2)+2$, ce qui est 2 de plus qu'un multiple de 3. Donc, $n^2 + 2$ n'est pas divisible par 3 et n'est donc pas divisible par 9.
Cela indique que si n est divisible par 3, alors $n^2 + 2$ n'est pas divisible par 3. Donc, l'affirmation (i) ne peut être vraie.
De plus, si n est divisible par 9, alors $n^2 + 2$ n'est pas divisible par 9. Donc, exactement l'une des affirmations (ii) ou (iii) est vraie.

Pour résumer, $n(n^2+2)$ est divisible par 8 et par 9 (et donc un nombre Hewitt est divisible par 216) uniquement lorsque n est divisible par 4 et par 9 ou lorsque n est divisible par 4 et $n^2 + 2$ est divisible par 9.

1^er^ cas : n est divisible par 4 et par 9

Puisque 4 et 9 n'ont pas de diviseur commun supérieur à 1, alors n est divisible par 4 et par 9 uniquement lorsque n est divisible par $4 \cdot 9 = 36$.
Dans ce cas, $n = 36k$, k étant un entier strictement positif.
Le premier nombre Hewitt se produit lorsque $n = 2$. Donc, le 2024^e^ nombre Hewitt se produit lorsque $n = 2025$.
Cela signifie que $2 \leq n \leq 2025$ ou $2 \leq 36k \leq 2025$, soit $\frac{2}{36} \leq k \leq \frac{2025}{36}$.
Puisque k est un entier et que $\frac{2025}{36} = 56{,}25$, alors $1 \leq k \leq 56$.
Donc, dans ce cas, 56 nombres parmi les 2024 nombres Hewitt les plus petits sont divisibles par 216.

2^e^ cas : n est divisible par 4 et $n^2 + 2$ est divisible par 9

Puisque n est divisible par 4, alors $n = 4m$, m étant un entier strictement positif. Donc, $n^2 + 2 = 16m^2 + 2$ est divisible par 9.
Pour certains entiers non négatifs q et r ($0 \leq r \leq 8$), chaque entier strictement positif m peut être exprimé sous la forme $m = 9q + r$, en fonction de son reste, r, lorsqu'il est divisé par 9.
Puisque $16m^2 + 2$ doit être divisible par 9, alors chacune des expressions équivalentes suivantes doit également être divisible par 9 :

$$\begin{aligned} 16m^2+2 &= 16(9q+r)^2+2 \\ &= 16(9^2q^2+2\cdot 9qr+r^2)+2 \\ &= 16(9^2q^2+2\cdot 9qr)+16r^2+2 \\ &= 9\cdot 16(9q^2+2qr)+16r^2+2 \end{aligned}$$

ce qui est divisible par 9 uniquement lorsque $16r^2 + 2$ est divisible par 9.
C'est-à-dire que n est divisible par 4 et $n^2 + 2 = 16m^2 + 2$ est divisible par 9 uniquement lorsque $16r^2 + 2$ est divisible par 9, r étant le reste lorsque m est divisé par 9.
Pour chacun des restes possibles $0 \leq r \leq 8$, on peut déterminer le reste lorsque $16r^2 + 2$ est divisé par 9.
Par exemple, lorsque $r = 2$, $16r^2 + 2 = 16(2)^2 + 2 = 66$ a un reste de 3 lorsqu'on le divise par 9.
De même, on détermine le reste lorsque $16r^2 + 2$ est divisé par 9 pour chacune des valeurs possibles de r :

Valeur de r	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste lorsque $16r^2 + 2$ est divisé par 9	2	0	3	2	6	6	2	3	0

Donc, $16r^2+2$ est divisible par 9 lorsque $r=1$ ou lorsque $r=8$.
Pour résumer, n est divisible par 4 et n^2+2 est divisible par 9 uniquement lorsque $n=4m=4(9q+1)$ ou lorsque $n=4(9q+8)$, q étant un entier non négatif.
Pour les 2024 nombres Hewitt les plus petits, $2 \leq n \leq 2025$ ou $2 \leq 4(9q+1) \leq 2025$. Donc, $0 \leq q \leq 56$ (puisque q est un entier non négatif).
Dans ce cas, 57 nombres parmi les 2024 nombres Hewitt les plus petits sont divisibles par 216.
De même, $2 \leq 4(9q+8) \leq 2025$. Donc, $0 \leq q \leq 55$.
Dans ce cas, 56 nombres parmi les 2024 nombres Hewitt les plus petits sont divisibles par 216.

Parmi les 2024 nombres Hewitt les plus petits, $56+57+56=169$ sont divisibles par 216.

(c) D'après la partie (a), chaque nombre Hewitt peut être exprimé sous la forme $H=3n(n^2+2)$, n étant un entier tel que $n \geq 2$.
Si S est la somme de deux nombres Hewitt distincts, alors $S=3n(n^2+2)+3m(m^2+2)$, m et n étant des entiers tels que $2 \leq m < n$.
Si deux nombres Hewitt distincts ont une somme égale à $9 \cdot 2^k$, k étant un entier strictement positif, alors on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
S &= 3n(n^2+2)+3m(m^2+2) \\
9 \cdot 2^k &= 3n(n^2+2)+3m(m^2+2) \\
3 \cdot 2^k &= n(n^2+2)+m(m^2+2) \\
3 \cdot 2^k &= n^3+m^3+2n+2m \\
3 \cdot 2^k &= (n+m)(n^2-nm+m^2)+2(n+m) \\
3 \cdot 2^k &= (n+m)(n^2-nm+m^2+2)
\end{aligned}$$

Donc, si deux nombres Hewitt distincts ont une somme de $9 \cdot 2^k$, alors $(n+m)(n^2-nm+m^2+2)=3 \cdot 2^k$, k, m et n étant des entiers strictement positifs tels que $2 \leq m < n$.
Si m et n sont de parité différente (l'un est pair et l'autre est impair), alors $n+m$ est impair.
De plus, n^2-nm+m^2+2 est impair puisque exactement l'un des termes n^2 ou m^2 est impair et les trois autres termes de la somme sont pairs.
Dans ce cas, $n+m$ et n^2-nm+m^2+2 sont tous deux impairs et donc leur produit est impair.
Cependant, $3 \cdot 2^k$ est pair pour tous les entiers strictement positifs k. Donc, m et n doivent être de même parité (ils sont tous deux impairs ou tous deux pairs).

1er cas : m et n sont tous deux impairs
Si m et n sont tous deux impairs, alors n^2-nm+m^2+2 est impair.
Puisque les seuls facteurs impairs de $3 \cdot 2^k$ sont 1 et 3, alors n^2-nm+m^2+2 doit être égal à 1 ou à 3.
Cependant, si m et n sont tous deux impairs avec $2 \leq m < n$, alors $m \geq 3$ et $n \geq 5$ et $n-m \geq 2$.
Donc,

$$\begin{aligned}
n^2-nm+m^2+2 &= n(n-m)+m^2+2 \\
&\geq 5(2)+3^2+2 \\
&= 21
\end{aligned}$$

Donc, $n^2 - nm + m^2 + 2$ ne peut égaler 1 ou 3.
Donc, m et n ne peuvent pas être tous deux impairs.

2[e] cas : m et n sont tous deux pairs
Si m et n sont tous deux pairs, alors $m = 2a$ et $n = 2b$, a et b étant des entiers tels que $1 \leq a < b$.
On reporte $m = 2a$ et $n = 2b$ dans $3 \cdot 2^k = (n+m)(n^2 - nm + m^2 + 2)$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
3 \cdot 2^k &= (n+m)(n^2 - nm + m^2 + 2) \\
3 \cdot 2^k &= (2b+2a)(4b^2 - 4ab + 4a^2 + 2) \\
3 \cdot 2^k &= 4(b+a)(2b^2 - 2ab + 2a^2 + 1) \\
3 \cdot 2^{k-2} &= (b+a)(2b^2 - 2ab + 2a^2 + 1)
\end{aligned}$$

Puisque le membre de droite est le produit de deux entiers, alors $k \geq 2$.
Le facteur $2b^2 - 2ab + 2a^2 + 1$ est un de plus qu'un multiple de 2. Donc, $2b^2 - 2ab + 2a^2 + 1$ est impair et doit donc égaler 1 ou 3.
Puisque $1 \leq a < b$, alors $a \geq 1$, $b \geq 2$ et $b - a \geq 1$. Donc,

$$\begin{aligned}
2b^2 - 2ab + 2a^2 + 1 &= 2b(b-a) + 2a^2 + 1 \\
&\geq 4(1) + 2(1^2) + 1 \\
&= 7
\end{aligned}$$

Donc, $2b^2 - 2ab + 2a^2 + 1$ ne peut égaler 1 ou 3.
Donc, m et n ne peuvent être tous deux pairs.

On peut donc conclure qu'il ne peut y avoir deux nombres Hewitt distincts dont la somme est égale à $9 \cdot 2^k$, k étant un entier strictement positif.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2023

le mercredi 5 avril 2023
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 6 avril 2023
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Le score total de Jasmine est égal à $3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 6 + 20$, soit 26 points.

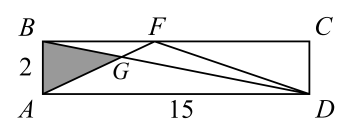
   (b) Supposons que Sam ait effectué n lancers qui ont chacun rapporté 5 points. Dans ce cas, il a effectué $2n$ lancers qui ont chacun rapporté 2 points.
   Puisque le score total de Sam était de 36 points, alors $5 \cdot n + 2 \cdot 2n = 36$ ou $9n = 36$, d'où $n = 4$.
   Au total, Sam a fait $n + 2n = 3n$ lancers, ce qui est égal à $3 \cdot 4 = 12$ lancers.

   (c) Puisque le score total de Théa était de 37 points, alors $2t + 5f = 37$.
   Puisque $2t$ est pair pour toute valeur entière de t, alors $5f$ doit être impair puisque la somme des deux doit être égale à 37 (ce qui est impair).
   La valeur de $5f$ est impaire uniquement lorsque f est impair.
   Lorsque $f = 1$, on a $2t + 5 = 37$ ou $2t = 32$, d'où $t = 16$.
   Lorsque $f = 3$, on a $2t + 15 = 37$ ou $2t = 22$, d'où $t = 11$.
   Lorsque $f = 5$, on a $2t + 25 = 37$ ou $2t = 12$, d'où $t = 6$.
   Lorsque $f = 7$, on a $2t + 35 = 37$ ou $2t = 2$, d'où $t = 1$.
   Lorsque $f \geq 9$, $5f \geq 45$, d'où $2t + 5f > 37$.
   Les couples (t,f) possibles sont donc $(16, 1)$, $(11, 3)$, $(6, 5)$ et $(1, 7)$.

   (d) Si a lancers rapportent chacun 6 points et b lancers rapportent chacun 21 points, alors le nombre total de points rapportés est égal à $6a + 21b$ ou $3(2a + 7b)$.
   Puisque a et b sont des entiers non négatifs, alors $2a + 7b$ est un entier non négatif. Donc, le nombre total de points rapportés, soit $3(2a + 7b)$, est un multiple de 3.
   Puisque 182 n'est pas un multiple de 3, alors il n'est pas possible d'avoir un score total de 182 points.

2. (a) L'aire totale des régions ombrées peut être déterminée en soustrayant l'aire du triangle AED de l'aire du rectangle $ABCD$.
   L'aire du rectangle $ABCD$ est égale à $2 \cdot 15 = 30$.
   La longueur de la base du triangle AED est égale à $AD = 15$ et sa hauteur est égale à $AB = 2$. Donc, l'aire du triangle AED est égale à $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2 = 15$.
   Donc, l'aire totale des régions ombrées est égale à $30 - 15 = 15$.

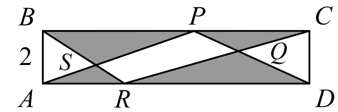
   (b) *Solution 1*
   Puisque le triangle AFD a pour base $AD = 15$ et pour hauteur $AB = 2$, alors son aire est égale à $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2 = 15$.
   L'aire du triangle AFD est égale à la somme des aires des triangles AGD et FGD.



   Puisque l'aire du triangle AFD est égale à 15 et que l'aire du triangle FGD est égale à 5, alors l'aire du triangle AGD est égale à $15 - 5 = 10$.
   L'aire du triangle ABD est égale à $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2 = 15$.
   L'aire du triangle ABD est égale à la somme des aires des triangles AGD et ABG.
   Puisque l'aire du triangle ABD est égale à 15 et que l'aire du triangle AGD est égale à 10, alors l'aire du triangle ABG (soit l'aire de la région ombrée) est égale à $15 - 10 = 5$.

   Solution 2
   Considérons les triangles AFD et ABD. Chacun a pour base AD et pour hauteur AB. Donc, les deux triangles ont des aires égales.
   L'aire du triangle AFD est égale à la somme des aires des triangles AGD et FGD.
   L'aire du triangle ABD est égale à la somme des aires des triangles AGD et ABG.
   Donc, l'aire du triangle ABG (soit l'aire de la région ombrée) est égale à l'aire du triangle FGD, soit 5.

(c) L'aire totale des deux régions ombrées inférieures (soit les triangles ASR et RQD) peut être déterminée en soustrayant l'aire de $PQRS$ de l'aire du triangle APD.
Puisque le triangle APD a pour base $AD = 15$ et pour hauteur $AB = 2$, alors son aire est égale à $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2 = 15$.



Puisque $PQRS$ a une aire de 6, l'aire totale des deux régions ombrées inférieures est égale à $15 - 6 = 9$.

De même, on peut démontrer que l'aire totale des deux régions ombrées supérieures (soit les triangles BSP et PQC) peut être déterminée en soustrayant l'aire de $PQRS$ de l'aire du triangle BRC.
Puisque le triangle BRC a également une aire de 15, l'aire totale des deux régions ombrées supérieures est égale à $15 - 6 = 9$.
Donc, l'aire totale des régions ombrées est égale à $9 + 9 = 18$.

3. (a) Si l'on échange les deuxième et quatrième chiffres de 6238, on obtient 6832.
Puisque 6832 ne figure pas dans la liste, ce nombre est le cousin manquant.

(b) Sur les 16 entiers de six chiffres de la liste donnée, 15 sont des cousins de l'entier initial.
Si l'entier initial de six chiffres est $abcdef$, alors il y a exactement 5 cousins pour lesquels a n'est pas le 1^er^ chiffre.
Ces 5 cousins sont le résultat de l'échange du 1^er^ chiffre, a, avec chacun des 5 autres chiffres, b, c, d, e, f et sont donc $bacdef$, $cbadef$, $dbcaef$, $ebcdaf$ et $fbcdea$.
Chacun des $15 - 5 = 10$ cousins restants de $abcdef$ a pour premier chiffre a.
Puisque les chiffres sont distincts, alors le 1^er^ chiffre de l'entier initial est l'entier qui parait le plus souvent comme 1^er^ chiffre dans la liste donnée, soit 7.
On peut avancer un argument semblable pour chacun des autres chiffres.
C'est-à-dire que le $n^{\text{ième}}$ chiffre de l'entier initial est l'entier qui parait le plus souvent comme $n^{\text{ième}}$ chiffre dans la liste donnée.
Donc, l'entier initial a 2 pour deuxième chiffre, 6 pour troisième chiffre, 4 pour quatrième chiffre, 9 pour cinquième chiffre et 1 pour sixième chiffre. Donc, l'entier initial est 726 491.
On peut vérifier que si l'entier initial est 726 491, alors les cousins sont bien les 15 entiers restants dans la liste donnée.

(c) Les cousins de l'entier de trois chiffres $cd3$ sont $dc3$, $3dc$ et $c3d$.
La différence entre les deux entiers $cd3$ et $dc3$ pourrait être négative, auquel cas ce ne serait pas la bonne différence. Si la différence est positive, alors $cd3$ moins $dc3$ a 0 pour chiffre des unités et ne peut donc pas égaler $d95$.
De même, la différence entre les deux entiers $cd3$ and $c3d$ pourrait être négative, auquel cas ce ne serait pas la bonne différence. Puisque $cd3$ et $c3d$ ont chacun c pour chiffre des centaines, alors $cd3$ moins $c3d$ a 0 pour chiffre des centaines et ne peut donc pas égaler $d95$ (puisque d est un chiffre non nul).
Donc, $cd3$ moins $3dc$ est égal à $d95$.
Puisque la différence, $d95$, a 5 pour chiffre des unités, alors $c = 8$. (Avant de continuer, veuillez confirmer que celle-ci est la seule valeur possible de c.)
À partir de $c = 8$, on a $8d3$ moins $3d8$ est égal à $d95$.
L'entier de trois chiffres $8d3$ est égal à $800 + 10d + 3$.
L'entier de trois chiffres $3d8$ est égal à $300 + 10d + 8$.
Donc, $8d3$ moins $3d8$ est égal à $(800 + 10d + 3) - (300 + 10d + 8) = 500 - 5 = 495$, ce qui est égal à $d95$, d'où $d = 4$.
(On peut confirmer que $843 - 348 = 495$.)
La valeur de c est 8, celle de d est 4 et aucune autre valeur n'est possible.

(d) *Solution 1*

Les six cousins de l'entier de quatre chiffres $mn97$ sont $nm97$, $9nm7$, $7n9m$, $m9n7$, $m79n$ et $mn79$.
Le cousin $nm97$ est égal à $1000n + 100m + 90 + 7$.
Le cousin $9nm7$ est égal à $9000 + 100n + 10m + 7$.
Le cousin $7n9m$ est égal à $7000 + 100n + 90 + m$.
Le cousin $m9n7$ est égal à $1000m + 900 + 10n + 7$.
Le cousin $m79n$ est égal à $1000m + 700 + 90 + n$.
Le cousin $mn79$ est égal à $1000m + 100n + 70 + 9$.
La somme, S, des six cousins est donc égale à

$$\begin{aligned} S &= 1000(n+9+7+m+m+m) + 100(m+n+n+9+7+n) + 10(9+m+9+n+9+7) \\ &\quad + (7+7+m+7+n+9) \\ &= 1000(3m+n+16) + 100(m+3n+16) + 10(m+n+34) + (m+n+30) \end{aligned}$$

La somme, S, doit être égale à l'entier de cinq chiffres $nmnm7$, dont le chiffre des unités est 7.
Le chiffre des unités de $S = 1000(3m+n+16)+100(m+3n+16)+10(m+n+34)+(m+n+30)$ est égal au chiffre des unités de $m+n+30$, qui est à son tour égal au chiffre des unités de $m+n$ (puisque 30 a 0 pour chiffre des unités).
Si $m+n$ a 7 pour chiffre des unités, alors $m+n=7$ ou $m+n=17$.
Puisque m et n sont des chiffres distincts non nuls, alors les couples (m,n) possibles sont $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$, $(6,1)$, $(8,9)$ et $(9,8)$.
Si $(m,n) = (1,6)$, alors l'entier de cinq chiffres $nmnm7$ est 61 617 et

$$\begin{aligned} S &= 1000(3m+n+16) + 100(m+3n+16) + 10(m+n+34) + (m+n+30) \\ &= 1000(3(1)+6+16) + 100(1+3(6)+16) + 10(1+6+34) + (1+6+30) \\ &= 1000(25) + 100(35) + 10(41) + 37 \\ &= 28\,947 \end{aligned}$$

Donc, $(m,n) = (1,6)$ n'est pas un couple possible.
On vérifie les autres couples (m,n) possibles dans le tableau ci-dessous.

(m,n)	$nmnm7$	S
(2,5)	52 527	30 747
(3,4)	43 437	32 547
(4,3)	34 347	34 347
(5,2)	25 257	36 147
(6,1)	16 167	37 947
(8,9)	98 987	54 657
(9,8)	89 897	56 457

Le seul couple de chiffres distincts non nuls (m,n) est $(4,3)$.

Solution 2
Les six cousins de l'entier de quatre chiffres $mn97$ sont $nm97$, $9nm7$, $7n9m$, $m9n7$, $m79n$ et $mn79$. Comme dans la Solution 1, la somme, S, des six cousins est égale à

$$\begin{aligned} S &= 1000(n+9+7+m+m+m)+100(m+n+n+9+7+n)+10(9+m+9+n+9+7) \\ &\quad +(7+7+m+7+n+9) \\ &= 1000(3m+n+16)+100(m+3n+16)+10(m+n+34)+(m+n+30) \\ &= 3000m+1000n+16\,000+100m+300n+1600+10m+10n+340+m+n+30 \\ &= 3111m+1311n+17\,970 \end{aligned}$$

La somme, S, doit être égale à l'entier de cinq chiffres $nmnm7$, qui est à son tour égal à $10\,000n+1000m+100n+10m+7$ ou $10\,100n+1010m+7$.
On égalise les deux expressions et on simplifie l'équation résultante pour obtenir

$$\begin{aligned} 3111m+1311n+17\,970 &= 10\,100n+1010m+7 \\ 8789n-2101m &= 17\,963 \\ 799n-191m &= 1633 \quad \text{(en divisant chaque membre de l'équation par 11)} \end{aligned}$$

Puisque $799n = 1633+191m$ et $m \geq 1$, alors $799n \geq 1633+191(1)$ ou $799n \geq 1824$, d'où $n \geq \dfrac{1824}{799} \approx 2{,}3$.
Puisque $m \leq 9$, alors $799n \leq 1633+191(9)$ ou $799n \leq 3352$, d'où $n \leq \dfrac{3352}{799} \approx 4{,}2$.
Since $2{,}3 \leq n \leq 4{,}2$ et que n est un entier, alors les valeurs possibles de n sont 3 et 4.
On reporte $n=4$ dans l'équation pour obtenir $799(4) = 1633+191m$ ou $191m = 1563$ et puisque $\dfrac{1563}{191}$ n'est pas un entier, alors $n \neq 4$.
On reporte $n=3$ dans l'équation pour obtenir $799(3) = 1633+191m$ ou $191m = 764$, d'où $m=4$.
Lorsque $m=4$ et $n=3$, l'entier de cinq chiffres $nmnm7$ est $34\,347$ et

$$S = 3111(4)+1311(3)+17\,970$$

ou $S = 34\,347$. Donc, le seul couple (m,n) de chiffres distincts non nuls est $(4,3)$.

4. (a) Puisqu'il y a 9 façons de générer chacun des trois entiers, alors il y a en tout $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ façons de générer les trois entiers.
On examine ensuite les différents cas pour lesquels le produit des trois entiers est un nombre premier.
Les entiers de 1 à 9 comprennent les nombres composés 4, 6, 8 et 9.
Si l'un des trois entiers générés est un nombre composé, alors le produit des trois entiers est un nombre composé.
Donc, les entiers doivent être choisis parmi 1, 2, 3, 5 et 7.
Parmi ces cinq entiers, 2, 3, 5 et 7 sont des nombres premiers.
Si deux ou plus des trois entiers générés sont des nombres premiers, alors le produit des trois entiers est un nombre composé.
Donc, au plus un entier est un nombre premier.
Si aucun des entiers générés n'est un nombre premier (tous les trois sont égaux à 1), alors le produit est 1, qui n'est pas un nombre premier.
Donc, le produit d'Amarpreet est un nombre premier exactement lorsque l'un des entiers

est 2, 3, 5 ou 7 et que chacun des deux autres entiers est égal à 1.
Il y a 4 façons de choisir l'un des nombres premiers, p, et 3 façons d'arranger les entiers 1, 1, p. Donc, il y a $4 \cdot 3 = 12$ façons de générer trois entiers dont le produit est un nombre premier.
Donc, la probabilité pour que le produit soit égal à un nombre premier est égale à $\frac{12}{729} = \frac{4}{243}$.

(b) *Solution 1*

On examine d'abord les différents cas pour lesquels le produit des quatre entiers est divisible par 5 mais non divisible par 7.
Le seul entier de 1 à 9 qui est divisible par 5 est 5. Donc, le produit des quatre entiers est divisible par 5 exactement lorsqu'au moins un des quatre entiers est 5.
De même, le seul entier de 1 à 9 qui est divisible par 7 est 7. Donc, le produit des quatre entiers n'est pas divisible par 7 exactement lorsqu'un 7 ne figure pas parmi les quatre entiers générés.
On compte le nombre de façons de générer de tels arrangements de quatre entiers en considérant le nombre de fois où 5 parait dans l'arrangement.

<u>1er cas : il y a quatre 5</u>
Comme chacun des quatre entiers doit être égal à 5, il y a 1 possibilité dans ce cas.

<u>2e cas : il y a exactement trois 5</u>
Les trois 5 peuvent être disposés de 4 façons différentes : 555_, 55_5, 5_55, _555.
Il y a 7 choix pour l'entier qui n'est pas un 5 puisqu'il peut être n'importe lequel des neuf entiers, à l'exception de 5 et 7.
Il y a donc $4 \cdot 7 = 28$ possibilités dans ce cas.

<u>3e cas : il y a exactement deux 5</u>
Les deux 5 peuvent être disposés de 6 façons différentes : 55__, 5_5_, 5__5, _55_, _5_5, __55.
Une fois que les deux 5 ont été placés, il y a 7 choix pour chacun des deux entiers restants (puisqu'il est possible que ces entiers soient égaux l'un à l'autre).
Donc, il y a $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$ possibilités dans ce cas.

<u>4e cas : il y a exactement un 5</u>
Le 5 peut être placé de 4 façons différentes.
Une fois que le 5 a été placé, il y a 7 choix pour chacun des trois entiers restants (puisqu'il est possible que ces entiers soient égaux l'un à l'autre).
Donc, il y a $4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 1372$ possibilités dans ce cas.

Au total, il y a $1 + 28 + 294 + 1372 = 1695$ façons de sélectionner les quatre entiers.
Puisqu'il y a 9 façons de générer chacun des quatre entiers, alors il y a en tout $9^4 = 6561$ façons de générer les quatre entiers.
Donc, la probabilité pour que le produit de Bertrand soit divisible par 5 mais non divisible par 7 est égale à $\frac{1695}{6561} = \frac{565}{2187}$.

Solution 2

Soit A l'événement que le produit généré par Bertrand est divisible par 5 et $\overline{A}$ l'événement que le produit n'est *pas* divisible par 5.
Soit B l'événement que le produit généré par Bertrand est divisible par 7 et $\overline{B}$ l'événement que le produit n'est *pas* divisible par 7.
On doit déterminer la probabilité de A et $\overline{B}$, ce que l'on peut exprimer comme $P(A \cap \overline{B})$.
Considérons le diagramme de Venn de la Figure 1.
La région ombrée de ce diagramme représente $P(A \cap \overline{B})$.

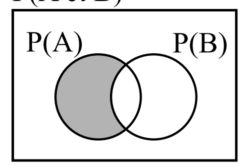


Figure 1

On veut trouver une méthode plus efficace pour déterminer $P(A \cap \overline{B})$ que celle présentée dans la Solution 1.
Pour ce faire, on va se servir des diagrammes de Venn pour nous aider à exprimer $P(A \cap \overline{B})$ sous une forme équivalente.

Considérons les deux diagrammes de Venn présentés ci-dessous.
Dans la Figure 2, la région ombrée représente $P(\overline{B})$.
Dans la Figure 3, la région ombrée représente $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

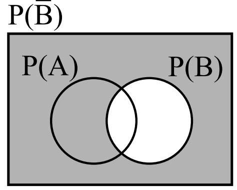


Figure 2

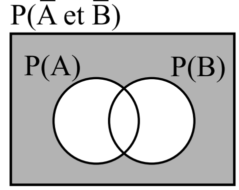


Figure 3

Remarquons que si la région ombrée de la Figure 3 est supprimée (c'est-à-dire qu'elle devient non ombrée) dans la Figure 2, alors le diagramme de Venn résultant est équivalent à celui de la Figure 1.
Donc, mathématiquement, $P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

(Sans utiliser les diagrammes de Venn, on aurait pu remarquer de la même manière que puisque exactement l'un de A et $\overline{A}$ peut se produire, alors $P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$.
Donc, $P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B})$.)

Donc, la probabilité pour que le produit soit divisible par 5 mais non divisible par 7 est égale à la probabilité que le produit ne soit pas divisible par 7 moins la probabilité que le produit soit à la fois non divisible par 5 et non divisible par 7.
Le seul entier de 1 à 9 qui est divisible par 7 est 7. Donc, le produit des quatre entiers n'est pas divisible par 7 exactement lorsque 7 ne figure pas parmi les quatre entiers générés.
La probabilité pour que l'entier généré ne soit pas 7 est égale à $\frac{8}{9}$. Donc, la probabilité pour que le produit des quatre entiers ne soit pas divisible par 7 est égale à $P(\overline{B}) = \left(\frac{8}{9}\right)^4$.
Le seul entier de 1 à 9 qui est divisible par 5 est 5. Donc, le produit des quatre entiers n'est pas divisible par 5 exactement lorsque 5 ne figure pas parmi les quatre entiers générés.
La probabilité pour que l'entier généré ne soit pas divisible à la fois par 5 et par 7 est donc égale à $\frac{7}{9}$. Donc, la probabilité pour que le produit des quatre entiers ne soit pas divisible

par 5 et ne soit pas divisible par 7 est égale à $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{7}{9}\right)^4$.

Donc, la probabilité pour que le produit soit divisible par 5 mais non divisible par 7 est égale à $\left(\frac{8}{9}\right)^4 - \left(\frac{7}{9}\right)^4 = \frac{8^4 - 7^4}{9^4} = \frac{4096 - 2401}{6561} = \frac{1695}{6561} = \frac{565}{2187}$.

Solution 3

Supposons que les quatre nombres générés soient a, b, c, d.
En l'absence de restrictions, il y a 9 choix pour chacun de a, b, c, d et donc un total de 9^4 combinaisons possibles de 4 chiffres qui peuvent être générées.
Si $abcd$ n'est pas divisible par 7, alors aucun de a, b, c, d ne peut être 7. Donc, il y a 8 possibilités pour chacun de a, b, c, d. Donc, parmi les 9^4 combinaisons, 8^4 combinaisons donnent des produits qui ne sont pas divisibles par 7.
Si $abcd$ n'est pas divisible par 7 et n'est pas divisible par 5, alors aucun de a, b, c, d ne peut être 5. Donc, il y a 7 possibilités pour chacun de a, b, c, d. Donc, parmi les 8^4 combinaisons dont les produits ne sont pas divisibles par 7, 7^4 combinaisons donnent des produits qui ne sont également pas divisibles par 5.
Cela signifie qu'il y a $8^4 - 7^4$ combinaisons dont le produit est divisible par 5 mais non divisible par 7.
Donc, la probabilité qu'une combinaison aléatoire donne un produit qui est divisible par 5 mais non divisible par 7 est égale à $\frac{8^4 - 7^4}{9^4} = \frac{4096 - 2401}{6561} = \frac{1695}{6561} = \frac{565}{2187}$.

(c) Si l'un des 2023 entiers générés est un 6, alors le produit est divisible par 6.
Donc, on peut exclure 6 du choix des entiers possibles.
De plus, un entier est divisible par 6 exactement lorsqu'il est divisible à la fois par 2 et par 3.
En excluant 6, les entiers restants qui sont divisibles par 2 sont 2, 4 et 8 et les entiers restants qui sont divisibles par 3 sont 3 et 9.
Par conséquent, le produit est également divisible par 6 lorsqu'au moins un des entiers générés est 2 ou 4 ou 8 et qu'au moins un des entiers générés est 3 ou 9.
En résumé, le produit n'est pas divisible par 6 exactement lorsque

- 6 ne figure pas parmi les entiers générés et
- il y a des entiers d'au plus une des deux listes 2, 4, 8, et 3, 9.

Donc, il y a exactement 3 cas qui produisent un produit qui n'est pas divisible par 6 :

Cas	Y a-t-il un 6 ?	Y a-t-il un 2, un 4 ou un 8 ?	Y a-t-il un 3 ou un 9 ?
1	non	non	non
2	non	non	oui
3	non	oui	non

Pour chacun de ces 3 cas, on compte le nombre de façons dont le produit généré n'est pas divisible par 6.

<u>1er cas : il n'y a ni 6, ni 2, ni 4, ni 8, ni 3, ni 9</u>
Dans ce cas, il y a 3 entiers qui peuvent être choisis (1, 5 et 7) et il y a donc 3^{2023} façons de générer ce produit.

<u>2e cas : il n'y a ni 6, ni 2, ni 4, ni 8</u>
Dans ce cas, il y a 5 entiers qui peuvent être choisis (1, 3, 5, 7 et 9) et il y a donc 5^{2023} façons de générer ce produit.

Cependant, ce compte inclut les cas où seuls 1, 5 et 7 sont choisis (3 et 9 ne le sont pas), ce qui a déjà été pris en compte dans le 1er cas.

Donc, il y a $5^{2023} - 3^{2023}$ façons de générer les produits dans le 2^e^ cas qui sont différentes de celles du 1^er^ cas.

3^e^ cas : il n'y a ni 6, ni 3, ni 9

Dans ce cas, il y a 6 entiers qui peuvent être choisis (1, 2, 4, 5, 7 et 8) et il y a donc 6^{2023} façons de générer ce produit.

Cependant, ce compte inclut les cas où seuls 1, 5 et 7 sont choisis (2, 4 et 8 ne le sont pas), ce qui a déjà été pris en compte dans le 1^er^ cas.
Donc, il y a $6^{2023} - 3^{2023}$ façons de générer les produits dans le 3^e^ cas qui sont différentes de celles du 1^er^ cas.

Donc, le nombre total de façons de générer tous les produits qui ne sont pas divisibles par 6 est égal à

$$3^{2023} + 5^{2023} - 3^{2023} + 6^{2023} - 3^{2023} = 5^{2023} + 6^{2023} - 3^{2023}$$

En l'absence de restrictions, il y a 9 choix pour chacun des entiers générés. Donc, au total, il y a 9^{2023} façons possibles de générer le produit.
Donc, la probabilité, p, que le produit ne soit pas divisible par 6 est égale à

$$p = \frac{5^{2023} + 6^{2023} - 3^{2023}}{9^{2023}}$$

d'où $p \cdot 9^{2023} = 5^{2023} + 6^{2023} - 3^{2023}$. Cette valeur est entière car elle est égale à la somme et à la différence de nombres entiers.
Pour déterminer le chiffre des unités de l'entier égal à $p \cdot 9^{2023}$, on détermine le chiffre des unités de l'entier égal à $5^{2023} + 6^{2023} - 3^{2023}$.
Le chiffre des unités de 5^a est égal à 5 pour tous les entiers strictement positifs a et donc le chiffre des unités de 5^{2023} est égal à 5.
Le chiffre des unités de 6^b est égal à 6 pour tous les entiers strictement positifs b et donc le chiffre des unités de 6^{2023} est égal à 6.
Considérons le chiffre des unités des puissances entières successives de 3 en commençant par 3^1 :

- 3^1 a 3 pour chiffre des unités
- 3^2 a 9 pour chiffre des unités
- 3^3 a 7 pour chiffre des unités
- 3^4 a 1 pour chiffre des unités
- 3^5 a 3 pour chiffre des unités

Puisque 3^1 et 3^5 ont le même chiffre des unités et que l'on effectue la même action pour passer d'une étape à l'autre, les résultats commencent à se répéter. Donc le bloc de quatre chiffres des unités (3, 9, 7, 1) doit former un cycle.
Puisque $2023 = 4 \cdot 505 + 3$, alors le chiffre des unités de 3^{2023} est le troisième chiffre du bloc qui se répète, soit 7.
Finalement, le chiffre des unités de l'entier égal à $p \cdot 9^{2023}$ est le chiffre des unités de $5+6-7$, ce qui est égal à 4.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatia 2022

le mardi 12 avril 2022
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 13 avril 2022
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) L'hexagone régulier $ABCDEF$ a des côtés de longueur $2x$. Donc $AB = 2x$.
Puisque le triangle OAB est équilatéral, alors $OA = OB = AB = 2x$.
Le rayon du cercle est égal à OA, ce qui est égal à $2x$.

(b) Puisque M est le milieu de AB et $OA = OB$, alors OM et AB sont perpendiculaires.
Puisque M est le milieu de AB, alors $AM = \frac{1}{2}AB = x$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OAM, on a $OA^2 = OM^2 + AM^2$ ou $(2x)^2 = OM^2 + x^2$, d'où $OM^2 = 3x^2$ ou $OM = \sqrt{3}x$ (puisque $OM > 0$).
Par ailleurs, on remarque que le triangle OAM est un triangle remarquable 30°-60°-90°, d'où on a donc $AM : OA : OM = 1 : 2 : \sqrt{3} = x : 2x : \sqrt{3}x$.

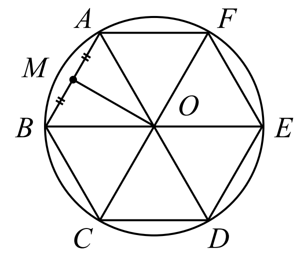


Figure 2

(c) Les diagonales AD, BE et CF divisent $ABCDEF$ en six triangles équilatéraux isométriques. Donc, l'aire de $ABCDEF$ est six fois celle du triangle OAB (ayant pour base AB et pour hauteur OM). On a donc

$$6 \times \tfrac{1}{2} \times AB \times OM = 3 \times 2x \times \sqrt{3}x = 6\sqrt{3}x^2$$

(d) L'aire de la région ombrée est obtenue en soustrayant l'aire de $ABCDEF$ de l'aire du cercle de centre O et de rayon $2x$.
Donc, l'aire de la région ombrée est égale à

$$\pi(2x)^2 - 6\sqrt{3}x^2 = 4\pi x^2 - 6\sqrt{3}x^2 = (4\pi - 6\sqrt{3})x^2$$

Cette région ombrée a une aire de 123, donc $(4\pi - 6\sqrt{3})x^2 = 123$ ou $x^2 = \dfrac{123}{4\pi - 6\sqrt{3}}$.
Puisque $x > 0$, on obtient $x = \sqrt{\dfrac{123}{4\pi - 6\sqrt{3}}}$ ou $x = 7{,}5$ en arrondissant au dixième près.

2. (a) Avec 1 kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement 24 mini muffins et 2 grands muffins. Donc, avec 2 kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement $2 \times 24 = 48$ mini muffins et $2 \times 2 = 4$ grand muffins. Donc, n a une valeur de 4.

(b) *Solution 1*
Avec 2 kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement 36 mini muffins et 6 grands muffins.
Avec 2 kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement 48 mini muffins et 4 grands muffins.
En les additionnant, on obtient qu'avec 2 kg + 2 kg = 4 kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement $36 + 48 = 84$ mini muffins et $6 + 4 = 10$ grands muffins. Donc, $x = 4$.

Solution 2
Soit m le nombre de kilogrammes de pâte à muffins nécessaires pour préparer 1 mini muffin.
Soit g le nombre de kilogrammes de pâte à muffins nécessaires pour préparer 1 grand muffin.
Puisqu'on peut préparer exactement 24 mini muffins et 2 grand muffins avec 1 kg de pâte à muffins, alors $1 = 24m + 2g$.
Puisqu'on peut préparer exactement 36 mini muffins et 6 grands muffins avec 2 kg de pâte à muffins, alors $2 = 36m + 6g$.
On soustrait la deuxième équation de 3 fois la première pour obtenir $3 \times 1 - 2 = 3 \times (24m + 2g) - (36m + 6g)$ ou $1 = 36m$, d'où $m = \dfrac{1}{36}$.

On reporte $m = \dfrac{1}{36}$ dans la seconde équation pour obtenir $2 = 36\left(\dfrac{1}{36}\right) + 6g$ ou $1 = 6g$, d'où $g = \dfrac{1}{6}$.

Puisqu'il nous faut $\dfrac{1}{36}$ kg de pâte à muffins pour préparer 1 mini muffin, alors il nous faut $84 \cdot \dfrac{1}{36} = \dfrac{7}{3}$ kg de pâte à muffins pour préparer 84 mini muffins.

Puisqu'il nous faut $\dfrac{1}{6}$ kg de pâte à muffins pour préparer 1 grand muffin, alors il nous faut $10 \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{3}$ kg de pâte à muffins pour préparer 10 grands muffins.

Donc, on peut préparer exactement 84 mini muffins et 10 grands muffins avec $\dfrac{7}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{12}{3} = 4$ kg de pâte à muffins. Donc, $x = 4$.

(c) Dans la partie (b) *Solution 2*, on avait déterminé qu'il nous fallait $\frac{1}{36}$ kg de pâte à muffins pour préparer 1 mini muffin et $\frac{1}{6}$ kg de pâte à muffins pour préparer 1 grand muffin.
Donc, il nous faut 6 fois le nombre de kilogrammes de pâte à muffins pour préparer 1 grand muffin qu'il nous en faut pour préparer 1 mini muffin $\left(6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\right)$.
En d'autres termes, on peut préparer 1 grand muffin ou 6 mini muffins en utilisant le même montant de pâte à muffins.
Donc, on peut préparer $6 \times 7 = 42$ mini muffins avec la même quantité de pâte que celle requise pour la préparation de 7 grands muffins.

3. (a) Si le premier nombre d'une suite est 3 et que les nombres suivants sont générés par la fonction $x^2 - 3x + 1$, alors le deuxième nombre de la suite est

$$3^2 - 3(3) + 1 = 1,$$

et le troisième nombre de la suite est

$$1^2 - 3(1) + 1 = -1,$$

et le quatrième nombre de la suite est

$$(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 5.$$

Les quatre premiers nombres de la suite sont $3, 1, -1, 5$.

(b) Soit p et d respectivement le premier et deuxième nombre de la suite générée par la fonction $x^2 - 4x + 7$.
Donc, les trois premiers nombres de la suite sont $p, d, 7$.
Puisque le troisième nombre de la suite est 7, alors $d^2 - 4d + 7 = 7$.
Donc, $d^2 - 4d = 0$ ou $d(d - 4) = 0$, qui a donc pour solutions $d = 0$ et $d = 4$. Donc, les trois premiers nombres de la suite pourraient être $p, 0, 7$ ou $p, 4, 7$.
Si le deuxième nombre de la suite est 0, alors $p^2 - 4p + 7 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $(-4)^2 - 4(1)(7) = -12$ (inférieur à zéro) et donc l'équation n'admet aucune solution réelle.
Donc, il n'y a pas de premier nombre dans cette suite pour lequel le deuxième nombre serait égal à 0.

Si le deuxième nombre de la suite est 4, alors $p^2 - 4p + 7 = 4$ ou $p^2 - 4p + 3 = 0$, d'où

$(p-1)(p-3)=0$, qui a donc pour solutions $p=1$ et $p=3$.
Donc, si 7 est le troisième nombre d'une suite générée par la fonction x^2-4x+7, alors les trois premiers nombres de la suite pourraient être $1,4,7$ ou $3,4,7$. Donc, les nombres possibles qui pourraient occuper la première position de la suite sont 1 et 3.

(c) Les deux premiers nombres de la suite sont c,c, d'où on a $c^2-7c-48=c$.
On a donc $c^2-8c-48=0$ ou $(c+4)(c-12)=0$, qui a donc pour solutions $c=-4$ et $c=12$.

(d) Le premier nombre de la suite est a et le deuxième est b. On a donc

$$a^2-12a+39=b.$$

Le deuxième nombre de la suite est b et le troisième nombre est a. On a donc

$$b^2-12b+39=a.$$

On soustrait la deuxième équation de la première pour obtenir

$$\begin{aligned}(a^2-12a+39)-(b^2-12b+39) &= b-a\\ a^2-b^2-12a+12b &= b-a\\ a^2-b^2-11a+11b &= 0\\ (a-b)(a+b)-11(a-b) &= 0\\ (a-b)(a+b-11) &= 0\end{aligned}$$

Puisque $a\neq b$, alors $a-b\neq 0$, d'où $a+b-11=0$ ou $b=11-a$.
On reporte $b=11-a$ dans la première équation pour obtenir $a^2-12a+39=11-a$ ou $a^2-11a+28=0$. On factorise le membre de gauche pour obtenir $(a-4)(a-7)=0$. Donc, les valeurs possibles de a sont 4 et 7.
(Remarquons que les deux suites possibles sont $4,7,4,\ldots$ et $7,4,7,\ldots$.)

4. (a) On écrit 240 en factorisation première : $240=2^4 3^1 5^1$. Donc,

$$f(240)=(1+4)(1+1)(1+1)=(5)(2)(2)=20$$

(b) Supposons que $f(N)=6$ et que N est refactorisable. Alors N admet 6 comme diviseur.
N admet 6 comme diviseur uniquement lorsque ses facteurs premiers comprennent au moins un 2 et au moins un 3 (puisque $6=2\times 3$).
Supposons que N contienne un facteur premier supplémentaire p qui est distinct de 2 et 3. Dans ce cas, les diviseurs de N sont $1,2,3,6,p,2p,3p$ et $6p$, ce qui est un nombre trop élevé de diviseurs.
Donc, N doit être un entier strictement positif de la forme $N=2^u3^v$, u et v étant des entiers strictement positifs. Donc, $f(N)=(1+u)(1+v)=6$.
Puisque u et v sont des entiers strictement positifs, alors $1+u\geq 2$ et $1+v\geq 2$. Donc, il y a exactement deux possibilités : $u=1$ et $v=2$, ou $u=2$ et $v=1$.
Lorsque $u=1$ et $v=2$, $N=2^1 3^2=18$ tandis que lorsque $u=2$ et $v=1$, $N=2^2 3^1=12$.
Les nombres refactorisables N tels que $f(N)=6$ sont 12 et 18.

(c) Puisque N est refactorisable, alors N admet $f(N)=256=2^8$ comme diviseur.
Donc, pour un entier quelconque $w\geq 8$, on peut exprimer N sous la forme $N=2^w p_1^{a_1} p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, $2<p_1<p_2<\cdots<p_k$ étant des nombres premiers et $a_1,a_2,\cdots,a_k$ étant des entiers strictement positifs.
Dans ce cas, $f(N)=(1+w)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)=2^8$. Donc, chacun des facteurs

$1+w, 1+a_1, 1+a_2, \cdots, 1+a_k$ est une puissance de 2 (puisque leur produit est 2^8).
Cela signifie que chacun des exposants $w, a_1, a_2, \cdots, a_k$ est 1 de moins qu'une puissance de 2.
Puisque $w \geq 8$, alors $1+w \geq 9$, d'où $1+w \geq 2^4$ (la plus petite puissance de 2 supérieure à 8).
Puisque $f(N) = (1+w)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k) = 2^8$, alors $2^4 \leq 1+w \leq 2^8$ et $1 \leq (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k) \leq 2^4$. Donc, w doit être égal à $15, 31, 63, 127$ ou 255, tandis que chacun de $a_1, a_2, \cdots, a_k$ doit être égal à $1, 3, 7$ ou 15.
Par exemple, si $1+w = 2^8$, alors $w = 256 - 1 = 255$ et $N = 2^{255}$.
Si $1+w = 2^4$, alors $w = 15$ et on peut exprimer N sous la forme $N = 2^{15}p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$.
Donc, le plus petit nombre N ayant le plus grand nombre de facteurs premiers distincts est $N = 2^{15}3^1 5^1 7^1 11^1$.
On peut vérifier que $f(N) = (1+15)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 2^4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$.
En comparant ces deux premières valeurs de N, on voit que $2^{15}3^1 5^1 7^1 11^1$ est bien inférieur à 2^{255}.
De plus, on voit que

- toutes les autres valeurs possibles de N ont exactement 2, 3 ou 4 facteurs premiers distincts,
- lorsque les exposants sont égaux, les petits facteurs premiers donnent des valeurs plus petites de N,
- les plus grands exposants doivent paraitre sur les plus petits facteurs premiers et
- on se rappelle que chaque exposant est 1 de moins qu'une puissance de 2.

Dans le tableau ci-dessous, on utilise les renseignements présentés ci-dessus pour déterminer les plus petites valeurs possibles de N ayant 1, 2, 3, 4 et 5 facteurs premiers distincts.
De plus, on compare la taille de chacune de ces valeurs de N dans chacun des 5 groupes.

Nombre de facteurs premiers distincts de N	Valeurs de N
1	2^{255}
2	$2^{15}3^{15} < 2^{31}3^7 < 2^{63}3^3 < 2^{127}3^1$
3	$2^{15}3^3 5^3 < 2^{15}3^7 5^1 < 2^{31}3^3 5^1 < 2^{63}3^1 5^1$
4	$2^{15}3^3 5^1 7^1 < 2^{31}3^1 5^1 7^1$
5	$2^{15}3^1 5^1 7^1 11^1$

Enfin, on compare les plus petites valeurs de N de chacune des 5 rangées dans le tableau ci-dessus.
Puisque $2^{15}3^3 5^1 7^1 < 2^{15}3^1 5^1 7^1 11^1 < 2^{15}3^3 5^3 < 2^{15}3^{15} < 2^{255}$, alors le plus petit nombre refactorisable N tel que $f(N) = 256$ est $N = 2^{15}3^3 5^1 7^1 = 30\,965\,760$.

(d) Soit m un entier strictement positif de la forme $m = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ étant des nombres premiers et $a_1, a_2, \cdots, a_k$ étant des entiers strictement positifs.
On choisit d'abord une valeur de N et on montre qu'elle répond aux critères.

Pour chaque $m = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, on choisit $N = p_1^{\left(p_1^{a_1}-1\right)}p_2^{\left(p_2^{a_2}-1\right)}\cdots p_k^{\left(p_k^{a_k}-1\right)}$.
Selon le *renseignement utile* à la deuxième page du concours, $2^n \geq n+1$ pour tous les

entiers strictement positifs n.
Puisque $p \geq 2$ pour tous les nombres premiers p, alors $p^n \geq 2^n \geq n+1$.
Puisque $p^n \geq n+1$, alors $p^n - 1 \geq n$, d'où $p_e^{a_e} - 1 \geq a_e$ pour tous les entiers e tels que $1 \leq e \leq k$.
Donc, $p_1^{a_1}$ est un diviseur de $p_1^{\left(p_1^{a_1}-1\right)}$ puisque chacun d'eux est une puissance ayant pour base p_1 et $p_1^{a_1} - 1 \geq a_1$.
De même, $p_2^{a_2}$ est un diviseur de $p_2^{\left(p_2^{a_2}-1\right)}$ et ainsi de suite.
Donc, $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ est un diviseur de $N = p_1^{\left(p_1^{a_1}-1\right)} p_2^{\left(p_2^{a_2}-1\right)} \cdots p_k^{\left(p_k^{a_k}-1\right)}$.
De plus, $f(N) = \left(1 + p_1^{a_1} - 1\right)\left(1 + p_2^{a_2} - 1\right) \cdots \left(1 + p_k^{a_k} - 1\right) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} = m$.
Donc, pour tout entier $m > 1$, il existe un nombre refactorisable N tel que $f(N) = m$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2021

Avril 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

Avril 2021
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Le coût total de la location d'une voiture est de 180,00 \$.

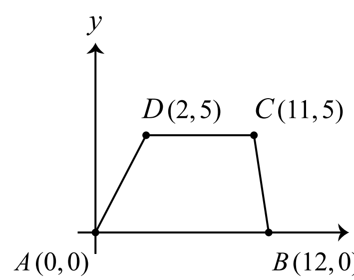
Si 4 personnes louent une voiture, le coût par personne est de $\dfrac{180{,}00\ \$}{4} = 45{,}00\ \$$.

(b) Étant donné que les membres du groupe partagent à parts égales le coût total de la location du véhicule, alors plus le groupe est petit, plus le coût par personne est élevé.
Pour louer un VUS, le groupe doit comprendre un minimum de 5 passagers et le coût total est de 200,00 \$.

Donc, le coût maximal possible par personne pour louer un VUS est de $\dfrac{200{,}00\ \$}{5} = 40{,}00\ \$$.

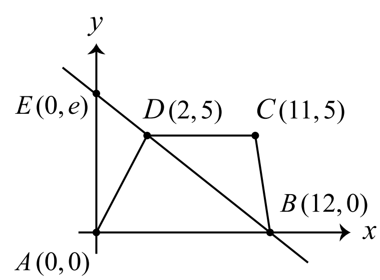
(c) Soit f le coût total de la location d'une fourgonnette.
Pour une location de fourgonnette, le coût maximal possible par personne se produit lorsqu'il y a 9 passagers (soit le plus petit nombre possible de passagers). Donc, le coût maximal possible par personne est égal à $\dfrac{f}{9}$.
Le coût minimal possible par personne se produit lorsqu'il y a 12 passagers (soit le plus grand nombre possible de passagers). Donc, le coût minimal possible par personne est égal à $\dfrac{f}{12}$.
Donc, $\dfrac{f}{9} - \dfrac{f}{12} = 6{,}00\ \$$ ou $\dfrac{4f-3f}{36} = 6{,}00\ \$$, d'où $f = 6{,}00\ \$ \times 36$.
Donc, le coût total de la location d'une fourgonnette est de 216,00 \$.

2. (a) On trace le trapèze $ABCD$ comme dans la figure ci-contre.



Les segments de droite AB et CD ont chacun une pente de 0 et sont donc parallèles.
La longueur de AB est égale à la différence entre les abscisses de A et B, soit une différence de 12.
La longueur de CD est égale à la différence entre les abscisses de C et D, soit une différence de $11 - 2 = 9$.
La hauteur du trapèze est égale à la distance verticale entre AB et CD, soit 5.
Le trapèze $ABCD$ a donc une aire de $\dfrac{5}{2}(AB + CD)$ ou $\dfrac{5}{2}(21) = \dfrac{105}{2}$.

(b) La droite passant par B et D coupe l'axe des ordonnées en point E. Supposons que E a pour coordonnées $(0, e)$ comme on le voit dans la figure ci-contre.



La droite passant par B et D a pour pente $\dfrac{5-0}{2-12} = -\dfrac{1}{2}$.

Solution 1
Puisque E,D et B sont tous situés sur la même droite, alors la pente de ED est égale à la pente de BD.
Donc, $\dfrac{e-5}{0-2} = -\dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{e-5}{2} = \dfrac{1}{2}$, d'où $e - 5 = 1$ ou $e = 6$.
Donc, le point E a pour coordonnées $(0, 6)$.

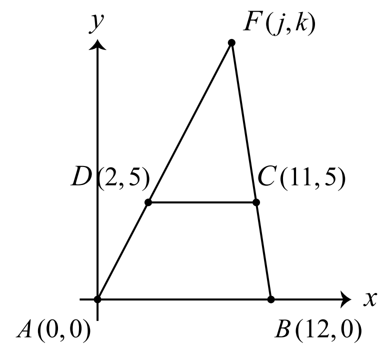
Solution 2
La droite passant par $B(12,0)$ et $D(2,5)$ a pour pente $-\frac{1}{2}$ et a donc pour équation $y - 5 = -\frac{1}{2}(x-2)$, d'où $y - 5 = -\frac{1}{2}x + 1$ ou $y = -\frac{1}{2}x + 6$. Puisque cette droite a une ordonnée à l'origine de 6, alors le point E a pour coordonnées $(0,6)$.

Solution 3
La droite passant par $B(12,0)$ et $D(2,5)$ a pour pente $-\frac{1}{2}$ et a donc pour équation $y - 5 = -\frac{1}{2}(x-2)$.

Cette droite passe par $E(0,e)$. Donc, $e - 5 = -\frac{1}{2}(0-2)$ ou $e = 1 + 5 = 6$.

Le point E a donc pour coordonnées $(0,6)$.

(c) Dans la figure ci-contre, les côtés AD et BC sont prolongés de manière à se couper en point F.



Solution 1
Supposons que F a pour coordonnées (j,k).
Puisque A, D et F sont tous situés sur la même droite, alors la pente de AD est égale à la pente de AF.
Donc, $\frac{5}{2} = \frac{k}{j}$ ou $k = \frac{5}{2}j$.
Puisque B, C et F sont tous situés sur la même droite, alors la pente de BC est égale à la pente de BF.
Donc, $\frac{5-0}{11-12} = \frac{k-0}{j-12}$ ou $-5 = \frac{k}{j-12}$, d'où $k = -5(j-12)$.
On reporte $k = \frac{5}{2}j$ dans l'équation pour obtenir $\frac{5}{2}j = -5(j-12)$ ou $j = -2(j-12)$, d'où $3j = 24$ ou $j = 8$.

Lorsque $j = 8$, alors $k = \frac{5}{2}(8) = 20$. Donc, F a pour coordonnées $(8,20)$.

Solution 2
La droite passant par $A(0,0)$ et $D(2,5)$ a pour pente $\frac{5}{2}$ et pour ordonnée à l'origine 0. La droite a donc pour équation $y = \frac{5}{2}x$.
La droite passant par $B(12,0)$ et $C(11,5)$ a pour pente -5 et a donc pour équation $y = -5(x-12)$.
Ces deux droites se coupent en F. Donc, on peut résoudre l'équation $\frac{5}{2}x = -5(x-12)$ pour obtenir les coordonnées de F. On obtient donc $x = -2(x-12)$ ou $3x = 24$, d'où $x = 8$.
Lorsque $x = 8$, $y = \frac{5}{2}(8) = 20$, d'où F a donc pour coordonnées $(8,20)$.

(d) Supposons que P a pour coordonnées (r, s).
De plus, supposons que AB est la base du triangle PAB.
Dans ce cas, si le triangle PAB a une hauteur de h, alors l'aire du triangle PAB est égale à $\frac{1}{2}(AB)h = 6h$.
Le triangle PAB a une aire de 42, d'où $6h = 42$ ou $h = 7$.
C'est-à-dire que la distance verticale entre $P(r, s)$ et la droite passant par A et B (qui est située sur l'axe des abscisses) est de 7 unités.
Il y a donc deux possibilités : soit $P(r, s)$ est situé 7 unités au-dessus de l'axe des abscisses (c.-à-d. sur la droite horizontale d'équation $y = 7$), soit $P(r, s)$ est situé 7 unités en dessous de l'axe des abscisses (c.-à-d. sur la droite horizontale d'équation $y = -7$).
Dans le premier cas, P a pour coordonnées $(r, 7)$. Dans le second cas, P a pour coordonnées $(r, -7)$.
Rappelons que P est situé sur la droite passant par B et D.
La droite passant par $B(12,0)$ et $D(2, 5)$ a pour pente $-\frac{1}{2}$ et a donc pour équation $y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2)$.
Si $P(r, 7)$ est situé sur cette droite, alors $7 - 5 = -\frac{1}{2}(r - 2)$ ou $-4 = r - 2$, d'où $r = -2$.
De même, si $P(r, -7)$ est situé sur cette droite, alors $-7 - 5 = -\frac{1}{2}(r - 2)$ ou $24 = r - 2$, d'où $r = 26$.
Donc, pour que le triangle PAB ait une aire de 42, le point P situé sur la droite passant par B et D peut avoir pour coordonnées $(-2, 7)$ ou $(26, -7)$.

3. (a) Puisque $a_n = 2^n$ lorsque $n \geq 1$, alors $a_5 = 2^5 = 32$.
Puisque $b_2 = 1, b_3 = 3$ et $b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$ lorsque $n \geq 3$, alors $b_4 = b_3 + 2b_2 = 3 + 2(1) = 5$ et $b_5 = b_4 + 2b_3 = 5 + 2(3) = 11$.
Donc, $a_5 = 32$ et $b_5 = 11$.

(b) Puisque $b_1 = p \cdot (a_1) + q \cdot (-1)^1$ et $a_1 = 2$, alors $b_1 = 2p - q$.
D'après la définition de la suite B, on sait que $b_1 = 1$. Donc, $2p - q = 1$.
Puisque $b_2 = p \cdot (a_2) + q \cdot (-1)^2$ et $a_2 = 2^2 = 4$, alors $b_2 = 4p + q$.
D'après la définition de la suite B, on sait que $b_2 = 1$. Donc, $4p + q = 1$.
On a donc un système de deux équations à deux inconnues, soit p et q.
On additionne les deux équations membre à membre pour obtenir $6p = 2$, d'où $p = \frac{1}{3}$.
On reporte cette valeur dans l'une des équations pour obtenir $2\left(\frac{1}{3}\right) - q = 1$ ou $q = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$.
Donc, les nombres réels p et q pour lesquels $b_n = p \cdot (a_n) + q \cdot (-1)^n$ pour tout n $(n \geq 1)$ sont $p = \frac{1}{3}$ et $q = -\frac{1}{3}$.

(c) À l'aide de manipulations algébriques et des définitions $a_n = 2^n$ et $b_n = \frac{1}{3}(a_n) - \frac{1}{3}(-1)^n$ (où $n \geq 1$ pour chacune), on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
S_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \\
&= \left(\tfrac{1}{3}(a_1) - \tfrac{1}{3}(-1)\right) + \left(\tfrac{1}{3}(a_2) - \tfrac{1}{3}(-1)^2\right) + \left(\tfrac{1}{3}(a_3) - \tfrac{1}{3}(-1)^3\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{3}(a_n) - \tfrac{1}{3}(-1)^n\right) \\
&= \tfrac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) - \tfrac{1}{3}((-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n) \\
&= \tfrac{1}{3}(2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - \tfrac{1}{3}(-1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n)
\end{aligned}$$

Considérons séparément chacune des deux expressions entre parenthèses.
L'expression $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$ est égale à la somme des n termes d'une suite géométrique

de premier terme $a = 2$ et de raison $r = 2$.
Donc, $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2\left(\dfrac{1 - 2^n}{1 - 2}\right) = -2(1 - 2^n)$.
L'expression $-1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n$ est la somme alternée des termes -1 et 1.
Cette somme est égale à 0 s'il y a un nombre pair de termes (c'est-à-dire lorsque n est un nombre pair) ou à -1 si n est impair.
On a donc :

$$S_n = \begin{cases} \frac{1}{3}(-2(1-2^n)) \text{ , si } n \text{ est pair} \\ \\ \frac{1}{3}(-2(1-2^n)) + \frac{1}{3} \text{ , si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

que l'on simplifie pour obtenir :

$$S_n = \begin{cases} \frac{2}{3}(2^n-1) \text{ , si } n \text{ est pair} \\ \\ \frac{2}{3}(2^n-1) + \frac{1}{3} \text{ , si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On veut déterminer le plus petit entier strictement positif n qui vérifie $S_n \geq 16^{2021}$. Remarquons que la valeur de S_n augmente à mesure que n augmente.
Puisque $16 = 2^4$, alors $16^{2021} = (2^4)^{2021} = 2^{8084}$. Donc, on veut déterminer le plus petit entier strictement positif n qui vérifie $S_n \geq 2^{8084}$.

Lorsque n est pair, on a

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}(2^n-1) &\geq 2^{8084} \\ 2^n - 1 &\geq 3 \cdot 2^{8083} \\ 2^n &\geq 3 \cdot 2^{8083} + 1 \end{aligned}$$

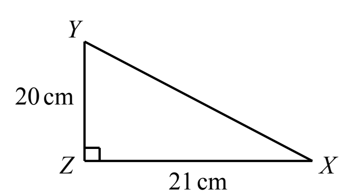
Lorsque n est impair, on a

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}(2^n-1) + \tfrac{1}{3} &\geq 2^{8084} \\ \tfrac{2}{3}(2^n-1) &\geq 2^{8084} - \tfrac{1}{3} \\ 2^n - 1 &\geq 3 \cdot 2^{8083} - \tfrac{1}{2} \\ 2^n &\geq 3 \cdot 2^{8083} + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Puisque 2^n est un entier pair, alors $3 \cdot 2^{8083} + 1$ est un entier impair et $3 \cdot 2^{8083} + \frac{1}{2}$ est entre un entier pair et un entier impair. Donc, les inéquations $2^n \geq 3 \cdot 2^{8083} + 1$ et $2^n \geq 3 \cdot 2^{8083} + \frac{1}{2}$ reviennent à dire que $2^n > 3 \cdot 2^{8083}$.

Puisque $3 \cdot 2^{8083} > 2 \cdot 2^{8083}$, alors on peut simplifier pour obtenir $3 \cdot 2^{8083} > 2^{8084}$.
Donc, on veut déterminer le plus petit entier strictement positif n qui vérifie $2^n > 3 \cdot 2^{8083} > 2^{8084}$.
L'inéquation n'est pas vérifiée lorsque $n \leq 8084$.
Lorsque $n = 8085$, on obtient $2^{8085} = 2^2 \cdot 2^{8083} = 4 \cdot 2^{8083}$, ce qui est supérieur à $3 \cdot 2^{8083}$, ce qu'il fallait démontrer.
Donc, $n = 8085$ est le plus petit entier strictement positif n qui vérifie $S_n \geq 16^{2021}$.

4. (a) Dans la figure ci-contre, $x = 20$, $y = 21$ et $\angle XZY = 90°$. D'après le théorème de Pythagore, $z = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$ (puisque $z > 0$).
Donc, la valeur de A est égale à



$$A = \frac{1}{2}(y)(x) = \frac{1}{2}(21)(20) = 210$$

tandis que la valeur de P est égale à

$$P = z + x + y = 29 + 20 + 21 = 70$$

(b) Lorsque $A = 336$, on a $\frac{1}{2}xy = 336$, d'où $xy = 672$.
D'après le théorème de Pythagore, $x^2 + y^2 = 50^2$. À l'aide de manipulations algébriques, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2500 \\ (x+y)^2 - 2xy &= 2500 \\ (x+y)^2 &= 2500 + 2xy \\ (x+y)^2 &= 2500 + 2(672) \\ (x+y)^2 &= 3844 \end{aligned}$$

Puisque $x + y > 0$, alors $x + y = \sqrt{3844} = 62$.
On a donc $P = x + y + z = 62 + 50 = 112$.
(Le triangle remplissant ces conditions a des côtés de longueurs 14 cm, 48 cm et 50 cm.)

(c) Puisque $A = 3P$, alors $\frac{1}{2}xy = 3(x + y + z)$, d'où $xy = 6(x + y + z)$.
À l'aide de manipulations algébriques, on transforme l'équation $xy = 6(x + y + z)$ pour obtenir les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} xy &= 6(x+y+z) \\ xy - 6x - 6y &= 6z \\ (xy - 6x - 6y)^2 &= (6z)^2 \\ (xy)^2 - 12x(xy) - 12y(xy) + 72xy + 36x^2 + 36y^2 &= 36z^2 \\ (xy)^2 - 12x(xy) - 12y(xy) + 72xy + 36x^2 + 36y^2 &= 36(x^2 + y^2) \quad (\text{car } x^2 + y^2 = z^2) \\ xy(xy - 12x - 12y + 72) &= 0 \\ xy - 12x - 12y + 72 &= 0 \quad (\text{car } xy \neq 0) \\ x(y-12) - 12y &= -72 \\ x(y-12) - 12y + 144 &= -72 + 144 \\ x(y-12) - 12(y-12) &= 72 \\ (x-12)(y-12) &= 72 \end{aligned}$$

Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, alors $x - 12$ et $y - 12$ est un couple de facteurs de 72.
Le produit $(x-12)(y-12)$ est positif (car $72 > 0$), d'où on a donc $x - 12 < 0$ et $y - 12 < 0$ ou $x - 12 > 0$ et $y - 12 > 0$.
Si $x - 12 < 0$ et $y - 12 < 0$, alors $x < 12$ et $y < 12$.
Il y a exactement deux triplets de Pythagore (x, y, z) où $x < 12$ et $y < 12$.
Dans le premier cas, $(x, y, z) = (3, 4, 5)$, d'où $A = \frac{1}{2}(3)(4) = 6$ et $P = 3+4+5 = 12$. Donc, $A \neq 3P$.
Dans le second cas, $(x, y, z) = (6, 8, 10)$, d'où $A = \frac{1}{2}(6)(8) = 24$ et $P = 6 + 8 + 10 = 24$. Donc, $A \neq 3P$.
Donc, $x - 12 > 0$ et $y - 12 > 0$, d'où x et y sont chacun supérieurs à 12.
Dans le tableau ci-dessous, on détermine toutes les valeurs entières possibles de x, y et z à l'aide des couples de facteurs positifs de 72.
De plus, on suppose que $x \leq y$, tout en constatant que les valeurs de x et y peuvent être interchangées l'une avec l'autre grâce à la symétrie de l'équation et, ce faisant, on obtiendrait la même valeur de z et le même triangle.

Couple de facteurs	$x-12$	$y-12$	x	y	$z=\sqrt{x^2+y^2}$	(x,y,z)
1 et 72	1	72	13	84	85	(13,84,85) ou (84,13,85)
2 et 36	2	36	14	48	50	(14,48,50) ou (48,14,50)
3 et 24	3	24	15	36	39	(15,36,39) ou (36,15,39)
4 et 18	4	18	16	30	34	(16,30,34) ou (30,16,34)
6 et 12	6	12	18	24	30	(18,24,30) ou (24,18,30)
8 et 9	8	9	20	21	29	(20,21,29) ou (21,20,29)

Remarquons qu'au lieu de factoriser l'équation $xy - 12x - 12y + 72 = 0$, on aurait pu choisir de la récrire sous la forme :

$$\begin{aligned} x(y-12) &= 12y - 72 \\ x &= \frac{12y-72}{y-12} \\ x &= \frac{12(y-12)+144-72}{y-12} \\ x &= 12 + \frac{72}{y-12} \end{aligned}$$

et puisque x est un entier strictement positif, alors on aurait pu supposer que $y - 12$ est un diviseur de 72.

(d) Puisque $A = kP$, alors $\frac{1}{2}xy = k(x + y + z)$, d'où $xy = 2k(x + y + z)$.
À l'aide de manipulations algébriques, on transforme l'équation $xy = 2k(x + y + z)$ pour obtenir les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} xy &= 2k(x+y+z) \\ xy - 2kx - 2ky &= 2kz \\ (xy-2kx-2ky)^2 &= (2kz)^2 \\ (xy)^2 - 4kx(xy) - 4ky(xy) + 8k^2xy + 4k^2x^2 + 4k^2y^2 &= 4k^2z^2 \\ (xy)^2 - 4kx(xy) - 4ky(xy) + 8k^2xy + 4k^2x^2 + 4k^2y^2 &= 4k^2(x^2+y^2) \quad (\because x^2+y^2=z^2) \\ xy(xy - 4kx - 4ky + 8k^2) &= 0 \\ xy - 4kx - 4ky + 8k^2 &= 0 \quad (\text{car } xy \neq 0) \\ x(y-4k) - 4ky &= -8k^2 \\ x(y-4k) - 4ky + 16k^2 &= -8k^2 + 16k^2 \\ x(y-4k) - 4k(y-4k) &= 8k^2 \\ (x-4k)(y-4k) &= 8k^2 \end{aligned}$$

Puisque x, y et k sont des entiers strictement positifs, alors $x-4k$ et $y-4k$ sont un couple de facteurs de $8k^2$.
Supposons d'abord que $k = 2$.
Lorsqu'on reporte cette valeur dans l'équation $(x - 4k)(y - 4k) = 8k^2$, on obtient $(x - 8)(y - 8) = 32$.
Le produit $(x - 8)(y - 8)$ est positif (car $32 > 0$), d'où on a donc $x - 8 < 0$ et $y - 8 < 0$ ou $x - 8 > 0$ et $y - 8 > 0$.
Si $x - 8 < 0$ et $y - 8 < 0$, alors $x < 8$ et $y < 8$, ce qui n'est pas possible puisque $P = 510$.
Donc, $x - 8 > 0$ et $y - 8 > 0$.
Si $(x - 8)(y - 8) = 32$ et $x \leq y$, alors $x - 8$ est égal à 1, 2 ou 4 (d'où on aurait donc

respectivement $x = 9, 10, 12$) tandis que $y - 8$ est égal à $32, 16$, ou 8 (d'où on aurait donc respectivement $y = 40, 24, 16$).
D'après le théorème de Pythagore, on obtient donc respectivement $z = 41, 26, 20$.
Pour chacune des trois possibilités, $P = x + y + z \neq 510$. On conclut donc que $k \neq 2$.
On peut montrer d'une manière semblable que k ne peut égaler 3. Donc, $k \geq 5$ (puisque k est un nombre premier).
Puisque k est un nombre premier et que $k \geq 5$, les couples de facteurs positifs de $8k^2$ sont :

$$(1, 8k^2), (2, 4k^2), (4, 2k^2), (8, k^2), (k, 8k), (2k, 4k)$$

tandis que les couples de facteurs négatifs de $8k^2$ sont

$$(-1, -8k^2), (-2, -4k^2), (-4, -2k^2), (-8, -k^2), (-k, -8k), (-2k, -4k)$$

Par exemple, si $x - 4k = -1$ et $y - 4k = -8k^2$, alors $y = 4k - 8k^2$, ce qui est inférieur à zéro pour tout k ($k \geq 5$).
Cela n'est pas possible car $y > 0$.
Si l'on suppose que $x \leq y$, alors on peut montrer d'une manière semblable que $y \leq 0$ pour toutes valeurs de k ($k \geq 5$) lorsque $x - 4k$ et $y - 4k$ sont égaux à un couple de facteurs négatifs de $8k^2$.
Donc, $x - 4k$ et $y - 4k$ doivent être égaux à un couple de facteurs positifs de $8k^2$.

En partant du fait que le triangle a un périmètre de 510 cm, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
x + y + z &= 510 \\
x + y &= 510 - z \\
x^2 + 2xy + y^2 &= 510^2 - 1020z + z^2 \quad \text{(on a elevé chaque membre au carré)} \\
2xy &= 510^2 - 1020z \quad (\text{car } x^2 + y^2 = z^2) \\
4A &= 510^2 - 1020z \quad (A = \tfrac{1}{2}xy, \text{ d'où } 4A = 2xy) \\
4(510k) &= 510^2 - 1020z \quad (\text{car } A = kP \text{ et } P = 510) \\
2k &= 255 - z \\
2k &= 255 - (510 - x - y) \\
x + y - 2k &= 255
\end{aligned}$$

On obtient $x - 4k = 1$ et $y - 4k = 8k^2$ à partir du premier couple de facteurs. On a donc $(x, y) = (1 + 4k, 8k^2 + 4k)$ (en supposant que $x \leq y$).
On reporte $x = 1 + 4k$ et $y = 8k^2 + 4k$ dans l'équation $x + y - 2k = 255$ et on simplifie pour obtenir $8k^2 + 6k = 254$ ou $k(4k + 3) = 127$, ce qui n'admet aucune solution car 127 est un nombre premier.

On analyse les 5 couples de facteurs restants dans le tableau ci-dessous.
Comme précédemment, on suppose que $x \leq y$, tout en constatant que les valeurs de x et y peuvent être interchangées l'une avec l'autre et, ce faisant, on obtiendrait la ou les mêmes valeurs de k.

Couple de facteurs	x	y	$x+y-2k=255$ simplifié	Valeur(s) de k
$2, 4k^2$	$2+4k$	$4k^2+4k$	$4k^2+6k=253$	Aucune valeur de k (le membre de gauche est pair tandis que le membre de droite est impair)
$4, 2k^2$	$4+4k$	$2k^2+4k$	$2k^2+6k=251$	Aucune valeur de k (le membre de gauche est pair tandis que le membre de droite est impair)
$8, k^2$	$8+4k$	k^2+4k	$k(k+6)=247$	$k=13$
$k, 8k$	$5k$	$12k$	$15k=255$	$k=17$
$2k, 4k$	$6k$	$8k$	$12k=255$	Aucune valeur de k (le membre de gauche est pair tandis que le membre de droite est impair)

Donc, les valeurs de k qui remplissent les conditions sont $k=13$ et $k=17$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatia 2020

le mercredi 15 avril 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 avril 2020
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Douze sacs d'avocats coûtent 5,00 \$ $\times$ 12 = 60,00 \$.
Donc, le chef a dépensé 135,00 \$ $-$ 60,00 \$ = 75,00 \$ dans l'achat de mangues.
Puisque chaque boîte de mangues lui a coûté 12,50 \$, le chef a donc acheté $\dfrac{75{,}00\ \$}{12{,}50\ \$} = 6$ boîtes de mangues.

(b) *Solution 1*
Puisqu'un sac d'avocats coûte 5,00 \$, alors un rabais de 10 % sur le coût régulier équivaut à $\frac{10}{100} \times 5{,}00$ \$ ou $0{,}10 \times 5{,}00$ \$, soit 0,50 \$.
Donc, le coût d'un sac d'avocats après rabais est de 5,00 \$ $-$ 0,50 \$ = 4,50 \$.
Puisqu'une boîte de mangues coûte 12,50 \$, alors un rabais de 20 % sur le coût régulier équivaut à $\frac{20}{100} \times 12{,}50$ \$ ou $0{,}20 \times 12{,}50$ \$, soit 2,50 \$.
Donc, le coût d'une boîte d'avocats après rabais est de 12,50 \$ $-$ 2,50 \$ = 10,00 \$.
Donc, les samedis, 8 sacs d'avocats et 4 boîtes de mangues coûtent

$$4{,}50\ \$ \times 8 + 10{,}00\ \$ \times 4 = 36{,}00\ \$ + 40{,}00\ \$ = 76{,}00\ \$$$

Solution 2
Puisqu'un sac d'avocats coûte 5,00 \$ et que le rabais offert est de 10 %, alors il faudra payer 100 % $-$ 10 % = 90 % du prix régulier.
Donc, le coût d'un sac d'avocats après rabais est de $\frac{90}{100} \times 5{,}00\ \$ = 0{,}90 \times 5{,}00\ \$ = 4{,}50\ \$$.
Puisqu'une boîte de mangues coûte 12,50 \$ et que le rabais offert est de 20 %, alors il faudra payer 100 % $-$ 20 % = 80 % du prix régulier.
Donc, le coût d'une boîte de mangues après rabais est de
$\frac{80}{100} \times 12{,}50\ \$ = 0{,}80 \times 12{,}50\ \$ = 10{,}00\ \$$.
Donc, les samedis, 8 sacs d'avocats et 4 boîtes de mangues coûtent

$$4{,}50\ \$ \times 8 + 10{,}00\ \$ \times 4 = 36{,}00\ \$ + 40{,}00\ \$ = 76{,}00\ \$$$

(c) Chaque sac d'avocats contient 6 avocats. La recette du chef cuisinier nécessite 100 avocats.
Puisque $6 \times 16 = 96$ et $6 \times 17 = 102$, le chef devra acheter 17 sacs d'avocats (16 sacs ne suffiront pas).
Chaque boîte de mangues contient 16 mangues. La recette du chef cuisinier nécessite 70 mangues.
Puisque $15 \times 4 = 60$ et $15 \times 5 = 75$, le chef devra acheter 5 boîtes de mangues.
En tout, cet achat lui a coûté $5{,}00\ \$ \times 17 + 12{,}50\ \$ \times 5 = 85{,}00\ \$ + 62{,}50\ \$ = 147{,}50\ \$$.

(d) Puisqu'un sac d'avocats coûte 5,00 \$, le prix auquel on peut acheter un nombre quelconque de sacs sera toujours un nombre entier.
Puisqu'une boîte de mangues coûte 12,50 \$, le prix des mangues n'est un nombre entier que lorsqu'on achète un nombre pair de boîtes (1 boîte coûte 12,50 \$, 2 boîtes coûtent 25,00 \$, 3 boîtes coûtent 37,50 \$, et ainsi de suite).
Puisque le chef cuisinier a dépensé exactement 75,00 \$ (soit un nombre entier), alors le chef cuisinier a dû acheter un nombre pair de boîtes de mangues.

Si le chef cuisinier avait acheté 2 boîtes de mangues, ces boîtes lui auraient coûté 25,00 \$, d'où il ne resterait que $75{,}00\ \$ - 25{,}00\ \$ = 50{,}00\ \$$ pour acheter $50{,}00\ \$ \div 5{,}00\ \$ = 10$ sacs d'avocats.
Dans ce cas, le chef cuisinier aurait $10 \times 6 = 60$ avocats et $2 \times 15 = 30$ mangues.
Puisque chaque assiette nécessitait 1 avocat et 2 mangues, il aurait pu préparer $30 \div 2 = 15$ assiettes (il a plus de 15 avocats mais seulement 30 mangues).

Si le chef cuisinier avait acheté 4 boîtes de mangues, ces boîtes lui auraient coûté

$4 \times 12{,}50$ \$ $= 50{,}00$ \$, d'où il ne resterait que $75{,}00$ \$ $- 50{,}00$ \$ $= 25{,}00$ \$ pour acheter $25{,}00$ \$ $\div 5{,}00$ \$ $= 5$ sacs d'avocats.
Dans ce cas, le chef cuisinier aurait $5 \times 6 = 30$ avocats et $4 \times 15 = 60$ mangues.
Puisque chaque assiette nécessitait 1 avocat et 2 mangues, il aurait pu préparer 30 assiettes.

Si le chef cuisinier avait acheté 6 boîtes de mangues, ces boîtes lui auraient coûté $6 \times 12{,}50$ \$ $= 75{,}00$ \$, d'où il ne resterait plus d'argent pour acheter des avocats.
L'achat de plus de 6 boîtes de mangues coûtera plus de 75,00 \$ au chef cuisinier.

Donc, si le chef cuisinier a acheté 30 avocats (5 sacs) et 60 mangues (4 boîtes), il aurait dépensé exactement 75,00 \$ et aurait deux fois plus de mangues que d'avocats ; ce qui lui aurait permis de préparer le plus grand nombre d'assiettes, soit 30.

2. (a) Puisque la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$ et le rectangle parabolique ont tous deux l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, alors le rectangle parabolique aura un deuxième sommet situé sur la parabole dont les coordonnées sont $(-6, 9)$.
Un troisième sommet du rectangle parabolique est situé au point où la droite verticale menée de $(6, 9)$ à l'axe des abscisses coupe ce dernier. Ce point a donc pour coordonnées $(6, 0)$.
De même, un quatrième sommet du rectangle parabolique est situé au point où la droite verticale menée de $(-6, 9)$ à l'axe des abscisses coupe ce dernier. Ce point a donc pour coordonnées $(-6, 0)$.

(b) Si l'un des sommets d'un rectangle parabolique a pour coordonnées $(-3, 0)$, alors un deuxième sommet a pour coordonnées $(3, 0)$, d'où le rectangle a donc une longueur de 6.
Le sommet situé directement au-dessus de $(3, 0)$ a une abscisse de 3.
Ce sommet est situé sur la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$ et a donc une ordonnée égale à $\frac{1}{4}(3)^2 = \frac{9}{4}$.
La largeur du rectangle est donc égale à $\frac{9}{4}$. Donc, le rectangle parabolique ayant un sommet situé au point $(-3, 0)$ a une aire égale à $6 \times \frac{9}{4} = \frac{54}{4} = \frac{27}{2}$.

(c) Soit $(p, 0)$ un sommet du rectangle parabolique, p étant une valeur qui vérifie $p > 0$.
Un deuxième sommet (également situé sur l'axe des abscisses) a donc pour coordonnées $(-p, 0)$. Le rectangle a donc une longueur de $2p$.
Le troisième sommet du rectangle parabolique est situé au point où la droite verticale menée de $(p, 0)$ à la parabole coupe cette dernière ; la largeur du rectangle est donc égale à l'ordonnée de ce point, soit une largeur égale à $\frac{1}{4}p^2$.
Donc, un rectangle parabolique de longueur $2p$ et de largeur $\frac{1}{4}p^2$ a une aire égale à $2p \times \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{2}p^3$.
Si un tel rectangle parabolique avait une longueur de 36, alors $2p = 36$, d'où $p = 18$.
Ce rectangle aurait donc une aire de $\frac{1}{2}(18)^3 = 2916$.
Si un tel rectangle parabolique avait une largeur de 36, alors $\frac{1}{4}p^2 = 36$ ou $p^2 = 144$, d'où $p = 12$ (puisque $p > 0$).
Ce rectangle aurait donc une aire de $\frac{1}{2}(12)^3 = 864$.
Les deux rectangles paraboliques ayant des côtés de longueur 36 ont donc des aires de 2916 et 864.

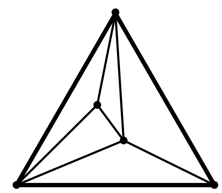
(d) Soit $(m, 0)$ un sommet du rectangle parabolique, m étant une valeur qui vérifie $m > 0$.
Un deuxième sommet (également situé sur l'axe des abscisses) a donc pour coordonnées $(-m, 0)$. Le rectangle a donc une longueur de $2m$.
Le troisième sommet du rectangle parabolique est situé au point où la droite verticale menée de $(m, 0)$ à la parabole coupe cette dernière ; la largeur du rectangle est donc égale

à l'ordonnée de ce point, soit une largeur égale à $\frac{1}{4}m^2$.
Donc, un rectangle parabolique de longueur $2m$ et de largeur $\frac{1}{4}m^2$ a une aire égale à $2m \times \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{2}m^3$.
Si la longueur et la largeur d'un tel rectangle parabolique sont égales, alors

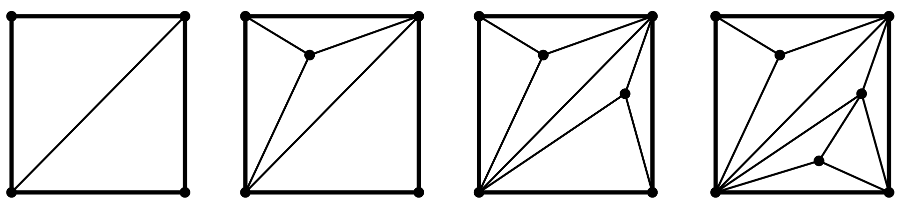
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}m^2 &= 2m \\ m^2 &= 8m \\ m^2 - 8m &= 0 \\ m(m-8) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $m = 8$ (puisque $m > 0$). Donc, un rectangle parabolique dont la longueur et la largeur sont égales a une aire de $\frac{1}{2}(8)^3 = 256$.

3. (a) Lorsque $n \geq 3$ et $k \geq 0$, la valeur de $T(n,k)$ est constante pour tous les emplacements possibles des k points situés à l'intérieur du polygone et pour tous les triangulations possibles.
À l'aide de la triangulation dans la figure ci-contre, on peut donc déterminer que $T(3,2) = 5$.

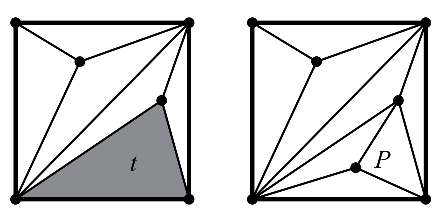


(b) On commence d'abord en dessinant des triangulations pour déterminer les valeurs de $T(4,k)$ lorsque $k = 0, 1, 2, 3$.



$T(4,0)=2$ $T(4,1)=4$ $T(4,2)=6$ $T(4,3)=8$

Bien qu'on obtiendrait ces quatre mêmes réponses peu importe les emplacements des points situés à l'intérieur du quadrilatère (que l'on surnommera désormais « points intérieurs ») ou les manières dont les triangulations ont été créées, les diagrammes ci-dessus ont été créés pour nous aider à visualiser une régularité.
À partir des réponses, on voit que $T(4,k+1) = T(4,k) + 2$ lorsque $k = 0, 1, 2$.
Il faut justifier pourquoi cette observation est vraie pour tous les entiers k ($k \geq 0$) afin qu'on puisse utiliser ce résultat pour déterminer la valeur de $T(4,100)$.
Remarquez que chaque triangulation après la première a été créée en plaçant un nouveau point intérieur dans la triangulation précédente.
De plus, puisque chaque carré est divisé en triangles, alors chaque nouveau point intérieur est placé *dans* un triangle de la triangulation précédente (puisque 3 points ne peuvent être situés sur la même droite).
Par exemple, on voit dans les figures ci-contre que P est situé à l'intérieur du triangle t de la triangulation précédente.
De plus, chacun des triangles autre que t n'est pas affecté par l'ajout de P. Donc ces triangles contribuent le même nombre de triangles (5) à la valeur de $T(4,3)$ qu'ils ne contribuaient à la valeur de $T(4,2)$.



$T(4,2)=6$ $T(4,3)=8$

Le triangle t contribue 1 à la valeur de $T(4,2)$.
Afin de diviser t en région triangulaires, on joint P à chacun des 3 sommets du triangle t (aucune autre triangulation de cette région n'est possible).

Donc, l'emplacement de P (peu importe son emplacement précis à condition qu'il soit situé à l'intérieur de t et non sur un bord) divise le triangle t en 3 triangles.
C'est-à-dire que t contribue 1 à la valeur de $T(4, 2)$, tandis que la région définie par t contribue 3 à la valeur de $T(4, 3)$ après qu'on ait placé P.
En résumé, la valeur de $T(4, k + 1)$ est 2 de plus que la valeur de $T(4, k)$ pour tous les entiers k ($k \geq 0$) car :

— le $(k+1)^e$ point intérieur peut être placé n'importe où dans la triangulation de $T(4, k)$ (à condition qu'il ne soit pas sur un bord)
— plus précisément, le $(k + 1)^e$ point intérieur est situé à l'intérieur d'un triangle dans la triangulation de $T(4, k)$
— ce triangle contribuait 1 à la valeur de $T(4, k)$
— après qu'on ait placé le $(k + 1)^e$ point intérieur à l'intérieur de ce triangle et qu'on l'ait relié à chacun des 3 sommets du triangle, cette région contribue maintenant 3 à la valeur de $T(4, k + 1)$
— soit une augmentation nette de 2 triangles, donc $T(4, k + 1) = T(4, k) + 2$ pour tous les entiers k ($k \geq 0$).

$T(4, 0) = 2$ et le nombre de triangles augmente de 2 pour chaque point intérieur supplémentaire.
Donc, le nombre de triangles augmente de $2k$ pour k points intérieurs supplémentaires, d'où on a donc $T(4, k) = T(4, 0) + 2k = 2 + 2k$ pour tous les entiers k ($k \geq 0$).
D'après cette formule, on obtient donc $T(4, 100) = 2 + 2(100) = 202$.

(c) Dans la triangulation d'un polygone régulier à n sommets comprenant aucun point intérieur, on peut choisir de relier l'un des n sommets à chacun des $n - 3$ sommets restants qui ne lui sont pas adjacents.
Toutes telles triangulations de tels polygones réguliers sont composées de $n - 2$ triangles, d'où $T(n, 0) = n - 2$ pour tous les entiers n ($n \geq 3$) (puisque $T(n, 0)$ est constant).
Le raisonnement dans la partie (b) s'applique à tout polygone régulier ayant $n \geq 3$ sommets.
C'est-à-dire que chaque point intérieur supplémentaire qui est ajouté à la triangulation de $n \geq 3$ sommets et $k \geq 0$ points intérieurs résulte en une augmentation nette de 2 triangles.
Donc, $T(n, k + 1) = T(n, k) + 2$ pour tous les polygones réguliers ayant $n \geq 3$ sommets et $k \geq 0$ points intérieurs.
Donc, le nombre de triangles augmente de $2k$ pour k points intérieurs supplémentaires, d'où on a donc $T(n, k) = T(n, 0) + 2k = (n - 2) + 2k$ pour tous les entiers k ($k \geq 0$).
D'après cette formule $T(n, k) = (n-2)+2k$, on obtient donc $T(n, n) = (n-2)+2n = 3n-2$ et $3n - 2 = 2020$ lorsque $n = \frac{2022}{3} = 674$.

4. (a) *Solution 1*
Si x_0 est pair, alors x_0^2 est pair, d'où $x_1 = x_0^2 + 1$ est impair.
Si x_1 est impair, alors x_1^2 est impair, d'où $x_2 = x_1^2 + 1$ est pair.
Donc, si x_0 est pair, alors x_2 est pair, d'où $x_2 - x_0$ est pair.

Si x_0 est impair, alors x_0^2 est impair, d'où $x_1 = x_0^2 + 1$ est pair.
Si x_1 est pair, alors x_1^2 est pair, d'où $x_2 = x_1^2 + 1$ est impair.
Donc, si x_0 est impair, alors x_2 est impair, d'où $x_2 - x_0$ est pair.

Donc, $x_2 - x_0$ est pair pout toutes les valeurs possibles de x_0.

Solution 2
En utilisant la définition à deux reprises et en simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned} x_2 &= (x_1)^2+1 \\ x_2 &= ((x_0)^2+1)^2+1 \\ x_2 &= (x_0)^4+2(x_0)^2+2 \\ x_2 &= (x_0)^4+2((x_0)^2+1) \\ x_2-x_0 &= (x_0)^4+2((x_0)^2+1)-x_0 \end{aligned}$$

Pour démontrer que x_2-x_0 est pair, on peut démontrer que $(x_0)^4+2((x_0)^2+1)-x_0$ est pair (puisque les expressions sont égales).
Puisque $2((x_0)^2+1)$ est le produit d'un entier quelconque et 2, ce terme sera pair pour toutes les valeurs possibles de x_0.
Si x_0 est pair, alors $(x_0)^4$ est pair, d'où $(x_0)^4+2((x_0)^2+1)-x_0$, soit la somme et différence de trois termes pairs, est donc pair.
Si x_0 est impair, alors $(x_0)^4$ est impair et $(x_0)^4-x_0$ est pair, d'où $(x_0)^4+2((x_0)^2+1)-x_0$ est donc pair.
Donc, x_2-x_0 est pair pour toutes les valeurs possibles de x_0.

Solution 3
En utilisant la définition à deux reprises et en simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned} x_2 &= (x_1)^2+1 \\ x_2 &= ((x_0)^2+1)^2+1 \\ x_2 &= (x_0)^4+2(x_0)^2+2 \\ x_2-x_0 &= (x_0)^4+2(x_0)^2-x_0+2 \\ x_2-x_0 &= (x_0)^4+(x_0)^2+(x_0)^2-x_0+2 \\ x_2-x_0 &= (x_0)^2((x_0)^2+1)+x_0(x_0-1)+2 \end{aligned}$$

Pour démontrer que x_2-x_0 est pair, on peut démontrer que $(x_0)^2((x_0)^2+1)+x_0(x_0-1)+2$ est pair (puisqu'ils sont égaux).
Puisque x_0-1 est 1 de moins que x_0, alors x_0 et x_0-1 sont des entiers consécutifs, d'où l'un d'eux est donc pair.
Donc, le produit $x_0(x_0-1)$ est pair.
De même, puisque $(x_0)^2$ est 1 de moins que $(x_0)^2+1$, alors ces entiers sont consécutifs, d'où l'un d'eux est donc pair.
Donc, le produit $(x_0)^2((x_0)^2+1)$ est pair.
Puisque $(x_0)^2((x_0)^2+1)+x_0(x_0-1)+2$ est la somme de trois entiers pairs, alors x_2-x_0 est pair pour toutes les valeurs possibles de x_0.

(b) Un entier est divisible par 10 uniquement lorsque son chiffre des unités est 0.
La différence $x_{2026}-x_{2020}$ a 0 comme chiffre des unités uniquement lorsque les chiffres des unités de x_{2026} et x_{2020} sont égaux.
Donc, on montrera que pour toutes les valeurs possibles de x_0, le chiffre des unités de x_{2026} est égal au chiffre des unités de x_{2020}, d'où $x_{2026}-x_{2020}$ sera donc divisible par 10.
Lorsqu'on divise un entier non négatif par 10, le reste est l'un des entiers de 0 à 9.
Donc, pour chaque choix possible de x_0, il existe un entier non négatif k tel que x_0 peut être exprimé de l'une des manières suivantes : $10k$, $10k+1$, $10k+2$, $\ldots$, $10k+8$, $10k+9$.
Par exemple, si x_0 a 4 comme chiffre des unités, alors $x_0=10k+4$, k étant un entier non négatif, d'où $x_1=(10k+4)^2+1=100k^2+80k+17=10(10k^2+8k+1)+7$. Ce dernier a donc 7 comme chiffre des unités.

Puisque x_1 n'est déterminé que par x_0 ($x_1 = (x_0)^2 + 1$), le chiffre des unités de x_1 est uniquement déterminé par le chiffre des unités de x_0.
Par exemple, si x_0 a 4 comme chiffre des unités, alors le chiffre des unités de x_1 est égal au chiffre des unités de $(4)^2 + 1$, soit 7.
De façon plus générale, si le chiffre des unités de x_i (i étant un entier non négatif) est égal à u, alors le chiffre des unités de x_{i+1} est égal à celui de $u^2 + 1$.
(Pouvez-vous expliquer pourquoi cela est vrai ?)
Par exemple, si l'on sait que $x_{15} = 29$, alors le chiffre des unités de x_{16} est égal à celui de $9^2 + 1 = 82$, soit 2.
Étant donné qu'on connaît tous les chiffres des unités possibles de x_0, cela nous fournit une méthode efficace pour déterminer le chiffre des unités de x_1, de x_2, de x_3 et ainsi de suite.
Pour chacun des 10 chiffres des unités possibles de x_0 (soit de 0 à 9), on dresse la liste des chiffres des unités des termes x_1 à x_7 dans le tableau ci-dessous :

x_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	1	2	5	0	7	6	7	0	5	2
x_2	2	5	6	1	0	7	0	1	6	5
x_3	5	6	7	2	1	0	1	2	7	6
x_4	6	7	0	5	2	1	2	5	0	7
x_5	7	0	1	6	5	2	5	6	1	0
x_6	0	1	2	7	6	5	6	7	2	1
x_7	1	2	5	0	7	6	7	0	5	2

On voit dans le tableau que pour chacun des chiffres des unités possibles de x_0, le chiffre des unités de x_1 est égal à celui de x_7.
Donc, en commençant par x_1, chaque colonne dans le tableau se répétera tous les 6 termes.
Donc, indépendamment de la valeur de départ x_0, x_{i+6} et x_i auront le même chiffre des unités pour tous les entiers i ($i \geq 1$).
Puisque $2026 - 2020 = 6$, alors x_{2026} et x_{2020} ont le même chiffre des unités, d'où $x_{2026} - x_{2020}$ a 0 comme chiffre des unités ; $x_{2026} - x_{2020}$ est donc divisible par 10.

(c) Puisque $x_{115} - 110 = (x_{115} - 5) - 105$, alors $x_{115} - 110$ est divisible par 105 uniquement lorsque $x_{115} - 5$ est divisible par 105.
De plus, $105 = 3 \times 5 \times 7$ et chacun de $3, 5, 7$ est un nombre premier, d'où $x_{115} - 5$ est divisible par 105 lorsqu'il est exactement divisible par 3, par 5 et par 7.
Chaque x_i est soit un multiple de 3, soit 1 de plus qu'un multiple de 3, soit 2 de plus qu'un multiple de 3.
Supposons que x_i est un multiple de 3. Alors $x_i = 3k$, k étant un entier non négatif, d'où

$$x_{i+1} = (x_i)^2 + 1 = (3k)^2 + 1 = 3(3k^2) + 1.$$

C'est-à-dire que ce dernier est 1 de plus qu'un multiple de 3.
Si x_i est 1 de plus qu'un multiple de 3, alors $x_i = 3k + 1$, k étant un entier non négatif, d'où

$$x_{i+1} = (x_i)^2 + 1 = (3k + 1)^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2 = 3(3k^2 + 2k) + 2.$$

C'est-à-dire que ce dernier est 2 de plus qu'un multiple de 3.
Si x_i est 2 de plus qu'un multiple de 3, alors $x_i = 3k + 2$, k étant un entier non négatif, d'où

$$x_{i+1} = (x_i)^2 + 1 = (3k + 2)^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 5 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 2.$$

C'est-à-dire que ce dernier est 2 de plus qu'un multiple de 3.
Chaque choix possible de x_0 est soit un multiple de 3, soit 1 de plus qu'un multiple de 3, soit 2 de plus qu'un multiple de 3.
Si x_0 est un multiple de 3, alors x_1 est 1 de plus qu'un multiple de 3 et x_2, x_3, x_4, $\ldots$, et ainsi de suite sont chacun 2 de plus qu'un multiple de 3.
Si x_0 est 1 ou 2 de plus qu'un multiple de 3, alors x_1, x_2, x_3, x_4, $\ldots$, et ainsi de suite sont chacun 2 de plus qu'un multiple de 3.
Donc, x_2, x_3, x_4, $\ldots$, et ainsi de suite sont tous 2 de plus qu'un multiple de 3 (indépendamment de x_0). Donc, pour pour tous les entiers i ($i \geq 2$), x_i est un nombre que l'on peut exprimer sous la forme $3k + 2$, k étant un entier non négatif.
Donc, $x_{115} - 5 = 3k + 2 - 5 = 3(k - 1)$ est divisible par 3 pour tous les choix possibles de $x_0 = n$.
Donc, il faut seulement déterminer quand $x_{115} - 5$ est divisible par 5 et par 7.

Quelles sont les valeurs possibles de x_0 telles que $x_{115} - 5$ est divisible par 5 ?
$x_{115} - 5$ est divisible par 5 uniquement lorsque x_{115} est divisible par 5.
Chaque x_i est soit un multiple de 5, soit 1 de plus qu'un multiple de 5, soit 2 de plus qu'un multiple de 5, soit 3 de plus qu'un multiple de 5, soit 4 de plus qu'un multiple de 5.
En ce qui concerne la division par 5, on indique dans le tableau ci-dessous les restes de x_{i+1} étant donné chacun des 5 restes possibles de x_i (soit de 0 à 4) :

x_i	$x_{i+1} = (x_i)^2 + 1$
$5k$	$25k^2 + 1 = 5(5k^2) + 1$
$5k + 1$	$25k^2 + 10k + 2 = 5(5k^2 + 2k) + 2$
$5k + 2$	$25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1)$
$5k + 3$	$25k^2 + 30k + 10 = 5(5k^2 + 6k + 2)$
$5k + 4$	$25k^2 + 40k + 17 = 5(5k^2 + 8k + 3) + 2$

On formule donc les observations suivantes à partir de ce tableau :
— si x_i est un multiple de 5, alors x_{i+1} est 1 de plus qu'un multiple de 5
— si x_i est 1 de plus qu'un multiple de 5, alors x_{i+1} est 2 de plus qu'un multiple de 5
— si x_i est 2 de plus qu'un multiple de 5, alors x_{i+1} est un multiple de 5
— si x_i est 3 de plus qu'un multiple de 5, alors x_{i+1} est un multiple de 5
— si x_i est 4 de plus qu'un multiple de 5, alors x_{i+1} est 2 de plus qu'un multiple de 5
À l'aide de ces observations, on indique dans le tableau suivant les restes des divisions de x_1, x_2, x_3, x_4 par 5 pour chacun des restes possibles de x_0 :

x_0	0	1	2	3	4
x_1	1	2	0	0	2
x_2	2	0	1	1	0
x_3	0	1	2	2	1
x_4	1	2	0	0	2

En ce qui concerne la division par 5, on voit dans le tableau que pour chacun des restes possibles de x_0, le reste de x_1 est égal à celui de x_4.
Donc, à partir de x_1, chaque colonne dans le tableau se répétera tous les 3 termes. Donc, indépendamment de la valeur de départ x_0, x_{i+3} et x_i ont les mêmes restes après une division par 5 pour tous les entiers i ($i \geq 1$).
Puisque $115 = 3(37) + 4$, alors x_{115} et x_4 ont les mêmes restes après une division par 5, d'où x_{115} est donc divisible par 5 pour tous les choix de $x_0 = n$ qui sont soit 2 de plus qu'un multiple de 5, soit 3 de plus qu'un multiple de 5.

Enfin, quelles sont les valeurs possibles de x_0 telles que $x_{115} - 5$ est divisible par 7 ?
$x_{115} - 5$ est divisible par 7 uniquement lorsque x_{115} est 5 de plus qu'un multiple de 7.
Chaque x_i est exactement l'un des suivants : un multiple de 7, 1 de plus qu'un multiple de 7, 2 de plus qu'un multiple de 7, et ainsi de suite jusqu'à 6 de plus qu'un multiple de 7.
En ce qui concerne la division par 7, on indique dans le tableau ci-dessous les restes de x_{i+1} étant donné chacun des 7 restes possibles de x_i (soit de 0 à 6) :

x_i	$x_{i+1} = (x_i)^2 + 1$
$7k$	$49k^2 + 1 = 7(7k^2) + 1$
$7k+1$	$49k^2 + 14k + 2 = 7(7k^2 + 2k) + 2$
$7k+2$	$49k^2 + 28k + 5 = 7(7k^2 + 4k) + 5$
$7k+3$	$49k^2 + 42k + 10 = 7(7k^2 + 6k + 1) + 3$
$7k+4$	$49k^2 + 56k + 17 = 7(7k^2 + 8k + 2) + 3$
$7k+5$	$49k^2 + 70k + 26 = 7(7k^2 + 10k + 3) + 5$
$7k+6$	$49k^2 + 84k + 37 = 7(7k^2 + 12k + 5) + 2$

On formule donc les observations suivantes à partir de ce tableau :
— si x_i est un multiple de 7, alors x_{i+1} est 1 de plus qu'un multiple de 7
— si x_i est 1 de plus qu'un multiple de 7, alors x_{i+1} est 2 de plus qu'un multiple de 7
— si x_i est 2 de plus qu'un multiple de 7, alors x_{i+1} est 5 de plus qu'un multiple de 7
— si x_i est 3 de plus qu'un multiple de 7, alors x_{i+1} est 3 de plus qu'un multiple de 7
— si x_i est 4 de plus qu'un multiple de 7, alors x_{i+1} est 3 de plus qu'un multiple de 7
— si x_i est 5 de plus qu'un multiple de 7, alors x_{i+1} est 5 de plus qu'un multiple de 7
— si x_i est 6 de plus qu'un multiple de 7, alors x_{i+1} est 2 de plus qu'un multiple de 7
À l'aide de ces observations, on indique dans le tableau suivant les restes des divisions de x_1, x_2, x_3, x_4 par 7 pour chacun des restes possibles de x_0 :

x_0	0	1	2	3	4	5	6
x_1	1	2	5	3	3	5	2
x_2	2	5	5	3	3	5	5
x_3	5	5	5	3	3	5	5
x_4	5	5	5	3	3	5	5

On voit dans le tableau que si x_0 est $0, 1, 2, 5$ ou 6 de plus qu'un multiple de 7, alors x_i est 5 de plus qu'un multiple de 7 pour tous les entiers i ($i \geq 3$).
De plus, si x_0 est 3 ou 4 de plus qu'un multiple de 7, alors x_i est 3 de plus qu'un multiple de 7 pour tous les entiers i ($i \geq 1$) (et n'est donc jamais 5 de plus qu'un multiple de 7).
Donc, $x_{115} - 5$ est un multiple de 7 uniquement lorsque x_0 n'est pas 3 ou 4 de plus qu'un multiple de 7.

Résumé :

$x_{115} - 110$ est divisible par 105 uniquement lorsque
— x_0 est 2 ou 3 de plus qu'un multiple de 5 et
— x_0 est un multiple de 7 ou est $1, 2, 5$ ou 6 de plus qu'un multiple de 7.
Les valeurs de x_0 situés dans l'intervalle $1 \leq x_0 \leq 35$ qui satisfont ces propriétés sont :

$$2, 7, 8, 12, 13, 22, 23, 27, 28, 33$$

Les valeurs de x_0 dans l'intervalle $36 \leq x_0 \leq 100$ qui satisfont ces propriétés doivent chacun être supérieur à l'un des nombres dans la liste ci-dessus par un multiple de $5 \times 7 = 35$.
Donc, il y a 10 valeurs x_0 possibles dans la liste originale, 10 autres de $2 + 35 = 37$ à $33 + 35 = 68$, et 9 autres de $2 + 2(35) = 72$ à $28 + 2(35) = 98$; soit 29 valeurs possibles en

tout (remarquez que $33 + 2(35) > 100$).
Si Parsa choisit un entier n ($1 \leq n \leq 100$) au hasard et qu'elle pose $x_0 = n$, la probabilité que $x_{115} - 110$ soit divisible par 105 est égale à $\frac{29}{100}$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2019

le mercredi 10 avril 2019
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 11 avril 2019
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Le rayon de chaque trou est de 2 cm, donc chaque trou a un diamètre de 4 cm.
Puisqu'il y a 4 trous, leurs diamètres occupent donc une distance totale de $4 \times 4 = 16$ cm sur la ligne médiane de 91 cm.
Ainsi, les 5 distances égales qui séparent les trous adjacents le long de la ligne médiane occupent une distance totale de $91 - 16 = 75$ cm. Donc, la distance qui sépare les trous adjacents le long de la ligne médiane est égale à $\frac{75}{5} = 15$ cm.

(b) Soit r cm le rayon de chaque trou, donc chaque trou a un diamètre de $2r$ cm.
Puisqu'il y a 4 trous, leurs diamètres occupent donc une distance totale de $4 \times 2r = 8r$ cm sur la ligne médiane.
La distance qui sépare les trous adjacents le long de la ligne médiane est égale au rayon, r cm. Donc les 5 distances égales qui séparent les trous adjacents le long de la ligne médiane occupent une distance totale de $5r$ cm.
Puisque la ligne médiane a une longueur de 91 cm, alors $8r + 5r = 91$ ou $13r = 91$, ainsi chaque trou a un rayon de $\frac{91}{13} = 7$ cm.

(c) *Solution 1*
Comme dans la partie (b), si chaque trou a un diamètre de $2r$ cm, alors les 4 diamètres occupent une distance totale de $4 \times 2r = 8r$ cm sur la ligne médiane.
Si les trous adjacents se trouvent à 5 cm les uns des autres, alors ces 5 distances égales occupent une distance totale de 25 cm sur la ligne médiane.
Puisque la ligne médiane a une longueur de 91 cm, alors $8r + 25 = 91$ ou $8r = 66$, ainsi chaque trou a un rayon de $\frac{66}{8} = 8{,}25$ cm.
Or la distance verticale entre la ligne médiane et chaque bord du morceau de métal est de 8 cm. Comme les trous doivent être circulaires, le rayon de chaque trou ne peut pas être de 8,25 cm. La distance entre les trous adjacents ne peut donc pas être de 5 cm.

Solution 2
La distance minimale possible entre les trous adjacents est déterminée en maximisant le rayon de chacun des cercles.
Comme les trous doivent être circulaires et que la distance verticale entre la ligne médiane et chaque bord du morceau de métal est de 8 cm, le rayon maximal est de 8 cm.
Puisqu'il y a 4 trous, leurs diamètres occupent donc une distance totale de $4 \times 16 = 64$ cm sur la ligne médiane.
Puisque la ligne médiane a une longueur de 91 cm, alors ces 5 distances égales occupent une distance minimale totale de $91 - 64 = 27$ cm.
Ainsi, la distance minimale entre les trous adjacents est de $\frac{27}{5} = 5{,}4$ cm. On ne peut donc pas admettre 5 cm comme distance qui séparerait les trous adjacents puisque cette valeur est inférieure à la valeur minimale de 5,4 cm.

2. (a) Pour ajouter une bosse, le segment de droite de longueur 21 est d'abord divisé en trois segments dont chacun a une longueur de $\frac{21}{3} = 7$.
Parmi ces trois segments, on supprime celui du milieu et on ajoute deux nouveaux segments ayant chacun une longueur de 7.
Ainsi, après l'ajout d'une bosse à un segment de longueur 21, le nouveau chemin aura une longueur de $4 \times 7 = 28$.

(b) Un chemin avec une seule bosse a quatre segments de longueurs égales.
Si un tel chemin a une longueur de 240, alors chacun des quatre segments a une longueur de $\frac{240}{4} = 60$.
Ainsi, le segment de droite d'origine avait trois segments dont chacun avait une longueur de 60. Donc, le segment de droite d'origine avait une longueur de $3 \times 60 = 180$.

(c) Pour ajouter la première bosse, le segment de droite de longueur 36 est d'abord divisé en trois segments dont chacun a une longueur de $\frac{36}{3} = 12$.
Parmi ces trois segments, on supprime celui du milieu et on ajoute deux nouveaux segments ayant chacun une longueur de 12.
Ainsi, après l'ajout d'une première bosse à un segment de longueur 36, le nouveau chemin a une longueur de $4 \times 12 = 48$.

On ajoute ensuite une bosse à chacun des quatre segments de longueur 12.
Considérons l'ajout d'une bosse à l'un de ces quatre segments.
Le segment de longueur 12 est divisé en trois segments dont chacun a une longueur de $\frac{12}{3} = 4$.
Parmi ces trois segments, on supprime celui du milieu et on ajoute deux nouveaux segments ayant chacun une longueur de 4. Cette partie du chemin final a donc une longueur de $4 \times 4 = 16$.
Puisqu'on effectue ce processus aux quatre segments de longueur 12, la longueur totale du chemin final est égale à $4 \times 16 = 64$.

(d) Pour ajouter la première bosse, le segment de droite de longueur n est d'abord divisé en trois segments dont chacun a une longueur de $\frac{n}{3}$.
Parmi ces trois segments, on supprime celui du milieu et on ajoute deux nouveaux segments ayant chacun une longueur de $\frac{n}{3}$.
Ainsi, après l'ajout d'une première bosse à un segment de longueur n, le chemin 1 a une longueur de $4 \times \frac{n}{3} = \frac{4}{3}n$.

Afin de créer le chemin 2, on ajoute une bosse à chacun des quatre segments de longueur $\frac{n}{3}$.
Considérons l'ajout d'une bosse à l'un de ces quatre segments.
Le segment de longueur $\frac{n}{3}$ est divisé en trois segments dont chacun a une longueur de $\frac{1}{3} \times \frac{n}{3}$.
Parmi ces trois segments, on supprime celui du milieu et on ajoute deux nouveaux segments ayant chacun une longueur de $\frac{1}{3} \times \frac{n}{3}$. Donc la nouvelle longueur est égale à $4 \times \frac{1}{3} \times \frac{n}{3} = \frac{4}{3^2}n$.
Puisqu'on effectue ce processus à quatre tels segments, la longueur totale du chemin 2 est égale à $4 \times \frac{4}{3^2}n = \frac{4^2}{3^2}n$ ou $\left(\frac{4}{3}\right)^2 n$.

En résumé, lorsqu'on ajoute une bosse au segment de droite de longueur n, on obtient le chemin 1 dont la longueur est de $\frac{4}{3}n$.

Lorsqu'on ajoute les bosses au chemin 1, on obtient le chemin 2 dont la longueur est de $\left(\frac{4}{3}\right)^2 n$.

Ce processus se poursuivra de manière que chaque nouveau chemin ait une longueur totale égale à $\frac{4}{3}$ de la longueur du chemin précédent.

C'est-à-dire, le chemin 3 aura une longueur de $\left(\frac{4}{3}\right)^3 n$, le chemin 4 aura une longueur de $\left(\frac{4}{3}\right)^4 n$ et le chemin 5 aura une longueur de $\left(\frac{4}{3}\right)^5 n$.

Si la longueur du chemin 5 est un entier, alors n doit être divisible par 3^5 (puisqu'il n'y a pas de facteurs 3 dans 4^5).

Le plus petit entier n qui est divisible par 3^5 est $3^5 = 243$.

Donc, la plus petite valeur possible de n pour laquelle la longueur du chemin 5 est un entier est 243.

3. (a) La moyenne arithmétique de 36 et 64 est $\frac{36+64}{2} = \frac{100}{2} = 50$.

La moyenne géométrique de 36 et 64 est $\sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{6^2 \cdot 8^2} = 6 \cdot 8 = 48$.

(b) Si la moyenne arithmétique de deux nombres réels positifs, soit x et y, est égale à 13, alors $\frac{x+y}{2} = 13$.

Si la moyenne géométrique de deux nombres réels positifs, soit x et y, est égale à 12, alors $\sqrt{xy} = 12$.

En multipliant la première équation par 2, on obtient $x + y = 26$ d'où $x = 26 - y$.

On reporte $x = 26 - y$ dans la deuxième équation et on élève ensuite les deux côtés de cette nouvelle équation au carré afin d'obtenir $(26 - y)y = 12^2$ ou $y^2 - 26y + 144 = 0$.

En factorisant le côté gauche de cette équation, on obtient $(y - 8)(y - 18) = 0$ d'où $y = 8$ ou $y = 18$.

Lorsque $y = 8$, $x = 26 - 8 = 18$. Lorsque $y = 18$, $x = 8$.

C'est-à-dire, les nombres 8 et 18 ont une moyenne arithmétique de 13 et une moyenne géométrique de 12.

(c) Il nous faut résoudre l'équation $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 1$, x et y étant des entiers positifs où $x < y \leq 50$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} &= 1 \\
x - 2\sqrt{xy} + y &= 2 \\
(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2 &= 2 \quad \text{(car } x, y > 0\text{)} \\
(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &= 2 \\
\sqrt{x} - \sqrt{y} &= \pm\sqrt{2} \\
\sqrt{y} - \sqrt{x} &= \sqrt{2} \quad \text{(car } y > x\text{)} \\
\sqrt{y} &= \sqrt{x} + \sqrt{2} \\
y &= x + 2 + 2\sqrt{2x}
\end{aligned}$$

Puisque x est un entier positif, alors $y = 2 + x + 2\sqrt{2x}$ est un entier positif uniquement lorsque $\sqrt{2x}$ est un entier positif.
Cela se passe uniquement lorsque $x = 2m^2$ pour des valeurs entières de m.
Puisque $x < y \leq 50$, alors $2m^2 < 50$ ou $m^2 < 25$, d'où m est donc un entier de 1 à 4.
On détermine alors les valeurs correspondantes de x et de y dans le tableau ci-dessous.

m	$x = 2m^2$	$y = 2 + x + 2\sqrt{2x}$
1	2	8
2	8	18
3	18	32
4	32	50

Les couples (x, y) qui remplissent les conditions requises sont $(2, 8), (8, 18), (18, 32)$ et $(32, 50)$.

4. (a) On commence en multipliant la première équation par 5 et la deuxième équation par 3 afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} 15x + 20y &= 50 \\ 15x + 18y &= 3c \end{aligned}$$

On soustrait la deuxième équation de la première afin d'obtenir

$$(15x + 20y) - (15x + 18y) = 50 - 3c$$

ou $2y = 50 - 3c$ que l'on réécrit ensuite sous la forme

$$y = 25 - \frac{3}{2}c$$

On reporte cette équation dans la première des deux équations d'origine afin d'obtenir

$$3x + 4\left(25 - \frac{3}{2}c\right) = 10$$

On distribue le facteur 4 aux termes entre parenthèses afin d'obtenir $3x + 100 - 6c = 10$ d'où $3x = 6c - 90$ ou $x = 2c - 30$. Donc, en fonction de c, on a

$$(x, y) = \left(2c - 30, 25 - \frac{3}{2}c\right)$$

(b) De la même manière que dans la partie (a), on va exprimer x et y en fonction de d.
On en soutirera ensuite les valeurs de d qui admettraient des entiers comme valeurs de x et de y.
On multiplie la première équation par 4 afin d'obtenir $4x + 8y = 12$.
On soustrait $4x + dy = 6$ de $4x + 8y = 12$ afin d'obtenir $8y - dy = (8 - d)y = 6$.
Cela signifie que $y = \dfrac{6}{8 - d}$.
On obtient $x = 3 - 2y$ de la première équation.
On reporte $y = \dfrac{6}{8 - d}$ dans cette dernière équation. On a donc

$$x = 3 - 2\left(\frac{6}{8 - d}\right) = 3 - \frac{12}{8 - d}$$

Il faut déterminer les valeurs de d qui admettraient des entiers comme valeurs de $y = \dfrac{6}{8-d}$ et de $x = 3 - \dfrac{12}{8-d}$.

Puisque 3 est un entier, x ne sera un entier que lorsque $\dfrac{12}{8-d}$ est un entier.

Afin que ceci soit le cas, $8-d$ doit être un diviseur de 12.

Par contre, afin que $y = \dfrac{6}{8-d}$ soit un entier, $8-d$ doit être un diviseur de 6.

Puisque tout diviseur de 6 est aussi un diviseur de 12, cela signifie que si y est un entier, alors x le sera aussi.

Ainsi, il faut tout simplement déterminer les valeurs de d qui admettraient des entiers comme valeurs de y.

Les diviseurs de 6 (et donc les valeurs possibles de $8-d$) sont $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ et 6.

Ainsi, les valeurs possibles de d sont $2, 5, 6, 7, 9, 10, 11$ et 14.

(On peut vérifier que chacune de ces valeurs de d admet des entiers comme valeurs de x et de y.)

(c) Afin de simplifier les choses, on va d'abord montrer que, quelles que soient les valeurs de x, de y et de k, si n est un entier, alors y doit être égal à -1.

Dans ce but, on commence en multipliant la première équation par -2 et la deuxième par 3 afin d'obtenir

$$\begin{array}{rcl} -(18n+12)x + (6n+4)y & = & -6n^2 - 12n - (6k+10) \\ (18n+12)x + (9n^2+6n)y & = & -3n^2 + (6k+6) \end{array}$$

On additionne ensuite les deux équations.

Lors de cette addition, les expressions $-(18n+12)$ et $(18n+12)$ sont opposées et s'annulent d'où on obtient alors

$$(9n^2+12n+4)y = -9n^2 - 12n - 4$$

On voit que $(3n+2)^2 = 9n^2+12n+4$, on réécrit donc cette équation sous la forme

$$y(3n+2)^2 = -(3n+2)^2$$

Supposons que $(3n+2)^2 = 0$. Alors $3n+2 = 0$ d'où $n = -\frac{2}{3}$. Ce dernier n'est pas un entier.

Ainsi, si on suppose que n est un entier, on peut diviser l'équation ci-dessus par $(3n+2)^2$ afin d'obtenir

$$y = \frac{-(3n+2)^2}{(3n+2)^2} = -1$$

On cherche à trouver des valeurs entières positives de k pour lesquelles il existe des entiers n qui admettraient (x, y) comme solution au système d'équations où x et y seraient des entiers.

Dorénavant on supposera donc que n est un entier qui, comme on l'a montré ci-dessus, veut dire que $y = -1$.

De la première équation, on a alors

$$(9n+6)x - (3n+2)(-1) = 3n^2 + 6n + (3k+5)$$

que l'on peut réécrire de la forme

$$(9n+6)x \;=\; 3n^2 + 3n + 3k + 3 \qquad (1)$$

La deuxième équation devient

$$(6n+4)x + (3n^2+2n)(-1) = -n^2 + (2k+2)$$

que l'on peut réécrire de la forme

$$(6n+4)x \quad = \quad 2n^2+2n+2k+2 \tag{2}$$

Si l'on divise l'équation (1) par 3 ou l'équation (2) par 2, on obtient

$$(3n+2)x = n^2+n+1+k$$

On veut que n, k et x soient tous des entiers. Cela veut dire que les valeurs de n et de k doivent admettre $n^2+n+1+k$ comme multiple de $3n+2$.
Donc, on va montrer que $n^2+n+1+k$ est un multiple de $3n+2$ uniquement si $3(n^2+n+1+k)$ est un multiple de $3n+2$.
Si l'on suppose que $n^2+n+1+k$ est un multiple de $3n+2$, il est donc vrai que $3(n^2+n+1+k)$ est un multiple de $3n+2$.
On remarque que $3n+2$ est égal à 2 de plus qu'un multiple de 3, alors $3n+2$ n'est pas un multiple de 3.
Cela signifie que $3n+2$ n'a pas 3 comme facteur premier. Alors si $3(n^2+n+k+1)$ est un multiple de $3n+2$, cela signiferait à son tour que $n^2+n+1+k$ est un multiple de $3n+2$.
En résumé, on veut donner un sens aux couples d'entiers (n, k) qui admettraient $n^2+n+1+k$ comme multiple de $3n+2$.
Comme on l'a montré plus tôt, cela signifie la même chose que de trouver des couples d'entiers (n, k) qui admettraient $3n^2+3n+3+3k$ comme multiple de $3n+2$.
En réorganisant et en factorisant, cela revient à trouvers des couples d'entiers (n, k) qui admettraient $n(3n+2)+n+3+3k$ comme multiple de $3n+2$.
On remarque que

$$\frac{n(3n+2)+n+3+3k}{3n+2} = n + \frac{n+3+3k}{3n+2}$$

et que l'expression du côté droit est uniquement un entier si $n+3+3k$ est un multiple de $3n+2$.
Donc, il faut trouver les couples d'entiers (n, k) qui admettraient $n+3+3k$ comme multiple de $3n+2$.
À l'aide du même raisonnement qu'avant, puisque $3n+2$ n'a pas 3 comme facteur premier, alors $n+3+3k$ est un multiple de $3n+2$ uniquement si $3(n+3+3k) = 3n+9+9k$ est un multiple de $3n+2$.
On remarque que

$$\frac{3n+9+9k}{3n+2} = \frac{(3n+2)+(7+9k)}{3n+2} = 1 + \frac{7+9k}{3n+2}$$

donc $3n+9+9k$ est un multiple de $3n+2$ uniquement si $\dfrac{7+9k}{3n+2}$ est un entier, ou si $7+9k$ est un multiple de $3n+2$.
En rassemblant le tout et sachant que n et k sont des entiers, le système d'équations a (x, y) comme solution, x et y étant des entiers, précisément quand $7+9k$ est un multiple de $3n+2$.

Ayant réarticulé la question de cette manière, on cherche à déterminer l'entier positif k pour lequel il y a seulement 8 entiers n qui admettraient $3n + 2$ comme facteur de $9k + 7$. Cela signifie qu'on a besoin d'un entier positif k qui ferait de sorte qu'exactement huit des facteurs de $9k + 7$ soient égaux à deux de plus qu'un multiple de 3.

En commençant par $k = 1$, on a $9k + 7 = 16$.
Les facteurs de 16 sont $-16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8$ et 16, desquels seulement $-16, -4, -1, 2$ et 8 sont 2 de plus qu'un multiple de 3.

Lorsque $k = 2$, $9k + 7 = 25$.
Les facteurs de 25 sont $-25, -5, -1, 1, 5$ et 25.
Il y a moins de huit facteurs au total, donc $k = 2$ est inadmissible.

Lorsque $k = 3$, $9k + 7 = 34$.
Les facteurs de 34 sont $-34, -17, -2, -1, 1, 2, 17, 34$, desquels seulement $-34, -1, 2$ et 17 sont 2 de plus qu'un multiple de 3.

Lorsque $k = 4$, $9k + 7 = 43$. Puisque ce dernier est un nombre premier, il n'a donc que quatre facteurs au total d'où $k = 4$ est alors inadmissible.

Lorsque $k = 5$, $9k + 7 = 52$.
Les facteurs de 52 sont $-52, -26, -13, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 13, 26$ et 52, desquels seulement $-52, -13, -4, -1, 2$ et 26 sont 2 de plus qu'un multiple de 3.

Lorsque $k = 6$, $9k + 7 = 61$. Puisque ce dernier est un nombre premier, il n'a donc que quatre facteurs au total d'où $k = 6$ est inadmissible.

Lorsque $k = 7$, $9k + 7 = 70$.
Les facteurs de 70 sont

$$-70, -35, -14, -10, -7, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 \text{ et } 70$$

desquels seulement $-70, -10, -7, -1, 2, 5, 14$ et 35 sont deux de plus qu'un multiple de 3.
Il y a précisément 8 nombres dans cette liste.
Donc, si $k = 7$, il y a précisément huit entiers n $(-70, -10, -7, -1, 2, 5, 14$ et $35)$ pour lesquels le système d'équations a (x, y) comme solution, x et y étant des entiers.
(Il est à noter qu'il existe d'autres valeurs de k qui répondent aux critères donnés.)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2018

le jeudi 12 avril 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2018
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) La moyenne est égale à $\dfrac{17+13+20+12+18+10}{6}$, ou $\dfrac{90}{6}$, ou 15.

   (b) Après la troisième interrogation, Jon avait une moyenne de 14. La somme de ses trois résultats était donc égale à 14×3, ou 42.
   La somme de ses deux premières notes était égale à $17+12$, ou 29. Il a donc obtenu une note de 13 ($42-29=13$) lors de la troisième interrogation.
   (On peut vérifier que la moyenne de $17, 12$ et 13 est égale à $\dfrac{17+12+13}{3}$, ou 14.)

   (c) *Solution 1*
   Après ses 6 premières interrogations, Dina avait une moyenne de 14 et à la fin, elle avait une moyenne de 18.
   Après ses 6 premières interrogations, Dina avait donc un déficit de 4 points par interrogation ($18-14=4$) par rapport à sa moyenne finale de 18, c'est-à-dire un déficit total de 24 points ($6 \times 4 = 24$).
   Dans chaque interrogation suivante, Dina a obtenu une note de 20. Chacune de ces n interrogations lui rachète donc 2 points ($20-18=2$) par rapport à sa moyenne finale.
   Puisqu'elle a un déficit de 24 points à combler et qu'elle rachète 2 points par interrogation, il lui faut 12 interrogations ($24 \div 2 = 12$) pour obtenir une moyenne de 18.
   Donc, $n = 12$.

   Solution 2
   Dina a subi 6 interrogations, suivies de n autres interrogations pour un total de $n+6$ interrogations.
   Après ses 6 premières interrogations, Dina avait une moyenne de 14 points pour un total de 84 points ($14 \times 6 = 84$).
   Dina a obtenu 20 points sur chacune des n interrogations suivantes pour un total de $20n$ points.
   En tout, elle a obtenu $84+20n$ points dans $n+6$ interrogations.
   Puisque Dina avait une moyenne de 18 après $n+6$ interrogations, elle avait un total de $18(n+6)$ points.
   Donc $84+20n = 18(n+6)$, d'où $84+20n = 18n+108$, ou $2n = 24$, ou $n = 12$.

2. (a) De Bobourg à Aville, il y a une distance de 120 km.
   Jessica a parcouru cette distance à une vitesse de 90 km/h. Elle a donc mis $\dfrac{120}{90}$ heure, ou $\dfrac{4}{3}$ heure pour le faire. Cela correspond à $\dfrac{4}{3} \times 60$ minutes, ou 80 minutes.

   (b) De Bobourg à Aville, il y a une distance de 120 km.
   La voiture a prévu que Jessica conduirait sa voiture à une vitesse de 80 km/h et qu'elle mettrait donc $\dfrac{120}{80}$ heure, ou $\dfrac{3}{2}$ heure pour parcourir la distance, ce qui correspond à $\dfrac{3}{2} \times 60$ minutes, ou 90 minutes.
   À 7 h 00, l'auto a indiqué une HPA de 8 h 30.

   (c) Jessica a conduit sa voiture de 7 h 00 à 7 h 16 (pendant 16 minutes) à la vitesse de 90 km/h. Elle a donc parcouru une distance de $\dfrac{16}{60} \times 90$ km, ou 24 km à cette vitesse.
   À 7 h 16, Jessica avait encore une distance de 96 km à parcourir (120 km$-$24 km = 96 km).
   L'auto a prédit que Jessica parcourrait cette distance à la vitesse de 80 km/h. Elle a

donc prédit que Jessica mettrait $\frac{96}{80}$ heure, ou $\frac{6}{5}$ heure pour le faire, ce qui correspond à $\frac{6}{5} \times 60$ minutes, ou 72 minutes.
La HPA indiquée était donc de 72 minutes après 7 h 16, soit 8 h 28.

(d) Comme dans la partie (b), l'auto a prédit que Jessica mettrait 90 minutes, ou 1,5 heure pour se rendre de Bobourg à Aville.
Soit d km la distance parcourue à 100 km/h. La distance parcourue à 50 km/h est donc $(120 - d)$ km.
Jessica a voyagé à la vitesse de 100 km/h pendant $\frac{d}{100}$ heure.
Elle a voyagé à la vitesse de 50 km/h pendant $\frac{120-d}{50}$ heure.
Puisque le temps prédit par la voiture pour voyager de Bobourg à Aville correspond au temps que Jessica a mis pour le trajet, alors $\frac{d}{100} + \frac{120-d}{50} = 1{,}5$.
L'équation devient $d + 2(120 - d) = 1{,}5 \times 100$, ou $-d + 240 = 150$, d'où $d = 90$.
Jessica a donc parcouru 90 km à la vitesse de 100 km/h.

3. (a) On sait que $T_1 = 1, T_2 = 2$ et $T_3 = 3$.
Donc :

$$T_4 = 1 + T_1T_2T_3 = 1 + (1)(2)(3) = 7, \text{ et}$$
$$T_5 = 1 + T_1T_2T_3T_4 = 1 + (1)(2)(3)(7) = 43$$

(b) *Solution 1*
Chaque terme après les deux premiers est égal à 1 de plus que le produit de tous les termes précédents. Donc $T_n = 1 + T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1}$.
Pour tous les entiers n ($n \geq 2$), on utilise $T_n = 1 + T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1}$:

$$\begin{aligned} M.D. &= T_n^2 - T_n + 1 \\ &= T_n(T_n - 1) + 1 \\ &= T_n(1 + T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1} - 1) + 1 \\ &= T_n(T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1}) + 1 \\ &= T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1}T_n + 1 \\ &= T_{n+1} \\ &= M.G. \end{aligned}$$

Solution 2
Pour tous les entiers n ($n \geq 2$), on utilise $T_n = 1 + T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1}$:

$$\begin{aligned} M.G. &= T_{n+1} \\ &= 1 + T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1}T_n \\ &= 1 + (T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1})T_n \\ &= 1 + (T_n - 1)T_n \\ &= T_n^2 - T_n + 1 \\ &= M.D. \end{aligned}$$

(c) D'après la partie (b), on a $T_n + T_{n+1} = T_n + T_n^2 - T_n + 1 = T_n^2 + 1$, pour tous les entiers n ($n \geq 2$).
Donc :

$$\begin{aligned} T_nT_{n+1} - 1 &= T_n(T_n^2 - T_n + 1) - 1 \\ &= T_n^3 - T_n^2 + T_n - 1 \\ &= T_n^2(T_n - 1) + T_n - 1 \\ &= (T_n - 1)(T_n^2 + 1) \end{aligned}$$

Puisque $T_n + T_{n+1} = T_n^2 + 1$ et que $T_n^2 + 1$ est un facteur de $T_nT_{n+1} - 1$, alors $T_n + T_{n+1}$ est un facteur de $T_nT_{n+1} - 1$ pour tous les entiers n ($n \geq 2$).

(d) D'après la partie (b), on a $T_{2018} = T_{2017}^2 - T_{2017} + 1$.
Puisque T_{2017} est un entier supérieur à 1, alors $T_{2017}^2 - T_{2017} + 1 > T_{2017}^2 - 2T_{2017} + 1$ et $T_{2017}^2 - T_{2017} + 1 < T_{2017}^2$.
Donc, $T_{2017}^2 - 2T_{2017} + 1 < T_{2017}^2 - T_{2017} + 1 < T_{2017}^2$ ou $(T_{2017} - 1)^2 < T_{2018} < T_{2017}^2$.
Puisque $T_{2017} - 1$ et T_{2017} sont deux entiers consécutifs, $(T_{2017} - 1)^2$ et T_{2017}^2 sont deux carrés parfaits consécutifs. Donc, T_{2018} est situé entre deux carrés parfaits et ne peut donc pas être un carré parfait.

4. (a) (i) On récrit les équations sous forme canonique en complétant le carré :

$$y = x^2 - 8x + 17 = x^2 - 8x + 16 + 1 = (x-4)^2 + 1, \text{ et}$$

$$y = -x^2 + 4x + 7 = -(x^2 - 4x + 4) + 11 = -(x-2)^2 + 11$$

La parabole d'équation $y = x^2 - 8x + 17$ a pour sommet $S_1(4, 1)$ et la parabole d'équation $y = -x^2 + 4x + 7$ a pour sommet $S_2(2, 11)$.

(ii) Les coordonnées des points d'intersection P et Q satisfont aux deux équations.
On a donc :

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 17 &= -x^2 + 4x + 7 \\ 2x^2 - 12x + 10 &= 0 \\ x^2 - 6x + 5 &= 0 \\ (x-5)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Les paraboles se coupent donc aux points $P(5, 2)$ et $Q(1, 10)$.
Pour démontrer que le quadrilatère S_1PS_2Q est un parallélogramme, on démontrera que ses diagonales se coupent en leur milieu.
Le milieu de la diagonale S_1S_2 est le point $\left(\frac{4+2}{2}, \frac{1+11}{2}\right)$, ou $(3, 6)$. Le milieu de la diagonale PQ est le point $\left(\frac{5+1}{2}, \frac{2+10}{2}\right)$, ou $(3, 6)$.
Puisque les deux diagonales ont le même milieu $(3, 6)$, les diagonales se coupent en leur milieu et S_1PS_2Q est donc un parallélogramme.
(On aurait pu démontrer que les côtés opposés de S_1PS_2Q sont parallèles deux à deux.)

(b) (i) On récrit l'équation $y = -x^2 + bx + c$ sous forme canonique en complétant le carré :

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + bx + c \\ &= -(x^2 - bx) + c \\ &= -\left(x^2 - bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}\right) + c \\ &= -\left(x^2 - bx + \frac{b^2}{4}\right) + \frac{b^2}{4} + c \\ &= -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4} + c \end{aligned}$$

Le sommet de la parabole définie par cette équation est le point $S_3\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4} + c\right)$ et le sommet de la parabole d'équation $y = x^2$ est le point $S_4(0, 0)$.

On détermine d'abord les conditions sur b et c pour lesquelles les points d'intersection R et T existent et sont distincts.
Aux points d'intersection, on a $-x^2 + bx + c = x^2$, ou $2x^2 - bx - c = 0$.
Cette équation admet deux racines réelles distinctes lorsque son discriminant est supérieur à 0, c'est-à-dire lorsque $b^2 - 4(2)(-c) > 0$.

Les points d'intersection R et T existent et sont distincts lorsque $c > \frac{-b^2}{8}$.

On détermine ensuite les conditions sur b et c pour lesquelles R et T sont distincts de S_3 et de S_4.

L'équation $2x^2 - bx - c = 0$ a pour racines $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 8c}}{4}$.

Soit $x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 8c}}{4}$ l'abscisse de R et $x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 8c}}{4}$ l'abscisse de T.

Les points R et T ne sont pas distincts de S_4 lorsque $\frac{b \pm \sqrt{b^2 + 8c}}{4} = 0$, ou $b = \mp\sqrt{b^2 + 8c}$, ou $b^2 = b^2 + 8c$, ou $c = 0$.
On doit donc avoir $c \neq 0$.

De même, les points R et T ne sont pas distincts de S_3 lorsque $\frac{b \pm \sqrt{b^2 + 8c}}{4} = \frac{b}{2}$, ou $b \pm \sqrt{b^2 + 8c} = 2b$, ou $\pm\sqrt{b^2 + 8c} = b$, ou $b^2 + 8c = b^2$, ou $c = 0$.
On doit donc avoir $c \neq 0$.
(Puisque R et S_4 sont situés sur la même parabole, alors ils sont distincts lorsque leurs abscisses sont distinctes. Il n'est donc pas nécessaire de considérer leurs ordonnées. Il en est de même des points T et S_4, des points R et S_3 et des points T et S_3.)

Enfin il faut que les sommets des paraboles, $S_3\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4} + c\right)$ et $S_4(0, 0)$, soient distincts.

Les sommets S_3 et S_4 sont distincts si lorsqu'ils ont la même abscisse, leurs ordonnées sont distinctes (S_3 et S_4 sont situées sur des paraboles différentes et on doit donc considérer leurs deux coordonnées).
Si $\frac{b}{2} = 0$, ou $b = 0$, alors $\frac{b^2}{4} + c = \frac{0^2}{4} + c = c$. Puisqu'on a déjà la condition préalable $c \neq 0$, alors les sommets S_3 et S_4 sont distincts lorsque $c \neq 0$.

Si les deux conditions $c > \frac{-b^2}{8}$ et $c \neq 0$ sont vérifiées, alors pour tous couples (b, c), les points R and T existent et les points S_3, S_4, R et T sont distincts.

(ii) On suppose que les conditions sur b et c de la partie (b)(i) sont vérifiées.
Donc, les points R et T existent et les points S_3, S_4, R et T sont distincts.
Pour que le quadrilatère S_3RS_4T soit un rectangle, il suffit que ses côtés soient parallèles deux à deux et que deux de ses côtés adjacents soient perpendiculaires.
D'après la partie (b) (i), les paraboles se coupent en $R(x_1, x_1^2)$ et $T(x_2, x_2^2)$ (R et T sont situés sur la parabole d'équation $y = x^2$ et ils ont pour ordonnée respective x_1^2 et x_2^2).
On sait que x_1 et x_2 sont les racines distinctes de l'équation $2x^2 - bx - c = 0$.
La somme de ces racines est égale à $\frac{b}{2}$. On a donc $x_1 + x_2 = \frac{b}{2}$.
Le produit de ces racines est égal à $\frac{-c}{2}$. On a donc $x_1x_2 = \frac{-c}{2}$.

On montrera d'abord que le quadrilatère S_3RS_4T est un parallélogramme puisque ses diagonales se coupent en leur milieu.

Le milieu de la diagonale S_3S_4 est le point $\left(\frac{\frac{b}{2}+0}{2}, \frac{\frac{b^2}{4}+c+0}{2}\right)$, ou $\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{8}+\frac{c}{2}\right)$, ou $\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2+4c}{8}\right)$.

Le milieu de la diagonale RT est le point $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)$.

Or, $x_1 + x_2 = \frac{b}{2}$ et $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-c}{2}\right)$. Le milieu de RT est donc le point $\left(\frac{\frac{b}{2}}{2}, \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}{2}\right)$, ou $\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{8}+\frac{c}{2}\right)$, ou $\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2+4c}{8}\right)$.
Puisque le milieu de la diagonale S_3S_4 est le même que le milieu de la diagonale RT, les diagonales se coupent en leur milieu. Donc, S_3RS_4T est un parallélogramme.

On démontrera maintenant que deux côtés adjacents du parallélogramme S_3RS_4T sont perpendiculaires. (Un tel parallélogramme est un rectangle.)
La pente de S_4T est égale à $\frac{x_2^2-0}{x_2-0}$, ou x_2 puisque $x_2 \neq 0$ ($T(x_2, x_2^2)$ et $S_4(0,0)$ sont des points distincts).
De même, la pente de S_4R est égale à $\frac{x_1^2-0}{x_1-0}$, ou x_1 puisque $x_1 \neq 0$ ($R(x_1, x_1^2)$ et $S_4(0,0)$ sont des points distincts).
Les côtés S_4T et S_4R sont perpendiculaires si le produit x_1x_2 de leurs pentes est égal à -1.
Puisque $x_1x_2 = \frac{-c}{2}$, alors les côtés sont perpendiculaires si $\frac{-c}{2} = -1$, ou $c = 2$.

En plus de la condition $c = 2$, les deux conditions $c > \frac{-b^2}{8}$ et $c \neq 0$ de la partie (b) (i) doivent aussi être vérifiées.
Puisque $c = 2$, alors $c \neq 0$.
Lorsque $c = 2$, la condition $c > \frac{-b^2}{8}$ devient $2 > \frac{-b^2}{8}$, ou $b^2 > -16$. Elle est vérifiée pour toutes les valeurs réelles de b.
Les points R et T existent, les points S_3, S_4, R et T sont distincts et le quadrilatère S_3RS_4T est un rectangle pour tous les couples (b, c) où $c = 2$ et b est n'importe quel nombre réel.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2017

le mercredi 12 avril 2017
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 13 avril 2017
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Puisque le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle, $\angle DCB + \angle DAB = 180^\circ$.
Donc $(2u)^\circ + 88^\circ = 180^\circ$, d'où $2u = 92$, ou $u = 46$.

(b) Puisque le quadrilatère $STQR$ est inscrit dans un cercle, $\angle SRQ + \angle STQ = 180^\circ$.
Donc $x^\circ + 58^\circ = 180^\circ$, d'où $x = 122$.
Puisque le quadrilatère $PQRS$ est inscrit dans un cercle, $\angle SPQ + \angle SRQ = 180^\circ$.
Donc $y^\circ + x^\circ = 180^\circ$, d'où $y + 122 = 180$, ou $y = 58$.

(c) Dans le triangle JKL, $KJ = KL$. Donc $\angle KLJ = \angle KJL = 35^\circ$ (le triangle JKL est isocèle).
Dans le triangle JKL, $\angle JKL = 180^\circ - 2(35^\circ)$, d'où $\angle JKL = 110^\circ$.
Puisque le quadrilatère $JKLM$ est inscrit dans un cercle, $\angle JML + \angle JKL = 180^\circ$.
Donc $\angle JML + 110^\circ = 180^\circ$, d'où $\angle JML = 70^\circ$.
Dans le triangle isocèle JLM, $LJ = LM$. Donc $\angle MJL = \angle JML = 70^\circ$.
Dans le triangle JLM, $w^\circ = 180^\circ - 2(70^\circ)$, d'où $w = 40$.

(d) *Solution 1*
Puisque le quadrilatère $DEFG$ est inscrit dans un cercle, $\angle DGF + \angle DEF = 180^\circ$, d'où $\angle DGF + z^\circ = 180^\circ$ ou $\angle DGF = 180^\circ - z^\circ$.
Puisque FGH est un angle plat, $\angle DGF + \angle DGH = 180^\circ$.
Donc $(180^\circ - z^\circ) + \angle DGH = 180^\circ$, d'où $\angle DGH = 180^\circ - 180^\circ + z^\circ$, ou $\angle DGH = z^\circ$.

Solution 2
Puisque $DEFG$ est un quadrilatère inscrit dans un cercle, $\angle DGF + \angle DEF = 180^\circ$.
Puisque FGH est un angle plat, $\angle DGF + \angle DGH = 180^\circ$.
Donc $\angle DGF + \angle DGH = \angle DGF + \angle DEF$, d'où $\angle DGH = \angle DEF = z^\circ$.

2. (a) On remplit 5 rangées du tableau.
On sait qu'après avoir rempli n rangées, on a écrit n^2 entiers en tout.
Donc après avoir rempli 5 rangées du tableau, on a écrit 25 entiers ($5^2 = 25$).
Le 25^e entier écrit dans le tableau est le dernier entier de la 5^e rangée, soit un 9.

Rangée 1	1								
Rangée 2	1	2	3						
Rangée 3	1	2	3	4	5				
Rangée 4	1	2	3	4	5	6	7		
Rangée 5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
⋮									

(b) Après avoir rempli 10 rangées du tableau, on a écrit 100 entiers ($10^2 = 100$).
Donc, le 100^e entier que l'on a écrit est le dernier entier de la rangée 10.
Le dernier entier de la rangée n est le $n^{\text{ième}}$ entier impair.
Le premier entier impair est $2(1) - 1$, ou 1 ; le deuxième entier impair est $2(2) - 1$, ou 3 ; le troisième entier impair est $2(3) - 1$, ou 5.
Le $n^{\text{ième}}$ impair est $2n - 1$ (1 de moins que le $n^{\text{ième}}$ entier pair $2n$).
La 10^e rangée se termine par le 10^e entier impair, soit $2(10) - 1$, ou 19.
Donc, le 100^e entier que l'on écrit dans le tableau est 19.

(c) Après avoir rempli 44 rangées, on a écrit 1936 entiers dans le tableau ($44^2 = 1936$).
Après avoir rempli 45 rangées, on a écrit 2025 entiers dans le tableau ($45^2 = 2025$).
Donc, le 2017^e entier écrit dans le tableau est situé dans la rangée 45.
Le dernier entier écrit dans la rangée 45 est le 45^e entier impair, soit $2(45) - 1$, ou 89.
Le 2025^e entier écrit dans le tableau est 89. Le 2017^e entier écrit dans le tableau est donc 8 de moins ($2025 - 2017 = 8$) que 89, soit $89 - 8$, ou 81.

(d) Chaque rangée, après la première, contient tous les entiers de la rangée précédente, suivis des deux entiers consécutifs suivants.

Par exemple, la rangée 3 contient tous les entiers de la rangée 2 (c.-à-d., $1, 2, 3$), suivis des deux entiers consécutifs suivants, 4 et 5.
Ainsi la première fois qu'un entier parait dans le tableau, il parait comme dernier entier d'une rangée ou comme avant-dernier entier d'une rangée.
Puisque le dernier entier d'une rangée est le $n^{\text{ième}}$ entier impair, le dernier entier d'une rangée est toujours impair et l'avant-dernier entier est toujours pair.
La première fois que 96 parait dans le tableau, il parait comme avant-dernier entier de la rangée (puisque 96 est pair) et 97 est le dernier entier de cette rangée.
Puisque la rangée n se termine par le $n^{\text{ième}}$ entier impair, $2n-1$, alors lorsque $2n-1=97$, on a $2n=98$, d'où $n=49$.
Donc, le dernier entier de la rangée 49 est 97 et l'avant-dernier entier de cette rangée est 96.
Puisque 96 parait la première fois dans le tableau dans la rangée 49, alors 96 parait aussi dans chaque rangée après la rangée 49 et ne parait pas avant la rangée 49.
L'entier 96 parait donc dans 152 des 200 premières rangées $(200-48=152)$ du tableau.

3. (a) Les coordonnées des points d'intersection de la droite d'équation $y=-15$ et de la parabole d'équation $y=-x^2+2x$, vérifient les deux équations. Ils vérifient donc l'équation $-15=-x^2+2x$, ou $x^2-2x-15=0$, ou $(x+3)(x-5)=0$. Donc $x=-3$ ou $x=5$.
Puisque les coordonnées des deux points d'intersection vérifient l'équation $y=-15$, les deux points d'intersection ont pour coordonnées $(-3,-15)$ et $(5,-15)$.

(b) Le point d'abscisse 4 sur la parabole d'équation $y=-x^2-3x$ a pour ordonnée $-4^2-3(4)$, ou -28. La droite coupe donc la parabole au point $(4,-28)$.
La droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0,8)$. La droite a donc pour pente $\dfrac{-28-8}{4-0}$, ou $\dfrac{-36}{4}$, ou -9. Puisque la droite a une pente de -9 et une ordonnée à l'origine de 8, elle a pour équation $y=-9x+8$.
Les coordonnées des points d'intersection de la droite d'équation $y=-9x+8$ et de la parabole d'équation $y=-x^2-3x$ vérifient les deux équations. Elles vérifient donc l'équation $-9x+8=-x^2-3x$, ou $x^2-6x+8=0$, ou $(x-2)(x-4)=0$. Donc $x=2$ ou $x=4$.
Les points d'intersection ont donc pour abscisses $x=4$ et $x=2$. Donc $a=2$.

(c) Le point d'abscisse p, sur la parabole d'équation $y=-x^2+kx$, a pour ordonnée $-p^2+kp$.
La droite coupe donc la parabole au point $(p,-p^2+kp)$.
De même, la droite coupe aussi la parabole au point $(q,-q^2+kq)$.
La droite qui passe aux points $(p,-p^2+kp)$ et $(q,-q^2+kq)$ a pour pente $\dfrac{(-p^2+kp)-(-q^2+kq)}{p-q}$, où $p\neq q$, ou $p-q\neq 0$.

On simplifie la pente pour obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{(-p^2+kp)-(-q^2+kq)}{p-q} &= \frac{q^2-p^2+kp-kq}{p-q}\\ &= \frac{(q-p)(q+p)+k(p-q)}{p-q}\\ &= \frac{(q-p)(q+p)}{p-q}+\frac{k(p-q)}{p-q}\\ &= \frac{-(p-q)(q+p)}{p-q}+\frac{k(p-q)}{p-q}\\ &= -(q+p)+k\\ &= k-q-p\end{aligned}$$

La droite a pour pente $k-q-p$ et elle passe au point $(p, -p^2+kp)$.
L'équation de la droite est donc $y-(-p^2+kp)=(k-q-p)(x-p)$.
(La droite de pente m et qui passe au point (x_1, y_1) a pour équation $y-y_1=m(x-x_1)$.)
On reporte $x=0$ dans l'équation $y-(-p^2+kp)=(k-q-p)(x-p)$ pour déterminer la valeur correspondante de y, l'ordonnée à l'origine de la droite.

$$\begin{aligned}y-(-p^2+kp) &= (k-q-p)(x-p)\\ y-(-p^2+kp) &= (k-q-p)(0-p)\\ y+p^2-kp &= -kp+pq+p^2\\ y &= -p^2+kp-kp+pq+p^2\\ y &= pq\end{aligned}$$

La droite qui coupe la parabole d'équation $y=-x^2+kx$ en $x=p$ et en $x=q$ $(p\neq q)$ a pour ordonnée à l'origine pq.

(d) Lorsque la courbe définie par $x=\frac{1}{k^3}y^2+\frac{1}{k}y$ coupe la parabole d'équation $y=-x^2+kx$, les coordonnées des deux points d'intersection ($(0,0)$ et T) vérifient les deux équations. Les abscisses des deux points d'intersection vérifient donc l'équation
$x=\frac{1}{k^3}(-x^2+kx)^2+\frac{1}{k}(-x^2+kx)$ $(k\neq 0)$.
On simplifie pour obtenir :

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{k^3}(-x^2+kx)^2+\frac{1}{k}(-x^2+kx)\\ k^3x &= (-x^2+kx)^2+k^2(-x^2+kx)\\ k^3x &= x^4-2kx^3+k^2x^2-k^2x^2+k^3x\\ 0 &= x^4-2kx^3\\ 0 &= x^3(x-2k)\end{aligned}$$

Puisque $x^3(x-2k)=0$, les abscisses des points d'intersection sont $x=0$ et $x=2k$.
Donc, l'abscisse du point T est $x=2k$. Son ordonnée est $-(2k)^2+k(2k)$, ou $-4k^2+2k^2$, ou $-2k^2$.
Puisque l'ordonnée du point T est une expression du second degré sans terme constant ni terme du premier degré en k, l'équation de la parabole sur laquelle les points T sont situés ne contient qu'un terme du second degré.
En d'autre mots, tous les points $T(2k, -2k^2)$ sont situés sur une parabole dont l'équation

est de la forme $y = ax^2$.
On reporte les coordonnées de T dans cette équation pour obtenir $-2k^2 = a(2k)^2$, ou $-2k^2 = 4ak^2$, ou $-2 = 4a$ (puisque $k \neq 0$), ou $a = -\frac{1}{2}$.
(On peut véfirier que $x = 2k$ et $y = -2k^2$ vérifient l'équation $y = ax^2 + bx + c$ seulement si $a = -\frac{1}{2}$ et $b = c = 0$.)
L'équation de la parabole est donc $y = -\frac{1}{2}x^2$.

4. (a) Soit $N = abcdefghi$ le plus grand nombre zigzag de 9 chiffres.
On déterminera N en attribuant chacun des chiffres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et 9 aux inconnues a, b, c, d, e, f, g, h et i.
On commence en attribuant à a la plus grande valeur possible, $a = 9$, de manière à créer le plus grand nombre zigzag possible.
On ne peut pas avoir $b = 8$, car toute valeur possible de c donnerait $a > b > c$.
En d'autres mots, dans le premier groupe de trois chiffres adjacents, le chiffre du milieu serait inférieur au premier chiffre et supérieur au dernier chiffre.
Dans le but de créer le plus grand nombre zigzag, on attribue donc à b la plus grande valeur suivante, soit 7.
Puisque $a > b$, on doit avoir $b < c$. On doit donc avoir $c = 8$ (puisque 9 a déjà été attribué).
Jusqu'à maintenant, on a

$$N = 978defghi.$$

Si le plus grand nombre zigzag de 9 chiffres commence par 9, il doit commencer par 978.
On continue d'attribuer des valeurs aux chiffres, tout en s'assurant que pour chaque groupe de trois chiffres adjacents, le chiffre du milieu est soit supérieur aux deux autres chiffres, ou il est inférieur aux deux autres chiffres.
Puisque $b < c$, alors $c > d$.
On doit donc avoir $d < e$ et puisque N doit être aussi grand que possible, on choisit $d = 5$ et $e = 6$. On a donc

$$N = 97856fghi.$$

Puisque $d < e$, alors $e > f$, d'où $f < g$.
On choisit donc $f = 3$ et $g = 4$ de manière que N soit aussi grand que possible.
Puisque $f < g$, alors $g > h$ et $h < i$. On choisit donc $h = 1$ et $i = 2$.
Le plus grand nombre zigzag de 9 chiffres est $N = 978563412$.

(b) On procède par étapes en démontrant certains faits.

<u>1er fait : $G(6, 2) = P(6, 5)$</u>

On considère un nombre zigzag particulier de 6 chiffres compté par $G(6, 2)$, par exemple, $n = 251634$.
On forme un nouveau nombre zigzag de 6 chiffres en soustrayant chacun des chiffres de n du nombre 7, ce qui donne $N = 526143$. On remarque que N un nombre zigzag de 6 chiffres qui est compté par $P(6, 5)$.
On considère maintenant un nombre zigzag quelconque compté par $G(6, 2)$, soit $n = 2bcdef$, où b, c, d, e, f sont les chiffres $1, 3, 4, 5, 6$ dans un ordre quelconque de manière que $2 < b$, $b > c$, $c < d$, $d > e$ et $e < f$.
On forme un nouveau nombre zigzag de 6 chiffres en soustrayant chacun des chiffres de n du nombre 7, ce qui donne $N = 5(7 - b)(7 - c)(7 - d)(7 - e)(7 - f)$.
Puisque b, c, d, e, f sont les chiffres $1, 3, 4, 5, 6$ dans un ordre quelconque, alors $7 - b$,

$7-c, 7-d, 7-e, 7-f$ sont les chiffres $6, 4, 3, 2, 1$ dans un ordre quelconque.
Puisque $2 < b$, alors $-2 > -b$, d'où $7-2 > 7-b$, ou $5 > 7-b$.
Puisque $b > c$, alors $-b < -c$, d'où $7-b < 7-c$.
De même, $7-c > 7-d$, $7-d < 7-e$ et $7-e > 7-f$.
Donc, N est un nombre zigzag de 6 chiffres compté par $P(6,5)$.
De plus, si $2bcdef$ et $2BCDEF$ sont deux nombres zigzag différents comptés par $G(6,2)$, alors une des situations suivantes doit être vraie : $b \neq B$ ou $c \neq C$ ou $d \neq D$ ou $e \neq E$ ou $f \neq F$.
Ceci indique que $5(7-b)(7-c)(7-d)(7-e)(7-f)$ et $5(7-B)(7-C)(7-D)(7-E)(7-F)$ sont deux nombres différents comptés par $G(6,2)$, car au moins une paire de chiffres correspondants sera composée de chiffres distincts.
En d'autres mots, chaque nombre zigzag compté par $G(6,2)$ correspond à un nombre zigzag différent compté par $P(6,5)$, d'où $G(6,2) \leq L(6,5)$. (Il pourrait y avoir des nombres zigzag comptés par $P(6,5)$ qui n'ont pas été considérés par cette approche.)
Or, on peut utiliser la même procédure avec un nombre zigzag quelconque compté par $P(6,5)$ pour obtenir un nombre zigzag compté par $G(6,2)$, ce qui démontre que $P(6,5) \leq G(6,2)$.
Donc $G(6,5) = P(6,2)$.

2$^{\text{e}}$ fait : $G(6,a) = P(6,7-a)$ pour $a = 1,2,3,4,5,6$

On peut utiliser un argument semblable pour montrer que $G(6,a) = P(6,7-a)$ pour chacune des valeurs de a, $a = 1,2,3,4,5,6$.

On peut démontrer l'énoncé (ii) :

$$\begin{aligned} & G(6,1)+G(6,2)+G(6,3)+G(6,4)+G(6,5)+G(6,6) \\ =\ & P(6,6)+P(6,5)+P(6,4)+P(6,3)+P(6,2)+P(6,1) \\ =\ & P(6,1)+P(6,2)+P(6,3)+P(6,4)+P(6,5)+P(6,6) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

On peut généraliser le 2$^{\text{e}}$ fait de manière qu'il soit utile pour la partie (c).

3$^{\text{e}}$ fait : $G(n,a) = P(n,n+1-a)$ pour chaque paire d'entiers a et n où $1 \leq a \leq n \leq 9$

Pour s'en convaincre, on utilise un argument semblable à celui du 1$^{\text{er}}$ cas, mais en soustrayant chaque chiffre du nombre zigzag compté par $G(n,a)$ du nombre $n+1$, de manière à obtenir un nombre zigzag correspondant compté par $P(n,(n+1)-a)$.

On démontre maintenant que $G(6,3) = P(5,3) + P(5,4) + P(5,5)$.

4$^{\text{e}}$ fait : Le nombre de nombres zigzag $35cdef$ est égal à $P(5,4)$

On utilise $G(6,35)$ pour représenter le nombre de nombres zigzag de la forme $35cdef$. (On utilisera une notation analogue plus loin.)
On considère un nombre zigzag de 6 chiffres compté par $G(6,35)$, disons $n = 351624$.
On forme un nombre de 5 chiffres en supprimant le premier chiffre de n, ce qui donne 51624, puis en remplaçant le 4, le 5 et le 6 par 3, 4 et 5, respectivement, ce qui donne $N = 41523$.
On remarque N est un nombre zigzag de 5 chiffres compté par $P(5,4)$.
On considère un nombre zigzag arbitraire de 6 chiffres compté par $G(6,35)$, disons

$n = 35cdef$, où c, d, e, f sont les chiffres $1, 2, 4, 6$ dans un ordre quelconque tels que $3 < 5$, $5 > c$, $c < d$, $d > e$ et $e < f$.
On forme un nombre zigzag de 5 chiffres en supprimant le premier chiffre de n, ce qui donne $5cdef$, (dont les chiffres sont $1, 2, 4, 5, 6$ dans un ordre quelconque).
On rappelle que $5 > c$, $c < d$, $d > e$ et $e < f$.
On remplace ensuite le 4, le 5 et le 6 par les chiffres 3, 4 et 5 respectivement, ce qui donne $4c'd'e'f'$.
Puisque les chiffres du nombre $5cdef$ sont $1, 2, 4, 5, 6$ et que les chiffres du nombre $4c'd'e'f'$ sont $1, 2, 3, 4, 5$ (placés dans le même ordre), on n'a pas changé l'ordre relatif des chiffres.
On a donc toujours $5 > c'$, $c' < d'$, $d' > e'$ et $e' < f'$.
Donc, N est un nombre zigzag de 5 chiffres compté par $P(5, 4)$.
De plus, si $35cdef$ et $35CDEF$ sont deux nombres zigzag comptés par $G(6, 3)$, alors une des situations suivantes doit être vraie : $b \neq B$ ou $c \neq C$ ou $d \neq D$ ou $e \neq E$ ou $f \neq F$.
Donc $4c'd'e'f'$ et $4C'D'E'F'$ sont deux nombres distincts comptés par $P(5, 4)$. (Par exemple, si $c' = C'$, on devait avoir $c = C$.)
En d'autres mots, chaque nombre zigzag compté par $G(6, 35)$ correspond à un nombre zigzag différent compté par $P(5, 4)$. Donc $G(6, 35) \leq P(5, 4)$.
On peut aussi renverser cette procédure à partir d'un nombre arbitraire compté par $P(5, 4)$ (remplacer les chiffres $3, 4, 5$ par $4, 5, 6$ et placer le chiffre 3 en avant) pour obtenir un nombre zigzag compté par $G(6, 35)$, ce qui montre que $P(5, 4) \leq G(6, 35)$.
Donc, $G(6, 35) = P(5, 4)$.

<u>5^e fait : $G(6, 3a) = P(5, a - 1)$ pour $a = 4, 5, 6$</u>

En utilisant un argument semblable à celui pour le 4e fait, on peut montrer que pour $a = 4, 5, 6$, on a $G(6, 3a) = P(5, a - 1)$.

On démontre l'énoncé (i), tenant compte que le deuxième chiffre de tout nombre zigzag compté par $G(6, 3)$ doit être un 4, un 5 ou un 6 et que tout nombre zigzag compté par $G(6, 3)$ doit donc être de la forme $34cdef$, $35cdef$ ou $36cdef$:

$$G(6, 3) = G(6, 34) + G(6, 35) + G(6, 36) = P(5, 3) + P(5, 4) + P(5, 5),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le fait suivant est une généralisation du 5e fait. On l'utilisera pour résoudre la partie (c).

<u>6e fait : $G(n, ab) = P(n - 1, b - 1)$ pour tous les chiffres n, a, b $(1 \leq a < b \leq n \leq 9)$</u>

Pour s'en convaincre, on utilise un argument semblable à celui utilisé pour le 5e fait, en retranchant le premier chiffre a et en diminuant de 1 chaque chiffre de $a + 1$ à n, pour obtenir tous les chiffres de a à $n - 1$.

(c) Soit T le nombre total de nombres zigzag de 8 chiffres. Un nombre zigzag de 8 chiffres commence par un des chiffres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et son deuxième chiffre est plus grand ou plus petit que le premier chiffre.
Donc, T est égal à la somme de

$$p = P(8, 1) + P(8, 2) + P(8, 3) + P(8, 4) + P(8, 5) + P(8, 6) + P(8, 7) + P(8, 8)$$

et de

$$g = G(8, 1) + G(8, 2) + G(8, 3) + G(8, 4) + G(8, 5) + G(8, 6) + G(8, 7) + G(8, 8).$$

D'après le 3[e] fait, $P(8,1)=G(8,8)$, $P(8,2)=G(8,7)$, $P(8,3)=G(8,6)$ et ainsi de suite. Donc

$$p = G(8,8)+G(8,7)+G(8,6)+G(8,5)+G(8,4)+G(8,3)+G(8,2)+G(8,1)=g$$

d'où $T = 2(G(8,1)+G(8,2)+G(8,3)+G(8,4)+G(8,5)+G(8,6)+G(8,7)+G(8,8))$.
On calcule la valeur de chaque terme en remplissant un tableau de valeurs de $G(n,k)$ pour $3 \le n \le 8$ et $1 \le k \le 8$.
On remarque que lorsque $k \ge n$, alors $G(n,k)=0$, puisqu'aucun nombre zigzag de n ne peut commencer par k si $k > n$ et si $k = n$, un nombre zigzag de n chiffres qui commence par n ne peut alors avoir un deuxième chiffre plus grand que le premier.
De plus, les seuls nombres zigzag de 3 chiffres sont 132, 231, 213 et 312, puisque les autres arrangements des chiffres 1, 2 et 3 (soit 123 et 321) ne sont pas conformes à la définition d'un nombre zigzag.
Donc $G(3,1)=1$, $G(3,2)=1$ et $G(3,3)=0$.
On peut donc commencer à remplir le tableau :

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	1	0	0	0	0	0	0
4				0	0	0	0	0
5					0	0	0	0
6						0	0	0
7							0	0
8								0

Pour remplir le tableau, on établit une relation entre les valeurs de G et celles de la rangée précédente.
Pour un chiffre n ($4 \le n \le 8$) et un chiffre k ($k < n$), on a :

$$\begin{aligned}
G(n,k) &= G(n,k(k+1)) + G(n,k(k+2)) + \cdots + G(n,k(n-1)) + G(n,kn) \\
&\qquad \text{(puisque le deuxième chiffre doit être supérieur à } k\text{)} \\
&= P(n-1,k) + P(n-1,k+1) + \cdots + P(n-1,n-2) + P(n-1,n-1) \\
&\qquad \text{(d'après le 6}^{\text{e}}\text{ fait)} \\
&= G(n-1,n-k) + G(n-1,n-k-1) + \cdots + G(n-1,2) + G(n-1,1) \\
&\qquad \text{(d'après le 3}^{\text{e}}\text{ fait)}
\end{aligned}$$

On utilise cette formule pour obtenir :

$$\begin{aligned}
G(4,1) &= G(3,3)+G(3,2)+G(3,1) = 2 \\
G(4,2) &= G(3,2)+G(3,1) = 2 \\
G(4,3) &= G(3,1) = 1 \\
G(5,1) &= G(4,4)+G(4,3)+G(4,2)+G(4,1) = 5 \\
G(5,2) &= G(4,3)+G(4,2)+G(4,1) = 5 \\
G(5,3) &= G(4,2)+G(4,1) = 4 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

On continue de la même manière, rangée par rangée, pour obtenir :

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	1	0	0	0	0	0	0
4	2	2	1	0	0	0	0	0
5	5	5	4	2	0	0	0	0
6	16	16	14	10	5	0	0	0
7	61	61	56	46	32	16	0	0
8	272	272	256	224	178	122	61	0

Donc, $T = 2(272 + 272 + 256 + 224 + 178 + 122 + 61)$, ou $T = 2770$.
Il y a donc 2770 nombres zigzag de 8 chiffres.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2016

le mercredi 13 avril 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 avril 2016
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Puisque 5 paniers de raisins remplissent 2 bacs, alors 6×5 paniers remplissent 6×2 bacs, c'est-à-dire que 30 paniers remplissent 12 bacs.
Donc, 12 bacs remplissent 30 paniers.

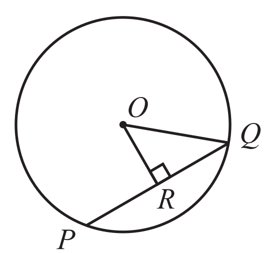
(b) Puisque 5 cuillerées remplissent 1 bocal, alors 6×5 cuillerées remplissent 6×1 bocaux, c'est-à-dire que 30 cuillerées remplissent 6 bocaux.
Puisque 3 cuillerées remplissent 1 tasse, alors 10×3 cuillerées remplissent 10×1 tasses, c'est-à-dire que 30 cuillerées remplissent 10 tasses.
Puisque 30 cuillerées remplissent 6 bocaux et que 30 cuillerées remplissent 10 tasses, alors 10 tasses remplissent 6 bocaux.

(c) *Solution 1*
D'après la partie (b), on sait que 10 tasses remplissent 6 bocaux.
Donc, 5×10 tasses remplissent 5×6 bocaux, c'est-à-dire que 50 tasses remplissent 30 bocaux.
Puisque 30 bocaux remplissent 1 bac, alors 50 tasses remplissent 1 bac. Donc 2×50 tasses remplissent 2×1 bacs, c'est-à-dire que 100 tasses remplissent 2 bacs.
Puisque 2 bacs remplissent 5 paniers, alors 100 tasses remplissent 5 paniers.
Donc $(100 \div 5)$ tasses de raisins remplissent $(5 \div 5)$ panier, c'est-à-dire que 20 tasses remplissent 1 panier.

Solution 2
Puisque 5 paniers remplissent 2 bacs, alors $\frac{2}{5}$ bac remplit 1 panier.
Puisque 30 bocaux remplissent 1 bac, alors $\frac{2}{5} \times 30$ bocaux remplissent $\frac{2}{5}$ bac ou 1 panier, c'est-à-dire que 12 bocaux remplissent 1 panier.
Puisque 5 cuillerées remplissent 1 bocal, alors 12×5 cuillerées remplissent 12 bocaux ou 1 panier, c'est-à-dire que 60 cuillerées remplissent 1 panier.
Puisque 3 cuillerées remplissent 1 tasse, alors 20×1 tasses remplissent 20×3 cuillerées ou 1 panier, c'est-à-dire que 20 tasses remplissent 1 panier.

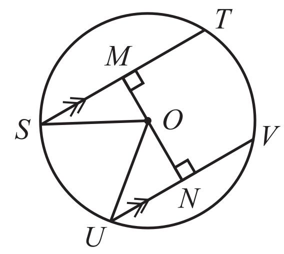
2. (a) Puisque M est le milieu de la corde AB, alors $AM = \frac{1}{2}(AB)$, d'où $AM = 5$, et OM est perpendiculaire à AB.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMA, on a $OM^2 = OA^2 - AM^2$. Donc $OM^2 = 13^2 - 5^2$, ou $OM^2 = 144$. Donc $OM = \sqrt{144}$, ou $OM = 12$ (puisque $OM > 0$).

(b) Soit O le centre du cercle et PQ la corde, comme dans la figure ci-contre.
Puisque le cercle a un rayon de 25, alors $OQ = 25$.
La distance du centre O à la corde correspond à la longueur de OR.
Donc $OR = 7$.
Le triangle ORQ est rectangle. D'après le théorème de Pythagore, on a $RQ^2 = OQ^2 - OR^2$. Donc $RQ^2 = 25^2 - 7^2$, ou $RQ^2 = 576$.
Donc $RQ = \sqrt{576}$ ou $RQ = 24$ (puisque $RQ > 0$).



Puisque OR est perpendiculaire à la corde PQ, R est le milieu de PQ. Donc $PQ = 2(RQ)$, d'où $PQ = 2(24)$, ou $PQ = 48$.
La corde a une longueur de 48.

(c) On trace les rayons OS et OU, comme dans la figure ci-contre.
Le cercle a un rayon de 65. Donc $OS = OU = 65$.
Puisque OM est perpendiculaire à la corde ST, M est le milieu de la corde. Donc $MS = \frac{1}{2}(ST)$, d'où $MS = \frac{1}{2}(112)$, ou $MS = 56$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMS, on a $OM^2 = OS^2 - MS^2$. Donc $OM^2 = 65^2 - 56^2$, ou $OM^2 = 1089$. Donc $OM = \sqrt{1089}$, ou $OM = 33$ (puisque $OM > 0$).
Puisque $MN = OM + ON = 72$, alors $ON = 72 - OM$, d'où $ON = 72 - 33$, ou $ON = 39$.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ONU, on a $NU^2 = OU^2 - ON^2$. Donc $NU^2 = 65^2 - 39^2$, ou $NU^2 = 2704$. Donc $NU = \sqrt{2704}$, ou $NU = 52$ (puisque $NU > 0$). Puisque ON est perpendiculaire à la corde UV, N est le milieu de la corde. Donc $UV = 2(NU)$, d'où $UV = 2(52)$, ou $UV = 104$.
La corde UV a une longueur de 104.

3. (a) Puisque $405 = 3^4 \times 5$, alors 405 est divisible par 3^4, mais pas par 3^5.
Donc $f(405) = 4$.

(b) On factorise d'abord tous les multiples de 3 dans l'expression $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10$.
Les multiples de 3 dans l'expression sont 3, 6 et 9. L'expression devient

$$\begin{aligned} &1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \\ &\quad = \quad 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 8 \times (3 \times 3) \times 10 \\ &\quad = \quad 3^4 \times (1 \times 2 \times 4 \times 5 \times 2 \times 7 \times 8 \times 10). \end{aligned}$$

L'expression entre parenthèses ne comprend aucun facteur 3 ni aucun multiple de 3. La plus grande puissance de 3 dans l'expression complète est donc 3^4.
Donc $f(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10) = 4$.

(c) On compte d'abord combien il y a de facteurs 3 dans 100!.
De 1 à 100, il y a 33 multiples de 3 (de 1×3 à 33×3) et chacun de ces multiples (il s'agit de 3, 6, 9, 12, 15, 18, ..., 93, 96, 99) compte au moins un diviseur 3. Donc, 100! compte au moins 33 diviseurs 3.
Or, parmi ces multiples, chaque multiple de 9 (il s'agit de 9, 18, 27, ..., 81, 90 et 99) compte un deuxième diviseur 3, car $9 = 3^2$, $18 = 2 \times 3^2$, ... Il y a donc 11 diviseurs 3 de plus pour un total de 44.
Or, parmi ces multiples, chaque multiple de 27 (il s'agit de 27, 54 et 81) compte un troisième diviseur 3, car $27 = 3^3$, $54 = 2 \times 3^3$, ... Il y a donc 3 diviseurs 3 de plus pour un total de 47.
Parmi ces multiples, 81 compte un quatrième diviseur 3, car $81 = 3^4$. Il y a donc 1 diviseur 3 de plus pour un total de 48.
Donc, $100! = 3^{48} \times t$, t étant un entier strictement positif quelconque non divisible par 3.
De la même manière, on conclut que 50! comprend 16 multiples de 3, 5 multiples de 9 et 1 multiple de 27, ce qui indique un total de 22 diviseurs 3.
Donc, $50! = 3^{22} \times r$, r étant un entier strictement positif quelconque qui n'est pas divisible par 3.
De la même manière, on conclut que 20! comprend 6 multiples de 3 et 2 multiples de 9, ce qui indique un total de 8 diviseurs 3. Donc, $20! = 3^8 \times s$, s étant un entier strictement positif quelconque non divisible par 3.
Donc $N = \dfrac{100!}{50!20!} = \dfrac{3^{48} \times t}{(3^{22} \times r)(3^8 \times s)} = \dfrac{3^{48} \times t}{(3^{30} \times rs)} = \dfrac{3^{18} \times t}{rs}$.

Puisque N est un entier strictement positif, alors $\dfrac{3^{18} \times t}{rs}$ l'est aussi.

Puisque r et s ne sont pas des multiples de 3 et que $3^{18} \times t$ est divisible par rs, alors t doit être divisible par rs.

On peut donc écrire $N = \dfrac{3^{18} \times t}{rs}$ sous la forme $N = 3^{18} \times \dfrac{t}{rs}$, $\dfrac{t}{rs}$ étant un entier.

Puisque r, s et t ne sont pas des multiples de 3, alors $\dfrac{t}{rs}$ n'est pas divisible par 3.

La plus grande puissance de 3 qui est un diviseur de $\dfrac{100!}{50!20!}$ est donc 3^{18}. Donc $f(N) = 18$.

(d) Puisque $f(a) = 8$, l'exposant de la plus grande puissance de 3 qui divise a est 8.
Donc $a = 3^8 m$, m étant un entier strictement positif quelconque non divisible par 3.
Puisque $f(b) = 7$, l'exposant de la plus grande puissance de 3 qui divise b est 7.
Donc $b = 3^7 n$, n étant un entier strictement positif quelconque non divisible par 3.
On a donc :

$$a + b = 3^8 m + 3^7 n = 3^7(3m + n)$$

Puisque $3m$ est un multiple de 3 et que n ne l'est pas, alors $3m + n$ n'est pas un multiple de 3. Donc, la plus grande puissance de 3 qui divise $a + b$ est 3^7.
Donc $f(a + b) = 7$.

4. (a) (i) Pour chaque différence de 10 cents entre les deux prix, le restaurant dont le prix est plus élevé perd 10 clients à l'autre.
Lundi, la pizza chez LP coute 9,30 \$ − 7,70 \$ de plus, ou 1,60 \$ de plus que chez EP.
Donc, LP perd 16 clients ($1{,}60 \div 0{,}10 = 16$) et EP en gagne 16 de plus. LP a donc $(50 - 16)$ clients, ou 34 clients.

(ii) LP dépense 5,00 \$ pour faire une pizza. Le profit pour une pizza est de 9,30 \$ − 5,00 \$, ou 4,30 \$. Lundi, le profit total chez LP est de 34 × 3,40 \$, ou 146,20 \$.

(b) *Solution 1*

Soit L \$ le prix d'une pizza chez LP, L étant un multiple positif de 0,10.
Chez LP, le profit par pizza est donc égal à $(L - 5)$ \$.
On remarque que lorsque $L < 5$, le profit par pizza chez LP est négatif (c'est-à-dire que LP perd de l'argent avec chaque pizza vendue).

Chez EP, une pizza coute 7,20 \$. Ce restaurant reçoit donc $50 + \dfrac{7{,}20 - L}{0{,}10}$ clients.

On remarque que lorsque $L < 7{,}20$ (la pizza coute moins cher chez LP que chez EP), on a $\dfrac{7{,}20 - L}{0{,}10} > 0$ et LP aura plus de 50 clients. Dans ce cas, LP gagne $\dfrac{7{,}20 - L}{0{,}10}$ clients.

De même, lorsque $L > 7{,}20$ (la pizza coute plus cher chez LP que chez EP), on a $\dfrac{7{,}20 - L}{0{,}10} < 0$ et LP aura moins de 50 clients. Dans ce cas, LP perd $\dfrac{L - 7{,}20}{0{,}10}$ clients.

Le profit total chez LP est égal au produit du profit par pizza et du nombre de clients.

Chez LP, le profit total P, en dollars, est donc $P = \left(50 + \dfrac{7{,}20 - L}{0{,}10}\right) \times (L - 5)$.

On a donc $P = \left(\dfrac{5 + 7{,}2 - L}{0{,}10}\right) \times (L - 5)$, ou $P = -10(L - 12{,}2)(L - 5)$.

P est donc une fonction du second degré par rapport à L.

La représentation graphique de cette fonction est une parabole ouverte vers le bas. La fonction atteint donc sa valeur maximale au sommet de la parabole.

La parabole coupe l'axe des abscisses aux points pour lesquels $P = 0$, donc lorsque $L - 12{,}2 = 0$ ou $L - 5 = 0$, c'est-à-dire lorsque $L = 12{,}2$ ou $L = 5$. Elle coupe donc l'axe des abscisses aux points $(12{,}2; 0)$ et $(5, 0)$.
Le sommet de la parabole est situé sur l'axe de symétrie de la parabole qui passe au milieu des points $(12{,}2; 0)$ et $(5, 0)$, soit par le point $(\frac{12{,}2+5}{2}, 0)$, ou $(8{,}60; 0)$. La fonction atteint donc sa valeur maximale lorsque $L = 8{,}60$.

Mardi, chez LP, on devrait vendre une pizza 8,60 \$ pour maximiser son profit.

Solution 2
Mardi, une pizza coute 7,20 \$ chez EP.
Soit $(7{,}20 + 0{,}10d)$ \$ le cout d'une pizza chez LP, d étant un entier. (On rappelle que la différence entre les couts doit être un multiple de 0,10 \$.)
Lorsque $d > 0$, LP perd d clients qui vont chez EP.
Lorsque $d < 0$, LP gagne $-d$ clients que perd EP.
Donc mardi, LP aura $50 - d$ clients.
LP dépense 5,00 \$ pour faire une pizza.
Son profit par pizza est donc égal à $(7{,}20 + 0{,}10d)\,\$ - 5{,}00\,\$$, ou $(2{,}20 + 0{,}10d)\,\$$.
Le profit total chez LP est égal au produit du profit par pizza et du nombre de clients. Donc $P = (2{,}20 + 0{,}10d)(50 - d)$, ou $P = -0{,}10(d + 22)(d - 50)$.
P est donc une fonction du second degré par rapport à d.
La représentation graphique de cette fonction est une parabole ouverte vers le bas. La fonction atteint donc sa valeur maximale au sommet de la parabole.
La parabole coupe l'axe des abscisses aux points pour lesquels $P = 0$, donc lorsque $d + 22 = 0$ ou $d - 50 = 0$, c'est-à-dire lorsque $d = -22$ ou $d = 50$.
Elle coupe donc l'axe des abscisses aux points $(-22, 0)$ et $(50, 0)$.

Le sommet de la parabole est situé sur l'axe de symétrie de la parabole qui passe au milieu des points $(-22, 0)$ et $(50, 0)$, c'est-à-dire par le point $(\frac{(-22)+50}{2}, 0)$, ou $(14, 0)$. La fonction atteint donc sa valeur maximale lorsque $d = 14$.

Mardi, chez LP, on devrait vendre une pizza $(7{,}20 + 0{,}10(14))$ \$, ou 8,60 \$ pour maximiser son profit.

(c) *Solution 1*
Soit E \$ le prix d'une pizza chez EP, E étant un multiple positif de 0,20.
Après que EP a fixé son prix E \$, LP veut maximiser son profit en fixant le prix d'une pizza à L \$, L étant un multiple positif de 0,10.
Soit P_E le profit de EP en dollars et P_L celui de LP.
On déterminera d'abord le prix L \$, que LP pourrait fixer pour maximiser son profit P_L, sachant que EP a déjà fixé le sien, E \$.
Chez LP, le profit par pizza est de $(L - 5)$ \$. En utilisant la même méthode que dans la partie (b), le nombre correspondant de clients est de $50 + \dfrac{E - L}{0{,}10}$.
En dollars, le profit total chez LP est donc égal à $P_L = \left(50 + \dfrac{E - L}{0{,}10}\right) \times (L - 5)$.
On simplifie pour obtenir $P_L = \left(\dfrac{5 + E - L}{0{,}10}\right) \times (L - 5)$, ou $P_L = -10(L - E - 5)(L - 5)$.
On considère E comme une constante et L comme une variable, ce qui fait que P_L est une fonction du second degré par rapport à L.
La représentation graphique de cette fonction est une parabole ouverte vers le bas. La fonction atteint donc sa valeur maximale au sommet de la parabole.
La parabole coupe l'axe des abscisses aux points pour lesquels $P_L = 0$, donc lorsque

$L - E - 5 = 0$ ou $L - 5 = 0$, c'est-à-dire lorsque $L = E + 5$ ou $L = 5$.
Elle coupe donc l'axe des abscisses aux points $(E+5, 0)$ et $(5, 0)$. Le sommet de la parabole est situé sur l'axe de symétrie de la parabole qui passe au milieu des points $(E + 5, 0)$ et $(5, 0)$, c'est-à-dire par le point $(\frac{E+5+5}{2}, 0)$, ou $(\frac{E+10}{2}, 0)$.
Chez LP, le profit est maximal lorsque $L = \frac{E+10}{2}$, ou $L = \frac{1}{2}E + 5$.
(Puisque E est un multiple de 0,20, alors L est un multiple de 0,10.)
Donc si EP fixe d'abord le prix d'une pizza à E \$, LP devrait fixer le sien à $(\frac{1}{2}E + 5)$ \$ pour maximiser ses profits.

Puisque EP constate le jeu de LP, on peut supposer que EP sait maintenant que LP va fixer le prix de sa pizza à $(\frac{1}{2}E + 5)$ \$.
Donc, EP peut maintenant déterminer le prix E \$ qui maximisera son profit.
Chez EP, le profit par pizza est de $(E - 5)$ \$ et il y a $50 + \dfrac{L - E}{0{,}10}$ clients.
(Puisque L et E sont des multiples de 0,10, le nombre de clients est un entier.)
Chez EP, le profit total, en dollars, est donc égal à $P_E = \left(50 + \dfrac{L - E}{0{,}10}\right) \times (E - 5)$.
On simplifie pour obtenir $P_E = \left(\dfrac{5 + L - E}{0{,}10}\right) \times (E - 5)$, ou $P_E = -10(E - L - 5)(E - 5)$.
Puisque $L = 5 + \frac{1}{2}E$, l'équation devient $P_E = -10(E - (5 + \frac{1}{2}E) - 5)(E - 5)$, ou $P_E = -10(\frac{1}{2}E - 10)(E - 5)$.
La représentation graphique de cette fonction est une parabole ouverte vers le bas. La fonction atteint donc sa valeur maximale au sommet de la parabole.
La parabole coupe l'axe des abscisses aux points pour lesquels $E = 20$ ou $E = 5$.
Chez EP, la valeur maximale est atteinte lorsque $E = \dfrac{20 + 5}{2}$, ou $E = 12{,}50$.
Or, puisque E doit être un multiple de 0,20, cette réponse est rejetée.
Puisque P_E est une fonction du second degré par rapport à E et que la représentation graphique est une parabole ouverte vers le bas, les valeurs de E les plus près du sommet de la parabole donneront les plus grandes valeurs de P_E.
Pour maximiser les profits de EP, on choisit donc les valeurs de E qui sont des multiples de 20 cents les plus près de $E = 12{,}50$.
Il y a deux telles valeurs, soit $E = 12{,}40$ (qui donne $L = 11{,}20$) et $E = 12{,}60$ (qui donne $L = 11{,}30$).
On remarque $E = 12{,}40$ et $E = 12{,}60$ sont symétriques par rapport à $E = 12{,}50$, et que la parabole étant symétrique par rapport à l'axe de symétrie défini par $E = 12{,}50$, elles donneront la même valeur de P_E, soit $P_E = 281{,}20$. De plus, il n'y a aucune autre valeur de E qui satisfait aux conditions données pour laquelle P_E a une plus grande valeur, puisqu'il n'y a aucun multiple of 20 cents entre 12,40 \$ et 12,50 \$ ou entre 12,60 \$ et 12,50 \$.
Lorsque EP fixe le prix d'une pizza à E \$ = 12,40 \$, le profit total de LP, en dollars, est égal à $P_L = -10(L - E - 5)(L - 5)$, ou $P_L = -10(11{,}20 - 12{,}40 - 5)(11{,}20 - 5)$, ou $P_L = -10(-6{,}20)(6{,}20)$, ou $P_L = 384{,}40$.
Lorsque EP fixe le prix d'une pizza à E \$ = 12,60 \$, le profit total de LP, en dollars, est égal à $P_L = -10(L - E - 5)(L - 5)$, ou $P_L = -10(11{,}30 - 12{,}60 - 5)(11{,}30 - 5)$, ou $P_L = -10(-6{,}30)(6{,}30)$, ou $P_L = 396{,}90$.

Pour maximiser ses profits, EP peut fixer le prix d'une pizza à 12,40 \$ ou à 12,60 \$, ce qui aurait pour résultat un profit total respectif de 384,40 \$ et 396,90 \$ chez LP.

Solution 2
On suppose que mercredi, EP fixe le prix d'une pizza à $2e$ \$, e étant un multiple de 0,10.
Étant donné ce prix fixe (mais inconnu), LP fixe le prix de sa pizza de manière à maximiser son profit total.
Soit $(2e + 0{,}10n)$ \$ le prix fixé pour une pizza chez LP, n étant un entier. (On sait que la différence entre les deux prix doit être un multiple de 10 cents.)
Comme dans la partie (b), LP aura $50 - n$ clients.
Puisqu'il faut dépenser 5,00 \$ pour fabriquer une pizza, le profit par pizza chez LP est égal à $(2e + 0{,}10n)$ \$ $- 5{,}00$ \$, ou $(2e + 0{,}10n - 5)$ \$.
Chez LP, le profit total, en dollars, est égal à

$$P_L = (2e+0{,}10n-5)(50-n) = 0{,}10(20e+n-50)(50-n) = -0{,}10n^2+(10-2e)n+(100e-250)$$

On considère e comme une constante et n comme une variable. P_L est donc une fonction du second degré par rapport à n.
Puisque le coefficient de n^2 est négatif, la représentation graphique de la fonction est une parabole ouverte vers le bas. P_L atteint donc sa valeur maximale au sommet de la parabole.
Le sommet a pour abscisse $n = -\dfrac{10 - 2e}{2(-0{,}10)}$, ou $n = 50 - 10e$.
À cet endroit, le profit est égal à :

$$P_L = 0{,}10(20e + (50 - 10e) - 50)(50 - (50 - 10e)) = 0{,}10(10e)(10e) = 10e^2$$

Mercredi, EP constate le jeu de LP et il fixe le prix $2e$ \$ d'une pizza de manière à maximiser son profit total (sachant que LP choisira ensuite le prix de sa pizza de manière à maximiser son profit total).
Puisque le prix est fixé à $2e$ \$ par pizza chez EP, le profit par pizza est de $(2e - 5)$ \$.
Puisque LP a $50 - n$ clients et qu'il y a 100 clients en tout, EP a $100 - (50 - n)$ clients, c'est-à-dire $50+n$ clients, ou $50+(50-10e)$ clients, ou $100-10e$ clients. (On a $n = 50-10e$ au sommet de la parabole.)
Le profit total en dollars, chez EP, est égal à

$$P_E = (100 - 10e)(2e - 5) = -20e^2 + 250e - 500 = -20(e^2 - 12{,}5e + 25)$$

On complète le carré pour obtenir :

$$P_E = -20((e - 6{,}25)^2 - 6{,}25^2 + 25) = -20(e - 6{,}25)^2 + 281{,}25$$

Il s'agit de l'équation canonique d'une parabole ouverte vers le bas. P_E atteint donc sa valeur maximale lorsque $e = 6{,}25$. Or, il faut que e soit un multiple de 0,10.
Pour obtenir la valeur maximale de P_E qui tient compte de cette restriction, on choisit les valeurs de e qui sont les plus rapprochées de l'abscisse du sommet et qui sont des multiples de 0,10. Il s'agit de $e = 6{,}20$ et $e = 6{,}30$.
Puisque $e = 6{,}20$ et $e = 6{,}30$ sont symétriques par rapport à l'abscisse $e = 6{,}25$ du sommet, elles donneront la même valeur à P_E, soit $P_E = 281{,}20$. Puisque les valeurs de e sont aussi près de l'abscisse du sommet que possible, la valeur de P_E est maximale.
Lorsque $e = 6{,}20$, le prix chez EP est de 12,40 \$ et le profit total chez LP est de $10e^2$ \$, ou $10(6{,}20)^2$ \$, ou 384,40 \$.
Lorsque $e = 6{,}30$, le prix chez EP est de 12,60 \$ et le profit total chez LP est de $10e^2$ \$, ou $10(6{,}30)^2$ \$, ou 396,90 \$.
Pour maximiser ses profits, EP peut fixer le prix d'une pizza à 12,40 \$ ou à 12,60 \$, ce qui aurait pour résultat un profit total respectif de 384,40 \$ et 396,90 \$ chez LP.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2015

le jeudi 16 avril 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 17 avril 2015
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) La distance de l'arrière d'un wagon ou de la locomotive jusqu'à l'arrière du wagon suivant est la somme de la distance de 2 m entre les wagons et de la longueur de 15 m d'un wagon, soit 17 m.
La distance de l'arrière de la locomotive jusqu'à l'arrière du 10^e^ wagon est donc égale à 10×17 m, ou 170 m.
Puisque la locomotive a une longueur de 26 m, alors un train qui a 10 wagons a une longueur totale de $(26 + 170)$ m, ou 196 m.

(b) Si on omet la longueur de la locomotive, soit 26 m, le train a une longueur de $(2015 - 26)$ m, ou 1989 m. Or, de l'arrière d'un wagon ou de la locomotive jusqu'à l'arrière du wagon suivant, il y a une distance de 17 m. Combien y a-t-il de longueurs de 17 m dans 1989 m ? Puisque $1989 \div 17 = 117$, il y a 117 longueurs, donc 117 wagons.
OU
Un train qui a n wagons a une longueur de $(26 + 15n + 2n)$ m (la locomotive a une longueur de 26 m, les n wagons ont une longueur totale de $15n$ m et les n espaces devant les wagons ont une longueur totale de $2n$ m).
Un train de n wagons a donc une longueur totale de $(26 + 17n)$ m.
Si un train particulier a une longueur totale de 2015 m, alors $26 + 17n = 2015$, d'où $17n = 1989$, ou $n = 117$.
Un train qui a une longueur totale de 2015 m a 117 wagons.

(c) Un train avec 14 wagons a une longueur totale de $(26 + 17(14))$ m, ou 264 m.
Le temps pendant lequel une partie du train se trouve au Canada et une autre partie aux États-Unis est le temps qu'il met pour traverser la frontière. (Pendant que le train traverse la frontière, il y a une partie du train dans chaque pays.)
Le train commence à traverser la frontière lorsque le devant de la locomotive arrive à la frontière. Le train finit de traverser la frontière lorsque l'arrière du dernier wagon arrive à la frontière, soit lorsque le devant du train a parcouru 264 m de plus.
Le temps que le train met pour traverser la frontière est donc le temps qu'il met pour parcourir une distance de 264 m.
Puisque le train voyage à une vitesse de 1,6 m/s, le temps qu'il met pour parcourir 264 m est égal à $\frac{264}{1{,}6}$ s, ou 165 s.
Donc, une partie du train se trouve au Canada et une autre partie du train se trouve aux États-Unis pendant 165 s.

2. (a) Le nombre de deux chiffres, AB, est égal à $10A + B$ et le nombre BA est égal à $10B + A$.
L'équation $AB - BA = 72$ devient $(10A + B) - (10B + A) = 72$, ou $9A - 9B = 72$, d'où $A - B = 8$.
Puisque A et B sont des chiffres strictement positifs, alors $A - B = 8$ lorsque $A = 9$ et $B = 1$ seulement. (On peut le vérifier en vérifiant toutes les soustractions possibles.)
Donc, l'entier AB est 91.
(On peut vérifier que $AB - BA = 91 - 19 = 72$.)

(b) Les entiers positifs de deux chiffres, MN et NM, égalent respectivement $10M + N$ et $10N + M$.
L'équation $MN - NM = 80$ devient $(10M + N) - (10N + M) = 80$, ou $9M - 9N = 80$, ou $9(M - N) = 80$.
Puisque M et N sont des chiffres strictement positifs, alors $M - N$ est un entier et $9(M - N)$ est donc un multiple de 9.
Or, 80 is n'est pas un multiple de 9. L'équation $9(M - N) = 80$ a donc un membre de gauche qui est un multiple de 9 et un membre de droite qui ne l'est pas, ce qui est impossible.

L'équation n'admet donc aucune solution. Il est donc impossible que $MN - NM = 80$.

(c) Les entiers positifs de trois chiffres, PQR et RQP, égalent respectivement $100P + 10Q + R$ et $100R + 10Q + P$.
L'expression $PQR - RQP$ devient $(100P + 10Q + R) - (100R + 10Q + P)$, ou $99P - 99R$, ou $99(P - R)$.
Puisque P et R sont des chiffres strictement positifs, la valeur maximale possible de $P - R$ est 8 (lorsque P prend la plus grande valeur possible et R prend la plus petite valeur possible, c'est-à-dire lorsque $P = 9$ et $R = 1$).
Puisque $P > R$, la valeur minimale possible de $P - R$ est 1 (par exemple, lorsque $P = 9$ et $R = 8$).
On a donc $1 \leq P - R \leq 8$, ce qui signifie qu'il y a exactement 8 valeurs entières possibles de $P - R$.
(On peut vérifier qu'il existe des valeurs de P et de R telles que $P - R$ soit égal à chacun des entiers de 1 à 8.)
Puisque $PQR - RQP = 99(P - R)$ et que l'expression $P - R$ peut prendre exactement 8 valeurs possibles, alors l'expression $PQR - RQP$ peut prendre exactement 8 valeurs possibles.
(On remarque que la valeur de $PQR - RQP$ ne dépend pas de la valeur de Q.)

3. (a) La figure 1 montre comment $T(3) = 9$.
Pour déterminer $T(4)$, on ajoute un segment à ceux de la figure 1, comme dans la figure 2.
Or, ce 4ᵉ segment coupe chaque autre segment exactement une fois, ce qui crée 3 nouveaux points d'intersection (les points $1, 2, 3$).
Ce 4ᵉ segment ajoute également 2 nouvelles extrémités (les points 4 et 5) distinctes des trois points d'intersection.
De plus, tous les points qui illustrent $T(3)$ (figure 1) continuent d'exister dans l'illustration de $T(4)$ (figure 2) et ils sont distincts des points qu'on vient d'ajouter. On a donc :

$$\begin{aligned} T(4) &= T(3) + 3 + 2 \\ &= 9 + 3 + 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

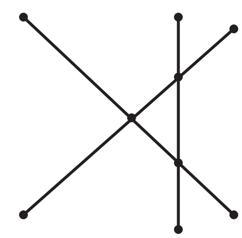


Figure 1

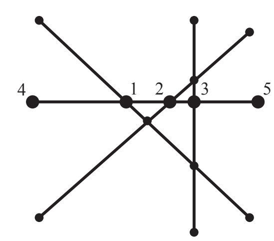


Figure 2

Pour déterminer $T(5)$, on ajoute un segment à ceux de la figure 2, comme dans la figure 3.
Or, ce 5ᵉ segment coupe chaque autre segment exactement une fois, ce qui crée 4 nouveaux points d'intersection (les points $1, 2, 3, 4$).
Ce 4ᵉ segment ajoute également 2 nouvelles extrémités (les points 5 et 6) distinctes des quatre points d'intersection.

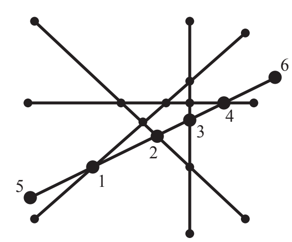


Figure 3

De plus, tous les points qui illustrent $T(4)$ (figure 2) continuent d'exister dans l'illustration de $T(5)$ (figure 3) et ils sont distincts des points qu'on vient d'ajouter. On a donc :

$$\begin{aligned} T(5) &= T(4)+4+2 \\ &= 14+4+2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Donc $T(4)=14$ et $T(5)=20$.

(b) Comme dans la partie (a), on déterminera $T(n)$ à partir de $T(n-1)$ pour tout entier n, $n \geq 2$.
Pour déterminer $T(n)$, on ajoute un segment à ceux d'une figure représentative de $T(n-1)$.
Ce $n^{\text{ième}}$ segment coupe chacun des $n-1$ autres segments exactement 1 fois, ce qui crée $n-1$ nouveaux points d'intersection.
Ce $n^{\text{ième}}$ segment ajoute aussi 2 extrémités qui sont distinctes des $n-1$ points d'intersection.
De plus, tous les points qui illustrent $T(n-1)$ continuent d'exister dans l'illustration de $T(n)$ et ils sont distincts des points qu'on vient d'ajouter. On a donc :

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1)+(n-1)+2 \\ T(n) &= T(n-1)+n+1 \end{aligned}$$

Donc $T(n)-T(n-1)=n+1$ pour tout n, $n \geq 2$.

(c) Dans la partie (b), on a obtenu $T(n)-T(n-1)=n+1$, d'où $T(n)=T(n-1)+n+1$.
Lorsqu'on ajoute un $n^{\text{ième}}$ segment, la valeur de $T(n-1)$ est augmentée de $n+1$ pour donner la valeur de $T(n)$.
Par exemple, étant donné $T(1)=2$, alors $T(2)=T(1)+3$, ou $T(2)=2+3$.
On utilise le tableau suivant pour les premières valeurs de $T(n)$.

n	$T(n)=T(n-1)+n+1, n \geq 2$
2	$T(2)=T(1)+3=2+3$
3	$T(3)=T(2)+4=2+3+4$
4	$T(4)=T(3)+5=2+3+4+5$
5	$T(5)=T(4)+6=2+3+4+5+6$
6	$T(6)=T(5)+7=2+3+4+5+6+7$
$\vdots$	$\vdots$

On peut utiliser la régularité dans le tableau pour déterminer une formule pour $T(n)$.
Par exemple, on considère la rangée $n=5$.
$T(5)$ est la somme des entiers de 2 à 6, et 6 est 1 de plus que 5.
Dans chaque rangée n du tableau, $T(n)$ est égal à la somme des entiers de 2 à $n+1$.
(On peut le vérifier.) On peut écrire $T(n-1)=2+3+4+\cdots+n$ pour tout entier n, $n \geq 3$.
Lorsqu'on ajoute un $n^{\text{ième}}$ segment, la valeur de $T(n-1)$ est augmentée de $n+1$ pour donner $T(n)$. Donc $T(n)=T(n-1)+n+1$, d'où $T(n)=(2+3+4+\cdots+n)+n+1$.
On peut récrire cette expression sous la forme suivante :

$$T(n)=1+2+3+4+\cdots+n+n.$$

Puisque la somme des entiers de 1 à n, soit $1+2+3+4+\cdots+n$, est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$, alors $T(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}+n$.

L'équation $T(n) = 2015$ devient :

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2} + n &= 2015\\ n(n+1) + 2n &= 4030\\ n^2 + 3n &= 4030\\ n^2 + 3n - 4030 &= 0\\ (n-62)(n+65) &= 0\end{aligned}$$

Puisque $n > 0$, alors $n = 62$. (Si on n'avait pas vu comment factoriser, on aurait pu utiliser la formule pour résoudre une équation du second degré.)
La seule valeur de n pour laquelle $T(n) = 2015$ est 62.

4. (a) Puisque $125 = 5^3$, les diviseurs positifs de 125 sont $5^0, 5^1, 5^2$ et 5^3, ou $1, 5, 25$ et 125.
Donc pour tout entier a de 1 à 125, les valeurs possibles de $PGCD(a, 125)$ sont $1, 5, 25$ et 125.
On a $PGCD(a, 125) = 125$ lorsque a est divisible par 125. Puisque $1 \leq a \leq 125$ et qu'il n'y a qu'un multiple de 125 dans cet intervalle, alors $PGCD(a, 125) = 125$ lorsque $a = 125$ seulement.
On a $PGCD(a, 125) = 25$ lorsque a est divisible par 25, mais pas par 125.
Les valeurs possibles de a dans l'intervalle $1 \leq a < 125$ sont 25, 50, 75 et 100.
On a $PGCD(a, 125) = 5$ lorsque a est divisible par 5, mais pas par 25.
Il y a 25 multiples de 5 parmi les entiers de 1 à 125. Cinq de ces multiples sont des multiples de 25.
Les 20 autres multiples sont des multiples de 5, mais pas de 25. Pour ces 20 multiples de 5, on aura $PGCD(a, 125) = 5$.
On a $PGCD(a, 125) = 1$ lorsque a n'est pas divisible par 5.
Puisqu'il y a 25 multiples de 5 parmi les entiers de 1 à 125, il y a 100 entiers, dans cet intervalle, qui ne sont pas multiples de 5.
Pour résumer, si on considère les entiers a dans l'intervalle $1 \leq a \leq 125$, il y a :

- 1 entier a pour lequel $PGCD(a, 125) = 125$
- 4 entiers a pour lesquels $PGCD(a, 125) = 25$
- 20 entiers a pour lesquels $PGCD(a, 125) = 5$
- 100 entiers a pour lesquels $PGCD(a, 125) = 1$

Donc :

$$\begin{aligned}P(125) &= PGCD(1, 125) + PGCD(2, 125) + \cdots + PGCD(124, 125) + PGCD(125, 125)\\ &= 1(125) + 4(25) + 20(5) + 100(1)\\ &= 425\end{aligned}$$

(b) Puisque r est un nombre premier, les diviseurs positifs de r^2 sont $1, r$ et r^2.
Puisque s est un nombre premier, les diviseurs positifs de s sont 1 et s.
Puisque r et s sont des nombres premiers distincts, alors $PGCD(r^2, s) = 1$. (Le seul diviseur commun aux deux listes est 1.)
D'après la remarque dans l'énoncé, $P(r^2 s) = P(r^2)P(s)$.

On procède comme dans la partie (a) pour déterminer $P(s)$.
Étant donné un entier a dans l'intervalle $1 \leq a \leq s$, les valeurs possibles de $PGCD(a, s)$ sont 1 et s.

Le seul multiple de s dans cet intervalle est s. Il y a donc une seule valeur de a (soit $a = s$) pour laquelle $PGCD(a, s) = s$.
Il y a donc $s - 1$ entiers a pour lesquels $PGCD(a, s) = 1$.
Donc :

$$\begin{aligned} P(s) &= PGCD(1, s) + PGCD(2, s) + \cdots + PGCD(s-1, s) + PGCD(s, s) \\ &= 1(s) + (s-1)1 \\ &= 2s - 1 \end{aligned}$$

De même, il y a une seule valeur de a dans l'intervalle $1 \le a \le r^2$ pour laquelle $PGCD(a, r^2) = r^2$, $r-1$ valeurs de a pour lesquelles $PGCD(a, r^2) = r$ et $r^2 - r$ valeurs de a pour lesquelles $PGCD(a, r^2) = 1$.
Donc :

$$\begin{aligned} P(r^2) &= PGCD(1, r^2) + PGCD(2, r^2) + \cdots + PGCD(r^2-1, r^2) + PGCD(r^2, r^2) \\ &= 1(r^2) + (r-1)r + (r^2 - r)1 \\ &= 3r^2 - 2r \\ &= r(3r - 2) \end{aligned}$$

Donc $P(r^2 s) = P(r^2)P(s) = r(3r-2)(2s-1)$, ce qu'il fallait démontrer.

(c) On démontre que $P(r^2 s)$ ne peut être égal à une puissance d'un nombre premier en supposant que $P(r^2 s)$ est égal à t^n, t étant un nombre premier quelconque et n un entier strictement positif quelconque, et en obtenant une contradiction.
D'après la partie (b), on a $r(3r-2)(2s-1) = t^n$.
Puisque le membre de droite est une puissance d'un nombre premier, les seuls diviseurs du membre de droite sont des puissances de t.
Donc, chaque facteur du membre de gauche doit être une puissance de t.
Puisque r est un nombre premier et qu'il est un facteur, alors $r = t$.
Donc $3r - 2$, ou $3t - 2$, est aussi une puissance de t.
Si $3t - 2 = t$, alors $t = 1$, ce qui n'est pas un nombre premier.
Si $3t - 2 = t^2$ et t est un nombre premier, alors $t^2 - 3t + 2 = 0$, ou $(t-2)(t-1) = 0$, d'où $t = 2$ ou $t = 1$. Puisque t est un nombre premier, alors si $3t - 2 = t^2$, on doit avoir $t = 2$.
On peut aussi conclure que si $t = 2$, alors $3t - 2$ est seulement une puissance d'un nombre premier lorsque $3t - 2 = t^2$.
Est-il possible que $3t - 2 = t^u$, u étant un entier supérieur à 2 et t étant un nombre premier, $t > 2$?
Si $u > 2$, alors $t^u > t^2$, puisque $t > 1$.
Si $t > 2$, alors $t^2 - 3t + 2 = (t-2)(t-1) > 0$, d'où $t^2 > 3t - 2$.
Donc si $u > 2$, alors $t^u > t^2 > 3t - 2$, d'où $3t - 2 \neq t^u$.
Donc si $3t - 2$ est une puissance de t, alors $t = 2$.
Si $t = 2$, alors t et $3t - 2$ sont tous deux puissances de t, $t = 2$. De plus, $t = 2$ est le seul nombre premier pour lequel cela est vrai.
Or dans ce cas-ci, $2s - 1$ est impair et ne peut donc pas être une puissance de t, $t = 2$.
Cela contredit l'hypthèse du début.
Donc, $P(r^2 s) = r(3r-2)(2s-1)$ ne peut être une puissance d'un nombre premier.

(d) On remarque que $243 = 3^5$. On considère diverses formes possibles de m.
Supposons que $m = rs$, r et s étant des nombres premiers quelconques.
Donc $P(m) = P(rs) = (2r-1)(2s-1)$.
On cherche des nombres premiers r et s pour lesquels $(2r-1)(2s-1) = 243$.

On remarque que si p est un nombre premier, alors $p \geq 2$, d'où $2p - 1 \geq 3$.
On pourrait donc avoir $2r - 1 = 3$ et $2s - 1 = 81$ (d'où $r = 2$ et $s = 41$, ces nombres étant premiers) ou $2r - 1 = 9$ et $2s - 1 = 27$ (d'où $r = 5$ (un nombre premier) et $s = 14$ (un nombre composé)).
Donc $P(82) = P(2 \cdot 41) = 3 \cdot 81 = 243$.

Puisque 243 est une puissance d'un nombre premier, alors d'après la partie (c), on a $P(r^2 s) \neq 243$ pour tous nombres premiers r et s.

$P(r^3 s)$ peut-il être égal à 243 ?
En utilisant un développement semblable à celui de la partie (a), on a :

$$P(r^3) = 1(r^3) + (r-1)r^2 + (r^2 - r)r + (r^3 - r^2)(1) = 4r^3 - 3r^2$$

Donc $P(r^3 s) = P(r^3)P(s) = (4r^3 - 3r^2)(2s - 1) = r^2(4r - 3)(2s - 1)$.
Si $r^2(4r - 3)(2s - 1) = 243$, alors puisque r est un facteur premier du membre de gauche, on doit avoir $r = 3$.
Donc $3^2(4(3) - 3)(2s - 1) = 243$, ou $81(2s - 1) = 243$, ou $2s - 1 = 3$, d'où $s = 2$.
Donc $P(54) = P(3^3 \cdot 2) = 243$.

Donc $m = 82$ et $m = 54$ vérifient chacun l'équation $P(m) = 243$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2014

le mercredi 16 avril 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 17 avril 2014
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) D'après la définition, on a $8 \odot 7 = \sqrt{8+4(7)} = \sqrt{36} = 6$.

   (b) Puisque $16 \odot n = 10$, alors $\sqrt{16+4n} = 10$. Donc $16+4n = 100$ (on a élevé chaque membre au carré), ou $4n = 84$, ou $n = 21$.
   Vérification : $16 \odot n = 16 \odot 21 = \sqrt{16+4(21)} = \sqrt{100} = 10$.

   (c) On calcule d'abord la valeur de l'expression entre parenthèses :
   $9 \odot 18 = \sqrt{9+4(18)} = \sqrt{81} = 9$.
   Donc $(9 \odot 18) \odot 10 = 9 \odot 10 = \sqrt{9+4(10)} = \sqrt{49} = 7$.

   (d) D'après la définition, $k \odot k = \sqrt{k+4k} = \sqrt{5k}$.
   On doit donc résoudre l'équation $\sqrt{5k} = k$.
   On élève chaque membre au carré pour obtenir $5k = k^2$, d'où $k^2 - 5k = 0$, ou $k(k-5) = 0$.
   Donc $k = 0$ ou $k = 5$.
   Vérification pour $k = 0$: $k \odot k = 0 \odot 0 = \sqrt{0+4(0)} = \sqrt{0} = 0 = k$.
   Vérification pour $k = 5$: $k \odot k = 5 \odot 5 = \sqrt{5+4(5)} = \sqrt{25} = 5 = k$.
   Donc, les valeurs de k pour lesquelles $k \odot k = k$ sont 0 et 5.

2. (a) La position de la chanson pendant la semaine 1 ($s = 1$), est $P(1)$, c'est-à-dire $3(1)^2 - 36(1) + 110$, ou 77.

   (b) La position de la chanson est représentée par l'équation $P = 3s^2 - 36s + 110$. Cette équation définit une parabole ouverte vers le haut.
   La meilleure position de la chanson est la position la plus basse. Or, les points sur la parabole atteignent la position la plus basse au sommet de la parabole.
   On détermine l'équation canonique de la parabole en complétant le carré :

$$\begin{aligned} P &= 3s^2 - 36s + 110 \\ &= 3(s^2 - 12s) + 110 \\ &= 3(s^2 - 12s + 36 - 36) + 110 \\ &= 3(s^2 - 12s + 36) - 108 + 110 \\ &= 3(s-6)^2 + 2 \end{aligned}$$

   Le sommet de la parabole correspond à $s = 6$ et $P = 2$.

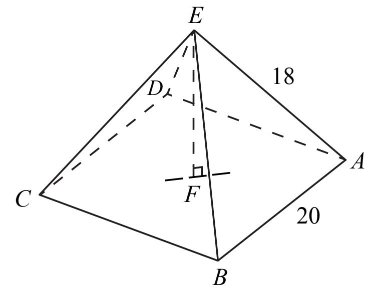
   (i) La meilleure position atteinte par la chanson « Boucle récursive » est la position 2.

   (ii) La chanson atteint cette position pendant la 6e semaine.

   (c) Pour déterminer le numéro de la dernière semaine où la chanson « Boucle récursive » parait sur la liste des 200 chansons les plus populaires, on cherche la plus grande valeur de s pour laquelle $P \leq 200$, ou $3s^2 - 36s + 110 \leq 200$.
   D'après l'équation canonique obtenue dans la partie (b), on a $3(s-6)^2 + 2 \leq 200$, ou $3(s-6)^2 \leq 198$, ou $(s-6)^2 \leq 66$.
   Pour déterminer la plus grande valeur de s pour laquelle $(s-6)^2 \leq 66$, on cherche le plus grand carré parfait inférieur à 66.
   Puisque $8^2 \leq 66$ et $9^2 > 66$, alors la plus grande valeur de s satisfait à $s - 6 = 8$. Donc $s = 14$.
   La dernière semaine où la chanson « Boucle récursive » parait sur la liste des 200 chansons les plus populaires est la semaine 14.
   Pour le vérifier, on remarque que

$$P(14) = 3(14-6)^2 + 2 = 194 \leq 200, \text{ mais que } P(15) = 3(15-6)^2 + 2 = 245 > 200.$$

3. (a) On utilisera des barres verticales pour noter l'aire d'une figure. Par exemple, $|\triangle BCE|$ est l'aire du triangle BCE.



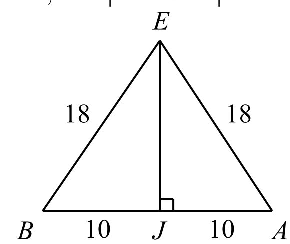
Puisque $ABCD$ est un carré et que $EA = EB = EC = ED$, les quatre faces triangulaires de la pyramide $ABCDE$ sont isométriques et elles ont donc la même aire.

L'aire totale de la pyramide $ABCDE$ est égale à la somme des aires de la base et des faces latérales, ou

$|ABCD| + |\triangle EAB| + |\triangle EBC| + |\triangle ECD| + |\triangle EDA|$ ou $|ABCD| + 4|\triangle EAB|$.

Le carré $ABCD$ a des côtés de longueur 20. Donc $|ABCD| = 20 \times 20$, ou $|ABCD| = 400$.

Pour déterminer $|\triangle EAB|$, on construit la hauteur EJ comme dans la figure ci-contre.



Puisque le triangle EAB est isocèle, EJ coupe AB en son milieu, d'où $AJ = JB = 10$.

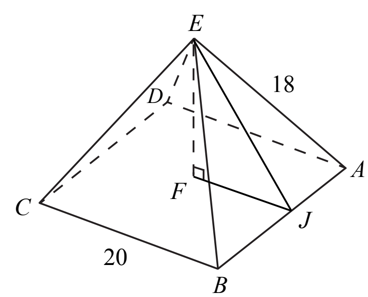
Puisque le triangle EAJ est rectangle, alors d'après le théorème de Pythagore, on a $EA^2 = AJ^2 + EJ^2$, d'où $18^2 = 10^2 + EJ^2$.

Donc $EJ = \sqrt{224}$, ou $EJ = 4\sqrt{14}$ (puisque $EJ > 0$).

$|\triangle EAB| = \frac{1}{2}(AB)(EJ)$, ou $|\triangle EAB| = \frac{1}{2}(20)(4\sqrt{14})$, ou $|\triangle EAB| = 40\sqrt{14}$.

L'aire totale de la pyramide $ABCDE$ est donc égale à $|ABCD| + 4|EAB|$, ou $400 + 4(40\sqrt{14})$, ou $400 + 160\sqrt{14}$.

(b) Comme dans la partie (b), J est le point sur AB de manière que EJ soit une hauteur du triangle EAB. Donc $EJ = 4\sqrt{14}$. Puisque EF est perpendiculaire à la base de la pyramide, alors EF est perpendiculaire à FJ, comme il est indiqué dans la figure ci-contre.



Or, F est le centre de la base $ABCD$ et J est le milieu de AB. Donc, FJ est parallèle à CB et $FJ = \frac{1}{2} \times CB$, ou $FJ = \frac{1}{2} \times 20$, ou $FJ = 10$.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle EFJ, on a $EJ^2 = EF^2 + FJ^2$, d'où $224 = EF^2 + 100$. Donc $EF = \sqrt{124}$, ou $EF = 2\sqrt{31}$ (puisque $EF > 0$).

Donc, la pyramide $ABCDE$ a une hauteur de $2\sqrt{31}$.

(c) Les points G et H sont les milieux respectifs des arêtes ED et EA.

Donc $EG = GD = EH = HA = 9$.

Le segment GH joint les milieux de deux côtés du triangle EDA. Il est donc parallèle à DA et $GH = \frac{1}{2} \times DA$, ou $GH = 10$.

(Cela découle du fait que les triangles EGH et EDA sont semblables.)

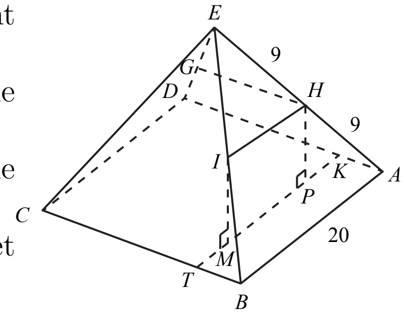
Puisque GH est parallèle à DA et que DA est parallèle à CB, alors GH est parallèle à CB.

Le quadrilatère $BCGH$ dont on cherche l'aire est donc un trapèze.

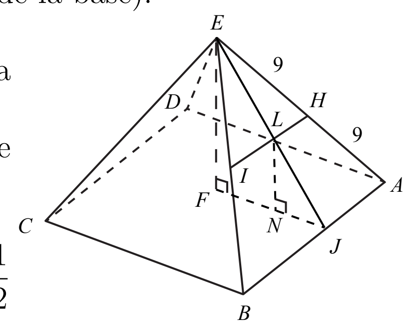
Pour déterminer l'aire du trapèze $BCGH$, on utilisera les longueurs des côtés parallèles ($GH = 10$ et $CB = 20$) et la distance entre ces côtés.

On démontrera que HT est une hauteur du trapèze et on déterminera sa longueur (voir la figure ci-dessous).

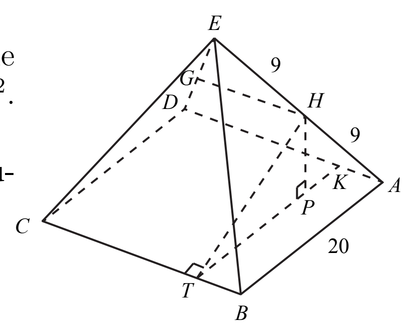
Soit I le milieu du segment EB. Puisque le segment HI joint les milieux de deux côtés du triangle EAB, alors $HI = 10$.
Soit P le point sur la base de la pyramide de manière que HP soit perpendiculaire à la base.
Soit M le point sur la base de la pyramide de manière que IM soit perpendiculaire à la base.
On prolonge MP de manière qu'il coupe l'arête BC en T et l'arête AD en K, comme dans la figure.



Par symétrie, $HP = IM$. $HPMI$ est donc un rectangle et $PM = HI = 10$.
Puisque AB est parallèle à HI et que HI est parallèle à KT (ils sont respectivement perpendiculaires à HP et IM), alors AB est parallèle à KT. $ABTK$ est donc un rectangle et $KT = AB = 20$.
Par symétrie, PM est au centre du segment KT de manière que $KP = MT = \frac{20-10}{2} = 5$ ($EA = EB$ et E est placé directement au-dessus du centre de la base).
Donc $PT = PM + MT$, d'où $PT = 10 + 5$, ou $PT = 15$.
Soit L le milieu de HI et soit N le point sur la base de la pyramide tel que LN soit perpendiculaire à la base.
Puisque F est le centre du carré et que J est le milieu de l'arête AB, alors FJ passe par le point N.
Puisque les triangles EFJ et LNJ sont semblables (ils ont deux angles égaux deux à deux), alors $\dfrac{LN}{EF} = \dfrac{LJ}{EJ} = \dfrac{1}{2}$ (puisque HI joint les milieux de deux côtés du triangle EAB).
Donc $LN = \frac{1}{2}(EF)$, d'où $LN = \frac{1}{2}(2\sqrt{31})$, ou $LN = \sqrt{31}$.



Puisque HI est parallèle à la base $ABCD$ de la pyramide (ils sont tous les deux perpendiculaires à la base), alors $HP = LN = \sqrt{31}$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle HPT, on a $HT^2 = HP^2 + PT^2$, d'où $HT^2 = (\sqrt{31})^2 + 15^2$.
Donc $HT^2 = 256$, ou $HT = 16$ (puisque $HT > 0$).
Puisque le plan contenant le triangle HPT est perpendiculaire à la base $ABCD$, alors HT est perpendiculaire à BC.
HT est donc une hauteur du trapèze $BCGH$.
Donc $|BCGH| = \frac{HT}{2}(GH + CB)$, d'où
$|BCGH| = \frac{16}{2}(10 + 20)$, ou $|BCGH| = 240$.



4. (a) Si $(4,y,z)$ est un TPP, alors $4^2 + y^2 = z^2 + 1$, ou $z^2 - y^2 = 15$, d'où $(z - y)(z + y) = 15$.
Puisque y et z sont des entiers strictement positifs, alors $(z + y)$ est un entier strictement positif et $(z - y)$ en est un aussi (puisque le produit des deux facteurs est égal à 15).
Donc, $(z - y)$ et $(z + y)$ forment une paire de facteurs de 15. Or, il y a deux telles paires, soit 1 et 15, de même que 3 et 5.
Puisque $z + y > z - y$, on obtient les deux systèmes d'équations suivants :

$$\begin{aligned} z - y &= 1 \\ z + y &= 15 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} z - y &= 3 \\ z + y &= 5 \end{aligned}$$

On additionne les deux équations du premier système, membre par membre, pour obtenir $2z = 16$, ou $z = 8$, d'où $y = 7$.
On additionne les deux équations du deuxième système, membre par membre, pour obtenir $2z = 8$, ou $z = 4$, d'où $y = 1$.

Puisqu'on doit avoir $y > 1$, cette dernière solution ne donne pas un TPP.
Le seul TPP avec $x = 4$ est $(4, 7, 8)$.

(b) Soit u, v et w des entiers strictement positifs qui représentent les longueurs des côtés du triangle UVW (la longueur u étant opposée au sommet U, celle de v étant opposée à V et celle de w étant opposée à W).
On suppose que (u, v, w) forme un TPP tel que $u^2 + v^2 = w^2 + 1$ ($u > 1$ et $v > 1$).
L'aire du triangle UVW peut être calculée à partir de la formule $A = \frac{1}{2}uv \sin W \quad (\star)$ (on développera cette formule à la fin de la solution).
On suppose que l'aire A est un entier.
On utilise la loi du cosinus dans le triangle UVW pour obtenir $w^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos W$, ou $\cos W = \dfrac{u^2 + v^2 - w^2}{2uv}$.
Puisque (u, v, w) est un TPP, alors $u^2 + v^2 = w^2 + 1$, ou $u^2 + v^2 - w^2 = 1$.
On reporte $u^2 + v^2 - w^2 = 1$ dans l'équation $\cos W = \dfrac{u^2 + v^2 - w^2}{2uv}$ pour obtenir $\cos W = \dfrac{1}{2uv}$. Puisque $\sin^2 W = 1 - \cos^2 W$, alors $\sin^2 W = 1 - \left(\dfrac{1}{2uv}\right)^2$.
On élève chaque membre de l'équation $(\star)$ au carré et on reporte $\sin^2 W = 1 - \cos^2 W$ dans la nouvelle équation pour obtenir $A^2 = \frac{1}{4}u^2v^2 \left(1 - \left(\dfrac{1}{2uv}\right)^2\right)$.
On simplifie pour obtenir $A^2 = \frac{1}{4}u^2v^2 \left(\dfrac{(2uv)^2 - 1}{(2uv)^2}\right)$, ou $A^2 = \frac{1}{4}u^2v^2 \left(\dfrac{(2uv)^2 - 1}{4u^2v^2}\right)$, ou $16A^2 = (2uv)^2 - 1$, ou $4u^2v^2 - 16A^2 = 1$.
Le membre de gauche de cette équation est divisible par 4. Il a donc une valeur paire pour tous entiers u, v et A.
Puisque le membre de droite est l'entier impair 1, l'équation n'admet aucune solution entière.
L'hypothèse que A est un entier est donc infirmée. Donc, un triangle dont les longueurs de côtés forment un TPP ne peut avoir un entier comme aire .

<u>Développement de la formule $A = \frac{1}{2}uv \sin W$</u>
Dans le triangle UVW, on abaisse une perpendiculaire à partir du sommet V jusqu'au point T sur UW (ou le prolongement de UW).
Donc, le triangle UVW a une hauteur VT qui correspond à la base UW.
Dans le triangle rectangle VWT, on a $\sin W = \dfrac{VT}{VW}$, d'où $VT = u \sin W$.
(Si l'angle W est obtus, la hauteur VT est à l'extérieur du triangle et $\sin(180^\circ - W) = \dfrac{VT}{VW}$. Donc $VT = u \sin W$ puisque $\sin(180^\circ - W) = \sin W$).
L'aire du triangle UVW est donc égale à $\frac{1}{2}(UW)(VT)$, ou $\frac{1}{2}uv \sin W$.

(c) Puisque $(5t + p, bt + q, ct + r)$ est un TPP, alors $(5t + p)^2 + (bt + q)^2 = (ct + r)^2 + 1$.
On développe : $25t^2 + 10pt + p^2 + b^2t^2 + 2bqt + q^2 = c^2t^2 + 2crt + r^2 + 1$, ou $(25 + b^2)t^2 + (10p + 2bq)t + (p^2 + q^2) = c^2t^2 + 2crt + (r^2 + 1)$.
Chaque membre de cette équation est un polynôme du second degré de variable t.
Puisque cette équation est vérifiée par tous les entiers strictement positifs t, alors les coefficients correspondants dans les deux membres sont égaux.

Donc :

$$\begin{aligned} 25+b^2 &= c^2 & (1)\\ 10p+2bq &= 2cr & (2)\\ p^2+q^2 &= r^2+1 & (3) \end{aligned}$$

L'équation (1) exprime une relation de Pythagore. Puisque b et c sont des entiers strictement positifs, le triplet pythagoricien $(5, 12, 13)$ vérifie (1), d'où $b = 12$ et $c = 13$.
(Ce sont les seules valeurs possibles de b et de c.)
On reporte $b = 12$ et $c = 13$ dans l'équation (2) et on simplifie pour obtenir
$5p + 12q = 13r$ (4).
On élève chaque membre de l'équation (4) au carré pour obtenir
$25p^2 + 120pq + 144q^2 = 169r^2$ (5).
D'après l'equation (3), on a $r^2 = p^2 + q^2 - 1$ que l'on reporte dans l'équation (5) pour obtenir $25p^2 + 120pq + 144q^2 = 169(p^2 + q^2 - 1)$, ou $144p^2 - 120pq + 25q^2 = 169$, ou $(12p - 5q)^2 = 169$, d'où $12p - 5q = \pm 13$.
On cherche des entiers strictement positifs p et q ($p \geq 100$) qui vérifient $12p - 5q = \pm 13$ ou $5q = 12p \pm 13$.
Puisque $12p$ est pair pour toute valeur entière de p et que 13 est impair, alors $12p \pm 13$ est impair. Donc, $5q$ doit être impair.
Le chiffre des unités de $5q$ est toujours un 0 ou un 5, quelle que soit la valeur de q. Puisque $5q$ est impair, le chiffre doit être un 5.
Donc, le chiffre des unités de $5q - 13$ est un 2 et celui de $5q + 13$ est un 8. Donc le chiffre des unités de $12p$ est un 2 ou un 8 (puisque $12p = 5q \pm 13$).
L'expression $12p$ ($p \geq 100$) a un chiffre des unités de 2 lorsque $p = 101$.
On reporte $p = 101$ dans l'équation $12p = 5q - 13$ pour obtenir $12(101) = 5q - 13$, ou $5q = 1225$, ou $q = 245$.
On reporte $p = 101$ et $q = 245$ dans l'équation (4) pour obtenir $r = 265$.
L'expression $12p$ ($p \geq 100$) a un chiffre des unités de 8 lorsque $p = 104$.
On reporte $p = 104$ dans l'équation $12p = 5q + 13$ pour obtenir $12(104) = 5q + 13$, ou $5q = 1235$, ou $q = 247$.
On reporte $p = 104$ et $q = 247$ dans l'équation (4) pour obtenir $r = 268$.
Donc, $(12, 13, 101, 245, 265)$ et $(12, 13, 104, 247, 268)$ sont deux 5-uplets (b, c, p, q, r) qui vérifient les conditions du problème.
(Il y a un nombre infini de solutions possibles.)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2013

le jeudi 18 avril 2013
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 19 avril 2013
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) En retirant deux billets de chaque sorte, Rad retire la somme de $2\times(5\,\$+10\,\$+20\,\$+50\,\$)$, ou $2\times(85\,\$)$, ou $170\,\$$.
Puisqu'il a retiré $175\,\$$ en tout, le seul autre billet qu'il aurait pu retirer est un billet de $5\,\$$, car $175\,\$-170\,\$=5\,\$$.
Donc, Rad a retiré trois billets de $5\,\$$, deux billets de $10\,\$$, deux billets de $20\,\$$ et deux billets de $50\,\$$. Il a donc retrié $(3+2+2+2)$ billets, ou 9 billets.

(b) Puisqu'elle retire au moins un billet de chaque sorte, Sandy retire la somme de $5\,\$+10\,\$+20\,\$+50\,\$$, ou $85\,\$$.
On connait donc quatre des cinq billets qu'elle retire et on sait qu'ils ont une valeur de $85\,\$$. Le cinquième billet peut être n'importe quelle sorte de billet.
Si le 5e billet est un billet de $5\,\$$, Sandy reçoit une somme de $85\,\$+5\,\$$, ou $90\,\$$.
Si le 5e billet est un billet de $10\,\$$, Sandy reçoit une somme de $85\,\$+10\,\$$, ou $95\,\$$.
Si le 5e billet est un billet de $20\,\$$, Sandy reçoit une somme de $85\,\$+20\,\$$, ou $105\,\$$.
Si le 5e billet est un billet de $50\,\$$, Sandy reçoit une somme de $85\,\$+50\,\$$, ou $135\,\$$.
Donc, les sommes possibles d'argent que Sandy a pu retirer sont $90\,\$$, $95\,\$$, $105\,\$$ et $135\,\$$.

(c) Lino a pu retirer au plus trois billets de $50\,\$$, puisque quatre billets de $50\,\$$ donnent une somme supérieure à celle qu'il a obtenue $(4\times 50\,\$=200\,\$>160\,\$)$.
Si Lino n'a retiré aucun billet de $50\,\$$, alors ses billets (6 billets au plus) auraient chacun une valeur de $20\,\$$ au plus, pour un total d'au plus $120\,\$$. Or ceci est impossible, puisqu'il a retiré une somme de $160\,\$$.
Si Lino a retiré un billet de $50\,\$$, alors les autres billets (5 billets au plus) auraient chacun une valeur de $20\,\$$ au plus, pour un total d'au plus $100\,\$$. Les six billets auraient donc une valeur d'au plus $50\,\$+100\,\$$, ou $150\,\$$. Or ceci est impossible, puisqu'il a retiré une somme de $160\,\$$.
On continue en considérant les cas où Lino retire deux et trois billets de $50\,\$$.
On inscrit les possibilités dans le tableau suivant.

Nbre de billets de 50 \$	Valeur des billets de 50 \$	Somme qu'il reste à combler	Nbre de billets de 20 \$	Nbre de billets de 10 \$	Nbre de billets de 5 \$	Nbre de billets utilisés
3	150 \$	10 \$		1		4
3	150 \$	10 \$			2	5
2	100 \$	60 \$	3			5
2	100 \$	60 \$	2	2		6

Chaque ligne du tableau représente une façon pour Lino de retirer une somme de $150\,\$$ en utilisant 6 billets ou moins.
Puisqu'on demande de déterminer les quatre possibilités, ce sont les quatre façons possibles.

2. (a) L'équation canonique d'une parabole, $y=(x-p)^2+q$, nous indique que le sommet a pour coordonnées (p,q).
La parabole d'équation $y=(x-3)^2+1$ a donc pour sommet $(3,1)$.

(b) *Solution 1*
L'image de la parabole, par une translation, est une parabole de même forme.
Après une translation de 3 unités vers la gauche et 3 unités vers le haut, l'image du sommet $(3,1)$ est le point $(3-3,1+3)$, ou $(0,4)$.
Puisque la nouvelle parabole a pour sommet $(0,4)$ et qu'elle est congruente à la première, elle a pour équation $y=(x-0)^2+4$, ou $y=x^2+4$.

Solution 2
Après une translation de 3 unités vers la gauche et 3 unités vers le haut, l'image de la parabole d'équation $y = (x-3)^2 + 1$ a pour équation :

$$\begin{aligned} y - 3 &= ((x+3)-3)^2 + 1 \\ y - 3 &= x^2 + 1 \\ y &= x^2 + 4 \end{aligned}$$

(c) À un point d'intersection des paraboles, les coordonnées du point vérifient les deux équations. À un tel point, la valeur de y est la même dans chaque équation. Donc :

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + 1 &= x^2 + 4 \\ x^2 - 6x + 9 + 1 &= x^2 + 4 \\ -6x &= -6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

On reporte $x = 1$ dans l'équation $y = x^2 + 4$ pour obtenir $y = 5$.
Le point d'intersection des paraboles a donc pour coordonnées $(1, 5)$.

(d) À un point d'intersection des paraboles, les coordonnées du point vérifient les deux équations. À un tel point, la valeur de y est la même dans chaque équation. Donc :

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + 1 &= ax^2 + 4 \\ x^2 - 6x + 9 + 1 &= ax^2 + 4 \\ 0 &= ax^2 - x^2 + 6x - 6 \\ 0 &= (a-1)x^2 + 6x - 6 \end{aligned}$$

Puisque les deux paraboles se touchent en exactement un point, l'équation $(a-1)x^2 + 6x - 6 = 0$ (qui est du second degré puisque $a < 0$), admet exactement une solution. Le *discriminant* de cette équation doit donc être nul.
(Remarque : Le discriminant de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ est la valeur de l'expression $b^2 - 4ac$.)
On a donc $6^2 - 4(-6)(a-1) = 0$, d'où $36 + 24(a-1) = 0$, ou $24a = -12$, ou $a = -\frac{1}{2}$.
Donc, les paraboles d'équations $y = ax^2 + 4$ et $y = (x-3)^2 + 1$ se touchent en exactement un point lorsque $a = -\frac{1}{2}$.

3. (a) Si la suite commence par 3 fois la lettre P ou plus, elle ne peut être non prédictive, car il n'y a que 2 lettres Q.
Il y a donc deux cas à considérer : la suite commence par exactement 1 P (c'est-à-dire qu'elle commence par PQ, puisque la deuxième lettre n'est pas un P), ou la suite commence par exactement 2 P (c'est-à-dire qu'elle commence par PPQ, puisque la troisième lettre n'est pas un P).

<u>1$^{\text{er}}$ cas : La suite commence par PQ</u>
Toute suite qui commence par PQ est non prédictive, car après deux lettres, le nombre de Q est égal au nombre de P. Les 7 autres lettres peuvent donc paraitre dans n'importe quel ordre.
Le nombre de suites non prédictives qui commencent par PQ, où $m = 7$ et $n = 2$, est égal au nombre de façons de placer 6 P et 1 Q dans les 7 positions suivantes.
Il y a 7 façons de la faire, car la lettre Q peut être placée dans n'importe laquelle des 7

positions (et les 6 P occupent automatiquement les autres positions).
Il y a donc 7 suites non prédictives.

2e cas : La suite commence par PPQ
Si la quatrième lettre de la suite était un P, il ne serait pas possible de former une suite non prédictive, puisqu'il n'y a que 2 Q.
La suite doit donc commencer par PPQQ.
Puisque les 5 autres lettres sont des P, il n'y a qu'une seule façon de compléter la suite.
On voit, après les quatre premiers termes, que cette suite est non prédictive.

Lorsque $m = 7$ et $n = 2$, il y a $(7 + 1)$ suites, c'est-à-dire 8 suites non prédictives qui commencent par la lettre P.

(b) Comme dans la partie (a), si $m > 2$ et $n = 2$, une suite non prédictive qui commence par la lettre P doit commencer par PQ ou par PPQQ.
Dans le cas d'une suite qui commence par PQ, il y reste $(m - 1)$ P et 1 Q à placer dans les m positions suivantes.
Puisque le Q peut être placé dans n'importe laquelle de ces m positions et que chacun de ces placements donne une seule suite, il y a m suites non prédictives qui commencent par PQ.
Dans le cas d'une suite qui commence par PPQQ, toutes les lettres qui suivent sont des P, ce qui produit une seule suite. Il y a donc 1 suite non prédictive qui commence par PPQQ.
Lorsque $m > 2$ et $n = 2$, il y a $(m + 1)$ suites non prédictives qui commencent par P.

Toute suite qui commence par Q est une suite non prédictive.
Le nombre de suites non prédictives qui commencent par Q est égal au nombre de façons de placer m fois la lettre P et 1 fois la lettre Q dans les $(m + 1)$ positions suivantes.
Il y a $(m + 1)$ façons de la faire, car le Q peut être placé dans n'importe laquelle de ces positions, ce qui produit une seule suite à chaque fois. Il y a donc $(m + 1)$ suites non prédictives qui commencent par Q.

Lorsque $n = 2$, pour toute valeur de m supérieure à 2, le nombre de suites non prédictives qui commencent par la lettre P est égal au nombre de suites non prédictives qui commencent par la lettre Q.

(c) Si la suite commence par 4 fois la lettre P ou plus, elle ne peut être non prédictive, car il n'y a que 3 lettres Q. (Le nombre de Q ne peut jamais rattraper le nombre de P.)
On considère les cas selon que la suite commence par 0 P, 1 P, 2 P ou 3 P.

1er cas : La suite commence par Q (elle commence par 0 P)
Toute suite qui commence par Q est non prédictive.
Le nombre de suites non prédictives qui commencent par Q est donc égal au nombre de façons de placer les 10 P et les 2 Q qui restent dans les 12 positions suivantes.
On considère le nombre de façons de placer les 2 Q (les autres positions étant automatiquement remplies par des P).
Il y a 12 positions où placer le premier Q. Dans chaque cas, il y a 11 positions qui restent où placer le deuxième Q. Il semble donc y avoir 12×11 façons de placer les 2 Q.
Or, puisque les 2 Q sont identiques, chaque façon a été comptée deux fois.
(Par exemple, si on a placé le 1er Q dans la position 4 et le 2e Q dans la position 7, on obtient le même résultat que si on a placé le 1er Q dans la position 7 et le 2e Q dans la position 4.)
Donc dans ce cas, le nombre de façons de placer les 2 Q est égal à $\frac{12 \times 11}{2}$, ou 66. Il y a donc 66 suites non prédictives.

2^{e} cas : La suite commence par PQ

Toute suite qui commence par PQ est non prédictive.
Le nombre de suites non prédictives qui commencent par PQ est donc égal au nombre de façons de placer les 9 P et les 2 Q dans les 11 positions suivantes.
On considère le nombre de façons de placer les 2 Q (les autres positions étant automatiquement remplies par des P).
On utilise le même argument que dans le 1er cas pour conclure que le nombre de façons est égal à $\frac{11 \times 10}{2}$, ou 55.

3^{e} cas : La suite commence par PPQ

Si la suite commence par PPQ, la 4^{e} lettre peut être un Q ou un P.
Toute suite qui commence par PPQQ est non prédictive. Une suite qui commence par PPQP n'est prédictive que si elle commence par PPQPQQ (Défi : vérifier que c'est vrai.)
Le nombre de suites non prédictives qui commencent par PPQQ est donc égal au nombre de façons de placer les 8 P et 1 Q dans les 9 positions suivantes.
Il y a 9 façons de le faire, car le Q peut être placé dans n'importe laquelle de ces positions, ce qui produit une seule suite à chaque fois. Il y a donc 9 suites non prédictives qui commencent par PPQQ.
Il y a 1 seule suite non prédictive qui commence par PPQPQQ, puisque les 7 lettres qui suivent sont des P.
Donc dans ce cas, le nombre de suites non prédictives est égal à $9 + 1$, ou 10.

4^{e} cas : La suite commence par PPPQ

Puisqu'il ne reste que 2 autres Q, la suite doit commencer par PPPQQQ pour être non prédictive.
Il y a 1 seule suite non prédictive qui commence par PPPQQQ, puisque les 7 positions suivantes doivent être occupées par des P.
Dans ce cas, il y a 1 seule suite non prédictive.

Lorsque $m = 10$ et $n = 2$, le nombre de suites non prédictives est égal à $66 + 55 + 10 + 1$, ou 132.

4. (a) Puisque les arêtes d'un cube ont une longueur de 1 cm, le prisme a une hauteur de 1 cm, une largeur de 4 cm et une longueur de 5 cm.
La face supérieure du prisme mesure 5 cm sur 4 cm. Elle a donc une aire de 20 cm^2.
De même, la face inférieure du prisme a une aire de 20 cm^2.
La face avant et la face arrière du prisme mesurent 4 cm sur 1 cm. Elles ont donc chacune une aire de 4 cm^2.
Les deux autres faces latérales du prisme mesurent 5 cm sur 1 cm. Elles ont donc chacune une aire de 5 cm^2.
Puisque $2 \times (20 + 4 + 5) = 2 \times 29 = 58$, le prisme a une aire totale de 58 cm^2.

(b) Soit L cm la longueur du prisme et l cm sa largeur, $L \geq l$.
La face supérieure du prisme a donc une aire de $(L \times l)$ cm^2, la face avant a une aire de $(l \times 1)$ cm^2 et une autre face latérale a une aire de $(L \times 1)$ cm^2.
L'aire totale du prisme est donc égale à $2 \times (Ll + l + L)$ cm^2.
Puisque l'aire totale est de 180 cm^2, alors $2 \times (Ll + l + L) = 180$, d'où $Ll + l + L = 90$.
On ajoute 1 à chaque membre de l'équation pour obtenir $Ll + l + L + 1 = 91$, ou $l(L + 1) + 1(L + 1) = 91$.
Le facteur commun nous permet d'écrire l'équation sous forme factorisée,
soit $(l + 1)(L + 1) = 91$.

Puisque L et l sont des entiers strictement positifs, $(l+1)(L+1)$ est le produit de deux entiers strictement positifs.
Or le membre de droite, 91, peut être exprimé comme produit de deux entiers positifs de deux façons, 1×91 et 7×13.
Puisque l et L sont des entiers strictement positifs, alors $2 \leq (l+1) \leq (L+1)$ et aucun des facteurs ne peut être égal à 1.
Donc $(l+1) = 7$ et $(L+1) = 13$ (puisque $L \geq l$). Donc $l = 6$ et $L = 12$.
Puisque le prisme à base rectangulaire a une largeur de 6 cubes et une longueur de 12 cubes, il est formé de 6×12 cubes, ou 72 cubes.

(c) Comme dans la partie (b), l'aire totale du prisme, avant qu'on enlève le prisme intérieur, est de $2 \times (Ll + l + L)$ cm^2.
Pour déterminer l'aire totale du cadre, il faut tenir compte de l'aire perdue et de l'aire ajoutée lorsqu'on enlève le prisme intérieur.

L'aire perdue est l'aire des faces avant et arrière du petit prisme.
Puisque le prisme initial avait une largeur de l cm et que le prisme intérieur est situé à k cm de chaque côté du prisme initial, alors le prisme intérieur a une largeur de $(l-2k)$ cm.
De même, le prisme intérieur a une longueur de $(L-2k)$ cm.
(On remarque que $l - 2k > 0$ et $L - 2k > 0$. Donc $l > 2k$ et $L > 2k$.)
L'aire perdue, lorsqu'on enlève le prisme intérieur, est égale à $2 \times (l-2k) \times (L-2k)$ cm^2.

L'aire ajoutée, lorsqu'on enlève le prisme intérieur, est égale à l'aire des faces supérieure, inférieure, gauche et droite du prisme intérieur.
Puisque le prisme intérieur a une largeur de $(l-2k)$ cm et une épaisseur de 1 cm, les faces supérieure et inférieure de ce prisme ont aire totale de $2 \times (l-2k) \times 1$ cm^2.
De même, puisque le prisme intérieur a une longueur de $(L-2k)$ cm et une épaisseur de 1 cm, alors la face gauche et la face droite ont une aire totale de $2 \times (L-2k) \times 1$ cm^2.

Pour résumer, le prisme initial a une aire totale de $2 \times (Ll + l + L)$ cm^2.
L'aire perdue, lorsqu'on enlève le prisme intérieur, est égale à
$2 \times (l-2k) \times (L-2k)$ cm^2.
L'aire ajoutée, lorsqu'on enlève le prisme intérieur, est égale à
$(2 \times (l-2k) \times 1 + 2 \times (L-2k) \times 1)$ cm^2, ou $2 \times (l - 2k + L - 2k)$ cm^2,
ou $2 \times (l + L - 4k)$ cm^2.
L'aire totale du cadre, en cm^2, est donc égale à :

$$2 \times (Ll + l + L) - 2 \times (l-2k) \times (L-2k) + 2 \times (l + L - 4k)$$

Puisque le cadre a une aire totale de 532 cm^2, on a :

$$\begin{aligned}
2 \times (Ll + l + L) - 2 \times (l-2k) \times (L-2k) + 2 \times (l + L - 4k) &= 532 \\
Ll + l + L - (l-2k) \times (L-2k) + (l + L - 4k) &= \tfrac{532}{2} \\
Ll + l + L - (Ll - 2kl - 2kL + 4k^2) + (l + L - 4k) &= 266 \\
2l + 2L + 2kl + 2kL - 4k^2 - 4k &= 266 \\
l + L + kl + kL - 2k^2 - 2k &= \tfrac{266}{2} \\
kl + kL - 2k^2 + l + L - 2k &= 133 \\
k(l + L - 2k) + 1(l + L - 2k) &= 133 \\
(l + L - 2k)(k+1) &= 133
\end{aligned}$$

Puisque $l > 2k$ et $L > 2k$ et que l, L et k sont des entiers strictement positifs, alors $(l + L - 2k)$ est un entier strictement positif.

Donc $(l + L - 2k)(k + 1)$ est le produit de deux entiers strictement positifs.
Il y a deux façons d'exprimer 133 comme produit de deux entiers positifs, soit 1×133 et 7×19.
Or $(k + 1) > 1$ et puisque k est un entier strictement positif, alors
$(l + L - 2k) > 2k + 2k - 2k$, c'est-à-dire que $(l + L - 2k) > 2k > 1$.
Donc $(k + 1) \neq 1$ et $(l + L - 2k) \neq 1$. On doit donc avoir $k + 1 = 7$ ou $k + 1 = 19$.
Si $k + 1 = 7$, alors $k = 6$ et on a $l + L - 2k = 19$, ou $l + L - 12 = 19$, ou $l + L = 31$.
Puisque $l > 2k = 12$, on cherche toutes les valeurs possibles de l et L pour lesquelles $l \geq 13$, $L \geq l$ et $l + L = 31$.
Les couples (l, L) possibles sont $(13, 18), (14, 17)$ et $(15, 16)$.

Si $k + 1 = 19$, alors $k = 18$ et on a $l + L - 2k = 7$, ou $l + L - 36 = 19$, ou $l + L = 55$.
Puisque $l > 2k = 36$, alors $L < 55 - 36 = 29$, ce qui est impossible puisque $L \geq l$.
Les seules valeurs possibles de l et L pour lesquelles le cadre a une aire totale de 532 cm^2 sont 13 et 18, 14 et 17, 15 et 16.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2012

le jeudi 12 avril 2012
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2012
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Le triangle PTQ est rectangle en T. D'après le théorème de Pythagore, $PQ^2 = 32^2 + 24^2$, ou $PQ^2 = 1024 + 576$, ou $PQ^2 = 1600$. Puisque $PQ > 0$, $PQ = 40$.

   (b) Le triangle QTR est rectangle en T. D'après le théorème de Pythagore, $51^2 = TR^2 + 24^2$, ou $TR^2 = 2601 - 576$, ou $TR^2 = 2025$. Puisque $TR > 0$, $TR = 45$.
   Or, $PR = PT + TR$, d'où $PR = 32 + 45$, ou $PR = 77$.
   Dans le triangle PQR, QT est perpendiculaire à la base PR. Donc, l'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2} \times (PR) \times (QT)$, ou $\frac{1}{2} \times 77 \times 24$, ou 924.

   (c) D'après la partie (b), PR a une longueur de 77.
   Puisque $QS : PR = 12 : 11$, alors $\dfrac{QS}{77} = \dfrac{12}{11}$, d'où $QS = 77 \times \dfrac{12}{11}$, ou $QS = 84$.
   Donc $TS = QS - QT$, d'où $TS = 84 - 24$, ou $TS = 60$.
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PTS, $PS = \sqrt{32^2 + 60^2}$, ou $PS = \sqrt{4624}$, ou $PS = 68$, puisque $PS > 0$.
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle RTS, $RS = \sqrt{45^2 + 60^2}$, ou $RS = \sqrt{5625}$, ou $RS = 75$, puisque $RS > 0$.
   Le quadrilatère $PQRS$ a donc un périmètre de $40 + 51 + 75 + 68$, ou 234.

2. (a) On développe : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) + 2ab$.
   Puisque $a^2 + b^2 = 24$ et $ab = 6$, alors $(a+b)^2 = 24 + 2(6)$, ou $(a+b)^2 = 36$.

   (b) On développe : $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x^2 + y^2) + 2xy$.
   Puisque $(x+y)^2 = 13$ et $x^2 + y^2 = 7$, alors $13 = 7 + 2xy$, d'où $2xy = 6$, ou $xy = 3$.

   (c) On développe : $(j+k)^2 = j^2 + 2jk + k^2 = (j^2 + k^2) + 2jk$.
   Puisque $j + k = 6$ et $j^2 + k^2 = 52$, alors $6^2 = 52 + 2jk$, d'où $2jk = -16$, ou $jk = -8$.

   (d) On développe : $(m^2 + n^2)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^4 + n^4) + 2m^2n^2$.
   Puisque $m^2 + n^2 = 12$ et $m^4 + n^4 = 136$, alors $12^2 = 136 + 2m^2n^2$, d'où $2m^2n^2 = 8$, ou $m^2n^2 = 4$. Donc $mn = \pm 2$.

3. (a) Puisque $\angle MON = 90^\circ$, les pentes de NO et de OM ont un produit de -1.
   La pente de NO est égale à $\dfrac{n^2 - 0}{n - 0}$, ou n, puisque $n \neq 0$ (les points N et O étant distincts).
   La pente de OM est égale à $\dfrac{\frac{1}{4} - 0}{\frac{1}{2} - 0}$, ou $\dfrac{1}{2}$.
   Donc $n \times \dfrac{1}{2} = -1$, ou $n = -2$.

   (b) Puisque $\angle ABO = 90^\circ$, les pentes de BA et de BO ont un produit de -1.
   La pente de BA est égale à $\dfrac{b^2 - 4}{b - 2}$, ou $\dfrac{(b-2)(b+2)}{b-2}$, ou $b + 2$, puisque $b \neq 2$ (A et B étant distincts).
   La pente de BO est égale à $\dfrac{b^2 - 0}{b - 0}$, ou b, puisque $b \neq 0$ (B et O étant distincts).
   Donc $(b+2) \times b = -1$, ou $b^2 + 2b + 1 = 0$.
   Donc $(b+1)(b+1) = 0$, d'où $b = -1$.

   (c) Puisque $\angle PQR = 90^\circ$, les pentes de PQ et de RQ ont un produit de -1.
   La pente de PQ est égale à $\dfrac{p^2 - q^2}{p - q}$, ou $\dfrac{(p-q)(p+q)}{p-q}$, ou $p + q$, puisque $p \neq q$ (P et Q étant distincts).

La pente de RQ est égale à $\dfrac{r^2-q^2}{r-q}$, ou $\dfrac{(r-q)(r+q)}{r-q}$, ou $r+q$, puisque $r \neq q$ (R et Q étant distincts).
Donc $(p+q) \times (r+q) = -1$.
Puisque p, q et r sont des entiers, $p+q$ et $r+q$ le sont aussi.
Or $(p+q) \times (r+q) = -1$ si $p+q = 1$ et $r+q = -1$ ou si $p+q = -1$ et $r+q = 1$ (ce sont les seules possibilités pour des entiers p, q, et r qui vérifient $(p+q) \times (r+q) = -1$).
Dans le premier cas, on additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $p+q+r+q = 1+(-1)$, ou $2q+p+r = 0$.
Dans le deuxième cas, on additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $p+q+r+q = -1+1$, ou $2q+p+r = 0$.
Dans les deux cas, on obtient $2q+p+r = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

4. (a) Puisque p est un nombre premier impair, alors $p > 2$.
Puisque les seuls diviseurs premiers de $2p^2$ sont 2 et p, alors les diviseurs positifs de $2p^2$ sont 1, 2, p, $2p$, p^2 et $2p^2$.
Donc $S(2p^2) = 1+2+p+2p+p^2+2p^2$, ou $S(2p^2) = 3p^2+3p+3$.
Or $S(2p^2) = 2613$. Donc $3p^2+3p+3 = 2613$, ou $3p^2+3p-2610 = 0$, ou $p^2+p-870 = 0$.
Donc $(p+30)(p-29) = 0$, d'où $p = 29$ ($p \neq -30$ puisque p est un nombre premier impair).

(b) Soit $m = 2p$ et $n = 9q$, p et q étant des nombres premiers supérieurs à 3.
Les diviseurs positifs de m sont donc 1, 2, p et $2p$ (puisque $p > 3$).
Donc $S(m) = 1+2+p+2p$, ou $S(m) = 3p+3$.
Les diviseurs positifs de n sont 1, 3, q, $3q$, 9 et $9q$ (puisque $q > 3$).
Donc $S(n) = 1+3+9+q+3q+9q$, ou $S(n) = 13q+13$.
Puisque $S(m) = S(n)$, alors $3p+3 = 13q+13$, ou $3p-13q = 10$.
Or puisque m et n sont des entiers consécutifs, alors $m-n = 1$ ou $n-m = 1$.

Si $m-n = 1$, alors $2p-9q = 1$.
On résout le système suivant de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned} 2p-9q &= 1 \qquad (1)\\ 3p-13q &= 10 \qquad (2) \end{aligned}$$

On multiplie les membres de l'équation (1) par 3 et ceux de l'équation (2) par 2 pour obtenir :

$$\begin{aligned} 6p-27q &= 3 \qquad (3)\\ 6p-26q &= 20 \qquad (4) \end{aligned}$$

On soustrait l'équation (3) de l'équation (4), membre par membre, pour obtenir $q = 17$.
On reporte $q = 17$ dans l'équation (1) pour obtenir $2p-9(17) = 1$, ou $2p = 154$, ou $p = 77$.
Or, puisque p est un nombre premier, cette solution est rejetée.
Il n'y a donc aucune solution lorsque $m-n = 1$.

Si $n-m = 1$, alors $9q-2p = 1$.
On résout le système suivant de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned} 9q-2p &= 1 \qquad (5)\\ 3p-13q &= 10 \qquad (6) \end{aligned}$$

On multiplie les membres de l'équation (5) par 3 et ceux de l'équation (6) par 2 pour obtenir :

$$\begin{aligned} 27q - 6p &= 3 \qquad (7) \\ 6p - 26q &= 20 \qquad (8) \end{aligned}$$

On additionne les équations (7) et (8), membre par membre, pour obtenir $q = 23$.
On reporte $q = 23$ dans l'équation (6) pour obtenir $3p - 13(23) = 10$, ou $3p = 309$, ou $p = 103$.
Puisque $q = 23$ et $p = 103$ sont des nombres premier supérieurs à 3, alors $m = 2(103)$ et $n = 9(23)$, c'est-à-dire $m = 206$ et $n = 207$ sont le seul couple d'entiers consécutifs qui vérifient les conditions de l'énoncé.

(c) Puisque les seuls diviseurs premiers de p^3q sont p et q, les seuls diviseurs positifs de p^3q sont 1, p, q, pq, p^2, p^2q, p^3 et p^3q (puisque p et q sont des nombres premiers distincts).
Donc $S(p^3q) = p^3q + p^3 + p^2q + p^2 + pq + p + q + 1$.
On factorise :

$$\begin{aligned} S(p^3q) &= p^3q + p^3 + p^2q + p^2 + pq + p + q + 1 \\ &= (p^3q + p^2q + pq + q) + (p^3 + p^2 + p + 1) \\ &= q(p^3 + p^2 + p + 1) + (p^3 + p^2 + p + 1) \\ &= (q + 1)(p^3 + p^2 + p + 1) \\ &= (q + 1)(p^2(p + 1) + (p + 1)) \\ &= (q + 1)(p + 1)(p^2 + 1) \end{aligned}$$

On cherche le nombre de couples d'entiers premiers distincts, p et q, chacun inférieur à 30, pour lesquels $(q + 1)(p + 1)(p^2 + 1)$ n'est pas divisible par 24.
Il y a 10 nombres premiers inférieurs à 30, soit 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.
Donc, le nombre de couples (p, q) possibles, $p \neq q$, est égal à 10×9, ou 90.
On considère les couples (p, q) pour lesquels $(q + 1)(p + 1)(p^2 + 1)$ *est* divisible par 24 et on soustraira leur nombre de 90.

Si p ou q est égal à 23, alors 24 est un diviseur de $(q + 1)(p + 1)(p^2 + 1)$.
Il y a 9 couples de la forme $(23, q)$ et 9 couples de la forme $(p, 23)$, pour un total de 18 couples. Ceci tient compte de toutes les possibilités avec le nombre premier 23. On peut donc le retirer de notre liste des 10 nombres premiers.

Puisque $24 = 2^3 \times 3$, on peut déterminer les valeurs possibles de q qui correspondent à une valeur particulière de p en considérant que chacun de ces facteurs premiers (trois 2 et un 3) doit paraître dans la factorisation première $(q + 1)(p + 1)(p^2 + 1)$.
Par exemple, si $p = 2$, alors $(q + 1)(p + 1)(p^2 + 1) = (q + 1)(3)(5)$.
Donc pour que $(q+1)(p+1)(p^2+1)$ soit un multiple de 24, $q+1$ doit être un multiple de 8 (puisqu'il manque 2^3).
Donc lorsque $p = 2$, la seule valeur possible de q est 7 (on l'obtient en considérant les 8 autres valeurs dans la liste des nombres premiers).
On organise les valeurs possibles de p (et les valeurs de q qui en résultent) dans le tableau suivant :

p	$(p+1)(p^2+1)$	$q+1$ doit être un multiple de	q (différents de p)	N^{bre} de couples
2	$(3)(5)$	$2^3 = 8$	$q = 7$	1
3	$(4)(10) = 2^3 \times 5$	3	$q = 2, 5, 11, 17, 29$	5
5	$(6)(26) = 2^2 \times 3 \times 13$	2	$q = 3, 7, 11, 13, 17, 19, 29$	7
7	$(8)(50) = 2^3 \times 50$	3	$q = 2, 5, 11, 17, 29$	5
11	$(12)(122) = 2^3 \times 3 \times 61$	toutes valeurs de q	$q = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 29$	8
13	$(14)(170) = 2^2 \times 595$	$2 \times 3 = 6$	$q = 5, 11, 17, 29$	4
17	$(18)(290) = 2^2 \times 3 \times 435$	2	$q = 3, 5, 7, 11, 13, 19, 29$	7
19	$(20)(362) = 2^3 \times 905$	3	$q = 2, 5, 11, 17, 29$	5
29	$(30)(842) = 2^2 \times 3 \times 2105$	2	$q = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$	7

Le nombre total de couples (p, q) pour lesquels 24 est un diviseur de $S(p^3q)$ est égal à :

$$18 + 1 + 5 + 7 + 5 + 8 + 4 + 7 + 5 + 7 = 67$$

Donc, le nombre de couples d'entiers premiers distincts, p et q, chacun inférieur à 30, pour lesquels $S(p^3q)$ *n'est pas* divisible par 24, est égal à $90 - 67$, ou 23.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Concours Hypatie 2011

le mercredi 13 avril 2011

Solutions

1. (a) Puisque D est le milieu du segment AB, ses coordonnées sont $(\frac{1}{2}(0+0), \frac{1}{2}(0+6))$, ou $(0, 3)$.
La droite qui passe aux points C et D a pour pente $\frac{3-0}{0-8}$, ou $-\frac{3}{8}$.
L'ordonnée à l'origine de la droite est l'ordonnée du point D, soit 3.
La droite qui passe aux points C et D a pour équation $y = -\frac{3}{8}x + 3$.

(b) Puisque E est le milieu du segment BC, ses coordonnées sont $(\frac{1}{2}(8+0), \frac{1}{2}(0+0))$, ou $(4, 0)$.
La droite qui passe aux points A et E a pour pente $\frac{6-0}{0-4}$, ou $-\frac{6}{4}$, ou $-\frac{3}{2}$.
L'ordonnée à l'origine de la droite est l'ordonnée du point A, soit 6.
Donc, la droite qui passe aux points A et E a pour équation $y = -\frac{3}{2}x + 6$.
Le point F est le point d'intersection des droites d'équations $y = -\frac{3}{8}x + 3$ et $y = -\frac{3}{2}x + 6$.
Au point d'intersection F, les deux équations ont la même valeur de y :

$$\begin{aligned} -\tfrac{3}{8}x + 3 &= -\tfrac{3}{2}x + 6 \\ 8(-\tfrac{3}{8}x + 3) &= 8(-\tfrac{3}{2}x + 6) \\ -3x + 24 &= -12x + 48 \\ 9x &= 24 \end{aligned}$$

Le point F a donc pour abscisse $\frac{24}{9}$, ou $x = \frac{8}{3}$.
On reporte $x = \frac{8}{3}$ dans l'équation $y = -\frac{3}{2}x + 6$ et on obtient $y = -\frac{3}{2} \times \frac{8}{3} + 6$, ou $y = 2$.
Les coordonnées du point F sont $(\frac{8}{3}, 2)$.

(c) Le triangle DBC a une base BC de longueur 8 et une hauteur correspondante BD de longueur 3.
Donc, le triangle DBC a une aire de $\frac{1}{2} \times 8 \times 3$, ou 12.

(d) L'aire du quadrilatère $DBEF$ est égale à l'aire du triangle DBC moins celle du triangle FEC.
Le triangle FEC a une base EC de longueur 4, puisque $BC = 8$ et $BE = 4$. De plus, sa hauteur correspondante est égale à l'ordonnée du point F, soit 2.
Donc, l'aire du triangle FEC est égale à $\frac{1}{2} \times 4 \times 2$, ou 4.
L'aire du quadrilatère $DBEF$ est égale à $12 - 4$, ou 8.

2. (a) Puisque le chiffre des dizaines est 3, on considère les possibilités pour le chiffre des unités.
Puisque le 0 et le 9 ne peuvent pas être utilisés, il y a 8 choix pour le chiffre des unités.
Or, si le chiffre des unités est un 3, le nombre obtenu, 33, est un multiple de 11, ce qui est interdit.
Puisque 33 est le seul multiple de 11 parmi les nombres de 31 à 38, chacun des 7 autres choix pour le chiffre des unités est permis.
Il y a 7 nombres dans S qui ont un chiffre des dizaines égal à 3.
On remarque que cet argument peut être utilisé pour montrer qu'il y a 7 nombres dans S pour chacun des chiffres des dizaines de 1 à 8.
Ce sera utile pour résoudre la partie (d).

(b) Puisque le chiffre des unités est 8, on considère les possibilités pour le chiffre des dizaines.
Puisque le 0 et le 9 ne peuvent pas être utilisés, il y a 8 choix pour le chiffre des dizaines.
Or, si le chiffre des dizaines est un 8, le nombre obtenu, 88, est un multiple de 11, ce qui interdit.
Puisque 88 est le seul multiple de 11 parmi les nombres ayant un chiffre des unités égal à 8, chacun des 7 autres choix pour le chiffre des dizaines est permis.
Il y a 7 nombres dans S qui ont un chiffre des unités égal à 8.

On remarque que cet argument peut être utilisé pour montrer qu'il y a 7 nombres dans S pour chacun des chiffres des unités de 1 à 8.
Ce sera utile pour résoudre la partie (d).

(c) *Solution 1*
Puisque les chiffres 0 et 9 ne peuvent pas être utilisés, il y a 8 choix pour le chiffre des dizaines. Pour chacun de ces choix, il y a 8 choix pour le chiffre des unités, pour un total de 64 nombres. Or, lorsque les deux chiffres sont égaux, le nombre est divisible par 11. Les nombres 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77 et 88 doivent donc être exclus. Il reste 56 nombres $(64 - 8 = 56)$.
Il y a donc 56 nombres dans S.

Solution 2
Puisque les chiffres 0 et 9 ne peuvent pas être utilisés, il y a 8 choix pour le chiffre des dizaines. Pour chacun de ces choix, il semble y avoir 8 choix pour le chiffre des unités, mais on ne doit pas choisir le même chiffre que le chiffre des dizaines, car on obtiendrait un nombre divisible par 11.
Donc pour chaque choix du chiffre des dizaines, on doit exclure le 0, le 9 et le chiffre des dizaines lorsqu'on choisit le chiffre des unités. Pour chaque choix du chiffre des dizaines, il y a 7 choix pour le chiffre des unités.
Le nombre total de choix est donc égal à 8×7, ou 56.
Il y a 56 nombres dans S.

(d) *Solution 1*
Dans la partie (a), on a vu que pour chacun des chiffres des dizaines de 1 à 8, il y a 7 nombres dans S qui ont ce chiffre des dizaines.
Donc parmi les 56 nombres de S, il y en a 7 qui ont un chiffre des dizaines égal à 1, 7 qui ont un chiffre des dizaines égal à 2, et ainsi de suite.
Dans la partie (b), on a vu que pour chacun des chiffres des unités de 1 à 8, il y a 7 nombres dans S qui ont ce chiffre des unités.
Donc parmi les 56 nombres de S, il y en a 7 qui ont un chiffre des unités égal à 1, 7 qui ont un chiffre des unités égal à 2, et ainsi de suite.
On déterminera la somme des 56 nombres de S en additionnant les chiffres des unités et les chiffres des dizaines séparément.
On considère d'abord les chiffres des unités des nombres de S.
Chacun des nombres de 1 à 8 paraît 7 fois comme chiffre des unités.
La somme des entiers de 1 à 8, soit $1+2+3+4+5+6+7+8$, est égale à $\frac{(8)(9)}{2}$, ou 36.
Puisque chacun de ces nombres paraît 7 fois, la somme des chiffres des unités des nombres de S est égale à 7×36, ou 252.
On considère maintenant les chiffres des dizaines des nombres de S.
Chacun des entiers de 1 à 8 paraît 7 fois comme chiffre des dizaines. La somme des entiers de 1 à 8 est égale à 36.
Puisque chacun de ces nombres paraît 7 fois, la somme des chiffres des dizaines des nombres de S est égale à 252.
Puisque ces chiffres représentent des dizaines, ils contribuent 10×252, ou 2520, au total.
Les chiffres des unités contribuent 252 au total et les chiffres des dizaines contribuent 2520 au total. En tout, cela fait 2772.
Donc, la somme de tous les nombres dans S est égale à 2772.

Solution 2
On laisse de côté la deuxième restriction qui exclut les multiples de 11. On cherche donc la somme des nombres du tableau suivant :

$$\begin{array}{cccccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 81 & 82 & 83 & 84 & 85 & 86 & 87 & 88 \end{array}$$

La somme des nombres de la 1re rangée est égale à $8 \times \frac{11+18}{2}$, ou 116.
Chaque nombre de la 2e rangée est 10 de plus que le nombre correspondant de la 1re rangée. La somme des nombres de la 2e rangée est donc égale à $116 + 80$, ou 196.
De même, la somme des nombres de chaque rangée est 80 de plus que celle de la rangée précédente. La somme des nombres du tableau est donc égale à
$116 + 196 + 276 + 356 + 436 + 516 + 596 + 676$, ou $8 \times \frac{116+676}{2}$, ou 3168.
On doit maintenant exclure les multiples de 11.
Or, $11 + 22 + 33 + 44 + 55 + 66 + 77 + 88$ est égal à $8 \times \frac{11+88}{2}$, ou 396.
Donc, la somme des nombres de S est égale à $3168 - 396$, ou 2772.

3. (a) *Solution 1*
Puisque $(50, y, z)$ est un triplet Trenti, alors $3(50) = 5y = 2z$, ou $150 = 5y = 2z$.
Puisque $150 = 5y$, alors $y = 30$. Puisque $150 = 2z$, alors $z = 75$.
Le triplet Trenti est $(50, 30, 75)$.

Solution 2
Soit $3x = 5y = 2z = k$.
Puisque x, y et z sont des entiers strictement positifs, alors k est un entier strictement positif qui est divisible par 3, par 5 et par 2.
Tout entier strictement positif qui est divisible par 3, par 5 et par 2 est divisible par le plus petit commun multiple de ces nombres, soit 30.
Puisque k est divisible par 30, il existe un entier strictement positif m tel que $k = 30m$.
Donc $3x = 5y = 2z = 30m$, d'où $x = 10m$, $y = 6m$ et $z = 15m$.
Puisque $x = 50$, alors $50 = 10m$, d'où $m = 5$.
Donc $y = 6 \times 5$ et $z = 15 \times 5$, d'où $y = 30$ et $z = 75$.
Le triplet Trenti est $(50, 30, 75)$.

(b) *Solution 1*
Puisque $3x = 5y$, $x = \frac{5}{3}y$.
Puisque x est un entier strictement positif, $\frac{5}{3}y$ l'est aussi.
Puisque 5 n'est pas divisible par 3, alors y est divisible par 3.
Puisque $5y = 2z$, $z = \frac{5}{2}y$.
Puisque z est un entier strictement positif, $\frac{5}{2}y$ l'est aussi.
Puisque 5 n'est pas divisible par 2, y est divisible par 2.
Puisque y est divisible par 2 et par 3, il est divisible par 6.
Donc dans tout triplet Trenti (x, y, z), y doit être divisible par 6.

Solution 2
Dans la Solution 2 de la partie (a), on a vu que $y = 6m$, m étant un entier strictement positif. Donc dans tout triplet Trenti (x, y, z), y doit être divisible par 6.

(c) *Solution 1*
D'après la partie (b), on sait que dans tout triplet Trenti (x, y, z), y est divisible par 6.
On utilise la méthode de la Solution 1 de la partie (b) pour montrer que dans tout triplet

Trenti (x, y, z), x est divisible par 10.
Puisque $3x = 5y$, $y = \frac{3}{5}x$.
Puisque y est un entier strictement positif, $\frac{3}{5}x$ l'est aussi.
Puisque 3 n'est pas divisible par 5, x est divisible par 5.
Puisque $3x = 2z$, $z = \frac{3}{2}x$.
Puisque z est un entier strictement positif, $\frac{3}{2}x$ l'est aussi.
Puisque 3 n'est pas divisible par 2, x est divisible par 2.
Puisque x est divisible par 2 et par 5, il est divisible par 10.
Donc dans tout triplet Trenti (x, y, z), x est divisible par 10.
De la même manière, on montre que dans tout triplet Trenti (x, y, z), z est divisible par 15.
Puisque $3x = 2z$, $x = \frac{2}{3}z$.
Puisque x est un entier strictement positif, $\frac{2}{3}z$ l'est aussi.
Puisque 2 n'est pas divisible par 3, z est divisible par 3.
Puisque $5y = 2z$, $y = \frac{2}{5}z$.
Puisque y est un entier strictement positif, $\frac{2}{5}z$ l'est aussi.
Puisque 2 n'est pas divisible par 5, z est divisible par 5.
Puisque z est divisible par 3 et par 5, il est divisible par 15.
Donc dans tout triplet Trenti (x, y, z), z est divisible par 15.
Puisque dans tout triplet Trenti (x, y, z), y est divisible par 6, x est divisible par 10 et z est divisible par 15, alors leur produit xyz est divisible par $6 \times 10 \times 15$, ou 900.

Solution 2
Dans la Solution 2 de la partie (b), on a vu qu'il existe un entier strictement positif m tel que $x = 10m$, $y = 6m$ and $z = 15m$.
Le produit xyz est égal à $(10m)(6m)(15m)$, ou $900m^3$. Il est donc divisible par 900.
Donc dans tout triplet Trenti (x, y, z), le produit xyz est divisible par 900.

4. (a) $F(8) = 6$, puisque :

$$\begin{aligned} 8 &= 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1+3 \\ &= 1+1+3+3 \\ &= 1+1+1+5 \\ &= 3+5 \\ &= 1+7 \end{aligned}$$

(b) Toute façon d'exrimer un nombre n comme somme d'entiers positifs impairs sera appelée une *représentation* de n.
Il y a donc $F(n)$ représentations de n.
Étant donné une représentation de n, on peut y ajouter « $+1$ » pour obtenir une représentation de $n+1$.
Par exemple, $3+3+1$ est une représentation de 7 ; si on ajoute « $+1$ », on obtient $3+3+1+1$, qui est une représentation de 8.
Puisqu'on peut utiliser chaque représentation de n pour créer une représentation de $n+1$, le nombre de représentations de $n+1$ est supérieur ou égal au nombre de représentations de n. Donc $F(n+1) \geq F(n)$.
On montrera que $F(n+1) \geq F(n)+1$ en trouvant une représentation de $n+1$ qui n'est pas décrite par la méthode précédente.
On considère les cas où $n+1$ est impair, puis les cas où $n+1$ est pair.

1^er^ cas : $n+1$ est impair

Puisque $n+1$ est impair, le nombre $n+1$ est une représentation de lui-même.
Puisque $n > 3$, cette représentation de $n+1$ ne contient qu'un entier et il est supérieur à 1. Elle ne peut donc pas provenir de la méthode où l'on ajoute « $+1$ » à une représentation de n.
Donc si $n+1$ est impair, alors $F(n+1) \geq F(n)+1$, d'où $F(n+1) > F(n)$.

2^e^ cas : $n+1$ est pair

Puisque $n+1$ est pair, alors n est impair.
Puisque n est impair et que $n > 3$, alors $n \geq 5$.
Puisque n est impair et que $n \geq 5$, alors $n-2$ est impair et $n-2 \geq 3$.
Puisque $n+1 = (n-2)+3$ et que $n-2 \geq 3$, alors le l'expression $(n-2)+3$ est une représentation de $n+1$ qui ne contient pas de termes 1. Elle ne peut donc pas provenir de la méthode où l'on ajoute « $+1$ » à une représentation de n.
Donc si $n+1$ est pair, alors $F(n+1) \geq F(n)+1$, d'où $F(n+1) > F(n)$.

Donc pour tout entier n supérieur à 3, $F(n+1) > F(n)$.

(c) Soit a_n la représentation de n comme somme de n fois le nombre 1.
Par exemple, $a_8 = 1+1+1+1+1+1+1+1$.
Soit b_n la représentation de n de la forme $(n-1)+1$ si n est pair et de la forme $(n-2)+1+1$ si n est impair. Par exemple, $b_8 = 7+1$ puisque 8 est pair.
Soit S_n la liste des autres représentations de n.
D'après la solution de la partie (a), voici la liste S_8 :

$$\begin{aligned} 8 &= 1+1+1+1+1+3 \\ &= 1+1+3+3 \\ &= 1+1+1+5 \\ &= 3+5 \end{aligned}$$

Puisque a_n et b_n sont chacune une représentation de n, il y a $F(n)-2$ représentations dans la liste S_n.
On remarquera que lorsque $n=4$, la liste S_n ne contient aucune représentation de n.
On considère la liste de représentations de $2n$ de la forme $a_n + S_n$. Ces représentations de $2n$ ont la forme de n fois le nombre 1 ajouté à chaque représentation de la liste S_n.
On utilise de nouveau les représentations de 8 de la solution de la partie (a) pour montrer les représentations de 16 qui se trouvent dans la liste $a_8 + S_8$:

$$\begin{aligned} 16 &= (1+1+1+1+1+1+1+1)+(1+1+1+1+1+3) \\ &= (1+1+1+1+1+1+1+1)+(1+1+3+3) \\ &= (1+1+1+1+1+1+1+1)+(1+1+1+5) \\ &= (1+1+1+1+1+1+1+1)+(3+5) \end{aligned}$$

On considère maintenant les représentations de $2n$ formées par les listes suivantes :
- $a_n + S_n$ (Cette liste contient $F(n)-2$ représentations. Lorsque $n=4$, elle est vide.)
- $b_n + S_n$ (Cette liste contient $F(n)-2$ représentations. Lorsque $n=4$, elle est vide.)
- $a_n + a_n$
- $a_n + b_n$
- $b_n + b_n$
- $(2n-1)+1$
- $(2n-3)+3$

Le nombre de représentations dans cette liste est égal à $2 \times [F(n) - 2] + 5$, ou $2F(n) + 1$. Si ces représentations sont distinctes, alors $F(2n) \geq 2F(n) + 1 > 2F(n)$, ce qu'il faut démontrer.
Puisque $n > 3$, alors $n - 3 > 0$, d'où $2n - 3 > n$. Si on ajoute 2 à chaque membre, on obtient $2n - 1 > n + 2$. Donc $2n - 1 > n$.
Puisque $2n - 3$ et $2n - 1$ sont chacun supérieur à n, il n'y a aucun chevauchement entre les deux dernières listes et les cinq premières listes ci-dessus.
D'après les définitions de a_n et de b_n, il n'y a aucun chevauchement entre les troisième, quatrième ou cinquième listes de représentations ci-dessus.
D'après les définitions de a_n, b_n et S_n, il n'y a aucun chevauchement entre les deux premières listes et les troisième, quatrième et cinquième listes ci-dessus.
Il reste à explorer la possibilité de chevauchement entre les deux premières listes seulement.

Supposons qu'il existe une représentation de $2n$ qui fait partie de la liste $a_n + S_n$ et de la liste $b_n + S_n$. $(\star)$
Puisque cette représentation fait partie de la liste $a_n + S_n$, elle contient n fois le nombre 1.
Puisque cette représentation fait partie de la liste $b_n + S_n$, alors elle contient l'expression $(n - 1) + 1$ ou l'expression $(n - 2) + 1 + 1$ selon que n est pair ou impair. Or, puisque la représentation contient déjà des 1 (à cause de la partie a_n), on ne peut pas inclure automatiquement le 1 ou le $1 + 1$ qui provient de b_n.
Donc, la représentation contient n fois le nombre 1 et soit le nombre $n - 1$, soit le nombre $n - 2$.
Puisque cette représentation a une somme de $2n - 1$ ou de $2n - 2$, on doit inclure le 1 ou le $1 + 1$.
Donc, la représentation est formée de n fois le nombre 1 et de l'expression $(n - 1) + 1$ si n est pair, ou de n fois le nombre 1 et de l'expression $(n - 2) + 1 + 1$ si n est impair.
Donc, la représentation doit faire partie de la liste $a_n + b_n$.
On a une contradiction, puisqu'on sait déjà qu'il n'y a aucun chevauchement entre cette liste et la liste $a_n + S_n$ ou la liste $b_n + S_n$.
Donc, la supposition $(\star)$ est fausse.

Il n'y a donc aucun chevauchement entre les listes de représentations.
Donc $F(2n) \geq 2F(n) + 1 > 2F(n)$, ce qu'il fallait démontrer.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Hypatie 2010

le vendredi 9 avril 2010

Solutions

1. (a) Le coût en avion comprend des frais de réservation de 100 \$ plus 0,10 \$ le kilomètre.
Pour parcourir 3250 km en avion de A à B, le coût est de 100 \$ + 3250 × 0,10 \$, soit 100 \$ + 325 \$, ou 425 \$.

(b) Puisque le triangle ABC est rectangle, on peut utiliser le théorème de Pythagore.
Donc $BC^2 = AB^2 - CA^2$, d'où $BC^2 = 3250^2 - 3000^2$, ou $BC^2 = 1\,562\,500$.
Donc $BC = 1250$ km (puisque $BC > 0$).
Piravena voyage $3250 + 1250 + 3000$ ou 7500 km en total.

(c) Pour voyager en avion de B à C, le coût est de 100 \$ + 1250 × 0,10 \$, ou 225 \$.
Pour voyager en autocar de B à C, le coût est de 1250 × 0,15 \$, ou 187,50 \$.
Puisque Piravena a choisi le moyen de transport le moins dispendieux pour chaque étape, elle a pris l'autocar de B à C.
Pour voyager en avion de C à A, le coût est de 100 \$ + 3000 × 0,10 \$, ou 400 \$.
Pour voyager en autocar de C à A, le coût est de 3000 × 0,15 \$, ou 450 \$.
Puisque Piravena a choisi le moyen de transport le moins dispendieux pour chaque étape, elle a pris l'avion de C à A.
On peut vérifier : 425 \$ + 187,50 \$ + 400 \$ = 1012,50 \$, ce qui correspond au coût indiqué.

2. (a) On reporte $x = 6$ dans l'identité $f(x) - f(x-1) = 4x - 9$ qui devient $f(6) - f(5) = 4 \times 6 - 9$.
Puisque $f(5) = 18$, on a $f(6) - 18 = 24 - 9$, d'où $f(6) - 18 = 15$, ou $f(6) = 33$.

(b) On reporte $x = 5$ dans l'identité $f(x) - f(x-1) = 4x - 9$ qui devient $f(5) - f(4) = 4 \times 5 - 9$.
Puisque $f(5) = 18$, on a $18 - f(4) = 20 - 9$, d'où $18 - f(4) = 11$, ou $f(4) = 7$.
On reporte $x = 4$ dans l'identité $f(x) - f(x-1) = 4x - 9$ qui devient $f(4) - f(3) = 4 \times 4 - 9$.
Puisque $f(4) = 7$, on a $7 - f(3) = 16 - 9$, d'où $7 - f(3) = 7$, ou $f(3) = 0$.

(c) Puisque $f(5) = 18$, alors $2(5^2) + 5p + q = 18$, d'où $50 + 5p + q = 18$, ou $5p + q = -32$.
Puisque $f(3) = 0$, alors $2(3^2) + 3p + q = 0$, d'où $18 + 3p + q = 0$, ou $3p + q = -18$.
On résout le système de deux équations :

$$\begin{aligned} 5p + q &= -32 \\ 3p + q &= -18 \end{aligned}$$

On soustrait la deuxième équation de la première, membre par membre, pour obtenir $2p = -14$, ou $p = -7$. On reporte $p = -7$ dans la première équation pour obtenir $5(-7) + q = -32$, d'où $-35 + q = -32$, ou $q = 3$.
Donc $p = -7$ et $q = 3$ et $f(x) = 2x^2 + px + q$ devient $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$.

3. (a) Puisque le triangle ABE est équilatéral, alors $\angle ABE = 60°$.
Or $\angle PBC = \angle ABC - \angle ABE$, d'où $\angle PBC = 90° - 60°$, ou $\angle PBC = 30°$.
Puisque $AB = BC$, le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle et on a donc $\angle BAC = \angle BCA = 45°$. Donc $\angle BCP = \angle BCA = 45°$ et :

$$\angle BPC = 180° - \angle PBC - \angle BCP = 180° - 30° - 45° = 105°$$

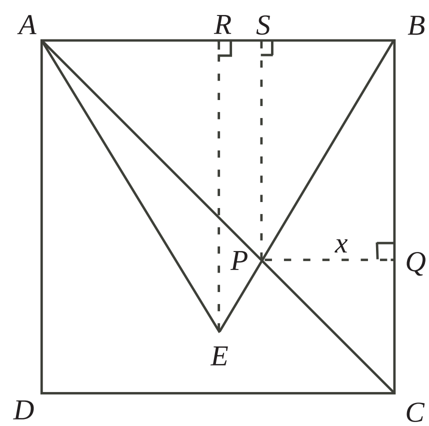
(b) *Solution 1*
Dans le triangle PBQ, $\angle PBQ = 30°$ et $\angle BQP = 90°$. Donc $\angle BPQ = 60°$.
PBQ est donc un triangle remarquable $30°$ - $60°$ - $90°$, d'où $PQ : PB : BQ = 1 : 2 : \sqrt{3}$.
Puisque $\frac{PQ}{BQ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\frac{x}{BQ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $BQ = \sqrt{3}x$.

Solution 2
Dans le triangle PQC, $\angle QCP = 45°$ et $\angle PQC = 90°$. Donc $\angle CPQ = 45°$.
Le triangle PQC est donc isocèle, d'où $QC = PQ = x$.
Puisque $BC = 4$, alors $BQ = BC - QC$, d'où $BQ = 4 - x$.

(c) *Solution 1*
Dans le triangle PQC, $\angle QCP = 45°$ et $\angle PQC = 90°$. Donc $\angle CPQ = 45°$.
Le triangle PQC est donc isocèle et $QC = PQ = x$.
Puisque $BC = 4$, alors $BC = BQ + QC$, d'où $BC = \sqrt{3}x + x = 4$. Donc $x(\sqrt{3} + 1) = 4$, ou $x = \frac{4}{\sqrt{3}+1}$.
On peut transformer pour rendre le dénominateur rationnel, ce qui donne $x = \frac{4}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$, d'où $x = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{3-1}$, ou $x = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{2}$, ou $x = 2(\sqrt{3} - 1)$.

Solution 2
Dans le triangle PBQ, $\angle PBQ = 30°$ et $\angle BQP = 90°$. Donc $\angle BPQ = 60°$.
PBQ est donc un triangle remarquable $30°$ - $60°$ - $90°$, d'où $PQ : PB : BQ = 1 : 2 : \sqrt{3}$.
Puisque $\frac{PQ}{BQ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\frac{x}{4-x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $\sqrt{3}x = 4-x$, ou $\sqrt{3}x+x = 4$. Donc $x(\sqrt{3}+1) = 4$, ou $x = \frac{4}{\sqrt{3}+1}$.
On peut transformer pour rendre le dénominateur rationnel, comme dans la solution 1, ce qui donne $x = 2(\sqrt{3} - 1)$.

(d) *Solution 1*
La notation $|\triangle XYZ|$ représentera l'aire du triangle XYZ. On a donc $|\triangle APE| = |\triangle ABE| - |\triangle ABP|$.
Puisque le triangle ABE est équilatéral, $BE = EA = AB = 4$ et la hauteur au point E coupe AB en son milieu R. Donc $AR = RB = 2$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle EBR, $ER^2 = BE^2 - RB^2$, d'où $ER^2 = 4^2 - 2^2$, ou $ER^2 = 12$.
Donc $ER = \sqrt{12}$, ou $ER = 2\sqrt{3}$, puisque $ER > 0$.
L'aire du triangle ABE est égale à $\frac{1}{2}(AB)(ER)$, ou $\frac{1}{2}(4)(2\sqrt{3})$, ou $4\sqrt{3}$.
Dans le triangle ABP, on abaisse la hauteur PS au sommet P.



PS et QB sont perpendiculaires à AB. PS est donc parallèle à QB.
De même, SB et PQ sont perpendiculaires à QB. SB est donc parallèle à PQ.
D'après les parties (b) et (c), $QB = 4 - x$, d'où $QB = 4 - 2(\sqrt{3} - 1)$, ou $QB = 6 - 2\sqrt{3}$.
Donc $|\triangle ABP| = \frac{1}{2}(AB)(PS)$, d'où $|\triangle ABP| = \frac{1}{2}(4)(6-2\sqrt{3})$, ou $|\triangle ABP| = 2(6-2\sqrt{3})$, ou $|\triangle ABP| = 12 - 4\sqrt{3}$.
Donc $|\triangle APE| = 4\sqrt{3} - (12 - 4\sqrt{3})$, ou $|\triangle APE| = 8\sqrt{3} - 12$.

Solution 2
La notation $|\triangle XYZ|$ représentera l'aire du triangle XYZ.
On a donc $|\triangle APE| = |\triangle ABE| - |\triangle ABP|$.
Or, $|\triangle ABP| = |\triangle ABC| - |\triangle BPC|$.
Donc $|\triangle APE| = |\triangle ABE| - (|\triangle ABC| - |\triangle BPC|)$,
ou $|\triangle APE| = |\triangle ABE| + |\triangle BPC| - |\triangle ABC|$.
Puisque le triangle ABE est équilatéral, $BE = EA = AB = 4$ et la hauteur au point E coupe AB en son milieu R.
ERB est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $ER : RB = \sqrt{3} : 1$, d'où $ER = (RB)\sqrt{3}$, ou $ER = 2\sqrt{3}$.
Donc $|\triangle ABE| = \frac{1}{2}(AB)(ER)$, d'où $|\triangle ABE| = \frac{1}{2}(4)(2\sqrt{3})$, ou $|\triangle ABE| = 4\sqrt{3}$.
Puisque PQ est une hauteur du triangle BPC, $|\triangle BPC| = \frac{1}{2}(BC)(PQ)$,
d'où $|\triangle BPC| = \frac{1}{2}(4)(2\sqrt{3}-2)$, ou $|\triangle BPC| = 4\sqrt{3}-4$.
Dans le triangle ABC, $\angle ABC = 90°$.
Donc $|\triangle ABC| = \frac{1}{2}(AB)(BC)$, d'où $|\triangle ABC| = \frac{1}{2}(4)(4)$, ou $|\triangle ABC| = 8$.
Donc $|\triangle APE| = |\triangle ABE| + |\triangle BPC| - |\triangle ABC|$, d'où $|\triangle APE| = (4\sqrt{3}) + (4\sqrt{3}-4) - 8$, ou $|\triangle APE| = 8\sqrt{3} - 12$.

4. (a) On procède par factorisation :

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^2 + 8 &= 0 \\ (x^2-4)(x^2-2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x^2 = 4$ ou $x^2 = 2$, d'où $x = \pm 2$ ou $x = \pm\sqrt{2}$.
Les valeurs réelles de x qui vérifient l'équation $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ sont -2,2, $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

(b) On cherche le plus petit entier strictement positif N pour lequel :

$$\begin{aligned} x^4 + 2010x^2 + N &= (x^2 + rx + s)(x^2 + tx + u) \\ x^4 + 2010x^2 + N &= x^4 + tx^3 + ux^2 + rx^3 + rtx^2 + rux + sx^2 + stx + su \\ x^4 + 2010x^2 + N &= x^4 + tx^3 + rx^3 + ux^2 + rtx^2 + sx^2 + rux + stx + su \\ x^4 + 2010x^2 + N &= x^4 + (t+r)x^3 + (u+rt+s)x^2 + (ru+st)x + su \end{aligned}$$

Puisque l'égalité est vraie pour toutes les valeurs de x, les coefficients correspondants, dans chaque membre, sont égaux. Donc $t + r = 0$, $u + rt + s = 2010$, $ru + st = 0$ et $su = N$.
D'après la première de ces quatre équations, $t = -r$.
On reporte $t = -r$ dans la troisième équation pour obtenir $ru - rs = 0$, ou $r(u - s) = 0$.
Puisque $r \neq 0$, alors $u - s = 0$, ou $u = s$.
On reporte $u = s$ dans la quatrième équation qui devient $N = u^2$.
Donc, pour minimiser N, il faut minimiser u^2.
On reporte $t = -r$ et $s = u$ dans la deuxième équation qui devient $u + r(-r) + u = 2010$, ou $2u - r^2 = 2010$, d'où $u = \dfrac{2010 + r^2}{2}$.
Donc $u > 0$. Pour minimiser u^2, on minimise u ou, ce qui est équivalent, on minimise r.
Puisque u et r sont des entiers et que $r \neq 0$, alors u est minimisé lorsque $r = \pm 2$ (r doit être pair), c'est-à-dire lorsque $u = \dfrac{2014}{2}$, ou $u = 1007$.
Donc, le plus petit entier strictement positif N pour lequel l'expression $x^4 + 2010x^2 + N$ peut être factorisée sous la forme $(x^2 + rx + s)(x^2 + tx + u)$, r,s,t et u étant des entiers et $r \neq 0$, est $N = u^2$, d'où $N = 1007^2$, ou $N = 1\,014\,049$.

(c) On procède comme dans la partie (b), le coefficient 2010 étant remplacé par M. On apparie les coefficients des deux membres, deux à deux, pour obtenir quatre équations semblables, soit $t+r=0$, $u+rt+s=M$, $ru+st=0$ et $su=N$. Donc :

$$\begin{aligned} N-M &= su-(u+rt+s) \\ 37 &= u^2-(2u-r^2) \\ 37 &= u^2-2u+r^2 \\ 37+1 &= u^2-2u+1+r^2 \\ 38 &= (u-1)^2+r^2 \end{aligned}$$

Donc $r=\pm\sqrt{38-(u-1)^2}$.

Dans le tableau suivant, on choisit des valeurs entières de u pour trouver des valeurs entières de r :

u	$(u-1)^2$	r
1	0	$\pm\sqrt{38}$
0 ou 2	1	$\pm\sqrt{37}$
-1 ou 3	4	$\pm\sqrt{34}$
-2 ou 4	9	$\pm\sqrt{29}$
-3 ou 5	16	$\pm\sqrt{22}$
-4 ou 6	25	$\pm\sqrt{13}$
-5 ou 7	36	$\pm\sqrt{2}$

On voit que dans chaque cas, la valeur de r n'est pas un entier.

Si on choisit n'importe quelle autre valeur entière de u, on a $(u-1)^2>38$, ou $38-(u-1)^2<0$. Il n'y a donc aucune valeur réelle de r.

Ainsi si u admet une valeur entière, r ne peut admettre une valeur entière. Donc, u et r ne peuvent pas admettre à la fois des valeurs entières. Donc, l'expression x^4+Mx^2+N ne peut pas être factorisée comme dans la partie (b), M et N étant des entiers pour lesquels $N-M=37$.

Remarque : On aurait pu affirmer que $(u-1)^2+r^2$ représente la somme de deux carrés parfaits et puisque aucune paire de carrés parfaits parmi 0,1,4,9,16,25,36 n'admet une somme de 38, alors $(u-1)^2+r^2\neq 38$, quelles que soient les valeurs entières de u et de r.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Hypatie 2009

le mercredi 8 avril 2009

Solutions

1. Dans chaque partie du problème, on a besoin du nombre total d'élèves dans la classe. D'après le tableau, le nombre total est égal à $3+2+1+2+4+2+2+3+1$, ou 20.

   (a) Il y a 20 élèves en tout.
   Parmi ces élèves, 2 ont à la fois les yeux verts et les cheveux bruns.
   La fraction des élèves qui ont à la fois les yeux verts et les cheveux bruns est égale à $\frac{2}{20}$, ou $\frac{10}{100}$.
   Donc, 10 % des élèves ont à la fois les yeux verts et les cheveux bruns.

   (b) Il y a 20 élèves en tout.
   Le nombre d'élèves qui ont les yeux verts est égal à $2+4+2$, ou 8.
   Le nombre d'élèves qui ont les cheveux bruns est égal à $3+2+2$, ou 7. Or, 2 élèves ont été comptés deux fois. Donc, le nombre d'élèves qui ont les yeux verts ou les cheveux bruns ou les deux est égal à $8+7-2$, ou 13.
   La fraction des élèves qui ont les yeux verts ou les cheveux bruns ou les deux est égale à $\frac{13}{20}$, ou $\frac{65}{100}$. Donc, 65 % des élèves ont les yeux verts ou les cheveux bruns ou les deux.

   (c) Le nombre d'élèves qui ont les cheveux verts est égal à $2+4+2$, ou 8.
   Parmi ces élèves, 2 ont les cheveux roux.
   La fraction des élèves aux yeux verts qui ont aussi les cheveux roux est égale à $\frac{2}{8}$, ou $\frac{1}{4}$, ou $\frac{25}{100}$. Donc, 25 % des élèves aux yeux verts ont aussi les cheveux roux.

   (d) Au départ, il y a 20 élèves dans la classe. Le nombre d'élèves aux cheveux roux est égal à $1+2+1$, ou 4.
   Soit x le nombre d'élèves aux cheveux roux qu'il faudrait ajouter à la classe. Il y aurait alors $20+x$ élèves dans la classe, dont $4+x$ ont les cheveux roux.
   On veut que $\dfrac{4+x}{20+x}=\dfrac{36}{100}$, ou $\dfrac{4+x}{20+x}=\dfrac{9}{25}$.
   On peut voir par inspection que $x=5$, mais il n'est peut-être pas évident que cette solution est unique. On utilise le produit en croix pour obtenir $25(4+x)=9(20+x)$ qui devient $100+25x=180+9x$, d'où $16x=80$, ou $x=5$.
   Donc, il faudrait ajouter 5 élèves aux cheveux roux.

2. (a) *Solution 1*
   Soit x le terme du milieu et d la raison arithmétique.
   Donc, le premier terme est égal à $x-d$ et le troisième terme est égal à $x+d$.
   Puisque la somme des trois termes est égale à 180, alors $(x-d)+x+(x+d)=180$, d'où $3x=180$, ou $x=60$.
   Donc, le terme du milieu est égal à 60.

   Solution 2
   Soit a le premier terme et d la raison arithmétique.
   Donc, le deuxième terme est égal à $a+d$ et le troisième est égal à $(a+d)+d$, ou $a+2d$.
   On cherche la valeur du terme du milieu, c'est-à-dire la valeur de $a+d$.
   Puisque la somme des trois termes est égale à 180, alors $a+(a+d)+(a+2d)=180$, d'où $3a+3d=180$, ou $3(a+d)=180$, ou $a+d=60$.
   Donc, le terme du milieu est égal à 60.

   (b) *Solution 1*
   On montrera que le terme du milieu (le troisième terme) est égal à 36.
   Soit x le terme du milieu et d la raison arithmétique.
   Donc, le deuxième terme est égal à $x-d$, le premier terme est égal à $x-2d$, le quatrième

terme est égal à $x + d$ et le cinquième terme est égal à $x + 2d$.
Puisque la somme des cinq termes est égale à 180, alors :

$$\begin{aligned}(x-2d)+(x-d)+x+(x+d)+(x+2d) &= 180\\ 5x &= 180\\ x &= 36\end{aligned}$$

Donc, le terme du milieu est égal à 36.
(Si $d = 0$, tous les termes de la suite égalent 36. Il est donc possible pour plus d'un terme d'égaler 36.)

Solution 2
Soit a le premier terme et d la raison arithmétique.
Donc, le deuxième terme est égal à $a + d$, le troisième terme est égal à $(a + d) + d$, ou $a + 2d$, le quatrième terme est égal à $a + 3d$ et le cinquième terme est égal à $a + 4d$.
On cherche la valeur du terme du milieu, c'est-à-dire la valeur de $a + 2d$.
Puisque la somme des cinq termes est égale à 180, alors :

$$\begin{aligned}a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d) &= 180\\ 5a+10d &= 180\\ 5(a+2d) &= 180\\ a+2d &= 36\end{aligned}$$

Donc, le terme du milieu est égal à 36.
(Si $d = 0$, tous les termes de la suite égalent 36. Il est donc possible pour plus d'un terme d'égaler 36.)

(c) Soit a le premier terme et d la raison arithmétique.
Donc, le deuxième terme est égal à $a+d$, le troisième terme est égal à $a+2d$, le quatrième terme est égal à $a + 3d$, le cinquième terme est égal à $a + 4d$ et le sixième terme est égal à $a + 5d$.
On cherche la somme du premier terme et du sixième terme, soit la valeur de $a+(a+5d)$, ou $2a + 5d$.
Puisque la somme des six termes est égale à 180, alors :

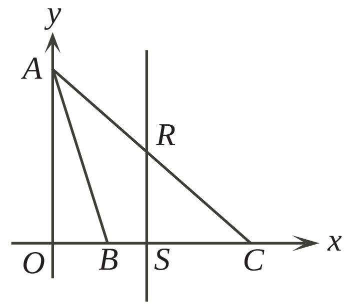
$$\begin{aligned}a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)+(a+5d) &= 180\\ 6a+15d &= 180\\ 3(2a+5d) &= 180\\ 2a+5d &= 60\end{aligned}$$

Donc, la somme du premier terme et du sixième terme est égale à 60.

3. (a) La droite qui passe au point B et qui coupe le triangle ABC en deux parties de même aire contient une médiane du triangle, c'est-à-dire le segment qui joint B et le milieu M du côté AC.
Cette droite coupe le triangle en deux parties de même aire, parce que les triangles BAM et BCM ont des bases AM et CM de même longueur et que la hauteur du sommet B à ces deux bases est la même pour les deux triangles.
Le milieu M de AC a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(0+8), \frac{1}{2}(8+0)\right)$, ou $(4, 4)$.

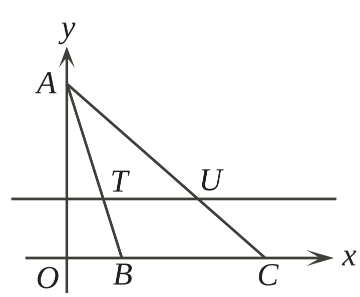
Puisque la droite passe aux points $B(2,0)$ et $M(4,4)$, sa pente est égale à $\dfrac{4-0}{4-2}$, ou 2.
Puisque la droite passe au point $B(2,0)$, son équation est donc $y-0=2(x-2)$, ou $y=2x-4$.

(b) Puisque le segment de droite RS est vertical et que le point S est situé sur le segment horizontal BC, le triangle RSC est rectangle en S.



Or, R est situé sur le segment AC, dont la pente est égale à $\dfrac{0-8}{8-0}$, ou -1.
Donc, AC forme un angle de 45° avec l'axe des abscisses. On a donc $\angle RCS = 45°$.
Le triangle RSC a donc un angle de 90° et un angle de 45°. Son troisième angle mesure donc $180° - 90° - 45°$, ou 45°. Le triangle est donc rectangle et isocèle.
Soit $RS = SC = x$.
Puisque le triangle RSC est rectangle, son aire est égale à $\frac{1}{2}x^2$.
Or, on sait que l'aire du triangle RSC est égale à 12,5. On a donc $\frac{1}{2}x^2 = 12.5$, d'où $x^2 = 25$.
Puisque $x > 0$, alors $x = 5$.
Donc, le point S est situé à 5 unités à la gauche du point C. Ses coordonnées sont donc $(8-5,0)$, ou $(3,0)$.
Le point R est situé à 5 unités au-dessus de S. Ses coordonnées sont donc $(3,0+5)$, ou $(3,5)$.

(c) *Solution 1*
Puisque le segment BC est horizontal et que la droite qui passe aux points T et U est horizontale, alors BC et TU sont parallèles.
Donc $\angle ATU = \angle ABC$.



Puisque les triangles ATU et ABC ont un angle commun en A et que $\angle ATU = \angle ABC$, les triangles sont semblables.
Donc, le rapport de leur aire est égal au carré du rapport de leur hauteur.
En utilisant BC comme base du triangle ABC, le triangle ABC a une base de 6 et une hauteur de 8. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(6)(8)$, ou 24.
Soit h la base du triangle ATU par rapport à sa base TU.
Donc $\dfrac{13,5}{24} = \left(\dfrac{h}{8}\right)^2$, ou $\dfrac{h^2}{64} = \dfrac{27}{48}$. Donc $h^2 = \dfrac{64(27)}{48}$, ou $h^2 = 36$.
Puisque $h > 0$, alors $h = 6$.

Donc, le segment TU est situé à 6 unités au-dessous du point $A(0, 8)$. Son équation est donc $y = 8 - 6$, ou $y = 2$.

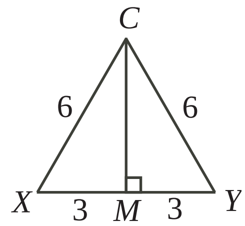
Solution 2
Soit $y = t$ l'équation de la droite horizontale.
On détermine d'abord les coordonnées des points T et U.
Pour le faire, on a besoin de l'équation de la droite qui passe aux points A et B et celle de la droite qui passe aux points A et C.
La droite qui passe aux points $A(0, 8)$ et $B(2, 0)$ a une pente de $\dfrac{0-8}{2-0}$, ou -4 et une ordonnée à l'origine de 8. Son équation est donc $y = -4x + 8$.
La droite qui passe aux points $A(0, 8)$ et $C(8, 0)$ a une pente de $\dfrac{0-8}{8-0}$, ou -1 et une ordonnée à l'origine de 8. Son équation est donc $y = -x + 8$.
Le point T est le point qui a une ordonnée de t sur la droite d'équation $y = -4x + 8$.
Ses coordonnnées (x, t) vérifient donc l'équation. Donc $t = -4x + 8$, d'où $4x = 8 - t$, ou $x = \frac{1}{4}(8 - t)$.
Le point U est le point qui a une ordonnée de t sur la droite d'équation $y = -x + 8$.
Ses coordonnnées (x, t) vérifient donc l'équation. Donc $t = -x + 8$, d'où $x = 8 - t$.
Donc, T, U et A ont pour coordonnées respectives $(\frac{1}{4}(8 - t), t)$, $(8 - t, t)$ et $(0, 8)$.
Pour déterminer une expression pour l'aire du triangle ATU, on utilise la base horizontale TU qui a une longueur de $(8 - t) - \frac{1}{4}(8 - t)$, ou $\frac{3}{4}(8 - t)$. La hauteur correspondante est égale à $8 - t$.
L'aire est donc égale à $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}(8 - t)\right)(8 - t)$, ou $\frac{3}{8}(8 - t)^2$.
Or, on sait qu'elle est égale à $13,5$. Donc $\frac{3}{8}(8 - t)^2 = 13,5$ d'où $(8 - t)^2 = \frac{8}{3}(13,5)$, ou $(8 - t)^2 = 36$.
On sait que $t < 8$, puisque le segment TU est au-dessous de A. Donc $8 - t > 0$.
Donc $8 - t = 6$, d'où $t = 2$.
L'équation de la droite horizontale est donc $y = 2$.

4. (a) Le triangle ABC est équilatéral avec des côtés de longueur 12. Puisque X et Y sont les milieux respectifs des côtés CA et CB, alors $CX = CY = \frac{1}{2}(12)$, ou $CX = CY = 6$.
Puisque le prisme a une hauteur de 16 et que Z est le milieu de CD, alors $CZ = \frac{1}{2}(16)$, ou $CZ = 8$.
Puisque les faces $ACDE$ et $BCDF$ sont des rectangles, alors $\angle ACD = \angle BCD = 90°$.
Donc, les triangles XCZ et YCZ sont rectangles en C.
D'après le théorème de Pythagore, $XZ = \sqrt{CX^2 + CZ^2}$, d'où $XZ = \sqrt{6^2 + 8^2}$. Donc, $XZ = \sqrt{100}$, ou $XZ = 10$.
De même, $YZ = 10$.
On considère maintenant le triangle ABC. Puisque X est le milieu du segment AC et que Y est le milieu de BC, la longueur du segment XY est la moitié de celle de la base AB.
Donc $XY = \frac{1}{2}(12)$, ou $XY = 6$.
On a donc $XY = 6$ et $XZ = YZ = 10$.

(b) Pour déterminer l'aire totale du solide $CXYZ$, il faut déterminer l'aire de chacune des 4 faces triangulaires.

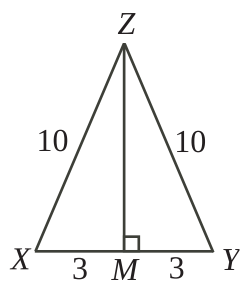
<u>Aire des triangles CZX et CZY</u>
Chacun de ces triangles est rectangle avec des cathètes de longueurs 6 et 8.
Donc, chaque triangle a une aire de $\frac{1}{2}(6)(8)$, ou 24.

Aire du triangle CXY
Puisque $\angle XCY = 60°$ et que les côtés CX et CY sont congrus, le triangle est équilatéral avec des côtés de longueur 6.
On trace la hauteur CM. Puisque le triangle CXY est équilatéral, M est le milieu de XY.



Chacun des triangles CMX et CMY est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°, puisque chacun a un angle de 60° et un angle de 90°.
Donc $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}(CX)$, d'où $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}(6)$, ou $CM = 3\sqrt{3}$.
Puisque $XY = 6$, l'aire du triangle CXY est égale à $\frac{1}{2}(6)(3\sqrt{3})$, ou $9\sqrt{3}$.

Aire du triangle XYZ
On a $XY = 6$ et $XZ = YZ = 10$.
On trace la hauteur ZM.
Puisque le triangle XYZ est isocèle, M est le milieu de XY.



On sait que $XM = MY = \frac{1}{2}(XY)$, ou $XM = MY = 3$.
D'après le théorème de Pythagore, $ZM = \sqrt{ZX^2 - XM^2}$, d'où $ZM = \sqrt{10^2 - 3^2}$, ou $ZM = \sqrt{91}$.
Puisque $XY = 6$, l'aire du triangle XYZ est égale à $\frac{1}{2}(6)(\sqrt{91})$, ou $3\sqrt{91}$.

Donc, l'aire totale du solide $CXYZ$ est égale à $24+24+9\sqrt{3}+3\sqrt{91}$, ou $48+9\sqrt{3}+3\sqrt{91}$.

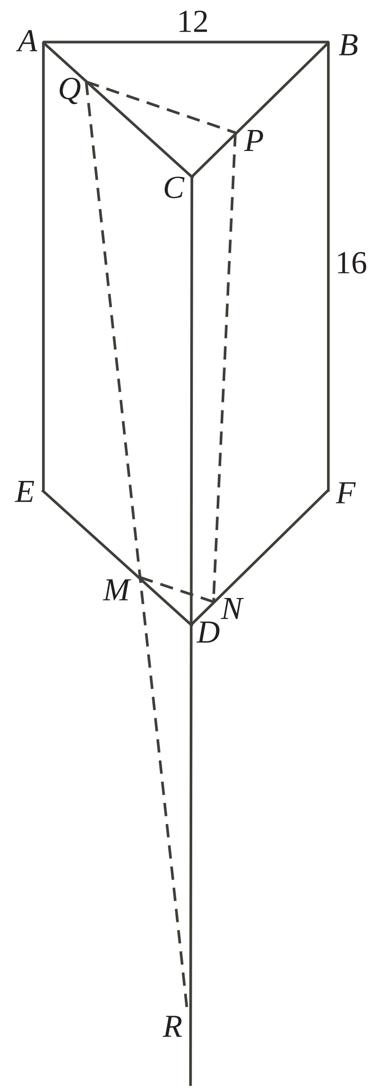
(c) Étape 1 : Calcul de la longueur MN
On sait que $DM = 4$, $DN = 2$ et $\angle MDN = 60°$ (puisque le triangle EDF est équilatéral).
Puisque $DM : DN = 2 : 1$ et que l'angle compris entre DM et DN mesure 60°, le triangle MDN est un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Donc, MN est perpendiculaire à DF. De plus, $MN = \sqrt{3}DN$, ou $MN = 2\sqrt{3}$.
(On aurait pu utiliser la loi du cosinus, dans le triangle MND, pour calculer la longueur MN.)

Étape 2 : Calcul de la longueur CP
On sait que $QC = 8$ et que $\angle QCP = 60°$.
Puisque MN est perpendiculaire à DF, le quadrilatère $MNPQ$ est perpendiculaire au quadrilatère $BCDF$.
Puisque QP est parallèle à MN (ils sont situés dans le même plan $MNPQ$ et dans des bases parallèles du prisme $ABCDEF$), alors QP est perpendiculaire à CB.
Donc, le triangle QCP est rectangle en P et il contient aussi un angle de 60°. Il est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.

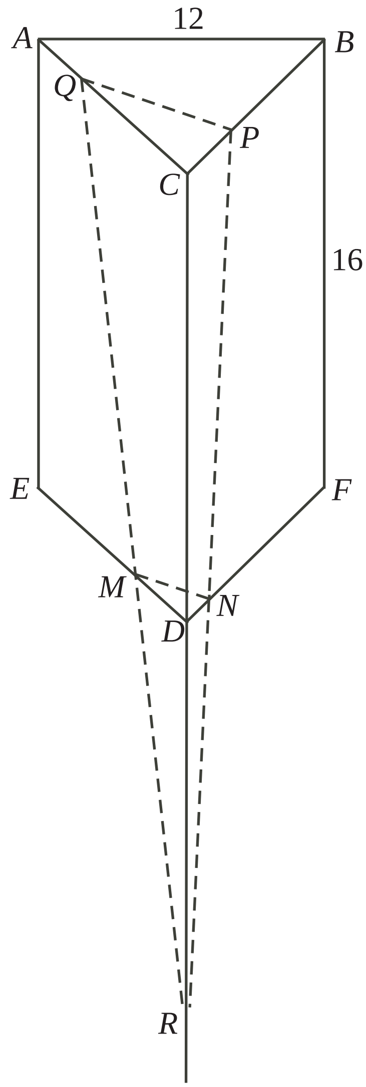
Donc, $CP = \frac{1}{2}(CQ)$, d'où $CP = \frac{1}{2}(8)$, ou $CP = 4$.
De plus, $QP = \sqrt{3}CP$, d'où $QP = 4\sqrt{3}$.

Étape 3 : Construction d'une pyramide

On prolonge CD vers le bas pour construire une pyramide, car on sait comment calculer son volume.
Ensuite, on prolonge QM jusqu'à ce qu'il coupe le prolongement de CD en R. (Le prolongement de QM coupe le prolongement de CD, puisque ce sont deux droites non parallèles situées dans un même plan.)



On considère les triangles RDM et RCQ. Ils sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en R et chacun est rectangle. (Le triangle RDM est rectangle en D et le triangle RCQ est rectangle en C.)
Puisque $QC = 8$ et $MD = 4$, il y a un rapport de $2 : 1$ entre les longueurs de leurs côtés respectifs.
Donc $RC = 2RD$, c'est-à-dire que D est le milieu de RC.
Puisque $CD = 16$, alors $DR = 16$.
Puisque $CP : DN = 2 : 1$, alors le prolongement de PN coupe le prolongement de CD au même point R.



Étape 4 : Calcul du volume de $QPCDMN$

On dit que le solide $QPCDMN$ est un *tronc de pyramide*, car il est obtenu en enlevant la pyramide $RDNM$ de la pyramide $RCPQ$. Le volume d'une pyramide est le tiers du volume du prisme correspondant, soit un tiers du produit de l'aire de la base et de la hauteur.

L'aire du triangle CPQ est égale à $\frac{1}{2}(CP)(QP)$, ou $\frac{1}{2}(4)(4\sqrt{3})$, ou $8\sqrt{3}$.

L'aire du triangle DNM est égale à $\frac{1}{2}(DN)(MN)$, ou $\frac{1}{2}(2)(2\sqrt{3})$, ou $2\sqrt{3}$.

La hauteur RD de la pyramide $RDNM$ a une longueur de 16 et la hauteur RC de la pyramide $RCPQ$ a une longueur de 32.

Donc, le volume du solide $QPCDMN$ est égal à $\frac{1}{3}(8\sqrt{3})(32)-\frac{1}{3}(2\sqrt{3})(16)$, ou $\frac{256\sqrt{3}}{3}-\frac{32\sqrt{3}}{3}$, ou $\frac{224\sqrt{3}}{3}$.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Hypatie 2008

le mercredi 16 avril 2008

Solutions

1. (a) Par définition, $3\nabla 2 = 2(3) + 2^2 + 3(2) = 6 + 4 + 6 = 16$.

   (b) On a :

$$\begin{aligned} x\nabla(-1) &= 8 \\ 2x + (-1)^2 + x(-1) &= 8 \\ x + 1 &= 8 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

   Donc $x = 7$.

   (c) On a :

$$\begin{aligned} 4\nabla y &= 20 \\ 2(4) + y^2 + 4y &= 20 \\ y^2 + 4y + 8 &= 20 \\ y^2 + 4y - 12 &= 0 \\ (y+6)(y-2) &= 0 \end{aligned}$$

   Donc $y = -6$ ou $y = 2$.

   (d) On a :

$$\begin{aligned} (w-2)\nabla w &= 14 \\ 2(w-2) + w^2 + (w-2)w &= 14 \\ 2w - 4 + w^2 + w^2 - 2w &= 14 \\ 2w^2 - 4 &= 14 \\ 2w^2 &= 18 \\ w^2 &= 9 \end{aligned}$$

   Donc $w = 3$ ou $w = -3$.

2. (a) La droite qui passe aux points $A(7,8)$ et $B(9,0)$ a pour pente : $\dfrac{8-0}{7-9} = \dfrac{8}{-2} = -4$
   Cette droite a donc une équation de la forme $y = -4x + b$, b étant un nombre quelconque.
   Puisque la droite passe au point $B(9,0)$, les coordonnées de B vérifient l'équation de la droite.
   Donc $0 = -4(9) + b$, d'où $b = 36$.
   Donc, la droite a pour équation $y = -4x + 36$.

   (b) On cherche le point d'intersection des droites d'équations $y = -4x + 36$ et $y = 2x - 10$.
   À ce point, les équations présentent la même valeur de y pour une même valeur de x.
   En posant $y = y$, on obtient $-4x + 36 = 2x - 10$, d'où $46 = 6x$, ou $x = \frac{23}{3}$.
   On reporte $x = \frac{23}{3}$ dans l'équation $y = 2x - 10$ et on obtient $y = 2(\frac{23}{3}) - 10$, soit $y = \frac{46}{3} - \frac{30}{3}$, ou $y = \frac{16}{3}$.
   Le point P a pour coordonnées $(\frac{23}{3}, \frac{16}{3})$.

   (c) *Solution 1*
   Le point A a une abscisse de 7 et le point B a une abscisse de 9.
   Ces abscisses ont une moyenne de $\frac{1}{2}(7 + 9)$, ou 8.

Le point P a une abscisse de $\frac{23}{3}$ et $\frac{23}{3} < 8$. Donc, l'abscisse de P est plus près de l'abscisse de A que de celle de B.
Puisque les points P, A et B sont alignés, alors P est plus près de A que de B.

Solution 2
Le point A a une ordonnée de 8 et le point B a une ordonnée de 0.
Ces ordonnées ont une moyenne de $\frac{1}{2}(8+0)$, ou 4.
Le point P a une ordonnée de $\frac{16}{3}$ et $\frac{16}{3} > 4$. Donc, l'ordonnée de P est plus près de celle de A que de celle de B.
Puisque les points P, A et B sont alignés, alors P est plus près de A que de B.

Solution 3
Les coordonnées respectives de A, B et P sont $(7,8)$, $(9,0)$ et $(\frac{23}{3}, \frac{16}{3})$. Donc :

$$PA = \sqrt{(7-\tfrac{23}{3})^2 + (8-\tfrac{16}{3})^2} = \sqrt{(-\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{8}{3})^2} = \sqrt{\tfrac{68}{9}}$$

et

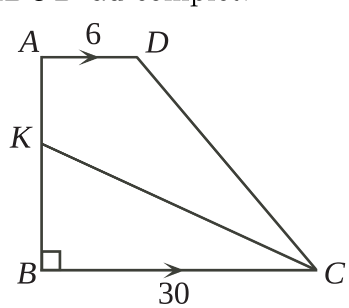
$$PB = \sqrt{(9-\tfrac{23}{3})^2 + (0-\tfrac{16}{3})^2} = \sqrt{(\tfrac{4}{3})^2 + (-\tfrac{16}{3})^2} = \sqrt{\tfrac{272}{9}}$$

Donc $PB > PA$ et P est plus près de A que de B.

3. (a) *Solution 1*
Le trapèze $ABCD$ a pour bases AD et BC et AB est une hauteur, puisqu'il est perpendiculaire à BC. De plus, $AD = 6$, $BC = 30$ et $AB = 20$.
Donc, l'aire de $ABCD$ est égale à $\frac{1}{2}(6+30)(20)$, ou 360.

Solution 2
On joint B et D.
Puisque AB est perpendiculaire à BC et que AD est parallèle à BC, alors AB est perpendiculaire à AD.
Le triangle DAB est donc rectangle en A. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(6)(20)$, ou 60.
On considère la base BC du triangle BDC et la hauteur correspondante AB. Or $BC = 30$ et $AB = 20$. Donc, l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(30)(20)$, ou 300.
L'aire du trapèze $ABCD$ est égale à la somme de l'aire du triangle DAB et de celle du triangle BDC, soit $60 + 300$, ou 360.

(b) On remarque que puisque K est situé sur AB, alors le triangle KBC et le quadrilatère $KADC$ recouvrent le trapèze $ABCD$ au complet.

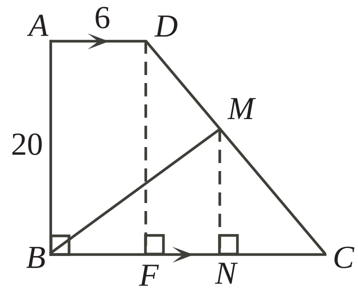


Puisque l'aire du triangle KBC est égale à celle du quadrilatère $KADC$, chacune est égale à la moitié de l'aire du trapèze $ABCD$, soit $\frac{1}{2}(360)$, ou 180.
Soit $BK = h$.

On considère la base BC du triangle KBC et la hauteur correspondante BK. Or $BC = 30$ et $BK = h$. Donc $\frac{1}{2}(30)h = 180$, d'où $h = 12$. Donc $BK = 12$.

(c) *Solution 1*

Comme dans la partie (b), l'aire du triangle MBC doit être égale à 180.



Au point M, on abaisse une perpendiculaire MN à BC.
Comme dans la partie (b), puisque la base BC du triangle MBC a une longueur de 30, alors la hauteur MN du triangle MBC doit avoir une longueur de 12 pour que le triangle ait une aire de 180.
Au point D, on abaisse une perpendiculaire DF à BC.
Puisque DF est perpendiculaire à BC, alors $ADFB$ est un rectangle. Donc $BF = 6$ et on a donc $FC = BC - BF$, c'est-à-dire $FC = 30 - 6$, ou $FC = 24$.
De plus, $DF = AB = 20$.
D'après le théorème de Pythagore, $DC = \sqrt{20^2 + 24^2} = \sqrt{400 + 576} = \sqrt{976} = 4\sqrt{61}$.
Il reste à déterminer la longueur MC.

<u>1re approche</u>

On sait que $\sin(\angle DCF) = \dfrac{DF}{DC} = \dfrac{20}{4\sqrt{61}} = \dfrac{5}{\sqrt{61}}$.

Puisque $MN = 12$, alors $MC = \dfrac{MN}{\sin(\angle DCF)} = \dfrac{12}{5/\sqrt{61}} = \dfrac{12}{5}\sqrt{61}$.

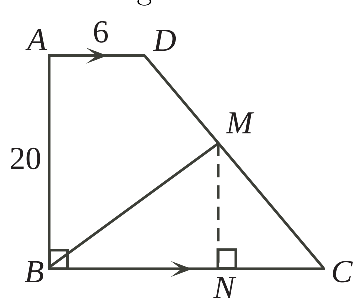
<u>2e approche</u>

Les triangles DFC et MNC sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont un angle commun C.

Donc $\dfrac{MC}{MN} = \dfrac{DC}{DF}$, d'où $MC = \dfrac{12}{20}(4\sqrt{61})$, ou $MC = \dfrac{12}{5}\sqrt{61}$.

Solution 2

Comme dans la partie (b), l'aire du triangle MBC doit être égale à 180.



Au point M, on abaisse une perpendiculaire MN à BC.
Comme dans la partie (b), puisque la base BC du triangle MBC a une longueur de 30, alors la hauteur MN du triangle MBC doit avoir une longueur de 12 pour que le triangle ait une aire de 180.

On place la figure dans un repère cartésien, de manière que B soit situé à l'origine, A soit situé sur la partie positive de l'axe des ordonnées et C soit situé sur la partie positive de l'axe des abscisses.
Les coordonnées respectives de B, A, D et C sont donc $(0,0)$, $(0,20)$ $(6,20)$ et $(30,0)$.
Puisque $MN=12$, les coordonnées de M sont $(s,12)$, s étant une nombre réel quelconque.
Puisque M est situé sur DC, la pente de MC est égale à celle de DC, c'est-à-dire que $\dfrac{0-20}{30-6}=\dfrac{0-12}{30-s}$. Donc $-20(30-s)=24(-12)$, d'où $20s-600=-288$, ou $20s=312$, ou $s=\frac{78}{5}$.
On utilise les coordonnées de M et de C pour obtenir :

$$MC=\sqrt{\left(30-\tfrac{78}{5}\right)^2+(0-12)^2}=\sqrt{\left(\tfrac{72}{5}\right)^2+12^2}=\tfrac{12}{5}\sqrt{6^2+5^2}=\tfrac{12}{5}\sqrt{61}$$

4. (a) Puisque la somme-peizi de la suite 2, 3, x, $2x$ est égale à 7, alors :

$$\begin{aligned}2(3)+2x+2(2x)+3x+3(2x)+x(2x) &= -7\\ 6+15x+2x^2 &= -7\\ 2x^2+15x+13 &= 0\\ (2x+13)(x+1) &= 0\end{aligned}$$

Donc $x=-1$ ou $x=-\frac{13}{2}$.

(b) Puisque chaque terme est égal à 1, -1 ou 2, alors les paires de termes distincts qui ont un produit de 1 doivent être « 1 et 1 » ou « -1 et -1 » .
On sait que m termes égalent 1. Combien de produits de deux termes peuvent-ils former ?
Pour former un produit, il y a m choix pour le premier facteur et $m-1$ choix pour le deuxième (c'est-à-dire n'importe quel terme sauf le premier facteur). Il y a donc $m(m-1)$ produits.
Or, chaque choix de deux facteurs a été compté deux fois (on a compté ab et ba). On doit donc diviser le nombre de produits par 2. Les m termes qui égalent 1 forment donc $\frac{1}{2}m(m-1)$ produits.
(On aurait pu dire que le nombre de produits est égal à $\dbinom{m}{2}=\dfrac{m(m-1)}{2}$.)
On sait aussi que n termes égalent -1.
De la même manière, ces termes formeront $\frac{1}{2}n(n-1)$ produits.
Le nombre de paires de termes distincts qui ont un produit de 1 est donc égal à $\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}n(n-1)$.

(c) Si la suite contient m termes qui égalent 2, elle contient $n=100-m$ termes qui égalent -1.
Les termes qui égalent 2 forment $\frac{1}{2}m(m-1)$ fois le produit 4 (soit $2\times 2=4$) dans la somme-peizi.
Les termes qui égalent -1 forment $\frac{1}{2}n(n-1)$ fois, ou $\frac{1}{2}(100-m)(99-m)$ fois le produit 1 (soit $(-1)\times(-1)=1$) dans la somme-peizi.
Les m termes qui égalent 2 et les $100-m$ termes qui égalent -1 forment $m(100-m)$ fois le produit -2 (soit $2\times(-1)=-2$) dans la somme-peizi. En effet, il y a m choix d'un terme qui égale 2 et $100-m$ choix d'un terme qui égale -1.
Puisqu'il s'agit de tous les produits possibles, la somme-peizi S est égale à :

$$S=4\left(\tfrac{1}{2}m(m-1)\right)+1\left(\tfrac{1}{2}(100-m)(99-m)\right)+(-2)\left(m(100-m)\right)$$

ou

$$S = 2m^2 - 2m + 50(99) - \tfrac{199}{2}m + \tfrac{1}{2}m^2 - 200m + 2m^2$$

ou

$$S = \tfrac{9}{2}m^2 - \tfrac{603}{2}m + 4950$$

L'équation $S = \frac{9}{2}m^2 - \frac{603}{2}m + 4950$ définit une fonction du second degré (dont la représentation graphique est une parabole ouverte vers le haut). La fonction admet une valeur minimale au sommet de la parabole. En ce point, on a :

$$m = -\frac{-\frac{603}{2}}{2\left(\frac{9}{2}\right)} = \tfrac{67}{2} = 33\tfrac{1}{2}$$

Puisque cette valeur de m n'est pas un entier, il ne s'agit pas de la valeur de m qui résout le problème.
La parabole est symétrique par rapport à son axe vertical qui passe au sommet. Les valeurs de la fonction augmentent de part et d'autre du sommet. La valeur minimale de la fonction pour une valeur entière de m est donc produite à $m = 33$ et $m = 34$ (il s'agit des entiers les plus près de $33\frac{1}{2}$ et ils sont à la même distance de $33\frac{1}{2}$).
On peut reporter $m = 33$ ou $m = 34$ dans l'expression de la somme-peizi pour obtenir la valeur minimale de $\frac{9}{2}(33)^2 - \frac{603}{2}(33) + 4950$, ou -99.

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Hypatie 2007

le mercredi 18 avril 2007

Solutions

1. (a) Voici les trajets possibles :
   $A \to B \to C \to D \to A$ $\quad$ $A \to B \to D \to C \to A$
   $A \to C \to B \to D \to A$ $\quad$ $A \to C \to D \to B \to A$
   $A \to D \to B \to C \to A$ $\quad$ $A \to D \to C \to B \to A$

   (b) Voici les trajets possibles et leur longueur :

   $A \to B \to C \to D \to A$; Long. : $AB + BC + CD + DA = 80 + 120 + 90 + 40 = 330$ km
   $A \to B \to D \to C \to A$; Long. : $AB + BD + DC + CA = 80 + 60 + 90 + 105 = 335$ km
   $A \to C \to B \to D \to A$; Long. : $AC + CB + BD + DA = 105 + 120 + 60 + 40 = 325$ km
   $A \to C \to D \to B \to A$; Long. : $AC + CD + DB + BA = 105 + 90 + 60 + 80 = 335$ km
   $A \to D \to B \to C \to A$; Long. : $AD + DB + BC + CA = 40 + 60 + 120 + 105 = 325$ km
   $A \to D \to C \to B \to A$; Long. : $AD + DC + CB + BA = 40 + 90 + 120 + 80 = 330$ km

   Il y a deux trajets de longueur minimale, soit $A \to C \to B \to D \to A$ et $A \to D \to B \to C \to A$. Leur longueur est de 325 km.
   Il y a deux trajets de longueur maximale, soit $A \to B \to D \to C \to A$ et $A \to C \to D \to B \to A$. Leur longueur est de 335 km.

   (c) *Solution 1*
   On peut écrire tous les trajets possibles :
   $A \to B \to C \to E \to D \to A$ $\quad$ $A \to B \to D \to E \to C \to A$
   $A \to C \to B \to E \to D \to A$ $\quad$ $A \to C \to D \to E \to B \to A$
   $A \to D \to B \to E \to C \to A$ $\quad$ $A \to D \to C \to E \to B \to A$
   Il y a donc 6 trajets possibles.
   (On remarque que chaque trajet de la partie (a) donne un trajet dans cette partie (c). Il suffit d'ajouter E entre les troisième et quatrième arrêts du trajet.)

   Solution 2
   On considère un trajet $A \to x \to y \to E \to z \to A$.
   Il y a 3 choix possibles pour x, soit B, C ou D.
   Pour chacun de ces choix, il y a 2 choix possibles pour y.
   Une fois que x et y sont fixés, il n'y a qu'un choix possible pour z.
   Le nombre de trajets possibles est donc égal à 3×2, ou 6.

   (d) D'après le premier renseignement, $AD + DC + CE + EB + BA = 600$ km.
   Donc $40 + 90 + CE + EB + 80 = 600$ km, d'où $CE + EB = 390$ km.
   D'après le deuxième renseignement, $AC + CD + DE + EB + BA = 700$ km.
   Donc $105 + 90 + 225 + EB + 80 = 700$ km, d'où $EB = 200$ km.
   Puisque $EB = 200$ km et $CE + EB = 390$ km, alors $CE = 190$ km. La distance de C à E est de 190 km.

2. (a) Voici une série de coups qui fonctionne :

Numéro du coup	P	Q	R	S	Remarque
	9	9	1	5	
1	8	8	4	4	3 billes ajoutées à R
2	7	7	7	3	3 billes ajoutées à R
3	6	6	6	6	3 billes ajoutées à S

   D'autres séries de coups sont possibles.

(b) i. Le nombre total de billes est égal à $31 + 27 + 27 + 7$, ou 92. À la fin, il doit donc y avoir 23 billes dans chaque seau.
Voici une série de coups qui fonctionne :

Numéro du coup	P	Q	R	S	Remarque
	31	27	27	7	
1	30	26	26	10	3 billes ajoutées à S
2	29	25	25	13	3 billes ajoutées à S
3	28	24	24	16	3 billes ajoutées à S
4	27	23	23	19	3 billes ajoutées à S
5	26	22	22	22	3 billes ajoutées à S
6	25	21	21	25	3 billes ajoutées à S
7	24	24	20	24	3 billes ajoutées à Q
8	23	23	23	23	3 billes ajoutées à R

D'autres séries de coups sont possibles.

ii. Au départ, le seau P contient 31 billes.
On veut que ce seau contienne 23 billes à la fin. Il faut donc diminuer le nombre de billes de 8. Or, dans un coup permis, le nombre de billes peut seulement diminuer de 1 (il doit diminuer de 1 ou augmenter de 3).
Il faut donc un minimum de 8 coups pour diminuer le nombre de billes dans le seau P de 31 à 23 (il se peut que l'on doive aussi en ajouter en chemin, ce qui ajoutera des coups).
Il faut donc au moins 8 coups permis pour qu'il y ait le même nombre de billes dans tous les seaux.
(Dans la partie (i), on a montré qu'il était possible de réussir en 8 coups. Donc, le minimum de coups est bien 8.)

(c) *Solution 1*
Au départ, les seaux contiennent respectivement 10, 8, 11 et 7 billes, pour un total de 36 billes. Pour que chaque seau contienne le même nombre de billes, il faudrait que chacun en contienne $36 \div 4$, ou 9.
Lors d'un coup permis, le nombre de billes dans un seau peut diminuer de 1 ou augmenter de 3.
Si un seau contient un nombre pair n de billes à un moment donné, il en contiendra $n - 1$ ou $n + 3$ après un coup permis, c'est-à-dire un nombre impair.
De même, si un seau contient un nombre impair de billes à un moment donné, il en contiendra un nombre pair après un coup permis.
Or au départ, deux seaux contiennent un nombre pair de billes et deux seaux en contiennent un nombre impair.
Après le premier coup permis, les deux seaux qui contenaient un nombre pair de billes en contiendront un nombre impair, tandis que les deux seaux qui contenaient un nombre impair de billes en contiendront un nombre pair.
Cela nous ramène à la situation initiale, soit deux seaux qui contiennent un nombre pair de billes et deux seaux qui contiennent un nombre impair de billes.
Après n'importe quel coup permis, on revient donc toujours à cette même situation.
Il est donc impossible d'en arriver à une situation dans laquelle les quatre seaux contiennent exactement 9 billes, car deux seaux contiendront toujours un nombre pair de billes.

Solution 2
Au départ, les seaux contiennent respectivement 10, 8, 11 et 7 billes, pour un total de 36 billes. Pour que chaque seau contienne le même nombre de billes, il faudrait que chacun en contienne $36 \div 4$, ou 9.
Lors d'un coup permis, le nombre de billes dans un seau peut diminuer de 1 ou augmenter de 3.

On montrera qu'il est impossible d'en arriver à une situation où chaque seau contient 9 billes en démontrant la propriété suivante :

> Si, à un moment donné, la différence entre le nombre de billes dans n'importe quels deux seaux est un multiple de 4, alors avant le dernier coup permis, cette situation existait aussi.

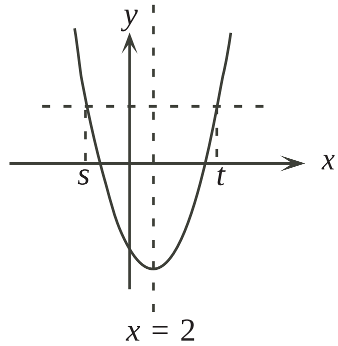
Supposons qu'à un moment donné la différence entre le nombre de billes dans n'importe quels deux seaux est un multiple de 4. (On sait que cette situation se produirait à la fin, car il y aurait alors une différence de 0 entre les nombres de billes dans les sacs et 0 est multiple de 4.)
Soit a, b, c et d les nombres respectifs de billes dans les seaux P, Q, R et S.
On choisit n'importe quels deux seaux, par exemple, A et B. Avant le dernier coup, ces deux seaux contenaient chacun 1 bille de plus (soit $a+1$ et $b+1$, ce qui conserve la différence) ou un seau en contenait 1 de plus et l'autre en contenait 3 de moins (soit $a+1$ et $b-3$ ou bien $a-3$ et $b+1$, ce qui change la différence de 4).
Donc, avant ce coup, les différences entre les nombres de billes dans les seaux étaient des multiples de 4.
Pour en arriver à 9 billes dans chaque seau, il faudrait donc que les différences, entre les nombres de billes dans n'importe quels deux seaux, soient toujours des multiples de 4.
Or, au départ, cette situation n'est pas vraie. En effet, les seaux contiennent 10, 8, 11 et 7 billes et $11-10$ n'est pas un multiple de 4).
Il est donc impossible d'arriver à 9 billes dans chaque seau.

3. (a) Si $f(x)=0$, alors $x^2-4x-21=0$.
On factorise le membre de gauche pour obtenir $(x-7)(x+3)=0$, d'où $x=7$ ou $x=-3$.
Les valeurs de x sont donc 7 et -3. (On aurait pu résoudre en employant la formule pour une équation du second degré.)

(b) *Solution 1*
On complète le carré dans l'équation initiale :

$$f(x)=x^2-4x-21=x^2-4x+4-4-21=(x-2)^2-25$$

La parabole d'équation $y=f(x)$ a donc pour axe de symétrie la droite verticale définie par $x=2$. (On aurait pu obtenir ce résultat par symétrie, à partir des résultats de la partie (a).)
Si $f(s)=f(t)$, alors s et t sont situés de part et d'autre de l'axe de symétrie, à la même distance de $x=2$.



Donc, la moyenne de s et de t est égale à 2. On a donc $\frac{1}{2}(s+t) = 2$, ou $s + t = 4$.

Solution 2
On procède de façon algébrique :

$$\begin{aligned} s^2 - 4s - 21 &= t^2 - 4t - 21 \\ s^2 - t^2 - 4s + 4t &= 0 \\ (s+t)(s-t) - 4(s-t) &= 0 \\ (s+t-4)(s-t) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $s + t - 4 = 0$ ou $s - t = 0$.
Puisque s et t sont des nombres différents, alors $s - t \neq 0$.
Donc $s + t - 4 = 0$, ou $s + t = 4$.

(c) *Solution 1*
On procède de façon algébrique, comme dans la solution précédente :

$$\begin{aligned} (a^2 - 4a - 21) - (b^2 - 4b - 21) &= 4 \\ a^2 - b^2 - 4a + 4b &= 4 \\ (a+b-4)(a-b) &= 4 \end{aligned}$$

Puisque a et b sont des entiers, alors $a+b-4$ et $a-b$ le sont aussi. Pour résoudre l'équation, on cherche des entiers dont le produit est égal à 4.
On examine les possibilités à l'aide d'un tableau. L'expression $2a-4$, dans la 3e colonne, est obtenue en additionnant les expressions $a + b - 4$ et $a - b$. Elle nous permet de déterminer la valeur de a et de là, celle de b.

$a+b-4$	$a-b$	$2a-4$	a	b
4	1	5	$\frac{9}{2}$	$\frac{7}{2}$
2	2	4	4	2
1	4	5	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$
-4	-1	-5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
-2	-2	-4	0	2
-1	-4	-5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$

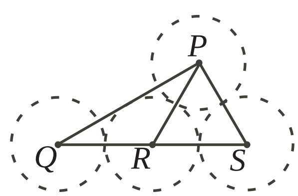
La solution à valeurs entières strictement positives est $(a, b) = (4, 2)$.
(On aurait pu réduire le travail dans le tableau en remarquant que si $a + b - 4 = x$ et $a - b = y$, alors $2a = x + y$, ce qui indique que la valeur de $x + y$ (soit la somme des valeurs de $a + b - 4$ et de $a - b$) doit être paire, ce qui élimine toutes les lignes du tableau à l'exception de deux.)

Solution 2
D'après la partie (b), la parabole d'équation $y = f(x)$ a pour sommet $(2, -25)$.
Puisque l'équation de la parabole a un premier coefficient égal à 1, la parabole est congruente à la parabole d'équation $y = x^2$ et elle est orientée vers le haut.
Sur la parabole d'équation $y = x^2$, les points de treillis, vers la droite à partir du sommet, sont $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,9)$, $(4,16)$, et ainsi de suite. Les différences verticales successives sont 1, 3, 5, 7, etc.
Il existe une régularité semblable si on arrive de la gauche vers le sommet.
Les différences verticales successives sont :

$$\ldots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots$$

Puisque les paraboles sont congruentes et orientées vers le haut, cette même régularité existe pour la parabole d'équation $y = f(x)$. Pour que $f(a) - f(b) = 4$, a et b étant des entiers, il faut trouver une séquence de différences consécutives dont la somme est égale à 4 ou à -4 (selon que a ou b est plus à gauche).
Les seules séquences possibles sont $(-3), (-1)$ et $1, 3$, qui donnent $(-3) + (-1) = (-4)$ et $1 + 3 = 4$. Dans le premier cas, on doit se déplacer de 2 vers la gauche de l'axe de symétrie d'équation $x = 2$. On a donc $a = 0$ et $b = 2$. (Dans ce cas, a n'est pas un entier strictement positif.) Dans le deuxième cas, on doit se déplacer de 2 vers la droite de l'axe de symétrie. On a donc $a = 4$ et $b = 2$.
Donc $a = 4$ et $b = 2$.

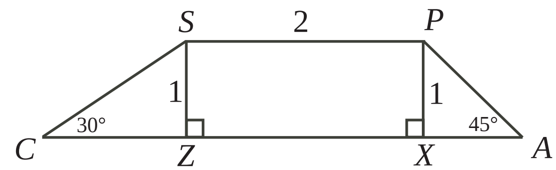
4. (a) On trace les segments PQ, PR, PS, RQ et RS.
Puisque les cercles de centres Q, R et S sont tangents à BC, alors QR et RS sont parallèles à BC (les centres Q, R et S sont situés à 1 unité au-dessus de BC).
Donc, le segment QS passe par le point R.
Lorsqu'on joint les centres de deux cercles tangents, le segment obtenu passe par le point de contact. La longueur de ce segment est donc égale à la somme des rayons.
Donc $QR = RS = PR = PS = 1 + 1 = 2$.



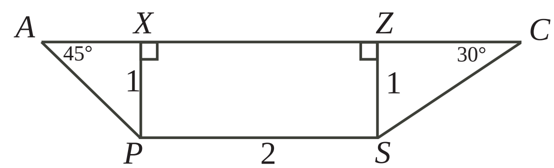
Puisque $PR = PS = RS$, le triangle PRS est équilatéral. Donc $\angle PSR = \angle PRS = 60°$.
Puisque $\angle PRS = 60°$ et que QRS est un segment de droite, alors $\angle QRP = 180° - 60°$, ou $\angle QRP = 120°$.
Puisque $QR = RP$, le triangle QRP est isocèle. Donc $\angle PQR = \frac{1}{2}(180° - 120°)$, ou $\angle PQR = 30°$.
Puisque $\angle PQS = 30°$ et $\angle PSQ = 60°$, alors $\angle QPS = 180° - 30° - 60°$, ou $\angle QPS = 90°$.
Le triangle PQS est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.

(b) D'après la partie (a), les segments QS et BC sont parallèles.
De même, puisque P et S sont situés à 1 unité du segment AC, alors PS est parallèle à AC.
Puisque P et Q sont situés à 1 unité du segment AB, alors PQ est parallèle à AB.
Donc, les côtés du triangle PQS sont parallèles aux côtés correspondants du triangle ABC.

Donc, les angles du triangle ABC sont respectivement égaux aux angles correspondants du triangle PQS. Le triangle ABC est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Si on réussit à déterminer la longueur d'un côté du triangle ABC, on peut déterminer la longueur de ses autres côtés en utilisant le rapport des longueurs de côtés d'un triangle remarquable 30°-60°-90°.
On considère le côté AC.
Puisque le cercle de centre P est tangent aux côtés AB et AC, la droite qui passe par les points A et P est la bissectrice de l'angle BAC. Donc $\angle PAC = 45°$.
De même, la droite qui passe par les points C et S est la bissectrice de l'angle ACB. Donc $\angle SCA = 30°$.
On considère le trapèze $APSC$, c'est-à-dire

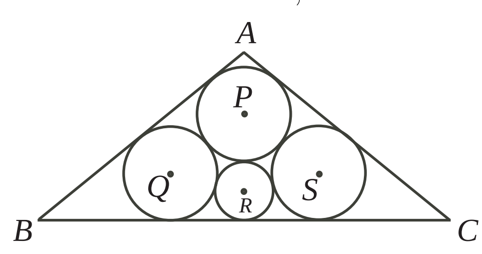


ou



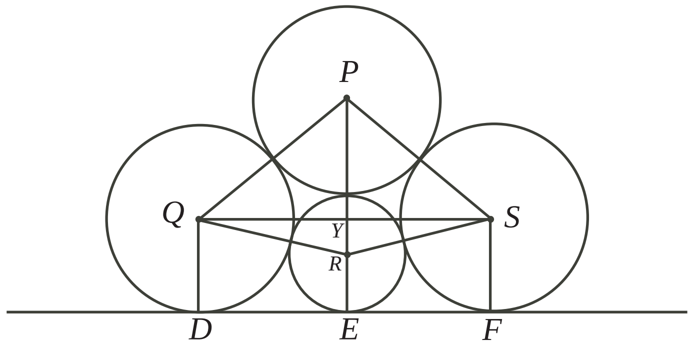
selon la perspective choisie. Aux points P et S, on abaisse des perpendiculaires PX et SZ au côté AC.
Puisque PS est parallèle à AC et que PX et SZ sont perpendiculaires à AC, alors $PXZS$ est un rectangle. Donc $XZ = PS = 2$.
Puisque le triangle AXP est rectangle en X, que $PX = 1$ (le rayon du cercle) et que $\angle PAX = 45°$, alors $AX = PX = 1$.
Puisque le triangle CZS est rectangle en Z, que $SZ = 1$ (le rayon du cercle) et que $\angle SCZ = 30°$, alors $CZ = \sqrt{3}SZ$, ou $CZ = \sqrt{3}$ (puisque le triangle SZC est un triangle remarquable 30°-60°-90°).
Donc $AC = 1 + 2 + \sqrt{3}$, ou $AC = 3 + \sqrt{3}$.
Puisque le triangle ABC est un triangle remarquable 30°-60°-90°, car $\angle ACB = 60°$ et $\angle CAB = 90°$, alors $BC = 2AC = 6 + 2\sqrt{3}$ et $AB = \sqrt{3}AC = \sqrt{3}(3 + \sqrt{3})$, ou $AB = 3\sqrt{3} + 3$.
Dans le triangle ABC, on a donc $AC = 3 + \sqrt{3}$, $AB = 3\sqrt{3} + 3$ et $BC = 6 + 2\sqrt{3}$.

(c) Après les transformations décrites dans l'énoncé, on obtient la figure suivante.



Aux points Q, R et S, on abaisse des perpendiculaires QD, PE et SF au côté BC. Puisque les cercles de centres Q, R et S sont tangents au côté BC, alors D, E et F sont les points de contact de ces cercles avec le côté BC.
Donc $QD = SF = 1$ et $RE = r$.
On trace les segments QR, RS, PS, PQ et PR.

Puisqu'on a joint des centres de cercles tangents, alors $PQ = PS = 2$
et $QR = RS = PR = 1 + r$.
On trace QS.
Par symétrie, PRE est un segment de droite (c.-à-d. que PE passe par le point R).
Puisque QS est parallèle à BC, comme dans les parties (a) et (b), alors QS est perpendiculaire à PR et ces segments se coupent en Y.



Puisque $QD = 1$, alors $YE = 1$. Puisque $RE = r$, alors $YR = 1 - r$.
Puisque $QR = 1 + r$, $YR = 1 - r$ et que le triangle QYR est rectangle en Y, alors d'après le théorème de Pythagore :

$$QY^2 = QR^2 - YR^2 = (1 + r)^2 - (1 - r)^2 = (1 + 2r + r^2) - (1 - 2r + r^2) = 4r$$

Puisque $PR = 1 + r$ et $YR = 1 - r$, alors $PY = PR - YR = 2r$.
Puisque le triangle PYQ est rectangle en Y, alors :

$$\begin{aligned} PY^2 + YQ^2 &= PQ^2 \\ (2r)^2 + 4r &= 2^2 \\ 4r^2 + 4r &= 4 \\ r^2 + r - 1 &= 0 \end{aligned}$$

On utilise la formule pour résoudre cette équation du second degré.
On obtient $r = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2}$, ou $r = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Puisque $r > 0$, alors $r = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (ce qui est l'inverse du célèbre nombre d'or).

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Hypatie 2006

le jeudi 20 avril 2006

Solutions

1. (a) *Solution 1*

Le 1^{er} entier impair positif est 1. Pour obtenir le 2^e entier impair positif, on ajoute 2 à 1, ce qui donne 3. Pour obtenir le 3^e entier impair positif, on ajoute 2 à 3, ou 2×2 à 1, ce qui donne 5. Cette régularité se poursuit.
Pour obtenir le 25^e entier impair positif, on ajoute 24×2 à 1, ce qui donne 49.
Le 25^e entier impair positif est donc 49.
Dans les 6 premières lignes, le nombre d'entiers est égal à $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, ou 21.
Le 25^e entier impair positif est donc dans la ligne suivante, soit la 7^e ligne.

Solution 2

Le 1^{er} entier impair positif est 1. Il est 1 de moins que le 1^{er} entier pair positif, soit 2.
Le 2^e entier impair positif est 3. Il est 1 de moins que le 2^e entier pair positif, soit 4.
Cette régularité se poursuit. Le 25^e entier impair positif est 1 de moins que le 25^e entier pair positif. Il est donc 1 de moins que 25×2, c'est-à-dire 1 de moins que 50.
Le 25^e entier impair positif est donc 49.
Dans les 6 premières lignes, le nombre d'entiers est égal à $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, ou 21.
Le 25^e entier impair positif est donc dans la ligne suivante, soit la 7^e ligne.

(b) Dans l'arrangement triangulaire, la 1^{re} ligne contient 1 entier, la 2^e ligne en contient 2, la 3^e ligne en contient 3, et ainsi de suite. Le nombre d'entiers dans les 20 premières lignes est donc égal à $1 + 2 + 3 + \cdots + 19 + 20$. Cette somme est égale à $\dfrac{20(21)}{2}$, ou 210. (On a utilisé le fait que $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$).
Le 19^e nombre qui paraît dans la 21^e ligne est le $(210 + 19)^{\text{e}}$ entier impair positif, c'est-à-dire le 229^e entier impair positif.
D'après l'une ou l'autre des approches de la partie (a), cet entier est égal à $1 + 228(2)$ ou $229(2) - 1$, c'est-à-dire à 457.

(c) Pour obtenir 1001, on doit ajouter 500×2 à 1. Donc, 1001 est le 501^e entier impair positif.
D'après la partie (b), les 20 premières lignes contiennent 210 entiers. Donc, le numéro de la ligne de 1001 est de beaucoup supérieur à 20.
On peut vérifier le nombre d'entiers qu'il y a dans les 30 premières lignes. Il y en a $1 + 2 + \cdots + 29 + 30$, c'est-à-dire $\dfrac{30(31)}{2}$, ou 465.
Dans les 31 premières lignes, il y a $465 + 31$, ou 496 entiers.
Puisque 1001 est le 501^e entier impair positif, il doit être le 5^e élément de la 32^e ligne.

2. (a) On détermine d'abord la longueur BE.
Puisque $AE = 24$ et $\angle AEB = 60°$, alors $BE = 24\cos(60°)$, d'où $BE = 24\left(\frac{1}{2}\right)$, ou $BE = 12$. (On aurait pu utiliser le fait que le triangle ABE est un triangle remarquable 30°-60°-90°, d'où $BE = \frac{1}{2}AE$.)
Puisque $BE = 12$ et $\angle BEC = 60°$, alors $CE = 12\cos(60°)$, d'où $CE = 12\left(\frac{1}{2}\right)$, ou $CE = 6$.

(b) On utilise la même stratégie que dans la partie (a) :

$$\begin{aligned}
AB &= 24\sin(60^\circ) = 24\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 12\sqrt{3}\\
BC &= 12\sin(60^\circ) = 12\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}\\
CD &= 6\sin(60^\circ) = 6\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}\\
ED &= 6\cos(60^\circ) = 6\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3
\end{aligned}$$

Le périmètre du quadrilatère $ABCD$ est égal à $AB + BC + CD + DA$. Puisque $DA = DE + EA$, le périmètre est égal à $12\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3 + 24$, ou $27 + 21\sqrt{3}$.

(c) L'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à la somme de l'aire des triangles ABE, BCE et CDE. Donc :

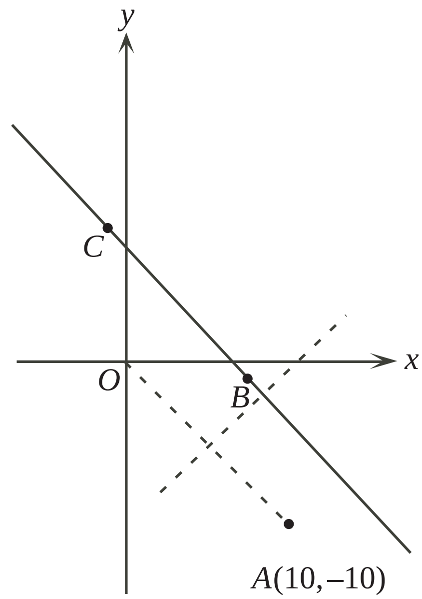
$$\begin{aligned}
\text{Aire} &= \tfrac{1}{2}(BE)(BA) + \tfrac{1}{2}(CE)(BC) + \tfrac{1}{2}(DE)(DC)\\
&= \tfrac{1}{2}(12)(12\sqrt{3}) + \tfrac{1}{2}(6)(6\sqrt{3}) + \tfrac{1}{2}(3)(3\sqrt{3})\\
&= 72\sqrt{3} + 18\sqrt{3} + \tfrac{9}{2}\sqrt{3}\\
&= \tfrac{189}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

3. (a) Puisque la droite passe par les points B et C, sa pente est égale à $\dfrac{-1-7}{7-(-1)}$, ou -1.
Puisque $(7, -1)$ est sur la droite, l'équation est $y - (-1) = -1(x - 7)$, ou $y = -x + 6$.

(b) *Solution 1*
Soit p l'abscisse de P. Puisque P est sur d, ses coordonnées vérifient l'équation $y = -x+6$.
Son ordonnée est donc égale à $-p + 6$ et ses coordonnées sont $(p, -p + 6)$.
Puisque A a pour coordonnées $(10, -10)$, alors $PA = \sqrt{(p-10)^2 + (-p+16)^2}$.
Puisque O a pour coordonnées $(0, 0)$, alors $PO = \sqrt{p^2 + (-p+6)^2}$.
On veut que $PA = PO$, d'où $PA^2 = PO^2$. Donc :

$$\begin{aligned}
(p-10)^2 + (-p+16)^2 &= p^2 + (-p+6)^2\\
p^2 - 20p + 100 + p^2 - 32p + 256 &= p^2 + p^2 - 12p + 36\\
320 &= 40p\\
p &= 8
\end{aligned}$$

Les coordonnées de P sont $(8, -2)$.



Solution 2

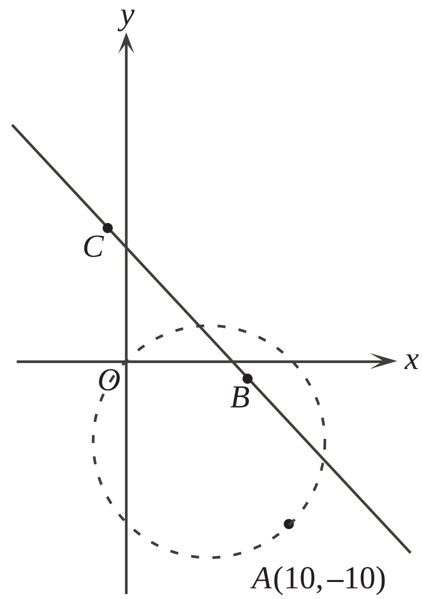
Puisque P doit être équidistant de A et de O, il doit être situé sur la médiatrice de AO.
Puisque A et O ont pour coordonnées respectives $(10, -10)$ et $(0, 0)$, alors la pente de AO est égale à -1. La médiatrice de AO, qui lui est perpendiculaire, a donc une pente de 1. Elle passe par le milieu $(5, -5)$ de AO.
L'équation de la médiatrice est donc $y - (-5) = x - 5$, ou $y = x - 10$.
P est le point d'intersection de la droite d, d'équation $y = -x+6$, et de la droite d'équation $y = x - 10$. Au point P, on a donc $-x + 6 = x - 10$, d'où $2x = 16$, ou $x = 8$.
Les coordonnées de P sont $(8, -2)$.

(c) *Solution 1*

Puisque Q est situé sur la droite d, ses coordonnées ont la forme $(q, -q+6)$, comme dans la partie (b).
Pour que l'angle OQA mesure $90°$, il faut que la pente de OQ et celle de QA aient un produit de -1. Or, la pente de OQ est égale à $\dfrac{-q+6}{q}$. La pente de QA est égale à $\dfrac{-q+6-(-10)}{q-10}$, ou $\dfrac{-q+16}{q-10}$. On a donc :

$$
\begin{aligned}
\frac{-q+6}{q} \cdot \frac{-q+16}{q-10} &= -1 \\
(-q+6)(-q+16) &= -q(q-10) \\
q^2 - 22q + 96 &= -q^2 + 10q \\
2q^2 - 32q + 96 &= 0 \\
q^2 - 16q + 48 &= 0 \\
(q-4)(q-12) &= 0
\end{aligned}
$$

Donc, $q = 4$ ou $q = 12$ et les coordonnées de Q sont $(4, 2)$ ou $(12, -6)$.



Solution 2
Pour que l'angle OQA mesure 90°, il faut que Q soit situé sur le cercle de diamètre OA.
Le centre de ce cercle a pour centre le milieu M du diamètre OA, soit $(5,-5)$.
Le rayon de ce cercle est égal à OM, soit $\sqrt{5^2+(-5)^2}$, ou $\sqrt{50}$.
Le cercle a donc pour équation $(x-5)^2+(y+5)^2=50$.
Les points Q que l'on cherche sont situés sur le cercle et sur la droite d d'équation $y=-x+6$. Ce sont des points d'intersection. Donc à ces points, on a :

$$\begin{aligned}(x-5)^2+(-x+6+5)^2 &= 50\\ x^2-10x+25+x^2-22x+121 &= 50\\ 2x^2-32x+96 &= 0\\ x^2-16x+48 &= 0\\ (x-4)(x-12) &= 0\end{aligned}$$

Donc, $x=4$ ou $x=12$ et les coordonnées de Q sont $(4,2)$ ou $(12,-6)$.

4. (a) Soit p un nombre premier. Les diviseurs positifs de p sont 1 et p. Donc $\sigma(p)=1+p$. Donc :

$$I(p)=\frac{1+p}{p}=\frac{1}{p}+1\le\tfrac{1}{2}+1=\tfrac{3}{2}$$

puisque $p\ge 2$.

(b) *Solution 1*
Soit p un nombre premier impair et k un entier strictement positif. On a $p\ge 3$.
Les diviseurs premiers de p^k sont 1, p, p^2, …, p^{k-1}, p^k. Donc :

$$I(p^k)=\frac{1+p+p^2+\cdots+p^k}{p^k}=\frac{1}{p^k}\left(\frac{1(p^{k+1}-1)}{p-1}\right)=\frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}-p^k}$$

Donc :

$$
\begin{array}{rrcl}
 & I(p^k) & < & 2 \\
\iff & \dfrac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}-p^k} & < & 2 \\
\iff & p^{k+1}-1 & < & 2(p^{k+1}-p^k) \\
\iff & 0 & < & p^{k+1}-2p^k+1 \\
\iff & 0 & < & p^k(p-2)+1
\end{array}
$$

Or, cette dernière inégalité est vraie puisque $p \geq 3$.

Solution 2
Soit p un nombre premier impair et k un entier strictement positif. On a $p \geq 3$. Les diviseurs premiers de p^k sont 1, p, p^2, ..., p^{k-1}, p^k. Donc :

$$
\begin{aligned}
I(p^k) &= \frac{p^k + p^{k-1} + \cdots + p + 1}{p^k} \\
&= 1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^{k-1}} + \frac{1}{p^k} \\
&= \frac{1\left(1 - \left(\dfrac{1}{p}\right)^{k+1}\right)}{1 - \dfrac{1}{p}} \qquad \text{(somme d'une série géométrique)} \\
&< \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p}} \\
&= \frac{p}{p-1} \\
&= 1 + \frac{1}{p-1} \\
&\leq 1 + \frac{1}{2} \\
&< 2
\end{aligned}
$$

(c) Puisque p est un nombre premier, les diviseurs positifs de p^2 sont 1, p et p^2. Donc $I(p^2) = \dfrac{1+p+p^2}{p^2}$. Puisque q est un nombre premier, $I(q) = \dfrac{1+q}{q}$, comme dans la partie (a). Puisque p et q sont des nombres premiers, les diviseurs positifs de p^2q sont 1, p, p^2, q, pq

et p^2q. Donc :

$$\begin{aligned} I(p^2q) &= \frac{1+p+p^2+q+pq+p^2q}{p^2q} \\ &= \frac{(1+p+p^2)+q(1+p+p^2)}{p^2q} \\ &= \frac{(1+p+p^2)(1+q)}{p^2q} \\ &= \frac{1+p+p^2}{p^2}\cdot\frac{1+q}{q} \\ &= I(p^2)I(q) \end{aligned}$$

(d) On présente d'abord quelques propriétés de $I(n)$:

- D'après la partie (b), si n est un nombre premier, alors $I(n) < 2$. Alors, pour déterminer un entier n pour lequel $I(n) > 2$, il faut chercher parmi les nombres composés.
- Soit $n = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}\cdots{p_m}^{e_m}$, chaque p_i étant un nombre premier distinct et chaque e_i étant un entier strictement positif. En prolongeant le résultat de la partie (c), on obtient $I(n) = I({p_1}^{e_1})I({p_2}^{e_2})\cdots I({p_m}^{e_m})$.
- Soit p et q deux nombres premiers. Si $p < q$, alors $I(p^k) > I(q^k)$.
  En effet, on a $I(p^k) = \dfrac{p^k+p^{k-1}+\cdots+p+1}{p^k} = 1+\dfrac{1}{p}+\cdots+\dfrac{1}{p^{k-1}}+\dfrac{1}{p^k}$. De même, $I(q^k) = 1+\dfrac{1}{q}+\cdots+\dfrac{1}{q^{k-1}}+\dfrac{1}{q^k}$. Puisque $p < q$, alors $\dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{q}$, $\dfrac{1}{p^2} > \dfrac{1}{q^2}$, etc. Donc $I(p^k) > I(q^k)$.
- D'après la propriété précédente, il est préférable d'utiliser des petits facteurs premiers pour faire augmenter la valeur de $I(n)$. Ainsi, étant donné une valeur de n et la valeur correspondante de $I(n)$, on peut obtenir un nombre m, de manière que $I(m) > I(n)$, en choisissant la factorisation première de n puis en remplaçant certains facteurs premiers par des facteurs premiers inférieurs pour former m. (Par exemple, si $n = 5^27^311$, on choisit $m = 5^23^37$ pour obtenir $I(m) > I(n)$.)
- D'après la partie (b), $I(p^k) < \dfrac{p}{p-1}$. Donc $I(3^a) < \frac{3}{2}$ et $I(5^b) < \frac{5}{4}$.
  On a donc $I(3^a5^b) = I(3^a)I(5^b) < \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2$.
- D'après les deux propriétés précédentes, il est impossible d'obtenir $I(n) > 2$ si n est le produit de deux nombres premiers distincts. Donc, n doit admettre au moins trois facteurs premiers distincts.

On considère les entiers n de la forme $3^a5^b7^c$ et on tente de déterminer des valeurs de a, de b et de c de manière que $I(n) > 2$:

a	b	c	n	$I(n)$
1	1	1	105	$I(n) = I(3)I(5)I(7) = \frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7} = \frac{64}{35} < 2$
2	1	1	315	$I(n) = I(3^2)I(5)I(7) = \frac{13}{9}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7} = \frac{208}{105} < 2$
3	1	1	945	$I(n) = I(3^3)I(5)I(7) = \frac{40}{27}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7} = \frac{128}{63} > 2$

Donc $I(945) > 2$.

Pourquoi $n = 945$ est-il le plus petit entier impair positif pour lequel $I(n) > 2$?

- On remarque que tout entier impair positif qui admet quatre facteurs premiers distincts doit être supérieur ou égal à 3(5)(7)(11), c'est-à-dire 1155. Puisque ce nombre est supérieur à 945, on peut s'en tenir aux entiers qui admettent trois facteurs premiers distincts.

- D'après la troisième propriété, on peut aussi s'en tenir aux facteurs premiers 3, 5 et 7.
- De plus, il suffit de considérer les factorisations premières de la forme $3^{e_1} \cdot 5^{e_2} \cdot 7^{e_3}$, où $e_1 \geq e_2 \geq e_3$. En effet, si on avait $e_i < e_j$, il suffirait d'interchanger ces deux exposants pour obtenir un entier plus petit. (Par exemple, $3^2 5^3 7$ est plus grand que $3^3 5^2 7$.)
- D'après le point précédent, on peut voir, d'après le tableau, qu'il n'y a aucune valeur de n inférieure à 945 que l'on peut vérifier.

Donc, $n = 945$ est le plus petit entier impair positif pour lequel $I(n) > 2$.

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Hypatie 2005

Le mercredi 20 avril 2005

Solutions

1. (a) D'après la définition, $2 \diamond 3 = 2^2 - 4(3) = 4 - 12 = -8$.

   (b) D'après la définition, $k \diamond 2 = k^2 - 4(2) = k^2 - 8$.
   D'après la définition, $2 \diamond k = 2^2 - 4(k) = 4 - 4k$.
   On cherche donc toutes les valeurs de k pour lesquelles :

$$\begin{aligned} k^2 - 8 &= 4 - 4k \\ k^2 + 4k - 12 &= 0 \\ (k+6)(k-2) &= 0 \end{aligned}$$

   Donc $k = -6$ ou $k = 2$.
   On peut vérifier : $(-6) \diamond 2 = (-6)^2 - 4(2) = 28$ et $2 \diamond (-6) = 2^2 - 4(-6) = 28$.
   Donc, $k = -6$ vérifie la condition.
   De même, si $k = 2$, alors $2 \diamond 2 = 2 \diamond 2$. Donc, $k = 2$ vérifie la condition.

   (c) Puisque $3 \diamond x = y$, alors $3^2 - 4x = y$, ou $9 - 4x = y$.
   Puisque $2 \diamond y = 8x$, alors $2^2 - 4y = 8x$, ou $4 - 4y = 8x$.
   On doit donc résoudre un système de deux équations à deux inconnues.
   On reporte $y = 9 - 4x$ dans l'équation $4 - 4y = 8x$:

$$\begin{aligned} 4 - 4(9 - 4x) &= 8x \\ 4 - 36 + 16x &= 8x \\ 8x &= 32 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

   Puisque $x = 4$, alors $y = 9 - 4(4)$, ou $y = -7$.
   (Il y a d'autres façons de résoudre ce système.)
   On peut vérifier : $3 \diamond x = 3 \diamond 4 = 3^2 - 4(4) = -7 = y$ et
   $2 \diamond y = 2 \diamond (-7) = 2^2 - 4(-7) = 32 = 8x$.
   La solution est bien $x = 4$ et $y = -7$.

2. (a) Puisque 3 cure-dents, puis 1 cure-dent, puis 4 cure-dents ont été enlevés de la pile initiale de 11 cure-dents, il reste 3 cure-dents dans la pile.
   Selon les 2^e^ et 3^e^ règlements, Carla peut seulement enlever 2 ou 5 cure-dents, puisque 3 cure-dents, 1 cure-dent et 4 cure-dents ont déjà été enlevés.
   Puisqu'il reste 3 cure-dents, elle doit en enlever 2.
   Il reste maintenant 1 cure-dent dans la pile. Puisque Gilles ne peut en enlever que 5, il ne peut plus jouer.
   Puisque Carla est la dernière personne qui a réussi à jouer, elle est gagnante.

   (b) Après que Gilles a enlevé 5 cure-dents, il en reste 5. Carla peut donc en enlever 1, 2, 3 ou 4 à son tour.
   Si Carla en enlève 1, il en restera 4 et Gilles peut tous les enlever (puisque personne n'a encore enlevé 4 cure-dents à ce point-ci). La pile est alors vide et Gilles gagne.
   Si Carla en enlève 2, il en restera 3 et Gilles peut tous les enlever (puisque personne n'a encore enlevé 3 cure-dents à ce point-ci). La pile est alors vide et Gilles gagne.
   Si Carla en enlève 3, il en restera 2 et Gilles peut tous les enlever (puisque personne n'a encore enlevé 2 cure-dents à ce point-ci). La pile est alors vide et Gilles gagne.
   Si Carla en enlève 4, il en restera 1 et Gilles peut l'enlever (puisque personne n'a encore enlevé 1 cure-dent à ce point-ci). La pile est alors vide et Gilles gagne.
   Donc, peu importe le nombre de cure-dents que Carla enlève à son tour, Gilles peut gagner.

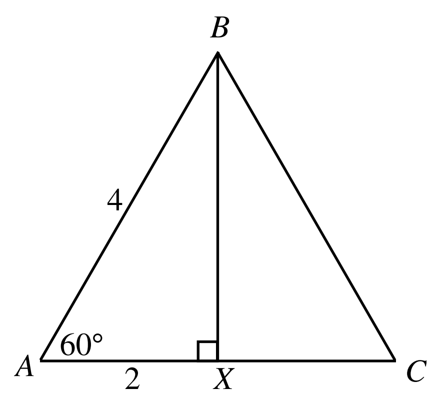
(c) Après que Gilles a enlevé 2 cure-dents, il en reste 7. Carla peut donc en enlever 1, 3, 4 ou 5 à son tour.
Si Carla enlève 5 cure-dents, il en reste 2. Or, Gilles a seulement le droit d'en enlever 1, 3 ou 4. Il en enlève donc 1 et il en reste alors 1. Carla ne peut plus enlever 1 cure-dent, car les choix qui restent sont 3 et 4. Elle serait alors perdante. Carla ne devrait donc pas enlever 5 cure-dents.

Si Carla enlève 3 ou 4 cure-dents, il en reste respectivement 4 ou 3. Gilles peut tous les enlever, car dans chaque cas, le nombre n'a pas été utilisé. Donc, Carla ne devrait pas enlever 3 ou 4 cure-dents. (Si Gilles enlevait 1 cure-dent au lieu de 4 ou 3 cure-dents, il serait tout de même assuré de gagner, car Carla ne pourrait plus jouer. Pourquoi ?)

Si Carla enlève 1 cure-dent, il en reste 6. Gilles peut en enlever 3, 4 ou 5. Si Gilles en enlève 5, il en reste 1 et Carla ne peut plus jouer, puisqu'elle ne peut en enlever que 3 ou 4. Gilles gagne. Si Gilles enlève 4 cure-dents, il en reste 2 et Carla ne peut en enlever 2 ou 3 puisque ces nombres ont déjà été utilisés. Gilles gagne. Si Gilles enlève 3 cure-dents, il en reste 3 et Carla ne peut en enlever 1, 2 ou 3, puisque ces nombres ont déjà été utilisés. Gilles gagne.

Donc, peu importe comment Carla joue par la suite, Gilles peut gagner.

3. (a) *Solution 1*
Au point B, on abaisse une perpendiculaire BX au côté AC.
Puisque le triangle ABC est équilatéral, alors $AB = CB$ et X est donc le milieu de AC. Donc $AX = 2$.



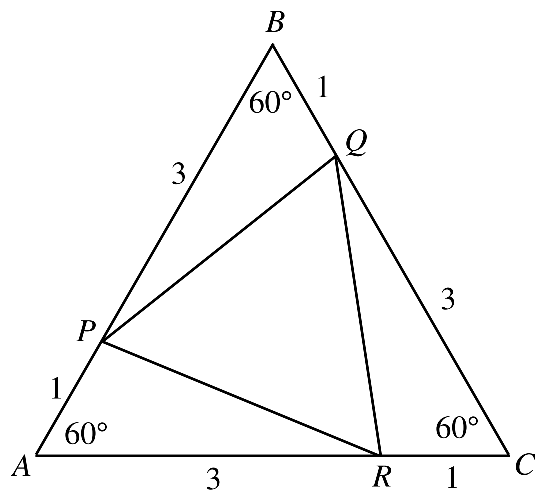
D'après le théorème de Pythagore, $BX = \sqrt{AB^2 - AX^2}$, c'est-à-dire que $BX = \sqrt{4^2 - 2^2}$, d'où $BX = \sqrt{12}$, ou $BX = 2\sqrt{3}$.
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(AC)(BX)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(2\sqrt{3})$, ou $4\sqrt{3}$.

Solution 2
Au point B, on abaisse une perpendiculaire BX au côté AC.
Puisque le triangle ABC est équilatéral, alors $AB = CB$ et X est donc le milieu de AC. Donc $AX = 2$.
Puisque $\angle BAX = 60°$ et que BX est perpendiculaire à AX, alors le triangle BAX est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $BX = \sqrt{3}AX$, d'où $BX = 2\sqrt{3}$.
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(AC)(BX)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(2\sqrt{3})$, ou $4\sqrt{3}$.

Solution 3
Au point B, on abaisse une perpendiculaire BX au côté AC.
Puisque le triangle ABC est équilatéral, alors $AB = CB$ et X est donc le milieu de AC.
Donc $AX = 2$.
Puisque $\angle BAX = 60°$, alors $BX = BA\sin(60°)$, d'où $BX = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ou $BX = 2\sqrt{3}$.
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(AC)(BX)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(2\sqrt{3})$, ou $4\sqrt{3}$.

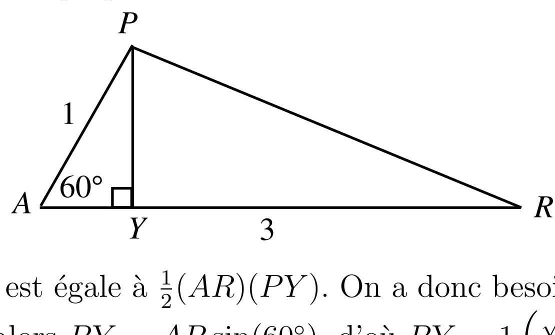
Solution 4
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(AB)(AC)\sin(\angle BAC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(4)\sin(60°)$, ou $8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ou $4\sqrt{3}$.

(b) Puisque $AP = BQ = CR = 1$ et que $AB = BC = CA = 4$, alors $AR = BP = CQ = 3$.



Puisque $AP = BQ = CR = 1$, que $PB = QC = RA = 3$ et que $\angle RAP = \angle BPQ = \angle QCR = 60°$, alors les triangles RAP, PBQ et QCR sont congruents (deux côtés et l'angle compris). Donc, les triangles RAP, PBQ et QCR ont la même aire.
On détermine donc l'aire du triangle RAP.

<u>1^{re} méthode</u>
Au point P, on abaisse une perpendiculaire PY au côté AR.



L'aire du triangle RAP est égale à $\frac{1}{2}(AR)(PY)$. On a donc besoin de la longueur de PY.
Puisque $\angle RAP = 60°$, alors $PY = AP\sin(60°)$, d'où $PY = 1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ou $PY = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc, l'aire du triangle RAP est égale à $\frac{1}{2}(3)(\frac{\sqrt{3}}{2})$, c'est-à-dire à $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

<u>2e méthode</u>
L'aire du triangle RAP est égale à $\frac{1}{2}(RA)(AP)\sin(\angle RAP)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(3)(1)\sin(60°)$, ou $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Il reste à déterminer l'aire du triangle PQR.
<u>1re méthode</u>
On peut soustraire l'aire des triangles PBQ, RAP et QCR de l'aire du triangle ABC. Les trois petits triangles sont congruents et leur aire est égale. De plus, on a calculé l'aire du triangle ABC dans la partie (a).
Donc, l'aire du triangle PQR est égale à $4\sqrt{3} - 3\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, c'est-à-dire à $\frac{16\sqrt{3}}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{4}$, ou $\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

<u>2e méthode</u>
Puisque les triangles RAP, PBQ et QCR sont congruents, alors $PQ = QR = RP$. Le triangle PQR est donc équilatéral.
Si on connaît la longueur d'un de ses côtés, on peut utiliser une des méthodes de la partie (a) pour calculer son aire.
D'après la loi du cosinus dans le triangle RAP, on a :

$$\begin{array}{rcl} PR^2 & = & PA^2 + AR^2 - 2(PA)(AR)\cos(\angle PAR) \\ PR^2 & = & 1^2 + 3^2 - 2(1)(3)\cos(60^\circ) \\ PR^2 & = & 10 - 6\left(\frac{1}{2}\right) \\ PR^2 & = & 7 \end{array}$$

Donc $PR = \sqrt{7}$.
On utilise une des méthodes de la partie (a) pour calculer l'aire du triangle PQR.
On obtient $\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

4. (a) *Solution 1*
Dans un triplet, le nombre du milieu doit être supérieur aux deux autres. Donc, b peut seulement prendre les valeurs de 3, 4 ou 5.
Si $b = 3$, alors a peut égaler 1 ou 2 et la valeur correspondante de c est 2 ou 1. Il y a donc 2 triplets possibles.
Si $b = 4$, alors les valeurs correspondantes de a et de c peuvent être 1 et 2, 1 et 3, 2 et 3 et les mêmes valeurs en ordre inverse. Il y a donc 6 triplets possibles.
Si $b = 5$, alors les valeurs correspondantes de a et de c peuvent être 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 2 et 3, 2 et 4, 3 et 4 et les mêmes valeurs en ordre inverse. Il y a donc 12 triplets possibles.
En tout, il y a 20 triplets.

Solution 2
Cette solution utilise les notations $\binom{n}{r}$ et $n!$ de la combinatoire.
On choisit d'abord trois nombres de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Il y a $\binom{5}{3}$ façons, c'est-à-dire 10 façons de le faire.
Avec ces nombres, on veut former des triplets (a, b, c) de manière que $a < b$ et $b > c$. Le nombre du milieu, soit b, doit être le plus grand des trois. Il n'y a qu'un choix.
On peut placer les deux autres nombres de deux façons, soit en plaçant l'un en première position et l'autre en troisième ou dans l'ordre inverse.
Donc, chaque choix de trois nombres donne deux triplets, pour un total de 10×2 triplets, ou 20 triplets.
(Pour être plus rigoureux, il faudrait ajouter que cette façon de choisir les nombres nous

assure que les choix sont tous distincts. De plus, tous les triplets possibles peuvent être choisis de cette façon.)

(b) *Solution 1*
Chaque permutation de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ comporte un nombre dans chacune de 6 positions.
Si une permutation contient 254, en bloc dans cet ordre, alors la permutation doit être de la forme $254xyz$, $x254yz$ $xy254z$ ou $xyz254$, x, y et z étant les nombres 1, 3 et 6 dans un ordre quelconque.
Pour chacune de ces quatre formes, il y a 6 façons de placer les trois autres nombres en ordre, soit 1,3,6 ou 1,6,3 ou 3,1,6 ou 3,6,1 ou 6,1,3 ou 6,3,1.
Le nombre de permutations qui contiennent les chiffres 254 dans cet ordre en positions adjacentes est donc égal à 4×6, ou 24.

Solution 2
On traite 254 comme un bloc qu'on nomme B.
On cherche donc le nombre de permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3, B\}$.
Il y a 4! permutations, ou 24 permutations des 4 éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, B\}$. En effet, il y a 4 choix pour le premier élément ; pour chacun de ces choix, il y a 3 choix pour le deuxième élément, etc.
Le nombre de permutations qui contiennent les chiffres 254 dans cet ordre en positions adjacentes est donc égal à 4×6, ou 24.

(c) *Solution 1*
Pour déterminer le nombre moyen de sommets locaux dans les 40 320 permutations, on compte le nombre total de sommets locaux et on divise par le nombre de total de permutations.
Au lieu de compter le nombre de sommets locaux dans chaque permutation, on examine plutôt les sommets locaux possibles et on compte le nombre de permutations qui les contiennent.
Dans une permutation de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, un sommet local est une séquence abc de trois nombres de la permutation de manière que $a < b$ et $b > c$.
Combien y a-t-il de telles séquences ?
Il s'agit d'un prolongement de la partie (a). On peut utiliser l'une ou l'autre des stratégies de la partie (a) pour déterminer qu'il y a 112 telles séquences.
Soit abc une de ces 112 séquences. Combien des 40 320 permutations contiennent cette séquence en bloc ?
Il s'agit d'un prolongement de la partie (b). On peut utiliser l'une ou l'autre des stratégies de la partie (b) pour déterminer qu'il y a 6! permutations, ou 720 permutations qui la contiennent.
Donc, chacun des 112 sommets locaux possibles paraît dans 720 permutations. Il y a donc un total de 112×720, ou 80 640 sommets locaux en tout.
(Puisque chaque sommet local paraît dans une telle séquence de trois nombres, on a compté tous les lommets locaux.)
Le nombre moyen de sommets locaux dans les 40 320 permutations possibles est égal à $\frac{80\,640}{40\,320}$, ou 2.

Solution 2
Dans une permutation de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, un sommet local occupe trois

places consécutives. Il peut donc se présenter dans un de six endroits, soit dans les positions 1 à 3, 2 à 4, 3 à 5, 4 à 6, 5 à 7 ou 6 à 8.
On considère une de ces places, soit les positions 1 à 3. Le même argument s'applique aux autres places.
Quelle fraction de toutes les permutations auront un sommet local à cet endroit ?
Si on choisit trois nombres, a, b, c, de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, de manière que $a < b < c$, il y a six façons de les placer, soit *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab* et *cba*. Deux des six façons, soit *acb* and *bca*, forment un sommet local (d'après la condition $a < b < c$). Donc, $\frac{1}{3}$ des permutations de a, b et c forment un sommet local.
On considère toutes les permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dont les trois premiers nombres sont a, b et c dans un ordre quelconque.
Le nombre de permutations qui commencent par *abc*, par *acb*, par *bac*, par *bca*, par *cab* ou par *cba* est le même dans chaque cas. Donc, $\frac{1}{3}$ des permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ qui commencent par a, b et c, dans un ordre quelconque, ont un sommet local dans les positions 1 à 3.
Le nombre de permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ qui contiennent un ensemble fixe de trois nombres dans les trois premières positions est toujours le même. Donc, $\frac{1}{3}$ des permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ont un sommet local dans les positions 1 à 3.
Le même argument s'applique aux cinq autres places où un sommet local peut se produire.
Donc, le nombre moyen de sommets locaux dans les permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ est égal à $6 \times \frac{1}{3}$, ou 2.

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Hypatie 2004 (11^{e} année ou Secondaire V)

1. a) *Solution 1*

Par factorisation :

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$(x+2)(x+3) = 0$$

Donc, $x + 2 = 0$ ou $x + 3 = 0$, d'où $x = -2$ ou $x = -3$.

Les racines sont –2 et –3.

Solution 2

On utilise la formule :

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$, ou $x == \dfrac{-5 \pm \sqrt{1}}{2}$

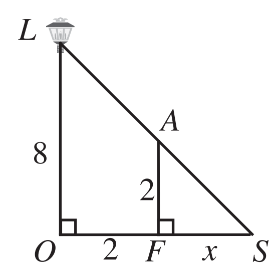
Donc, $x = \dfrac{-5+1}{2}$ ou $x = \dfrac{-5-1}{2}$, c'est-à-dire que $x = -2$ ou $x = -3$.

Les racines sont –2 et –3.

b) Si on ajoute 7 à chacune des racines de l'équation précédente, on obtient 5 et 4.
L'équation $(x-5)(x-4) = 0$, ou $x^2 - 9x + 20 = 0$, a ces nombres pour racines.

c) On détermine d'abord les racines de l'équation $(x-4)\left(3x^2 - x - 2\right) = 0$.
On a $x - 4 = 0$, d'où $x = 4$, ou $3x^2 - x - 2 = 0$.
On peut résoudre cette dernière équation par factorisation ou en utilisant la formule. Par factorisation, on obtient $(3x+2)(x-1) = 0$. Donc, $3x + 2 = 0$ ou $x - 1 = 0$, d'où $x = -\frac{2}{3}$ ou $x = 1$.
Les racines de l'équation donnée sont 4, $-\frac{2}{3}$ et 1. Si on ajoute 1 à chacune de ces racines, on obtient 5, $\frac{1}{3}$ et 2.
L'équation $(x-5)(3x-1)(x-2) = 0$, ou $(x-5)\left(3x^2 - 7x + 2\right) = 0$, ou
$3x^3 - 22x^2 + 37x - 10 = 0$ a ces nouveaux nombres pour racines. (On peut aussi construire beaucoup d'autres équations qui ont ces nombres pour racines.)

2. a) Dans la figure, *L* est le sommet du lampadaire, *O* est la base du lampadaire, *A* est le sommet de la tête d'Alain, *F* est le point sur terre où il se tient et *S* est l'extrémité de son ombre. On sait que *SO* est perpendiculaire à *AF* et à *LO* et que les points *L*, *A* et *S* sont alignés.
Le triangle *LOS* est semblable au triangle *AFS*, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont un angle commun.



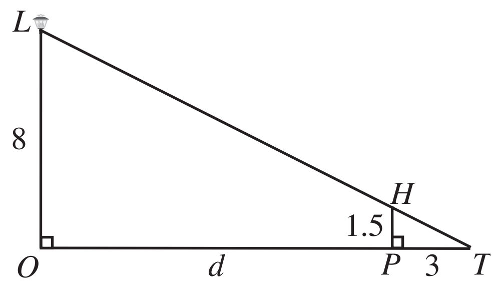
Donc : $\dfrac{LO}{SO} = \dfrac{AF}{SF}$

$$\frac{8}{2+x} = \frac{2}{x}$$
$$8x = 4 + 2x$$
$$6x = 4$$
$$x = \tfrac{2}{3}$$

L'ombre d'Alain a donc une longueur de $\frac{2}{3}$ m.

b) Dans la figure ci-dessous, L et O sont définis comme dans la partie a), H est le sommet de la tête de Béatrice, P est le point sur terre où elle se tient et T est l'extrémité de son ombre.
Comme dans la partie a), le triangle LOT est semblable au triangle HPT. Soit $d = OP$.
Donc :

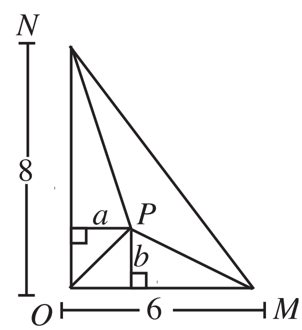
$$\frac{LO}{TO} = \frac{HP}{TP}$$
$$\frac{8}{d+3} = \frac{1{,}5}{3}$$
$$1{,}5d + 4{,}5 = 24$$
$$1{,}5d = 19{,}5$$
$$d = 13$$



Béatrice doit se placer à 13 m du lampadaire pour que son ombre mesure 3 m.

3. a) Puisque le triangle OMN est rectangle, son aire est égale à $\frac{1}{2}(OM)(ON)$, c.-à-d. à $\frac{1}{2}(8)(6)$, ou 24.

Pour que les triangles POM, PON et PMN aient la même aire, chacun doit avoir une aire de 8.
Le triangle POM a une base OM de longueur 6 et une hauteur correspondante de longueur b, soit la distance de P à OM. Puisque son aire est égale à 8, on a donc $\frac{1}{2}(6)b = 8$, d'où $b = \frac{8}{3}$.



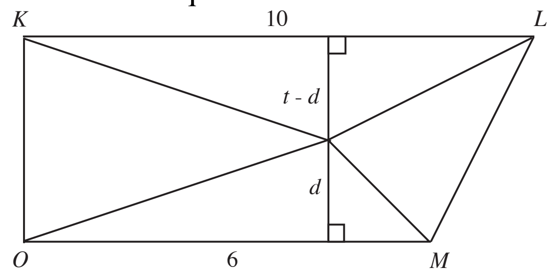
Le triangle PON a une base ON de longueur 8 et une hauteur correspondante de longueur a, soit la distance de P à ON. Puisque son aire est égale à 8, on a donc $\frac{1}{2}(8)a = 8$, d'où $a = 2$.
Si le point P a pour coordonnées $\left(2, \frac{8}{3}\right)$, les triangles POM et PON ont donc chacun une aire de 8. Le triangle PMN doit alors avoir une aire de 8, car le triangle OMN a une aire de 24.

b) On calcule d'abord l'aire du quadrilatère $OMLK$.

Il s'agit d'un trapèze ayant pour bases *OM* et *KL*. Son aire est égale à la moyenne des bases multipliée par la hauteur, soit $\frac{1}{2}(10+6)t$, ou $8t$.

Si les triangles *QOM*, *QML*, *QLK* et *QKO* ont la même aire, celle-ce doit égaler $2t$, puisque la somme de l'aire des triangles est égale à l'aire du quadrilatère.

Le triangle *QOM* a une base de longueur 6 et une hauteur correspondante de longueur d, soit la distance de Q à *OM*. Puisque son aire est égale à $2t$, on a donc $\frac{1}{2}(6)(d)=2t$, d'où $d=\frac{2}{3}t$.



Le triangle *QLK* a une base de longueur 10 et une hauteur correspondante de longueur $\frac{1}{3}t$, soit la distance de Q à *LK* (puisque l'ordonnée de Q est égale à $\frac{2}{3}t$). Puisque son aire est égale à $2t$, on a donc $\frac{1}{2}(10)\left(\frac{1}{3}t\right)=2t$, d'où $t=0$. Or, on donne $t>0$, ce qui veut dire qu'il est impossible pour l'aire de chacun des triangles *QOM* et *QLK* d'égaler $2t$. Il n'existe donc aucun point Q tel que l'aire des quatre triangles soit la même.

4. a) On résout le problème en examinant tous les cas possibles. Le triplet (V, J, R) indiquera le nombre respectif de boules vertes (V), jaunes (J) et rouges (R) qu'il reste dans le sac. Ainsi au départ, on a $(1,1,2)$.

Si la boule verte et la boule jaunes sont choisies au départ, on obtient $(0,0,3)$. Toutes les boules qui restent dans le sac sont donc rouges.

Si la boule verte et une boule rouge sont choisies au départ, on obtient $(0,2,1)$. Au tour suivant, on doit donc choisir une boule jaune et la boule rouge et on obtient alors $(1,1,0)$. Au tour suivant, on choisit la boule verte et la boule jaune et on obtient $(0,0,1)$. Il reste une boule rouge dans le sac.

De même, si on choisit la boule jaune et une boule rouge au départ, on obtient $(2,0,1)$. Au tour suivant, on doit choisir une boule verte et la boule rouge et on obtient $(1,1,0)$. Au tour suivant, on choisit la boule verte et la boule jaune et on obtient $(0,0,1)$. Il reste une boule rouge dans le sac.

Donc, dans tous les cas, il ne reste qu'une ou des boules rouges.

b) On pourrait considérer tous les cas, mais le nombre de cas possibles est très grand. On cherche alors une autre approche.

On remarque qu'à chaque tour, le nombre de boules de chaque couleur augmente ou diminue de 1. La parité de chaque nombre change donc à chaque tour, car elle change de pair à impair ou d'impair à pair.

Le nombre de boules vertes et le nombre de boules rouges doivent donc avoir la même parité et le nombre de boules jaunes doit avoir la parité opposée. (*V* et *R* sont impairs au départ, tandis que J est pair. Au tour suivant, V et R deviendront pairs et J deviendra impair, etc.)

À la fin, deux des variables vaudront 0, c'est-à-dire que deux des variables seront paires. Or, les seules variables qui peuvent être paires en même temps sont V et R. À la fin, on aura donc $V = 0$ et $R = 0$. La ou les boules qui restent à la fin sont donc toutes jaunes. (Puisque le nombre total de boules dans le sac *diminue* de 1 à chaque tour, il est certain que le jeu se terminera après 11 tours ou moins.)

c) *Solution 1*

Dans cette version du jeu, le nombre total de boules dans le sac ne change pas, car à chaque tour, on enlève deux boules et on en remet deux autres.

Supposons qu'on en venait à avoir 12 boules d'une même couleur.

On considère l'expression $V - J$, soit la différence entre le nombre de boules vertes et le nombre de boules jaunes. À la fin du jeu, on aurait 12 boules d'une même couleur et aucune boule des autres couleurs. L'expression $V - J$ pourrait donc être égale à 12, à 0 ou à –12.

Au départ, on a $V - J = -1$. On montrera que, quoi qu'il arrive lors d'un tour, la valeur de $V - J$ changera de 0 ou de 3. Ceci démontrera que $V - J$ ne pourra jamais être égale à 12, à 0 ou à –12, puisqu'on ne peut ajouter ou soustraire plusieurs fois le nombre 3 à –1 pour obtenir une valeur de 12, de 0 ou de –12. Il sera donc impossible d'obtenir toutes les boules d'une même couleur.

Supposons qu'après un tour particulier, on a $V = v$ et $J = j$, c'est-à-dire que $V - J = v - j$. Au tour suivant :

i) si on remplace une boule verte et une boule jaune par deux boules rouges, on a alors $G = g - 1$ et $J = j - 1$. Donc, $V - J = (v - 1) - (j - 1)$, c'est-à-dire que $V - J = v - j$. La valeur de l'expression $V - J$ ne change pas.

ii) si on remplace une boule verte et une boule rouge par deux boules jaunes, on a alors $V = v - 1$ et $J = j + 2$. Donc, $V - J = (v - 1) - (j + 2)$, c'est-à-dire que $V - J = v - j - 3$.

iii) si on remplace une boule jaune et une boule rouge par deux boules vertes, on a alors $V = v + 2$ et $J = j - 1$. Donc, $V - J = (v + 2) - (j - 1)$, c'est-à-dire que $V - J = v - j + 3$.

La valeur de $V - J$ peut donc seulement changer de 0 ou de 3. En partant d'une valeur de –1, $V - J$ ne peut donc jamais égaler 0, 12 ou –12. Il est donc impossible pour le sac de contenir que des boules d'une même couleur.

Solution 2

Puisque le nombre total de boules ne change pas, si le sac en venait à contenir que des boules d'une même couleur, il y aurait 12 boules d'une couleur et aucune boule des autres couleurs.

On suppose qu'il est possible d'obtenir 12 boules d'une couleur et aucune boule des autres couleurs. Dans la notation qui suit, les nombres de couleurs sont présentés en ordre décroissant. En procédant à rebours, on montrera qu'il est impossible d'en arriver à 5, 4, 3.

En procédant à rebours, on soustrait 2 d'un des nombres et on ajoute 1 aux deux autres.
Or, 12, 0, 0 doit provenir de 10, 1, 1.
10, 1, 1 doit provenir de 8, 2, 2.
8, 2, 2 doit provenir de 6, 3, 3 ou de 9, 3, 0.
9, 3, 0 doit provenir de 7, 4, 1 ou de 10, 1, 1.
7, 4, 1 doit provenir de 5, 5, 2 ou de 8, 2, 2.
5, 5, 2 doit provenir de 6, 6, 0 ou de 6, 3, 3.
6, 6, 0 doit provenir de 7, 4, 1.
6, 3, 3 doit provenir de 4, 4, 4 ou de 7, 4, 1.
4, 4, 4 doit provenir de 5, 5, 2.
Les triplets de nombres suivent donc des boucles et ne peuvent égaler que : 12, 0, 0; 10, 1, 1; 9, 3, 0; 8, 2, 2; 7, 4, 1; 6, 6, 0; 6, 3, 3; 5, 5, 2; 4, 4, 4.

En partant de la position 5, 4, 3, il est donc impossible d'obtenir 12, 0, 0.

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre
en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Hypatie 2003 (11e – année)

(Secondaire V au Québec)

pour les prix du
The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. a) Soit N le nombre de tuiles que Carl a en sa possession.
Puisqu'il lui reste 92 tuiles non utilisées après qu'il a formé un grand carré de n cm, on a :
$$N = n^2 + 92$$
Puisqu'il lui manque 100 tuiles pour former un carré de $(n+2)$ cm, on a :
$$N = (n+2)^2 - 100$$
On a deux équations à deux inconnues, N et n. En comparant les deux équations, on a :
$$\begin{aligned}(n+2)^2 - 100 &= n^2 + 92\\ n^2 + 4n + 4 - 100 &= n^2 + 92\\ 4n &= 188\\ n &= 47\end{aligned}$$
Donc N est égal à $(47)^2 + 92$, ou 2301.
Carl a donc 2301 tuiles.

b) Soit B le nombre de blocs que Diane a apportés.
Puisqu'il lui manque 24 blocs lorsqu'il tente de former un cube de 8 cm, Carl a pris $8^3 - 24$, ou 488 cubes.
Soit r cm la longueur d'arête, du cube que Diane forme avec les cubes qu'il lui reste.
Elle a donc utilisé r^3 cubes pour former ce cube. Donc $B = r^3 + 488$.
En utilisant tous les cubes que Diane a apportés, Carl et Diane peuvent former un cube de $(r+2)$ cm. Il y a donc un total de $(r+2)^3$ cubes, c'est-à-dire que $B = (r+2)^3$. Donc :
$$\begin{aligned}(r+2)^3 &= r^3 + 488\\ (r+2)^2(r+2) &= r^3 + 488\\ \left(r^2 + 4r + 4\right)(r+2) &= r^3 + 488\\ r^3 + 2r^2 + 4r^2 + 8r + 4r + 8 &= r^3 + 488\\ 6r^2 + 12r - 480 &= 0\\ r^2 + 2r - 80 &= 0\\ (r+10)(r-8) &= 0\end{aligned}$$
Donc $r = -10$ ou $r = 8$. Puisque r est positif, la première solution est rejetée.
Le nombre total de blocs est donc égal à $(8+2)^3$, ou 1000.

Prolongement
Soit N le nombre de tuiles que Carl a en sa possession. Soit x cm la longueur des côtés du premier carré qu'il forme et y cm la longueur des côtés du carré plus grand qu'il essaie de former.
Lorsqu'il forme le premier carré, il lui reste 92 tuiles. Lorsqu'il tente de former le deuxième carré, il lui manque 100 tuiles.
Donc $N = x^2 + 92$ et $N = y^2 - 100$. On a donc :

$$x^2 + 92 = y^2 - 106$$
$$y^2 - x^2 = 192$$
$$y^2 - 100 = x^2 + 92$$
$$y^2 - x^2 = 192$$
$$(y - x)(y + x) = 192$$

On cherche le nombre de solutions entières et positives, de manière que $y > x$.
On remarque que $y - x$ et $y + x$ doivent être des entiers positifs et que $y + x > y - x$.
On écrit 192 en factorisation première, soit $192 = 2^6 \cdot 3$. Cela nous donne les diviseurs positifs de 192, soit 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96 et 192.
Le tableau suivant permet de vérifier les possibilités. Les deux premiers nombres de chaque ligne représentent un système d'équations.
(Les deux premiers nombres de la première ligne représentent le système $y - x = 1$, $y + x = 192$. Chaque ligne représente un système semblable. De plus, pour chaque ligne du tableau, on a $y = (1^{\text{re}}$ colonne $+\ 2^{\text{e}}$ colonne$) \div 2$, $x = (2^{\text{e}}$ colonne $- 1^{\text{re}}$ colonne$) \div 2$, car $y = \frac{1}{2}\left[(y - x) + (y + x)\right]$ et $x = \frac{1}{2}\left[(y + x) - (y - x)\right]$. On obtient donc les solutions assez facilement.)

$y - x$	$y + x$	y	x	N
1	192			
2	96	49	47	2301
3	64			
4	48	26	22	584
6	32	19	13	269
8	24	16	8	164
12	16	14	2	104

Les lignes incomplètes du tableau indiquent des solutions non entières.
Il y a donc 5 solutions. Carl peut avoir 5 nombres différents de tuiles.

Remarque
On peut aussi utiliser le système d'équations suivant :

$$N = x^2 + 92$$
$$N = (x + p)^2 - 100$$

On obtiendrait $(x + p)^2 - 100 = x^2 + 92$, d'où $2px + p^2 = 192$, ou $p(2x + p) = 192$.
La suite est assez semblable. Il faut faire appel à $192 = 2^6 \cdot 3$ et examiner tous les produits possibles, *p* étant toujours le plus petit des deux facteurs.

2. a) *Solution 1*

Pour gagner, il faut être en mesure d'enlever la dernière pièce. Une personne a donc une position gagnante si, au moment de jouer, il y a une pile vide et au moins une pièce dans l'autre pile.

Pour recevoir une position gagnante, Yvonne doit forcer Xavier à lui remettre une pile vide. Pour ce faire, elle doit lui remettre deux piles ayant chacune une seule pièce. Autrement, Xavier pourrait réduire une des piles sans la vider.
Donc si Yvonne reçoit une pile de 1 pièce et une pile de 2 ou 3 pièces, elle peut jouer de manière à remettre deux piles de 1 pièce, ce qui lui assure une victoire.

Xavier ne veut donc pas, pour commencer, enlever 2 pièces d'une pile. De plus, il ne veut pas enlever les 3 pièces d'une pile, car Yvonne pourrait enlever les 3 pièces de l'autre pile et gagner.

Xavier est donc forcé à ouvrir le jeu en enlevant 1 pièce d'une pile. Yvonne ne veut pas répliquer en enlevant 1 pièce de la même pile, car elle remettrait à Xavier une pile de 1 pièce et une pile de 3 pièces, ce qui permettrait à Xavier d'utiliser la stratégie gagnante décrite ci-haut. Yvonne enlève donc 1 pièce de la pile de 3 pièces et remet à Xavier deux piles de 2 pièces chacune. Xavier est donc forcé à enlever 1 ou 2 pièces d'une pile. Dans les deux cas, il remet une position gagnante à Yvonne.

Dans tous les cas, Yvonne peut s'assurer de toujours gagner.

Solution 2

Yvonne peut s'assurer de gagner si elle peut s'assurer qu'à un moment donné, elle recevra une pile vide et une pile qu'elle pourra vider d'un seul coup.
Elle peut s'assurer de cela en enlevant toujours le même nombre de pièces que Xavier, mais dans l'autre pile. Si Xavier enlève 1, 2 ou 3 pièces, Yvonne fait de même dans l'autre pile. Cela veut dire qu'à un moment donné, Xavier devra vider une pile et Yvonne pourra vider l'autre et gagner.

Solution 3

Yvonne peut s'assurer de gagner si elle remet toujours à Xavier deux piles égales. Si les deux piles sont vides, c'est qu'elle a vidé la dernière et qu'elle a gagné. Si elle remet deux piles non vides, Xavier ne peut vider la dernière pile d'un coup.
Si Yvonne reçoit une pile de 2 pièces et une pile de 3 pièces, elle remet deux piles de 2.
Si Yvonne reçoit une pile de 1 pièce et une pile de 3 pièces, elle remet deux piles de 1.
Si Yvonne reçoit une pile vide et une pile de 3 pièces, elle remet deux piles vides et gagne.
Si Xavier reçoit deux piles de 1 pièce, il doit vider une pile et Yvonne videra l'autre et gagnera.
Si Xavier reçoit deux piles de 2 pièces, il peut remettre une pile de 1 pièce et une pile de 2 pièces, ce qui permet à Yvonne de lui remettre deux piles de 1 pièce. Il peut aussi vider une pile, ce qui permet à Yvonne de vider l'autre.
Yvonne peut donc s'assurer de toujours gagner en utilisant cette stratégie.

b) Yvonne peut s'assurer de toujours gagner en remettant à Xavier, après son premier tour, deux piles égales et une pile vide. Elle pourra par la suite utiliser une stratégie de la partie a). On vérifie les divers choix possibles de Xavier, au premier tour, et la réplique d'Yvonne qui permet cette stratégie. Dans chacun des cas suivants, les trois nombres indiquent le nombre de pièces dans chaque pile, dans l'ordre, après le premier choix de Xavier et après la réplique d'Yvonne. Les piles de départ, dans l'ordre, sont celles de 1 pièce, de 2 pièces et de 3 pièces.

Après le 1er choix de Xavier	*Après le 1er choix d'Yvonne*
0, 2, 3	0, 2, 2
1, 1, 3	1, 1, 0
1, 0, 3	1, 0, 1
1, 2, 2	0, 2, 2
1, 2, 1	1, 0, 1
1, 2, 0	1, 1, 0

On voit que, peu importe le premier choix de Xavier, il est possible pour Yvonne de lui remettre deux piles égales et une pile vide. Cette stratégie permet à Yvonne de poursuivre la stratégie gagnante de la partie a).

Prolongement

Dans la partie a), on a vu que si Xavier joue premier avec deux piles égales, Yolande peut s'assurer de gagner. Dans la partie b), on a vu que si Xavier joue premier avec une pile de 1 pièce, une pile de 2 pièces et une pile de 3 pièces, Yolande peut s'assurer de gagner. Lors de son premier choix, Xavier veut donc éviter de laisser deux piles égales, comme 2, 4, 4 ou 2, 2, 5, car Yvonne pourrait alors enlever la pile inégale et remettre deux piles égales et une pile vide.

De même, il ne veut pas créer une situation qui permettrait à Yvonne de lui remettre des piles de 1, 2 et 3 pièces. Yvonne pourrait alors poursuivre la stratégie de la partie b).

On examine donc les premiers choix possibles de Xavier, de même que le meilleur choix possible d'Yvonne.

Après le 1er choix de Xavier	*Après le 1er choix d'Yvonne*	*Gagnante ou gagnant*
2, 4, 4	0, 4, 4	Yvonne
2, 4, 3	2, 1, 3	Yvonne
2, 4, 2	2, 0, 2	Yvonne
2, 4, 1	2, 3, 1	Yvonne
2, 4, 0	2, 2, 0	Yvonne
2, 3, 5	2, 3, 1	Yvonne
2, 2, 5	2, 2, 0	Yvonne
2, 1, 5	2, 1, 3	Yvonne
2, 0, 5	2, 0, 2	Yvonne
1, 4, 5	?	?
0, 4, 5	0, 4, 4	Yvonne

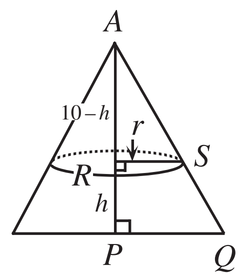
À l'exception du choix où il laisse 1, 4, 5, Yvonne peut toujours gagner.
S'il laisse 1, 4, 5, il y a 10 choix possibles pour Yvonne.

Si Yvonne joue de manière à laisser 0, 4, 5 ou 1, 1, 5 ou 1, 0, 5 ou 1, 4, 4 ou 1, 4, 1 ou 1, 4, 0, Xavier peut jouer de manière à laisser deux piles égales et une pile vide, ce qui lui assure la victoire.
Si Yvonne joue de manière à laisser 1, 3, 5 ou 1, 2, 5 ou 1, 4, 3 ou 1, 4, 2, Xavier peut jouer de manière à laisser des piles respectives de 1, de 2 et de 3 pièces, ce qui lui assure la victoire.
Xavier peut donc gagner en laissant, au premier tour, des piles respectives de 1, de 4 et de 5 pièces et au deuxième tour, en laissant deux piles égales et une pile vide ou des piles respectives de 1, de 2 et de 3 pièces.

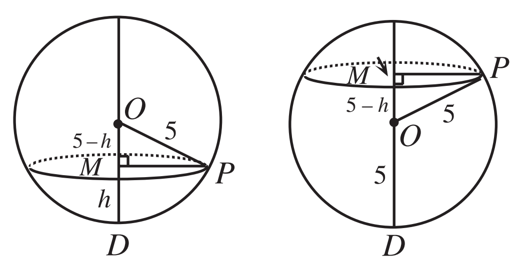
3. On cherche la hauteur h du plan qui forme deux cercles de même aire. Puisque la formule pour l'aire d'un cercle est πr^2, il faut d'abord établir une relation entre h et r dans le cas du cône et dans celui de la sphère.

Relation entre h et r dans le cas du cône
Le diagramme suivant est une coupe transversale verticale du cône. On a ajouté l'axe AP du cône, A étant l'apex, ainsi que le cercle formé par le plan horizontal à une hauteur h. On voit que les triangles APQ et ARS sont semblables.
Donc :

$$\frac{10}{5} = \frac{10-h}{r}$$
$$2r = 10-h$$
$$r = \frac{1}{2}(10-h)$$



Relation entre h et r dans le cas de la sphère
Les diagrammes suivants représentent des coupes transversales verticales de la sphère. On a aussi deux positions du cercle formé par le plan horizontal, de même que l'axe de la sphère qui relie le centre O de la sphère et le centre M du cercle. Cet axe est perpendiculaire au cercle.
On a $OP = 5$, $DO = 5$, $DM = h$ et $MP = r$.
Dans le premier diagramme, h est inférieur à 5 et $OM = 5 - h$. Dans le deuxième diagramme, h est supérieur ou égal à 5 et $OM = h - 5$.



D'après le théorème de Pythagore, $r = \sqrt{OP^2 - OM^2}$, d'où $r = \sqrt{5^2 - (5-h)^2}$ ou $r = \sqrt{5^2 - (h-5)^2}$ selon le cas. Dans les deux cas, on obtient $r = \sqrt{10h - h^2}$.

On veut que les deux cercles aient la même aire. On a donc :

$$
\begin{aligned}
\pi\left[\frac{1}{2}(10-h)\right]^2 &= \pi\left[\sqrt{10h-h^2}\right]^2 \\
(10-h)^2 &= 4\left(10h-h^2\right) \\
100-20h+h^2 &= 40h-4h^2 \\
5h^2-60h+100 &= 0 \\
h^2-12h+20 &= 0 \\
(h-10)(h-2) &= 0
\end{aligned}
$$

Donc $h=10$ ou $h=2$. Dans le cas de la première solution, le plan passe par l'apex du cône et il est tangent à la sphère. La coupe transversale par le plan horizontal donne alors deux cercles de rayon nul.

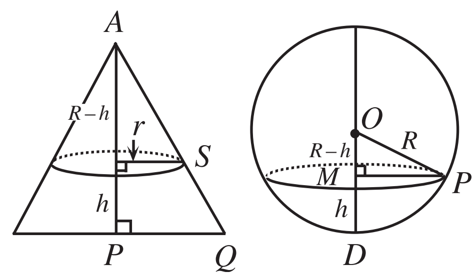
Prolongement

Pour éviter des fractions, soit $d=2R$. Le rayon du cône est donc égal à *R*, de même que sa hauteur.

Les diagrammes suivants représentent des coupes transversales verticales du cône et de la sphère, comme dans le problème précédent.

Comme dans le problème précédent, on a des triangles semblables dans le cône. Soit *r* le rayon du cercle formé par le plan horizontal.

Donc $\dfrac{R-h}{R}=\dfrac{r}{R}$, d'où $r=R-h$.



Dans la sphère, à la hauteur *h*, on a un cercle de rayon *r*.

Par le théorème de Pythagore, on a $r=\sqrt{OP^2-OM^2}$, ou $r=\sqrt{R^2-(R-h)^2}$, d'où $r=\sqrt{2hR-h^2}$.

La somme de l'aire des coupes transversales formées par le plan horizontal est égale à :

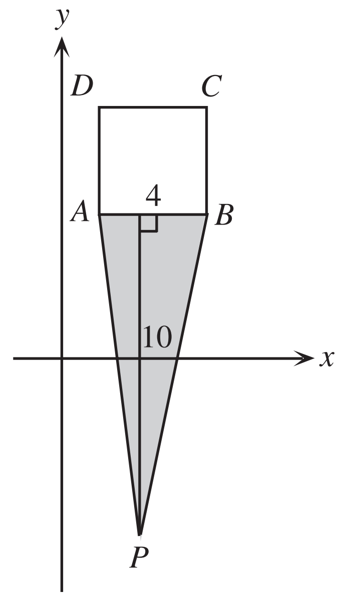
$$
\begin{aligned}
&\pi\left(\sqrt{2hR-h^2}\right)^2+\pi(R-h)^2 \\
&=\pi\left(2hR-h^2\right)+\pi\left(R^2-2hR+h^2\right) \\
&=\pi R^2
\end{aligned}
$$

Cette somme est constante, puisque *R* est une constante.

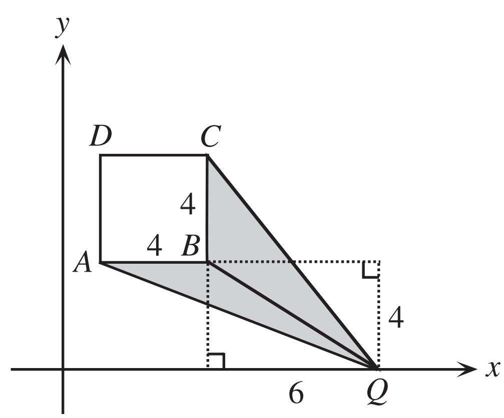
4. a) L'aire visible du point $P(2,-6)$ est l'aire du triangle ABP. Le triangle a une base AB de longueur 4. La hauteur correspondante est la distance du point P à la droite horizontale AB. Elle est égale à 10.

L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(10)$, ou 20 unités carrées.

L'aire visible du point $P(2,-6)$ est donc égale à 20 unités carrées.



b) L'aire visible du point $Q(11,0)$ est égale à la somme de l'aire des triangles QBA et QBC. Le triangle QBA a une base AB de longueur 4. Sa hauteur correspondante est la distance du point Q à la droite horizontale AB. Elle est égale à 4. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8 unités carrées.



Le triangle QBC a une base BC de longueur 4. Sa hauteur correspondante est la distance du point Q à la droite verticale BC. Elle est égale à 6. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(6)$, ou 12 unités carrées.

L'aire visible du point $Q(11,0)$ est égale à la somme de l'aire des triangles. Elle est donc égale à 20 unités carrées.

c) Depuis un point quelconque P, à l'extérieur du carré, il y aura 2 ou 3 sommets visibles. On considère d'abord les points P pour lesquels il y a 2 sommets visibles.

Ces points P doivent être dans une des régions suivantes :

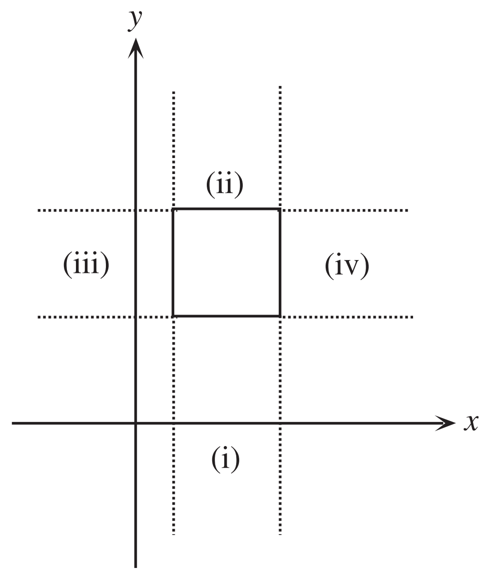
i) La région en dessous du carré. Les points P ont alors une abscisse x telle que $1 \leq x \leq 5$.

ii) La région au-dessus du carré. Les points P ont alors une abscisse x telle que $1 \leq x \leq 5$.

iii) La région à la gauche du carré. Les points P ont alors une ordonnée y telle que $4 \leq y \leq 8$.

iv) La région à la droite du carré. Les points P ont alors une ordonnée y telle que $4 \leq y \leq 8$.

Dans chacune de ces régions, l'aire visible est l'aire d'un triangle dont la base est un côté du carré et dont la longueur est donc 4.

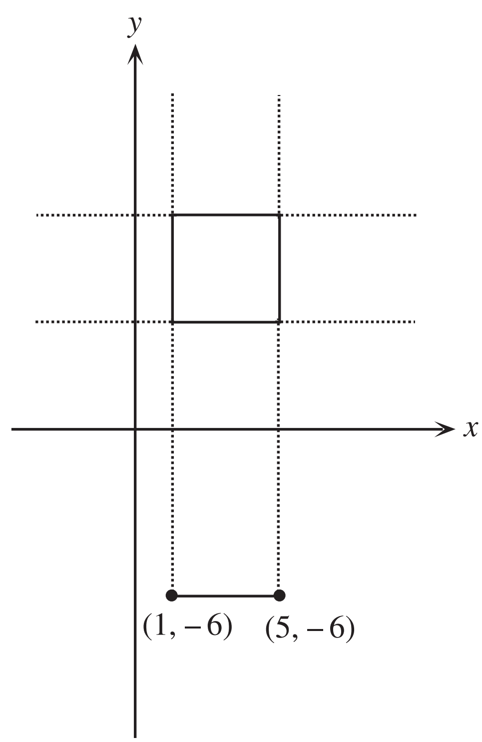


Pour que l'aire d'un tel triangle soit égale à 20, la hauteur correspondante doit être égale à 10.

Donc dans la région i), les points P sur le segment de droite qui joint les points $(1, -6)$ et $(5, -6)$ font partie de l'ensemble 20/20.

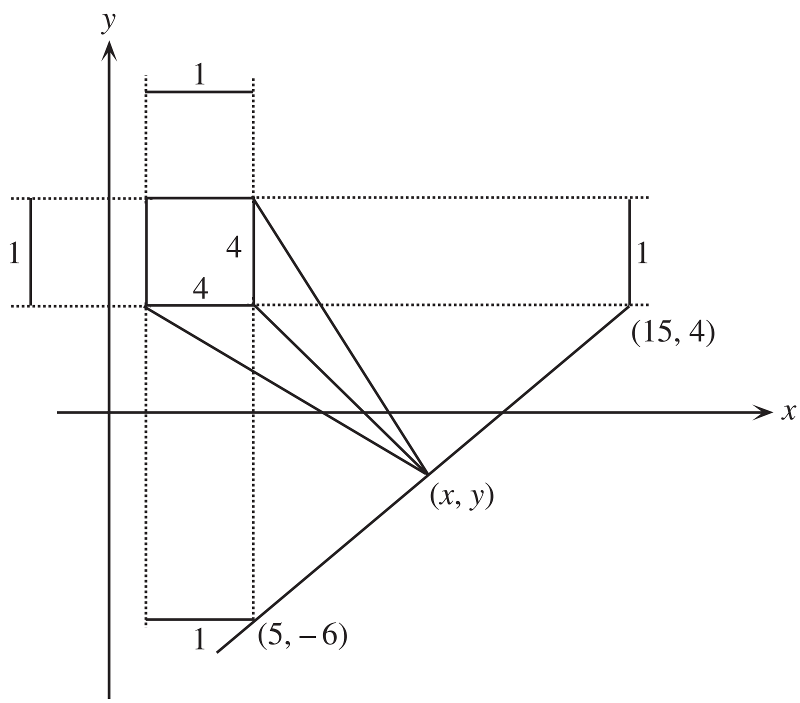
Dans les trois autres régions, les points P sont situés sur des segments de droites semblables.

On a donc identifié quatre segments de droites, chacun de longueur 4, qui font partie de l'ensemble 20/20.



On doit aussi examiner quatre autres régions dans lesquelles les points P ont trois sommets visibles. Ces régions sont celles qui sont traversées par les droites formées par les diagonales du carré lorsqu'on les prolonge. Par exemple, la région qui contient tous les points $P(x, y)$ tels que $x \geq 5$ et $y \leq 4$. On analyse les points d'une région. Par symétrie, on aura des résultats semblables pour les trois autres régions.

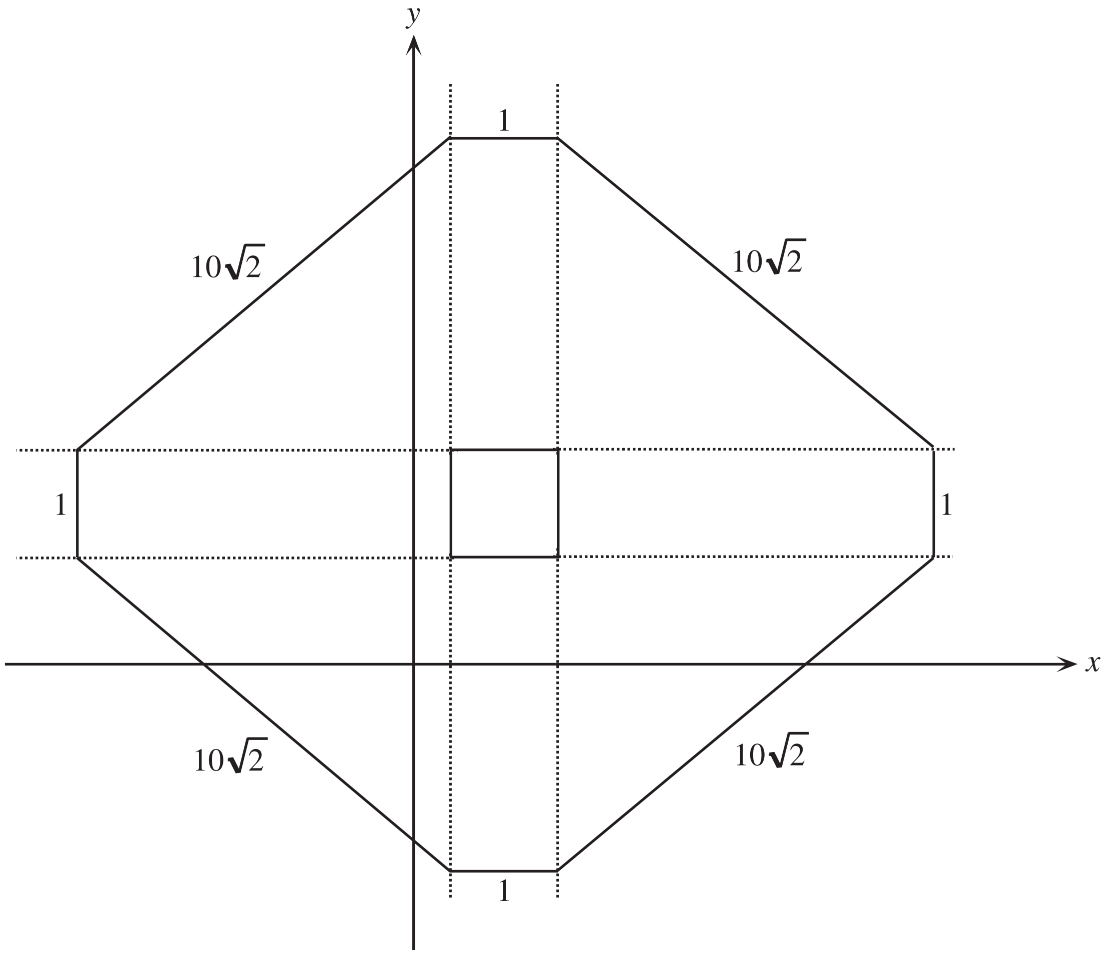
Soit $P(x, y)$ un point de la région définie par $x \geq 5$ et $y \leq 4$, qui a une aire visible de 10 unités carrées.
La somme de l'aire des triangles PBA et PBC est donc égale à 20 unités carrées.
Le triangle PBA a une base de longueur 4 et une hauteur correspondante égale à $4 - y$.
Le triangle PBC a une base de longueur 4 et une hauteur correspondante égale à $x - 5$.



P est dans l'ensemble 20/20 si ses coordonnées vérifient :

$$\frac{1}{2}(4)(x-5) + \frac{1}{2}(4)(4-y) = 20$$
$$x - 5 + 4 - y = 10$$
$$y = x - 11$$

P doit donc être situé sur la droite de pente 1, définie par l'équation $y = x - 11$. On remarque que cela inclut le point $(11, 0)$ de la partie b). Dans cette région, les points de l'ensemble 20/20 forment donc le segment qui joint les points $(5, -6)$ et $(15, 4)$. Ce segment a une longueur de $10\sqrt{2}$.
Par symétrie, les points de l'ensemble 20/20 des trois autres régions sont situés sur des segments semblables de même longueur. L'ensemble 20/20 est donc un octogone ayant quatre côtés de longueur 4 et quatre côtés de longueur $10\sqrt{2}$. Son périmètre est donc égal à $16 + 40\sqrt{2}$.



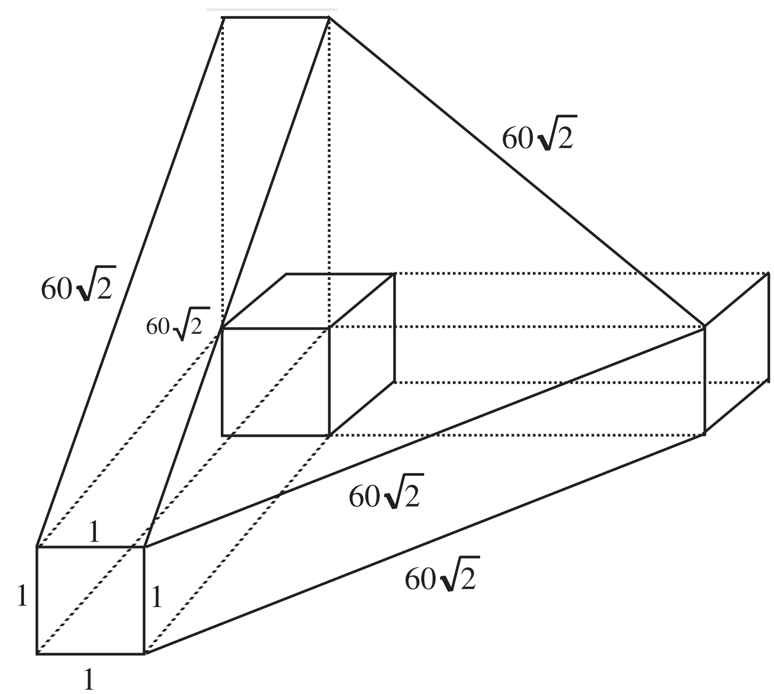
Prolongement

On utilise une approche semblable à celle utilisée dans le plan.

1er cas : P a 4 sommets visibles.
Pour avoir 4 sommets visibles, *P* doit être situé directement devant une des 6 faces du cube. Le volume visible de *P* sera le volume d'une pyramide à base carrée. Puisque le volume d'une pyramide est le tiers du produit de l'aire de la base et de la hauteur et que la base a une aire de 1, la pyramide doit avoir une hauteur de 60.
Les points *P* de l'ensemble 20/20 sont donc directement au-dessus de la face, à une hauteur de 60. Ils forment donc une surface plane délimitée par un carré unitaire. On a donc un total de 6 telles surfaces carrées, soit une pour chaque face du cube.

2e cas : P a 6 sommets visibles.
Pour avoir 6 sommets visibles, *P* doit être situé dans une région où les 6 sommets visibles sont ceux de deux faces adjacentes, reliées par une même arête. Puisque le cube admet 12 arêtes, il y a 12 telles régions.
On considère un point *P* dans une de ces régions. Le volume visible est le volume de deux pyramides à base carrée, chaque base ayant une aire de 1. Le volume visible est donc égal au tiers du produit de l'aire de la base et de la somme des hauteurs. Pour un volume visible de 20, la somme des hauteurs doit être égale à 60. Dans cette région, les points *P* de l'ensemble 20/20 forment une surface plane délimitée par un rectangle qui relie deux carrés de l'ensemble 20/20 au-dessus des faces du cube. Ce rectangle aura deux côtés de longueur 1 et deux côtés de longueur $60\sqrt{2}$. Chacun de ces derniers côtés est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les cathètes mesurent 60.
(Comment sait-on que les points forment une surface plane? Imaginons une coupe transversale de la région, perpendiculaire aux deux faces adjacentes. *P* doit être situé de manière que la somme des hauteurs de *P* aux deux faces soit égale à 60. Dans la coupe transversale, la somme des longueurs de deux segments perpendiculaires doit être égale à 60. Comme dans la partie b), les points *P*, dans la coupe transversale, forment un segment de droite.)
L'ensemble 20/20 contient donc, en plus des 6 carrés, 12 rectangles d'aire $60\sqrt{2}$.

3e cas : P a 7 sommets visibles.
Pour avoir 7 sommets visibles, *P* doit être situé dans une des 8 régions au-dessus des sommets. On remarquera qu'après les cas précédents, il reste en effet 8 régions autour du cube qui n'ont pas été considérées.
On considère une de ces régions au-dessus d'un sommet. Le volume visible est le volume de trois pyramides à base carrée. Comme dans le cas précédent, on veut que la somme des hauteurs soit égale à 60. La région formée par les points *P* de l'ensemble 20/20 sera une portion d'un plan. Elle doit être reliée aux trois rectangles au-dessus des arêtes qui se rencontrent au sommet du cube, car si *P* est sur le côté d'un tel rectangle, on peut affirmer que l'on a trois pyramides dont une de hauteur 0. La région formée par les points *P* de l'ensemble 20/20 est donc la surface plane délimitée par un triangle équilatéral dont les côtés mesurent $60\sqrt{2}$.
Le diagramme suivant représente une partie des différentes régions qui entourent le cube, ainsi que quelques-unes des surfaces qui forment l'ensemble 20/20.



Pour déterminer l'aire du triangle, on trace une médiane qui coupe le triangle en deux triangles 30°-60°-90°. L'hypoténuse a une longueur de $60\sqrt{2}$. Le petit côté a donc une longueur de $30\sqrt{2}$. Le troisième côté est aussi la hauteur du triangle équilatéral. Sa longueur est égale à $(30\sqrt{2})(\sqrt{3})$, ou $30\sqrt{6}$. L'aire du triangle équilatéral est donc égale à $\frac{1}{2}(60\sqrt{2})(30\sqrt{6})$, c'est-à-dire à $900\sqrt{12}$, ou $1800\sqrt{3}$.

L'ensemble 20/20 est un polyèdre dont l'aire totale est égale à $6(1)+12(60\sqrt{2})+8(1800\sqrt{3})$, ou $6+720\sqrt{2}+14\ 400\sqrt{3}$ unités carrées.