Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 5 avril 2023
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 6 avril 2023
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

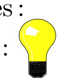
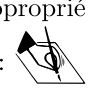
Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Un jeu consiste à lancer une balle de manière qu'elle atterrisse dans l'un de deux trous, soit le trou le plus proche ou le trou le plus éloigné. Un lancer qui atterrit dans le trou le plus proche rapporte 2 points, tandis qu'un lancer qui atterrit dans le trou le plus éloigné rapporte 5 points. Le score total d'un joueur est égal à la somme des points de ses lancers.

   (a) Jasmine a fait 3 lancers qui ont rapporté 2 points chacun et 4 lancers qui ont rapporté 5 points chacun. Quel a été le score total de Jasmine ?

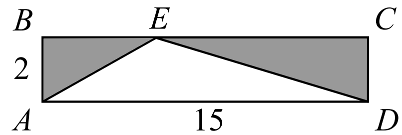
   (b) Sam a fait deux fois plus de lancers qui ont rapporté 2 points que de lancers qui ont rapporté 5 points. Si le score total de Sam était de 36 points, combien de lancers Sam a-t-il effectués ?

   (c) Théa a fait t lancers qui ont rapporté 2 points chacun et f lancers qui ont rapporté 5 points chacun. Si le score total de Théa était de 37 points, déterminer tous les couples (t, f) possibles.

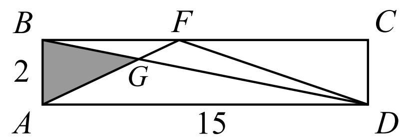
   (d) Le jeu est modifié de manière que chaque lancer rapporte 6 ou 21 points au lieu de 2 ou 5 points. Expliquer s'il est possible ou non d'avoir un score total de 182 points.

2. Pour chaque question qui suit, $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 2$ et $AD = 15$.

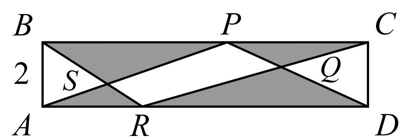
(a) Dans la figure ci-dessous, le point E est situé sur BC. Quelle est l'aire totale des régions ombrées ?



(b) Dans la figure ci-dessous, le point F est situé sur BC et la diagonale BD coupe AF en G. Si le triangle FGD a une aire de 5, quelle est l'aire de la région ombrée ?



(c) Dans la figure ci-dessous, le point P est situé sur BC et le point R est situé sur AD. De plus, BR et AP se coupent en S tandis que PD et RC se coupent en Q. Si $PQRS$ a une aire de 6, déterminer l'aire totale des régions ombrées.



3. Pour tout entier strictement positif ayant trois ou plus chiffres non nuls différents, soit un *cousin* l'entier que l'on obtient comme résultat de la permutation de deux chiffres de l'entier. Par exemple, l'entier 156 a trois cousins :
   - 516 (obtenu en permutant les 1^er^ et 2^e^ chiffres),
   - 651 (obtenu en permutant les 1^er^ et 3^e^ chiffres) et
   - 165 (obtenu en permutant les 2^e^ et 3^e^ chiffres).

   (a) Sans ordre particulier, cinq des six cousins de 6238 figurent dans la liste ci-dessous. Identifier le cousin manquant.

2638	6328
3268	6283
8236	

   (b) Sans ordre particulier, la liste suivante contient un entier initial ainsi que tous ses cousins. Lequel des entiers est l'entier initial ?

726 194	726 941	746 291	627 491
276 491	926 471	796 421	726 419
729 461	716 492	762 491	726 491
126 497	721 496	426 791	724 691

   (c) Soit c et d des chiffres distincts et non nuls. L'entier de trois chiffres $cd3$ moins l'un de ses cousins est égal à l'entier de trois chiffres $d95$. Déterminer les valeurs de c et d et démontrer qu'il n'y a pas d'autres valeurs possibles.

   (d) Soit m et n des chiffres distincts et non nuls. La somme des six cousins de l'entier de quatre chiffres $mn97$ est égale à l'entier de cinq chiffres $nmnm7$. Déterminer les valeurs de m et n et démontrer qu'il n'y a pas d'autres valeurs possibles.

4. La Grande Société des Mathématiques possède un générateur d'entiers qui produit de manière aléatoire et équiprobable un entier de 1 à 9. Chacun des membres de l'Équipe de Multiplication utilise ce générateur un certain nombre de fois et calcule ensuite le produit des entiers qu'il ou elle a obtenus.

   (a) Amarpreet utilise le générateur 3 fois. Quelle est la probabilité pour que le produit soit un nombre premier ?

   (b) Bertrand utilise le générateur 4 fois. Déterminer la probabilité pour que le produit soit divisible par 5 mais *non* divisible par 7.

   (c) Camille utilise le générateur 2023 fois. Soit p la probabilité pour que le produit soit *non* divisible par 6. Déterminer le chiffre des unités de l'entier égal à $p \times 9^{2023}$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2023! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2023.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— des copies gratuites des concours précédents

— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir

— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2023/2024

— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre

— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11e et 12e année

— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne

— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne

— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants

— trouver les résultats de vos élèves dans les concours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le mardi 12 avril 2022
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 13 avril 2022
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

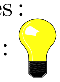
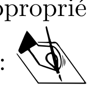
Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

Renseignement utile :
Il vous sera peut-être utile de savoir que $2^n \geq n+1$ pour tous les entiers strictement positifs n.

1. Un *hexagone régulier* est un polygone qui a six côtés de même longueur et six angles intérieurs de même mesure. Dans la Figure 1, l'hexagone régulier $ABCDEF$ a des côtés de longueur $2x$ et ses sommets sont situés sur le cercle de centre O. Les diagonales AD, BE et CF divisent $ABCDEF$ en six triangles équilatéraux isométriques.

   (a) Exprimer le rayon du cercle en fonction de x.

   (b) Soit M le milieu du côté AB, comme dans la Figure 2 ci-dessous. Exprimer la longueur de OM en fonction de x.

   (c) Exprimer l'aire de l'hexagone $ABCDEF$ en fonction de x.

   (d) Dans la Figure 3, la région située à l'intérieur du cercle et à l'extérieur de l'hexagone $ABCDEF$ est ombrée. Cette région ombrée a une aire de 123. Déterminer la valeur de x au dixième près.

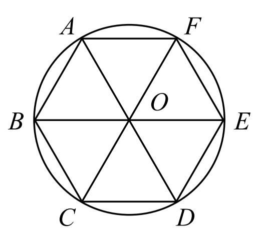


Figure 1

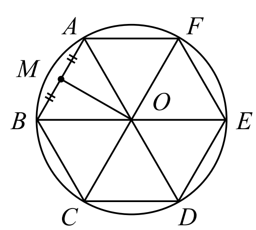


Figure 2

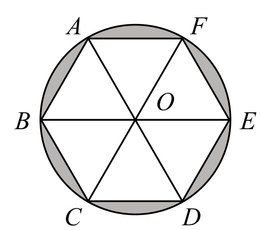


Figure 3

2. Avec 1 kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement 24 mini muffins et 2 grands muffins. Avec 2 kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement 36 mini muffins et 6 grands muffins.

(a) Avec 2 kg de pâte à muffins, on peut également préparer exactement 48 mini muffins et n grands muffins. Quelle est la valeur de n ?

(b) Avec x kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement 84 mini muffins et 10 grands muffins. Quelle est la valeur de x ?

(c) Déterminer le nombre de mini muffins que l'on peut préparer avec la même quantité de pâte que celle requise pour la préparation de 7 grands muffins.

3. On forme une suite de la manière suivante :

- un nombre réel est choisi comme premier nombre de la suite,
- chacun des nombres suivants de la suite est généré en appliquant une fonction au nombre précédent de la suite.

Par exemple, si le premier nombre d'une suite est 1 et que les nombres suivants sont générés par la fonction $x^2 - 5$, alors les trois premiers nombres de la suite sont $1, -4$ et 11 puisque $1^2 - 5 = -4$ et $(-4)^2 - 5 = 11$.

(a) Le premier nombre d'une suite est 3 et cette suite est générée par la fonction $x^2 - 3x + 1$. Quels sont les quatre premiers nombres de la suite ?

(b) Le nombre 7 est le troisième nombre d'une suite générée par la fonction $x^2 - 4x + 7$. Quels sont tous les nombres possibles qui pourraient occuper la première position de la suite ?

(c) Le premier nombre d'une suite est c et la suite est générée par la fonction $x^2 - 7x - 48$. Si tous les nombres de la suite sont égaux à c, déterminer toutes les valeurs possibles de c.

(d) Une suite générée par la fonction $x^2 - 12x + 39$ alterne entre deux nombres différents. Autrement dit, la suite est $a, b, a, b, a, b, \ldots$, où $a \neq b$. Déterminer toutes les valeurs possibles de a.

4. On peut écrire chaque entier $N > 1$ sous la forme $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_k^{a_k}$, k étant un entier strictement positif, $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_k$ étant des nombres premiers et $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ étant des entiers strictement positifs. Par exemple, $1400 = 2^3 5^2 7^1$.

Soit $f(N)$ le nombre de diviseurs positifs de N. On sait que

$$f(N) = (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \cdots (1 + a_k)$$

(a) Combien de diviseurs positifs le nombre 240 admet-il ? Autrement dit, quelle est la valeur de $f(240)$?

(b) Un entier $N > 1$ est *refactorisable* s'il admet $f(N)$ comme diviseur. Par exemple, 6 et 8 admettent tous deux 4 diviseurs positifs. Donc, puisque 8 admet 4 comme diviseur, alors 8 est refactorisable. Or, puisque 6 n'admet pas 4 comme diviseur, alors 6 n'est pas refactorisable. Déterminer tous les nombres refactorisables N tels que $f(N) = 6$.

(c) Déterminer le plus petit nombre refactorisable N tel que $f(N) = 256$.

(d) Démontrer que pour tout entier $m > 1$, il existe un nombre refactorisable N tel que $f(N) = m$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2022! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2022.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2022/2023
— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11e et 12e année
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les concours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

Avril 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

Avril 2021
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Une entreprise offre la possibilité de louer des véhicules de tailles différentes selon le nombre de passagers. Quelques-uns de leurs prix sont indiqués dans le tableau ci-dessous. Par exemple, un groupe de $5, 6, 7$ ou 8 personnes devrait louer un véhicule utilitaire sport (VUS) dont le coût total serait de 200,00 \$. Malheureusement, le coût total de location d'une fourgonnette n'est pas indiqué dans le tableau. Dans chaque cas, les membres du groupe partagent à parts égales le coût total de la location du véhicule.

Véhicule	Nombre de passagers requis	Coût total
Voiture	1 to 4	180,00 \$
VUS	5 to 8	200,00 \$
Fourgonnette	9 to 12	

(a) Si 4 personnes louent une voiture, quel est le coût par personne ?

(b) Si un groupe loue un VUS, quel est le coût maximal possible par personne ?

(c) Lorsqu'on loue une fourgonnette, la différence entre le coût maximal par personne et le coût minimal par personne est de 6,00 \$. Déterminer le coût total de location d'une fourgonnette.

2. Le trapèze $ABCD$ a pour sommets $A(0, 0)$, $B(12, 0)$, $C(11, 5)$ et $D(2, 5)$.

(a) Quelle est l'aire du trapèze $ABCD$?

(b) La droite passant par B et D coupe l'axe des ordonnées en point E. Quelles sont les coordonnées de E ?

(c) Les côtés AD et BC sont prolongés de manière à se couper en point F. Déterminer les coordonnées de F.

(d) Déterminer tous les points possibles P situés sur la droite passant par B et D tels que le triangle PAB ait une aire de 42.

3. La suite A, ayant pour termes $a_1,a_2,a_3,\ldots$, est telle que

$$a_n = 2^n \text{ lorsque } n \geq 1.$$

La suite B, ayant pour termes $b_1,b_2,b_3,\ldots$, est telle que

$$b_1 = 1, b_2 = 1 \text{ et } b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2} \text{ lorsque } n \geq 3.$$

Par exemple, $b_3 = b_2 + 2b_1 = 1 + 2(1) = 3$.

Pour cette question, on peut faire appel aux propriétés suivantes :

- Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante non nulle appelée raison. Par exemple, $3, 6$ et 12 sont les trois premiers termes d'une suite géométrique de raison 2.
- Les n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme a et de raison $r \neq 1$ ont une somme de $a\left(\dfrac{1-r^n}{1-r}\right)$.

(a) Quels sont les 5ᵉ termes de chaque suite ? Autrement dit, quelles sont les valeurs de a_5 et b_5 ?

(b) Pour certains nombres réels p et q, $b_n = p \cdot (a_n) + q \cdot (-1)^n$ pour toutes les valeurs $n \geq 1$. (Il n'est pas nécessaire de démontrer cela.) Quelles sont les valeurs de p et q ?

(c) Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite B. Autrement dit, $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$. Déterminer le plus petit entier strictement positif n qui vérifie $S_n \geq 16^{2021}$.

4. Dans le triangle XYZ, l'angle XZY a une mesure de $90°$. De plus, $YZ = x$ cm, $XZ = y$ cm et l'hypoténuse XY a une longueur de z cm. De surcroît, le triangle XYZ a un périmètre de P cm et une aire de A cm^2.

(a) Si $x = 20$ et $y = 21$, quelles sont les valeurs de A et P ?

(b) Si $z = 50$ et $A = 336$, quelle est la valeur de P ?

(c) Déterminer toutes les valeurs entières possibles de x, y et z pour lesquelles $A = 3P$.

(d) Soit x, y et z des entiers, soit $P = 510$ et soit $A = kP$, k étant un nombre premier. Déterminer toutes les valeurs possibles de k.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2021! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2021.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— des copies gratuites des concours précédents

— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir

— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2021/2022

— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre

— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de la 9e à la 12e année

— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne

— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne

— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants

— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 15 avril 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 avril 2020
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Une épicerie vend des sacs d'avocats à 5,00 \$ le sac et des boîtes de mangues à 12,50 \$ la boîte. Un sac d'avocats contient 6 avocats tandis qu'une boîte de mangues contient 15 mangues. Le nombre de sacs achetés et le nombre de boîtes achetées seront toujours des nombres entiers.

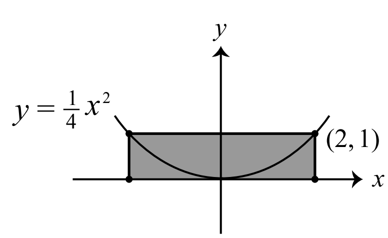
   (a) Vendredi, un chef cuisinier a acheté 12 sacs d'avocats et un certain nombre de boîtes de mangues. Si le coût total était de 135,00 \$, combien de boîtes de mangues a-t-il achetées ?

   (b) Les samedis seulement, l'épicerie offre un rabais de 10 % sur le coût régulier d'un sac d'avocats et un rabais de 20 % sur le coût régulier d'une boîte de mangues. Quel est le coût total de 8 sacs d'avocats et 4 boîtes de mangues les samedis ?

   (c) Lundi, le chef cuisinier a préparé un mets dont la recette nécessitait 100 avocats et 70 mangues. Sachant que le chef cuisinier n'a acheté que le nombre minimal de sacs et de boîtes pour subvenir à ses besoins, déterminer combien lui a coûté cet achat.

   (d) Mardi, le chef cuisinier a préparé un mets dont chaque assiette nécessitait 1 avocat et 2 mangues. Sachant que le chef cuisinier a dépensé *exactement* 75,00 \$ dans l'achat d'avocats et de mangues, déterminer le plus grand nombre d'assiettes qu'il a pu préparer.

2. La parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$ a l'origine comme sommet et l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Pour n'importe quel point (p, q) situé sur la parabole (et n'étant pas situé à l'origine), on peut tracer un *rectangle parabolique*. Ce rectangle aura un sommet situé au point (p, q), un deuxième sommet situé sur la parabole et deux autres sommets situés sur l'axe des abscisses. Dans la figure ci-contre, on voit un rectangle parabolique dont l'aire est égale à 4.



(a) Un rectangle parabolique a un sommet situé au point $(6, 9)$. Quelles sont les coordonnées de ses trois autres sommets ?

(b) Un rectangle parabolique a un sommet situé au point $(-3, 0)$. Quelle est son aire ?

(c) Déterminer les aires des deux rectangles paraboliques qui ont des côtés de longueur 36.

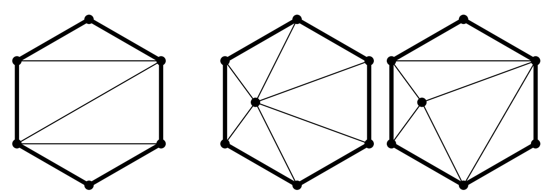
(d) Déterminer l'aire du rectangle parabolique dont la longueur et la largeur sont égales.

3. Une *triangulation* d'un polygone régulier est une division de son intérieur en régions triangulaires. Dans une telle division, chaque sommet de chaque triangle est soit un sommet du polygone soit un point situé à l'intérieur du polygone. Dans la triangulation d'un polygone régulier qui possède $n \geq 3$ sommets et qui a $k \geq 0$ points en son intérieur (sans que trois de ces $n + k$ points soient situés sur la même droite),

   – les segments de droites reliant les couples de ces points ne se coupent deux à deux qu'aux extrémités et

   – chaque point à l'intérieur du polygone est le sommet d'au moins une des régions triangulaires.

   Chaque polygone régulier a au moins une triangulation. Toutes les triangulations possibles d'un polygone qui possède n sommets et qui a k points en son intérieur produiront le même nombre de régions triangulaires. De plus, ce nombre de régions triangulaires est représenté par $T(n, k)$. Par exemple, exactement 6 régions triangulaires seront produites par chacune des triangulations possibles d'un hexagone régulier qui a 1 point en son intérieur. C'est-à-dire, $T(6, 1) = 6$.



$T(6, 0) = 4$ $\qquad$ $T(6, 1) = 6$

(a) Quelle est la valeur de $T(3, 2)$?

(b) Déterminer la valeur de $T(4, 100)$.

(c) Déterminer toutes les valeurs possibles de n pour lesquelles $T(n, n) = 2020$.

4. Soit x_0 un entier non négatif. Pour chaque entier $i \geq 0$, on définit $x_{i+1} = (x_i)^2 + 1$.

(a) Démontrer que $x_2 - x_0$ est pair pour toutes les valeurs possibles de x_0.

(b) Démontrer que $x_{2026} - x_{2020}$ est divisible par 10 pour toutes les valeurs possibles de x_0.

(c) Parsa choisit un entier n $(1 \leq n \leq 100)$ au hasard et elle pose $x_0 = n$. Déterminer la probabilité que $x_{115} - 110$ soit divisible par 105.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2020! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2020.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2020/2021
— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 10 avril 2019

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 11 avril 2019

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

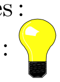
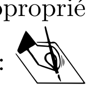
Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

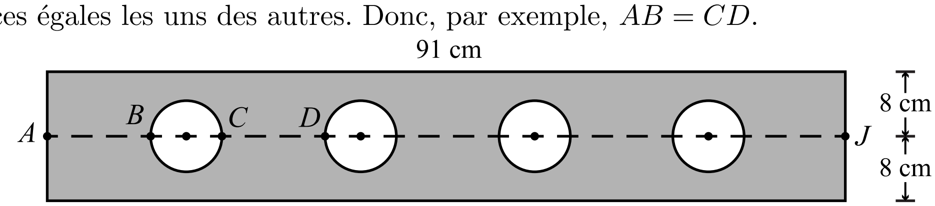
- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Dans la figure suivante, un morceau de métal rectangulaire mesure 91 cm sur 16 cm. On en découpe quatre trous circulaires identiques. Les centres des trous circulaires sont tous situés sur la ligne médiane du rectangle, soit AJ. Ces quatre trous se trouvent aussi à distances égales les uns des autres. Donc, par exemple, $AB = CD$.



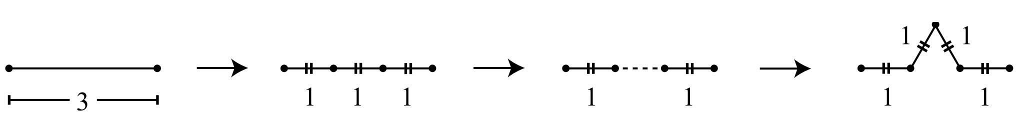
(a) Si le rayon de chaque trou est de 2 cm, quelle est la distance qui sépare les trous adjacents le long de la ligne médiane (c.-à-d. quelle est la longueur de CD) ?

(b) Si la distance qui sépare les trous adjacents le long de la ligne médiane est égale au rayon de chaque trou, quel est le rayon de chaque trou ?

(c) Sachant que les trous doivent être circulaires, démontrer pourquoi cette condition ne permettrait pas une valeur de 5 cm comme distance qui séparerait les trous adjacents.

2. On peut ajouter une *bosse* à tout segment de droite à l'aide du processus suivant :
   - diviser le segment en trois segments de longueurs égales,
   - supprimer le segment du milieu,
   - ajouter une *bosse* dont la forme est un triangle équilatéral où la longueur de chaque côté est égale à la longueur du segment qui a été supprimé.

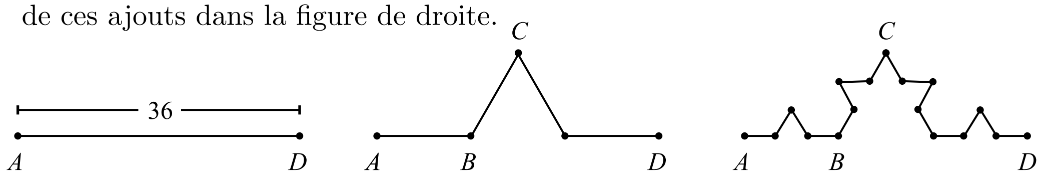
   La série de figures ci-dessous montre l'ajout d'une *bosse* à un segment de droite de longueur 3 et la transformation de ce dernier en un chemin de longueur 4.



(a) Un segment de droite a une longueur de 21. Que sera la longueur du chemin après l'ajout d'une bosse ?

(b) Un chemin avec une seule bosse a une longueur de 240. Quelle était la longueur du segment de droite d'origine ?

(c) Lin commence par un segment de droite de longueur 36 et y ajoute une bosse afin de créer un chemin. Elle ajoute ensuite une bosse à chaque segment de droite dont était composé le chemin. Parmi les figures ci-dessous, on voit le résultat final de ces ajouts dans la figure de droite.



Quelle est la longueur totale du chemin illustré dans la figure de droite des figures ci-dessus ?

(d) Ann commence par un segment de droite dont la longueur est égale à un entier positif n et y ajoute une bosse afin de créer le chemin 1. Elle crée ensuite le chemin 2 en ajoutant une bosse à chaque segment de droite dont était composé le chemin 1. Elle continue ce processus de manière à créer les chemins 3, 4 et 5. Si la longueur du chemin 5 est un entier, déterminer la plus petite valeur possible de n.

3. La *moyenne arithmétique* de deux nombres réels positifs, soit x et y, est égale à la moitié de la somme des deux nombres, soit $\dfrac{x+y}{2}$. La *moyenne géométrique* de deux nombres réels positifs, soit x et y, est égale à la racine carrée du produit des deux nombres, soit $\sqrt{xy}$.

(a) Quelles sont la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de 36 et 64 ?

(b) Déterminer un couple de nombres réels positifs dont la moyenne arithmétique est égale à 13 et dont la moyenne géométrique est égale à 12.

(c) Pour deux entiers positifs x et y, lorsqu'on soustrait la moyenne géométrique de la moyenne arithmétique, on obtient une différence de 1 (c.-à.d. la moyenne arithmétiques moins la moyenne géométrique font 1). Déterminer, avec justifications, les couples (x, y) où $x < y \leq 50$ qui satisfont cette condition.

4. (a) Supposons que c soit un nombre réel. Résoudre le système d'équations afin d'exprimer x et y en fonction de c :

$$3x + 4y = 10$$
$$5x + 6y = c$$

(b) Déterminer tous les entiers d pour lesquels le système d'équations

$$x + 2y = 3$$
$$4x + dy = 6$$

a (x,y) comme solution, x et y étant des entiers.

(c) Déterminer l'entier positif k pour lequel il y a seulement 8 entiers n pour lesquels le système d'équations

$$(9n + 6)x - (3n + 2)y = 3n^2 + 6n + (3k + 5)$$
$$(6n + 4)x + (3n^2 + 2n)y = -n^2 + (2k + 2)$$

a (x,y) comme solution, x et y étant des entiers.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2019! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2019.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2019/2020
— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^{e} et 12^{e} année
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le jeudi 12 avril 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2018
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable, telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera, (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Monsieur Singh donne une interrogation écrite à ses élèves à chaque semaine.

   (a) Lors des six premières interrogations, Aneesh a obtenu des notes de 17, 13, 20, 12, 18 et 10. Quelle est la moyenne de ses notes ?

   (b) Jon a obtenu des notes de 17 et de 12 lors des deux premières interrogations. Après la troisième interrogation, il avait une note moyenne de 14. Quelle note a-t-il obtenue lors de la troisième interrogation ?

   (c) Après les six premières interrogations, Dina avait une note moyenne de 14. Lors de chacune des n interrogations suivantes, Dina a obtenu une note de 20 sur 20. Après toutes ces interrogations, elle avait une note moyenne de 18. Déterminer la valeur de n.

2. Chaque jour, Jessica conduit de Bobourg à Aville, une distance de 120 km. Pendant le trajet, le système de navigation de la voiture met à jour constament l'heure prévue d'arrivée (HPA) à Aville. La voiture calcule la HPA en supposant que Jessica conduira jusqu'à destination à une vitesse de 80 km/h.

   (a) Lundi, Jessica a conduit à la vitesse de 90 km/h. Combien de minutes Jessica a-t-elle mis pour conduire de Bobourg à Aville ?

   (b) Mardi, Jessica a quitté Bobourg à 7 h 00. Quelle HPA l'auto a-t-elle indiquée à 7 h 00 ?

   (c) Mardi, Jessica a conduit à la vitesse de 90 km/h. Quelle HPA l'auto a-t-elle indiquée à 7 h 16 ?

   (d) Mercredi, Jessica a remarqué la HPA indiquée par la voiture en partant de Bobourg. Pendant la première partie du trajet, Jessica a conduit à la vitesse de 50 km/h. Pendant le reste du trajet, elle a conduit à la vitesse de 100 km/h. Elle est arrivée à Aville à la HPA indiquée par la voiture au départ de Bobourg. Déterminer la distance parcourue à la vitesse de 100 km/h.

3. Une suite $T_1, T_2, T_3, \ldots$ est telle que $T_1 = 1$ et $T_2 = 2$; chacun des termes suivants est 1 de plus que le produit de tous les termes précédents. Ainsi $T_{n+1} = 1 + T_1T_2T_3 \cdots T_n$ pour tous les entiers n $(n \geq 2)$. Par exemple, $T_3 = 1 + T_1T_2$, ou $T_3 = 3$.

   (a) Quelle est la valeur de T_5 ?

   (b) Démontrer que $T_{n+1} = T_n^2 - T_n + 1$ pour tous les entiers n $(n \geq 2)$.

   (c) Démontrer que $T_n + T_{n+1}$ est un diviseur de $T_nT_{n+1} - 1$ pour tous les entiers n $(n \geq 2)$.

   (d) Démontrer que T_{2018} n'est pas un carré parfait.

4. (a) On considère deux paraboles définies par les équations $y = x^2 - 8x + 17$ et $y = -x^2 + 4x + 7$.

   (i) Déterminer les coordonnées des sommets S_1 et S_2 de ces deux paraboles.

   (ii) Supposons que ces deux paraboles se coupent aux points P et Q. Expliquer pourquoi le quadrilatère S_1PS_2Q est un parallélogramme.

   (b) Les deux paraboles définies par les équations $y = -x^2 + bx + c$ et $y = x^2$ ont pour sommets respectifs S_3 et S_4. Pour certaines valeurs de b et de c, ces paraboles se coupent aux points R et T.

   (i) Déterminer tous les couples (b, c) pour lesquels les points R et T existent et les points S_3, S_4, R et T sont distincts.

   (ii) Déterminer tous les couples (b, c) pour lesquels les points R et T existent, les points S_3, S_4, R et T sont distincts et le quadrilatère S_3RS_4T est un rectangle.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2018! Chaque année, plus de 240 000 élèves, provenant de 75 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2018.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2018/2019
— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^{e} et 12^{e} année
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 12 avril 2017
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 13 avril 2017
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

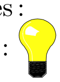
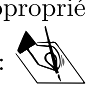
Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

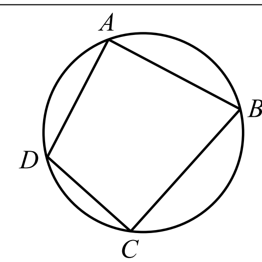
- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Un quadrilatère est *inscrit dans un cercle* si ses quatre sommets sont situés sur ce cercle. Dans un tel quadrilatère, les mesures des angles opposés ont une somme de 180°. Dans la figure ci-contre, le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle. Donc $\angle ABC + \angle ADC = 180° = \angle BAD + \angle BCD$.



(a) Dans la figure A ci-dessous, le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle. Sachant que $\angle BAD = 88°$, quelle est la valeur de u ?

(b) Dans la figure B, les quadrilatères $PQRS$ et $STQR$ sont inscrits dans un cercle. Sachant que $\angle STQ = 58°$, quelle est la valeur de x et quelle est la valeur de y ?

(c) Dans la figure C, le quadrilatère $JKLM$ est inscrit dans un cercle. De plus, $JK = KL$ et $JL = LM$. Sachant que $\angle KJL = 35°$, quelle est la valeur de w ?

(d) Dans la figure D, le quadrilatère $DEFG$ est inscrit dans un cercle. Le côté FG est prolongé jusqu'à H. Si $\angle DEF = z°$, déterminer la mesure de l'angle DGH en fonction de z.

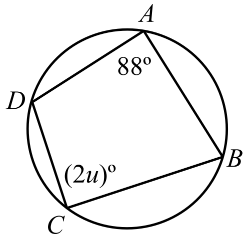


Figure A

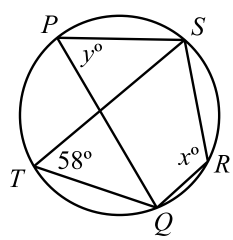


Figure B

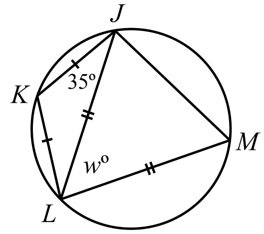


Figure C

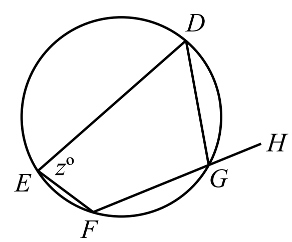


Figure D

2. On écrit des entiers dans un tableau que l'on remplit du haut vers le bas, rangée par rangée de gauche à droite. La rangée 1 contient l'entier 1. La rangée 2 contient les entiers $1, 2$ et 3. La rangée n contient les entiers consécutifs de 1 jusqu'au $n^{\text{ième}}$ entier impair. Le 9^{e} entier écrit dans le tableau est un 5 qui est situé à la fin de la rangée 3. De façon générale, après avoir rempli n rangées, on a écrit un total de n^2 entiers.

Rangée 1	1						
Rangée 2	1	2	3				
Rangée 3	1	2	3	4	5		
Rangée 4	1	2	3	4	5	6	7
$\vdots$							

(a) Quel est le 25^{e} entier que l'on écrit dans le tableau et dans quelle rangée est-il situé ?

(b) Quel est le 100^{e} entier que l'on écrit dans le tableau ?

(c) Quel est le 2017^{e} entier que l'on écrit dans le tableau ?

(d) Dans combien des 200 premières rangées l'entier 96 parait-il ?

3. (a) La droite définie par $y = -15$ coupe la parabole d'équation $y = -x^2 + 2x$ en deux points. Quelles sont les coordonnées de ces deux points d'intersection ?

(b) Une droite coupe la parabole d'équation $y = -x^2 - 3x$ en $x = 4$ et en $x = a$. Cette droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0, 8)$. Déterminer la valeur de a.

(c) Une droite coupe la parabole d'équation $y = -x^2 + kx$ en $x = p$ et en $x = q$, où $p \neq q$. Déterminer l'ordonnée à l'origine de cette droite.

(d) Pour tous k $(k \neq 0)$, la courbe définie par $x = \frac{1}{k^3}y^2 + \frac{1}{k}y$ coupe la parabole d'équation $y = -x^2 + kx$ au point $(0, 0)$ et en un deuxième point T dont les coordonnées dépendent de k. Tous ces points T sont situés sur une même parabole. Déterminer l'équation de cette parabole.

4. Un entier strictement positif est appelé un *nombre zigzag de n chiffres* si

- $3 \leq n \leq 9$,
- les chiffres du nombre sont $1, 2, \ldots, n$ (sans répétitions) et
- pour chaque groupe de trois chiffres adjacents, le chiffre du milieu est soit supérieur aux deux autres chiffres ou il est inférieur aux deux autres chiffres.

Par exemple, 52314 est un nombre zigzag de 5 chiffres, mais 52143 ne l'est pas.

(a) Quel est le plus grand nombre zigzag de 9 chiffres ?

(b) Soit $G(n, k)$ le nombre de nombres zigzag de n chiffres dont le premier chiffre est k et le deuxième chiffre est plus grand que k. Soit $P(n, k)$ le nombre de nombres zigzag de n chiffres dont le premier chiffre est k et le deuxième chiffre est plus petit que k.

(i) Montrer que $G(6, 3) = P(5, 3) + P(5, 4) + P(5, 5)$.

(ii) Montrer que
$$G(6, 1) + G(6, 2) + G(6, 3) + G(6, 4) + G(6, 5) + G(6, 6)$$
est égal à
$$P(6, 1) + P(6, 2) + P(6, 3) + P(6, 4) + P(6, 5) + P(6, 6).$$

(c) Déterminer le nombre de nombres zigzag de 8 chiffres.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2017! Chaque année, plus de 220 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2017.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2017/2018
— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11e et 12e année
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 13 avril 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 avril 2016
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 ... ou 1,41 ..., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

REMARQUES :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'on puisse utiliser une calculatrice pour des calculs numériques, on doit présenter et justifier les autres étapes d'une solution. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. On ne peut participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. On peut acheter des raisins secs à la cuiller, à la tasse, au bocal, au panier ou au bac selon les proportions suivantes : 5 cuillerées de raisins secs remplissent 1 bocal, 3 cuillerées de raisins secs remplissent 1 tasse, 5 paniers de raisins secs remplissent 2 bacs et 30 bocaux de raisins secs remplissent 1 bac.

   (a) Combien de bacs de raisins secs remplissent 30 paniers ?

   (b) Combien de tasses de raisins secs remplissent 6 bocaux ?

   (c) Déterminer combien il faut de tasses de raisins secs pour remplir 1 panier.

2. Lorsqu'on trace un segment de droite du centre d'un cercle au milieu d'une corde, ce segment est perpendiculaire à la corde. Par exemple dans la figure 1, OM est perpendiculaire à la corde AB.

   Lorsqu'on abaisse une perpendiculaire du centre d'un cercle jusqu'à une corde du cercle, la perpendiculaire passe au milieu de la corde. Par exemple dans la figure 2, $PR = QR$.

Figure 1

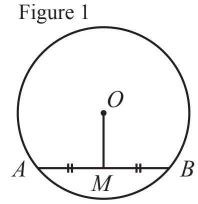
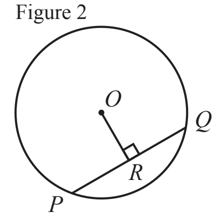
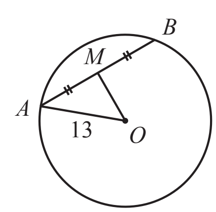


Figure 2

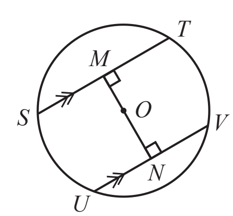


   (a) Dans la figure ci-contre, un cercle de rayon 13 a une corde AB de longueur 10. Si M est le milieu de AB, quelle est la longueur de OM ?



   (b) Dans un cercle de rayon 25, on trace une corde de manière qu'il y ait une distance de 7 entre le centre du cercle et la corde, mesurée perpendiculairement à la corde. Quelle est la longueur de cette corde ?

   (c) Le cercle ci-contre a un rayon de 65. Deux cordes parallèles, ST et UV, sont tracées de manière qu'il y ait une distance de 72 ($MN = 72$) entre elles. Sachant que MN passe au centre O du cercle et que ST a une longueur de 112, déterminer la longueur de UV.



3. Étant donné un entier strictement positif n, l'expression $f(n)$ représente l'exposant de la plus grande puissance de 3 qui est un diviseur de n. Par exemple, $f(126) = 2$, puisque $126 = 3^2 \times 14$ et que 3^2 est un diviseur de 126, mais que 3^3 ne l'est pas.

   (a) Quelle est la valeur de $f(405)$?

   (b) Quelle est la valeur de $f(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10)$?

   (c) Soit N l'entier positif égal à $\dfrac{100!}{50!20!}$. Déterminer la valeur de $f(N)$.
   (Remarque : Pour un entier strictement positif m, $m!$ représente le produit des entiers de 1 à m. Par exemple, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.)

   (d) Étant donné $f(a) = 8$ et $f(b) = 7$, déterminer toutes les valeurs possibles de $f(a + b)$.

4. Les restaurants Ezio Pizza (EP) et Lino Pizza (LP) sont voisins. Chaque jour, 100 clients achètent chacun une pizza entière à l'un ou l'autre des deux restaurants. Le prix d'une pizza est fixé chaque jour à chaque restaurant et il est toujours un multiple de 10 cents. Lorsque le prix est le même à chaque restaurant, la moitié des 100 clients achètent leur pizza à chaque restaurant. Lorsqu'un prix est supérieur à l'autre, à un des restaurants, alors pour chaque différence de 10 cents, ce restaurant perd un client à l'autre restaurant. Chaque restaurant dépense 5,00 \$ pour faire une pizza.

   Par exemple, si le prix d'une pizza est de 8,00 \$ chez EP et 9,00 \$ chez LP, le nombre de clients et le profit de chaque restaurant est indiqué dans le tableau suivant.

Restaurant	Prix d'une pizza	Nombre de clients	Profit
EP	8,00 \$	$50 + 10 = 60$	$60 \times (8{,}00\,\$ - 5{,}00\,\$) = 180\,\$$
LP	9,00 \$	$50 - 10 = 40$	$40 \times (9{,}00\,\$ - 5{,}00\,\$) = 160\,\$$

   (a) Lundi, une pizza coûte 7,70 \$ chez EP et 9,30 \$ chez LP.
      (i) Combien de clients achètent chez LP ?
      (ii) Quel est le profit total chez LP ?

   (b) EP fixe le prix en premier et LP fixe le sien ensuite. Mardi, une pizza coûte 7,20 \$ chez EP. Quel prix devrait-on utiliser chez LP de manière à maximiser son profit ?

   (c) Mercredi, EP constate le jeu de LP : LP maximise son profit en fixant son prix après que EP a fixé le sien. EP continue à fixer son prix en premier de manière que le prix fixé soit un multiple de 20 cents. Le prix de EP est toujours un multiple de 10 cents et le nombre de clients de chaque restaurant obéit toujours aux mêmes règles décrites au début. Déterminer les deux prix que EP pourrait utiliser de manière à maximiser son profit. Indiquer le profit de LP dans chaque cas.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2016! Chaque année, plus de 220 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2016.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— des copies gratuites des concours précédents

— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir

— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2016/2017

— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre

— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^{e} et 12^{e} année

— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne

— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne

— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants

— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le jeudi 16 avril 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 17 avril 2015
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 . . . ou 1,41 . . ., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

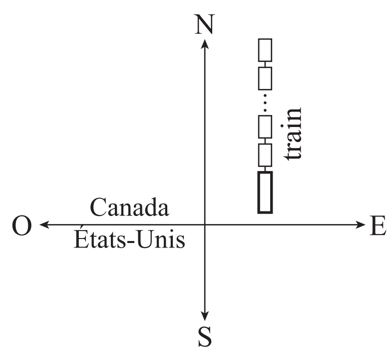
NOTE :
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Chaque train du Chemin de fer Hypatie est composé d'une locomotive suivie d'un nombre de wagons en ligne droite. Il y a une distance de 2 m entre deux wagons consécutifs. Il y a aussi une distance de 2 m entre la locomotive et le premier wagon. La locomotive a une longueur de 26 m et chaque wagon a une longueur de 15 m. La longueur totale d'un train est la distance à partir du devant de la locomotive jusqu'à l'arrière du dernier wagon.

   (a) Quelle est la longueur totale d'un train qui a 10 wagons ?

   (b) Un train a une longueur totale de 2015 m. Combien de wagons de ce train a-t-il ?

   (c) Dans la figure ci-contre, un train avec 14 wagons traverse la frontière entre le Canada et les États-Unis en direction sud à une vitesse de 1,6 m/s. Déterminer le temps, en secondes, pendant lequel une partie du train se trouve au Canada et une autre partie du train se trouve aux États-Unis.



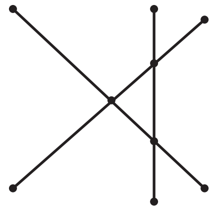
2. Dans les questions qui suivent, A, B, M, N, P, Q, et R sont des chiffres non nuls.

   (a) Un entier positif de deux chiffres, AB, est égal à $10A + B$. Par exemple, $37 = 10 \times 3 + 7$. Sachant que $AB - BA = 72$, quel est l'entier positif AB ?

   (b) On considère un entier positif de deux chiffres, MN. Expliquer pourquoi il est impossible que $MN - NM = 80$.

   (c) Un entier positif de trois chiffres, PQR, est égal à $100P + 10Q + R$. Si $P > R$, déterminer le nombre de valeurs possibles de l'expression $PQR - RQP$.

3. On considère n segments de droites qui se coupent deux à deux à des points différents, aucun point d'intersection n'étant une extrémité d'un des segments. Soit $T(n)$ la somme du nombre du nombre de points d'intersection et du nombre d'extrémités des segments. Par exemple, $T(1) = 2$ et $T(2) = 5$. La figure ci-dessous indique comment $T(3) = 9$.



(a) Calculer $T(4)$ et $T(5)$.

(b) Exprimer $T(n) - T(n-1)$ en fonction de n.

(c) Déterminer toutes les valeurs possibles de n pour lesquelles $T(n) = 2015$.

4. L'expression $PGCD(a, b)$ représente le plus grand commun diviseur des deux entiers strictement positifs a et b. Par exemple, $PGCD(18, 45) = 9$, car 9 est le plus grand entier positif qui est diviseur de 18 et de 45.
L'expression $P(n)$ représente la somme des n plus grands communs diviseurs $PGCD(1, n)$, $PGCD(2, n)$, $\ldots$, $PGCD(n, n)$. Par exemple :

$$\begin{aligned} P(6) &= PGCD(1,6) + PGCD(2,6) + PGCD(3,6) \\ &\qquad + PGCD(4,6) + PGCD(5,6) + PGCD(6,6) \\ &= 1+2+3+2+1+6 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Remarque : Il est permis d'utiliser le fait que $P(ab) = P(a)P(b)$ pour tous les entiers strictement positifs a et b pour lesquels $PGCD(a, b) = 1$.

(a) Calculer la valeur de $P(125)$.

(b) Étant donné deux nombres premiers distincts, r et s, démontrer que

$$P(r^2 s) = r(3r-2)(2s-1)$$

(c) Étant donné deux nombres premiers distincts, r et s, démontrer que $P(r^2 s)$ ne peut être égal à une puissance d'un nombre premier (c'est-à-dire ne peut être égal à t^n, t étant un nombre premier et n étant un entier strictement positif).

(d) Déterminer deux valeurs entières strictement positives de m pour lesquelles $P(m) = 243$. Justifier les étapes de sa présentation.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2015! Chaque année, plus de 200 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2015.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :
– des copies gratuites des concours précédents
– des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
– des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :
– obtenir des renseignements au sujet des concours de 2015/2016
– inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
– jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11e et 12e année
– vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
– vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
– vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
– trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 16 avril 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 17 avril 2014
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO — WATERLOO MATHEMATICS — Deloitte.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Durée : 75 minutes — **Nombre de questions :** 4
L'utilisation d'une calculatrice est permise. — **Chaque question vaut 10 points.**

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 ... ou 1,41 ..., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées a l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.

1. Étant donné deux nombres réels a et b, $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on définit l'opération $\odot$ comme suit :

$$a \odot b = \sqrt{a + 4b}$$

Par exemple, $5 \odot 1 = \sqrt{5 + 4(1)}$, d'où $5 \odot 1 = \sqrt{9}$, ou $5 \odot 1 = 3$.

(a) Quelle est la valeur de $8 \odot 7$?

(b) Sachant que $16 \odot n = 10$, quelle est la valeur de n ?

(c) Déterminer la valeur de $(9 \odot 18) \odot 10$.

(d) Déterminer toutes les valeurs de k pour lesquelles $k \odot k = k$, tout en justifiant sa démarche.

2. Chaque semaine, le magasin MathTunes publie la liste des 200 chansons les plus populaires. Une nouvelle chanson, « Boucle récursive », est lancée à temps pour faire la liste de la semaine 1. La position P de la chanson sur la liste de la semaine s est donnée par l'équation $P = 3s^2 - 36s + 110$. Le numéro s de la semaine est toujours un entier strictement positif.

(a) Quelle est la position de la chanson pendant la semaine 1 ?

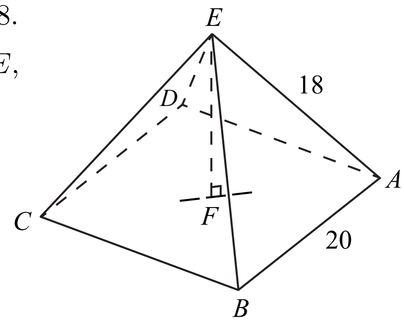
(b) Les artistes veulent que leur chanson atteigne la meilleure position possible. Plus la position est près de la position 1, plus cette position est bonne.

(i) Quelle est la meilleure position atteinte par la chanson « Boucle récursive » ?

(ii) Pendant quelle semaine cette chanson atteint-elle cette meilleure position ?

(c) Quel est le numéro de la dernière semaine où la chanson « Boucle récursive » parait sur la liste des 200 chansons les plus populaires ?

3. Une pyramide $ABCDE$ a une base carrée $ABCD$ dont les côtés ont une longueur de 20. Le sommet E est situé sur la perpendiculaire à la base qui passe au point F, le centre de la base $ABCD$. On sait que $EA = EB = EC = ED = 18$.



(a) Déterminer l'aire totale de la pyramide $ABCDE$, incluant la base.

(b) Déterminer la hauteur EF de la pyramide.

(c) G et H sont les centres respectifs des arêtes ED et EA. Déterminer l'aire du quadrilatère $BCGH$.

4. Un triplet d'entiers strictement positifs (x, y, z) est appelé un triplet presque pythagoricien (ou TPP) si $x > 1$, $y > 1$ et $x^2 + y^2 = z^2 + 1$. Par exemple, (5, 5, 7) est un TPP.

(a) Déterminer les valeurs de y et de z pour lesquelles $(4, y, z)$ est un TPP.

(b) Démontrer que pour n'importe quel triangle dont les longueurs de côtés forment un TPP, l'aire du triangle n'est pas un entier.

(c) Déterminer deux 5-uplets (b, c, p, q, r) d'entiers strictement positifs de manière que $p \geq 100$ et que $(5t + p, bt + q, ct + r)$ soit un TPP pour tous les entiers t strictement positifs.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2014!
En 2013, plus de 15 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Fryer, Galois et Hypatie.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre.

Visitez notre site Web pour
- des copies gratuites des concours précédents
- des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
- des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour
- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2014/2015
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
- trouver les résultats de votre école
- vous inscrire au Problème de la semaine
- obtenir des renseignements au sujet de notre programme de Master of Mathematics for Teachers (maîtrise en mathématiques pour enseignants)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le jeudi 18 avril 2013

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 19 avril 2013

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Durée : 75 minutes
Nombre de questions : 4

L'utilisation d'une calculatrice est permise.
Chaque question vaut 10 points.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 . . . ou 1,41 . . ., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées a l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.

1. À l'ouverture du centre commercial JK, certains clients chanceux peuvent participer à la remise d'un cadeau en argent. Une grande boite est remplie de billets de 5 \$, de 10 \$, de 20 \$ et de 50 \$. La cliente ou le client chanceux peut plonger la main dans la boite et en retirer une poignée de billets.

   (a) Rad retire au moins deux billets de chaque sorte pour une somme de 175 \$. Combien de billets Rad a-t-il retirés en tout ?

   (b) Sandy retire exactement cinq billets et elle remarque qu'elle a au moins un billet de chaque sorte. Quelles sont les sommes possibles d'argent qu'elle a pu retirer ?

   (c) Lino retire six billets ou moins pour une somme de 160 \$. Il y a exactement quatre possibilités pour le nombre de billets de chaque sorte que Lino a pu retirer. Déterminer ces quatre possibilités.

2. Une parabole a pour équation $y = (x-3)^2 + 1$.

   (a) Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole ?

   (b) On crée une nouvelle parabole en faisant subir à la parabole précédente une translation de 3 unités vers la gauche et 3 unités vers le haut. Quelle est l'équation de la nouvelle parabole ?

   (c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux paraboles.

   (d) La parabole d'équation $y = ax^2 + 4$, $a < 0$, touche la parabole d'équation $y = (x-3)^2 + 1$ en exactement un point. Déterminer la valeur de a.

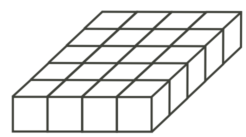
3. Une suite formée de m fois la lettre P et de n fois la lettre Q, $m > n$, est appelée *non prédictive* s'il y a un endroit dans la suite où le nombre de lettres Q comptées à partir de la gauche est supérieur ou égal au nombre de lettres P comptées à partir de la gauche.
Par exemple si $m = 5$ et $n = 2$, la suite PPQQPPP est non prédictive, car si on compte les quatre premières lettres à partir de la gauche, le nombre de lettres Q est égal au nombre de lettres P. De même, la suite QPPPQPP est non prédictive, car si on compte une lettre à partir de la gauche, le nombre de lettres Q est supérieur au nombre de lettres P.

   (a) Si $m = 7$ et $n = 2$, déterminer le nombre de suites non prédictives qui commencent par la lettre P.

   (b) On suppose que $n = 2$. Démontrer que pour toute valeur de m supérieure à 2, le nombre de suites non prédictives qui commencent par la lettre P est égal au nombre de suites non prédictives qui commencent par la lettre Q.

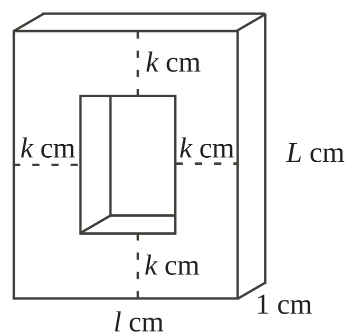
   (c) Déterminer le nombre de suites non prédictives qui existent lorsque $m = 10$ et $n = 3$.

4. (a) Vingt cubes ayant chacun des arêtes de 1 cm, sont placés en 4 rangés de 5, comme dans la figure ci-contre. Quelle est l'aire totale du prisme à base rectangulaire qui est formé ?



   (b) Un certain nombre de cubes, ayant chacun des arêtes de 1 cm, sont placés de manière à former un prisme à base rectangulaire d'une hauteur de 1 cm de sorte que le prisme ait une aire totale de 180 cm^2. Déterminer le nombre de cubes qui forment le prisme.

   (c) Un certain nombre de cubes, ayant chacun des arêtes de 1 cm, sont placés de manière à former un prisme à base rectangulaire ayant une longueur de L cm, une largeur de l cm et une épaisseur de 1 cm. On forme un cadre en enlevant un prisme à base rectangulaire ayant une épaisseur de 1 cm et situé à k cm de chaque côté du prisme initial, comme dans la figure ci-contre. Les valeurs de L, de l et de k sont des entiers strictement positifs. Sachant que ce cadre a une aire totale de 532 cm^2, déterminer toutes les valeurs possibles de L et de l pour lesquelles $L \geq l$.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2013!
En 2012, plus de 13 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Fryer, Galois et Hypatie.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre.

Visitez notre site Web pour

- des copies gratuites des concours précédents
- des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
- des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2013/2014
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
- trouver les résultats de votre école
- vous inscrire au Problème de la semaine
- obtenir des renseignements au sujet de notre programme de Master of Mathematics for Teachers (maîtrise en mathématiques pour enseignants)

The CENTRE for EDUCATION
in MATHEMATICS and COMPUTING
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

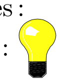
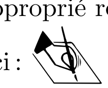
le jeudi 12 avril 2012
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2012
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Durée : 75 minutes | **Nombre de questions :** 4
L'utilisation d'une calculatrice est permise. | **Chaque question vaut 10 points.**

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 . . . ou 1,41 . . ., sauf indication contraire.

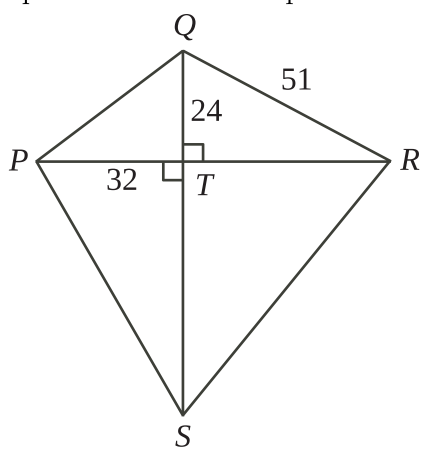
Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié dans les Résultats du concours Euclide sur notre site web à l'adresse http://www.cemc.uwaterloo.ca.

REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de 💡, placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de ✍, fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier séparée pour rédiger un brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées a l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.

1. On considère le quadrilatère $PQRS$ suivant tel que $QR = 51$. Les diagonales de $PQRS$ se coupent à angle droit au point T de manière que $PT = 32$ et $QT = 24$.



(a) Calculer la longueur de PQ.

(b) Calculer l'aire du triangle PQR.

(c) Déterminer le périmètre du quadrilatère $PQRS$, sachant que $QS : PR = 12 : 11$.

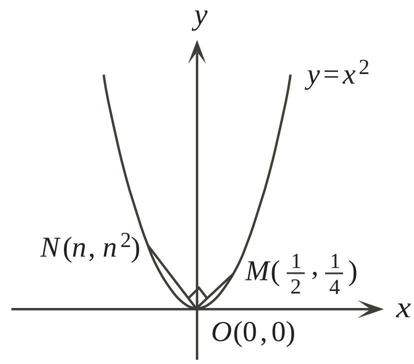
2. (a) Déterminer la valeur de $(a+b)^2$, sachant que $a^2 + b^2 = 24$ et $ab = 6$.

(b) Déterminer la valeur de xy, sachant que $(x+y)^2 = 13$ et $x^2 + y^2 = 7$.

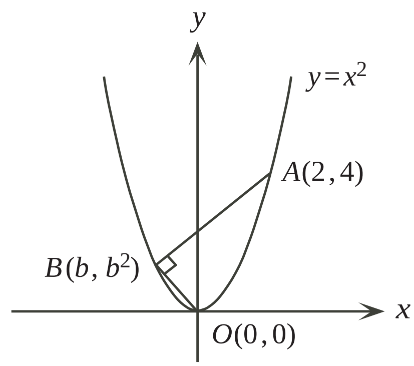
(c) Déterminer la valeur de jk, sachant que $j + k = 6$ et $j^2 + k^2 = 52$.

(d) Déterminer les valeurs possibles de mn, sachant que $m^2 + n^2 = 12$ et $m^4 + n^4 = 136$.

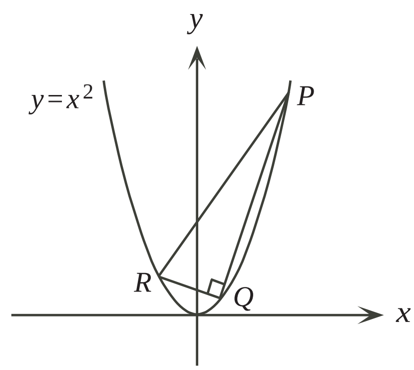
3. (a) Dans la figure ci-contre, les points $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ et $N(n, n^2)$ sont situés sur la parabole d'équation $y = x^2$. Déterminer la valeur de n pour laquelle $\angle MON = 90°$.



(b) Dans la figure ci-contre, les points $A(2, 4)$ et $B(b, b^2)$ sont les extrémités d'une corde de la parabole d'équation $y = x^2$. Déterminer la valeur de b pour laquelle $\angle ABO = 90°$.



(c) Dans la figure ci-contre, le triangle rectangle PQR est inscrit sur la parabole d'équation $y = x^2$. Les points P, Q et R ont pour coordonnées respectives (p, p^2), (q, q^2) et (r, r^2). Démontrer que $2q+p+r = 0$, sachant que p, q et r sont des entiers.



4. Les diviseurs positifs de 21 sont 1, 3, 7 et 21. Soit $S(n)$ la somme des diviseurs positifs de n. Par exemple, $S(21) = 1 + 3 + 7 + 21$, c'est-à-dire que $S(21) = 32$.

(a) Sachant que p est un nombre premier impair, déterminer la valeur de p pour laquelle $S(2p^2) = 2613$.

(b) Les entiers consécutifs 14 et 15 sont tels que $S(14) = S(15)$. Déterminer tous les couples d'entiers consécutifs, m et n, pour lesquels $m = 2p$ et $n = 9q$, p et q étant des nombres premiers supérieurs à 3 et $S(m) = S(n)$.

(c) Déterminer le nombre de couples d'entiers premiers distincts, p et q, chacun inférieur à 30, pour lesquels $S(p^3q)$ n'est pas divisible par 24.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2012!
En 2011, plus de 13 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Fryer, Galois et Hypatie.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre.

Visitez notre site Web pour

– des copies gratuites des concours précédents
– des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
– des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour

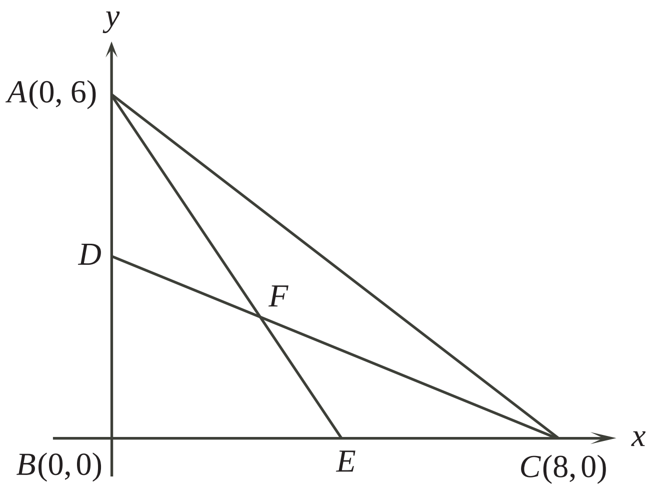
– obtenir des renseignements au sujet des concours de 2012/2013
– vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
– trouver les résultats de votre école
– vous inscrire au Problème de la semaine
– obtenir des renseignements au sujet de notre programme de Master of Mathematics for Teachers (maîtrise en mathématiques pour enseignants)

www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2011 (11^e année – Sec. V)

le mercredi 13 avril 2011

1. Dans la figure suivante, D et E sont les milieux respectifs de AB et de BC.



   (a) Déterminer une équation de la droite qui passe aux points C et D.

   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection F de AE et de CD.

   (c) Déterminer l'aire du triangle DBC.

   (d) Déterminer l'aire du quadrilatère $DBEF$.

2. Un ensemble S est formé de tous les entiers positifs de deux chiffres tels que :

   – aucun des nombres ne contient un chiffre 0 ou un chiffre 9 et
   – aucun nombre n'est un multiple de 11.

   (a) Déterminer combien de nombres dans S ont un chiffre des dizaines égal à 3.

   (b) Déterminer combien de nombres dans S ont un chiffre des unités égal à 8.

   (c) Déterminer combien il y a de nombres dans S.

   (d) Déterminer la somme de tous les nombres dans S.

3. On dit que trois entiers strictement positifs x, y et z forment un *triplet Trenti* (x, y, z) si $3x = 5y = 2z$.

   (a) Déterminer la valeur de y et celle de z dans le triplet Trenti $(50, y, z)$.

   (b) Démontrer que dans tout triplet Trenti (x, y, z), y doit être divisible par 6.

   (c) Démontrer que dans tout triplet Trenti (x, y, z), le produit xyz doit être divisible par 900.

4. Soit $F(n)$ le nombre de façons dont l'entier strictement positif n peut être exprimé comme somme d'entiers positifs impairs. Par exemple :

   – $F(5) = 3$, car

$$\begin{aligned} 5 &= 1+1+1+1+1 \\ &= 1+1+3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

   – $F(6) = 4$, car

$$\begin{aligned} 6 &= 1+1+1+1+1+1 \\ &= 1+1+1+3 \\ &= 3+3 \\ &= 1+5 \end{aligned}$$

   (a) Déterminer $F(8)$ et écrire toutes les façons d'exprimer 8 comme somme d'entiers positifs impairs.

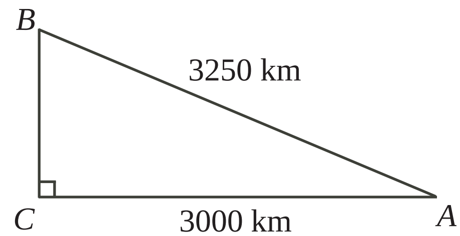
   (b) Démontrer que pour tout entier n supérieur à 3, $F(n+1) > F(n)$.

   (c) Démontrer que pour tout entier n supérieur à 3, $F(2n) > 2F(n)$.

Concours Hypatie 2010 (11^e^ année – Sec. V)

le vendredi 9 avril 2010

1. Piravena prépare un voyage en trois étapes, soit de A à B, ensuite de B à C, puis de C à A. Chaque étape doit se faire soit en autocar, soit en avion. Comme l'indique la figure, les trois villes forment un triangle rectangle en C. Il y a une distance de 3000 km de A à C et une distance de 3250 km de A à B. Le coût pour voyager en autocar est de 0,15 $ le kilomètre. Pour voyager en avion, il faut compter des frais de réservation de 100 $, plus 0,10 $ le kilomètre.



   (a) Elle a fait l'étape de A à B en avion. Déterminer le coût de cette étape.

   (b) Déterminer la distance totale des trois étapes du voyage.

   (c) Piravena a choisi les moyens de transport les moins dispendieux pour chaque étape, ce qui lui a coûté 1012,50 $ en tout. Sachant qu'elle a pris l'avion de A à B, déterminer le moyen de transport qu'elle a choisi de B à C et le moyen de transport qu'elle a choisi de C à A.

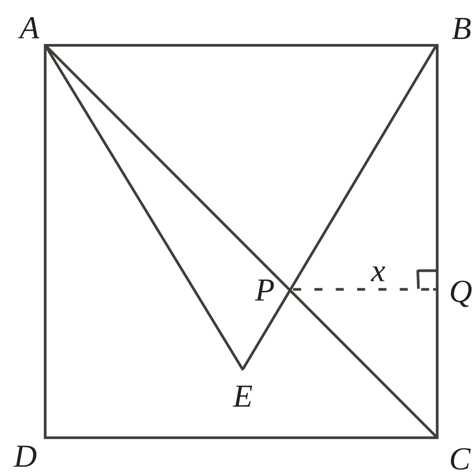
2. Une fonction f est telle que $f(x) - f(x-1) = 4x - 9$ et $f(5) = 18$.

   (a) Déterminer la valeur de $f(6)$.

   (b) Déterminer la valeur de $f(3)$.

   (c) Sachant que $f(x) = 2x^2 + px + q$, déterminer la valeur de p et celle de q.

3. Dans la figure ci-contre, le carré $ABCD$ a des côtés de longueur 4 et le triangle ABE est équilatéral. Les segments BE et AC se coupent en P. Le point Q est situé sur BC de manière que PQ soit perpendiculaire à BC. Soit $PQ = x$.



   (a) Déterminer les mesures d'angles du triangle BPC.

   (b) Déterminer une expression en fonction de x pour la longueur BQ.

   (c) Déterminer la valeur exacte de x.

   (d) Déterminer l'aire exacte du triangle APE.

4. (a) Déterminer toutes les valeurs réelles de x qui vérifient l'équation $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.

   (b) Déterminer le plus petit entier strictement positif N pour lequel l'expression $x^4 + 2010x^2 + N$ peut être factorisée sous la forme $(x^2 + rx + s)(x^2 + tx + u)$, r, s, t et u étant des entiers et $r \neq 0$.

   (c) Démontrer que l'expression $x^4 + Mx^2 + N$ ne peut pas être factorisée comme dans la partie (b), M et N étant n'importe quels entiers pour lesquels $N - M = 37$.

Concours Hypatie 2009 (11^e année – Sec. V)

le mercredi 8 avril 2009

1. Emma a noté la couleur des yeux et la couleur des cheveux de chaque élève de sa classe. Le tableau suivant résume les résultats :

Couleur des yeux	Couleur des cheveux →	Brun	Blond	Roux
	Bleu	3	2	1
	Vert	2	4	2
	Brun	2	3	1

   (a) Quel pourcentage des élèves ont à la fois les yeux verts et les cheveux bruns ?

   (b) Quel pourcentage des élèves ont les yeux verts ou les cheveux bruns ou les deux ?

   (c) Quel pourcentage des élèves qui ont les yeux verts ont aussi les cheveux roux ?

   (d) Déterminer le nombre d'élèves aux cheveux roux qu'il faudrait ajouter à la classe pour que 36 % des élèves de la classe aient les cheveux roux.

2. Une suite arithmétique est une suite de nombres dans laquelle chaque terme, à partir du 2^e, est formé en ajoutant au terme précédent une constante d, appelée *raison arithmétique*. Par exemple, la suite 2, 11, 20, 29, 38 est une suite arithmétique de cinq termes dont la raison d est égale à 9.

   (a) Une suite arithmétique est formée de trois termes. La somme des trois termes est égale à 180. Déterminer le terme du milieu.

   (b) Une suite arithmétique est formée de cinq termes. La somme des cinq termes est égale à 180. Démontrer qu'au moins un des cinq termes est égal à 36.

   (c) Une suite arithmétique est formée de six termes. La somme des six termes est égale à 180. Déterminer la somme du premier terme et du sixième terme.

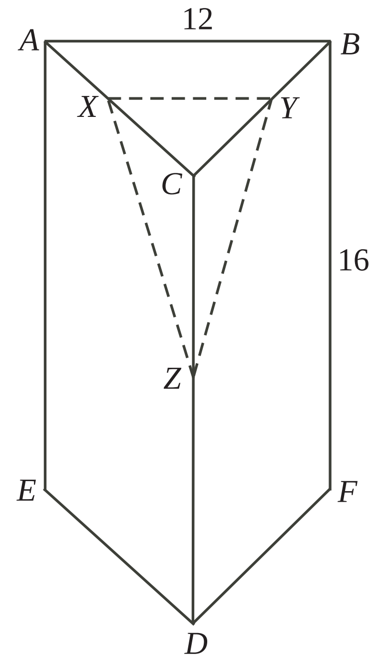
3. Un triangle ABC a pour sommets $A(0, 8)$, $B(2, 0)$ et $C(8, 0)$.

   (a) Déterminer l'équation de la droite qui passe au point B et qui coupe le triangle ABC en deux parties de même aire.

   (b) Une droite verticale coupe le côté AC en R et le côté BC en S, de manière à former un triangle RSC. Sachant que le triangle RSC a une aire de 12,5, déterminer les coordonnées du point R.

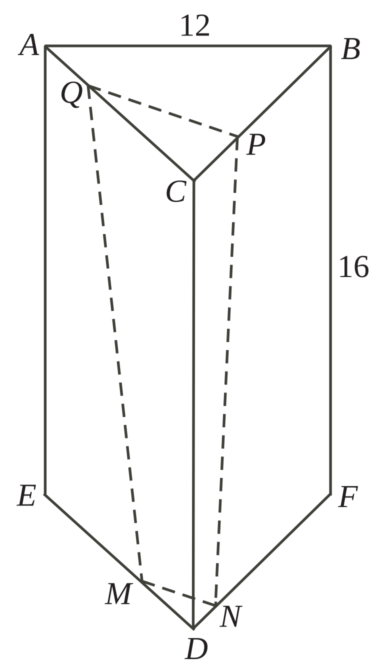
   (c) Une droite horizontale coupe le côté AB en T et le côté AC en U, de manière à former un triangle ATU. Sachant que le triangle ATU a une aire de 13,5, déterminer l'équation de la droite horizontale.

4. (a) Dans la figure ci-contre, le prisme droit $ABCDEF$ a une hauteur de 16. Ses bases sont des triangles équilatéraux avec des côtés de longueur 12. Les points X, Y et Z sont les milieux respectifs des arêtes AC, BC et DC. Déterminer les longueurs XY, YZ et XZ.



(b) On enlève une partie du prisme en le coupant par un plan qui passe aux points X, Y et Z. Déterminer l'aire totale du solide $CXYZ$, c'est-à-dire l'aire totale de la partie qui a été retranchée.

(c) Le prisme $ABCDEF$ de la partie (a) est coupé par un plan qui passe aux points M, N, P et Q situés sur les arêtes respectives DE, DF, CB et CA. Sachant que $DM = 4$, $DN = 2$ et $CQ = 8$, déterminer le volume du solide $QPCDMN$.



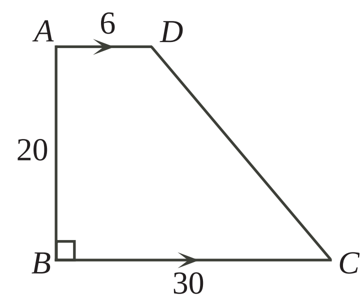
Concours Hypatie 2008 (11^e année – Sec. V)

le mercredi 16 avril 2008

1. Étant donné deux nombres a et b, la notation $a\nabla b$ représente l'expression $2a + b^2 + ab$. Par exemple, $1\nabla 2 = 2(1) + 2^2 + (1)(2)$, d'où $1\nabla 2 = 8$.
   (a) Déterminer la valeur de $3\nabla 2$.
   (b) Sachant que $x\nabla(-1) = 8$, déterminer la valeur de x.
   (c) Sachant que $4\nabla y = 20$, déterminer les deux valeurs possibles de y.
   (d) Sachant que $(w-2)\nabla w = 14$, déterminer toutes les valeurs possibles de w.

2. (a) Déterminer l'équation de la droite qui passe aux points $A(7, 8)$ et $B(9, 0)$.
   (b) La droite d'équation $y = 2x - 10$ et la droite qui passe aux points A et B se coupent au point P. Déterminer les coordonnées de P.
   (c) Le point P est-il plus près de A ou est-il plus près de B ? Expliquer sa démarche.

3. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un trapèze, AD est parallèle à BC et BC est perpendiculaire à AB. De plus, $AD = 6$, $AB = 20$ et $BC = 30$.

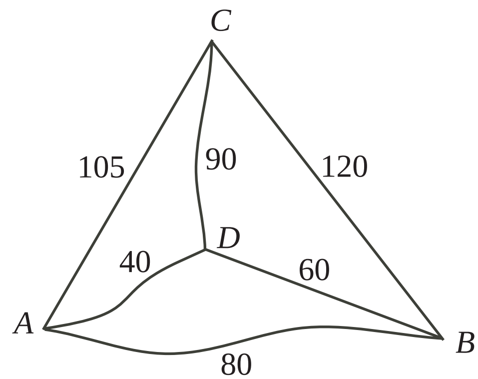


   (a) Déterminer l'aire du trapèze $ABCD$.
   (b) Il existe un point K, sur AB, de manière que l'aire du triangle KBC soit égale à l'aire du quadrilatère $KADC$. Déterminer la longueur du segment BK.
   (c) Il existe un point M, sur DC, de manière que l'aire du triangle MBC soit égale à l'aire du quadrilatère $MBAD$. Déterminer la longueur du segment MC.

4. On considère une suite de nombres, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. La *somme-peizi* de la suite est formée en additionnant les produits des nombres de la suite choisis deux à deux. Par exemple, la somme-peizi de la suite a_1, a_2, a_3, a_4 est égale à $a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4$.
   (a) La somme-peizi de la suite $2, 3, x, 2x$ est égale à -7. Déterminer toutes les valeurs possibles de x.
   (b) Une suite contient 100 termes. Dans cette suite, m termes égalent 1 et n termes égalent -1. Les autres termes égalent 2. Déterminer, en fonction de m et de n, le nombre de paires de termes distincts qui ont un produit de 1.
   (c) Une suite contient 100 termes, chacun étant égal à 2 ou à -1. Déterminer, pour cette suite, le nombre minimum de sommes-peizi possibles. Justifier sa démarche.

Concours Hypatie 2007 (11^e année – Sec. V)
le mercredi 18 avril 2007

1. La figure représente quatre villes, A, B, C et D, ainsi que les distances entre elles, en kilomètres.



   (a) Paola doit partir de A, se rendre à chaque autre ville exactement une fois, puis revenir à A. Voici un exemple d'un trajet possible : $A \to B \to D \to C \to A$
   Écrire tous les trajets que Paola pourrait parcourir.

   (b) Indiquer un trajet dont la longueur est un minimum et un trajet dont la longueur est un maximum. Expliquer comment la réponse a été obtenue.

   (c) Juste avant son départ de A, Paola apprend que :
   – elle doit visiter une cinquième ville E.
   – E est reliée directement à chacune des villes A, B, C et D, et
   – E doit être la troisième ville qu'elle visite dans son trajet.
   Donc, son trajet aura la forme $A \to$ ___ $\to$ ___ $\to E \to$ ___ $\to A$.
   Combien y a-t-il de tels trajets possibles ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.

   (d) Le trajet $A \to D \to C \to E \to B \to A$ a une longueur de 600 km.
   Le trajet $A \to C \to D \to E \to B \to A$ a une longueur de 700 km.
   Il y a une distance de 225 km de D à E.
   Quelle est la distance de C à E ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.

2. Osvaldo a quatre seaux, soit P, Q, R et S, contenant chacun des billes. Un *coup permis* consiste à prendre une bille de chacun de trois seaux et de les déposer dans le quatrième seau.

   (a) Au départ, les seaux contiennent respectivement 9, 9, 1 et 5 billes. Décrire une série de coups permis qui feront en sorte qu'il y aura 6 billes dans chaque seau.

   (b) Supposons qu'au départ, les seaux contiennent respectivement 31, 27, 27 et 7 billes. Après un certain nombre de coups permis, tous les seaux contiennent le même nombre de billes.

      i. Décrire une série de coups permis qui feront en sorte que tous les seaux auront le même nombre de billes.

      ii. Expliquer pourquoi il faut au moins 8 coups permis pour qu'il y ait le même nombre de billes dans tous les seaux.

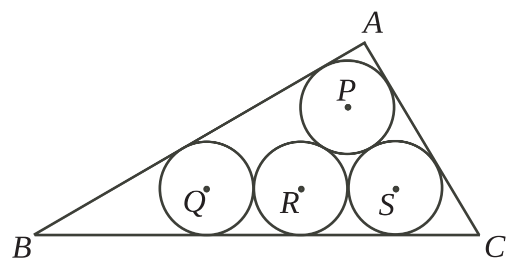
   (c) On recommence avec des seaux qui contiennent respectivement 10, 8, 11 et 7 billes au départ. Expliquer pourquoi il n'existe aucune série de coups permis qui font en sorte qu'il y ait un même nombre de billes dans tous les seaux.

3. On considère une fonction polynôme du second degré, $f(x) = x^2 - 4x - 21$.
   (a) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$ (c'est-à-dire $x^2 - 4x - 21 = 0$).
   (b) Sachant que s et t sont des nombres réels différents tels que $s^2 - 4s - 21 = t^2 - 4t - 21$ (c'est-à-dire $f(s) = f(t)$), déterminer les valeurs possibles de $s + t$. Expliquer comment la réponse a été obtenue.
   (c) Sachant que a et b sont des entiers strictement positifs différents tels que

$$(a^2 - 4a - 21) - (b^2 - 4b - 21) = 4$$

   déterminer toutes les valeurs possibles de a et de b. Expliquer comment la réponse a été obtenue.

4. Dans la figure suivante, quatre cercles de rayon 1 et de centres P, Q, R et S sont tangents à l'un ou à l'autre cercle et à des côtés du triangle ABC.



   (a) Déterminer la mesure des angles du triangle PQS. Expliquer comment la réponse a été obtenue.
   (b) Déterminer la longueur de chaque côté du triangle ABC. Expliquer comment la réponse a été obtenue.
   (c) On diminue le rayon du cercle de centre R de manière que
   – le cercle de centre R demeure tangent au côté BC,
   – le cercle de centre R demeure tangent aux trois autres cercles, et
   – le cercle de centre P devienne tangent aux trois autres cercles.
   Ceci a pour effet de changer la grandeur et la forme du triangle ABC. Déterminer le nouveau rayon r du cercle de centre R.

Concours Hypatie 2006 (11^e année – Sec. V)
le jeudi 20 avril 2006

1. Les entiers impairs positifs sont placés en lignes de manière à former un arrangement triangulaire comme suit.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 3 & & 5 & & & \\ & & 7 & & 9 & & 11 & & \\ & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & \\ 21 & & 23 & & \cdots & & & & \end{array}$$

   (a) Quel est le 25^e entier impair positif ? Dans quelle ligne de l'arrangement triangulaire paraît-il ?

   (b) Quel est le 19^e nombre qui paraît dans la 21^e ligne ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.

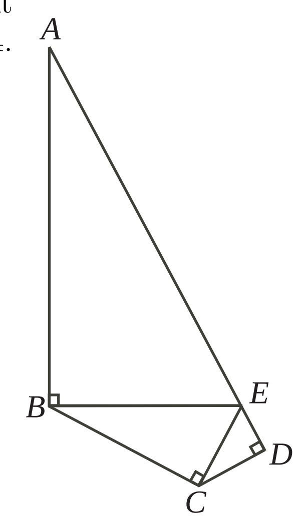
   (c) Déterminer le numéro de la ligne dans laquelle le nombre 1001 paraît, ainsi que le numéro de sa position dans cette ligne. Expliquer comment la réponse a été obtenue.

2. Dans la figure ci-contre, les triangles ABE, BCE et CDE sont rectangles. De plus, $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 60°$ et $AE = 24$.

   (a) Déterminer la longueur de CE.

   (b) Déterminer le périmètre du quadrilatère $ABCD$.

   (c) Déterminer l'aire du quadrilatère $ABCD$.



3. Une droite d passe par les points $B(7, -1)$ et $C(-1, 7)$.

   (a) Déterminer l'équation de cette droite.

   (b) Déterminer les coordonnées du point P, sur la droite d, qui est équidistant des points $A(10, -10)$ et $O(0, 0)$ (c.-à-d. de manière que $PA = PO$).

   (c) Déterminer les coordonnées de tous les points Q, sur la droite d, pour lesquels $\angle OQA = 90°$.

4. L'index d'abondance $I(n)$ d'un entier strictement positif n est le nombre $I(n) = \dfrac{\sigma(n)}{n}$, $\sigma(n)$ étant égal à la somme de tous les diviseurs positifs de n, y compris 1 et n.

   Par exemple, $I(12) = \dfrac{1+2+3+4+6+12}{12} = \dfrac{7}{3}$.

   (a) Démontrer que pour chaque nombre premier p, $I(p) \leq \frac{3}{2}$.

   (b) Démontrer que pour chaque nombre premier impair p et pour chaque entier strictement positif k, $I(p^k) < 2$.

   (c) Soit p et q deux nombres premiers distincts. Déterminer $I(p^2)$, $I(q)$ et $I(p^2q)$ et démontrer que $I(p^2)I(q) = I(p^2q)$.

   (d) Déterminer le plus petit entier impair positif n pour lequel $I(n) > 2$. Justifier les étapes de son raisonnement.

Concours Hypatie (11^e année – Sec. V)
le mercredi 20 avril 2005

---

1. Étant donné les nombres a et b, la notation $a \diamond b$ représente l'expression $a^2 - 4b$.
   Par exemple, $5 \diamond 3 = 5^2 - 4(3)$, d'où $5 \diamond 3 = 13$.
   (a) Évaluer $2 \diamond 3$.
   (b) Quelles sont toutes les valeurs de k pour lesquelles $k \diamond 2 = 2 \diamond k$?
   (c) Les nombres x et y sont tels que $3 \diamond x = y$ et $2 \diamond y = 8x$.
   Déterminer la valeur de x et de y.

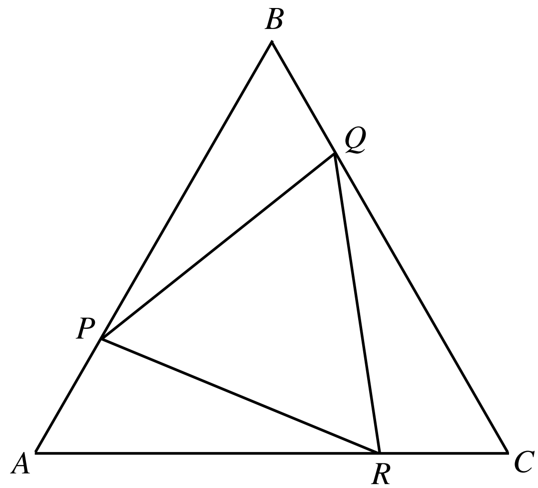
2. Un jeu se joue avec une pile de cure-dents selon les règlements suivants :
   – Les deux joueurs jouent à tour de rôle.
   – À son tour, un joueur peut enlever 1, 2, 3, 4 ou 5 cure-dents de la pile.
   – Le même nombre de cure-dents ne peut être enlevé plus d'une fois.
   – La dernière personne qui réussit à jouer est gagnante, peu importe s'il reste des cure-dents sur la table.

   Par exemple, s'il y avait 8 cure-dents au départ, voici un déroulement possible :

   Gilles enlève 1 cure-dent. Il en reste 7 dans la pile.
   Carla enlève 4 cure-dents. Il en reste 3 dans la pile.
   Gilles enlève 2 cure-dents. Il en reste 1 dans la pile.

   Gilles est gagnant, car Carla ne peut enlever le cure-dent qui reste. (Gilles a déjà enlevé 1 cure-dent et selon le 3^e règlement, il est interdit d'enlever 1 cure-dent une autre fois.)
   (a) Supposons qu'il y a 11 cure–dents au départ. Gilles enlève 3 cure-dents. Ensuite, Carla en enlève 1. Gilles en enlève alors 4. Expliquer comment Carla peut gagner.
   (b) Supposons qu'il y a 10 cure-dents au départ. Gilles enlève 5 cure-dents. Expliquer pourquoi Gilles peut gagner, peu importe le nombre de cure-dents que Carla enlève à son tour.
   (c) Supposons qu'il y a 9 cure-dents au départ. Gilles enlève 2 cure-dents. Expliquer pourquoi Gilles peut gagner, peu importe comment Carla joue par la suite.

3. Dans la figure suivante, le triangle ABC est équilatéral, ses côtés ayant chacun une longueur de 4. Les points P, Q et R sont choisis sur les côtés respectifs AB, BC et CA, de manière que $AP = BQ = CR = 1$.



   (a) Déterminer l'aire exacte du triangle ABC. Expliquer sa démarche.
   (b) Déterminer l'aire exacte des triangles PBQ et PQR. Expliquer sa démarche.

4. Une *permutation* d'un ensemble d'objets est un classement de ces objets dans un ordre particulier. Par exemple, 312 et 231 sont deux des permutations possibles de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.
   (a) Déterminer combien il existe de triplets (a, b, c) tels que les nombres a, b et c soient trois nombres différents tirés de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, de manière que $a < b$ et $b > c$. Expliquer sa démarche.
   (b) Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ qui contiennent les chiffres 254, dans cet ordre en positions adjacentes ? Expliquer sa démarche.
   (c) On dit qu'une permutation admet un *sommet local* lorsqu'elle contient une suite de 3 nombres dans laquelle le nombre du milieu est supérieur à ses deux voisins.
   Par exemple, la permutation 35241 de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ contient deux sommets locaux.
   Déterminer le nombre moyen de sommets locaux dans les 40 320 permutations possibles de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Expliquer et justifier sa démarche.

Concours Hypatie (11^e année - Sec.V)
le jeudi 15 avril 2004

---

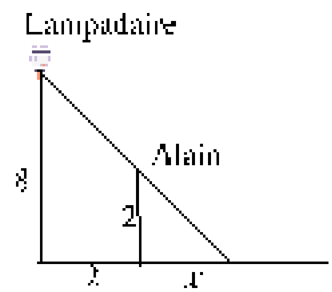
1. a) Déterminer les racines de l'équation $x^2 + 5x + 6 = 0$.

   b) On ajoute 7 à chacune des racines de l'équation $x^2 + 5x + 6 = 0$. Déterminer une équation du second degré qui a ces nouveaux nombres pour racines.

   c) On ajoute 1 à chacune des racines de l'équation $(x-4)(3x^2 - x - 2) = 0$. Déterminer une équation qui a ces nouveaux nombres pour racines.

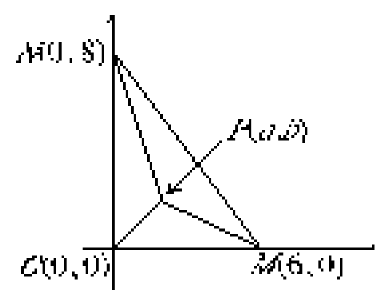
2. Deux joueurs de basket-ball, Alain et Béatrice, sont debout sur un terrain plat, près d'un lampadaire d'une hauteur de 8 m.

   a) Dans la figure, Alain est placé à 2 m du lampadaire. Alain mesure 2 m. Déterminer la longueur x de son ombre.

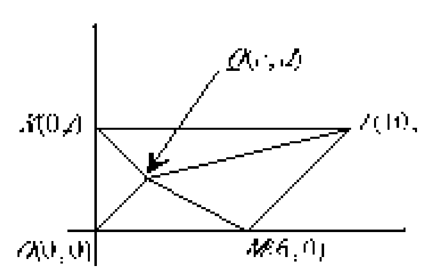


   b) Béatrice mesure 1,50 m. Elle est placée dans la direction opposée à celle d'Alain par rapport au lampadaire. À quelle distance du lampadaire doit-elle se placer pour que son ombre mesure 3 m?

3. a) Dans la figure, le triangle *OMN* a pour sommets $O(0,0)$, $M(6,0)$ et $N(0,8)$. Déterminer les coordonnées du point $P(a,b)$, à l'intérieur du triangle, de manière que les triangles *POM*, *PON* et *PMN* aient la même aire.



   b) Dans la figure, le quadrilatère *OMLK* a pour sommets $O(0,0)$, $M(6,0)$, $L(10,t)$ et $K(0,t)$ ($t > 0$). Démontrer qu'il n'existe aucun point $Q(c,d)$, à l'intérieur du quadrilatère, de manière que les triangles *QOM*, *QML*, *QLK* et *QKO* aient la même aire.



4. a) On place 1 boule verte, 1 boule jaune et 2 boules rouges dans un sac. On choisit au hasard deux boules de couleurs *différentes*. On enlève ces deux boules du sac et on place dans le sac une boule de la *troisième* couleur. (À cette fin, on a mis de côté suffisamment de boules de chaque couleur.) On recommence cette opération jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une boule dans le sac ou jusqu'à ce que toutes les boules du sac aient la même couleur. Quelle est la couleur de la boule ou des boules dans le sac à la fin?

   b) On place 3 boules vertes, 4 boules jaunes et 5 boules rouges dans un sac. On fait ensuite comme dans la partie a). Quelle est la couleur de la boule ou des boules dans le sac à la fin?

   c) On place 3 boules vertes, 4 boules jaunes et 5 boules rouges dans un sac. On choisit de nouveau au hasard deux boules de couleurs différentes qu'on enlève du sac. Cette fois-ci, on place dans le sac *deux* boules de la troisième couleur. Démontrer qu'il est impossible d'obtenir un sac contenant des boules de la même couleur, quel que soit le nombre de fois que l'on recommence l'opération.

Concours Hypatie (11^e année - Sec. V au Quebec)

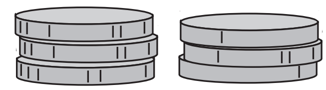
mercredi 16 avril 2003

1. a) Carl a un certain nombre de tuiles carrées mesurant chacune 1 cm sur 1 cm. Il les place de manière à former un grand carré dont les côtés mesurent n cm et constate qu'il reste 92 tuiles non utilisées. S'il avait allongé les côtés du grand carré jusqu'à $(n+2)$ cm, il lui aurait manqué 100 tuiles pour réussir à former le grand carré. Combien de tuiles Carl a-t-il?

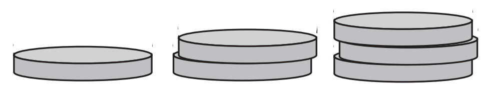
   b) Diane, l'amie de Carl, arrive avec une grosse pile de blocs, chacun étant un cube dont les arêtes mesurent 1 cm. Carl prend une partie des blocs et Diane garde le reste. Carl utilise ses blocs pour tenter de former un gros cube dont les arêtes mesurent 8 cm, mais il constate qu'il lui manque 24 blocs. Diane réussit à former un gros cube en utilisant tous ses blocs. S'ils utilisent tous les blocs que Diane a apportés, ils peuvent former un grand cube dont les arêtes ont 2 cm de plus que celles du grand cube de Diane. Combien y a-t-il de cubes en tout?

2. Xavier et Yvonne participent à un jeu. Au départ, il y a un certain nombre de pièces de monnaie placées en piles. Xavier joue toujours le premier. À tour de rôle, chacun enlève au moins une pièce d'*une seule* pile. La personne qui enlève la dernière pièce gagne.

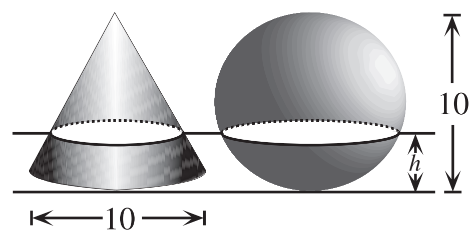
   a) S'il y a deux piles contenant chacune trois pièces de monnaie, démontrer qu'Yvonne peut s'assurer de toujours gagner.



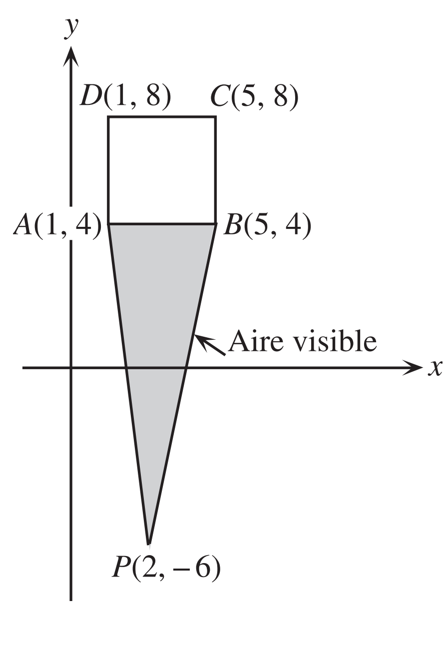
   b) S'il y a une pile de 1 pièce, une pile de 2 pièces et une pile de 3 pièces, démontrer qu'Yvonne peut s'assurer de toujours gagner.



3. Une sphère a un diamètre de 10 cm. Un cône droit a une hauteur de 10 cm et sa base est un cercle dont le diamètre mesure 10 cm. Les deux solides reposent sur une surface horizontale. Si un plan horizontal coupe la sphère et le cône, la coupe transversale est un cercle dans les deux cas, comme l'indique le diagramme. Déterminer la hauteur du plan qui forme deux cercles de même aire.



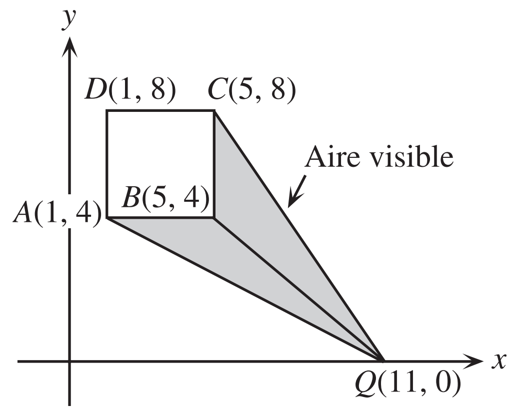
4. Le carré $ABCD$ a pour sommets $A(1,4)$, $B(5,4)$, $C(5,8)$, et $D(1,8)$. Depuis un point P à l'extérieur du carré, on dit qu'un sommet du carré est *visible* si on peut le relier à P au moyen d'un segment de droite qui ne passe pas à travers le carré. Ainsi depuis un point P à l'extérieur du carré, il y a toujours deux ou trois sommets du carré qui sont visibles. L'*aire visible de P* est l'aire du triangle ou la somme de l'aire des deux triangles formés en reliant P aux deux ou trois sommets visibles du carré.



   a) Démontrer que l'*aire visible* du point $P(2,-6)$ est égale à 20 unités carrées.

à suivre ...

b) Démontrer que l'aire visible du point $Q(11, 0)$ est aussi égale à 20 unités carrées.



c) L'ensemble des points P qui ont une aire visible de 20 unités carrées est appelé l'*ensemble 20/20*. Cet ensemble a la forme d'un polygone. Déterminer le périmètre de l'ensemble 20/20.

Prolongements (Vous devriez essayer de répondre à ces questions uniquement lorsque vous aurez complété au meilleur de vos connaissances les quatre principaux problèmes)

Prolongement du Problème 1

Comme dans la question 1a), Carl place ses tuiles de manière à former un grand carré et il lui reste 92 tuiles non utilisées. Pour former un carré plus grand, il ajoute *un certain nombre de tuiles* à chaque côté du carré précédent et constate qu'il lui manque 100 tuiles pour compléter le carré. Combien de nombres différents de tuiles Carl peut-il avoir?

Prolongement du Problème 2

S'il y a trois piles, contenant 2, 4 et 5 pièces, quel joueur gagnera si chacun fait toujours le meilleur choix? Expliquer la stratégie gagnante.

Prolongement du Problème 3

Une sphère de diamètre d et un cône circulaire droit, dont la base a un diamètre d, reposent sur une surface horizontale. Dans ce cas, la hauteur du cône est égale au *rayon* de la sphère. Démontrer que si un plan horizontal coupe les deux solides, la *somme* de l'aire des coupes transversales est toujours constante.

Prolongement du Problème 4

Depuis un point quelconque P, à l'extérieur d'un cube unitaire, 4, 6 ou 7 sommets du cube sont visibles dans le même sens que pour le carré. Si on relie le point P à chacun de ces sommets, on obtient 1, 2 ou 3 pyramides à base carrée qui forment le *volume visible* de P. L'*ensemble 20/20* est l'ensemble de tous les points P qui ont un volume visible de 20. Il a la forme d'un polyèdre. Quelle est l'aire totale de ce polyèdre?