Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2023

(7e et 8e années – Secondaire I et II)

le mercredi 17 mai 2023

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 18 mai 2023

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

7^e^ année

1. La moitié de 24 est égale à $24 \div 2 = 12$. Kiyana donne à son amie 12 raisins.

RÉPONSE : (D)

2. D'après le diagramme, vendredi avait la température la plus élevée.

RÉPONSE : (C)

3. Si chaque panier coûte 16,50 \$, alors 4 paniers de fraises coûteront $4 \times 16{,}50\ \$ = 66{,}00\ \$$.

RÉPONSE : (B)

4. La différence entre 3 et -5 est égale à $3 - (-5) = 3 + 5 = 8$. Donc, il fait 8°C de plus.

RÉPONSE : (A)

5. Puisque $5 \times 5 = 25$ et que chaque choix de réponse est supérieur à 25, alors l'entier que Sarah a multiplié par lui-même doit être supérieur à 5.
De plus, $6 \times 6 = 36$ et chaque choix de réponse est inférieur ou égal à 36.
Donc, parmi les choix de réponse, seul 36 pourrait être le résultat de la multiplication d'un entier par lui-même.
Par ailleurs, on aurait pu remarquer que le résultat de la multiplication d'un entier par lui-même est égal à un carré parfait. Parmi les choix de réponse, 36 est le seul carré parfait.

RÉPONSE : (E)

6. Puisque $PQRS$ a un périmètre de 40 cm et que $SR = 16$ cm, alors la longueur combinée des trois autres côtés est égale à 40 cm $-$ 16 cm $=$ 24 cm.
Les trois autres côtés ont la même longueur, donc $PQ = \dfrac{24 \text{ cm}}{3} = 8$ cm.

RÉPONSE : (C)

7. Lorsqu'on divise 52 par chacun des dénominateurs, on voit que $\dfrac{52}{4} = 13$ est le seul entier.

RÉPONSE : (C)

8. La plus grande longueur possible d'un segment de droite qui relie deux points sur un cercle est un diamètre du cercle. Puisque le cercle a un rayon de 4 cm, son diamètre a une longueur de 2×4 cm $=$ 8 cm. Donc, la plus grande longueur possible de ce segment de droite est égale à 8 cm.

RÉPONSE : (B)

9. Il y a 10 entiers dans la liste. Parmi eux, 5 sont pairs (soit 10, 12, 14, 16 et 18). Donc, la probabilité de choisir un entier pair est égale à $\dfrac{5}{10}$.

RÉPONSE : (C)

10. Avant de payer la taxe, les trois articles coûtent $4{,}20\ \$ + 7{,}60\ \$ + 3{,}20\ \$ = 15{,}00\ \$$.
La taxe de 5 % qu'il faudra ajouter au coût de 15,00 \$ est donc égale à $0{,}05 \times 15{,}00\ \$ = 0{,}75\ \$$.
Donc, si l'on ajoutait une taxe de 5% au coût des trois articles, le coût total des trois articles serait égal à $15{,}00\ \$ + 0{,}75\ \$ = 15{,}75\ \$$.
Remarquons qu'on aurait pu calculer la taxe de 5 % sur chaque article individuellement, mais cela n'aurait pas été aussi efficace que de la calculer sur le total de 15,00 \$.

RÉPONSE : (D)

11. Puisque BCD est un segment de droite, alors $\angle BCD = 180°$.
Donc, $\angle ACB = \angle BCD - \angle ACD = 180° - 75° = 105°$.
Puisque les trois angles du triangle ABC ont une somme de 180°, alors :
$\angle ABC = 180° - 105° - 35° = 40°$.

Réponse : (B)

12. Sur les 100 petits carrés identiques, 28 ne sont pas ombrés. Donc, $100 - 28 = 72$ petits carrés identiques sont ombrés.
Pour que 75 % de l'aire de $WXYZ$ soit ombrée, 75 des 100 petits carrés doivent être ombrés.
Donc, il faut ombrer $75 - 72 = 3$ petits carrés supplémentaires.

Réponse : (A)

13. Soit S le quatrième sommet du rectangle.
Le côté du rectangle qui relie les points $(2, 1)$ et $(2, 5)$ est vertical. Donc, le côté opposé du rectangle (soit le côté qui relie les points $(4, 1)$ et S) doit également être vertical.
Cela signifie que S a la même abscisse que $(4, 1)$, soit 4.
De même, le côté du rectangle qui relie les points $(2, 1)$ et $(4, 1)$ est horizontal. Donc, le côté opposé du rectangle (soit le côté qui relie les points $(2, 5)$ et S) doit également être horizontal.
Cela signifie que S a la même ordonnée que $(2, 5)$, soit 5.
Donc, le quatrième sommet du rectangle a pour coordonnées $(4, 5)$.

Réponse : (D)

14. Les nombres premiers inférieurs à 10 sont $2, 3, 5$ et 7.
Donc, les deux seuls nombres premiers distincts dont la somme est égale à 10 sont 3 et 7.
Le produit de ces nombres premiers est égal à $3 \times 7 = 21$.

Réponse : (D)

15. La liste $2, 9, 4, n, 2n$ contient 5 nombres.
Puisque ces 5 nombres ont une moyenne de 6, cela signifie que leur somme doit être égale à $5 \times 6 = 30$.
Donc, $2 + 9 + 4 + n + 2n = 30$ ou $15 + 3n = 30$, d'où $3n = 15$ ou $n = 5$.

Réponse : (D)

16. La somme de P et Q est égale à 5. Donc, P et Q sont (dans un certain ordre) soit égaux à 1 et 4, soit égaux à 2 et 3.
La différence entre R et S est égale à 5. Donc, R et S doivent être (dans un certain ordre) égaux à 1 et 6.
Puisque R et S sont égaux à 1 et 6, ni P ni Q ne peuvent être égaux à 1, ce qui signifie que P et Q ne peuvent être égaux à 1 et 4 ; ils doivent donc être égaux à 2 et 3.
Parmi les nombres de 1 à 6, les seuls qui restent sont 4 et 5.
Puisque T est supérieur à U, alors 5 est le nombre qui remplace la lettre T.

Réponse : (E)

17. *Solution 1*
L'aire du triangle AED est égale à la moitié de sa base multipliée par sa hauteur.
Si l'on considère que AE est la base du triangle AED, alors BD est sa hauteur correspondante (AE est perpendiculaire à BD).
Puisque $AB = BC = 24$ cm et que E et D sont les milieux de leurs côtés respectifs, alors $AE = 12$ cm et $BD = 12$ cm.
Donc, l'aire du triangle AED est égale à $\frac{1}{2} \times 12 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} = 72 \text{ cm}^2$.

Solution 2

L'aire du triangle AED est égale à l'aire du triangle ABD moins l'aire du triangle EBD.
Si l'on considère que BD est la base du triangle EBD, alors EB est sa hauteur correspondante.
Puisque $AB = BC = 24$ cm et que E et D sont les milieux de leurs côtés respectifs, alors $EB = 12$ cm et $BD = 12$ cm.
Donc, l'aire du triangle EBD est égale à $\frac{1}{2} \times 12 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} = 72 \text{ cm}^2$.
L'aire du triangle ABD est égale à $\frac{1}{2} \times BD \times AB = \frac{1}{2} \times 12 \text{ cm} \times 24 \text{ cm} = 144 \text{ cm}^2$.
Donc, l'aire du triangle AED est égale à $144 \text{ cm}^2 - 72 \text{ cm}^2 = 72 \text{ cm}^2$.

Réponse : (C)

18. L'eau prend la forme d'un prisme droit à base rectangulaire dont la base mesure 2 cm × 5 cm et dont la profondeur est de 6 cm.
Donc, l'eau a un volume de $2 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^3$.
La face du prisme dont l'aire est la plus grande mesure 5 cm × 8 cm.
Lorsque le prisme est basculé de manière qu'il repose sur l'une des faces qui mesure 5 cm × 8 cm, l'eau prend la forme d'un prisme droit à base rectangulaire dont la base mesure 5 cm × 8 cm et dont la profondeur est inconnue.
Soit p la profondeur de l'eau après qu'on a basculé le prisme.
Puisque le volume de l'eau demeure inchangé après qu'on a basculé le prisme (soit 60 cm^3), alors $5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times p \text{ cm} = 60 \text{ cm}^3$ ou $40p \text{ cm}^3 = 60 \text{ cm}^3$, d'où $p = \dfrac{60}{40} = \dfrac{3}{2}$.
Lorsque le prisme est basculé de manière qu'il tienne sur la face dont l'aire est la plus grande, la profondeur de l'eau est égale à $\dfrac{3}{2}$ cm $= 1{,}5$ cm.

Réponse : (D)

19. *Solution 1*
On remplit d'abord un tableau dans lequel on écrit le chiffre des unités de chaque produit possible.
Par exemple, lorsque le nombre sur le premier dé est 3 et que le nombre sur le second dé est 6, on écrit 8 dans le tableau car $3 \times 6 = 18$, dont le chiffre des unités est 8.

Nombre sur le second dé

Nombre sur le premier dé ×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	**0**	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	**0**	4
5	5	**0**	5	**0**	5	**0**
6	6	2	8	4	**0**	6

Sur les 36 résultats possibles dans le tableau ci-dessus, 6 résultats ont un chiffre des unités égal à 0.
Donc, la probabilité pour que le chiffre des unités du produit soit 0 est égale à $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Solution 2
Puisque le chiffre des unités du produit est 0, alors le produit est à la fois pair et divisible par 5.
Puisque les nombres possibles dans le produit sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, alors 5 doit être l'un des nombres obtenu lors d'un lancer.
Puisque le produit est pair (et que 5 ne l'est pas), alors l'autre nombre lancé doit être l'un des trois nombres pairs, à savoir 2, 4, 6.
Donc, les couples de nombres possibles qui peuvent donner un produit dont le chiffre des unités est 0 sont $(5, 2)$, $(5, 4)$, $(5, 6)$ ou $(2, 5)$, $(4, 5)$, $(6, 5)$. (Dans chaque couple, le premier nombre représente le nombre obtenu à partir de l'un des dés tandis que le second nombre représente le nombre obtenu à partir de l'autre dé.)
Puisqu'il y a 6 résultats possibles pour chacun des deux dés, alors il y a $6 \times 6 = 36$ couples représentant tous les résultats possibles.
Puisque 6 de ces couples représentent un produit dont le chiffre des unités est 0, alors la probabilité pour que le chiffre des unités du produit soit 0 est égale à $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Réponse : (D)

20. Puisque a et b sont des entiers strictement positifs, alors et $\frac{a}{7}$ et $\frac{2}{b}$ sont supérieurs à 0.
La somme de $\frac{a}{7}$ et $\frac{2}{b}$ est égale à 1, donc chacun a une valeur inférieure à 1.
Puisque $\frac{a}{7}$ est supérieur à 0 et inférieur à 1, les valeurs possibles de a sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$.
Lorsqu'on reporte ces valeurs de a dans l'équation une par une, on peut déterminer s'il existe une valeur entière positive de b pour laquelle l'équation est vérifiée.
Lorsqu'on reporte $a = 1$, on obtient $\frac{1}{7} + \frac{2}{b} = 1$ ou $\frac{2}{b} = 1 - \frac{1}{7}$, soit $\frac{2}{b} = \frac{6}{7}$.
Puisque $\frac{2}{b} = \frac{6}{7}$, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur de la première fraction par 3 (soit $6 \div 2$) pour obtenir $\frac{6}{3b} = \frac{6}{7}$.
On obtient $3b = 7$, qui n'a pas une solution entière ($b = \frac{7}{3}$).
Donc, lorsque $a = 1$, il n'existe aucune valeur entière positive de b qui vérifie l'équation.

Lorsqu'on reporte $a = 2$ dans l'équation, on obtient $\frac{2}{7} + \frac{2}{b} = 1$ ou $\frac{2}{b} = 1 - \frac{2}{7}$, soit $\frac{2}{b} = \frac{5}{7}$.
Puisque $\frac{2}{b} = \frac{5}{7}$, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur de la première fraction par 5 et le numérateur et le dénominateur de la seconde fraction par 2 pour obtenir $\frac{10}{5b} = \frac{10}{14}$.
On obtient donc $5b = 14$, qui n'a pas de solution entière.
Donc, lorsque $a = 2$, il n'existe aucune valeur entière positive de b qui vérifie l'équation.

Lorsqu'on reporte $a = 3$, on obtient $\frac{3}{7} + \frac{2}{b} = 1$ ou $\frac{2}{b} = 1 - \frac{3}{7}$, soit $\frac{2}{b} = \frac{4}{7}$.
Puisque $\frac{2}{b} = \frac{4}{7}$, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur de la première fraction par 2 pour obtenir $\frac{4}{2b} = \frac{4}{7}$.
On obtient donc $2b = 7$, qui n'a pas de solution entière.
Donc, lorsque $a = 3$, il n'existe aucune valeur entière positive de b qui vérifie l'équation.

Lorsqu'on reporte $a = 4$ dans l'équation et que l'on simplifie, on obtient $\frac{2}{b} = \frac{3}{7}$.

Puisque $\frac{2}{b} = \frac{3}{7}$, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur de la première fraction par 3 et le numérateur et le dénominateur de la seconde fraction par 2 pour obtenir $\frac{6}{3b} = \frac{6}{14}$.

On obtient donc $3b = 14$, qui n'a pas de solution entière.

Donc, lorsque $a = 4$, il n'existe aucune valeur entière positive de b qui vérifie l'équation.

Lorsqu'on reporte $a = 5$ dans l'équation et que l'on simplifie, on obtient $\frac{2}{b} = \frac{2}{7}$.

Puisque les numérateurs sont égaux, alors les dénominateurs doivent être égaux. Donc, $b = 7$ vérifie l'équation.

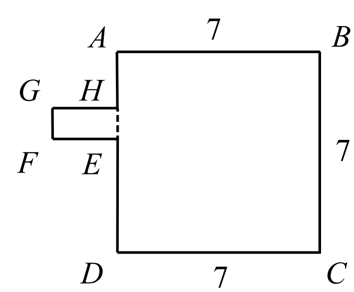
Enfin, lorsqu'on reporte $a = 6$ dans l'équation et que l'on simplifie, on obtient $\frac{2}{b} = \frac{1}{7}$.

Puisque $\frac{2}{b} = \frac{1}{7}$, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur de la seconde fraction par 2 pour obtenir $\frac{2}{b} = \frac{2}{14}$, d'où $b = 14$.

Donc, il y a deux couples $(a,\ b)$ d'entiers strictement positifs qui vérifient l'équation, soit $a = 5, b = 7$ et $a = 6, b = 14$.

Réponse : (E)

21. Puisque $ABCD$ est un carré et que les longueurs de ses côtés sont des entiers, son aire est égale à un carré parfait.
Puisque $ABCD$ et $EFGH$ (le rectangle) ont des aires dont le produit est égal à 98, alors l'aire de $ABCD$ est un diviseur de 98.
Les diviseurs positifs de 98 sont 1, 2, 7, 14, 49 et 98.
Il y a exactement deux diviseurs de 98 qui sont des carrés parfaits, à savoir 1 et 49.
Puisque l'aire de $ABCD$ est supérieure à celle de $EFGH$, alors $ABCD$ a une aire de 49, d'où $EFGH$ a donc une aire de 2 (puisque $49 \times 2 = 98$).
Puisque le carré $ABCD$ a une aire de 49, on a donc $AB = BC = CD = DA = 7$.
Le périmètre de $ABCDEFGH$ est égal à



$$\begin{array}{rl} & AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HA \\ = & 7 + 7 + 7 + DE + EF + EH + GH + HA \quad (\text{puisque } EH = FG) \\ = & 21 + DE + EH + HA + EF + GH \quad (\text{on récrit l'expression}) \\ = & 21 + DA + EF + GH \quad (\text{puisque } DE + EH + HA = DA) \\ = & 21 + 7 + EF + GH \quad (\text{puisque } DA = 7) \\ = & 28 + 2 \times GH \quad (\text{puisque } EF = GH) \end{array}$$

Puisque les longueurs des côtés sont des entiers et que l'aire de $EFGH$ est égale à 2, alors soit $GH = 1$ (et $FG = 2$), soit $GH = 2$ (et $FG = 1$).
Si $GH = 1$, alors le périmètre de $ABCDEFGH$ est égal à $28 + 2 \times 1 = 30$.
Puisque 30 n'est pas un choix de réponse possible, alors $GH = 2$ et le périmètre est égal à $28 + 2 \times 2 = 32$.

Réponse : (B)

22. Si les premier et deuxième termes d'une suite Gareth sont 10 et 8, alors le 3^e terme est $10-8=2$, le 4^e terme est $8-2=6$, le 5^e terme est $6-2=4$, le 6^e terme est $6-4=2$, le 7^e terme est $4-2=2$, le 8^e terme est $2-2=0$, le 9^e terme est $2-0=2$, le 10^e terme est $2-0=2$ et le 11^e terme est $2-2=0$.
Donc, la suite est $10, 8, 2, 6, 4, 2, 2, 0, 2, 2, 0, \ldots$.
Les 5 premiers termes de la suite sont $10, 8, 2, 6, 4$ et les trois termes suivants sont $2, 2, 0$. Remarquons que ce bloc de 3 termes semble se répéter. Puisque chaque nouveau terme ajouté à la fin de cette suite est déterminé par les deux termes précédents de la suite, alors ce bloc de 3 termes va effectivement continuer à se répéter. (C'est-à-dire que puisque le bloc se répète une fois, il continuera à se répéter.)
Pour les 30 premiers termes de la suite, on a : les 5 premiers termes, suivis de 8 blocs de $2, 2, 0$, puis d'un 2 supplémentaire (puisque $5+8\times 3+1=30$).
Les 5 premiers termes ont une somme de $10+8+2+6+4=30$.
La somme de chaque bloc qui répète est égale à $2+2+0=4$. Donc, la somme de 8 tels blocs est égale à $8\times 4=32$.
Donc, la somme des 30 premiers termes de la suite est égale à $30+32+2=64$.

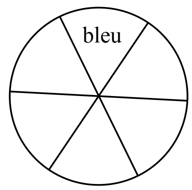
Réponse : (E)

23. Supposons que la longueur, la largeur ou la hauteur du prisme rectangulaire soit égale à 5.
Lorsqu'on multiplie 5 avec n'importe lequel des chiffres restants, on obtient un produit dont le chiffre des unités est égal à 5 ou à 0.
Cela signifie que si la longueur, la largeur ou la hauteur du prisme rectangulaire est égale à 5, alors au moins l'un des entiers de deux chiffres (l'aire d'une face) a un chiffre des unités égal à 5 ou à 0.
Cependant, 0 n'est pas un chiffre que l'on peut utiliser et on peut utiliser chaque chiffre de 1 à 9 exactement une seule fois (c'est-à-dire que l'on ne peut pas utiliser 5 deux fois). Il est donc impossible que l'une des dimensions du prisme rectangulaire soit égale à 5.
Donc, le chiffre 5 parait dans l'un des entiers de deux chiffres (l'aire d'une face).
Le chiffre 5 ne peut être le chiffre des unités de l'aire d'une face car cela nécessiterait que l'une des dimensions soit égale à 5.
Par conséquent, le chiffre 5 doit être le chiffre des dizaines de l'aire d'une face.
Les entiers de deux chiffres dont le chiffre des dizaines est égal à 5 et qui sont égaux au produit de deux entiers à un chiffre différents (ces derniers n'étant pas égaux à 5) sont $54=6\times 9$ et $56=7\times 8$.
Supposons que deux des dimensions du prisme soient 7 et 8 et que l'une des aires soit égale à 56.
Dans ce cas, les chiffres $5, 6, 7$ et 8 auront déjà été utilisés et donc les chiffres restants sont $1, 2, 3, 4$ et 9.
Lequel de ces chiffres est égal à la dimension restante du prisme ?
Ce ne peut être 1 puisque les produits de 1 et 7, ou de 1 et 8, ne donnent pas des aires de deux chiffres.
Ce ne peut être 2 puisque le produit de 2 et 8 est égal à 16 et que le chiffre 6 a déjà été utilisé.
Ce ne peut être 3 puisque $3\times 7=21$ et $3\times 8=24$ et donc les aires de deux faces partagent le chiffre 2.
Ce ne peut être 4 puisque $4\times 7=28$ et que le chiffre 8 a déjà été utilisé.
Enfin, ce ne peut être 9 puisque $9\times 7=63$ et que le chiffre 6 a déjà été utilisé.
Par conséquent, il est impossible que 7 et 8 soient des dimensions du prisme, donc deux des trois dimensions doivent être 6 et 9.
En vérifiant les chiffres restants de cette même manière systématique, on peut déterminer que 3 est la troisième dimension du prisme.

Donc, lorsque les dimensions du prisme sont $3, 6$ et 9, les aires des faces sont $3 \times 6 = 18$, $3 \times 9 = 27$ et $6 \times 9 = 54$. On voit donc que chacun des chiffres de 1 à 9 n'a été utilisé qu'une seule fois.
Puisque les aires des faces sont 18, 27 et 54, l'aire totale du prisme droit à base rectangulaire est égale à $2 \times (18 + 27 + 54)$ ou $2 \times 99 = 198$.

Réponse : (D)

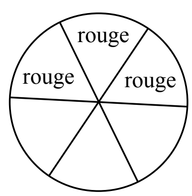
24. *Solution 1*
D'abord, on colorie en bleu la section du haut.
Puisque deux cercles ont la même coloration si l'on peut faire pivoter un des cercles pour qu'il corresponde à l'autre, on peut choisir de colorier en bleu n'importe quelle section, on choisit donc arbitrairement la section du haut.



Ensuite, il y a 5 sections que l'on peut colorier en vert.
Après avoir choisi la section qui sera coloriée en vert, il reste 4 sections qui peuvent être coloriées en jaune.
Chacune des 3 sections restantes doit alors être coloriée en rouge.
Donc, le nombre total de colorations différentes du cercle est égal à $5 \times 4 = 20$.

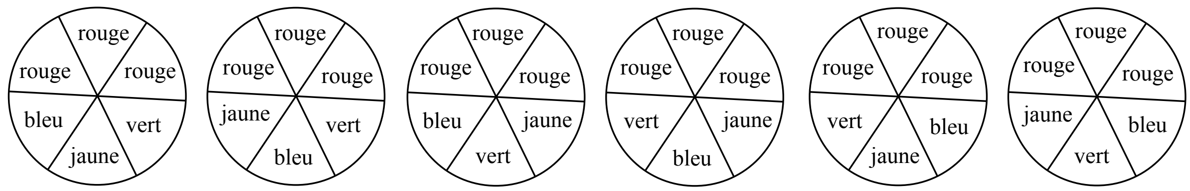
Solution 2
On considère d'abord l'emplacement des trois sections coloriées en rouge les unes par rapport aux autres.
Les trois sections rouges pourraient être adjacentes les unes aux autres, ou exactement deux sections rouges pourraient être adjacentes l'une à l'autre, ou aucune section rouge n'est adjacente à une autre section rouge.
On considère chacun de ces 3 cas séparément.

1er cas : Les trois sections rouges sont adjacentes les unes aux autres
D'abord, on colorie en rouge n'importe quelles trois sections qui sont adjacentes les unes aux autres.

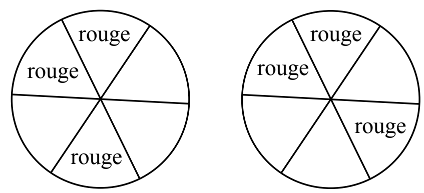


Puisque deux cercles ont la même coloration si l'on peut faire pivoter un des cercles pour qu'il corresponde à l'autre, on peut choisir de colorier en rouge n'importe quelles trois sections adjacentes.
On considère la première section qui suit les trois sections rouges lorsqu'on se déplace autour du cercle dans le sens des aiguilles d'une montre.
On a trois choix de couleur pour cette section : bleu, vert ou jaune.
Si l'on continue à se déplacer dans le sens des aiguilles d'une montre jusqu'à la section suivante, il y a maintenant 2 choix pour la couleur de cette section.
Enfin, il n'y a qu'un seul choix pour la couleur de la dernière section, il y a donc $3 \times 2 \times 1 = 6$ colorations différentes du cercle dans lequel les trois sections rouges sont adjacentes les unes aux autres.

On voit ces 6 colorations dans les figures ci-dessous.

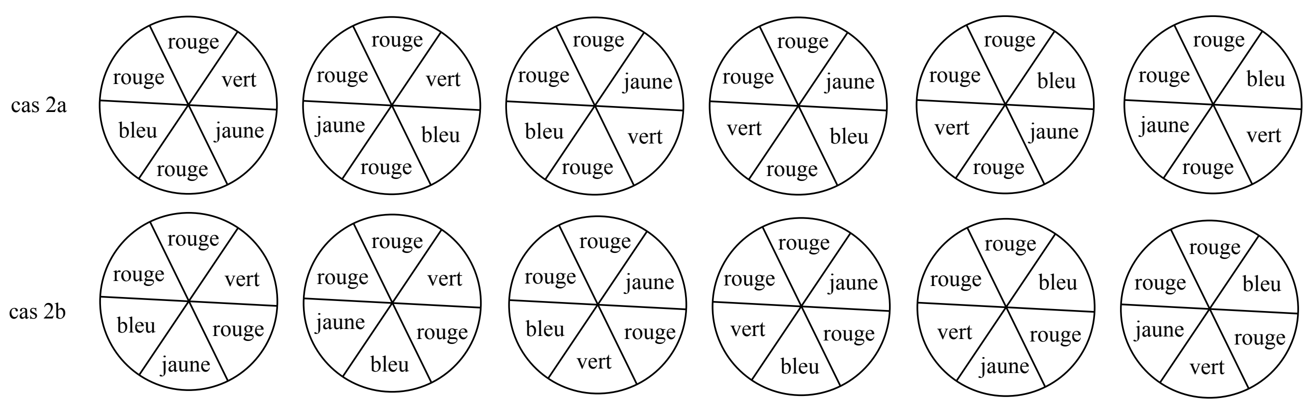


2^e^ cas : Exactement deux sections rouges sont adjacentes l'une à l'autre.
Il existe deux dispositions possibles dans lesquelles exactement deux sections rouges sont adjacentes l'une à l'autre.
Dans la première, les deux sections qui suivent les deux sections rouges adjacentes, en se déplaçant autour du cercle dans le sens des aiguilles d'une montre, ne sont pas rouges. Soit cela le cas 2a.
Dans la seconde, la section qui suit les deux sections rouges adjacentes, en se déplaçant autour du cercle dans le sens des aiguilles d'une montre, n'est pas rouge, mais la section suivante l'est. Soit cela le cas 2b.
On voit les dispositions des cas 2a et 2b dans les figures ci-dessous.

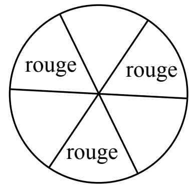


cas 2a cas 2b

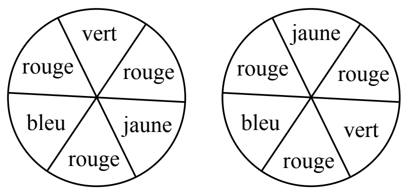
Remarquons que le premier cercle ne peut correspondre à l'autre peu importe la manière dont on le fait pivoter.
Le nombre de colorations dans le cas 2a et dans le cas 2b est égal au nombre de colorations dans le 1^er^ cas.
C'est-à-dire qu'il y a 3 choix pour la première section non coloriée qui suit les deux sections rouges lorsqu'on se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre autour du cercle.
En continuant à se déplacer dans le sens des aiguilles d'une montre jusqu'à la prochaine section non coloriée, il y a maintenant 2 choix pour la couleur de cette section.
Enfin, il y a 1 choix pour la couleur de la dernière section. Il y a donc $3 \times 2 \times 1 = 6$ colorations différentes du cercle dans le cas 2a ainsi que dans le cas 2b.
On voit ces 12 colorations dans les figures ci-dessous.



3[e] cas : Aucune section rouge n'est adjacente à une autre section rouge
D'abord, on colorie en rouge trois sections non adjacentes.



Puisque deux cercles ont la même coloration si l'on peut faire pivoter un des cercles pour qu'il corresponde à l'autre, on peut choisir de colorier en rouge n'importe quelles trois sections non adjacentes.
Dans ce cas, il y a deux colorations possibles, comme on le voit dans les figures ci-dessous.

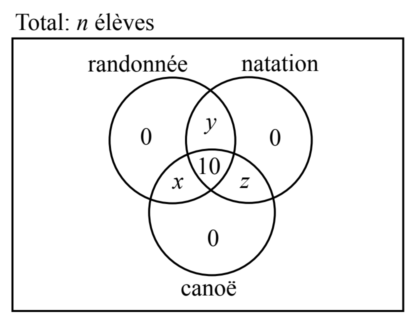


On peut faire pivoter un cercle avec n'importe quelle autre disposition des sections verte, jaune et bleue pour qu'il corresponde à l'un des deux cercles dans les figures ci-dessus.

En tout, il y a $6 + 12 + 2 = 20$ colorations différentes pour le cercle.

Réponse : (E)

25. On peut représenter les informations données dans un diagramme de Venn en introduisant d'abord quelques variables.
Soit x le nombre d'élèves ayant participé à la randonnée et au canoë et qui n'ont pas participé à la natation.
Soit y le nombre d'élèves ayant participé à la randonnée et à la natation et qui n'ont pas participé au canoë.
Soit z le nombre d'élèves ayant participé au canoë et à la natation et qui n'ont pas participé à la randonnée.
Puisque 10 élèves ont participé aux trois activités et qu'aucun élève n'a participé à moins de deux activités, alors on construit le diagramme de Venn ci-contre.



Supposons que n est le nombre d'élèves ayant participé à la sortie scolaire.
Puisque 50% des élèves ont participé au moins à la randonnée et au canoë, alors $\frac{50}{100}n$ ou $\frac{n}{2}$ élèves ont participé au moins à la randonnée et au canoë.
Puisque ce nombre d'élèves, $\frac{n}{2}$, est un entier, alors n doit être divisible par 2.
De même, $\frac{60}{100}n$ ou $\frac{3n}{5}$ élèves ont participé au moins à la randonnée et à la natation.
Puisque ce nombre d'élèves, $\frac{3n}{5}$, est un entier, alors n doit être divisible par 5 (puisque 3 et 5 n'ont aucun facteur en commun).
Cela signifie que n est divisible à la fois par 2 et par 5, d'où n est donc divisible par 10.
D'après le diagramme de Venn, on voit que $x + 10 = \frac{n}{2}$ et que $y + 10 = \frac{3n}{5}$.

Puisque n élèves en tout ont participé à la sortie scolaire, on a également $x + y + z + 10 = n$ ou $z = n - 10 - x - y$.
On peut désormais utiliser les équations

$$x = \frac{n}{2} - 10,\ y = \frac{3n}{5} - 10,\ \text{ et } z = n - 10 - x - y$$

et la propriété que n est divisible par 10, pour déterminer toutes les valeurs possibles de z.
On peut ensuite utiliser les valeurs de z pour déterminer toutes les valeurs possibles de l'entier strictement positif k, $k\%$ étant le pourcentage des élèves qui ont participé au moins au canoë et à la natation.

Puisque n est un entier strictement positif divisible par 10, sa plus petite valeur possible est 10. Cependant, lorsqu'on reporte $n = 10$ dans l'équation $x = \frac{n}{2} - 10$, on obtient $x = 5 - 10$, d'où $x = -5$, ce qui n'est pas possible. (Rappelons que x est le nombre d'élèves ayant participé à la randonnée et au canoë et qui n'ont pas participé à la natation, donc $x \geq 0$.)
On essaie ensuite $n = 20$.
Lorsque $n = 20$, $x = 10 - 10$, d'où $x = 0$.
Lorsque $n = 20$, $y = \frac{3 \times 20}{5} - 10$ ou $y = 12 - 10$, d'où $y = 2$.
Enfin, lorsque $n = 20$, $x = 0$ et $y = 2$, on a $z = 20 - 10 - 0 - 2 = 8$.
Lorsque $z = 8$, le nombre d'élèves ayant participé au moins au canoë et à la natation est égal à $8 + 10 = 18$ (puisque 10 élèves ont participé aux trois activités). Donc, le pourcentage des élèves qui ont participé au moins au canoë et à la natation est égal à $\frac{18}{20} \times 100\% = 90\%$, d'où $k = 90$.
Dans le tableau ci-dessous, on poursuit ce processus en utilisant des multiples de 10 comme valeurs de n.

n	$x = \frac{n}{2} - 10$	$y = \frac{3n}{5} - 10$	$z = n - 10 - x - y$	$k = \frac{z+10}{n} \times 100$
20	0	2	8	$k = \frac{8+10}{20} \times 100 = 90$
30	5	8	7	$k = \frac{7+10}{30} \times 100 \approx 56{,}7$
40	10	14	6	$k = \frac{6+10}{40} \times 100 = 40$
50	15	20	5	$k = \frac{5+10}{50} \times 100 = 30$
60	20	26	4	$k = \frac{4+10}{60} \times 100 \approx 23{,}3$
70	25	32	3	$k = \frac{3+10}{70} \times 100 \approx 18{,}6$
80	30	38	2	$k = \frac{2+10}{80} \times 100 = 15$
90	35	44	1	$k = \frac{1+10}{90} \times 100 \approx 12{,}2$
100	40	50	0	$k = \frac{0+10}{100} \times 100 = 10$

Pour les valeurs de n supérieures à 100, on obtient $z < 0$, ce qui n'est pas possible.
Donc, la somme de tous les entiers strictement positifs k permissibles est égale à $90 + 40 + 30 + 15 + 10 = 185$.

Réponse : (B)

8e année

1. La fraction $\frac{1}{4}$ est équivalente à $1 \div 4 = 0{,}25$.

Réponse : (B)

2. D'après le diagramme, la vitesse prévue du vent est inférieure à 20 km/h les lundi, mardi, mercredi et dimanche.
Donc, au cours de cette période de 7 jours, Jacques pourra naviguer seul pendant 4 jours.

Réponse : (A)

3. On remarque que $15 \times 10 = 150$, $15 \times 2 = 30$, $15 \times 3 = 45$ et $15 \times 4 = 60$.
Puisqu'il n'existe pas un entier n tel que $15 \times n = 25$, alors 25 n'est pas un multiple de 15.

Réponse : (B)

4. Lorsqu'on place les entiers en ordre croissant, on a : $-9, -7, 0, 9, 10$.
Le troisième entier de la liste est 0.

Réponse : (D)

5. *Solution 1*
Si $2n = 14$, alors $n = \dfrac{14}{2} = 7$.
Lorsque $n = 7$, la valeur de $10n$ est égale à $10 \times 7 = 70$.

Solution 2
Lorsqu'on multiple les deux membres de l'équation par 5, on obtient $5 \times 2n = 5 \times 14$, d'où $10n = 70$.

Réponse : (C)

6. Il y a 6 résultats possibles lorsque Tallulah lance un dé standard une seule fois.
Parmi les 6 résultats possibles, 2 résultats sont perdants. Donc, la probabilité qu'elle perde est égale à $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Réponse : (A)

7. *Solution 1*
On peut réécrire l'addition dans l'énoncé du problème sous la forme d'une soustraction ; puisque $1013 + PQPQ = 2023$, alors $PQPQ = 2023 - 1013$.
La différence entre 2023 et 1013 est égale à $2023 - 1013 = 1010$. Donc, $P = 1$, $Q = 0$ et $P + Q = 1 + 0 = 1$.

Solution 2
Le chiffre des unités de la somme 2023 est égal à 3.
Donc, le chiffre des unités de la somme $3 + Q$ doit être égal à 3.
Puisque Q est un chiffre, la seule valeur possible de Q est 0.
Le chiffre des dizaines de la somme 2023 est égal à 2.
Puisqu'il n'y a pas de retenue dans la colonne des unités, alors la somme dans la colonne des

dizaines, soit $1 + P$, doit avoir un chiffre des unités égal à 2.
Puisque P est un chiffre, alors 1 est la seule valeur possible de P.
On peut vérifier que lorsque $P = 1$ et $Q = 0$, on obtient $1013 + 1010 = 2023$, ce qu'il fallait démontrer.
La valeur de $P + Q$ est égale à $1 + 0 = 1$.

Réponse : (B)

8. Supposons que la vinaigrette contenait initialement 300 mL d'huile.
Puisque la quantité d'huile et la quantité de vinaigre étaient dans un rapport de 3 : 1, alors la quantité de vinaigre dans la vinaigrette était égal au tiers de la quantité d'huile. C'est-à-dire que la vinaigrette contenait initialement $\frac{1}{3} \times 300$ mL $= 100$ mL de vinaigre (remarquons que 300 : 100 = 3 : 1).
Si l'on double la quantité de vinaigre, le nouveau volume du vinaigre est égal à 2×100 mL $= 200$ mL. Donc, le nouveau rapport entre la quantité d'huile et la quantité de vinaigre est égal à 300 : 200 = 3 : 2.
Remarquons que l'on a choisi de procéder comme si la quantité intiale d'huile était égale à 300 mL. Cependant, on aurait obtenu le même rapport de 3 : 2 à partir des calculs ci-dessus peu importe le volume initial d'huile.

Réponse : (A)

9. Avant de payer la taxe, les trois articles coûtent 4,20 \$ + 7,60 \$ + 3,20 \$ = 15,00 \$.
La taxe de 5 % qu'il faudra ajouter au coût de 15,00 \$ est donc égale à 0,05 × 15,00 \$ = 0,75 \$.
Donc, si l'on ajoutait une taxe de 5% au coût des trois articles, le coût total des trois articles serait égal à 15,00 \$ + 0,75 \$ = 15,75 \$.
Remarquons qu'on aurait pu calculer la taxe de 5 % sur chaque article individuellement, mais cela n'aurait pas été aussi efficace que de la calculer sur le total de 15,00 \$.

Réponse : (D)

10. Lorsque le point $(1, 3)$ subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, son image a pour coordonnées $(-1, 3)$.
En général, lorsqu'un point est réfléchi dans l'axe des ordonnées, son abscisse change de signe tandis que son ordonnée ne change pas.
Donc, les sommets du rectangle réfléchi ont pour coordonnées $(-1, 3)$, $(-1, 1)$, $(-4, 1)$ et $(-4, 3)$.
Parmi les choix de réponse, $(-3, 4)$ est le point qui n'est pas un sommet du rectangle réfléchi.

Réponse : (C)

11. Dans le rectangle le plus à gauche, la diagonale d (qui représente une partie du chemin) et les côtés de longueurs 3 et 4 forment un triangle rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, on a $d^2 = 3^2 + 4^2$, d'où $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ (remarquons que ce triangle est un triangle remarquable 3-4-5).
Le chemin de A à B comprend une telle diagonale, deux côtés verticaux de longueur 4 et trois côtés horizontaux de longueur 3. Le chemin de A à B a donc une longueur totale de $5 + (2 \times 4) + (3 \times 3) = 22$.

Réponse : (A)

12. Puisque l'angle PQR est un angle plat, alors $\angle PQR = 180°$, d'où on a donc $\angle SQR = 180° - 125° = 55°$.
Puisque $SQ = SR$, alors $\angle SRQ = \angle SQR = 55°$.
Puisque les mesures des angles du triangle SQR ont une somme de 180°, alors $x = 180 - 55 - 55 = 70$.

Réponse : (B)

13. On voit que le nombre de pêches dans le panier est égal à 2 de plus qu'un multiple de trois.
Parmi les choix de réponse, 29 est le seul nombre qui est égal à 2 de plus qu'un multiple de trois. $(29 = 3 \times 9 + 2)$.

Réponse : (D)

14. Chaque liste de 5 entiers a une somme de $4 - 3 + 2 - 1 + 0 = 2$.
Dans les 23 premiers entiers, la liste de 5 entiers se répète quatre fois, suivi de 3 entiers additionnels (puisque $23 = 4 \times 5 + 3$).
Donc, les 20 premiers entiers (soit la liste de 5 entiers qui se répète quatre fois) ont une somme de $4 \times 2 = 8$ et les vingt-et-unième, vingt-deuxième et vingt-troisième entiers sont respectivement $4, -3$ et 2.
Donc, la somme des 23 premiers entiers est égale à $8 + 4 - 3 + 2 = 11$.

Réponse : (D)

15. Les pneus du vélo de Bindu ont chacun une circonférence de $2 \times \pi \times 30$ cm $= 60\pi$ cm.
Si les pneus du vélo tournent exactement cinq fois, alors la distance parcourue est égale à $5 \times 60\pi$ cm $= 300\pi$ cm.

Réponse : (D)

16. *Solution 1*
La somme des 8 nombres de la liste est égale à $41 + 35 + 19 + 9 + 26 + 45 + 13 + 28 = 216$.
Lorsque les 8 nombres sont appariés, on a 4 paires.
Les nombres de chaque paire ont la même somme, cette somme est donc égale à $\dfrac{216}{4} = 54$.
Donc, le nombre apparié avec 13 est $54 - 13 = 41$.
Remarque : On peut confirmer que $45 + 9 = 54$, $41 + 13 = 54$, $35 + 19 = 54$ et $28 + 26 = 54$.

Solution 2
Puisque les nombres de chaque paire ont la même somme, le plus grand nombre de la liste doit être associé au plus petit nombre, le deuxième plus grand au deuxième plus petit et ainsi de suite. (Pouvez-vous expliquer pourquoi cela est vrai ?)
C'est-à-dire que le plus grand et le plus petit nombre de la liste, soit 45 et 9, doivent être appariés.
Le deuxième plus grand et le deuxième plus petit nombre, soit 41 et 13, doivent être appariés, d'où on voit donc que le nombre apparié avec 13 est 41.
Remarque : On peut confirmer que $45 + 9 = 54$, $41 + 13 = 54$, $35 + 19 = 54$ et $28 + 26 = 54$.

Réponse : (E)

17. La moyenne est déterminée en additionnant les 30 températures enregistrées et en divisant la somme par 30.
La températures des 25 premiers jours ont une somme de $25 \times 21°\text{C} = 525°\text{C}$.
Les températures des 5 derniers jours ont une somme de $5 \times 15°\text{C} = 75°\text{C}$.
Donc, la moyenne des températures enregistrées était égale à $\dfrac{525°\text{C} + 75°\text{C}}{30} = \dfrac{600°\text{C}}{30} = 20°\text{C}$.

Réponse : (C)

18. On écrit d'abord les plus petits diviseurs positifs à 2 chiffres de 630 en ordre croissant.
Remarquons qu'il est plus facile de déterminer les diviseurs de 630 si on exprime ce dernier sous la forme d'un produit de facteurs premiers ($630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$).
Parmi les diviseurs positifs de 2 chiffres de 630, les cinq les plus petits sont $10, 14, 15, 18$ et 21.
Le sixième diviseur positif de 2 chiffres dans la liste est 30. Remarquons que $21 \times 30 = 630$.
C'est-à-dire que 21 et 30 sont une paire d'entiers strictement positifs de 2 chiffres dont le produit est égal à 630. De plus, les deux entiers sont consécutifs dans la liste des diviseurs positifs à 2 chiffres de 630.
Donc, chacun des diviseurs $10, 14, 15, 18$ doit être apparié avec un diviseur de 630 supérieur à 30.
On peut vérifier que chacun des diviseurs qui est apparié avec les diviseurs $10, 14, 15, 18$ est un entier strictement positif de 2 chiffres en divisant 630 par le plus petit diviseur.
Autrement dit, $\frac{630}{18} = 35$, $\frac{630}{15} = 42$, $\frac{630}{14} = 45$ et $\frac{630}{10} = 63$.
Donc, les paires d'entiers strictement positifs de 2 chiffres dont le produit est 630 sont 21 et 30, 18 et 35, 15 et 42, 14 et 45, et 10 et 63. Il y a donc 5 telles paires.

Réponse : (D)

19. Entre 9 h et 10 h du matin, Raymond a tondu $\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ de sa pelouse.
Raymond a tondu $\frac{3}{8}$ de sa pelouse en 1 heure (60 minutes). Il a donc tondu $\frac{1}{8}$ de sa pelouse en $\frac{60}{3}$ minutes, soit 20 minutes.
À 10 h, Raymond avait tondu $\frac{7}{8}$ de sa pelouse et il lui restait donc $1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ de sa pelouse à tondre.
Puisque Raymond tond $\frac{1}{8}$ de sa pelouse en 20 minutes, il a terminé de tondre sa pelouse à 10 h 20.

Réponse : (C)

20. On place d'abord quatre tuiles dans les cases de la première rangée.
La seule restriction est que la rangée doit contenir une tuile de chaque couleur.
Donc, dans la première rangée, il existe 4 choix de couleur de tuile pour la première colonne, 3 choix pour la deuxième, 2 pour la troisième et 1 choix pour la quatrième.
Autrement dit, il existe $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ manières différentes de disposer les tuiles de la première rangée de sorte qu'elle contienne une tuile de chaque couleur.
Soit R, N, V et J respectivement les couleurs rouge, noire, verte et jaune. On pourrait avoir par exemple des tuiles $V \quad J \quad R \quad N$, dans cet ordre, dans la première rangée.
Supposons que la première rangée contienne effectivement des tuiles de couleurs $V \quad J \quad R \quad N$, dans cet ordre.
On va démontrer qu'il n'y a qu'une seule façon de disposer les 12 tuiles restantes dans le quadrillage.

Considérons la première case de la deuxième rangée, c'est-à-dire la case située directement audessous de la tuile de couleur V.
La tuile placée dans cette case ne peut être de couleur V puisqu'elle partage un côté avec la tuile de couleur V de la rangée 1.
De même, la tuile placée dans cette case ne peut être de couleur J puisqu'elle touche le coin de la case contenant la tuile de couleur J de la rangée 1.

Supposons que la tuile dans la première case de la rangée 2 soit de couleur N, comme dans la figure ci-contre.
Ensuite, considérons la couleur des tuiles qui pourraient être placées dans la deuxième case de la rangée 2.
La tuile placée dans cette case ne peut être de couleur J puisqu'elle partage un côté avec la tuile de couleur J de la rangée 1.
De même, la tuile placée dans cette case ne peut être de couleur V puisqu'elle touche le coin de la case contenant la tuile de couleur V de la rangée 1.

V	J	R	N
N			

De plus, la tuile placée dans cette case ne peut être de couleur R puisqu'elle touche le coin de la case contenant la tuile de couleur R de la rangée 1.
Puisque la première case de cette rangée contient une tuile de couleur N, alors aucune couleur de tuile ne peut être placée dans la deuxième case de la rangée 2.
Cela signifie que la tuile dans la première case de la rangée 2 ne peut être de couleur N et qu'elle doit donc être de couleur R, comme dans la figure ci-contre.
La tuile de la deuxième case de la rangée 2 ne peut être de couleur J ou V (comme on l'a remarqué précédemment) et doit donc être de couleur N.
En continuant vers la droite dans la rangée 2, la tuile suivante ne peut être de couleur Y puisqu'elle touche le coin de la case contenant la tuile de couleur J de la rangée 1, la tuile dans cette case doit donc être de couleur V. La dernière tuile de la rangée doit donc être de couleur J.

V	J	R	N
R			

C'est-à-dire que les positions des 4 tuiles de la rangée 2 sont entièrement déterminées par les tuiles de la rangée 1.
Donc, pour chacune des 24 manières différentes dont on peut disposer les tuiles de la rangée 1, il y a exactement une seule disposition pour les tuiles de la rangée 2.
On peut utiliser le même argument pour constater qu'il en va de même pour les tuiles de la rangée 3 et de la rangée 4 ; c'est-à-dire qu'il y a exactement un choix pour l'emplacement de chacune des couleurs dans chacune de ces deux rangées.
Dans la figure ci-contre, on a complété le quadrillage 4×4 que l'on avait présenté comme exemple dans la solution.
Pouvez-vous justifier pourquoi les rangées 3 et 4 doivent contenir les couleurs de tuiles indiquées ?
Donc, pour chacune des 24 manières différentes dont on peut disposer les tuiles de la rangée 1, il y a exactement une seule disposition pour les tuiles dans les cases restantes du quadrillage.
Donc, on peut disposer les tuiles de 24 façons différentes.

V	J	R	N
R	N	V	J
V	J	R	N
R	N	V	J

Réponse : (B)

21. Puisque OM est un rayon du cercle, alors $OM = 87$.
Le triangle MNO est rectangle. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a $OM^2 = MN^2 + NO^2$ ou $87^2 = 63^2 + NO^2$, d'où $NO^2 = 87^2 - 63^2 = 3600$.
Puisque $NO > 0$, alors $NO = \sqrt{3600} = 60$.

Puisque OP est également un rayon, alors $OP = 87$, d'où $NP = NO + OP = 60 + 87 = 147$.
L'aire du triangle PMN est égale à $\frac{1}{2} \times NP \times MN = \frac{1}{2} \times 147 \times 63 = 4630{,}5$.

Réponse : (D)

22. La vitesse moyenne de Nasrin est déterminée en divisant la distance totale parcourue (soit 9 km) par le temps total.
Le voyage aller lui a pris deux heures et trente minutes, soit 150 minutes.
Le voyage retour lui a pris $\frac{1}{3} \times 150$ minutes, soit 50 minutes.
Donc, le voyage aller-retour lui a pris 200 minutes, soit $3\frac{1}{3}$ heures (car 180 minutes font 3 heures et les 20 minutes restantes sont égales à $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ d'heure).
Donc, la vitesse moyenne de Nasrin pendant l'aller-retour était égale à $\frac{9 \text{ km}}{3\frac{1}{3} \text{ h}}$ ou $\frac{9 \text{ km}}{\frac{10}{3} \text{ h}}$, soit $9 \times \frac{3}{10}$ km/h $= \frac{27}{10}$ km/h $= 2{,}7$ km/h.

Réponse : (E)

23. Le volume d'eau dans le cylindre B est égal à $\pi \times (8 \text{ cm})^2 \times 50 \text{ cm} = 3200\pi \text{ cm}^3$.
Après avoir transvasé de l'eau du cylindre B au cylindre A, le volume total d'eau dans les deux cylindres est égal à $3200\pi \text{ cm}^3$ (puisqu'on ne perd pas d'eau en transvasant).
Soit h cm la profondeur de l'eau dans chacun des deux cyclindres après avoir transvasé de l'eau du cylindre B au cylindre A.
À ce moment-là, le volume d'eau dans le cylindre B est égal à $\pi \times (8 \text{ cm})^2 \times h \text{ cm} = 64\pi h \text{ cm}^3$ et le volume d'eau dans le cyclindre A est égal à $\pi \times (6 \text{ cm})^2 \times h \text{ cm} = 36\pi h \text{ cm}^3$.
Donc, le volume total d'eau dans les deux cylindres est égal à $64\pi h \text{ cm}^3 + 36\pi h \text{ cm}^3 = 100\pi h \text{ cm}^3$, d'où $100\pi h = 3200\pi$ ou $h = \frac{3200\pi}{100\pi} = 32$.
Après avoir transvasé de l'eau du cylindre B au cylindre A, la profondeur de l'eau est la même dans les deux cylindres, cette profondeur est de 32 cm.

Réponse : (C)

24. *Solution 1*
On multiplie d'abord chaque membre de l'équation par 20 pour obtenir $20 \times \frac{a}{4} + 20 \times \frac{b}{10} = 20 \times 7$, ou $5a + 2b = 140$.
Puisque $5a = 140 - 2b$ et que 140 et $2b$ sont tous deux pairs, alors $5a$ est pair, ce qui signifie que a est pair.
Essayons d'abord $a = 20$ et $b = 20$ (qui vérifient l'équation puisque $5 \times 20 + 2 \times 20 = 140$).
Cette paire d'entiers a et b vérifie toutes les conditions sauf $a < b$.
On peut trouver d'autres solutions à l'équation $5a + 2b = 140$ en ajoutant deux 5 et en soustrayant cinq 2 (ce qui revient à ajouter 10 et à soustraire 10), ou en soustrayant deux 5 et en ajoutant cinq 2.
Le fait d'ajouter deux 5 équivaut à augmenter de 2 la valeur de a.
Le fait de soustraire cinq 2 équivaut à diminuer de 5 la valeur de b.
Considérons $a = 20 + 2 = 22$ et $b = 20 - 5 = 15$.
Cette paire d'entiers a et b vérifie l'équation puisque $5 \times 22 + 2 \times 15 = 140$.
Cependant, dans ce cas, $a > b$ et à chaque fois que l'on ajoute deux 5 et que l'on soustrait cinq 2, a devient plus grand et b plus petit.
Donc, il faut aller dans l'autre sens.
Considérons $a = 20 - 2 = 18$ et $b = 20 + 5 = 25$.
Cette paire d'entiers a et b vérifie l'équation puisque $5 \times 18 + 2 \times 25 = 140$.
Dans ce cas, $a < b$ et $a + b = 43$, donc cette paire satisfait toutes les conditions.
Ensuite, considérons $a = 18 - 2 = 16$ et $b = 25 + 5 = 30$.

Cette paire d'entiers a et b vérifie l'équation puisque $5 \times 16 + 2 \times 30 = 140$.
Dans ce cas, $a < b$ et $a + b = 46$, donc cette paire satisfait toutes les conditions.
Remarquons que la somme $a + b$ augmente de 3 à chacune de ces étapes.
Donc, si l'on répète cela 17 fois, on a $a = 16 - 17 \times 2 = -18$ et $b = 30 + 17 \times 5 = 115$.
Cette paire d'entiers a et b vérifie l'équation puisque $5 \times (-18) + 2 \times 115 = 140$.
Remarquons que $a < b$ et $a + b < 100$ sont également vérifiés.
En répétant ce processus une fois de plus, on obtient $a = -20$ et $b = 120$, ce qui donne $a+b = 100$, il n'y a donc plus de paires d'entiers a et b admissibles.
Puisque l'on sait que a doit être pair et que l'on considère toutes les valeurs paires possibles de a, il ne peut y avoir d'autres paires qui vérifient les conditions.
Au total, il y a $1 + 1 + 17 = 19$ paires d'entiers a et b qui vérifient l'équation et les inéquations.

Solution 2
On manipule l'équation de manière à pouvoir isoler b :

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{4} + \frac{b}{10} &= 7 \\
\frac{b}{10} &= 7 - \frac{a}{4} \\
10 \times \frac{b}{10} &= 10 \times 7 - 10 \times \frac{a}{4} \qquad \text{(on multiplie chaque terme par 10)} \\
b &= 70 - \frac{10a}{4} \\
b &= 70 - \frac{5a}{2}
\end{aligned}
$$

Puisque b est un entier, alors $70 - \frac{5a}{2}$ est un entier, ce qui signifie que $\frac{5a}{2}$ doit être un entier.
Puisque 2 n'est pas un diviseur de 5, alors 2 doit être un diviseur de a, d'où a est donc pair.
Puisque $a < b$ et $b = 70 - \frac{5a}{2}$, alors

$$
\begin{aligned}
a &< 70 - \frac{5a}{2} \\
2 \times a &< 2 \times 70 - 2 \times \frac{5a}{2} \qquad \text{(on multiplie chaque terme par 2)} \\
2a &< 140 - 5a \\
7a &< 140 \\
a &< 20
\end{aligned}
$$

De plus, puisque $a + b < 100$ et $b = 70 - \frac{5a}{2}$, alors

$$
\begin{aligned}
a + 70 - \frac{5a}{2} &< 100 \\
2 \times a + 2 \times 70 - 2 \times \frac{5a}{2} &< 2 \times 100 \qquad \text{(on multiplie chaque terme par 2)} \\
2a + 140 - 5a &< 200 \\
-60 &< 3a \\
-20 &< a
\end{aligned}
$$

Donc, a est un entier pair supérieur à -20 et inférieur à 20.
Puisqu'il existe 19 entiers pairs compris entre -18 et 18 inclusivement, on soupçonne qu'il existe 19 paires d'entiers a et b qui vérifient l'équation donnée.
Une bonne idée serait de vérifier au moins que la plus grande et la plus petite de ces valeurs de a satisfont effectivement chacune des conditions données.
Lorsque $a = -18$, on a $b = 70 - \dfrac{5(-18)}{2}$ ou $b = 70 - 5(-9)$, d'où $b = 115$.
Cette paire satisfait aux conditions $a < b$ et $a + b < 100$.
Lorsqu'on reporte $a = -18$ et $b = 115$ dans l'équation donnée, on obtient

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{10} = \frac{-18}{4} + \frac{115}{10} = \frac{-9}{2} + \frac{23}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

On voit donc que $a = -18$ et $b = 115$ vérifient l'équation.
Lorsque $a = 18$, on a $b = 70 - \dfrac{5(18)}{2}$ ou $b = 70 - 5(9)$, d'où $b = 25$.
Ces valeurs vérifient les inéquations $a < b$ et $a + b < 100$.
Lorsqu'on reporte $a = 18$ et $b = 25$ dans l'équation donnée, on obtient

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{10} = \frac{18}{4} + \frac{25}{10} = \frac{9}{2} + \frac{5}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

On voit donc que $a = 18$ et $b = 25$ vérifient l'équation.
À ce stade, on peut être sûrs que pour chacune des 19 valeurs entières paires de a comprises entre -18 et 18 inclusivement, il existe un entier b pour lequel la paire d'entiers a et b satisfait chacune des conditions données et vérifie l'équation donnée.

Réponse : (B)

25. Pour tout triangle, la somme des longueurs de deux côtés est toujours supérieure à la longueur du troisième côté. Cette propriété s'appelle *l'inégalité triangulaire*.
Si par exemple les longueurs des côtés d'un triangle sont a, b et c, alors, d'après l'inégalité triangulaire,

$$a + b > c \text{ and } a + c > b \text{ and } b + c > a.$$

On considère d'abord le nombre de façons différentes de choisir trois entiers parmi $3, 4, 10, 13$ (sans utiliser n), puis de former un triangle dont les longueurs des côtés sont égales à ces entiers.
Considérons les trois entiers $3, 4, 10$.
Puisque $3 + 4 < 10$, il n'est pas possible de former un triangle dont les longueurs des côtés sont $3, 4, 10$.
Considérons les entiers $3, 4, 13$.
Puisque $3 + 4 < 13$, il n'est pas possible de former un triangle dont les longueurs des côtés sont $3, 4, 13$.
Considérons les entiers $3, 10, 13$.
Puisque $3 + 10 = 13$, il n'est pas possible de former un triangle dont les longueurs des côtés sont $3, 10, 13$.
Cependant, le dernier choix possible, soit $4, 10, 13$, remplit les conditions de l'inégalité triangulaire puisque $4 + 10 > 13$, $4 + 13 > 10$ et $10 + 13 > 4$.
Donc, sans utiliser la valeur de n, il existe exactement une façon de choisir trois entiers et de former un triangle dont les longueurs des côtés sont égales à ces entiers.
Cela signifie qu'il faut déterminer les valeurs de n pour lesquelles il existe exactement trois façons différentes de choisir deux entiers parmi les entiers 3,4, $10, 13$ et de former un triangle dont les

longueurs des côtés sont égales à ces deux entiers et à n.
Il existe six façons possibles de choisir deux entiers parmi les entiers $3, 4, 10, 13$.
Donc, pour chaque valeur de n, les triangles qu'il faut considérer ont pour longueurs de côtés : $3,4, n$ ou $3, 10, n$ ou $3, 13, n$ ou $4, 10, n$ ou $4, 13, n$ ou $10, 13, n$.
Pour chaque valeur de n, il faut qu'exactement trois triangles (parmi les six) satisfassent l'inégalité triangulaire.
On utilise ensuite l'inégalité triangulaire pour déterminer les restrictions sur n pour chacun des six groupes de triangles possibles.

Dans un triangle dont les longueurs des côtés sont $3, 4, n$, on obtient $3 + n > 4$ ou $n > 1$, et $3 + 4 > n$ ou $n < 7$, et $4 + n > 3$ ou $n > -1$.
Pour vérifier les trois inéquations, n doit être supérieur à 1 et inférieur à 7.
Donc, les valeurs possibles de n pour lesquelles un triangle a des côtés de longueurs $3, 4, n$ sont $n = 2, 3, 4, 5, 6$.
Puisque n doit être différent de tous les autres nombres de la liste, alors $n = 2, 5, 6$.

Dans un triangle dont les longueurs des côtés sont $3, 10, n$, on obtient $3 + n > 10$ ou $n > 7$, et $3 + 10 > n$ ou $n < 13$, et $10 + n > 3$ ou $n > -7$.
Pour vérifier les trois inéquations, n doit être supérieur à 7 et inférieur à 13.
Donc, les valeurs possibles de n pour lesquelles un triangle a des côtés de longueurs $3, 10, n$ sont $n = 8, 9, 11, 12$ ($n \neq 10$ puisque 10 est dans la liste).

Dans un triangle dont les longueurs des côtés sont $3, 13,n$, on obtient $3 + n > 13$ ou $n > 10$, et $3 + 13 > n$ ou $n < 16$, et $13 + n > 3$ ou $n > -10$.
Pour vérifier les trois inéquations, n doit être supérieur à 10 et inférieur à 16.
Donc, les valeurs possibles de n pour lesquelles un triangle a des côtés de longueurs $3, 13, n$ sont $n = 11, 12, 14, 15$ ($n \neq 13$ puisque 13 est dans la liste).

Dans un triangle dont les longueurs des côtés sont $4, 10, n$, on obtient $4 + n > 10$ ou $n > 6$, et $4 + 10 > n$ ou $n < 14$, et $10 + n > 4$ ou $n > -6$.
Pour vérifier les trois inéquations, n doit être supérieur à 6 et inférieur à 14.
Donc, les valeurs possibles de n pour lesquelles un triangle a des côtés de longueurs $4, 10, n$ sont $n = 7, 8, 9, 11, 12$.

Dans un triangle dont les longueurs des côtés sont $4, 13, n$, on obtient $4 + n > 13$ ou $n > 9$, et $4 + 13 > n$ ou $n < 17$, et $13 + n > 4$ ou $n > -9$.
Pour vérifier les trois inéquations, n doit être supérieur à 9 et inférieur à 17.
Donc, les valeurs possibles de n pour lesquelles un triangle a des côtés de longueurs $4, 13, n$ sont $n = 11, 12, 14, 15, 16$.

Dans un triangle dont les longueurs des côtés sont $10, 13, n$, on obtient $10 + n > 13$ ou $n > 3$, et $10 + 13 > n$ ou $n < 23$, et $13 + n > 10$ ou $n > -3$.
Pour vérifier les trois inéquations, n doit être supérieur à 3 et inférieur à 23.
Donc, les valeurs possibles de n pour lesquelles un triangle a des côtés de longueurs $10, 13, n$ sont $n = 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22$.

Rappelons que pour chaque valeur de n, il faut qu'exactement trois triangles (parmi les six) satisfassent l'inégalité triangulaure (le triangle dont les longueurs des côtés sont $4, 10, 13$ est le quatrième).
Il est clair que pour les valeurs de n inférieures à 7, il y a trop peu de triangles. Il en est de même pour les valeurs de n supérieures à 16. (Il y a au plus deux triangles dans chacun de ces deux cas.)
On résume notre travail au moyen du tableau ci-dessous (une coche indique que le triangle remplit les conditions de l'inégalité triangulaire).

n	(3,4,n)	(3,10,n)	(3,13,n)	(4,10,n)	(4,13,n)	(10,13,n)	(4,10,13)	nombre de triangles
7				✓		✓	✓	3
8		✓		✓		✓	✓	4
9		✓		✓		✓	✓	4
11		✓	✓	✓	✓	✓	✓	6
12		✓	✓	✓	✓	✓	✓	6
14			✓		✓	✓	✓	4
15			✓		✓	✓	✓	4
16					✓	✓	✓	3

Donc, il y a exactement quatre valeurs différentes de n qui remplissent les conditions données. La somme de ces valeurs de n est égale à $8 + 9 + 14 + 15 = 46$.

Réponse : (A)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2022

(7^e et 8^e années – Secondaire I et II)

le mercredi 18 mai 2022

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jueudi 19 mai 2022

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Jeff Anderson
Terry Bae
Jacquelene Bailey
Shane Bauman
Ersal Cahit
Diana Castañeda Santos
Sarah Chan
Ashely Congi
Serge D'Alessio
Fiona Dunbar
Mike Eden
Sandy Emms
Barry Ferguson
Steve Furino
Lucie Galinon
Robert Garbary
Rob Gleeson
Sandy Graham
Conrad Hewitt
Lisa Kabesh
Jenn Kelebuda
Carrie Knoll
Wesley Korir
Judith Koeller
Laura Kreuzer
Bev Marshman
Josh McDonald
Paul McGrath
Comfort Mintah
Jen Nelson
Ian Payne
J.P. Pretti
Alexandra Rideout
Nick Rollick
Kim Schnarr
Tucker Seabrook
Ashley Sorensen
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga
Christine Vender
Heather Vo
Bonnie Yi

Comité du concours Gauss

Ashley Sorensen (présidente), University of Waterloo, Waterloo, ON
Kevin Grady (président adjoint), Cobden, ON
Sarah Garrett, Mitchell Woods P.S., Guelph, ON
Kora Lee Gallant, Madeline Symonds M.S., Hammonds Plains, NS
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
Clay Kellough, Fort Richmond C.I., Winnipeg, MB
David Matthews, Waterloo, ON
John McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
Nick Rollick, University of Waterloo, Waterloo, ON
David Switzer, Scott Central P.S., Sandford, ON
Rachael Verbruggen, University of Waterloo, Waterloo, ON
Robert Wong, Edmonton, AB
Chris Wu, Ledbury Park E. and M.S., Toronto, ON
Lori Yee, William Dunbar P.S., Pickering, ON

7e année

1. Lorsqu'on place les cinq choix de réponses, ainsi que 10, en ordre du plus petit au plus grand, on obtient : $1, 5, 8, 10, 13, 19$.
Puisque 10 est 2 de plus que 8 et que 10 est 3 de moins que 13, alors 8 est le nombre le plus près de 10.

Réponse : (C)

2. D'après le diagramme, Gabe a passé 4 heures au plus à faire du vélo lors d'un jour de semaine. Cela s'est produit le mardi.

Réponse : (B)

3. Parmi les choix de réponse, 0 est la seule valeur de x qui est inférieure à 5.

Réponse : (B)

4. Puisque $18 + 5 = 23$, $23 + 5 = 28$ et $28 + 5 = 33$, alors les trois prochains termes de la suite sont $23, 28, 33$.

Réponse : (C)

5. Les faces visibles du cube contiennent 1, 3 et 5 points. Donc, les trois faces cachées du cube contiennent 2, 4 et 6 points. Donc, la somme des points sur les trois faces cachées du cube est égale à $2 + 4 + 6 = 12$.

Réponse : (D)

6. Puisque l'angle ABC a une mesure de 90° et que $\angle ABC = 44^\circ + x^\circ$, alors $x = 90 - 44 = 46$.

Réponse : (A)

7. Le plus grand des chanteurs de la chorale mesure 183,5 cm.
Le plus petit des chanteurs de la chorale mesure 141 cm.
Donc, l'étendue de leurs tailles est égale à 183,5 cm $-$ 141 cm $=$ 42,5 cm.

Réponse : (A)

8. Par rapport à l'origine $(0, 0)$, le point$(3, -4)$ est situé 3 unités à droite et 4 unités au-dessous.
Dans la figure, les coordonnées $(3, -4)$ correspondent au point T.

Réponse : (E)

9. Quand Émilie saute pendant 75 secondes, elle saute pendant $60 + 15$ secondes.
En sautant 52 fois en 60 secondes, Émilie saute $52 \div 4 = 13$ fois en $60 \div 4 = 15$ secondes.
Puisqu'elle saute 52 fois en 60 secondes et 13 fois en 15 secondes, alors elle sautera $52 + 13 = 65$ fois en $60 + 15 = 75$ secondes.

Réponse : (C)

10. Si l'on a 1,00 \$ en pièces de 10 ¢, alors on a $\dfrac{1{,}00 \text{ \$}}{0{,}10 \text{ \$}} = 10$ pièces de 10 ¢.
Si l'on a 1,00 \$ en pièces de 25 ¢, alors on a $\dfrac{1{,}00 \text{ \$}}{0{,}25 \text{ \$}} = 4$ pièces de 25 ¢.
Le bocal contient 10 pièces de 10 ¢ et un total de $10 + 4 = 14$ pièces de monnaie.
Si Thierry choisit une pièce au hasard, la probabilité pour que ce soit une pièce de 10 ¢ est égale à $\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$.

Réponse : (E)

11. Puisque 42 est un nombre pair, alors 2 est un diviseur de 42.
Puisque $42 = 2 \times 21$ et $21 = 3 \times 7$, alors $42 = 2 \times 3 \times 7$.
Chacun des nombres 2, 3 et 7 est à la fois un nombre premier et un diviseur de 42.
Donc, la somme des diviseurs premiers de 42 est égale à $2 + 3 + 7 = 12$.
(Remarquons que $1, 6, 14, 21$ et 42 sont également des diviseurs de 42. Or ces derniers ne sont pas des nombres premiers.)

Réponse : (C)

12. Puisque le triangle PQR est isocèle et que $PQ = PR$, alors $\angle PRQ = \angle PQR$.
Les mesures des angles du triangle PQR ont une somme de 180°.
Puisque $\angle QPR = 70^\circ$, alors les deux autres angles du triangle ont des mesures dont la somme est égale à $180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.
Puisque ces deux angles sont égaux, alors chacun a une mesure de $110^\circ \div 2 = 55^\circ$. Donc, $x = 55$.
Puisque $QRST$ est un rectangle, chacun de ses angles intérieurs est un angle droit. Donc, $y = 90$.
La valeur de $x + y$ est égale à $55 + 90 = 145$.

Réponse : (D)

13. Un nombre de deux chiffres a au moins un chiffre 4 si son chiffre des dizaines est 4 ou si son chiffre des unités est 4.
Il y a 10 nombres de deux chiffres dont le chiffre des dizaines est 4.
Ces nombres sont $40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48$ et 49.
Il y a 9 nombres de deux chiffres dont le chiffre des unités est 4.
Ces nombres sont $14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94$, y compris 44 que l'on a déjà pris en compte dans la liste précédente.
Donc, $10 + 9 - 1 = 18$ nombres de deux chiffres ont au moins un chiffre 4.

Réponse : (C)

14. Les longueurs des côtés de chacun des trois carrés identiques sont égales.
Le rectangle $WXYZ$ a un périmètre de 56 m. Ce périmètre est composé de 8 tels côtés.
Alors, chacun des trois carrés identiques a des côtés de longueur $56 \text{ m} \div 8 = 7$ m.
Chacun des trois carrés identiques a une aire égale à $7 \text{ m} \times 7 \text{ m} = 49 \text{ m}^2$.
Donc, l'aire du rectangle $WXYZ$ est égale à $3 \times 49 \text{ m}^2 = 147 \text{ m}^2$.

Réponse : (B)

15. Le premier mercredi du mois doit avoir lieu dans les 7 premiers jours du mois, c'est-à-dire le 1^{er}, 2^{e}, 3^{e}, 4^{e}, 5^{e}, 6^{e} ou 7^{e} jour du mois.
Le deuxième mercredi d'un mois a lieu 7 jours après le premier mercredi de ce mois, et le troisième mercredi d'un mois a lieu 14 jours après le premier mercredi de ce mois.
En ajoutant 14 jours à chacune des dates possibles pour le premier mercredi du mois, on obtient que le troisième mercredi du mois doit avoir lieu le 15^{e}, 16^{e}, 17^{e}, 18^{e}, 19^{e}, 20^{e} ou 21^{e} jour de ce mois.
Parmi les choix de réponse, le jour férié ne peut tomber sur le 22^{e} jour de ce mois.

Réponse : (B)

16. *Solution 1*
Lorsqu'on lance une pièce de monnaie équilibrée trois fois, il y a 8 résultats possibles.
Soit F un résultat « face » et P un résultat « pile ». Dans ce cas, les 8 résultats possibles sont : FFF, FFP, FPF, PFF, FPP, PFP, PPF et PPP.
Parmi ces 8 résultats, 2 représentent des résultats où la pièce tombe du même côté trois fois de

suite, soit FFF et PPP.
Donc, la probabilité pour que la pièce tombe du même côté trois fois de suite est égale à $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Solution 2
Lorsqu'on lance une pièce de monnaie équilibrée trois fois, la pièce peut tomber du même côté trois fois de suite en tombant chaque fois sur le côté face ou chaque fois sur le côté pile.
Lorsqu'on lance une pièce, la probabilité pour qu'elle tombe du côté face est de $\frac{1}{2}$ et la probabilité pour qu'elle tombe du côté pile est également de $\frac{1}{2}$ (il y a deux résultats possibles et les deux sont équiprobables).
Donc, la probabilité pour que la pièce tombe du côté face trois fois de suite est égale à $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
De même, la probabilité pour que la pièce tombe du côté pile trois fois de suite est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
Donc, la probabilité pour que la pièce tombe du même côté trois fois de suite est égale à $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Réponse : (C)

17. Si la valeur de P est inférieure à 9, alors $QR + PPP + PPP$ est au plus $99 + 888 + 888 = 1875$. Étant donné que la somme est égale à 2022, alors la valeur de P ne peut être inférieure à 9 et doit donc être égale à 9.
Lorsque $P = 9$, on a $QR + 999 + 999 = 2022$, d'où $QR = 2022 - 999 - 999 = 24$.
Donc, $Q = 2$, $R = 4$, d'où on a $P + Q + R = 9 + 2 + 4 = 15$.

Réponse : (C)

18. Remarquons d'abord que le fait de déplacer un bloc de la boîte A à la boîte B, puis de déplacer le même bloc de la boîte B à la boîte A ne modifie aucunement la masse totale de chaque boîte. Puisqu'une telle paire de déplacements augmente le nombre de blocs que Jasmine déplace de la boîte A à la boîte B, alors on ne peut avoir de telles paires de déplacements si l'on veut obtenir le résultat souhaité en déplaçant le plus petit nombre possible de blocs.
(De même, le fait de déplacer un bloc de la boîte B à la boîte A, puis de déplacer ce même bloc de la boîte A à la boîte B ne modifie aucunement la masse totale de chaque boîte ; cette paire de déplacements est donc inutile.)
C'est-à-dire qu'une fois qu'un bloc a été déplacé d'une boîte à l'autre, ce bloc ne doit pas subir de déplacements ultérieurs.

On considère par la suite les masses totales de blocs que l'on peut déplacer de la boîte B à la boîte A.
La boîte B contient un bloc de 50 g et trois blocs de 10 g. Jasmine peut donc déplacer les masses totales de blocs suivantes de la boîte B à la boîte A : 10 g, 20 g, 30 g, 50 g, 60 g, 70 g et 80 g. (Pouvez-vous voir comment obtenir chacune de ces masses en utilisant les blocs de la boîte B et pourquoi d'autres masses ne sont pas possibles ?)
Si Jasmine déplace 10 g de la boîte B à la boîte A, elle doit déplacer des blocs dont la masse totale est de 65 g + 10 g = 75 g de la boîte A à la boîte B afin que la boîte A contienne 65 g de moins qu'avant et que la boîte B contienne 65 g de plus qu'avant.
Pour chacune des autres masses qui peuvent être déplacées de la boîte B à la boîte A, on écrit la masse totale des blocs que Jasmine doit déplacer de la boîte A à la boîte B. Remarquons que dans chaque cas, la masse déplacée de la boîte A à la boîte B doit être 65 g de plus que celle déplacée de la boîte B à la boîte A.

Masse déplacée de la boîte B à la boîte A	Masse déplacée de la boîte A à la boîte B
10 g	75 g
20 g	85 g
30 g	95 g
50 g	115 g
60 g	125 g
70 g	135 g
80 g	145 g

On détermine ensuite s'il est possible pour Jasmine de choisir des blocs dans la boîte A dont la masse totale est indiquée dans la deuxième colonne du tableau ci-dessus.
Rappelons que la boîte A contenait initialement un bloc de 100 g, un bloc de 20 g et trois blocs de 5 g.
Est-il possible pour Jasmine de choisir des blocs dans la boîte A dont la masse totale est d'exactement 75 g ?
Puisque le bloc de 100 g est trop lourd et que les autres blocs ont une masse totale inférieure à 75 g, alors il n'est pas possible de choisir des blocs de la boîte A dont la masse totale est d'exactement 75 g.
Dans le tableau ci-dessous, on détermine lesquelles des masses totales peuvent être déplacées de la boîte A à la boîte B.
Pour ces masses possibles, on indique le nombre correspondant de blocs que Jasmine doit déplacer de la boîte A à la boîte B.

Masse totale déplacée de la boîte B à la boîte A	Masse totale déplacée de la boîte A à la boîte B	Est-il possible de déplacer cette masse de la boîte A à la boîte B ?	Nombre de blocs déplacés de la boîte A à la boîte B
10 g	75 g	Non	
20 g	85 g	Non	
30 g	95 g	Non	
50 g	115 g	Oui ; un 100 g, trois 5 g	4
60 g	125 g	Oui ; un 100 g, un 20 g, un 5 g	3
70 g	135 g	Oui ; un 100 g, un 20 g, trois 5 g	5
80 g	145 g	Non	

D'après le tableau ci-dessus, le plus petit nombre de blocs que Jasmine aurait pu déplacer de la boîte A à la boîte B est 3. Dans ce cas, Jasmine déplace une masse totale de $1(100\text{ g}) + 1(20\text{ g}) + 1(5\text{ g}) = 125$ g de la boîte A à la boîte B et elle déplace une masse totale de $1(50\text{ g}) + 1(10\text{ g}) = 60$ g de la boîte B à la boîte A.
Donc, la boîte B contient $125\text{ g} - 60\text{ g} = 65$ g de plus qu'avant (et la boîte A contient 65 g de moins qu'avant), ce qu'il fallait.

Réponse : (A)

19. Le rapport initial du nombre de bonbons rouges au nombre de bonbons bleus était de 3 : 5. Donc, le nombre de bonbons rouges était un multiple de 3 et le nombre de bonbons bleus était un multiple de 5 (les deux étant des entiers strictement positifs qui préservent le rapport initial de 3 : 5).
Par exemple, il aurait pu y avoir $3 \times 1 = 3$ bonbons rouges et $5 \times 1 = 5$ bonbons bleus, ou

$3 \times 2 = 6$ bonbons rouges et $5 \times 2 = 10$ bonbons bleus, ou $3 \times 3 = 9$ bonbons rouges et $5 \times 3 = 15$ bonbons bleus et ainsi de suite.
On dresse la liste des possibilités dans le tableau ci-dessous et on considère le nombre de bonbons rouges et bleus et le rapport résultant après avoir enlevé trois bonbons bleus du plat.

Nombres possibles de bonbons rouges et bleus au début	3 rouges, 5 bleus	6 rouges, 10 bleus	9 rouges, 15 bleus	12 rouges, 20 bleus
Nombre de bonbons rouges et bleus après qu'on en ait enlevé 3 bleus	3 rouges, 2 bleus	6 rouges, 7 bleus	9 rouges, 12 bleus	12 rouges, 17 bleus
Nouveau rapport du nombre de bonbons rouges au nombre de bonbons bleus	3 : 2	6 : 7	9 : 12 = 3 : 4	12 : 17

Nombres possibles de bonbons rouges et bleus au début	15 rouges, 25 bleus	18 rouges, 30 bleus
Nombre de bonbons rouges et bleus après qu'on en ait enlevé 3 bleus	15 rouges, 22 bleus	18 rouges, 27 bleus
Nouveau rapport du nombre de bonbons rouges au nombre de bonbons bleus	15 : 22	18 : 27 = 2 : 3

S'il y avait 18 bonbons rouges et 30 bonbons bleus dans le plat au début (remarquons que $18 : 30 = 3 : 5$), alors lorsqu'on enlève trois bonbons bleus, le rapport du nombre de bonbons rouges au nombre de bonbons bleus devient 18 : 27, ce qui est égal à 2 : 3, ce qu'il fallait.
Donc, il y avait $30 - 18 = 12$ bonbons bleus de plus que de bonbons rouges dans le plat avant que l'on enlève les trois bonbons bleus.

Réponse : (B)

20. Les lettres A, B, C et D représentent respectivement Anyu, Brad, Chi, et Diego. On peut donc représenter leur ordre initial par $ABCD$.
Lorsque les amis changent de positions, A n'est pas dans la 1re position, il y a donc exactement 3 cas à considérer : A est dans la 2e position, A est dans la 3e position ou A est dans la 4e position. Pour chacun de ces 3 cas, on compte le nombre d'arrangements des lettres B, C et D.

1er cas : A est dans la 2e position
Puisque A est dans la 2e position, B peut être dans n'importe laquelle des 3 autres positions (1re, 3e ou 4e).
Si B est dans la 1re position, il n'y a qu'un seul arrangement possible : $BADC$ (puisque C et D ne peuvent être, respectivement, dans la 3e et 4e position).
Si B est dans la 3e position, il n'y a qu'un seul arrangement possible : $DABC$ (puisque D ne peut être dans la 4e position).
Si B est dans la 4e position, il n'y a qu'un seul arrangement possible : $CADB$ (puisque C ne peut être dans la 3e position).
Il y a donc 3 arrangements possibles lorsque A est dans la 2e position.

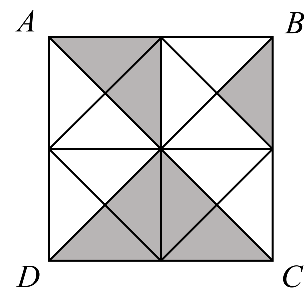
2e cas : A est dans la 3e position
Puisque A est dans la 3e position, C peut être dans n'importe laquelle des 3 autres positions.
Comme dans le 1er cas, on peut démontrer qu'il n'y a que 3 arrangements possibles dans ce 2e cas : $CDAB$, $DCAB$ et $BDAC$.

3^e^ cas : A est dans la 4^e^ position
Puisque A est dans la 4^e^ position, D peut être dans n'importe laquelle des 3 autres positions. De même, il n'y a que 3 arrangements possibles dans ce 3^e^ cas : $DCBA$, $CDBA$ et $BCDA$.

Les amis peuvent donc se réarranger de $3+3+3 = 9$ façons différentes pour que chaque personne ne soit pas dans sa position initiale.
(Un tel réarrangement d'une liste dans laquelle aucun élément ne parait dans sa position initiale est appelé un *dérangement*.)

RÉPONSE : (B)

21. On construit d'abord les trois diagonales manquantes à l'intérieur des petits carrés, comme dans la figure ci-contre.
Les deux diagonales à l'intérieur de chacun de ces 4 petits carrés divisent chaque petit carré en 4 triangles identiques d'aire égale.
Donc, le carré $ABCD$ est divisé en $4 \times 4 = 16$ tels triangles.
Puisque 7 de ces triangles sont ombrés, alors $\frac{7}{16}$ du carré $ABCD$ est ombré.



RÉPONSE : (C)

22. *Solution 1*
Puisque la somme de p, q, r, s et la somme de q, r, s, t sont toutes deux égales à 35 et que chaque somme contient l'addition de q, r et s, alors $p = t$.
De même, puisque la somme de q, r, s, t et la somme de r, s, t, u sont toutes deux égales à 35 et que chaque somme contient l'addition de r, s et t, alors $q = u$.
On peut démontrer de la même manière que $r = v$ et $s = w$.
D'après les observations ci-dessus, on peut réécrire la liste p, q, r, s, t, u, v, w sous la forme p, q, r, s, p, q, r, s.
Puisque q et v ont une somme de 14 et $r = v$, alors q et r ont une somme de 14.
Puisque p, q, r et s ont une somme de 35 et que la somme de q et r est égale à 14, alors la somme de p et s est égale à $35 - 14 = 21$.
La valeur de p est aussi grande que possible lorsque la valeur de s est aussi petite que possible.
Puisque s est un entier strictement positif, alors sa plus petite valeur possible est égale à 1.
Donc, la plus grande valeur possible de p est égale à $21 - 1 = 20$.
(Remarquons que $20, 4, 10, 1, 20, 4, 10, 1$ est un exemple d'une telle liste.)

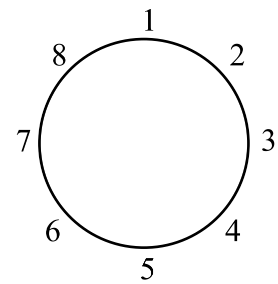
Solution 2
Les valeurs de n'importe quel groupe de quatre lettres consécutives ont une somme de 35.
Donc, $p+q+r+s = 35$ et $t+u+v+w = 35$, d'où on a $(p+q+r+s)+(t+u+v+w) = 35+35 = 70$.
On replace les huit lettres de la somme dans l'ordre suivant :

$$p + q + r + s + t + u + v + w = (p + w) + (q + v) + (r + s + t + u) = 70$$

Puisqu'on sait que $r + s + t + u = 35$ (la somme des valeurs de quatre lettres consécutives) et que $q + v = 14$, alors on a $(p + w) + 14 + 35 = 70$, d'où $p + w = 21$.
La valeur de p est aussi grande que possible lorsque la valeur de w est aussi petite que possible.
Puisque w est un entier strictement positif, alors sa plus petite valeur possible est égale à 1.
On a donc $p + 1 = 21$, d'où on voit que la plus grande valeur possible de p est 20.
(Remarquons que $20, 12, 2, 1, 20, 12, 2, 1$ est un exemple d'une telle liste.)

RÉPONSE : (C)

23. Catherine a placé les 8 lettres autour du cercle dans un ordre aléatoire.
On représente la position de la lettre L par le nombre 1, puis, en se déplaçant dans le sens des aiguilles d'une montre, la position de la lettre suivante par le nombre 2 et ainsi de suite jusqu'à la position 8, comme dans la figure ci-contre.



À partir de la position 1, Jacques écrit une liste commençant par L, puis, en se déplaçant dans le sens des aiguilles d'une montre autour du cercle, écrit chaque troisième lettre qu'il n'a pas encore écrite.
Donc, les trois premières lettres de sa liste sont celles aux positions 1, 4 et 7.
En procédant ainsi, les trois lettres suivantes qui n'ont pas encore été écrites sont celles aux positions 8, 2 et 3 (on a déjà écrit la lettre à la position 1), Jacques écrit donc la lettre à la position 3.
Les trois lettres suivantes qui n'ont pas encore été écrites sont celles aux positions 5, 6 et 8 (on a déjà écrit les lettres aux positions 4 et 7), Jacques écrit donc la lettre à la position 8.
À ce point-ci, Jacques a écrit les lettres aux positions 1, 4, 7, 3 et 8.
Les trois lettres suivantes qui n'ont pas encore été écrites sont celles aux positions 2, 5 et 6 (on a déjà écrit les lettres aux positions 1, 3 et 4), Jacques écrit donc la lettre à la position 6.
À ce point-ci, les seules lettres qui n'ont pas encore été écrites sont celles aux positions 2 et 5.
À son dernier tour, Jacques avait écrit la lettre à la position 6. Donc, il saute la lettre à la position 2, saute la lettre à la position 5, puis écrit la lettre à la position 2.
Finalement, Jacques écrit la lettre finale à la position 5.
Donc, dans l'ordre, Jacques a écrit les lettres aux positions 1, 4, 7, 3, 8, 6, 2 et 5.
Puisque Jacques avait écrit la liste L, M, N, O, P, Q, R, S, alors L est la lettre à la position 1 de l'ordre dans lequel Catherine avait placé les lettres, M est la lettre à la position 4, N est la lettre à la position 7 et ainsi de suite.
Donc, les lettres de la liste de Catherine paraissent dans l'ordre L, R, O, M, S, Q, N, P autour du cercle dans le sens des aiguilles d'une montre.

RÉPONSE : (C)

24. Un palindrome supérieur à 10 000 et inférieur à 100 000 est un entier strictement positif de 5 chiffres de la forme $abcba$, a, b et c étant des chiffres et $a \neq 0$.
Un entier strictement positif est un multiple de 18 s'il est à la fois un multiple de 2 et un multiple de 9 (et un entier strictement positif qui est à la fois un multiple de 2 et un multiple de 9 est donc un multiple de 18).
Un entier strictement positif est un multiple de 2 s'il est pair. Donc, le chiffre a est égal à $2, 4, 6$ ou 8 (rappelons que $a \neq 0$).
Un entier strictement positif est un multiple de 9 lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de 9. Donc, $a + b + c + b + a$ ou $2a + 2b + c$ est un multiple de 9.
On considère ensuite les quatre cas possibles, un cas pour chacune des valeurs possibles de a.

<u>1^er^ cas</u> : $a = 2$
Lorsque $a = 2$, il faut que $2a + 2b + c = 4 + 2b + c$ soit égal à un multiple de 9.
Puisque $4 + 2b + c \geq 4$, alors le plus petit multiple de 9 que $4 + 2b + c$ puisse égaler est 9.
Puisque $b \leq 9$ et $c \leq 9$, alors $4 + 2b + c$ est au plus $4 + 2(9) + 9 = 31$.
Donc, $4 + 2b + c$ peut égaler $9, 18$ ou 27, d'où $2b + c$ peut donc égaler, respectivement, $5, 14$ ou 23.

Ensuite, on détermine les valeurs possibles de b et c telles que $2b + c$ soit égal à $5, 14$ ou 23.

$2b + c = 5$	$2b + c = 14$	$2b + c = 23$
$b = 2, c = 1$	$b = 7, c = 0$	$b = 9, c = 5$
$b = 1, c = 3$	$b = 6, c = 2$	$b = 8, c = 7$
$b = 0, c = 5$	$b = 5, c = 4$	$b = 7, c = 9$
	$b = 4, c = 6$	
	$b = 3, c = 8$	

Donc, lorsque $a = 2$, il y a $3 + 5 + 3 = 11$ tels palindromes.

2$^{\text{e}}$ cas : $a = 4$
Lorsque $a = 4$, il faut que $2a + 2b + c = 8 + 2b + c$ soit égal à un multiple de 9.
Puisque $8 + 2b + c \geq 8$, alors le plus petit multiple de 9 que $8 + 2b + c$ puisse égaler est 9.
Puisque $b \leq 9$ et $c \leq 9$, alors $8 + 2b + c$ est au plus $8 + 2(9) + 9 = 35$.
Donc, $8 + 2b + c$ peut égaler $9, 18$ ou 27, d'où $2b + c$ peut donc égaler, respectivement, $1, 10$ ou 19.
Ensuite, on détermine les valeurs possibles de b et c telles que $2b + c$ soit égal à $1, 10$ ou 19.

$2b + c = 1$	$2b + c = 10$	$2b + c = 19$
$b = 0, c = 1$	$b = 5, c = 0$	$b = 9, c = 1$
	$b = 4, c = 2$	$b = 8, c = 3$
	$b = 3, c = 4$	$b = 7, c = 5$
	$b = 2, c = 6$	$b = 6, c = 7$
	$b = 1, c = 8$	$b = 5, c = 9$

Donc, lorsque $a = 4$, il y a $1 + 5 + 5 = 11$ tels palindromes.

3$^{\text{e}}$ cas : $a = 6$
Lorsque $a = 6$, il faut que $2a + 2b + c = 12 + 2b + c$ soit égal à un multiple de 9.
Puisque $12 + 2b + c \geq 12$ et $12 + 2b + c \leq 12 + 2(9) + 9 = 39$, alors $12 + 2b + c$ peut égaler 18, 27 ou 36, d'où $2b + c$ peut donc égaler, respectivement, 6, 15 ou 24.

$2b + c = 6$	$2b + c = 15$	$2b + c = 24$
$b = 3, c = 0$	$b = 7, c = 1$	$b = 9, c = 6$
$b = 2, c = 2$	$b = 6, c = 3$	$b = 8, c = 8$
$b = 1, c = 4$	$b = 5, c = 5$	
$b = 0, c = 6$	$b = 4, c = 7$	
	$b = 3, c = 9$	

Donc, lorsque $a = 6$, il y a $4 + 5 + 2 = 11$ tels palindromes.

<u>4^e cas</u> : $a = 8$

Lorsque $a = 8$, il faut que $2a + 2b + c = 16 + 2b + c$ soit égal à un multiple de 9.
Puisque $16 + 2b + c \geq 16$ et $16 + 2b + c \leq 16 + 2(9) + 9 = 43$, alors $16 + 2b + c$ peut égaler 18, 27 ou 36, d'où $2b + c$ peut donc égaler, respectivement, 2, 11 ou 20.

$2b + c = 2$	$2b + c = 11$	$2b + c = 20$
$b = 1, c = 0$	$b = 5, c = 1$	$b = 9, c = 2$
$b = 0, c = 2$	$b = 4, c = 3$	$b = 8, c = 4$
	$b = 3, c = 5$	$b = 7, c = 6$
	$b = 2, c = 7$	$b = 6, c = 8$
	$b = 1, c = 9$	

Donc, lorsque $a = 8$, il y a $2 + 5 + 4 = 11$ tels palindromes.
Donc, on a en tout $11 + 11 + 11 + 11 = 44$ palindromes supérieurs à 10 000 et inférieurs à 100 000 qui sont des multiples de 18.

Réponse : (D)

25. Après tous les échanges, il y a 4 boules dans chaque sac. Donc, si un sac contient exactement 3 couleurs différentes de boules, alors il doit contenir exactement 2 boules de la même couleur et 2 boules ayant chacune une couleur différente de toutes les autres boules du sac.
Parmi les 8 boules dans les deux sacs, il y a 2 boules rouges et 2 boules noires et chacune des boules restantes a une couleur différente de toutes les autres boules.
Ainsi, après tous les échanges, l'un des sacs doit contenir les deux boules rouges et l'autre les deux boules noires.
Puisque le sac de Becca contenait initialement les deux boules noires et que Becca ne déplace qu'une seule boule de son sac à celui d'Arjun, il est impossible que le sac d'Arjun contienne les deux boules noires après tous les échanges.
Cela nous indique que si chaque sac contient exactement 3 couleurs différentes de boules après tous les échanges, alors le sac d'Arjun contient les 2 boules rouges et le sac de Becca contient les 2 boules noires.
Supposons que la première lettre de chaque couleur représente une boule de cette couleur.
Donc, le sac d'Arjun contenait d'abord $RRVJM$ tandis que celui de Becca contenait NNO.
Pour le choix de la première boule, on a exactement deux cas à considérer :
1^er cas : La première boule que l'on déplace du sac d'Arjun à celui de Becca est R, ou
2^e cas : La première boule que l'on déplace du sac d'Arjun à celui de Becca n'est pas R (elle est donc l'une de V, J ou M).
On commence par le 1^er cas et on détermine la probabilité pour que chaque sac contienne exactement 3 couleurs différentes de boules après tous les échanges.

<u>1^er cas</u> : La première boule que l'on déplace du sac d'Arjun à celui de Becca est R.

Puisque le sac d'Arjun contenait initialement 5 boules, dont 2 sont R, alors la probabilité pour qu'on choisisse R comme première boule à déplacer est égale à $\frac{2}{5}$.
Après que R a été déplacée du sac d'Arjun à celui de Becca, le sac d'Arjun contient $RVJM$ et le sac de Becca contient $NNOR$.
Puisque le sac d'Arjun doit contenir les deux R après tous les échanges et que Becca ne déplace qu'une seule boule de son sac à celui d'Arjun, alors la prochaine boule à déplacer doit être R.
Le sac de Becca contient 4 boules, dont 1 est R. Donc, dans ce cas, la probabilité pour qu'on choisisse R comme deuxième boule à déplacer est égale à $\frac{1}{4}$.
Après qu'on a déplacé les deux premières boules, le sac d'Arjun contient $RRVJM$ et le sac de Becca contient NNO.

Enfin, on doit choisir une boule du sac d'Arjun que l'on doit déplacer au sac de Becca.
Puisque le sac d'Arjun doit contenir les deux R après tous les échanges, alors la boule que l'on doit déplacer du sac d'Arjun à celui de Becca doit être l'une de V, J ou M. La probabilité pour qu'on choisisse une telle boule est égale à $\frac{3}{5}$.
Si la première boule que l'on déplace du sac d'Arjun à celui de Becca est R, alors la probabilité pour que chaque sac contienne exactement 3 couleurs différentes de boules après tous les échanges est égale au produit des probabilités individuelles de choisir chacune des 3 boules, soit $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$.

<u>2e cas</u> : La première boule que l'on déplace du sac d'Arjun à celui de Becca est l'une de V, J ou M.

Puisque le sac d'Arjun contenait initialement 5 boules, alors la probabilité pour qu'on choisisse l'une de V, J ou M comme première boule à déplacer est égale à $\frac{3}{5}$.
Après que l'une de V, J ou M a été déplacée du sac d'Arjun à celui de Becca, le sac d'Arjun contient RR et deux boules parmi V, J et M, tandis que le sac de Becca contient NNO et une boule parmi V, J et M.
Pour le choix de la deuxième boule, il y a exactement deux cas à considérer. Donc, on sépare le 2e cas en ces deux cas séparés.
Cas 2a : La première boule que l'on déplace du sac d'Arjun à celui de Becca est l'une de V, J ou M, tandis que la boule que l'on déplace du sac de Becca à celui d'Arjun est N, ou
Cas 2b : La première boule que l'on déplace du sac d'Arjun à celui de Becca est l'une de V, J ou M, tandis que la boule que l'on déplace du sac de Becca à celui d'Arjun n'est pas N (c'est-à-dire qu'elle est soit O, soit la première boule déplacée).
On commence par le cas 2a et on détermine la probabilité pour que chaque sac contienne exactement 3 couleurs différentes de boules après tous les échanges.

<u>Cas 2a</u> : La première boule que l'on déplace du sac d'Arjun à celui de Becca est l'une de V, J ou M, tandis que la boule que l'on déplace du sac de Becca à celui d'Arjun est N.
On a déjà déterminé que la probabilité de choisir l'une de V, J ou M comme première boule à déplacer est égale à $\frac{3}{5}$.
À ce point-ci, le sac de Becca contient 4 boules, dont 2 sont N, alors la probabilité pour qu'on choisisse N est égale à $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
Après que N a été déplacée du sac de Becca à celui d'Arjun, le sac d'Arjun contient RRN et deux boules parmi V, J et M, tandis que le sac de Becca contient NO et une boule parmi V, J et M.
Puisque le sac de Becca doit contenir les deux N après tous les échanges, alors la dernière boule que l'on doit choisir doit être N.
Le sac d'Arjun contient 5 boules, dont 1 est N. Donc, dans ce cas, la probabilité pour qu'on choisisse N comme dernière boule à déplacer est égale à $\frac{1}{5}$.
Si la première boule que l'on déplace du sac d'Arjun à celui de Becca est l'une de V, J ou M, et que la boule que l'on déplace du sac de Becca à celui d'Arjun est N, alors la probabilité pour que chaque sac contienne exactement 3 couleurs différentes de boules après tous les échanges est égale au produit des probabilités individuelles de choisir chacune des 3 boules, soit $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{50}$.

Cas 2b : La première boule que l'on déplace du sac d'Arjun à celui de Becca est l'une de V, J ou M, tandis que la boule que l'on déplace du sac de Becca à celui d'Arjun est soit O, soit la première boule déplacée (V, J ou M)
La probabilité de choisir l'une de V, J ou M comme première boule à déplacer est égale à $\frac{3}{5}$.

À ce point-ci, le sac de Becca contient 4 boules, dont 2 sont N, alors la probabilité pour qu'on ne choisisse pas N est égale à $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Après que cette boule (O, V, J ou M) a été déplacée du sac de Becca à celui d'Arjun, le sac d'Arjun contient RR et trois boules parmi O, V, J et M, tandis que le sac de Becca contient deux N et une boule parmi O, V, J ou M.
Puisque le sac d'Arjun doit contenir les deux R après tous les échanges, alors la dernière boule que l'on doit choisir doit être l'une des 3 boules dans le sac d'Arjun qui n'est pas R.
Le sac d'Arjun contient 5 boules, dont 2 sont R. Donc, dans ce cas, la probabilité pour qu'on ne choisisse pas R comme dernière boule à déplacer est égale à $\frac{3}{5}$.

Si la première boule que l'on déplace du sac d'Arjun à celui de Becca est l'une de V, J ou M, et que la boule que l'on déplace du sac de Becca à celui d'Arjun n'est pas B, alors la probabilité pour que chaque sac contienne exactement 3 couleurs différentes de boules après tous les échanges est égale au produit des probabilités individuelles de choisir chacune des 3 boules,
soit $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{50}$.

Donc, la probabilité pour que chaque sac contienne exactement 3 couleurs différentes de boules après tous les échanges est égale à $\frac{3}{50} + \frac{3}{50} + \frac{9}{50} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$.

Réponse : (A)

8e année

1. Le pentagone régulier a cinq côtés de longueur 2 cm.
Le pentagone a donc un périmètre de 5×2 cm $= 10$ cm.

Réponse : (E)

2. Les faces visibles du cube contiennent 1, 3 et 5 points.
Donc, les trois faces cachées du cube contiennent 2, 4 et 6 points.
Donc, la somme des points sur les trois faces cachées du cube est égale à $2 + 4 + 6 = 12$.

Réponse : (D)

3. Soit n le nombre en question. Donc, l'expression $n+5$ représente « un nombre augmenté de cinq ».
Donc, l'équation qui représente le mieux « un nombre augmenté de cinq est égal à 15 » est $n + 5 = 15$.

Réponse : (C)

4. D'après le diagramme, les nombres approximatifs de figurines vendues au cours des années 2016, 2017, 2018, 2019, 2020 et 2021 sont respectivement 20, 35, 40, 38, 60 et 75.
En commençant par 2016 et 2017, les augmentations (ou diminutions) de la vente de figurines entre deux années consécutives sont approximativement de $35-20 = 15$, $40-35 = 5$, $38-40 = -2$ (une diminution de 2), $60 - 38 = 22$ et $75 - 60 = 15$.
Donc, la plus grande augmentation de la vente de figurines a été d'environ 22 et s'est produite entre 2019 et 2020.

Réponse : (D)

5. On continue de compter à rebours pour obtenir :

$$72, 61, 50, 39, 28, 17, 6, -5, \ldots$$

Le dernier nombre supérieur à 0 que l'on puisse obtenir est 6.

Réponse : (C)

6. Puisque $\angle ABC = 90°$, alors $44 + x + x = 90$ ou $2x = 90 - 44$, d'où $2x = 46$ ou $x = 23$.

Réponse : (B)

7. Puisque $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ et $1^2 = 1$, alors chacun des choix (A) -1, (B) $\frac{5}{4}$ et (C) 1^2 est au moins 1 de plus ou 1 de moins que 0.
Puisque $-\frac{4}{5} = -0{,}8$ et $-0{,}8$ est plus près de 0 que ne l'est 0,9, alors $-\frac{4}{5}$ est la valeur la plus près de zéro.

Réponse : (D)

8. *Solution 1*
La valeur totale de 4 pièces de 25 ¢ est égale à 1,00 \$.
Donc, la valeur de $4 \times 100 = 400$ pièces de 25 ¢ est égale à 1,00 \$ $\times$ 100 = 100,00 \$.
Puisque le bocal contient initialement 267 pièces de 25 ¢, alors il faut ajouter $400 - 267 = 133$ pièces de 25 ¢ au bocal pour que la valeur totale des pièces soit égale à 100,00 \$.

Solution 2
La valeur totale de 267 pièces de 25 ¢ est égale à 0,25 \$ $\times$ 267 = 66,75 \$. Donc, on doit ajouter 100,00 \$ − 66,75 \$ = 33,25 \$ au bocal pour porter la valeur totale des pièces dans le bocal à 100,00 \$.

Donc, on doit ajouter $\dfrac{33{,}25\ \$}{0{,}25\ \$} = 133$ pièces de 25 ¢ au bocal.

Réponse : (D)

9. Chaque paquet de cartes de vœux contient $10 - 8 = 2$ enveloppes de plus que de cartes.
Ainsi, 3 paquets de cartes de vœux contiennent $3 \times 2 = 6$ enveloppes de plus que de cartes et 4 paquets de cartes de vœux contiennent $4 \times 2 = 8$ enveloppes de plus que de cartes.
Julie a commencé avec 7 cartes et aucune enveloppe.
Pour avoir plus d'enveloppes que de cartes, Julie doit acheter suffisamment de paquets pour compenser la différence entre le nombre de cartes et le nombre d'enveloppes (cette différence étant égale à 7).
Donc, Julie doit acheter au moins 4 paquets de cartes pour avoir plus d'enveloppes que de cartes.
Remarque : On peut vérifier que Julie a moins d'enveloppes que de cartes si elle n'achète que 3 paquets de cartes de vœux ; dans ce cas, elle aura $3 \times 8 + 7 = 31$ cartes et $3 \times 10 = 30$ enveloppes.
En revanche, si elle achète 4 paquets de cartes de vœux, elle aura plus d'enveloppes que de cartes ; dans ce cas, elle aura $4 \times 8 + 7 = 39$ cartes et $4 \times 10 = 40$ enveloppes, ce qu'il fallait.

Réponse : (B)

10. La distance horizontale entre le point (a, b) et l'axe des ordonnées est de a unités tandis que la distance horizontale entre le point (c, d) et l'axe des ordonnées est de c unités.
Puisque la distance horizontale entre le point (a, b) et l'axe des ordonnées est supérieure à la distance horizontale entre le point (c, d) et l'axe des ordonnées, alors $a > c$. L'énoncé (E) est donc vrai.

Considérons pourquoi chacun des autres énoncés est faux.
Les points (a, b) and (c,d) sont tous deux situés au-dessus de l'axe des abscisses, donc $b > 0$ et $d > 0$.
Le point (e, f) est situé au-dessous de l'axe des abscisses. Donc, $f < 0$.
Puisque $b > 0$ et $f < 0$, alors $b > f$, d'où l'énoncé (C) est donc faux.
De plus, la distance verticale entre le point (a, b) et l'axe des abscisses est de b unités tandis que la distance verticale entre le point (c, d) et l'axe des abscisses est de d unités.
Puisque la distance verticale entre le point (a, b) et l'axe des abscisses est supérieure à la distance verticale entre le point (c, d) et l'axe des abscisses, alors $b > d$, d'où l'énoncé (B) est donc faux.

De même, les points (a, b) et (c, d) sont tous deux situés à droite de l'axe des ordonnées, donc $a > 0$ et $c > 0$.
Le point (e, f) est situé à gauche de l'axe des ordonnées, donc $e < 0$.
Puisque $a > 0$ et $e < 0$, alors $a > e$, d'où l'énoncé (D) est donc faux.
Puisque $c > 0$ et $e < 0$, alors $c > e$, d'où l'énoncé (A) est également faux.

Réponse : (E)

11. Dans la suite, les lettres de l'alphabet se répètent par blocs de 26 lettres.
Donc, 10 tels blocs contiennent $10 \times 26 = 260$ lettres.
Chaque bloc de 26 lettres se termine par la lettre Z. Donc, la 260e lettre de la suite est Z.
En remontant dans la suite à partir de cette 260e lettre, on obtient que la 259e lettre est Y et que la 258e lettre est X.

Réponse : (C)

12. Le premier mercredi du mois doit avoir lieu dans les 7 premiers jours du mois, c'est-à-dire le 1er, 2^{e}, 3^{e}, 4^{e}, 5^{e}, 6^{e} ou 7^{e} jour du mois.
Le deuxième mercredi d'un mois a lieu 7 jours après le premier mercredi de ce mois, et le troisième mercredi d'un mois a lieu 14 jours après le premier mercredi de ce mois.
En ajoutant 14 jours à chacune des dates possibles pour le premier mercredi du mois, on obtient que le troisième mercredi du mois doit avoir lieu le 15^{e}, 16^{e}, 17^{e}, 18^{e}, 19^{e}, 20^{e} ou 21^{e} jour de ce mois.
Parmi les choix de réponse, le jour férié ne peut tomber sur le 22^{e} jour de ce mois.
Réponse : (B)

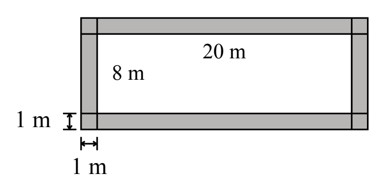
13. La probabilité que la flèche s'arrête au hasard sur le secteur le plus grand est de 50 %, soit $\frac{1}{2}$.
Donc, la probabilité qu'elle s'arrête sur le deuxième secteur le plus grand est égale à 1 sur 3, soit $\frac{1}{3}$.
Donc, la probabilité qu'elle s'arrête sur le secteur le plus petit est égale à $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{6}{6}-\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$.
Réponse : (C)

14. Un nombre positif est divisible à la fois par 3 et par 4 s'il est divisible par 12 (et un nombre positif qui est divisible par 12 est également divisible par 3 et par 4).
Les nombres positifs de deux chiffres qui sont divisibles par 12 (et donc par 3 et par 4) sont $12, 24, 36, 48, 60, 72, 84$ et 96.
Parmi ces nombres, $60, 72, 84$ et 96 ont un chiffre des dizaines qui est supérieur à celui des unités.
Donc, il y a 4 nombres positifs de deux chiffres ayant ces propriétés.
Réponse : (A)

15. *Solution 1*
L'aire de l'allée est égale à l'aire totale de la piscine et de l'allée moins l'aire de la piscine.
Autrement dit, si l'aire de l'allée est représentée par A_a et que l'aire de la piscine est représentée par A_p, alors $A_a = (A_a + A_p) - A_p$.
L'aire totale de la piscine et de l'allée est égale à l'aire du rectangle mesurant 22 m $\times$ 10 m.
La longueur de 22 m est obtenue à partir de la longueur de 20 m de la piscine plus la largeur de l'allée (soit 1 m) à chaque bout de la piscine.
De même, la largeur de 10 m est obtenue à partir de la largeur de 8 m de la piscine plus la largeur de l'allée (soit 1 m) de chaque côté de la piscine.
Donc, l'aire de l'allée est égale à

$$A_a = (A_a + A_p) - A_p = (22 \text{ m} \times 10 \text{ m}) - (20 \text{ m} \times 8 \text{ m}) = 220 \text{ m}^2 - 160 \text{ m}^2 = 60 \text{ m}^2$$

Solution 2
On prolonge chaque côté de la piscine de 1 m dans chaque direction.
Cela divise la surface de l'allée en quatre carrés de 1 m $\times$ 1 m (soit les coins), en deux rectangles de 20 m $\times$ 1 m (le long des côtés de 20 m de la piscine) et en deux rectangles de 8 m $\times$ 1 m (le long des côtés de 8 m de la piscine), comme dans la figure ci-contre.



Donc, l'aire de l'allée est égale à

$$4 \times (1 \text{ m } \times 1 \text{ m}) + 2 \times (20 \text{ m } \times 1 \text{ m}) + 2 \times (8 \text{ m } \times 1 \text{ m}) = 4 \text{ m}^2 + 40 \text{ m}^2 + 16 \text{ m}^2 = 60 \text{ m}^2$$

Réponse : (B)

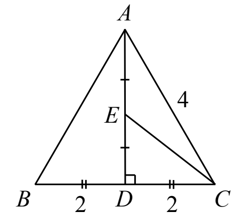
16. D'après le diagramme de Venn, 5 élèves jouent d'un instrument et font du sport, 15 élèves jouent d'un instrument (et ne font pas de sport), et 20 élèves font du sport (et ne jouent pas d'un instrument).
Donc, il y a $5 + 15 + 20 = 40$ élèves qui jouent d'un instrument ou qui font du sport ou qui font les deux. Donc, il y a $50 - 40 = 10$ élèves qui ne jouent pas d'un instrument et ne font pas de sport. Ces 10 élèves représentent donc $\frac{10}{50} \times 100\ \% = 20\ \%$ des 50 élèves.
Réponse : (C)

17. Soit x le nombre de balles de golf dans la boîte G. Donc, l'expression $\frac{2}{3}x$ représente le nombre de balles de golf dans la boîte F.
Dans ce cas, le nombre total de balles de golf est égal à $x + \frac{2}{3}x = \frac{3}{3}x + \frac{2}{3}x = \frac{5}{3}x$.
On a donc $\frac{5}{3}x = 150$.
On multiplie les deux membres de l'équation par 3 pour obtenir $5x = 150 \times 3 = 450$.
On divise les deux membres de l'équation par 5 pour obtenir $x = \frac{450}{5} = 90$. Il y a donc 90 balles de golf dans la boîte G.
Le nombre de balles de golf dans la boîte F est égal à $150 - 90 = 60$, il y a donc $90 - 60 = 30$ balles de golf de moins dans la boîte F que dans la boîte G.
(Par ailleurs, on aurait pu supposer que l'expression $3x$ représente le nombre de balles de golf dans la boîte G et que l'expression $2x$ représente le nombre de balles de golf dans la boîte F.)
Réponse : (B)

18. La Figure 1 est formée de 7 carreaux.
La Figure 2 est formée de $5 + 7$ carreaux.
La Figure 3 est formée de $5 + 5 + 7 = 2 \times 5 + 7$ carreaux.
La Figure 4 sera formée de $5 + 5 + 5 + 7 = 3 \times 5 + 7$ carreaux.
La Figure 5 sera formée de $5 + 5 + 5 + 5 + 7 = 4 \times 5 + 7$ carreaux.
Donc, le nombre de groupes de 5 carreaux dont on a besoin pour former chaque figure suivante augmente de 1 à chaque fois.
De plus, dans chaque cas, le nombre de groupes de 5 carreaux nécessaires est 1 de moins que le numéro de la figure.
Par exemple, la Figure 6 sera formée en utilisant 5 groupes de 5 carreaux plus 7 carreaux supplémentaires. De façon plus générale, on peut dire que la Figure N nécessitera $N - 1$ groupes de 5 carreaux, plus 7 carreaux supplémentaires.
Puisque $2022 = 403 \times 5 + 7$, la figure formée de 2022 carreaux est composée de 403 groupes de 5 carreaux et 7 carreaux supplémentaires.
Donc, $N - 1 = 403$, d'où $N = 404$. Donc, la Figure 404 est formée de 2022 carreaux.
Réponse : (C)

19. Il y a 60 minutes dans une heure. Donc, il y a $4 \times 60 = 240$ minutes entre 7 heures du matin et 11 heures du matin.
Puisque Mathieu a fait une pause de 40 minutes, alors il a conduit pendant
$240 - 40 = 200$ minutes.
Donc, la vitesse moyenne de Mathieu pendant le trajet de 300 km était égale à $\dfrac{300 \text{ km}}{200 \text{ minutes}}$ ou 1,5 km/min.
Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure et que Mathieu voyageait à une vitesse moyenne de 1,5 km par minute, alors il a voyagé à une vitesse moyenne de $1{,}5 \times 60$ km par heure ou 90 km/h.
Réponse : (C)

20. Puisque le triangle équilatéral ABC a des côtés de longueur 4, alors $AB = BC = AC = 4$.
Le milieu de BC est D, donc $BD = CD = 2$.
Le milieu de AD est E, donc $AE = ED$.
Puisque $AB = AC$ et que D est le milieu de BC, alors AD et BC sont perpendiculaires, comme dans la figure ci-contre.



Le triangle ADC est rectangle. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a $(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$ ou $4^2 = (AD)^2 + 2^2$, d'où $(AD)^2 = 16 - 4 = 12$.
De même, le triangle EDC est rectangle. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a $(EC)^2 = (ED)^2 + (DC)^2$ ou $(EC)^2 = (ED)^2 + 2^2$.
Puisque $ED = \frac{1}{2}AD$, alors $(ED)^2 = \frac{1}{2}AD \times \frac{1}{2}AD$ ou $(ED)^2 = \frac{1}{4}(AD)^2$.
Puisque $AD^2 = 12$, alors $(ED)^2 = \frac{1}{4} \times 12 = 3$.
On a donc $(EC)^2 = 3 + 2^2$, soit $(EC)^2 = 7$.

Réponse : (A)

21. Un carré parfait est un nombre que l'on peut exprimer comme le produit de deux entiers égaux.
D'après cette définition, 0 est un carré parfait puisque $0 \times 0 = 0$.
Puisque le produit de 0 et de tout entier strictement positif est égal à 0, alors tout entier strictement positif est un diviseur de 0. Donc, 0 a un nombre infini de diviseurs positifs.
Les trois carrés parfaits suivants sont $1^2 = 1$, $2^2 = 4$ et $3^2 = 9$.
Chacun d'eux admet au maximum trois diviseurs positifs.
Le carré parfait suivant est $4^2 = 16$.
Les diviseurs positifs de 16 sont 1, 2, 4, 8 et 16.
Donc, 16 est un carré parfait qui admet exactement cinq diviseurs positifs.
Les autres carrés parfaits inférieurs à 100 sont 25, 36, 49, 64 et 81.
Les carrés parfaits 25 et 49 admettent tous deux exactement trois diviseurs positifs.
Les diviseurs positifs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.
Les diviseurs positifs de 64 sont 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 64.
Donc, 36 et 64 ont chacun plus de cinq diviseurs positifs.
Enfin, les diviseurs positifs de 81 sont 1, 3, 9, 27 et 81.
Les deux carrés parfaits inférieurs à 100 qui admettent exactement cinq diviseurs positifs sont 16 et 81. Ces derniers ont une somme de $16 + 81 = 97$.

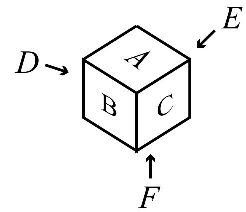
Réponse : (E)

22. Les valeurs de n'importe quel groupe de trois lettres consécutives ont une somme de 35.
Donc, $r + s + t = 35$ et $s + t + u = 35$.
Puisque chacune de ces équations est égale à 35, alors les membres de gauche des deux équations sont égales l'une à l'autre.
Autrement dit, $r + s + t = s + t + u$. De plus, puisque $s + t$ parait dans les deux membres de l'équation, alors on a $r = u$.
Puisque $q + u = 15$ et $r = u$, alors $q + r = 15$.
Puisque $p + q + r = 35$ et $q + r = 15$, alors $p = 35 - 15 = 20$.
On a donc

$$p + q + r + s + t + u + v = p + (q + r + s) + (t + u + v) = 20 + 35 + 35 = 90$$

Réponse : (D)

23. Dans la figure ci-contre, on construit le cube à partir du développement et on positionne le cube de manière que la face F soit la face inférieure, que la face A soit la face supérieure et que les faces B, C, D et E soient les faces verticales (latérales).
Étant donné que la fourmi commence son parcours sur la face A, elle a quatre choix possibles pour la prochaine face qu'elle visitera. C'est-à-dire que la fourmi peut marcher de A à n'importe laquelle des quatre faces verticales B, C, D ou E.



À partir de chacune de ces faces verticales, la fourmi peut marcher jusqu'à F (la face inférieure) ou jusqu'à une face verticale adjacente.
On considère ces deux possibilités sous forme de cas (soit les 1^{er} et 2^{e} cas ci-dessous). Pour chacun des cas, on considère le nombre d'ordres possibles dans lesquels la fourmi peut visiter les faces.

1^{er} cas : À partir d'une des faces verticales, le deuxième déplacement de la fourmi est vers la face F (soit la face inférieure)

Remarquons d'abord qu'il n'y a qu'un seul choix pour le 2^{e} déplacement de la fourmi dans ce cas.
À partir de F, le 3^{e} déplacement de la fourmi la ramènera à une face verticale.
La fourmi ne peut pas retourner sur la face verticale qu'elle a déjà visitée.
De plus, la fourmi ne peut pas se déplacer vers la face verticale opposée à la face verticale qu'elle a déjà visitée. Pourquoi ?
Considérons par exemple que la fourmi visite, dans l'ordre, A, B, F.
Si la fourmi se rend sur E (la face opposée à B) lors de son 3^{e} déplacement, alors son 4^{e} déplacement doit se faire vers C ou D (puisqu'elle a visité les quatre autres faces).
Cependant, une fois sur C ou D, la fourmi est "piégée" puisqu'elle a déjà visité les quatre faces adjacentes et ne peut donc pas se rendre sur la sixième face.
Donc, à partir de F, le 3^{e} déplacement de la fourmi doit se faire vers une face verticale qui n'est ni la face déjà visitée, ni la face opposée à la face déjà visitée. Il y a donc deux choix possibles pour son prochain déplacement.
De cette face verticale, la fourmi doit marcher vers une autre face verticale (puisqu'elle a déjà visité A et F).
L'une de ces faces adjacentes a déjà été visitée et l'autre non. Donc, le seul choix de la fourmi est de se déplacer vers la face verticale adjacente qu'elle n'a pas visitée pour son 4^{e} déplacement.
Par exemple, si l'ordre est A, B, F, C, alors la fourmi doit se déplacer vers E.
Enfin, le dernier déplacement de la fourmi doit être vers la face verticale adjacente qu'elle n'a pas visitée.
Pour résumer le 1^{er} cas, il y a 4 choix pour le premier déplacement de A vers l'une des faces verticales, 1 choix pour le 2^{e} déplacement (vers F), 2 choix pour le 3^{e} déplacement, et 1 choix pour chacun des deux derniers déplacements. Donc, il y a $4 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 = 8$ chemins possibles.

2^{e} cas : Le 2^{e} déplacement de la fourmi est vers l'une des faces verticales adjacentes.

Il y a deux faces verticales qui sont adjacentes à chaque face verticale. Donc, la fourmi a 2 choix pour son 2^{e} déplacement.
Pour son 3^{e} déplacement, la fourmi peut marcher vers la face inférieure F ou elle peut marcher vers la face adjacente qui n'a pas été visitée.
Soit cas 2a le premier de ces cas et cas 2b le second.

Cas 2a : Le 3^{e} déplacement de la fourmi est vers F

Remarquons d'abord qu'il n'y a qu'un seul choix pour le 3^{e} déplacement de la fourmi dans ce cas.

À partir de F, le 4e déplacement de la fourmi la ramènera à une face verticale.
La fourmi ne peut pas retourner sur l'une des deux faces verticales qu'elle a déjà visitées. Il y a donc deux choix pour le 4e déplacement de la fourmi.
Par exemple, si l'ordre est A, B, C, F, le quatrième déplacement de la fourmi peut être vers D ou vers E.
Le dernier déplacement de la fourmi est vers la dernière face verticale et il n'y a donc qu'un seul choix.
Pour résumer le cas 2a, il y a 4 choix pour le premier déplacement de A vers l'une des faces verticales, 2 choix pour le 2e déplacement (vers une face verticale adjacente), 1 choix pour le 3e déplacement (vers F), 2 choix pour le 4e déplacement et 1 choix pour le dernier déplacement. Donc, il y a $4 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 16$ chemins possibles.

<u>Case 2b</u> : Le 3e déplacement de la fourmi est vers la face adjacente qui n'a pas été visitée.

Remarquons d'abord qu'il n'y a qu'un seul choix pour le 3e déplacement de la fourmi dans ce cas.
À ce stade, la fourmi a visité trois faces verticales.
Le 4e déplacement de la fourmi peut être vers F ou vers la dernière face verticale.
C'est-à-dire que la fourmi a 2 choix pour son 4e déplacement.
Si le 4e déplacement de la fourmi est vers F, alors son dernier déplacement est vers la dernière face verticale.
Si le 4e déplacement de la fourmi est vers la dernière face verticale, alors son dernier déplacement est vers la face F.
C'est-à-dire qu'une fois que la fourmi a choisi son 4e déplacement, elle n'a qu'un seul choix pour son dernier déplacement.
Pour résumer le cas 2b, il y a 4 choix pour le premier déplacement de A vers l'une des faces verticales, 2 choix pour le 2e déplacement (vers une face verticale adjacente), 1 choix pour le 3e déplacement (vers la face verticale adjacente), 2 choix pour le 4e déplacement (vers F ou vers la dernière face verticale) et 1 choix pour le dernier déplacement. Donc, il y a $4 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 16$ chemins possibles.

Donc, si la fourmi commence son parcours sur la face A et qu'elle ne visite chaque face qu'une seule fois, alors il y a $8 + 16 + 16 = 40$ chemins possibles.

Réponse : (E)

24. *Solution 1*

Remarquons d'abord que les nombres ayant cette propriété ne peuvent avoir deux chiffres qui sont des zéros. Pourquoi ?
Donc, les nombres ayant cette propriété ont exactement un zéro ou ils n'ont aucun zéro.
Considérons chacun de ces deux cas séparément.

<u>1er cas</u> : Supposons que le nombre ait exactement un chiffre 0.
Chacun des nombres supérieurs à 100 et inférieurs à 999 est un nombre de trois chiffres. Donc, dans ce cas, le nombre a également deux chiffres non nuls.
Puisque l'un des chiffres est égal à la somme des deux autres et que l'un des chiffres est zéro, alors les deux chiffres non nuls doivent être égaux l'un à l'autre.
Les deux chiffres non nuls peuvent égaler n'importe quel nombre entier de 1 à 9. Il y a donc 9 valeurs possibles pour les chiffres non nuls.
Pour chacune de ces 9 possibilités, le chiffre zéro peut être le deuxième chiffre du nombre ou le troisième (le premier chiffre ne peut pas être zéro).
Autrement dit, il y a 9 valeurs possibles pour les chiffres non nuls et on peut disposer les trois

chiffres de 2 façons. Donc, $9 \times 2 = 18$ tels nombres satisfont à la propriété donnée.
En voici quelques exemples : 101 et 110, 202 et 220, et ainsi de suite.

<u>2^e cas</u> : Supposons que le nombre n'ait aucun chiffre égal à zéro.
Soit a, b et c les trois chiffres du nombre, ces chiffres étant disposés dans un ordre quelconque.
Soit a le plus grand chiffre. Donc $a = b + c$.
Si $a = b$, alors $c = 0$, ce qui contredit notre supposition selon laquelle aucun chiffre n'est égal à 0.
De même, si $a = c$, alors $b = 0$, on a donc la même contradiction.
Donc, $a > b$ et $a > c$.
Si $a = 1$, alors $b = c = 0$ (puisque $a > b$ et $a > c$). Or, on aurait $a \neq b + c$.
Donc, a est supérieur ou égal à 2.
Si $a = 2$, alors $b = c = 1$, ces valeurs de b et c étant donc les seules valeurs possibles lorsque $a = 2$.
Dans ce cas, les 3 arrangements de ces chiffres sont les nombres 112, 121 et 211, chacun ayant la propriété souhaitée.
Si $a = 3$, alors b et c sont égaux à 1 et 2 dans un ordre quelconque.
Dans ce cas, les 6 arrangements de ces chiffres sont les nombres 123, 132, 213, 231, 312 et 321, chacun ayant la propriété souhaitée.
D'après ces cas, on remarque que si $b = c$, alors on peut disposer les chiffres de 3 façons différentes.
Cependant, si les trois chiffres sont différents les uns des autres, il existe 3 choix pour le premier chiffre, 2 choix pour le deuxième chiffre et 1 choix pour le troisième chiffre. Il y a donc $3 \times 2 \times 1 = 6$ arrangements des chiffres.
Dans le tableau suivant, on considère toutes les valeurs possibles de a, b, c et on compte le nombre d'arrangements.

Valeurs de a	Valeurs de b et c avec le nombre d'arrangements dans les crochets [ ]				Nombre total d'arrangements
2	1,1 [3]				3
3	1,2 [6]				6
4	1,3 [6]	2,2 [3]			9
5	1,4 [6]	2,3 [6]			12
6	1,5 [6]	2,4 [6]	3,3 [3]		15
7	1,6 [6]	2,5 [6]	3,4 [6]		18
8	1,7 [6]	2,6 [6]	3,5 [6]	4,4 [3]	21
9	1,8 [6]	2,7 [6]	3,6 [6]	4,5 [6]	24

Donc, il y a $18 + 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 = 126$ nombres qui satisfont à la propriété donnée.

Solution 2
Remarquons d'abord que les nombres ayant la propriété donnée ne peuvent avoir trois chiffres égaux. Pourquoi ?
Donc, les nombres ayant cette propriété ont exactement deux chiffres égaux ou trois chiffres différents.
Considérons chacun de ces deux cas séparément.

<u>1^er cas</u> : Supposons que le nombre ait exactement deux chiffres égaux.
Les deux chiffres égaux ne peuvent pas être 0 puisque le troisième chiffre serait également 0.
Par exemple, si chacun des deux chiffres égaux est 1, alors il y a deux possibilités pour le troisième chiffre.

Le troisième chiffre peut être 2 (puisque $1 + 1 = 2$) ou le troisième chiffre peut être 0 (puisque $1 + 0 = 1$).
Dans les cas où le troisième chiffre est égal à la somme des deux chiffres égaux, les chiffres égaux peuvent être $1, 2, 3$ ou 4 et le troisième chiffre sera alors, respectivement, $2, 4, 6, 8$.
(Remarquons que les chiffres égaux ne peuvent pas être supérieurs à 4 puisque leur somme serait supérieure à 9.)
Pour chacune de ces 4 possibilités, on peut disposer les chiffres de 3 façons différentes.
Par exemple, lorsque chacun des chiffres égaux est 1 et que le troisième chiffre est 2, les nombres 112, 121 et 211 ont la propriété souhaitée.
Donc, il y a $4 \times 3 = 12$ tels nombres où le troisième chiffre est égal à la somme des deux chiffres égaux.
Dans les cas où deux des chiffres sont égaux et où le troisième chiffre est 0, les chiffres égaux peuvent être n'importe quel nombre entier de 1 à 9.
Pour chacune de ces 9 possibilités, on peut disposer les chiffres de 2 façons.
Par exemple, lorsque chacun des chiffres égaux est 1 et que le troisième chiffre est 0, les nombres 101 et 110 ont la propriété souhaitée.
Donc, il y a $9 \times 2 = 18$ nombres ayant deux chiffres égaux et dont le troisième chiffre est 0.
Au total, il y a $12 + 18 = 30$ nombres ayant deux chiffres égaux et qui satisfont à la propriété donnée.

2^{e} : Supposons que les trois chiffres soient tous différents.
Soit a, b et c les trois chiffres du nombre, ces chiffres étant disposés dans un ordre quelconque avec $a > b > c$.
Puisque a est le plus grand des chiffres, alors $a = b + c$.
Si $a = 1$, alors $b = c = 0$ (puisque $a > b$ et $a > c$). Or, cela n'est pas possible car $b > c$.
De même, si $a = 2$, alors $b = 1$ et $c = 0$, cependant ces chiffres ne satisfont pas la propriété donnée.
Donc, a est supérieur ou égal à 3.
Si $a = 3$, alors $b = 2$ et $c = 1$.
Dans ce cas, les 6 arrangements de ces chiffres sont les nombres 123, 132, 213, 231, 312, 321, chacun ayant la propriété souhaitée.
On considère toutes les valeurs possibles de a, b, c dans le tableau suivant.

Valeurs de a	Valeurs de b, c			
3	2,1			
4	3,1			
5	4,1	3,2		
6	5,1	4,2		
7	6,1	5,2	4,3	
8	7,1	6,2	5,3	
9	8,1	7,2	6,3	5,4

Pour chacune des 16 possibilités dans le tableau ci-dessus, on peut disposer les trois chiffres de 6 façons. Donc, il y a $16 \times 6 = 96$ tels nombres.
Au total, il y a $30 + 96 = 126$ nombres qui satisfont à la propriété donnée.

Réponse : (B)

25. Sur les 4200 échantillons à tester, soit x le nombre d'échantillons contenant de la myrtille. Puisque chaque échantillon contient ou non de la myrtille, alors il y a $4200 - x$ échantillons qui n'en contiennent pas.

L'élève A a correctement identifié 90 % des x échantillons contenant de la myrtille

Donc, l'élève A rapporte qu'il y a $\frac{90}{100}x$ échantillons contenant de la myrtille.

L'élève A a correctement identifié 88% des $4200 - x$ échantillons qui ne contiennent pas de la myrtille.

Donc, il a mal identifié $100\% - 88\% = 12\%$ de ces échantillons en rapportant qu'elle contenaient de la myrtille.

(Donc, lorsqu'un élève avait tort en rapportant qu'un échantillon ne contenait "pas de myrtille", cela signifie que l'échantillon en contenait en réalité.)

Donc, l'élève A rapporte que $\frac{12}{100}(4200 - x)$ de ces échantillons contiennent de la myrtille.

Au total, l'élève A rapporte que $\frac{90}{100}x + \frac{12}{100}(4200 - x)$ échantillons contiennent de la myrtille.

De même, l'élève B rapporte que $\frac{98}{100}x + \frac{14}{100}(4200 - x)$ échantillons contiennent de la myrtille et l'élève C rapporte que $\frac{2m}{100}x + \left(\frac{100-4m}{100}\right)(4200 - x)$ échantillons contiennent de la myrtille.

L'élève B rapporte qu'il y a 315 échantillons de plus contenant de la myrtille que ce que l'élève A a rapporté. Donc,

$$\left(\tfrac{98}{100}x + \tfrac{14}{100}(4200 - x)\right) - \left(\tfrac{90}{100}x + \tfrac{12}{100}(4200 - x)\right) = 315$$

Pour se débarrasser des fractions, on multiplie les deux membres de l'équation par 100 pour obtenir

$$98x + 14(4200 - x) - (90x + 12(4200 - x)) = 31\,500$$

On a donc

$$\begin{aligned}
98x + 14(4200 - x) - (90x + 12(4200 - x)) &= 31\,500 \\
98x + 58\,800 - 14x - (90x + 50\,400 - 12x) &= 31\,500 \\
98x + 58\,800 - 14x - 90x - 50\,400 + 12x &= 31\,500 \\
6x + 8400 &= 31\,500 \\
6x &= 23\,100 \\
x &= 3850
\end{aligned}$$

Donc, il y a 3850 échantillons qui contiennent de la myrtille et $4200 - 3850 = 350$ échantillons qui n'en contiennent pas.

Ensemble, les trois étudiants rapportent que

$$\left(\tfrac{98}{100}(3850) + \tfrac{14}{100}(350)\right) + \left(\tfrac{90}{100}(3850) + \tfrac{12}{100}(350)\right) + \left(\tfrac{2m}{100}(3850) + \left(\tfrac{100-4m}{100}\right)(350)\right)$$

échantillons contiennent de la myrtille.

On simplifie l'expression pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{98}{100}(3850) + \tfrac{14}{100}(350)\right) + \left(\tfrac{90}{100}(3850) + \tfrac{12}{100}(350)\right) + \left(\tfrac{2m}{100}(3850) + \left(\tfrac{100-4m}{100}\right)(350)\right) \\
={}& 3773 + 49 + 3465 + 42 + 77m + 350 - 14m \\
={}& 7679 + 63m
\end{aligned}$$

Pour des entiers strictement positifs m, les trois élèves rapportent donc que $7679 + 63m$ échantillons contiennent de la myrtille.

Si $7679 + 63m$ est supérieur à 8000, alors $63m$ est supérieur à $8000 - 7679 = 321$, d'où m est donc supérieur à $\frac{321}{63} \approx 5{,}09$.
Puisque m est un entier strictement positif, alors m est supérieur ou égal à 6.
De même, si $7679 + 63m$ est inférieur à 9000, alors $63m$ est inférieur à $9000 - 7679 = 1321$, d'où m est donc inférieur à $\frac{1321}{63} \approx 20{,}97$.
Puisque m est un entier strictement positif, alors m est inférieur ou égal à 20.
Donc, on veut tous les entiers m de 6 à 20 pour lesquels $7679 + 63m$ est égal à un multiple de 5.
Un entier est un multiple de 5 lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5.
Le chiffre des unités du nombre total d'échantillons, $7679 + 63m$, est obtenu en additionnant le chiffre des unités de 7679 (soit 9) et le chiffre des unités de la valeur de $63m$.
Donc, $7679+63m$ est un multiple de 5 uniquement lorsque la valeur de $63m$ a 1 ou 6 pour chiffre des unités (puisque $9 + 1$ a 0 pour chiffre des unités et que $9 + 6$ a 5 pour chiffre des unités).
La valeur de $63m$ a 1 pour chiffre des unités uniquement lorsque m a 7 pour chiffre des unités (puisque 3×7 a 1 pour chiffre des unités).
La valeur de $63m$ a 6 pour chiffre des unités uniquement lorsque m a 2 pour chiffre des unités (puisque 3×2 a 6 pour chiffre des unités).
Les valeurs de m de 6 à 20 qui ont 7 ou 2 pour chiffre des unités sont $7, 12$ et 17.
On peut vérifier que lorsque m est égal à $7, 12$ et 17, les valeurs de $7679 + 63m$ sont, respectivement, 8120, 8435 et 8750, ce qu'il fallait.
La somme de toutes les valeurs de m telles que le nombre total d'échantillons que les trois élèves déclarent comme contenant de la myrtille soit un multiple de 5 situé entre 8000 et 9000 est égale à $7 + 12 + 17 = 36$.

Réponse : (B)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2021

(7e et 8e années – Secondaire I et II)

le mercredi 12 mai 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 13 mai 2021
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Jeff Anderson
Terry Bae
Jacquelene Bailey
Shane Bauman
Jenn Brewster
Ersal Cahit
Diana Castañeda Santos
Sarah Chan
Ashely Congi
Serge D'Alessio
Fiona Dunbar
Mike Eden
Sandy Emms
Barry Ferguson
Steve Furino
Lucie Galinon
Robert Garbary
Rob Gleeson
Sandy Graham
Conrad Hewitt
Angie Hildebrand
Carrie Knoll
Wesley Korir
Judith Koeller
Laura Kreuzer
Bev Marshman
Paul McGrath
Jen Nelson
Ian Payne
J.P. Pretti
Alexandra Rideout
Nick Rollick
Kim Schnarr
Ashley Sorensen
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga
Christine Vender
Heather Vo
Bonnie Yi

Comité du concours Gauss

Ashley Sorensen (présidente), University of Waterloo, Waterloo, ON
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
Sarah Garrett, Mitchell Woods P.S., Guelph, ON
Kora Lee Gallant, Madeline Symonds M.S., Hammonds Plains, NS
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
Clay Kellough, Fort Richmond C.I., Winnipeg, MB
David Matthews, Waterloo, ON
John McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
Nick Rollick, University of Waterloo, Waterloo, ON
David Switzer, Scott Central P.S., Sandford, ON
Rachael Verbruggen, University of Waterloo, Waterloo, ON
Robert Wong, Edmonton, AB
Chris Wu, Ledbury Park E. and M.S., Toronto, ON
Lori Yee, William Dunbar P.S., Pickering, ON

7^e année

1. Lorsqu'on place les cinq nombres en ordre du plus grand au plus petit, on obtient : 10 000, 1000, 100, 10, 1.
Le nombre du milieu est 100.

Réponse : (D)

2. Chaque côté du carré a une longueur de 5 cm.
Le carré a donc un périmètre de 4×5 cm $= 20$ cm.

Réponse : (A)

3. Le membre de droite de l'égalité est $10 + 20 = 30$.
L'égalité est donc vraie lorsque le membre de gauche est égal à 30.
Puisque $5 + 25 = 30$, alors on doit placer 25 dans la case afin que l'égalité soit vraie.

Réponse : (E)

4. D'après le diagramme, Dan a passé six heures à faire ses devoirs, Joe a passé trois heures à faire ses devoirs, Bob a passé cinq heures à faire ses devoirs, Susie a passé quatre heures à faire ses devoirs et Grace a passé une heure à faire ses devoirs.
Lorsqu'on additionne leurs temps individuels ensemble, Bob et Grace ont passé le même montant de temps que Dan à faire leurs devoirs.

Réponse : (C)

5. Chacune des cinq fractions est positive. Donc, la plus petite de ces fractions est la fraction la plus près de 0.
Puisque chacune des fractions a 1 comme numérateur, alors la plus petite de ces fractions est celle ayant le plus grand dénominateur.
Parmi les choix de réponse, la fraction la plus près de 0 est donc $\frac{1}{9}$.

Réponse : (E)

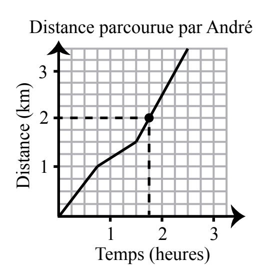
6. Si le sac contenait un total de 6 bonbons et que 5 de ces bonbons étaient rouges, alors la probabilité que Judith choisisse un bonbon rouge du sac serait de $\frac{5}{6}$.
Donc, il pourrait y avoir un nombre total de 6 bonbons dans le sac.
Pouvez-vous expliquer pourquoi chacune des quatre autres réponses n'est pas possible ?

Réponse : (D)

7. Tout point situé à droite de l'axe des ordonnées a une abscisse positive.
Tout point situé sous l'axe des abscisses a une ordonnée négative.
Puisque $P(x, y)$ est situé à droite de l'axe des ordonnées et sous l'axe des abscisses, alors la valeur de x est positive et la valeur de y est négative.

Réponse : (B)

8. On trouve d'abord la distance de 2 km sur l'axe vertical.
Ensuite, on trouve le point sur le graphique linéaire qui correspond à une distance parcourue de 2 km.
Le temps en heures correspondant à ce point est trois quarts d'heure de plus qu'une heure.
Puisqu'un quart d'heure est égal à quinze minutes, alors trois quarts d'heure correspondent à quarante-cinq minutes. Donc, André parcourt les 2 premiers kilomètres en une heure trois quarts (soit 1 heure et 45 minutes).

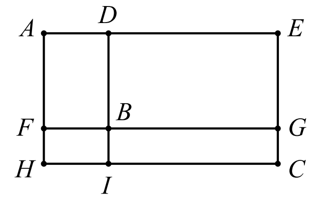


Réponse : (C)

9. Les cinq nombres $5, 6, 7, 8, 9$ se répètent de manière à produire la régularité que l'on voit dans l'énoncé du problème.
Donc, le 5^e nombre de la régularité est 9, le 10^e nombre de la régularité est 9, le 15^e nombre de la régularité est 9 et ainsi de suite.
Puisque 220 est un multiple de 5, le 220^e nombre de la régularité est également 9, d'où on comprend donc que le 221^e nombre de la régularité est 5.

Réponse : (A)

10. Dans la figure ci-contre, on nomme les points d'intersection des segments de droites.
À partir de A, la fourmi peut se déplacer vers la droite (se rendant ainsi à D) ou vers le bas (se rendant ainsi à F).



Supposons que la fourmi se déplace d'abord vers la droite (arrivant ainsi à D).
À partir de D, si la fourmi continue de se déplacer vers la droite pour se rendre à E, le chemin ne peut passer par B (puisque la fourmi peut uniquement se déplacer vers la droite ou vers le bas).
Donc, à partir de D, la fourmi doit se déplacer vers le bas de manière à arriver à B.

À partir de B, il y a deux chemins qui se terminent à C ; l'un des chemins passe par G avant de se rendre à C tandis que l'autre chemin passe par I avant de se rendre à C.
Donc, si la fourmi se déplace d'abord vers la droite, il y a deux chemins qui peuvent la mener à C, soit les chemins $A - D - B - G - C$ et $A - D - B - I - C$.

Supposons que la fourmi se déplace d'abord vers le bas (arrivant ainsi à F).
À partir de F, si la fourmi continue de se déplacer vers le bas pour se rendre à H, le chemin ne peut passer par B (puisque la fourmi peut uniquement se déplacer vers la droite ou vers le bas).
Donc, à partir de F, la fourmi doit se déplacer vers la droite de manière à arriver à B.
À partir de B, il y a deux chemins (que l'on a identifié précédemment) qui se terminent à C.
Donc, si la fourmi se déplace d'abord vers le bas, il y a deux chemins qui peuvent la mener à C, soit les chemins $A - F - B - G - C$ et $A - F - B - I - C$.

Donc, 4 chemins différents mènent de A à C en passant par B.

Réponse : (C)

11. *Solution 1*
On écrit la liste de nombres :

$$4, 11, 18, 25, 32, 39, 46, 53, \ldots$$

Parmi les choix de réponse, 46 est le nombre qui parait dans la liste de Laila.

Solution 2
Laila commence sa liste à 4 et chaque nombre après le premier est 7 de plus que le nombre précédent.
Donc, chacun des nombres de sa liste sera 4 de plus qu'un multiple de 7.
Puisque 42 est un multiple de 7 ($6 \times 7 = 42$), alors $42 + 4 = 46$ paraitra dans la liste de Laila.

Réponse : (B)

12. Si l'on plie une lettre invariante par symétrie verticale le long de son axe de symétrie, les deux moitiés de la lettre sont parfaitement appariées.
Parmi les lettres données, trois lettres (soit H, O et X) sont invariantes par symétrie verticale :

H L O R X D P E

Réponse : (C)

13. Puisque le triangle BCE est équilatéral, alors chacun de ses angles intérieurs a une mesure de $60°$.
Puisque deux angles opposés par le sommet sont congrus, alors $\angle DEA = \angle BEC = 60°$.
Les trois angles intérieurs du triangle ADE ont des mesures dont la somme est de $180°$.
Donc, $x° + 90° + 60° = 180°$ ou $x + 150 = 180$, d'où $x = 30$.

Réponse : (E)

14. Étant donné trois entiers consécutifs, le plus petit entier est un de moins que l'entier du milieu et le plus grand entier est un de plus que l'entier du milieu.
Par exemple, 10, 11 et 12 sont trois entiers consécutifs où 10 est un de moins que l'entier du milieu 11 tandis que 12 est un de plus que ce dernier.
Donc, le plus petit entier et le plus grand entier ont une somme égale à deux fois l'entier du milieu. (Dans l'exemple, $10 + 12 = 2 \times 11$.)
Donc, la somme de trois entiers consécutifs est égale à 3 fois l'entier du milieu. Donc, la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
Parmi les choix de réponse, 21 est le seul multiple de 3.
Par ailleurs, on aurait pu résoudre ce problème en procédant par tâtonnements ; ce qui nous aurait mené à $6 + 7 + 8 = 21$.

Réponse : (D)

15. Parmi les entiers supérieurs à 13931 et inférieurs à 14000, aucun n'est un palindrome. (Avant de continuer, essayez de voir pourquoi cela est vrai.)
Soit N le prochain palindrome supérieur à 13931.
Partons du principe que N est entre 14000 et 15000 (comme on le démontrera, cette supposition s'avérera vraie).
Un palindrome de cinq chiffres est un nombre de la forme $abcba$. Autrement dit, le chiffre des dizaines de mille, a, doit être égal au chiffre des unités tandis que le chiffre des milliers, b, doit être égal au chiffre des dizaines.
Puisque N est au moins 14000, alors 1 est la plus petite valeur possible de a (le chiffre des dizaines de mille).
Puisque 1 est la plus petite valeur possible de a et que N est au moins 14000, alors 4 est la plus petite valeur possible de b (le chiffre des milliers). Donc, on peut exprimer N de la forme $14c41$.
Si le chiffre des centaines, c, est aussi petit que possible, alors l'entier N est 14041. Les chiffres de cet entier ont une somme de $1 + 4 + 0 + 4 + 1 = 10$.

Réponse : (D)

16. Les diviseurs positifs de 14 sont $1, 2, 7$ et 14.
Les diviseurs positifs de 21 sont $1, 3, 7$ et 21.
Les diviseurs positifs de 28 sont 1,2,4,7,14 et 28.
Les diviseurs positifs de 35 sont 1,5,7 et 35.
Les diviseurs positifs de 42 sont $1, 2, 3, 6, 7, 14, 21$ et 42.
Parmi les nombres de la liste, trois ont exactement 4 diviseurs positifs (soit 14, 21 et 35).

Réponse : (C)

17. Le rabais total qui a été appliqué à la chemise, sous forme de pourcentage, ne dépend aucunement du prix régulier de la chemise.
Autrement dit, on peut choisir n'importe quelle valeur comme prix régulier de la chemise pour ensuite calculer le rabais total (sous forme de pourcentage) qui a été appliqué à la chemise après les deux soldes.
Puisque les rabais sont exprimés sous forme de pourcentages, on peut simplifier les calculs en supposant que le prix régulier de la chemise était de 100 \$.
Si le prix régulier de la chemise est de 100 \$ et que ce prix est réduit de 50 %, alors le deuxième prix est égal à la moitié de 100 \$, soit 50 \$.
Une réduction de 40% du deuxième prix (50 \$) est un rabais de $\frac{40}{100} \times 50\ \$ = 0{,}40 \times 50\ \$ = 20\ \$$.
Après les deux soldes, la chemise ayant un prix régulier de 100 \$ coûte désormais $50\ \$ - 20\ \$ = 30\ \$$, le rabais total est donc de $100\ \$ - 30\ \$ = 70\ \$$.
Or, il faut exprimer ce rabais total sous la forme d'un pourcentage, donc : $\frac{70\ \$}{100\ \$} \times 100\ \% = 70\ \%$.

Réponse : (C)

18. Le périmètre du triangle ABC est égal à $AB + BC + CA$ ou $AB + BM + MC + CA$.
Puisque $AB = CA$ et $BM = MC$, alors $AB + BM$ est égal à la moitié du périmètre du triangle ABC.
Le triangle ABC a un périmètre de 64. On a donc $AB + BM = \frac{1}{2} \times 64 = 32$.
Le triangle ABM a un périmètre de 40. On a donc $AM + AB + BM = 40$.
Puisque $AB + BM = 32$, alors $AM = 40 - 32 = 8$.

Réponse : (B)

19. On nomme A et B les chiffres manquants dans les cases. On choisit les chiffres A et B de 1 à 9 de manière que $A \neq B$.

$$\begin{array}{r} 5\,\boxed{A} \\ -\ \boxed{B}\,5 \\ \hline \end{array}$$

Le nombre de deux chiffres du haut, soit $5A$, est au plus 59.
Donc, B ne peut égaler 6, 7, 8 ou 9 sinon le résultat de la soustraction serait un entier négatif.
Si $B = 5$, alors le nombre inférieur est 55. Donc, afin que le résultat de la soustraction soit positif, A pourrait égaler 6, 7, 8 ou 9 (les résultats étant respectivement 1, 2, 3 et 4).
Donc, il y a 4 résultats positifs possibles dans ce cas.
Si $B = 4$, alors le nombre inférieur est 45. Donc, afin que le résultat de la soustraction soit positif, A pourrait égaler chacun des entiers de 1 à 9, à l'exception de 4 (puisque $A \neq B$).
Dans ce cas, les résultats de la soustraction sont respectivement 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13 et 14. Donc, il y a 8 résultats positifs possibles lorsque $B = 4$.
Si $B = 3$, alors le nombre inférieur est 35. Donc, afin que le résultat de la soustraction soit positif, A pourrait égaler 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 (les résultats étant respectivement 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23 et 24).
Donc, il y a 8 résultats positifs possibles lorsque $B = 3$.
De même, il y a 8 résultats positifs possibles lorsque $B = 2$ et 8 résultats positifs possibles lorsque $B = 1$ (chacun des résultats étant distinct des autres).
En tout, il y a $4 + (8 \times 4) = 36$ résultats positifs possibles.

Réponse : (A)

20. Le tableau ci-dessous représente les sommes possibles lorsqu'on jette deux dés réguliers.
Chaque somme en gras est un nombre premier.

Nombre sur la face supérieure du premier dé

Nombre sur la face supérieure du second dé

	1	2	3	4	5	6
1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**
2	**3**	4	**5**	6	**7**	8
3	4	**5**	6	**7**	8	9
4	**5**	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	**11**
6	**7**	8	9	10	**11**	12

D'après le tableau ci-dessus, le nombre total de résultats possibles est égal à $6 \times 6 = 36$.
Parmi ces résultats possibles, 15 ont un nombre premier comme somme.
Donc, la probabilité que la somme des nombres sur les faces supérieures soit un nombre premier est égale à $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Réponse : (A)

21. On considère d'abord les cas où l'on soustrait 1 de nombres commençant par 1 et ayant un petit nombre de zéros :

$$\begin{array}{r} 10 \\ -1 \\ \hline 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 \\ -1 \\ \hline 99 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1000 \\ -1 \\ \hline 999 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10\,000 \\ -1 \\ \hline 9999 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100\,000 \\ -1 \\ \hline 99\,999 \end{array}$$

Dans les exemples ci-dessus, chaque résultat ne comprend que des 9 et le nombre de 9 est égal au nombre de zéros dans le nombre initial. Pouvez-vous expliquer pourquoi cette régularité est maintenue au fur et à mesure que l'on augmente le nombre de zéros ?
Puisque chacun des chiffres du résultat est un 9 et que ces chiffres ont une somme de 252, alors le nombre de 9 dans le résultat est égal à $\frac{252}{9} = 28$.
Le nombre de zéros dans le nombre initial est égal au nombre de 9 dans le résultat, soit 28.

Réponse : (B)

22. Le périmètre de la Figure 1 est composé de 4 côtés horizontaux de rectangles (chacun de ces côtés ayant une longueur de 10 cm) et de 4 côtés verticaux de rectangles (chacun de ces côtés ayant une longueur de 5 cm).
Donc, la Figure 1 a un périmètre de $(4 \times 10 \text{ cm}) + (4 \times 5 \text{ cm}) = 40 \text{ cm} + 20 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$.
Le périmètre de la Figure 2 est composé de 4 côtés horizontaux de rectangles (chacun de ces côtés ayant une longueur de 10 cm) et de 6 côtés verticaux de rectangles (chacun de ces côtés ayant une longueur de 5 cm).
Donc, la Figure 2 a un périmètre de $(4 \times 10 \text{ cm}) + (6 \times 5 \text{ cm}) = 40 \text{ cm} + 30 \text{ cm} = 70 \text{ cm}$.
Le périmètre de la Figure 3 est composé de 4 côtés horizontaux de rectangles (chacun de ces côtés ayant une longueur de 10 cm) et de 8 côtés verticaux de rectangles (chacun de ces côtés ayant une longueur de 5 cm).

Donc, la Figure 3 a un périmètre de $(4 \times 10 \text{ cm}) + (8 \times 5 \text{ cm}) = 40 \text{ cm} + 40 \text{ cm} = 80 \text{ cm}$.
Chaque figure après la Figure 1 est formée en rajoutant deux rectangles au bas de la figure précédente.
Le bord inférieur d'une figure (étant composé de deux côtés de longueur 10 cm) est remplacé par deux côtés de longueur 10 cm lorsqu'on rajoute deux rectangles.
Autrement dit, l'ajout de deux rectangles ne change pas le nombre de côtés de longueur 10 cm qui sont compris dans le périmètre de la nouvelle figure. Donc, chaque figure, peu importe son numéro, aura toujours quatre côtés de longueur 10 cm.
L'ajout de deux nouveaux rectangles ne remplace aucun des côtés verticaux de longueur 5 cm.
Donc, l'ajout des deux rectangles ajoute deux côtés verticaux de 5 cm au périmètre précédent, augmentant le périmètre de la figure précédente de $2 \times 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$.
Autrement dit, le périmètre de la figure 1 est de 60 cm et le périmètre de chaque nouvelle figure est 10 cm de plus que celui de la figure précédente.
Il faut donc ajouter 10 cm soixante-cinq fois pour obtenir un total de 710 cm (soit $60 \text{ cm} + 10 \text{ cm} \times 65 = 710 \text{ cm}$).
Donc, la Figure 66 a un périmètre de 710 cm. Donc, $n = 66$.

Réponse : (C)

23. Afin d'encoder une lettre, James multiplie d'abord son numéro correspondant par 3 et soustrait 5 par la suite. James poursuit ce processus un total de n fois.
Pour décoder un nombre, on doit effectuer les opérations inverses dans l'ordre inverse.
L'opération inverse de la multiplication est la division. L'opération inverse de la soustraction est l'addition.
Donc, pour décoder un nombre, on ajoute 5 puis on divise par 3 et on poursuit ce processus un total de n fois.
Par exemple, lorsque $n = 1$, le nombre 4 (correspondant à la lettre D) est encodé par $4 \times 3 - 5 = 7$. Le nombre 7 est décodé en additionnant 5 et en divisant par 3, $(7 + 5) \div 3 = 4$, ce qui correspond bel et bien à la lettre D, comme il le fallait.
Chaque lettre du message initial de James correspond à un nombre de 1 à 26.
Pour déterminer la valeur de n, on commence d'abord par les quatre nombres encodés donnés $(367, 205, 853, 1339)$ et on poursuit le processus de décodage jusqu'à ce que chacun des nombres résultants soit égal à un nombre de 1 à 26 (puisque chaque lettre du message initial correspond à un nombre de 1 à 26).
Ce processus de décodage est démontré dans le tableau ci-dessous.

	367	205	853	1339
$n = 1$	$(367 + 5) \div 3 = 124$	$(205 + 5) \div 3 = 70$	$(853 + 5) \div 3 = 286$	$(1339 + 5) \div 3 = 448$
$n = 2$	$(124 + 5) \div 3 = 43$	$(70 + 5) \div 3 = 25$	$(286 + 5) \div 3 = 97$	$(448 + 5) \div 3 = 151$
$n = 3$	16	10	34	52
$n = 4$	7	5	13	19
$n = 5$	4	$\frac{10}{3}$	6	8

D'après le tableau, $n = 4$ est la première valeur de n pour laquelle chacun des quatre nombres est égal à un nombre de 1 à 26.
De plus, on remarque que si $n = 5$, le nombre initial correspondant à 205 est $\frac{10}{3}$, ce qui est impossible.
Donc, James a utilisé une valeur de $n = 4$.
(Bien que la question ne l'ait pas demandé, les nombres $7, 5, 13, 19$ correspondent aux lettres G, E, M, S.)

Réponse : (C)

24. On considère d'abord les facteurs premiers (soit la *factorisation première*) de chacun des deux nombres 4 et 4620.

$$4 = 2 \times 2$$

$$4620 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

Soit (a, b) un couple d'entiers strictement positifs ayant un plus grand facteur commun (ou un plus grand commun diviseur) de 4 et un plus petit commun multiple de 4620.
Puisque le couple (a, b) a un plus grand facteur commun de 4, alors a et b sont chacun des multiples de 4. Donc, 2×2 est compris dans chacune des factorisations premières de a et b.
De plus, a et b ne peuvent avoir d'autres facteurs premiers en commun sinon ils auraient un plus grand facteur commun supérieur à 4.
Le plus petit commun multiple de a et b est 4620. Donc, a et b sont chacun inférieurs ou égaux à 4620.
De plus, si a a par exemple des facteurs premiers qui ne sont pas des facteurs premiers de 4620, alors 4620 n'est pas un multiple de a.
Autrement dit, les facteurs premiers de a et b peuvent uniquement être choisis parmi les nombres suivants : $2, 2, 3, 5, 7$ et 11.
En résumé, a est un entier strictement positif de la forme $2 \times 2 \times m$ et b est un entier strictement positif de la forme $2 \times 2 \times n$, m et n remplissant les conditions suivantes :

- m et n sont des entiers strictement positifs
- les facteurs premiers de m ne sont choisis que parmi $3, 5, 7$ et 11
- les facteurs premiers de n ne sont choisis que parmi $3, 5, 7$ et 11
- m et n n'ont pas de facteurs premiers en commun

Dans le tableau ci-dessous, on dresse la liste des valeurs possibles de m et n d'où l'on peut obtenir les couples possibles a et b.
Pour s'assurer de ne pas compter des couples (a, b) deux fois, on suppose que $a \leq b$ et donc que $m \leq n$.

m	n	a	b	(a,b)
1	$3 \times 5 \times 7 \times 11$	$2 \times 2 \times 1$	$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$	(4,4620)
3	$5 \times 7 \times 11$	$2 \times 2 \times 3$	$2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11$	(12,1540)
5	$3 \times 7 \times 11$	$2 \times 2 \times 5$	$2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$	(20,924)
7	$3 \times 5 \times 11$	$2 \times 2 \times 7$	$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11$	(28,660)
11	$3 \times 5 \times 7$	$2 \times 2 \times 11$	$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$	(44,420)
3×5	7×11	$2 \times 2 \times 3 \times 5$	$2 \times 2 \times 7 \times 11$	(60,308)
3×7	5×11	$2 \times 2 \times 3 \times 7$	$2 \times 2 \times 5 \times 11$	(84,220)
3×11	5×7	$2 \times 2 \times 3 \times 11$	$2 \times 2 \times 5 \times 7$	(132,140)

Il y a 8 couples différents de nombres entiers strictement positifs ayant un plus grand facteur commun de 4 et un plus petit commun multiple de 4620.

Réponse : (D)

25. Puisque $12 \times 12 \times 12 = 1728$, Jonas utilise chacune de ses 1728 copies d'un cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$ pour construire un grand cube.
Le développement du cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$ ne contient que les nombres 100 et c. Donc, chacun des nombres paraissant sur les faces extérieures du grand cubes est soit 100, soit c.
Jonas construit le grand cube de manière que la somme des nombres sur les faces extérieures du cube soit aussi grande que possible.
Puisque $c < 100$, Jonas construit le grand cube de manière à maximiser le nombre de fois que 100 parait sur les faces extérieures du cube (et de manière que le nombre c parait aussi peu que possible sur les faces extérieures).

Les cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$ dont les nombres paraissent sur les faces extérieures du grand cube peuvent être classés en trois types que l'on appelle : coin, arête et intérieur.
On voit ces trois types de cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$ dans les figures ci-dessous (ces figures représentent une partie du grand cube de dimensions $12 \times 12 \times 12$).

(i) On voit un cube de type *coin* dans la Figure 1. Il n'y a que 8 tels cubes puisque ces cubes sont situés aux « coins » du grand cube.

(ii) On voit un cube de type *arête* dans la Figure 2. Ces cubes sont situés le long des arêtes du grand cube mais non aux coins de ce dernier. Puisqu'un cube a 12 arêtes et que chaque arête du grand cube contient 10 cubes de type *arête*, alors il y a $10 \times 12 = 120$ cubes de ce type.

(iii) On voit un cube de type *intérieur* dans la Figure 3. Ces cubes sont ceux dont un seul nombre parait sur les faces extérieures du grand cube. Puisqu'un cube a 6 faces et que chaque face du grand cube contient 10×10 cubes de type *intérieur*, alors il y a $6 \times 10 \times 10 = 600$ cubes de ce type.

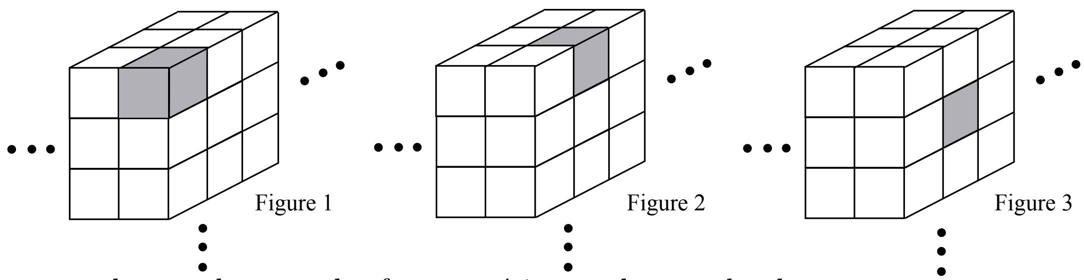


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Soit S la somme des nombres sur les faces extérieures du grand cube.
Chaque cube de type coin contribue 3 faces (et donc 3 nombres) à S. Pour que S soit aussi grand que possible, 100 doit paraitre sur l'une de ces trois faces (le développement du cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$ ne contient qu'un seul 100). Donc, un c parait sur chacune des deux faces restantes.
Donc, les 8 cubes de type coin contribuent $8 \times 100 + 8 \times 2 \times c$ ou $800 + 16c$ à S.

Chaque cube de type arête contribue 2 faces (et donc 2 nombres) à S.
Pour que S soit aussi grand que possible, 100 doit paraitre sur l'une des deux faces tandis que c paraitra sur l'autre face.
Donc, les 120 cubes de type arête contribuent $120 \times 100 + 120 \times c$ ou $12\,000 + 120c$ à S.

Finalement, chaque cube de type intérieur contribue 1 face (et donc 1 nombre) à S.
Pour que S soit aussi grand que possible, 100 doit paraitre sur cette face.
Donc, les 600 cubes de type intérieur contribuent 600×100 ou $60\,000$ à S.

En tout, on obtient $S = 800 + 16c + 12\,000 + 120c + 60\,000$ ou $S = 136c + 72\,800$.
Puisque la valeur de S doit être supérieure ou égale à $80\,000$ et que $80\,000 - 72\,800 = 7200$, alors $136c$ est supérieur ou égal à 7200.
Puisque $136 \times 52 = 7072$ et que $136 \times 53 = 7208$, alors c est supérieur ou égal à 53.
Puisque la valeur de S doit être inférieure ou égale à $85\,000$ et que $85\,000 - 72\,800 = 12\,200$, alors $136c$ est inférieur ou égal à $12\,200$.
Puisque $136 \times 90 = 12\,240$ et que $136 \times 89 = 12\,104$, alors c est inférieur ou égal à 89.
Donc, c est un entier strictement positif supérieur ou égal à 53 mais inférieur ou égal à 89.
Il existe donc $89 - 52 = 37$ tels entiers. (Parmi les entiers de 1 à 89, on supprime les entiers de 1 à 52.)

Réponse : (C)

8e année

1. Puisque 1000 est 1 de plus que 999, alors $1000 + 1000 = 2000$ est 2 de plus que $999 + 999$.
Donc, $999 + 999 = 2000 - 2 = 1998$.

Réponse : (C)

2. Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés sont de même longueur.
Si un triangle équilatéral a un périmètre de 15 m, alors chaque côté du triangle a une longueur de $\dfrac{15 \text{ m}}{3} = 5$ m.

Réponse : (B)

3. Puisque $25 \times 4 = 100$, alors 100 est un multiple de 4.
Donc, le plus grand multiple de 4 inférieur à 100 est $24 \times 4 = 96$ (ou $100 - 4 = 96$).

Réponse : (B)

4. Tout point situé à droite de l'axe des ordonnées a une abscisse positive.
Tout point situé sous l'axe des abscisses a une ordonnée négative.
Puisque $P(x, y)$ est situé à droite de l'axe des ordonnées et sous l'axe des abscisses, alors la valeur de x est positive et la valeur de y est négative.

Réponse : (B)

5. On reporte $x = -6$ dans chacune des expressions pour obtenir :

(A) $\begin{aligned} 2 + x &= 2 + (-6) \\ &= -4 \end{aligned}$ (B) $\begin{aligned} 2 - x &= 2 - (-6) \\ &= 2 + 6 \\ &= 8 \end{aligned}$ (C) $\begin{aligned} x - 1 &= -6 - 1 \\ &= -7 \end{aligned}$

(D) $x = -6$ (E) $\begin{aligned} x \div 2 &= (-6) \div 2 \\ &= -3 \end{aligned}$

Parmi les expressions, $2 - x$ a la plus grande valeur lorsque $x = -6$.

Réponse : (B)

6. À ce débit, on peut remplir une bouteille de 500 mL en 6 secondes.
Puisque le volume d'une bouteille de 250 mL est la moitié de celui d'une bouteille de 500 mL, alors il faudra moitié moins de temps pour la remplir. On peut donc remplir une bouteille de 250 mL en 3 secondes.

Réponse : (C)

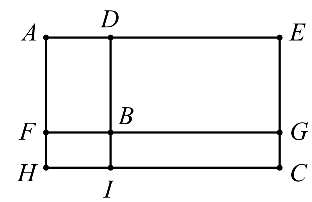
7. Si l'on inverse les chiffres d'un nombre de deux chiffres dont le chiffre des dizaines est pair, alors le nombre résultant sera pair car il aura un nombre pair pour chiffre des unités.
Si un nombre de deux chiffres est pair, alors il est divisible par 2 et ne peut donc pas être un nombre premier.
Puisque 29, 23 et 41 ont chacun un nombre pair pour chiffre des dizaines, on élimine ces trois comme réponses possibles.
Lorsqu'on inverse les chiffres du nombre 53, on obtient 35.
Ce dernier est divisible par 5 et n'est donc pas un nombre premier.
Enfin, lorsqu'on inverse les chiffres du nombre 13, on obtient 31.
Puisque 31 n'a pas de diviseurs positifs autres que 1 et 31, alors 31 est un nombre premier.

Réponse : (D)

8. Lorsqu'on rajoute 3 haricots rouges au sac, le sac contient désormais $5 + 3 = 8$ haricots rouges.
Lorsqu'on rajoute 3 haricots noirs au sac, le sac contient désormais $9 + 3 = 12$ haricots noirs.
Il y a donc $8 + 12 = 20$ haricots en tout dans le sac.
Si l'on choisit un haricot au hasard du sac, la probabilité qu'il soit rouge est égale à $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Réponse : (B)

9. Dans la figure ci-contre, on nomme les points d'intersection des segments de droites.
À partir de A, la fourmi peut se déplacer vers la droite (se rendant ainsi à D) ou vers le bas (se rendant ainsi à F).



Supposons que la fourmi se déplace d'abord vers la droite (arrivant ainsi à D).
À partir de D, si la fourmi continue de se déplacer vers la droite pour se rendre à E, le chemin ne peut passer par B (puisque la fourmi peut uniquement se déplacer vers la droite ou vers le bas).

À partir de B, il y a deux chemins qui se terminent à C ; l'un des chemins passe par G avant de se rendre à C tandis que l'autre chemin passe par I avant de se rendre à C.
Donc, si la fourmi se déplace d'abord vers la droite, il y a deux chemins qui peuvent la mener à C, soit les chemins $A - D - B - G - C$ et $A - D - B - I - C$.

Supposons que la fourmi se déplace d'abord vers le bas (arrivant ainsi à F).
À partir de F, si la fourmi continue de se déplacer vers le bas pour se rendre à H, le chemin ne peut passer par B (puisque la fourmi peut uniquement se déplacer vers la droite ou vers le bas).
Donc, à partir de F, la fourmi doit se déplacer vers la droite de manière à arriver à B.
À partir de B, il y a deux chemins dont on a discuté précedemment qui se terminent à C.
Donc, si la fourmi se déplace d'abord vers le bas, il y a deux chemins qui peuvent la mener à C, soit les chemins $A - F - B - G - C$ et $A - F - B - I - C$.

Donc, 4 chemins différents mènent de A à C en passant par B.

Réponse : (C)

10. Afin d'obtenir le plus grand entier de 4 chiffres possibles, on réorganise les chiffres de manière que les plus grands chiffres prennent les plus grandes valeurs possibles.
Le plus grand entier de 4 chiffres que l'on peut obtenir en réorganisant les 4 chiffres de l'entier 2021 est 2210.
Afin d'obtenir le plus petit entier de 4 chiffres possibles, on réorganise les chiffres de manière que les plus petits chiffres prennent les plus grandes valeurs possibles.
Le plus petit entier de 4 chiffres (supérieur à 1000) que l'on peut obtenir en réorganisant les 4 chiffres de l'entier 2021 est 1022.
Donc, la plus grande différence possible entre deux tels nombres de quatre chiffres est $2210 - 1022 = 1188$.

Réponse : (A)

11. *Solution 1*
PQ et RS se coupent en T. Donc, l'angle PTR et l'angle STQ sont opposés par le sommet, d'où on a donc $\angle PTR = \angle STQ = 140^\circ$.
Puisque $\angle PTR = \angle PTU + \angle RTU$, alors

$$\angle RTU = \angle PTR - \angle PTU = 140^\circ - 90^\circ = 50^\circ$$

Donc, l'angle RTU a une mesure de 50°.

Solution 2
RS est un segment de droite, donc $\angle RTQ + \angle STQ = 180^\circ$ ou $\angle RTQ = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.
PQ est un segment de droite, donc $\angle RTQ + \angle RTU + \angle PTU = 180^\circ$ ou
$\angle RTU = 180^\circ - 40^\circ - 90^\circ = 50^\circ$.

Réponse : (C)

12. Étant donné trois entiers consécutifs, le plus petit entier est un de moins que l'entier du milieu et le plus grand entier est un de plus que l'entier du milieu.
Donc, le plus petit entier et le plus grand entier ont une somme égale à deux fois l'entier du milieu.
Donc, la somme de trois entiers consécutifs est égale à 3 fois l'entier du milieu. Ainsi, la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
Parmi les choix de réponse, 21 est le seul multiple de 3.
Par ailleurs, on aurait pu résoudre ce problème en procédant par tâtonnements ; ce qui nous aurait mené à $6 + 7 + 8 = 21$.

Réponse : (D)

13. D'après le diagramme à bandes, il y a 8 chemises jaunes, 4 chemises rouges, 2 chemises bleues et 2 chemises vertes. Il y a donc $8 + 4 + 2 + 2 = 16$ chemises en tout.
Donc, les 8 chemises jaunes représentent $\frac{8}{16}$ ou $\frac{1}{2}$ du nombre total de chemises.
Le seul diagramme circulaire montrant qu'environ la moitié des chemises sont jaunes est (E).
Donc, il est probable que ce diagramme circulaire représente le mieux les données du diagramme à bandes.
De plus, on remarque que ce diagramme circulaire montre également qu'environ $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ des chemises sont rouges, environ $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ des chemises sont vertes et environ $\frac{1}{8}$ des chemises sont bleues ; ce qui correspond aux données du diagramme à bandes.

Réponse : (E)

14. Soit n le nombre entier inconnu.
Puisque 16 est un diviseur de n, alors chaque diviseur positif de 16 est également un diviseur de n.
Autrement dit, 1, 2, 4, 8, 16, et n sont compris dans les diviseurs positifs de n.
Puisque 16 est un diviseur de n, alors n est un multiple positif de 16.
Le plus petit nombre entier qui est un multiple de 16 est 16.
Or, si $n = 16$, alors n a exactement 5 diviseur positifs, soit 1, 2, 4, 8 et 16.
Après 16, le nombre entier suivant qui est un multiple de 16 est 32.
Si $n = 32$, alors n a exactement 6 diviseurs positifs, soit 1, 2, 4, 8, 16 et 32, ce qu'il fallait démontrer.

Réponse : (B)

15. *Solution 1*
Les mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°.
Un triangle a des angles intérieurs dont les mesures présentent le rapport $1 : 4 : 7$. Donc, le plus petit de ses angles a une mesure égale à $\frac{1}{1+4+7} = \frac{1}{12}$ de la somme des mesures des trois angles.
Donc, la mesure du plus petit angle du triangle est égale à $\frac{1}{12}$ de 180°, soit $\frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$.
La mesure du prochain angle le plus grand est égale à 4 fois la mesure du plus petit angle, soit $4 \times 15^\circ = 60^\circ$.
La mesure du plus grand angle est égale à 7 fois la mesure du plus petit angle, soit $7 \times 15^\circ = 105^\circ$.
Les angles intérieurs du triangle ont donc des mesures de 15°, 60° et 105°.

Solution 2
Les mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°.
En travaillant à rebours à partir des choix possibles, on peut éliminer (B) et (C) puisque les mesures des trois angles donnés n'ont pas une somme de 180°.
Dans le triangle, le plus petit angle et le plus grand angle ont des mesures présentant un rapport de $1 : 7$.
Puisque $7 \times 12^\circ = 84^\circ$ et non 120°, on peut éliminer (A).
Puisque $7 \times 14^\circ = 98^\circ$ et non 110°, on peut éliminer (E).
Le seul choix restant est (D). On peut vérifier que 15°, 60° et105° ont une somme de 180° et présentent le rapport $1 : 4 : 7$.

Réponse : (D)

16. Les sept nombres $1, 2, 5, 10, 25, 50, 100$ se répètent de manière à produire la régularité présentée dans l'énoncé du problème.
Donc, le 7^e^ nombre de la régularité est 100, le 14^e^ nombre de la régularité est 100, le 21^e^ nombre de la régularité est 100 et ainsi de suite.
Puisque 14^e^ nombre de la régularité est 100, alors le 15^e^ nombre de la régularité est 1, le 16^e^ nombre de la régularité est 2, le 17^e^ nombre de la régularité est 5 et le 18^e^ nombre de la régularité est 10.
Puisque 70 est un multiple de 7, le 70^e^ nombre de la régularité est également 100. Donc, le 71^e^ nombre de la régularité est 1, le 72^e^ nombre de la régularité est 2, le 73^e^ nombre de la régularité est 5, le 74^e^ nombre de la régularité est 10 et le 75^e^ nombre de la régularité est 25.
Les 18^e^ et 75^e^ nombres de la régularité ont une somme de $10 + 25 = 35$.

Réponse : (E)

17. *Solution 1*
L'équipe de soccer de Gaussville a remporté 40 % de ses 40 premiers matchs.
L'équipe a donc remporté $0{,}40 \times 40 = 16$ matchs.
Après avoir remporté n jeux d'affilée, l'équipe a remporté $16 + n$ matchs et a joué $40 + n$ matchs en tout.
À ce moment-là, l'équipe avait remporté 50 % ou $\frac{1}{2}$ de tous ses matchs.
Cela veut dire que le nombre de matchs que l'équipe a remporté, soit $16 + n$, est égal à $\frac{1}{2}$ du nombre total de matchs, soit $40 + n$.
Laquelle des valeurs de n remplit la condition que $16 + n$ soit égal à $\frac{1}{2}$ de $40 + n$?
En reportant chacune des valeurs possibles de n, on obtient que $16 + 8 = 24$ est égal à $\frac{1}{2}$ de $40 + 8 = 48$. Donc, n a une valeur de 8.

Solution 2
L'équipe de soccer de Gaussville a remporté 40 % de ses 40 premiers matchs.
Donc, l'équipe a remporté $0{,}40 \times 40 = 16$ matchs et n'a pas remporté $40 - 16 = 24$ matchs (en subissant une défaite ou en faisant match nul).

Ensuite, l'équipe a remporté n jeux d'affilée. Cela signifie que l'équipe n'a pas subi de défaites et n'a pas fait de matchs nuls.
Donc, les 24 matchs que l'équipe n'a pas remporté représentent 50% du nombre total de matchs.
Donc, l'équipe a remporté 24 matchs.
Ainsi, l'équipe de soccer de Gaussville a remporté $n = 24 - 16 = 8$ jeux d'affilée.

Réponse : (D)

18. La fraction de l'aire du grand cercle qui n'est pas ombrée ne dépend pas du rayon réel de l'un ou l'autre cercle mais plutôt de la relation qui existe entre les deux. Supposons donc que le petit cercle a un rayon de 1 et que le grand cercle a un rayon de 3.
Dans ce cas, l'aire du petit cercle est égale à $\pi(1)^2 = \pi$.
L'aire du grand cercle est égale à $\pi(3)^2 = 9\pi$.
L'aire du grand cercle qui n'est pas ombrée est égale à $9\pi - \pi = 8\pi$.
Donc, $\frac{8\pi}{9\pi} = \frac{8}{9}$ de l'aire du grand cercle n'est pas ombrée.
(Par ailleurs, on remarque que $\frac{\pi}{9\pi} = \frac{1}{9}$ de l'aire du grand cercle est ombrée et donc que $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ de l'aire du grand cercle n'est pas ombrée.)

Réponse : (A)

19. On travaille à rebours à partir de la somme finale (soit 440) en annulant chacune des trois opérations pour déterminer la somme des deux nombres initiaux.
La dernière opération que Asima et Nile ont chacun effectué était de multiplier la différence qu'ils avaient obtenu par 4.
Le fait de multiplier chaque différence par 4 augmente la somme de ces derniers par un facteur de 4.
Autrement dit, puisque la somme finale de leur deux résultats était de 440, alors la somme de leurs différences avant qu'elles ne soient multipliées par 4 aurait été égale à $440 \div 4 = 110$.
La deuxième opération que Asima et Nile ont chacun effectué était de soustraire 10 du produit qu'ils avaient obtenu.
Le fait de soustraire 10 de chacun de leurs produits diminue de 20 la somme de ces derniers.
Autrement dit, la somme de leurs deux nombres immédiatement après la deuxième opération était de 110 et donc la somme de leurs deux nombres immédiatement avant la deuxième opération était de $110 + 20 = 130$.
Enfin, la première opération que Asima et Nile ont chacun effectué était de doubler leur nombre.
Le fait de doubler chacun de leurs nombres augmente la somme de ces derniers par un facteur de 2.
Autrement dit, la somme de leurs deux nombres immédiatement après la première opération était de 130 et donc la somme de leurs deux nombres avant la première opération était de $130 \div 2 = 65$.
Chacun des entiers initiaux est supérieur à 0 et les deux entiers ont une somme de 65.
Donc, l'entier initial d'Asima peut être n'importe quel entier de 1 à 64.
Il y a donc 64 possibilités pour l'entier initial d'Asima.

Réponse : (A)

20. *Solution 1*

Le tableau ci-dessous représente les différences possibles entre le nombre qu'obtient Ruby et celui qu'obtient Sam après qu'ils aient tous les deux jeté un dé juste dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Nombre qu'obtient Ruby en jetant le dé

Nombre qu'obtient Sam en jetant le dé	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	-1	0	1	2	3	4
3	-2	-1	0	1	2	3
4	-3	-2	-1	0	1	2
5	-4	-3	-2	-1	0	1
6	-5	-4	-3	-2	-1	0

D'après le tableau ci-dessus, le nombre total de résultats possibles est égal à $6 \times 6 = 36$, dont 15 ont une différence négative.

Donc, lorsqu'on soustrait le nombre qu'obtient Sam de celui qu'obtient Ruby, la probabilité que le résultat de cette soustraction soit un nombre négatif est égale à $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Solution 2

Ruby et Sam ont chacun 6 résultats possibles lorsqu'ils jettent les dés. Donc, il y a $6 \times 6 = 36$ résultats possibles. Sur ces 36 résultats possibles, il y a 6 résultats dans lesquels Sam et Ruby obtiennent chacun le même nombre et donc ces nombres ont une différence de 0.

Pour les $36 - 6 = 30$ résultats possibles restants, la probabilité que Ruby ait obtenu un nombre supérieur à celui de Sam est égale à la probabilité que Sam ait obtenu un nombre supérieur à celui de Ruby.

Autrement dit, la moitié de ces 30 résultats possibles (soit 15) ont une différence négative tandis que l'autre moitié des résultats possibles ont une différence positive.

Donc, lorsqu'on soustrait le nombre qu'obtient Sam de celui qu'obtient Ruby, la probabilité que le résultat de cette soustraction soit un nombre négatif est égale à $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

RÉPONSE : (B)

21. Si n est un entier strictement positif, alors on obtient un 1 suivi de n zéros en évaluant 10^n.

Par exemple, $10^4 = 10\,000$ et 10^{2021} est égal à $1\underbrace{00...0}_{\text{2021 zéros}}$.

Lorsqu'on ajoute 1 à l'entier strictement positif composé uniquement de n 9, on obtient 10^n.

Par exemple, $1 + 9999 = 10\,000 = 10^4$ et $1 + \underbrace{99...9}_{\text{2021 neuf}} = 1\underbrace{00...0}_{\text{2021 zéros}} = 10^{2021}$.

Soit S l'entier égal à $10^{2021} - 2021$.

Puisque $10^{2021} = 1 + \underbrace{99...9}_{\text{2021 neuf}}$, alors $S = 1 + \underbrace{99...9}_{\text{2021 neuf}} - 2021 = \underbrace{99...9}_{\text{2021 neuf}} - 2020 = \underbrace{99...9}_{\text{2017 neuf}}7979$.

Les chiffres de l'entier égal à $10^{2021} - 2021$ ont donc une somme de $2019 \times 9 + 2 \times 7 = 18\,185$.

RÉPONSE : (E)

22. On dresse d'abord la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 31.
On choisit de terminer la liste à 31 car $30 \times 30 = 900$ et donc 31×37 est supérieur à 900.
On a donc la liste suivante de nombres premiers :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$$

En considérant les couples consécutifs de nombres premiers de la liste ci-dessus, on peut exprimer 10 entiers strictement positifs inférieurs à 900 sous la forme d'un produit de deux nombres premiers consécutifs, soit :

$$2 \times 3 = 6 \qquad 3 \times 5 = 15 \qquad 5 \times 7 = 35 \qquad 7 \times 11 = 77 \qquad 11 \times 13 = 143$$

$$13 \times 17 = 221 \qquad 17 \times 19 = 323 \qquad 19 \times 23 = 437 \qquad 23 \times 29 = 667 \qquad 29 \times 31 = 899$$

Il y a 3 entiers strictement positifs inférieurs à 900 que l'on peut exprimer sous la forme d'un produit de trois nombres premiers consécutifs, soit :

$$2 \times 3 \times 5 = 30 \qquad 3 \times 5 \times 7 = 105 \qquad 5 \times 7 \times 11 = 385$$

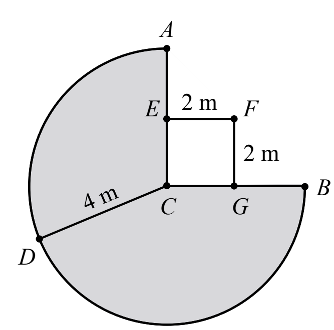
Puisque chaque entier strictement positif supérieur à 1 est soit un nombre premier ou peut être exprimé sous la forme d'un produit unique de nombres premiers, alors les trois nombres 30, 105 et 385 sont différents de ceux que l'on obtient à partir d'un produit de deux nombres premiers consécutifs. (Par ailleurs, on peut vérifier que 30, 105 et 385 ne paraissent pas dans la liste précédente.)
De plus, on remarque que le prochain plus petit entier strictement positif que l'on peut exprimer sous la forme d'un produit de trois nombres premiers consécutifs est $7 \times 11 \times 13 = 1001$, ce qui est supérieur à 900.
Un seul entier strictement positif inférieur à 900 peut être exprimé sous la forme d'un produit de quatre nombres premiers consécutifs. Cet entier est

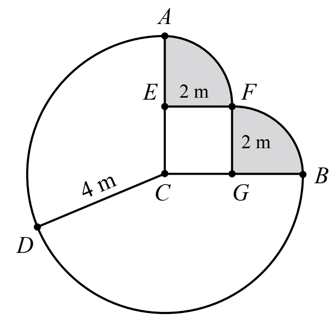
$$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$$

Le prochain plus petit entier strictement positif que l'on peut exprimer sous la forme d'un produit de quatre nombres premiers consécutifs est $3 \times 5 \times 7 \times 11 = 1155$, ce qui est supérieur à 900.
Il n'y a pas d'entiers strictement positifs inférieurs à 900 que l'on peut exprimer sous la forme d'un produit de cinq nombres premiers consécutifs ou plus puisque $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$, ce qui est supérieur à 900.
En tout, il y a $10 + 3 + 1 = 14$ entiers strictement positifs inférieurs à 900 que l'on peut exprimer sous la forme d'un produit de deux nombres premiers consécutifs ou plus.

Réponse : (A)

23. On nomme d'abord quelques points supplémentaires dans la figure ci-contre.
La laisse de 4 m permet au chien d'atteindre les points A, B et D où $AC = BC = DC = 4$ m. Donc le chien peut jouer n'importe où dans la region ombrée de la figure.
La niche $EFGC$ est un carré, donc $\angle ECG = 90°$.
Donc, la région ombrée est égale à $\frac{3}{4}$ d'un cercle de centre C et de rayon $CD = 4$ m. L'aire de cette région ombrée est donc égale à $\frac{3}{4}\pi(4 \text{ m})^2 = 12\pi \text{ m}^2$.





Il y a une région supplémentaire à l'extérieur de la niche dans laquelle le chien peut jouer. Cette région est ombrée dans la figure ci-contre.

Puisque $AC = 4$ m et que $EC = 2$ m, alors $AE = 2$ m. Puisque $EC + EF = 2 \text{ m} + 2 \text{ m} = 4$ m, ce qui correspond à la longueur de la laisse, alors le chien peut atteindre F.

De même, $BG = 2$ m et $GC + GF = 2 \text{ m} + 2 \text{ m} = 4$ m, ce qui correspond à la longueur de la laisse, alors le chien peut atteindre F en longeant les côtés GC et GF de sa niche.

Puisque $\angle AEF = \angle FGB = 90°$, alors chacune de ces deux figures ombrées est égale à $\frac{1}{4}$ d'un cercle (de centres E et G respectivement) de rayon 2 m. Donc, chacune de ces deux figures ombrées a une aire égale à $\frac{1}{4}\pi(2)^2 = \pi$ m^2. (Par exemple, lorsque le chien est situé au-dessus et à droite de E, le chien ne peut profiter que de 2 m de laisse et peut ainsi former un quart de cercle de rayon 2 m à partir de E.)

En tout, l'aire de la région dans laquelle le chien peut jouer à l'extérieur de la niche est égale à $12\pi \text{ m}^2 + 2 \times \pi \text{ m}^2 = 14\pi \text{ m}^2$.

Réponse : (A)

24. Soit S la somme des nombres sur les faces extérieures du cube de dimensions $n \times n \times n$.

Pour déterminer la plus petite valeur de n telle que $S > 1500$, on positionne les cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$ dans le grand cube de manière que S soit aussi grand que possible.

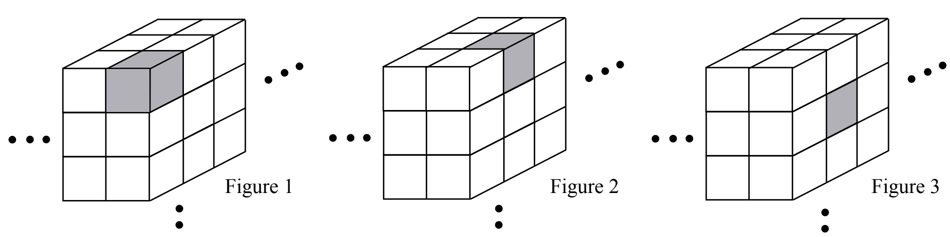
Les cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$ dont les nombres paraissent sur les faces extérieures du grand cube peuvent êtres classés en trois types que l'on appelle : coin, arête et intérieur.

On voit ces trois types de cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$ dans les figures ci-dessous (ces figures représentent une partie du grand cube de dimensions $n \times n \times n$).

(i) On voit un cube de type *coin* dans la Figure 1. Il n'y a que 8 tels cubes puisque ces cubes sont situés aux « coins » du grand cube.

(ii) On voit un cube de type *arête* dans la Figure 2. Ces cubes sont situés le long des arêtes du grand cube mais non aux coins de ce dernier. Puisqu'un cube a 12 arêtes et que chaque arête du grand cube contient $n - 2$ cubes de type *arête*, alors il y a $12 \times (n - 2)$ cubes de ce type.

(iii) On voit un cube de type *intérieur* dans la Figure 3. Ces cubes sont ceux dont un seul nombre parait sur les faces extérieures du grand cube. Puisqu'un cube a 6 faces et que chaque face du grand cube contient $(n - 2) \times (n - 2)$ cubes de type *intérieur*, alors il y a $6 \times (n - 2)^2$ cubes de ce type.



Chaque cube de type coin contribue 3 faces (et donc 3 nombres) à S.

Pour que S soit aussi grand que possible, le cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$ doit être positionné de manière que la somme des 3 faces externes soit aussi grande que possible.

On peut déterminer à partir du développement donné que les trois faces se rencontrant à un sommet du cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$ peuvent contenir les nombres : $-1, 0, 1$ ou $-1, 2, 0$ ou

$-2, 2, 0$ ou $-2, 1, 0$.
Ces trois faces peuvent donc avoir des sommes respectives de $0, 1, 0$ et -1.
Pour que S soit aussi grand que possible, on positionne chaque cube de type coin de manière que les nombres paraissant sur les faces extérieures du grand cube soient -1, 2 et 0 (soit les nombres ayant la plus grande somme possible de 1).
Donc, les 8 cubes de type coin contribuent $8 \times 1 = 8$ à S.

Chaque cube de type arête contribue 2 faces (et donc 2 nombres) à S. Pour que S soit aussi grand que possible, le cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$ doit être positionné de manière que la somme des 2 faces externes soit aussi grande que possible.
On peut déterminer à partir du développement donné que les deux faces partageant une arête du cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$ peuvent contenir les nombres : $-1, 0$ ou $-1, 2$ ou $-1, 1$ ou $2, 0$ ou $1, 0$ ou $-2, 0$ ou $-2, 1$ ou $-2, 2$.
Ces deux faces adjacentes peuvent donc avoir des sommes respectives de : $-1, 1, 0, 2, 1, -2, -1$ et 0.
Pour que S soit aussi grand que possible, on positionne chaque cube de type arête de manière que les nombres paraissant sur les faces extérieures du grand cube soient 2 et 0 (soit les nombres ayant la plus grande somme possible de 2).
Donc, les $12 \times (n-2)$ cubes de type arête contribuent $2 \times 12 \times (n-2)$ ou $24 \times (n-2)$ à S.

Finalement, chaque cube de type intérieur contribue 1 face (et donc 1 nombre) à S. Pour que S soit aussi grand que possible, on positionne chacun de ces cubes de manière que le nombre 2 paraisse sur cette face (puisque 2 est le plus grand nombre dans le développement).
Donc, les $6 \times (n-2)^2$ cubes de type intérieur contribuent $2 \times 6 \times (n-2)^2$ ou $12 \times (n-2)^2$ à S.

En tout, on obtient $S = 8 + 24 \times (n-2) + 12 \times (n-2)^2$.
On veut déterminer la plus petite valeur de n telle que $S > 1500$ ou

$$8 + 24 \times (n-2) + 12 \times (n-2)^2 > 1500$$

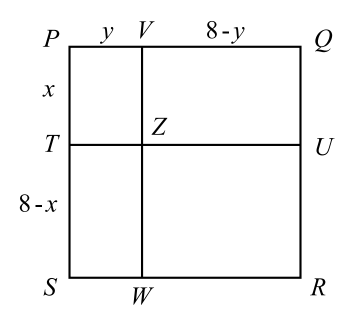
En procédant par tâtonnements, on obtient :

- Lorsque $n = 9$, $S = 8 + 24 \times (n-2) + 12 \times (n-2)^2 = 8 + 24 \times 7 + 12 \times 7^2 = 764$, ce qui est inférieur à 1500.
- Lorsque $n = 11$, $S = 8 + 24 \times 9 + 12 \times 9^2 = 1196$, ce qui est inférieur à 1500.
- Lorsque $n = 12$, $S = 8 + 24 \times 10 + 12 \times 10^2 = 1448$, ce qui est inférieur à 1500.
- Lorsque $n = 13$, $S = 8 + 24 \times 11 + 12 \times 11^2 = 1724$, ce qui est supérieur à 1500.

Donc, 13 est la plus petite valeur de n telle que la somme des faces extérieures du grand cube de dimensions $n \times n \times n$ soit supérieure à 1500.

Réponse : (D)

25. La figure ci-contre représente le carré $PQRS$ de l'énoncé du problème.
Puisque $PS = 8$, alors en posant $PT = x$, on obtient $TS = 8 - x$. De même, si $PV = y$, alors $VQ = 8 - y$.
La valeur de x (où $0 < x < 8$) précise la position du segment de droite TU (ce segment est parallèle à PQ).
La valeur de y (où $0 < y < 8$) précise la position du segment de droite VW (ce segment est parallèle à QR).
Donc, la valeur de N est égale au nombre de couples (x, y) pour lesquels les aires des quatres rectangles $PVZT$, $TZWS$, $VQUZ$ et $ZURW$ sont des entiers.



Puisque les aires des rectangles $PVZT$ et $VQUZ$ sont des entiers, alors l'aire du rectangle $PQUT$ est obtenue à partir de la somme de deux entiers et est donc également un entier.
L'aire de $PQUT$ est égale à $(PQ)(PT) = 8x$, d'où $8x$ est donc un entier.
De même, l'aire de $PVWS$ est un entier, d'où $8y$ est donc un entier.
Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $8x$ est un entier ?
Si x est un entier, alors $8x$ est un entier, d'où x peut donc égaler n'importe quel entier de 1 à 7.
De même, y peut égaler n'importe quel entier de 1 à 7.
Pour chacune des 7 valeurs possibles de x, il y a 7 valeurs possibles de y. Donc, pour le cas où x et y sont chacun des entiers, il y a $7 \times 7 = 49$ couples (x, y) pour lesquels les aires des quatres rectangles $PVZT$, $TZWS$, $VQUZ$ et $ZURW$ sont des entiers.
Par exemple, considérons $(x, y) = (2, 3)$.
Dans ce cas, $8 - x = 6$, $8 - y = 5$ et les aires des quatre rectangles $PVZT$, $TZWS$, $VQUZ$ et $ZURW$ sont respectivement les entiers $2 \times 3 = 6$, $6 \times 3 = 18$, $2 \times 5 = 10$ et $6 \times 5 = 30$.

Ayant considéré les cas où x et y sont tous deux des entiers, considérons ensuite les cas possibles où l'on a exactement un seul entier parmi x et y.
Supposons donc que y est un entier et que x ne l'est pas.

Y a-t-il des valeurs non entières de x pour lesquelles $8x$ est un entier ?
Lorsque $x = \frac{1}{2}$, $8x = 8 \times \frac{1}{2} = 4$. Donc, il existe des valeurs fractionnaires de x pour lesquelles $8x$ est un entier.
Soit $x = \frac{a}{b}$, a et b étant des entiers strictement positifs n'ayant aucun facteur ou diviseur en commun (autrement dit, la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible).
Puisque $8x = 8 \times \frac{a}{b}$ est un entier exactement lorsque b est un diviseur positif de 8, alors b peut égaler $1, 2, 4$ ou 8.
Considérons ensuite chacune de ces valeurs possibles de b.

Lorsque $b = 1$, $x = \frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a$. Donc, x est un entier.
On a déjà considéré le cas où x et y sont tous deux des entiers (dans ce cas, il y a 49 couples (x, y) qui répondent aux critères donnés).

Considérons ensuite les cas où $b = 2$.
Puisque a et b n'ont aucun facteur ou diviseur en commun, alors a doit être impair.
De plus, $0 < \frac{a}{b} < 8$, d'où a peut donc égaler $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$ ou 15 (remarquons que $\frac{17}{2} > 8$).
Lorsque x égale $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$ ou $\frac{15}{2}$, quelles sont les valeurs possibles de y ?
Rappelons qu'on est en train de considérer les cas où l'on a exactement un seul entier parmi x et y et qu'on avait supposé que y était l'entier.
L'aire du rectangle $PVZT$ est un entier d'où on a donc que $(PV)(PT) = xy$ est un entier. (Remarquons que l'aire de chacun des 3 autres rectangles est également un entier.)
Lorsque x est égal à une fraction de la forme $\frac{a}{2}$ (où a est impair et provient de la liste ci-dessus) et que xy est un entier, alors 2 est un diviseur de y, d'où y est donc un entier pair.
Puisque $0 < y < 8$, alors y peut égaler $2, 4$ ou 6.
Pour chacun des 8 choix de x, il y a 3 choix de y. Dans ce cas, il y a donc $8 \times 3 = 24$ couples (x, y) pour lesquels les aires des quatres rectangles $PVZT$, $TZWS$, $VQUZ$ et $ZURW$ sont des entiers.
Par exemple, considérons $(x, y) = (\frac{3}{2}, 6)$. Dans ce cas, $8 - x = \frac{13}{2}$, $8 - y = 2$ et les aires des quatre rectangles $PVZT$, $TZWS$, $VQUZ$ et $ZURW$ sont respectivement les entiers $\frac{3}{2} \times 6 = 9$, $\frac{13}{2} \times 6 = 39$, $\frac{3}{2} \times 2 = 3$ et $\frac{13}{2} \times 2 = 13$.
Rappelons que l'on avait établi précédemment que $8y$ est également un entier.
Donc, chacune des valeurs possibles de x est une valeur possible de y et vice versa.
Autrement dit, y peut égaler $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}$ ou $\frac{15}{2}$ tandis que x peut égaler 2, 4 ou 6, d'où on a

donc 24 couples (x, y) supplémentaires.

En résumé, si x et y sont tous deux des entiers, alors il y a 49 couples (x, y) qui répondent aux critères donnés.
Si x est une fraction de la forme $\frac{a}{2}$ (a étant des entiers impairs qui vérifient $1 \leq a \leq 15$) et si y est un entier, alors il y a 24 couples (x, y) qui répondent aux critères donnés.
Si y est une fraction de la forme $\frac{a}{2}$ (a étant des entiers impairs qui vérifient $1 \leq a \leq 15$) et si x est un entier, alors il y a 24 couples (x, y) qui répondent aux critères donnés.

Considérons ensuite le cas où $b = 4$.
Puisque a et b n'ont aucun facteur ou diviseur en commun, alors a doit être impair.
De plus, $0 < \frac{a}{b} < 8$, d'où a peut donc égaler $1, 3, 5, \ldots, 27, 29$ ou 31 (remarquons que $\frac{33}{4} > 8$).
Lorsque x égale $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \ldots \frac{27}{4}, \frac{29}{4}$ ou $\frac{31}{4}$, quelles sont les valeurs possibles de y ?
Rappelons qu'on est en train de considérer les cas où l'on a exactement un seul entier parmi x et y et qu'on avait supposé que y était l'entier.
Puisque xy est un entier et que x est égal à une fraction de la forme $\frac{a}{4}$, alors 4 est un diviseur de y.
Puisque $0 < y < 8$, alors $y = 4$.
Pour chacun des 16 choix de x, il y a 1 choix de y. Dans ce cas, il y a donc $16 \times 1 = 16$ couples (x, y) pour lesquels les aires des quatres rectangles $PVZT$, $TZWS$, $VQUZ$ et $ZURW$ sont des entiers.
Par exemple, considérons $(x, y) = (\frac{5}{4}, 4)$.
Dans ce cas, $8 - x = \frac{27}{4}$, $8 - y = 4$ et les aires des quatre rectangles $PVZT$, $TZWS$, $VQUZ$ et $ZURW$ sont respectivement les entiers $\frac{5}{4} \times 4 = 5$, $\frac{27}{4} \times 4 = 27$, $\frac{5}{4} \times 4 = 5$ et $\frac{27}{4} \times 4 = 27$.
Lorsque y égale $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \ldots \frac{27}{4}, \frac{29}{4}$ ou $\frac{31}{4}$ et que $x = 4$, alors il y a 16 couples (x, y) supplémentaires.

Enfin, pour terminer les cas où l'on a exactement un seul entier parmi x et y, on considère $b = 8$.
Puisque xy est un entier et que x est égal à une fraction de la forme $\frac{a}{8}$, alors 8 est un diviseur de y.
Or, $y < 8$ et ne peut donc pas admettre 8 comme diviseur. Donc il n'y a pas de couples (x, y) lorsque $b = 8$.

Considérons finalement les cas où x et y ne sont pas des entiers tous les deux.
Comme on l'a déterminé précédemment, si x n'est pas un entier, alors x peut être exprimé sous la forme $\frac{a}{2}$ ou $\frac{a}{4}$, a étant un entier strictement positif impair.
Si y n'est pas un entier, alors y peut pareillement être exprimé sous la forme $\frac{a}{2}$ ou $\frac{a}{4}$, a étant un entier strictement positif impair.
Or, si x et y sont tous deux exprimés de cette forme, alors leur produit, xy, est de la forme $\frac{c}{4}$, $\frac{c}{8}$ ou $\frac{c}{16}$ où c est le produit de deux entiers impairs et est donc lui-même impair.
Puisque 4, 8 ou 16 ne peuvent être des diviseurs d'un nombre impair, alors xy ne peut être un entier, d'où l'aire du rectangle $PVZT$ ne peut être un entier non plus.
Donc, il n'y a pas de cas où x et y ne sont pas des entiers tous les deux.

Donc, la valeur de N est égale à $49 + (2 \times 24) + (2 \times 16) = 49 + 48 + 32 = 129$. On a donc un reste de 41 lorsque l'on divise $N^2 = 16\,641$ par 100.

Réponse : (D)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2020

(7e et 8e années – Secondaire I et II)

le mercredi 13 mai 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 mai 2020
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Jeff Anderson
Terry Bae
Jacquelene Bailey
Shane Bauman
Jenn Brewster
Ersal Cahit
Diana Castañeda Santos
Sarah Chan
Ashely Congi
Serge D'Alessio
Fiona Dunbar
Mike Eden
Sandy Emms
Barry Ferguson
Steve Furino
John Galbraith
Lucie Galinon
Robert Garbary
Rob Gleeson
Sandy Graham
Conrad Hewitt
Valentina Hideg
Angie Hildebrand
Carrie Knoll
Christine Ko
Judith Koeller
Laura Kreuzer
Bev Marshman
Paul McGrath
Jen Nelson
Ian Payne
J.P. Pretti
Alexandra Rideout
Nick Rollick
Kim Schnarr
Carolyn Sedore
Ashley Sorensen
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga
Heather Vo
Bonnie Yi

Comité du concours Gauss

Ashley Sorensen (présidente), University of Waterloo, Waterloo, ON
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
Kora Lee Gallant, Madeline Symonds M.S., Hammonds Plains, NS
Sarah Garrett, Mitchell Woods P.S., Guelph, ON
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
John McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
David Switzer, Scott Central P.S., Sandford, ON
Rachael Verbruggen, University of Waterloo, Waterloo, ON
Robert Wong, Edmonton, AB
Chris Wu, Ledbury Park E. and M.S., North York, ON
Lori Yee, William Dunbar P.S., Pickering, ON

7e année

1. Puisqu'un stylo coûte 2 \$, 10 stylos coûteront 10×2 \$ $= 20$ \$.

Réponse : (E)

2. Par rapport à l'origine $(0, 0)$, le point P est situé 2 unités à droite (dans la direction positive de l'axe des abscisses) et 4 unités au dessus (dans la direction positive de l'axe des ordonnées).
Donc, le point P a pour coordonnées $(2, 4)$.

Réponse : (E)

3. Puisque 99 est près de 100 et que 9 est près de 10, on obtient $100 \times 10 = 1000$ comme valeur approximative de 99×9.
Donc, parmi les choix de réponse, l'entier 1000 est probablement l'entier le plus près de 99×9.
En multipliant, on obtient 891 comme valeur de 99×9.
Parmi les choix de réponse, 1000 est effectivement l'entier le plus près de 99×9.

Réponse : (D)

4. Puisque la température de l'après-midi (5°C) est plus chaude que la température du matin (−3°C), on obtient l'augmentation de température en soustrayant la température du matin de celle de l'après-midi.
On a donc $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$.
Alors, la température a augmenté de 8°C.

Réponse : (A)

5. En moyenne, Alexia a fait $243\,000 \div 30 = 8100$ pas par jour en avril.

Réponse : (B)

6. *Solution 1*
La mesure d'un angle plein est égale à 360°.
Puisque 90° est égal à $\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$ d'un angle plein, alors $\frac{1}{4}$ des élèves ont choisi le jus.
Donc, le restant des élèves, soit $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, ont choisi le lait.
Puisque $\frac{3}{4}$ est égal à $3 \times \frac{1}{4}$, donc $3 \times 80 = 240$ élèves ont choisi le lait.

Solution 2
Comme dans la solution 1, $\frac{1}{4}$ des élèves ont choisi le jus.
Puisque les 80 élèves qui ont choisi le jus représentent $\frac{1}{4}$ du nombre total d'élèves, on a donc $4 \times 80 = 320$ comme nombre total d'élèves.
Alors, $320 - 80 = 240$ élèves ont choisi le lait.

Réponse : (C)

7. Étant donné que les troisième et quatrième entiers de la liste sont consécutifs et ont une somme de 11, alors 5 et 6 sont, respectivement, les troisième et quatrième entiers de la liste.
Le cinquième entier de la liste est alors 7, on a donc 8 comme sixième entier de la liste.

Réponse : (D)

8. *Solution 1*
Le segment de 0 à 1,0 de la droite numérique est divisé en 4 parties égales par les marques de graduation P, Q et R.
Donc, la distance séparant les marques de graduation adjacentes est égale à $\frac{1{,}0-0}{4} = 0{,}25$.
Puisque R est situé à la 3e marque de graduation à partir de la gauche, la valeur de R est égale à $3 \times 0{,}25 = 0{,}75$.
Puisque U est situé à la 6e marque de graduation à partir de la gauche, la valeur de U est égale

à $6 \times 0{,}25 = 1{,}5$.
Donc, lorsqu'on divise la valeur de R par la valeur de U, on obtient $\frac{0{,}75}{1{,}5} = 0{,}5$.

Solution 2
Le nombre R est situé à la 3^e marque de graduation à partir de la gauche.
Le nombre U est situé à la 6^e marque de graduation à partir de la gauche.
Puisque les marques de graduation sur la droite numérique sont espacées de manière égale, la valeur de R doit être égale à la moitié de la valeur de U (car 3 est la moitié de 6).
Donc, lorsqu'on divise la valeur de R par la valeur de U, on obtient $\frac{1}{2}$, ou 0,5.

Réponse : (B)

9. Puisque le triangle est un triangle isocèle, la longueur de côté inconnue est aussi égale à 12 cm.
Le triangle a un périmètre de $14 + 12 + 12 = 38$ cm tandis que le rectangle a un périmètre de $x + 8 + x + 8 = 2x + 16$ cm.
Puisque le périmètre du triangle est égal à celui du rectangle, on a $2x + 16 = 38$.
Puisque $22 + 16 = 38$, donc $2x = 22$, d'où $x = 11$.

Réponse : (C)

10. Dans le tableau suivant, on dresse la liste des diviseurs de chacun des choix de réponse (autres que le nombre lui-même) et on détermine leurs sommes.

Choix de réponse	Diviseurs	Somme des diviseurs
8	$1, 2, 4$	$1 + 2 + 4 = 7$
10	$1, 2, 5$	$1 + 2 + 5 = 8$
14	$1, 2, 7$	$1 + 2 + 7 = 10$
18	$1, 2, 3, 6, 9$	$1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21$
22	$1, 2, 11$	$1 + 2 + 11 = 14$

Les choix de réponse $8, 10, 14$ et 22 ont chacun une somme de diviseurs inférieure au nombre lui-même.
Donc, aucun de ces quatre choix de réponse n'est un nombre abondant. (On attribue à ces derniers le nom de «nombres déficients».)
Les diviseurs de 18 ont une somme de 21. Puisque cette somme est supérieure à 18, ce dernier est donc un nombre abondant.

Réponse : (D)

11. Puisque sept boîtes contiennent chacune exactement 10 biscuits, il doit donc y avoir $7 \times 10 = 70$ biscuits en tout.
Si les biscuits sont partagés également entre 5 personnes, alors chaque personne recevra $70 \div 5 = 14$ biscuits.

Réponse : (A)

12. Puisqu'Abdul a 9 ans de plus que Susie et que Binh a 2 ans de plus que Susie, alors Abdul a $9 - 2 = 7$ ans de plus que Binh.
Par exemple, si Susie avait 10 ans, alors Abdul aurait $9 + 10 = 19$ ans tandis que Binh aurait $2 + 10 = 12$ ans. On remarque donc qu'Abdul a $19 - 12 = 7$ ans de plus que Binh.

Réponse : (E)

13. Puisque les points $P(15, 55)$ et $Q(26, 55)$ ont la même ordonnée, la distance qui les sépare est donc égale à la différence positive de leurs abscisses, soit $26 - 15 = 11$.
De même, puisque les points $R(26, 35)$ et $Q(26, 55)$ ont la même abscisse, la distance qui les sépare est donc égale à la différence positive de leurs ordonnées, soit $55 - 35 = 20$.
Puisque $PQ = 11$ et $RQ = 20$, le rectangle $PQRS$ a donc une aire de $11 \times 20 = 220$.

Réponse : (C)

14. Avant que Jacques ne commence à manger les bonbons haricots, il y avait $15 + 20 + 16 = 51$ bonbons dans la boîte.
Après que Jacques en ait mangé deux, il n'en reste plus que $51 - 2 = 49$.
L'un des bonbons que Jacques a mangé était vert tandis que l'autre était bleu.
Ainsi, après avoir mangé ces deux bonbons, la boîte contient toujours 15 bonbons rouges.
Sachant que chacun des bonbons haricots restants a les mêmes chances d'être choisi, la probabilité de choisir un bonbon rouge est égale à $\frac{15}{49}$.

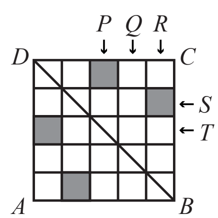
Réponse : (C)

15. *Solution 1*
Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure, donc 1 heure et 52 minutes font $60+52 = 112$ minutes.
Si Émile termine la course en 54 minutes, soit 4 minutes de moins qu'Olivia, alors Olivia terminera la course en 58 minutes.
Leurs temps de course totaliseront donc $54 + 58 = 112$ minutes, ce qu'il fallait.
Donc, Olivia a complété la course en 58 minutes.

Solution 2
Comme dans la solution 1, leurs temps de course ont totalisé 112 minutes.
Si Émile avait pris 4 minutes de plus pour compléter la course, son temps de course aurait été égal à celui d'Olivia. Leurs temps de course auraient donc totalisé $112 + 4 = 116$ minutes.
Si leurs temps de course étaient égaux et totalisaient 116 minutes, on aurait pu dire qu'ils ont chacun terminé la course en $116 \div 2 = 58$ minutes.
Donc, Olivia a complété la course en 58 minutes.

Réponse : (C)

16. Afin que le carré $ABCD$ soit symétrique par rapport à la droite BD, les cases P et S devraient être ombrées.



Pour le voir, on peut remarquer que les sommets A et C sont des images l'un de l'autre d'une réflexion par rapport à la droite BD. Donc, les côtés DA et DC sont aussi des images l'un de l'autre d'une réflexion par rapport à la droite BD.
De plus, dans le carré $ABCD$, la première colonne et la première rangée sont aussi des images l'une de l'autre d'une réflexion par rapport à la droite BD.
Donc, lors d'une réflexion par rapport à la droite BD, la case ombrée située dans la rangée 3 de la colonne 1 a une image située dans la rangée 1 de la colonne 3 (soit la case P).
De façon générale, lors d'une réflexion par rapport à la droite BD, l'image de la case située dans la rangée r de la colonne c est celle située dans la rangée c de la colonne r.
Donc, lors d'une réflexion par rapport à la droite BD, la case ombrée située dans rangée 5 de la colonne 2 a une image située dans la rangée 2 de la colonne 5 (soit la case S).

Réponse : (A)

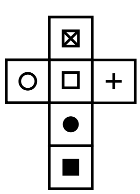
17. Si Rosie dépose 30 \$ par mois pendant m mois, elle économisera $30m$ dollars.
Puisque Rosie a 120 \$ dans son compte aujourd'hui, alors, après m dépôts, Rosie aura économisé $120 + 30m$ dollars en tout.

Réponse : (E)

18. Les triangles isocèles ont deux angles de même mesure. Donc les possibilités pour ces deux triangles sont :
1) Les deux angles égaux ont chacun une mesure de $70°$, ou
2) Aucun des deux angles égaux n'a une mesure de $70°$.
(On remarque qu'un triangle ne peut avoir trois angles égaux mesurant chacun $70°$ car leur somme serait alors de $3 \times 70° = 210°$, soit une valeur supérieure à $180°$.)
Si les deux angles égaux ont chacun une mesure de $70°$, alors le troisième angle aura une mesure de $180° - 2 \times 70° = 180° - 140° = 40°$.
Si aucun des deux angles égaux n'a une mesure de $70°$, donc les deux angles égaux ont des mesures dont la somme est de $180° - 70° = 110°$. Donc, la mesure de chacun des deux angles égaux est égale à la moitié de $110°$, soit $55°$.
On remarque que dans le premier triangle, la mesure de chacun des deux angles restants ($70°$ et $40°$) est paire tandis que dans le second triangle, la mesure de chacun des deux angles restants ($55°$ et $55°$) est impaire.
Dans le premier triangle, les deux angles égaux ont des mesures dont la somme est de $S = 70° + 70° = 140°$.
Dans le second triangle, les deux angles égaux ont des mesures dont la somme est de $T = 55° + 55° = 110°$.
$S + T$ a donc une valeur de $140° + 110° = 250°$.

Réponse : (B)

19. On commence d'abord en constatant qu'il y a 6 symboles différents et que chacune des faces du cube doit contenir un symbole différent.
On numérote les trois vues du cube, de gauche à droite : soit 1 la première vue, 2 la deuxième vue et 3 la troisième vue.
On voit dans chacune des vues 1 et 2 une face contenant le symbole ⊠ .
Quel symbole se trouve sur la face opposée à celle contenant le ⊠ ?
Dans la vue 1, puisque □ et ○ paraissent sur des faces adjacentes à celle qui contient le ⊠, aucun des deux ne peut être le symbole contenu dans la face opposée à celle qui contient le ⊠ .
Dans la vue 2, puisque ■ et + paraissent sur des faces adjacentes à celle qui contient le ⊠ , aucun des deux ne peut être le symbole contenu dans la face opposée à celle qui contient le ⊠ .
À ce point-ci dans nos démarches, il ne reste plus qu'un seul symbole, ● est donc le symbole contenu dans la face opposée à celle qui contient le ⊠ et vice versa.
On voit le patron du cube dans la figure ci-dessous.



Réponse : (C)

20. À chacun des quatre lancers de la pièce, Jeanne se déplacera soit d'un point vers le haut soit d'un point vers la droite.
Puisque Jeanne peut se déplacer dans deux directions différentes à chacun des quatre lancers de la pièce, il y a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ chemins différents qui peuvent la mener à l'un des points P, Q, R, S ou T.
Si l'on désigne H comme étant un déplacement vers le haut et D comme étant un déplacement vers la droite, on peut représenter les 16 chemins possibles de la manière suivante : $HHHH$, $HHHD$, $HHDH$, $HHDD$, $HDHH$, $HDHD$, $HDDH$, $HDDD$, $DHHH$, $DHHD$, $DHDH$, $DHDD$, $DDHH$, $DDHD$, $DDDH$, $DDDD$.

Lorsqu'on lance une pièce, les deux résultats possibles, pile ou face, sont équiprobables et ont comme résultats respectifs un déplacement d'un point vers la droite et un déplacement d'un point vers le haut.
Autrement dit, les 16 chemins que l'on peut obtenir à partir des quatre lancers sont tous des résultats équiprobables.
Donc, après quatre lancers de la pièce, la probabilité que Jeanne soit située au point R est égale au nombre de chemins qui mènent au point R divisé par le nombre total de chemins possibles, soit 16.
Parmi les 16 chemins, combien mènent au point R ?
En commençant à A, un chemin peut avoir R comme point final s'il contient deux déplacements vers le haut (deux H) et deux déplacements vers la droite (deux D).
Il y a 6 tels chemins : $HHDD$, $HDHD$, $HDDH$, $DHHD$, $DHDH$, $DDHH$.
(Par ailleurs, on remarque que chacun des 10 autres chemins mènera à l'un des 4 points P, Q, S, T.)
Après quatre lancers de la pièce, la probabilité que Jeanne soit située au point R est égale à $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Réponse : (B)

21. Puisque chaque nombre de quatre chiffres doit être supérieur à 2000, on obtient le plus petit de ceux-ci, 2020, en répétant le nombre de deux chiffres 20.
Puisque chaque nombre de quatre chiffres doit être inférieur à 10 000, on obtient le plus grand de ceux-ci, 9999, en répétant le nombre de deux chiffres 99.
On peut répéter chaque nombre de deux chiffres entre 20 et 99 afin d'obtenir un nombre de quatre chiffres entre 2000 et 10 000.
Au total, il y a $99 - 20 + 1 = 80$ nombres qui remplissent les conditions de l'énoncé.

Réponse : (A)

22. Céline a dépensé 5,00 \$ pour des bonbons du type A et 7,00 \$ pour des bonbons du type B, soit un total de 12,00 \$.
Le prix moyen de tous les bonbons qu'elle a acheté était de 1,50 \$ par 100 grammes.
C'est-à-dire que Céline aurait dépensé 1,50 \$ si elle avait acheté 100 grammes de bonbons.
Donc, si elle avait acheté 200 grammes de bonbons, elle aurait dépensé $2 \times 1{,}50\ \$ = 3{,}00\ \$$.
Combien de grammes de bonbons Céline a-t-elle dû acheter afin d'avoir dépensé 12,00 \$?
Puisque $8 \times 1{,}50\ \$ = 12{,}00\ \$$ (ou $12{,}00\ \$ \div 1{,}50\ \$ = 8$), alors elle a dû acheter 800 grammes de bonbons en tout.
Puisque Céline a acheté 300 grammes de bonbons du type A, alors elle a acheté $800 - 300 = 500$ grammes de bonbons du type B.

Réponse : (C)

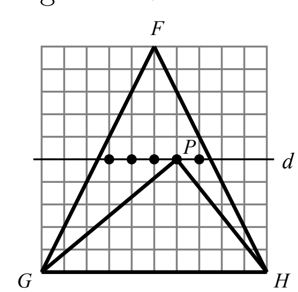
23. Si le premier entier strictement positif de la liste est a et le deuxième est b, alors on peut exprimer le troisième comme étant $a + b$, le quatrième comme étant $b + (a + b)$ ou $a + 2b$ et le cinquième comme étant $(a + b) + (a + 2b)$ ou $2a + 3b$.
Donc, on doit déterminer le nombre de couples d'entiers strictement positifs a et b (a étant inférieur à b car les termes de la liste dont disposés en ordre croissant) qui vérifient $2a+3b = 124$.
Quelle est la plus grande valeur possible de b ?
Si $b = 42$, donc $3b = 3 \times 42 = 126$, ce dernier est trop grand car $2a + 3b = 124$. (On remarque que plus la valeur de b est grande, plus celle de $3b$ est grande.)
Si $b = 41$, donc $3b = 3 \times 41 = 123$.
Dans ce cas, on a $2a = 124 - 123 = 1$. Or, on ne peut admettre 1 comme valeur de $2a$ puisque a est un entier strictement positif.

Si $b = 40$, donc $3b = 3 \times 40 = 120$. Cela signifie que $2a = 4$ ou $a = 2$.
Donc, 40 est la plus grande valeur possible de b.
Quelle est la plus petite valeur possible de b ?
Si $b = 26$, donc $3b = 3 \times 26 = 78$. Cela signifie que $2a = 124 - 78 = 46$ ou $a = 23$.
Si $b = 25$, donc $3b = 3 \times 25 = 75$.
Dans ce cas, on a $2a = 124 - 75 = 49$. Or, on ne peut admettre 49 comme valeur de $2a$ puisque a est un entier strictement positif.
Si $b = 24$, donc $3b = 3 \times 24 = 72$. Cela signifie que $2a = 124 - 72 = 52$ ou $a = 26$.
Or, puisque les termes de la liste sont disposés en ordre croissant et que la liste a 26 comme premier terme, le deuxième terme ne peut être 24.
Plus les valeurs de b sont petites, plus celles de a seront grandes. Donc, 26 est la plus petite valeur possible de b.
D'après les valeurs de b tentées jusqu'à présent, on remarque que $3b$ est impair lorsque b est impair (puisque deux entiers impairs ont un entier impair comme produit), donc $124 - 3b$ est impair (puisqu'un entier pair et un entier impair ont un entier impair comme différence).
Donc, lorsque b est impair, $124-3b$ est impair, d'où $2a$ est aussi impair (puisque $2a = 124-3b$).
Or, $2a$ aura toujours une valeur paire peu importe la valeur de l'entier a et donc b ne peut pas être impair.
À l'inverse, lorsque b est pair, $124 - 3b$ est pair (comme il fallait) et donc toutes les valeurs entières paires de b situées dans la fourchette de 26 à 40 (26 et 40 compris) vont satisfaire aux critères.
Ces valeurs de b sont 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38 et 40. Donc il y a 8 telles listes de cinq entiers strictement positifs qui ont 124 comme cinquième entier. Ces 8 listes sont : 2, 40, 42, 82, 124 ; 5, 38, 43, 81, 124 ; 8, 36, 44, 80, 124 ; 11, 34, 45, 79, 124 ; 14, 32, 46, 78, 124 ; 17, 30, 47, 77, 124 ; 20, 28, 48, 76, 124 ; 23, 26, 49, 75, 124.

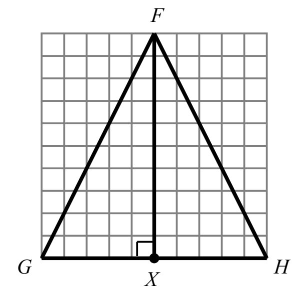
Réponse : (E)

24. On détermine d'abord l'aire du triangle FGH.
La base GH a une longueur de 10. Le triangle a une hauteur de 10 (soit la longueur de la droite perpendiculaire à GH et qui relie le point F à GH). Donc, le triangle FGH a une aire égale à $\frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$.
On veut déterminer lesquels des 41 points sont des emplacements possibles de P tels que l'on puisse avoir une aire égale à $\frac{1}{2} \times 50 = 25$ pour le triangle FPG ou le triangle GPH ou le triangle HPF. On commence d'abord en considérant les emplacements possibles de P tels que le triangle GPH ait une aire de 25.
La base GH a une longueur de 10 et donc la hauteur du triangle GPH (soit la longueur de la droite perpendiculaire à GH et qui relie le point P à GH) doit être égale à 5 (puisque $\frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25$). Puisque la distance séparant deux droites parallèles est toujours constante, on peut utiliser quelconque point P situé sur une droite parallèle à GH (la droite parallèle étant située à 5 unités de GH) afin de former un triangle GPH dont l'aire est égale à 25.

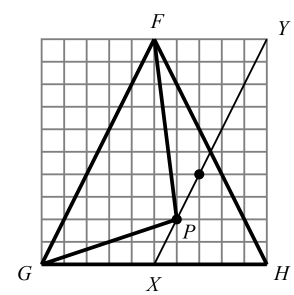
La droite d est parallèle à GH et est située à 5 unités au dessus de GH, donc quelconque point situé sur d se trouve à une distance de 5 unités de la base GH. Il y a 5 points qui sont à la fois situés sur d (ces points étant situés sur les points d'intersection des lignes du quadrillage) et à l'intérieur du triangle FGH. On voit ces 5 points dans la figure ci-contre ainsi que l'un des cinq triangles GPH possibles.



On considère ensuite les emplacements possibles de P tels que le triangle FPG ait une aire de 25.
On considère le point X situé sur GH de manière que FX est perpendiculaire à GH.
Puisque le triangle FGH est un triangle isocèle, alors FX divise l'aire du triangle FGH en deux et donc le triangle FXG a une aire de 25.
Or, si le point X est situé sur GH, alors il n'est pas situé *à l'intérieur* du triangle FGH.
Donc, X n'est pas un emplacement possible de P. Cela dit, on en tire des données précieuses qui nous aideront à formuler de nouvelles idées.
Si l'on considère FG comme étant la base du triangle FXG, donc la longueur de la droite perpendiculaire à FG et reliant le point X à FG est égale à la hauteur requise du triangle FXG telle que ce dernier ait une aire de 25.



Donc, on peut utiliser quelconque point P situé sur une droite parallèle à FG (la droite parallèle étant située à la même distance de FG que le point X) afin de former un triangle FPG dont l'aire est égale à 25.
(Cette propriété est la même que celle décrite précédemment pour le triangle GPH de base GH.)
Comment peut-on créer une droite qui est parallèle à FG et sur laquelle est situé le point X ?
En commençant au point G, si l'on se déplace de 5 unités vers la droite et de 10 unités vers le haut, on atteint le point F.
Donc, on commence au point X et on se déplace de 5 unités vers la droite et de 10 unités vers le haut afin d'atteindre le point que l'on désignera par Y.
N'importe quel point situé sur XY se trouve à une distance de la base FG égale à la hauteur requise du triangle FPG.
Il y a 2 points qui sont à la fois situés sur XY (ces points étant situés sur les points d'intersection des lignes du quadrillage) et à l'intérieur du triangle FGH.
(Afin d'atteindre ces deux points, on remarque qu'on peut effectuer un déplacement de 5 unités vers la droite et de 10 unités vers le haut en effectuant une série de déplacements de 1 unité vers la droite et de 2 unités vers le haut.)
On voit ces 2 points dans la figure ci-contre ainsi que l'un des deux triangles FPG possibles.



Finalement, on considère les emplacements possibles de P tels que le triangle HPF ait une aire de 25.
Du fait de la symétrie, ce cas est identique au cas précédent.
Donc, il y a 2 emplacements possibles de P tels que le triangle HPF ait une aire de 25.
Donc, $5+2+2 = 9$ triangles en tout ont une aire qui est exactement la moitié de celle du triangle FGH.

Réponse : (E)

25. Chaque 12 minutes, l'autobus A effectue un tour complet qui a P comme point de départ et d'arrivée.
Puisque $PX = XS$, l'autobus A parcourt la distance de P à X en $12 \div 4 = 3$ minutes. Il parcourt donc la distance de X à S à X en 6 minutes (de X à S en 3 minutes et de S à X en 3 minutes) et la distance de X à P à X en 6 minutes.
C'est-à-dire que l'autobus A arrive à X à 13 h 03 pour la première fois et puis continue d'y revenir toutes les 6 minutes.

On dresse une liste des heures d'arrivée de l'autobus A au point X dans le tableau suivant.

autobus A	13 h 03	13 h 09	13 h 15	13 h 21	13 h 27	13 h 33	13 h 39	13 h 45
13 h 51	13 h 57	14 h 03						

On remarque que l'autobus A arrive à X à 13 h 03 et qu'il y est aussi à 14 h 03, soit exactement une heure plus tard.
Ceci n'est en aucun cas inattendu car l'autobus A retourne à X toutes les 6 minutes, et 60 minutes (une heure) est divisible par 6.
Cela nous indique que l'autobus A continuera d'arriver au même nombre de minutes après chaque heure, soit à 14 h 03, à 14 h 09, à 14 h 15, ..., à 15 h 03, à 15 h 09, ..., à 17 h 03, à 17 h 09, ..., à 21 h 03, à 21 h 09, ..., à 21 h 51 et à 21 h 57.

Chaque 20 minutes, l'autobus B effectue un tour complet qui a Q comme point de départ et d'arrivée.
Puisque $QX = XT$, l'autobus B parcourt la distance de Q à X en $\frac{20}{4} = 5$ minutes. Il parcourt donc la distance de X à T à X en 10 minutes (de X à T en 5 minutes et de T à X en 5 minutes) et la distance de X à Q à X en 10 minutes.
C'est-à-dire que l'autobus B arrive à X à 13 h 05 pour la première fois et puis continue d'y revenir toutes les 10 minutes.
On dresse une liste des heures d'arrivée de l'autobus B au point X dans le tableau suivant.

autobus B	13 h 05	13 h 15	13 h 25	13 h 35	13 h 45	13 h 55	14 h 05

On remarque que l'autobus B arrive à X à 13 h 05 et qu'il y est aussi à 14 h 05, soit exactement une heure plus tard.
Ceci n'est en aucun cas inattendu car l'autobus B retourne à X toutes les 10 minutes, et 60 minutes (une heure) est divisible par 10.
Cela nous indique que l'autobus B continuera d'arriver au même nombre de minutes après chaque heure, soit à 14 h 05, à 14 h 15, à 14 h 25, ..., à 15 h 05, à 15 h 15, ..., à 17 h 05, à 17 h 15, ..., à 21 h 05, à 21 h 15, ..., à 21 h 45 et à 21 h 55.
D'après les deux tableaux ci-dessus, on voit que les autobus A et B arrivent chacun à X 15 minutes après l'heure et 45 minutes après l'heure.
Donc, entre 17 h et 22 h, ces deux autobus arrivent en même temps à X dix fois ($2 \times 5 = 10$).
Plus spécifiquement, ils y sont tous les deux à 17 h 15, à 17 h 45, à 18 h 15, à 18 h 45, à 19 h 15, à 19 h 45, à 20 h 15, à 20 h 45, à 21 h 15 et à 21 h 45.

Chaque 28 minutes, l'autobus C effectue un tour complet qui a R comme point de départ et d'arrivée.
Puisque $RX = XU$, l'autobus C parcourt la distance de R à X en $\frac{28}{4} = 7$ minutes. Il parcourt donc la distance de X à U à X en $2 \times 7 = 14$ minutes et la distance de X à R à X en 14 minutes.
C'est-à-dire que l'autobus C arrive à X à 13 h 07 pour la première fois et puis continue d'y revenir toutes les 14 minutes.
Contrairement aux autobus A et B, l'autobus C n'arrivera pas à X à des temps constants après chaque heure car 60 n'est pas divisible par 14.
Après 17 h, à quel temps précis l'autobus C arrivera-t-il à X pour la première fois ?
Puisque 238 est un multiple de 14 ($14 \times 17 = 238$), l'autobus C arrivera à X 238 minutes après qu'il ait quitté X à 13 h 07.
Puisque 238 minutes est 2 minutes de moins que 4 heures ($4 \times 60 = 240$), l'autobus C arrivera à X à 17 h 05. (Donc, après 17 h, l'autobus C arrivera à X à 17 h 05 pour la première fois.)
L'autobus B arrivera aussi à X à 17 h 05.
Entre 17 h 05 et 22 h, y a-t-il eu d'autres moments où les autobus B et C sont arrivés à X en

même temps ?
L'autobus B arrive à X toutes les 10 minutes tandis que l'autobus C arrive à X toutes les 14 minutes.
Puisque 70 est le plus petit multiple commun à 10 et 14, alors les autobus B et C arriveront chacun à X toutes les 70 minutes après 17 h 05, soit à 18 h 15, à 19 h 25, à 20 h 35 et à 21 h 45.
On détermine ensuite s'il y a des moments où les autobus A et C arrivent à X en même temps.
Après 17 h 05, l'autobus C retourne à X toutes les 14 minutes, soit à 17 h 19, à 17 h 33, à 17 h 47, ...
L'autobus A arrive aussi à X à 17 h 33.
Entre 17 h 33 et 22 h, y a-t-il eu d'autres moments où les autobus A et C sont arrivés à X en même temps ?
L'autobus A arrive à X toutes les 6 minutes tandis que l'autobus C arrive à X toutes les 14 minutes.
Puisque 42 est le plus petit multiple commun à 6 et 14, alors les autobus A et C arriveront chacun à X toutes les 42 minutes après 17 h 33, soit à 18 h 15, à 18 h 57, à 19 h 39, à 20 h 21, à 21 h 03 et à 21 h 45.
Deux autobus sont arrivés à X en même temps entre 17 h et 22 h dans les cas suivants :

- autobus A et autobus B : les autobus A et B arrivent chacun à X 15 minutes après l'heure et 45 minutes après l'heure.
- autobus B et autobus C : à 17 h 05, à 18 h 15, à 19 h 25, à 20 h 35 et à 21 h 45.
- autobus A et autobus C : à 17 h 33, à 18 h 15, à 18 h 57, à 19 h 39, à 20 h 21, à 21 h 03 et à 21 h 45.

Finalement, on détermine le nombre de moments différents où deux autobus ou plus sont arrivés à X en même temps.
Les autobus A et B arrivent à X à 10 moments différents.
Les autobus B et C arrivent à X à 5 moments différents. Or, parmi ces 5 moments, 2 ont déjà été pris en compte (18 h 15 et 21 h 45), donc seuls 3 sont nouveaux.
Les autobus A et C arrivent à X à 7 moments différents. Or, parmi ces 7 moments, 2 ont déjà été pris en compte (18 h 15 et 21 h 45), donc seuls 5 sont nouveaux.
Donc, entre 17 h et 22 h, deux autobus ou plus sont arrivés à X à $10 + 3 + 5 = 18$ reprises.

Réponse : (A)

8^e année

1. Lorsqu'on inclut 1 dans la liste et qu'on dispose les termes de cette liste en ordre croissant, on obtient $-0{,}2$; $0{,}03$; $0{,}76$; 1 ; $1{,}5$.
   Donc, il y a 3 nombres dans la liste qui sont inférieurs à 1, soit $-0{,}2$, $0{,}03$ et $0{,}76$.

   Réponse : (D)

2. Si 4 cartons de lait de 1 litre chacun coûtent en tout 4,88 \$, alors un carton de lait de 1 litre coûte 4,88 \$ $\div$ 4 = 1,22 \$.

   Réponse : (E)

3. Parmi les choix de réponse, $\frac{12}{2} = 6$ est la seule fraction égale à un nombre entier.

   Réponse : (E)

4. Puisque $x + y = 0$, alors x et y ont des valeurs opposées.
   Puisque $x = 4$, alors $y = -4$. (On peut vérifier que $4 + (-4) = 0$.)

   Réponse : (E)

5. La longueur de la base est égale à la distance séparant le point $(4, 0)$ et l'origine, soit une distance de 4.
   La hauteur est égale à la distance séparant le point $(0, 6)$ et l'origine, soit une distance de 6.
   Donc, le triangle a une aire de $\frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$.
   (On remarque que la base et la hauteur sont perpendiculaires l'une à l'autre.)

   Réponse : (A)

6. Les nombres entiers entre 2 et 20 dont la racine carrée est un nombre entier sont : 4, 9, 16 (puisque $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$).
   On remarque que le carré d'un nombre entier est égal à un carré parfait.
   C'est-à-dire que les cinq premiers carrés parfaits positifs sont : $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$ et $5^2 = 25$.
   Parmi ces cinq, trois sont situés entre 2 et 20.

   Réponse : (D)

7. *Solution 1*
   Il y a 5 stylos différents qu'Yvon peut choisir pour chacun des 4 cahiers différents.
   Donc, il y a $4 \times 5 = 20$ combinaisons différentes de cahiers et de stylos qu'il pourrait apporter à son cours.

   Solution 2
   Soient les 4 cahiers représentés par A, B, C et D et soient les 5 stylos représentés par 1, 2, 3, 4 et 5.
   Par exemple, la combinaison $A1$ représente le choix du cahier A et du stylo 1.
   Donc, si Yvon choisit le cahier A, il peut choisir l'un des stylos 1, 2, 3, 4 ou 5. Il y a donc 5 combinaisons possibles qui contiennent le cahier A comme choix : $A1, A2, A3, A4, A5$
   De même, il y a 5 choix de stylos possibles pour chacun des choix de cahier.
   Donc, les combinaisons possibles restantes sont : $B1, B2, B3, B4, B5, C1, C2, C3, C4, C5, D1, D2, D3, D4, D5$.
   Donc, il y a 20 combinaisons différentes de cahiers et de stylos qu'il pourrait apporter à son cours.

   Réponse : (C)

8. On remarque d'abord l'angle droit dans le diagramme circulaire.
Puisque 90° est $\frac{1}{4}$ d'un angle plein (360°), alors $\frac{1}{4}$ des élèves ont choisi les pommes comme fruit préféré.
Si $\frac{1}{4}$ des élèves ont choisi les pommes, alors le restant des élèves, soit $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, ont choisi les bananes.
Si 168 élèves représentent $\frac{3}{4}$ du nombre total d'élèves, donc $168 \div 3 = 56$ élèves représentent $\frac{1}{4}$ du nombre total d'élèves.
Donc, 56 élèves ont choisi les pommes comme fruit préféré.

Réponse : (B)

9. Il y a 8 lettres dans le sac dont 2 sont des B.
Si Elina choisit au hasard l'une des 8 lettres, la probabilité qu'elle choisisse un B est égale à $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Réponse : (A)

10. Le résultat qu'obtient Balil, soit b, est 5 de plus que le nombre qu'a choisi Vita.
Le résultat qu'obtient Cali, soit c, est 5 de moins que le nombre qu'a choisi Vita.
Donc, la différence entre leurs résultats, $b - c$, est égale à 10.
Par exemple, si Vita choisit 8 comme nombre, alors $b = 8 + 5 = 13$, $c = 8 - 5 = 3$ et $b - c = 13 - 3 = 10$.

Réponse : (E)

11. L'autobus s'arrête à la bibliothèque à 13 h, à 13 h 20 et à 13 h 40.
De surcroît, l'autobus s'arrête à la bibliothèque à 14 h, à 14 h 20 et à 14 h 40.
De même, l'autobus s'arrête à la bibliothèque à x h, à x h 20 et à x h 40 pour $x = 15$, 16 et 17.
Finalement, l'autobus s'arrête pour la dernière fois à la bibliothèque à 18 h.
En tout, l'autobus s'est arrêté à la bibliothèque $3 \times 5 + 1 = 16$ fois.

Réponse : (A)

12. *Solution 1*
On considère d'abord la colonne des unités de l'addition. La somme $R + R$ a 2 comme chiffre des unités.
Donc, les seules possibilités sont $R = 1$ ou $R = 6$ ($1 + 1 = 2$ et $6 + 6 = 12$ ont chacun 2 comme chiffre des unités).
Si $R = 1$, on sait que la somme des chiffres de la colonne des unités ne donnera aucune retenue.
Dans ce cas, la somme $Q + Q$ aura 1 comme chiffre des unités. Or, cela est impossible car $Q + Q = 2Q$ est un nombre pair pour tous les chiffres possibles de Q.
Donc, $R = 6$, d'où $R + R = 12$. Donc la somme des chiffres de la colonne des unités a donné une retenu de 1.
On considère ensuite la colonne des dizaines de l'addition. La somme $Q+Q+1$ a 1 comme chiffre des unités. Donc, la somme $Q + Q$ doit avoir 0 comme chiffre des unités.
Donc, les seules possibilités sont $Q = 0$ ou $Q = 5$ ($0 + 0 = 0$ et $5 + 5 = 10$ ont chacun 0 comme chiffre des unités).
Si $Q = 0$, on sait que la somme des chiffres de la colonne des dizaines ne donnera aucune retenue.
Or, cela est impossible car la colonne des centaines a une somme de 10 et P, n'ayant comme valeurs possibles que des chiffres, ne peut être égal à 10.
Donc, $Q = 5$, d'où $Q + Q + 1 = 11$. Donc la somme des chiffres de la colonne des dizaines a donné une retenu de 1.
La colonne des centaines a une somme de 10, donc $P + 1 = 10$ ou $P = 9$.
La valeur de $P + Q + R$ est égale à $9 + 5 + 6 = 20$.

Solution 2
QR est un nombre de deux chiffres et est donc inférieur à 100.
PQR et QR ont une somme supérieure à 1000. Donc, PQR doit être supérieur à 900 d'où P est donc égal à 9.
Puisque la colonne des centaines a une somme de 10, la somme des chiffres de la colonne des dizaines a dû donner une retenu de 1.
En considérant les colonnes des dizaines et des unités ensemble, on voit que la somme $QR+QR$ a 2 comme chiffre des unités, 1 comme chiffre des dizaines et 1 comme chiffre des centaines (soit la retenue de 1 de la colonne des dizaines). Donc, $QR + QR = 112$, d'où $QR = 56$.
La valeur de $P + Q + R$ est égale à $9 + 5 + 6 = 20$.

Réponse : (E)

13. *Solution 1*
Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure, donc 1 heure et 52 minutes font $60+52 = 112$ minutes.
Si Émile termine la course en 54 minutes, soit 4 minutes de moins qu'Olivia, alors Olivia terminera la course en 58 minutes.
Leurs temps de course totaliseront donc $54 + 58 = 112$ minutes, ce qu'il fallait.
Donc, Olivia a complété la course en 58 minutes.

Solution 2
Comme dans la solution 1, leurs temps de course ont totalisé 112 minutes.
Si Émile avait pris 4 minutes de plus pour compléter la course, son temps de course aurait été égal à celui d'Olivia. Leurs temps de course auraient donc totalisé $112 + 4 = 116$ minutes.
Si leurs temps de course étaient égaux et totalisaient 116 minutes, on aurait pu dire qu'ils ont chacun terminé la course en $116 \div 2 = 58$ minutes.
Donc, Olivia a complété la course en 58 minutes.

Réponse : (C)

14. Dans le triangle ABC, $\angle ABC = 90°$.
Donc, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = 34^2 - 16^2 = 1156 - 256$ ou $BC^2 = 900$, d'où $BC = \sqrt{900} = 30$ m. Le rectangle $ABCD$ a un périmètre de $16 + 30 + 16 + 30 = 92$ m.

Réponse : (D)

15. Si Francesca choisit d'abord -4 comme premier entier, il n y a aucun entier dans la liste qu'elle pourra choisir comme second afin d'obtenir une somme de 3 (6 est l'entier le plus grand de la liste et $-4 + 6 = 2$).
Si elle choisit d'abord -3 comme premier entier, elle peut choisir 6 comme second afin d'obtenir une somme de 3.
Si elle choisit d'abord -2 comme premier entier, elle peut choisir 5 comme second afin d'obtenir une somme de 3.
Si elle choisit d'abord -1 comme premier entier, elle peut choisir 4 comme second afin d'obtenir une somme de 3.
Si elle choisit d'abord 0 comme premier entier, elle peut choisir 3 comme second afin d'obtenir une somme de 3.
Si elle choisit d'abord 1 comme premier entier, elle peut choisir 2 comme second afin d'obtenir une somme de 3.
Si Francesca choisit d'abord 2 (ou n'importe quel entier supérieur à 2), il n y a aucun entier dans la liste qu'elle pourra choisir comme second afin d'obtenir une somme de 3 (selon l'énoncé, le second entier doit être supérieur au premier, donc, dans ce cas, la somme sera supérieure à 5).
Donc, 5 tels couples ont 3 comme somme de leurs entiers.

Réponse : (B)

16. Puisque le triangle QRS est un triangle rectangle isocèle avec $QR = SR$, alors $\angle RQS = \angle RSQ = 45^\circ$.
Puisque deux angles opposés par le sommet ont la même mesure, $\angle SUV = \angle PUQ = y^\circ$ et $\angle SVU = \angle RVT = y^\circ$.
Dans le triangle SVU, $\angle VSU + \angle SUV + \angle SVU = 180^\circ$ ou $45^\circ + y^\circ + y^\circ = 180^\circ$ ou $2y = 135$, d'où $y = 67.5$.

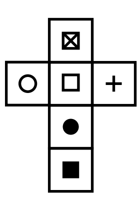
Réponse : (C)

17. Si l'on place les cinq nombres d'une liste en ordre croissant, la médiane est égale au troisième nombre (le nombre du milieu) de la liste.
Puisque x et y doivent être des entiers, les valeurs de x et y doivent appartenir à exactement l'une des trois possibilités suivantes :
- x et y sont chacun inférieur ou égal à 11, ou
- x et y sont chacun supérieur ou égal à 13, ou
- au moins l'un de x ou y est égal à 12.

Si x et y sont chacun inférieur ou égal à 11, alors 11 est la médiane de la liste.
(Dans ce cas, la liste peut avoir comme arrangement x, y, 11, 12, 13 ou y, x, 11, 12, 13.)
Si x et y sont chacun supérieur ou égal à 13, alors 13 est la médiane de la liste.
(Dans ce cas, la liste peut avoir comme arrangement 11, 12, 13, x, y ou 11, 12, 13, y, x.)
Si au moins l'un de x ou y est égal à 12, la liste contient les nombres 11, 12, 12, 13 ainsi qu'un cinquième nombre.
Lorsqu'on place les nombres de cette liste en ordre croissant, les deux 12 prendront soit les deuxième et troisième places de la liste, soit les troisième et quatrième places de la liste, dépendant de la valeur du nombre inconnu (ce dernier étant soit inférieur ou égal à 12 soit supérieur ou égal à 12).
Dans les deux cas, 12 est la médiane.
Donc, il y a 3 différentes médianes possibles pour les pointages des 5 matchs de Marc.

Réponse : (C)

18. On commence d'abord en constatant qu'il y a 6 symboles différents et que chacune des faces du cube doit contenir un symbole différent.
On numérote les trois vues du cube, de gauche à droite : soit 1 la première vue, 2 la deuxième vue et 3 la troisième vue.
On voit dans chacune des vues 1 et 2 une face contenant le symbole ⊠ .
Quel symbole se trouve sur la face opposée à celle contenant le ⊠ ?
Dans la vue 1, puisque □ et ○ paraissent sur des faces adjacentes à celle qui contient le ⊠, aucun des deux ne peut être le symbole contenu dans la face opposée à celle qui contient le ⊠ .
Dans la vue 2, puisque ■ et + paraissent sur des faces adjacentes à celle qui contient le ⊠ , aucun des deux ne peut être le symbole contenu dans la face opposée à celle qui contient le ⊠ .
À ce point-ci dans nos démarches, il ne reste plus qu'un seul symbole, ● est donc le symbole contenu dans la face opposée à celle qui contient le ⊠ et vice versa.
On voit le patron du cube dans la figure ci-dessous.



Réponse : (C)

19. Puisque X est égal à 20 % de 50, alors $X = 0{,}20 \times 50 = 10$.
Puisque 20 % de 100 est égal à 20, alors 20 % de 200 est égal à 40. Donc $Y = 200$.
Puisque 40 est égal à Z % de 50, alors $Z = \frac{40}{50} \times 100 = 80$.
(On peut vérifier que 80 % de 50 est effectivement égal à $0{,}80 \times 50 = 40$.)
Donc, $X + Y + Z = 10 + 200 + 80$ ou $X + Y + Z = 290$.

Réponse : (D)

20. On commence d'abord en exprimant $\frac{20}{19}$ d'une forme similaire à celle du membre de droite de l'équation.
On écrit $\frac{20}{19}$ sous la forme d'un nombre fractionnaire : $\frac{20}{19} = 1\frac{1}{19} = 1 + \frac{1}{19}$.
Puisque $\frac{20}{19} = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{a}{b}}$ et $\frac{20}{19} = 1 + \frac{1}{19}$, alors $1 + \dfrac{1}{1 + \frac{a}{b}} = 1 + \frac{1}{19}$, donc $\dfrac{1}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{1}{19}$.
Les numérateurs de $\dfrac{1}{1 + \frac{a}{b}}$ et $\frac{1}{19}$ sont chacun égal à 1. Puisque ces fractions sont égales l'une à l'autre, alors leurs dénominateurs doivent aussi être égaux.
C'est-à-dire que $1 + \frac{a}{b} = 19$, d'où $\frac{a}{b} = 18$.
Puisque a et b sont des entiers strictement positifs, alors les fractions $\frac{a}{b}$ égales à 18 sont $\frac{18}{1}$, $\frac{36}{2}$, $\frac{54}{3}$ et ainsi de suite.
Donc, la plus petite valeur possible de $a + b$ est $18 + 1 = 19$.

Réponse : (B)

21. Le rapport des boules vertes aux boules jaunes était initialement de 3 : 7.
Autrement dit, il y avait 3 boules vertes dans le sac pour chaque 7 boules jaunes.
De manière équivalente, il y a $3n$ boules vertes pour chaque $7n$ boules jaunes, n étant un entier strictement positif.
Après que l'on ait retiré 9 boules de chaque couleur, le nombre de boules vertes dans le sac est égal à $3n - 9$ tandis que le nombre de boules jaunes est égal à $7n - 9$.
Le rapport de boules vertes aux boules jaunes est maintenant de 1 : 3, c'est-à-dire que le nombre de boules jaunes est égal à trois fois le nombre de boules vertes.
En multipliant le nombre de boules vertes par 3, on obtient $3 \times 3n - 3 \times 9$ ou $9n - 27$ boules vertes.
On isole n dans l'équation $9n - 27 = 7n - 9$ pour obtenir $9n - 7n = 27 - 9$ ou $2n = 18$, soit $n = 9$.
Au départ, on avait $3n$ boules vertes et $7n$ boules jaunes et donc un total de $3n + 7n = 10n$, soit $10 \times 9 = 90$ boules.
Remarque : S'il y avait 90 boules, 27 étaient vertes et 63 étaient jaunes (car $27 : 63 = 3 : 7$ et $27 + 63 = 90$). Après que l'on ait retiré 9 boules de chaque couleur, le rapport des boules vertes aux boules jaunes est alors de $18 : 54 = 1 : 3$, ce qu'il fallait.

Réponse : (B)

22. Un nombre est divisible par 6 s'il est à la fois divisible par 2 et par 3.
Un nombre de trois chiffres est divisible par 2 s'il est pair. Ce dernier doit donc avoir 0 ou 2 comme chiffre des unités.
Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
On considère les chiffres des dizaines et centaines possibles d'un nombre dont le chiffre des unités est 0.
Dans ce cas, le chiffre des dizaines et celui des centaines doivent avoir une somme divisible par 3 (car le chiffres des unités ne contribue aucunement à la somme des chiffres).
Dans le tableau suivant, on détermine les sommes possibles des chiffres des dizaines et des centaines.
Les sommes divisibles par 3 sont encerclées.

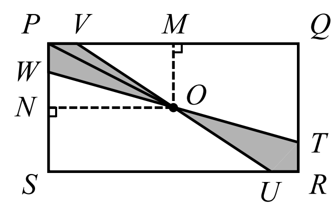
Le chiffre des dizaines

Le chiffre des centaines	5	6	7	8
1	6	7	8	9
2	7	8	9	10
3	8	9	10	11
4	9	10	11	12

Donc, les nombres de trois chiffres possibles ayant 0 comme chiffre des unités sont : $150, 180, 270, 360, 450$ et 480.
On considère les chiffres des dizaines et centaines possibles d'un nombre dont le chiffre des unités est 2.
Dans ce cas, le chiffre des dizaines et celui des centaines doivent avoir une somme égale à 2 de moins qu'un multiple de 3 (car le chiffre des unités ajoute 2 à la somme des chiffres).
Donc, les nombres de trois chiffres possibles ayant 2 comme chiffre des unités sont : $162, 252, 282, 372$ et 462.
Donc, parmi les nombres de trois chiffres possibles que l'on peut former, 11 sont divisibles par 6.

Réponse : (A)

23. On commence d'abord en reliant le centre du rectangle, O, au sommet P.
Au centre du rectangle O, on élève une perpendiculaire OM au côté PQ et on trace une perpendiculaire ON au côté PS.
Puisque O est le centre du rectangle, alors M est le milieu du côté PQ, on a donc $PM = \frac{1}{2} \times 4 = 2$.
De même, puisque N est le milieu du côté PS, alors $PN = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.



Le triangle PVO a pour base $PV = a$ et pour hauteur $OM = 1$ et a donc une aire égale à $\frac{1}{2} \times a \times 1 = \frac{1}{2}a$.
Le triangle PWO a pour base $PW = a$ et pour hauteur $ON = 2$ et a donc une aire égale à $\frac{1}{2} \times a \times 2 = a$.
Donc, les aires des deux triangles ont une somme égale à l'aire du quadrilatère $PWOV$, soit $\frac{1}{2}a + a = \frac{3}{2}a$.
De même, on peut montrer que le quadrilatère $RTOU$ a aussi une aire égale à $\frac{3}{2}a$. La région ombrée a donc une aire totale de $2 \times \frac{3}{2}a = 3a$.
Puisque le rectangle $PQRS$ a une aire égale à $4 \times 2 = 8$ et que l'aire de la région ombrée est égale à $\frac{1}{8}$ l'aire du rectangle $PQRS$, alors $3a = \frac{1}{8} \times 8$ ou $3a = 1$, d'où $a = \frac{1}{3}$.

Réponse : (D)

24. Chaque 12 minutes, l'autobus A effectue un tour complet qui a P comme point de départ et d'arrivée.
Puisque $PX = XS$, l'autobus A parcourt la distance de P à X en $12 \div 4 = 3$ minutes. Il parcourt donc la distance de X à S à X en 6 minutes (de X à S en 3 minutes et de S à X en 3 minutes) et la distance de X à P à X en 6 minutes.
C'est-à-dire que l'autobus A arrive à X à 13 h 03 pour la première fois et puis continue d'y revenir toutes les 6 minutes.

On dresse une liste des heures d'arrivée de l'autobus A au point X dans le tableau suivant.

autobus A	13 h 03	13 h 09	13 h 15	13 h 21	13 h 27	13 h 33	13 h 39	13 h 45	13 h 51	13 h 57	14 h 03

On remarque que l'autobus A arrive à X à 13 h 03 et qu'il y est aussi à 14 h 03, soit exactement une heure plus tard.
Ceci n'est en aucun cas inattendu car l'autobus A retourne à X toutes les 6 minutes, et 60 minutes (une heure) est divisible par 6.
Cela nous indique que l'autobus A continuera d'arriver au même nombre de minutes après chaque heure, soit à 14 h 03, à 14 h 09, à 14 h 15, ..., à 15 h 03, à 15 h 09, ..., à 17 h 03, à 17 h 09, ..., à 21 h 03, à 21 h 09, ..., à 21 h 51 et à 21 h 57.

Chaque 20 minutes, l'autobus B effectue un tour complet qui a Q comme point de départ et d'arrivée.
Puisque $QX = XT$, l'autobus B parcourt la distance de Q à X en $\frac{20}{4} = 5$ minutes. Il parcourt donc la distance de X à T à X en 10 minutes (de X à T en 5 minutes et de T à X en 5 minutes) et la distance de X à Q à X en 10 minutes.
C'est-à-dire que l'autobus B arrive à X à 13 h 05 pour la première fois et puis continue d'y revenir toutes les 10 minutes.
On dresse une liste des heures d'arrivée de l'autobus B au point X dans le tableau suivant.

autobus B	13 h 05	13 h 15	13 h 25	13 h 35	13 h 45	13 h 55	14 h 05

On remarque que l'autobus B arrive à X à 13 h 05 et qu'il y est aussi à 14 h 05, soit exactement une heure plus tard.
Ceci n'est en aucun cas inattendu car l'autobus B retourne à X toutes les 10 minutes, et 60 minutes (une heure) est divisible par 10.
Cela nous indique que l'autobus B continuera d'arriver au même nombre de minutes après chaque heure, soit à 14 h 05, à 14 h 15, à 14 h 25, ..., à 15 h 05, à 15 h 15, ..., à 17 h 05, à 17 h 15, ..., à 21 h 05, à 21 h 15, ..., à 21 h 45 et à 21 h 55.
D'après les deux tableaux ci-dessus, on voit que les autobus A et B arrivent chacun à X 15 minutes après l'heure et 45 minutes après l'heure.
Donc, entre 17 h et 22 h, ces deux autobus arrivent en même temps à X dix fois ($2 \times 5 = 10$).
Plus spécifiquement, ils y sont tous les deux à 17 h 15, à 17 h 45, à 18 h 15, à 18 h 45, à 19 h 15, à 19 h 45, à 20 h 15, à 20 h 45, à 21 h 15 et à 21 h 45.

Chaque 28 minutes, l'autobus C effectue un tour complet qui a R comme point de départ et d'arrivée.
Puisque $RX = XU$, l'autobus C parcourt la distance de R à X en $\frac{28}{4} = 7$ minutes. Il parcourt donc la distance de X à U à X en $2 \times 7 = 14$ minutes et la distance de X à R à X en 14 minutes.
C'est-à-dire que l'autobus C arrive à X à 13 h 07 pour la première fois et puis continue d'y revenir toutes les 14 minutes.
Contrairement aux autobus A et B, l'autobus C n'arrivera pas à X à des temps constants après chaque heure car 60 n'est pas divisible par 14.
Après 17 h, à quel temps précis l'autobus C arrivera-t-il à X pour la première fois ?
Puisque 238 est un multiple de 14 ($14 \times 17 = 238$), l'autobus C arrivera à X 238 minutes après qu'il ait quitté X à 13 h 07.
Puisque 238 minutes est 2 minutes de moins que 4 heures ($4 \times 60 = 240$), l'autobus C arrivera à X à 17 h 05. (Donc, après 17 h, l'autobus C arrivera à X à 17 h 05 pour la première fois.)
L'autobus B arrivera aussi à X à 17 h 05.
Entre 17 h 05 et 22 h, y a-t-il eu d'autres moments où les autobus B et C sont arrivés à X en

même temps ?
L'autobus B arrive à X toutes les 10 minutes tandis que l'autobus C arrive à X toutes les 14 minutes.
Puisque 70 est le plus petit multiple commun à 10 et 14, alors les autobus B et C arriveront chacun à X toutes les 70 minutes après 17 h 05, soit à 18 h 15, à 19 h 25, à 20 h 35 et à 21 h 45.
On détermine ensuite s'il y a des moments où les autobus A et C arrivent à X en même temps.
Après 17 h 05, l'autobus C retourne à X toutes les 14 minutes, soit à 17 h 19, à 17 h 33, à 17 h 47, ...
L'autobus A arrive aussi à X à 17 h 33.
Entre 17 h 33 et 22 h, y a-t-il eu d'autres moments où les autobus A et C sont arrivés à X en même temps ?
L'autobus A arrive à X toutes les 6 minutes tandis que l'autobus C arrive à X toutes les 14 minutes.
Puisque 42 est le plus petit multiple commun à 6 et 14, alors les autobus A et C arriveront chacun à X toutes les 42 minutes après 17 h 33, soit à 18 h 15, à 18 h 57, à 19 h 39, à 20 h 21, à 21 h 03 et à 21 h 45.
Deux autobus sont arrivés à X en même temps entre 17 h et 22 h dans les cas suivants :

- autobus A et autobus B : les autobus A et B arrivent chacun à X 15 minutes après l'heure et 45 minutes après l'heure.
- autobus B et autobus C : à 17 h 05, à 18 h 15, à 19 h 25, à 20 h 35 et à 21 h 45.
- autobus A et autobus C : à 17 h 33, à 18 h 15, à 18 h 57, à 19 h 39, à 20 h 21, à 21 h 03 et à 21 h 45.

Finalement, on détermine le nombre de moments différents où deux autobus ou plus sont arrivés à X en même temps.
Les autobus A et B arrivent à X à 10 moments différents.
Les autobus B et C arrivent à X à 5 moments différents. Or, parmi ces 5 moments, 2 ont déjà été pris en compte (18 h 15 et 21 h 45), donc seuls 3 sont nouveaux.
Les autobus A et C arrivent à X à 7 moments différents. Or, parmi ces 7 moments, 2 ont déjà été pris en compte (18 h 15 et 21 h 45), donc seuls 5 sont nouveaux.
Donc, entre 17 h et 22 h, deux autobus ou plus sont arrivés à X à $10 + 3 + 5 = 18$ reprises.

Réponse : (A)

25. L'étude de la *parité* d'un entier est de déterminer si cet entier est pair ou impair.
Quand deux entiers sont tous deux pairs ou tous deux impairs, ils sont dits de *même parité*.
Si un entier est pair tandis qu'un autre est impair, on dit que ces deux entiers sont de *parité différente*.
Lorsqu'on additionne deux entiers de même parité, on obtient un entier pair.
Lorsqu'on additionne deux entiers de parité différente, on obtient un entier impair.
On détermine la parité de chaque terme d'une suite FT (après le deuxième terme) à partir de la parité des deux premiers termes de la suite.
Par exemple, si chacun des deux premiers termes d'une suite FT est impair, alors le troisième terme sera pair (l'addition de deux entiers impairs donne une somme paire), le quatrième sera impair (l'addition d'un entier impair et d'un entier pair donne une somme impaire), le cinquième sera impair (l'addition d'un entier pair et d'un entier impair donne une somme impaire) et ainsi de suite.
Les deux premiers termes d'une suite FT ont 4 possibilités de parités ; soit impair et impair, soit pair et pair, soit impair et pair, soit pair et impair.
Dans le tableau suivant, on indique la parité des quelques premiers termes pour chacune des 4 possibilités de suites précédentes.

Nombre du terme	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parité #1	impair	impair	pair	impair	impair	pair	impair	impair	pair	impair
Parité #2	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair
Parité #3	impair	pair	impair	impair	pair	impair	impair	pair	impair	impair
Parité #4	pair	impair	impair	pair	impair	impair	pair	impair	impair	pair

La suite FT dont les deux premiers termes sont impairs (Parité #1) présente la régularité impair, impair, pair, pour chaque groupe succéssif de trois termes consécutifs commençant au premier terme.
Puisque la parité de chaque terme dépend de la parité des deux termes précédents, cette régularité (impair, impair, pair) se perpétuera à travers toute la suite.
C'est-à-dire que dans chaque groupe succéssif de trois termes consécutifs commençant au premier terme, un terme sur trois sera pair et deux termes sur trois seront impairs.
La régularité impair, impair, pair se termine à des nombres de termes qui sont des multiples de 3 (les termes de valeur paire sont les termes 3, 6, 9, 12, etc.).
Puisque 2019 est un multiple de 3 ($2019 = 3 \times 673$), $\frac{1}{3}$ des 2019 premiers termes seront pairs et $\frac{2}{3}$ seront impairs. Donc, il y a deux fois de plus de termes impairs que de termes pairs dans les 2019 premiers termes.
Le 2020^e terme est impair (puisque la régularité a un terme impair comme premier terme). Donc, dans une suite FT dont les deux premiers termes sont impairs, le nombre de termes de valeurs impaires est supérieur à 2 fois le nombre de termes de valeurs paires.
C'est justement cette caractéristique dans les suites FT qui nous intéressent.
Combien y a-t-il de suites FT dont chacun des deux premiers termes est un entier strictement positif impair et inférieur à $2m$?
Il y a $2m - 1$ entiers strictement positifs inférieurs à $2m$ (soit $1, 2, 3, 4, \ldots, 2m - 1$).
Puisque m est un entier strictement positif, $2m$ sera toujours un entier pair, d'où $2m - 1$ sera toujours un entier impair.
Donc, la liste des entiers de 1 à $2m - 1$ a un entier impair comme premier et dernier termes. Donc, la liste contient m entiers impairs et $m - 1$ entiers pairs.
Le premier terme de la suite est impair, on a donc m choix possibles pour ce premier terme.
De même, le deuxième terme de la suite est aussi impair, donc on a aussi m choix possibles pour ce deuxième terme.
En tout, il y a $m \times m$ ou m^2 suites FT dont les deux premiers termes sont chacun impair.

Y a-t-il une autre suite parmi les 3 autres types de suites FT dont le nombre de termes de valeurs impaires est supérieur à 2 fois le nombre de termes de valeurs paires ?
Sans aucun doute, la suite FT dont les deux premiers termes sont pairs (Parité #2) ne remplit pas la condition requise car chaque terme de la suite a une valeur paire.
La suite FT dont les deux premiers termes sont, respectivement, impair et pair (Parité #3) présente la régularité impair, pair, impair, pour chaque groupe succéssif de trois termes consécutifs commençant au premier terme.
C'est-à-dire que dans chaque groupe succéssif de trois termes consécutifs commençant au premier terme, un terme sur trois sera pair et deux termes sur trois seront impairs.
Comme on l'a montré précédemment, 2019 est un multiple de 3, donc $\frac{1}{3}$ des 2019 premiers termes seront pairs et $\frac{2}{3}$ seront impairs.
Donc, il y a deux fois plus de termes impairs que de termes pairs dans les 2019 premiers termes.
Le 2020^e terme est impair (puisque la régularité a un terme impair comme premier terme). Donc, dans une suite FT dont les premier et deuxième termes sont, respectivement, impair et pair, le

nombre de termes de valeurs impaires est supérieur à 2 fois le nombre de termes de valeurs paires.
Combien y a-t-il de suites FT dont les premier et deuxième termes sont, respectivement, impair et pair, et dont chacun de ces deux premiers termes est un entier strictement positif inférieur à $2m$?
Comme on l'a montré précédemment, la liste des entiers de 1 à $2m-1$ a un entier impair comme premier et dernier termes. Donc, la liste contient m entiers impairs et $m-1$ entiers pairs.
Le premier terme de la suite est impair, on a donc m choix possibles pour ce premier terme.
Le deuxième terme de la suite est pair, on a donc $m-1$ choix possibles pour ce deuxième terme.
En tout, il y a $m \times (m-1)$ suites FT dont les premier et deuxième termes sont, respectivement, impair et pair.

Finalement, on considère la suite FT dont les premier et deuxième termes sont, respectivement, pair et impair (Parité #4).
Il y a exactement deux fois plus de termes impairs que de termes pairs dans les 2019 premiers termes de cette suite (car elle présente la régularité pair, impair, impair, pour chaque groupe succéssif de trois termes consécutifs commençant au premier terme).
Cependant, dans ce cas, le 2020^e terme est paire, le nombre de termes de valeurs impaires est donc inférieur à 2 fois le nombre de termes de valeurs paires.

Donc, il y a $m^2 + m \times (m-1)$ suites FT qui remplissent les conditions requises.
Puisqu'il y a 2415 telles suites FT, on peut résoudre $m^2 + m \times (m-1) = 2415$ en procédant par tâtonnements.
En posant $m = 30$ dans l'équation $m^2 + m \times (m-1)$, on obtient $30^2 + 30 \times 29 = 1770$. Donc m est supérieur à 30.
En posant $m = 33$ dans l'équation $m^2 + m \times (m-1)$, on obtient $33^2 + 33 \times 32 = 2145$.
En posant $m = 34$ dans l'équation $m^2 + m \times (m-1)$, on obtient $34^2 + 34 \times 33 = 2278$.
En posant $m = 35$ dans l'équation $m^2 + m \times (m-1)$, on obtient $35^2 + 35 \times 34 = 2415$, soit le nombre de suites qu'il fallait.

RÉPONSE : (D)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2019

(7^e et 8^e années – Secondaire I et II)

le mercredi 15 mai 2019

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 mai 2019

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Jeff Anderson
Terry Bae
Jacquelene Bailey
Shane Bauman
Jenn Brewster
Ersal Cahit
Sarah Chan
Serge D'Alessio
Rich Dlin
Fiona Dunbar
Mike Eden
Barry Ferguson
Brian Fernandes
Judy Fox
Carley Funk
Steve Furino
John Galbraith
Lucie Galinon
Robert Garbary
Melissa Giardina
Rob Gleeson
Sandy Graham
Conrad Hewitt
Angie Hildebrand
Carrie Knoll
Judith Koeller
Laura Kreuzer
Paul Leistra
Bev Marshman
Josh McDonald
Paul McGrath
Mike Miniou
Carol Miron
Dean Murray
Jen Nelson
Ian Payne
Anne Petersen
J.P. Pretti
Kim Schnarr
Carolyn Sedore
Ashley Sorensen
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga
Heather Vo

Comité du concours Gauss

Ashley Sorensen (présidente), University of Waterloo, Waterloo, ON
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
Mark Bredin, Winnipeg, MB
Kora Lee Gallant, Madeline Symonds M.S., Hammonds Plains, NS
Sarah Garrett, Mitchell Woods P.S., Guelph, ON
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
John McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
David Switzer, Scott Central P.S., Richmond Hill, ON
Rachael Verbruggen, University of Waterloo, Waterloo, ON
Laurissa Werhun, Parkdale C.I., Toronto, ON
Robert Wong, Vernon Barford School, Edmonton, AB
Chris Wu, Ledbury Park E. and M.S., Toronto, ON
Lori Yee, E.B. Phin P.S., Pickering, ON

7e année

1. Erin reçoit 3 \$ par jour. Afin de reçevoir un total de 30 \$, il lui faudra $\dfrac{30\ \$}{3\ \$} = 10$ jours.

Réponse : (E)

2. En commençant à l'origine $(0, 0)$, le point $(2, 4)$ est situé à 2 unités à la droite and à 4 unités vers le haut.
Le point $(2, 4)$ est donc situé à D.

Réponse : (D)

3. Puisqu'un des quatre carrés identiques est ombré, donc la fraction du carré $PQRS$ qui est ombrée est $\frac{1}{4}$. Cette fraction est égale à 25 %.

Réponse : (C)

4. En additionant, on obtient $0{,}9 + 0{,}09 = 0{,}99$.

Réponse : (D)

5. Le mode correspond à la quantité de pluie qui revient le plus fréquemment dans les données.
D'après le diagramme, les quantités de pluie quotidiennes de dimanche à samedi sont respectivement de 6 mm, de 15 mm, de 3 mm, de 6 mm, de 3 mm, de 3 mm et de 9 mm.
Le mode pour la quantité de pluie pour la semaine est de 3 mm.

Réponse : (C)

6. Si $x = 3$,

$$\begin{array}{rclcl} 2x &=& 2\times 3 &=& 6 \\ 3x-1 &=& 3\times 3-1 &=& 8 \\ x+5 &=& 3+5 &=& 8 \\ 7-x &=& 7-3 &=& 4 \\ 6+2x &=& 6+2\times 3 &=& 12 \end{array}$$

Parmi les choix de réponse, la seule équation qui est vraie lorsque $x = 3$ est $3x - 1 = 8$.

Réponse : (B)

7. Lorsqu'on additionne -37 et 11, on obtient $-37 + 11 = -26$. La bonne réponse est donc (A).
Par ailleurs, on peut obtenir ce même résultat en soustrayant, $-26 - 11 = -37$.

Réponse : (A)

8. *Solution 1*
Le tiers de 396 est égal à $396 \div 3 = 132$. Donc, Joshua a lu les 132 premières pages du livre.
Afin de terminer son livre, il lui reste encore $396 - 132 = 264$ pages à lire.

Solution 2
Joshua a seulement lu le premier tiers du livre. Donc, il lui reste encore $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ du livre à lire.
Les deux tiers de 396 correspondent à $396 \times \frac{2}{3} = \frac{396\times 2}{3} = \frac{792}{3} = 264$.
Il lui reste donc 264 pages à lire.

Réponse : (A)

9. Un tour complet est égal à 360°.
Donc, $k^\circ + 90^\circ = 360^\circ$ d'où $k = 360 - 90 = 270$.

Réponse : (D)

10. *Solution 1*
La moyenne des nombres $20, 30, 40$ est égale à $\dfrac{20 + 30 + 40}{3} = \dfrac{90}{3} = 30$.
Puisque chacun des choix de réponse comprend trois nombres, les trois nombres du bon choix

de réponse doivent avoir une somme de $30 \times 3 = 90$ afin d'obtenir une moyenne de 30.
Parmi les choix de réponse, le seul qui comprend un ensemble de trois nombres dont la somme est égale à 90 est le choix (D) $(23 + 30 + 37 = 90)$.

Solution 2
Puisque 20 est 10 de moins que 30 et que 40 est 10 de plus que 30, alors la moyenne des nombres $20, 30, 40$ est égale à 30.
Dans chacun des choix de réponse, le nombre 30 est celui du milieu dans la liste des trois nombres. Donc, afin que la moyenne des trois nombres soit égale à 30, le premier nombre et le dernier nombre doivent se trouver à des «distances» égales de 30 (où l'un des nombres est inférieur à 30 tandis que l'autre est supérieur à 30).
En examinant le choix de réponse (D), on constate que 23 est 7 de moins que 30 et que 37 est 7 de plus que 30. La moyenne de ces trois nombres est donc égale à 30. (On peut vérifier que ceci n'est pas le cas pour chacun des quatre autres choix de réponse.)

Réponse : (D)

11. On a : $\sqrt{81} = 9$ et $9 = 3^2$, donc $\sqrt{81} = 3^2$.

Réponse : (B)

12. La largeur du rectancle $PQRS$ est égale à la distance horizontale entre le point P et le point Q (ou celle entre le point S et le point R) car ces deux points ont les mêmes ordonnées.
Cette distance est égale à la différence entre leurs abscisses, soit $4 - (-4) = 8$.
De même, la hauteur du rectangle $PQRS$ est égale à la distance verticale entre le point S et le point P (ou celle entre le point R et le point Q) car ces deux points ont les mêmes abscisses.
Cette distance est égale à la différence entre leurs ordonnées, soit $2 - (-2) = 4$.
L'aire du rectangle $PQRS$ est égale à $8 \times 4 = 32$.

Réponse : (B)

13. La régularité *La* – *Si* – *Do* – *Ré* – *Mi* – *Fa* – *Sol* comprend 7 touches blanches.
Puisque la première touche blanche est la note *La*, cette régularité se poursuit à chaque nombre de touches qui est un multiple de 7.
Puisque 28 est un multiple de 7, alors la 28^e touche blanche est la note *Sol* et donc la 29^e touche blanche est la note *La*, la 30^e touche blanche est la note *Si*, la 31^e touche blanche est la note *Do*, la 32^e touche blanche est la note *Ré* et la 33^e touche blanche est la note *Mi*.

Réponse : (E)

14. D'après le disque, les nombres premiers impairs sont $3, 5$ et 7.
Puisque le disque est divisé en 8 secteurs égaux, la probabilité que la flèche s'arrête dans un secteur dont le numéro est un nombre premier impair est égale à $\frac{3}{8}$.

Réponse : (C)

15. Les 12 pièces de Barry comprennent au moins une de chacune des 5 pièces de valeurs différentes.
La valeur totale de ces 5 pièces est de 2,00 \$ + 1,00 \$ + 0,25 \$ + 0,10 \$ + 0,05 \$ = 3,40 \$.
Barry pourrait avoir la plus petite somme d'argent si les $12 - 5 = 7$ pièces restantes étaient toutes des pièces de 0,05 \$ (la plus petite valeur possible d'une pièce de monnaie).
Donc, la plus petite somme d'argent que Barry peut avoir est :

$$3{,}40\ \$ + 7 \times 0{,}05\ \$ = 3{,}40\ \$ + 0{,}35\ \$ = 3{,}75\ \$.$$

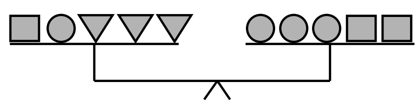
Réponse : (A)

16. *Solution 1*
Il existe 10 palindromes entre 100 et 200 : $101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181$ et 191.
Il existe 10 palindromes entre 200 et 300 : $202, 212, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 282$ et 292.
De même, il existe 10 palindromes entre 300 et 400, entre 400 et 500, entre 500 et 600, entre 600 et 700, entre 700 et 800, entre 800 et 900 et entre 900 et 1000.
Autrement dit, pour l'étendue des nombres de 100 à 1000, il existe 10 palindromes entre chacun des 9 couples de multiples consécutifs de 100.
Le nombre de palindromes entre 100 et 1000 est donc $10 \times 9 = 90$.

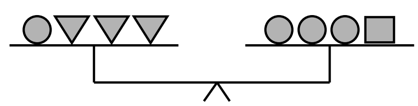
Solution 2
Chaque palindrome entre 100 et 1000 est un nombre à 3 chiffres de la forme aba où a est un chiffre de 1 à 9, où b est un chiffre de 0 à 9 et où les chiffres a et b ne sont pas forcément différents.
Il y a donc 9 choix pour le premier chiffre (le chiffre a). De plus, le choix du premier chiffre aura une conséquence sur le troisième chiffre qui, lui aussi, devra être a.
Il y a 10 choix pour le deuxième chiffre (le chiffre b). Il y a donc $9 \times 10 = 90$ choix pour a et b.
Ainsi, il existe 90 palindromes entre 100 et 1000.

Réponse : (B)

17. Selon la première balance, l'ensemble ○○○ a la même masse que l'ensemble ▽▽.
Selon la deuxième balance, l'ensemble □○▽ a la même masse que l'ensemble □□.
Donc, lorsqu'on additionne la masse de l'ensemble ▽▽ à celle de l'ensemble □○▽, on obtient une somme qui est égale à celle de l'addition de la masse de l'ensemble ○○○ à la masse de l'ensemble □□.
D'où la balance à deux bras équilibrée ci-dessous :



Les côtés gauche et droit de cette balance contiennent chacun un □. La balance reste donc en équilibre si on enlève un □ de chaque côté (puisqu'ils ont la même masse).
D'où la balance à deux bras équilibrée ci-dessous :



Ainsi, parmi les choix de réponse, l'ensemble ○▽▽▽ a la même masse que l'ensemble ○○○□.

Réponse : (D)

18. L'aire du rectangle de longueur x et de largeur y est égale à $x \times y$.
L'aire du triangle dont la base est de 16 et dont la hauteur est de x est égale à $\frac{1}{2} \times 16 \times x$ ou $8 \times x$.
L'aire du rectangle est égale à l'aire du triangle d'où $x \times y = 8 \times x$, ainsi $y = 8$.

Réponse : (C)

19. *Solution 1*
Chacune des quatre fractions a un numérateur de 1 et est équivalente aux trois autres fractions. Ainsi, chaque dénominateur doit être égal aux trois autres dénominateurs.
D'où $a - 2 = b + 2 = c + 1 = d - 3$.
On pose $b = 4$. Donc $a - 2 = 4 + 2 = c + 1 = d - 3$ ou $a - 2 = 6 = c + 1 = d - 3$. D'où $a = 8, c = 5$ et $d = 9$.

Donc le bon ordre est $b < c < a < d$.

Solution 2
Chacune des quatre fractions a un numérateur de 1 et est équivalente aux trois autres fractions.
Ainsi, chaque dénominateur doit être égal aux trois autres dénominateurs.
D'où $a - 2 = b + 2 = c + 1 = d - 3$.
De plus, en ajoutant 3 à chacun, on obtient $a + 1 = b + 5 = c + 4 = d$.
Puisque $d = a + 1$, alors d est un de plus que a, donc $a < d$.
Puisque $a + 1 = c + 4$, alors a est 3 de plus que c, donc $c < a$.
Puisque $c + 4 = b + 5$, alors c est un de plus que b, donc $b < c$.
Donc le bon ordre est $b < c < a < d$.

Réponse : (E)

20. Les nombres 14 et 21 sont des diviseurs de n.
Puisque $14 = 2 \times 7$, donc les nombres 2 et 7 sont aussi des diviseurs de n.
Puisque $21 = 3 \times 7$, donc le nombre 3 est un diviseur de n (comme l'est le nombre 7, chose qu'on a déjà remarqué).
Jusqu'à présent, les diviseurs positifs qu'admet n sont : $1, 2, 3, 7, 14$ et 21.
Puisque les nombres 2 et 3 sont des diviseurs de n, leur produit $2 \times 3 = 6$ est aussi un diviseur de n.
Puisque les nombres $2, 3$ et 7 sont des diviseurs de n, leur produit $2 \times 3 \times 7 = 42$ est aussi un diviseur de n.
Les diviseurs positifs qu'admet n sont donc : $1, 2, 3, 6, 7, 14, 21$ et 42.
Étant donné que n admet exactement 8 diviseurs positifs dont 1 et n, et que notre liste comporte exactement 8 diviseurs positifs, on peut présumer que $n = 42$.
La somme des 8 diviseurs positifs est égale à $1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 14 + 21 + 42 = 96$.

Réponse : (D)

21. On sépare l'information comme suit :
   - Kathy possède plus de chats qu'Alice
   - Kathy possède plus de chiens que Bruce
   - Alice possède plus de chiens que Kathy
   - Bruce possède plus de chats qu'Alice

Des 2^e et 3^e puces, on peut conclure qu'Alice possède plus de chiens que Kathy et Bruce.
De la 4^e puce, on peut conclure que le choix de réponse (A) n'est pas le bon.
Des 1^{re} et 4^e puces, on peut conclure que Kathy et Bruce possèdent tous les deux plus de chats qu'Alice.
Par contre, on ne peut pas déterminer si Kathy possède plus de chats que Bruce ou vice versa.
Donc, on ne peut pas conclure que (B) ou (C) *doivent* être vrais.
De la 2^e puce, on peut conclure que (E) n'est pas vrai.
Donc l'énoncé qui *doit* être vrai est (D).

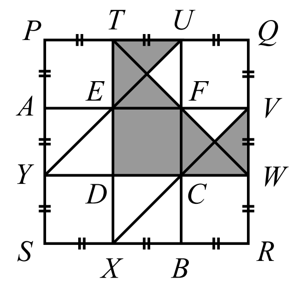
Réponse : (D)

22. Les diviseurs à un chiffre de 36 sont : $1, 2, 3, 4, 6$ et 9.
À partir de ces diviseurs, on peut créer des groupes de 3 chiffres dont le produit de ces derniers est égal à 36 : $1, 4, 9$; $1, 6, 6$; $2, 2, 9$; $2, 3, 6$ et $3, 3, 4$.
On compte ensuite le nombre de façons dont on pourrait arranger les chiffres dans chacun de ces 5 groupes.

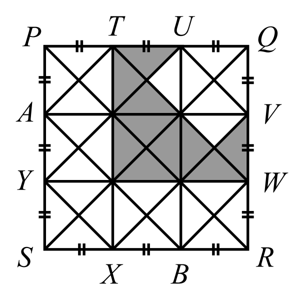
Les chiffres $1, 4, 9$ peuvent être arrangés comme suit : $149, 194, 419, 491, 914, 941$.
Les chiffres $1, 6, 6$ peuvent être arrangés comme suit : $166, 616, 661$.
Les chiffres $2, 2, 9$ peuvent être arrangés comme suit : $229, 292, 922$.
Les chiffres $2, 3, 6$ peuvent être arrangés comme suit : $236, 263, 326, 362, 623, 632$.
Les chiffres $3, 3, 4$ peuvent être arrangés comme suit : $334, 343, 433$.
Il y a donc $6 + 3 + 3 + 6 + 3 = 21$ entiers positifs à 3 chiffres dont les chiffres ont un produit de 36.

Réponse : (A)

23. On construit un segment AV perpendiculaire à TX. On construit un segment UB perpendiculaire à YW.



Les quatre segments TX, UB, AV et YW divisent le carré $PQRS$ en 9 carrés identiques.
Les couples perpendiculaires de ces quatre segments se coupent en C, D, E et F.
Le segment UY est une diagonale du carré $PUCY$ et passe donc au centre de ce dernier, soit le point E.
Le segment UE est une diagonale du carré $TUFE$.
Le segment TW est une diagonale du carré $TQWD$ tandis que le segment TF est une diagonale du carré $TUFE$.
Les diagonales d'un carré quelconque le divisent en 4 triangles identiques.
Par exemple, les diagonales TF et UE divisent le carré $TUFE$ en 4 triangles identiques parmi lesquels 3 sont ombrés.
De même, les diagonales FW et VC divisent le carré $FVWC$ en 4 triangles identiques parmi lesquels 3 sont ombrés.



Dans la figure ci-contre, on construit les diagonales manquantes dans chacun des 9 carrés.
Ces diagonales divisent le carré $PQRS$ en $9 \times 4 = 36$ triangles identiques.
Parmi ces triangles, 10 sont ombrés. Donc, la fraction du carré $PQRS$ qui est ombrée est $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

Réponse : (A)

24. *Solution 1*
Les dix mouvements ont des longueurs égales à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10.
Si le premier mouvement est vertical, alors les cinq mouvements verticaux ont des longueurs de 1, de 3, de 5, de 7 et de 9 tandis que les cinq mouvements horizontaux ont des longueurs de 2, de 4, de 6, de 8 et de 10.
Si le premier mouvement est horizontal, alors les cinq mouvements horizontaux ont des longueurs de 1, de 3, de 5, de 7 et de 9 tandis que les cinq mouvements verticaux ont des longueurs de 2, de 4, de 6, de 8 et de 10.
Si la direction d'un mouvement est vers la droite, la longueur du mouvement est additionnée à l'abscisse.
Si la direction d'un mouvement est vers la gauche, la longueur du mouvement est soustraite de l'abscisse.
Si la direction d'un mouvement est vers le haut, la longueur du mouvement est additionnée à l'ordonnée.

Si la direction d'un mouvement est vers le bas, la longueur du mouvement est soustraite de l'ordonnée.
Donc, une fois que les dix mouvements ont été effectués, le changement dans l'une des coordonnées est une combinaison d'additions et de soustractions des longueurs 1, 3, 5, 7 et 9 tandis que le changement dans l'autre coordonnée est une combinaison d'additions et de soustractions des longueurs 2, 4, 6, 8 et 10.
Par exemple, si le point se déplace vers la droite de 1, vers le bas de 2, vers la droite de 3, vers le haut de 4, vers la droite de 5, vers le bas de 6, vers la droite de 7, vers le haut de 8, vers la gauche de 9 et vers le haut de 10, alors son abscisse finale sera

$$20 + 1 + 3 + 5 + 7 - 9 = 27$$

tandis que son ordonnée finale sera

$$19 - 2 + 4 - 6 + 8 + 10 = 33$$

L'emplacement final du point sera donc le choix (A), soit $(27, 33)$. Donc le choix (A) n'est pas le bon.
On remarque que dans la direction où s'effectuent les mouvements dont les longueurs sont des nombres pairs, la différence entre la coordonnée initiale et la coordonnée finale est un nombre pair car on ne peut qu'obtenir un nombre entier pair à partir de l'addition ou de la soustraction de nombres entiers pairs.
Dans l'autre direction, la différence entre la coordonnée initiale et la coordonnée finale est un nombre impair car l'addition ou la soustraction d'un nombre impair de nombres entiers impairs aura toujours comme résultat un nombre entier impair. (Puisque impair plus impair est pair et que impair moins impair est pair, donc après deux mouvements de longueurs impaires, le changement jusqu'ici est pair, et après quatre mouvements de longueurs impaires, le changement jusque-là est toujours pair. Cela signifie qu'après le cinquième mouvement de longueur impaire, le changement final sera impair puisque l'addition ou la soustraction d'un nombre pair par un nombre impair est égale à un nombre impair.)
À partir de nos observations, on se sert du tableau suivant afin de déterminer la direction dans laquelle on devrait effectuer les mouvements de longueurs impaires et la direction dans laquelle on devrait effectuer les mouvements de longueurs paires.

Choix	Différence dans l'abscisse	Différence dans l'ordonnée	Mouvements horizontaux	Mouvements verticaux
(A) (27,33)	7	14	$1+3+5+7-9=7$	$-2+4-6+8+10=14$
(B) (30,40)	10	21	$2-4-6+8+10=10$	
(C) (21,21)	1	2	$1-3+5+7-9=1$	$2+4-6-8+10=2$
(D) (42,44)	22	25	$2-4+6+8+10=22$	$1+3+5+7+9=25$
(E) (37,37)	17	18	$-1-3+5+7+9=17$	$2+4-6+8+10=18$

Puisque les emplacements (A), (C), (D) et (E) sont possibles, donc l'emplacement qui n'est pas possible doit être (B).
On remarque que le choix (B) a une différence dans l'ordonnée qui n'est pas possible.
Autrement dit, on ne peut pas obtenir un résultat de 21 à partir de l'addition ou de la soustraction des nombres 1, 3, 5, 7 et 9.
Pourquoi ?

Solution 2

Soit a le changement horizontal de la position initiale à la position finale du point et soit b le changement vertical de la position initiale à la position finale.

Par exemple, si $a = -5$ et si $b = 6$, le point se trouve à une position finale de 5 unités à gauche et de 6 unités au-dessus de la position initiale de $(20, 19)$.

On remarque que si (x, y) est la position finale du point, alors on peut calculer a comme étant $a + 20 = x$ ou $a = x - 20$ et b comme étant $b + 19 = y$ ou $b = y - 19$.

Supposons que le premier mouvement est dans la direction horizontale.

Cela signifie que le deuxième mouvement sera dans la direction verticale, tandis que le troisième mouvement sera dans la direction horizontale, et ainsi de suite.

En tout, les premier, troisième, cinquième, septième et neuvième mouvements seront horizontaux tandis que les autres seront verticaux.

De plus, le premier mouvement est effectué par une unité, le second par deux unités, le troisième par trois unités, et ainsi de suite de manière que les mouvements horizontaux sont effectués par unités de 1, de 3, de 5, de 7 et de 9.

Chacun de ces mouvements est effectué vers la gauche ou vers la droite.

Si tous les mouvements horizontaux s'effectuent vers la droite, donc $a = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$.

Si le point se déplace à gauche au premier mouvement, à droite au troisième mouvement, puis à gauche aux cinquième, septième et neuvième mouvements, donc a sera égal à $-1 + 3 - 5 - 7 - 9$ ou -19.

Dans ce cas, la position finale se trouve à 19 unités à la gauche de la position initiale (remarquons d'ailleurs qu'il aurait pu aussi y avoir un mouvement vertical).

Pour chacun des cinq mouvements horizontaux, le point se déplace vers la gauche ou vers la droite.

Cela signifie qu'il y a deux choix (gauche ou droite) pour chacun des cinq mouvements horizontaux. Le nombre possible de configurations similaires aux exemples ci-dessus est donc $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

Le tableau ci-dessous calcule toutes les valeurs possibles de a et nous permet d'examiner ces configurations plus attentivement :

$$\begin{array}{rcrcrcr}
1+3+5+7+9 & = & 25 & \qquad & 1+3+5+7-9 & = & 7 \\
-1+3+5+7+9 & = & 23 & & -1+3+5+7-9 & = & 5 \\
1-3+5+7+9 & = & 19 & & 1-3+5+7-9 & = & 1 \\
-1-3+5+7+9 & = & 17 & & -1-3+5+7-9 & = & -1 \\
1+3-5+7+9 & = & 15 & & 1+3-5+7-9 & = & -3 \\
-1+3-5+7+9 & = & 13 & & -1+3-5+7-9 & = & -5 \\
1-3-5+7+9 & = & 9 & & 1-3-5+7-9 & = & -9 \\
-1-3-5+7+9 & = & 7 & & -1-3-5+7-9 & = & -11 \\
1+3+5-7+9 & = & 11 & & 1+3+5-7-9 & = & -8 \\
-1+3+5-7+9 & = & 9 & & -1+3+5-7-9 & = & -9 \\
1-3+5-7+9 & = & 5 & & 1-3+5-7-9 & = & -13 \\
-1-3+5-7+9 & = & 3 & & -1-3+5-7-9 & = & -15 \\
1+3-5-7+9 & = & 1 & & 1+3-5-7-9 & = & -17 \\
-1+3-5-7+9 & = & -1 & & -1+3-5-7-9 & = & -19 \\
1-3-5-7+9 & = & -5 & & 1-3-5-7-9 & = & -23 \\
-1-3-5-7+9 & = & -7 & & -1-3-5-7-9 & = & -25
\end{array}$$

En examinant la liste, on constate que certains nombres apparaissent plus d'une fois. On constate d'ailleurs que lorsque le premier mouvement est horizontal, les valeurs possibles de a sont les

nombres impairs compris entre -25 et 25 (y compris -25 et 25) à l'exception de -21 et de 21.
Lorsque le premier mouvement est horizontal, les deuxième, quatrième, sixième, huitième et dixième mouvements seront verticaux et auront des longueurs de 2, de 4, de 6, de 8 et de 10 unités.
Dans le même ordre d'idées que celui du cas précédent, on peut calculer les 32 valeurs possibles de b lorsque le premier mouvement est horizontal :

$$\begin{array}{rcr@{\qquad}rcr}
2+4+6+8+10 &=& 30 & 2+4+6+8-10 &=& 10\\
-2+4+6+8+10 &=& 26 & -2+4+6+8-10 &=& 6\\
2-4+6+8+10 &=& 22 & 2-4+6+8-10 &=& 2\\
-2-4+6+8+10 &=& 18 & -2-4+6+8-10 &=& -2\\
2+4-6+8+10 &=& 18 & 2+4-6+8-10 &=& -2\\
-2+4-6+8+10 &=& 14 & -2+4-6+8-10 &=& -6\\
2-4-6+8+10 &=& 10 & 2-4-6+8-10 &=& -10\\
-2-4-6+8+10 &=& 6 & -2-4-6+8-10 &=& -14\\
2+4+6-8+10 &=& 14 & 2+4+6-8-10 &=& -6\\
-2+4+6-8+10 &=& 10 & -2+4+6-8-10 &=& -10\\
2-4+6-8+10 &=& 6 & 2-4+6-8-10 &=& -14\\
-2-4+6-8+10 &=& 2 & -2-4+6-8-10 &=& -18\\
2+4-6-8+10 &=& 2 & 2+4-6-8-10 &=& -18\\
-2+4-6-8+10 &=& -2 & -2+4-6-8-10 &=& -22\\
2-4-6-8+10 &=& -6 & 2-4-6-8-10 &=& -26\\
-2-4-6-8+10 &=& -10 & -2-4-6-8-10 &=& -30
\end{array}$$

Encore une fois, on constate que certains nombres apparaissent plus d'une fois. On constate d'ailleurs que lorsque le premier mouvement est horizontal, les valeurs possibles de b sont les nombres pairs compris entre -30 et 30 (y compris -30 et 30) qui ne sont pas des multiples de 4.
Examinons maintenant les réponses possibles. Le point du choix (A) est $(27, 33)$.
Dans ce cas, on a : $a = 27 - 20 = 7$ et $b = 33 - 19 = 14$. Ces valeurs de a et de b correspondent aux critères soulignés ci-dessus, donc (27,33) est une position finale possible.
Le point $(21, 21)$ du choix (C) a : $a = 1$ et $b = 2$. Cela signifie que $(21, 21)$ est aussi une position finale possible pour le point.
Le point $(37, 37)$ du choix (E) a : $a = 17$ et $b = 18$. Donc ce point est aussi une position finale possible.
On comprend alors que la réponse est soit (B) ou (D). On remarque que a est pair et b est impair dans les deux cas. Donc, afin qu'un de ces points soit une position finale possible, le premier mouvement ne peut en aucun cas être un mouvement horizontal, il doit donc être vertical.
Si le premier mouvement est vertical, alors les troisième, cinquième, septième et neuvième mouvements sont également verticaux tandis que les autres mouvements sont horizontaux.
En procédant de la même manière qu'auparavant, nous verrons que les restrictions relatives à a et à b ont changé.
C.-à-d., a doit être un nombre pair entre -30 et 30 (y compris -30 et 30) qui n'est pas un multiple de 4 tandis que b doit être un nombre impair entre -25 et 25 (y compris -25 et 25) à l'exception de -21 et de 21.
Le point $(42, 44)$ du choix (D) a : $a = 22$ et $b = 25$. Ces valeurs sont admissibles si le premier mouvement est vertical.
Par contre, le point $(30, 40)$ du choix (B) a : $a = 10$ et $b = 21$. Puisque 21 n'est pas une valeur admissible de b, alors $(30, 40)$ n'est pas une position finale possible.

Réponse : (B)

25. Le prisme rectangulaire a deux faces dont l'aire de chacune est de $8 \times 8 = 64$, et quatre faces dont l'aire de chacune est de $8 \times n$.
Donc, A est $2 \times 64 + 4 \times 8 \times n = 128 + 32n$.
Le prisme est composé de $8 \times 8 \times n = 64 \times n$ cubes dont chacun a les dimensions $1 \times 1 \times 1$.
Chaque cube $1 \times 1 \times 1$ a une aire de surface de 6 car chaque cube a 6 faces dont chacune est un carré de 1×1.
Donc, $B = 6 \times 64 \times n = 384n$.
On obtient donc
$$\frac{B}{A} = \frac{384n}{128 + 32n} \ .$$
On réussit à simplifier cette expression car $384, 128$ et 32 sont tous les trois divisible par 32.
En divisant le numérateur et le dénominateur par 32, on obtient
$$\frac{B}{A} = \frac{12n}{4 + n} \ .$$
Étant donné que $\frac{B}{A}$ doit être égal à un entier, on détermine les entiers que peut être $\frac{12n}{4+n}$.
On remarque d'abord que n est positif, donc $12n$ et $4+n$ sont tous les deux positifs. Cela signifie que $\frac{12n}{4+n}$ est positif. $\frac{12n}{4+n}$ est donc un entier positif. On cherche ainsi à déterminer les entiers positifs qui sont égaux à $\frac{12n}{4+n}$.
Si $\frac{12n}{4+n} = 1$, donc $12n = 4 + n$ que l'on simplifie à la forme $11n = 4$ ou $n = \frac{4}{11}$.
Puisque n doit être un entier, on comprend que $\frac{12n}{4+n}$ ne peut pas être égal à 1.
Et si $\frac{12n}{4+n} = 2$? Dans ce cas, il faudrait que $12n$ soit deux fois plus grand que $4 + n$, soit $12n = 8 + 2n$.
On peut simplifier ce dernier à $10n = 8$ ou $n = \frac{8}{10}$.
Puisque cette valeur de n n'est pas un entier, on comprend alors que $\frac{12n}{4+n}$ n'est pas égal à 2.
En suivant ce raisonnement, si $\frac{12n}{4+n}$ est égal à 3, on détermine que n est égal à $\frac{4}{3}$, qui lui aussi n'est pas un entier, donc $\frac{12n}{4+n}$ n'est pas égal à 3.
Si $\frac{12n}{4+n}$ est égal à 4, donc $12n$ est quatre fois plus grand que $4 + n$, soit $12n = 16 + 4n$.
En simplifiant, on obtient $8n = 16$, donc $n = 2$. Ainsi, $\frac{12n}{4+n}$ peut être égal à 4 lorsque $n = 2$.
On continue de cette même manière pour toutes les valeurs possibles d'entiers positifs égales à $\frac{12n}{4+n}$ et allant jusqu'à $\frac{12n}{4+n} = 11$.

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

$\dfrac{12n}{n+4}$	n	n est un entier
1	$\dfrac{4}{11}$	$\times$
2	$\dfrac{8}{10}$	$\times$
3	$\dfrac{4}{3}$	$\times$
4	2	✓
5	$\dfrac{20}{7}$	$\times$
6	4	✓
7	$\dfrac{28}{5}$	$\times$
8	8	✓
9	12	✓
10	20	✓
11	44	✓

Selon le tableau, $\dfrac{12n}{4+n}$ peut être égal à chacun des entiers $4, 6, 8, 9, 10$ et 11 lorsque n est respectivement égal à $2, 4, 8, 12, 20$ et 44.

On considère maintenant ce qui se passe lorsque $\dfrac{12n}{4+n}$ est égal à 12 ou plus.

Si $\dfrac{12n}{4+n} = 12$, alors $12n$ est 12 fois plus grand que $4+n$, soit $12n = 48 + 12n$.

Puisque $48 + 12n$ sera toujours supérieur à $12n$, il n'y a aucune valeur de n pour laquelle $12n = 48 + 12n$.

De même, puisque n est un entier positif, il n'y a aucune valeur de n pour laquelle $\dfrac{12n}{4+n}$ est égal à 13 ou plus.

On comprend alors que les seules valeurs possibles d'entiers positifs égales à $\dfrac{12n}{4+n}$ sont celles dans le tableau. Donc, $\dfrac{12n}{4+n}$ est un entier lorsque n est égal à 2, à 4, à 8, à 12, à 20 et à 44.

La somme de ces nombres est égale à $2 + 4 + 8 + 12 + 20 + 44 = 90$.

Réponse : (B)

8e année

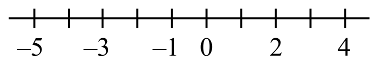
1. Exprimée sous forme de pourcentage, la moitié d'un muffin est égale à $\frac{1}{2} \times 100\% = 50$ % du muffin.

RÉPONSE : (E)

2. Les mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°.
Donc $x + x + x = 180$ ou $3x = 180$, d'où $x = \frac{180}{3} = 60$.

RÉPONSE : (B)

3. On ordonne les choix de réponse et le zéro sur une droite numérique comme dans la figure ci-dessous.
L'entier le plus proche de zéro est -1.



RÉPONSE : (A)

4. Lorsque divisé par 5, un nombre qui est 3 de plus qu'un multiple de 5 donnera un reste de 3.
Puisque 88 est 3 de plus que 85 et que ce dernier est un multiple de 5, on obtient un reste de 3 lorsqu'on divise 88 par 5.
D'ailleurs, on peut vérifier que cette réponse est la seule qui donne un reste de 3 lorsque divisée par 5.

RÉPONSE : (D)

5. On sait qu'un nombre premier est un entier qui est supérieur à 1 et qui admet exactement deux diviseurs distincts, soit 1 et lui-même.
Les nombres premiers entre 10 et 20 sont : $11, 13, 17$ et 19.
Donc, il y a 4 nombres premiers entre 10 et 20.

RÉPONSE : (E)

6. D'après le diagramme, 15 véhicules avaient une vitesse moyenne de 80 km/h à 89 km/h, 30 véhicules avaient une vitesse moyenne de 90 km/h à 99 km/h et 5 véhicules avaient une vitesse moyenne de 100 km/h à 109 km/h.
La vitesse moyenne de chacun des autres véhicules était inférieure à 80 km/h.
Il y avait donc $15 + 30 + 5 = 50$ véhicules qui avaient une vitesse moyenne d'au moins 80 km/h.

RÉPONSE : (E)

7. Tout entier positif qui admet 3 et 7 comme diviseurs admettrait aussi comme diviseur le produit de ces derniers, soit $3 \times 7 = 21$.
Autrement dit, il faut déterminer le nombre d'entiers positifs inférieurs à 100 qui seraient des multiples de 21.
Ces entiers sont : $21, 42, 63$ et 84.
On remarque que le prochain multiple de 21 est $21 \times 5 = 105$. Ce dernier est supérieur à 100.
Il y a donc 4 entiers positifs inférieurs à 100 qui sont divisibles à la fois par 3 et par 7.

RÉPONSE : (C)

8. La circonférence d'un cercle est égale à π fois son diamètre. On a donc $C = \pi \times d$, C étant la circonférence et d, le diamètre.
Puisque la circonférence est de 100, donc $100 = \pi \times d$ d'où $d = \dfrac{100}{\pi}$.

RÉPONSE : (C)

9. L'aire d'un triangle peut être exprimée par $A = \dfrac{b \times h}{2}$, A étant l'aire, b, la longueur de la base et h, la hauteur du triangle.
Étant donné que l'aire du triangle est de 6, on a donc $6 = \dfrac{b \times h}{2}$ d'où $b \times h = 12$.

Imaginons que la base, b, du triangle est le segment PQ. Donc $b = 4$.
Puisque $b \times h = 12$ et que $b = 4$, donc la hauteur, h, est égale à 3.
Le point qui est situé à une distance perpendiculaire de 3 unités au-dessus du segment PQ est le point E.

Réponse : (E)

10. Les 12 pièces de Barry comprennent au moins une de chacune des 5 pièces de valeurs différentes.
La valeur totale de ces 5 pièces est de 2,00 \$ + 1,00 \$ + 0,25 \$ + 0,10 \$ + 0,05 \$ = 3,40 \$.
Barry pourrait avoir la plus petite somme d'argent si les $12 - 5 = 7$ pièces restantes étaient toutes des pièces de 0,05 \$ (la plus petite valeur possible d'une pièce de monnaie).
Donc, la plus petite somme d'argent que Barry peut avoir est :

$$3{,}40\ \$ + 7 \times 0{,}05\ \$ = 3{,}40\ \$ + 0{,}35\ \$ = 3{,}75\ \$.$$

Réponse : (A)

11. Un triangle isocèle a deux côtés de même longueur.
Étant donné qu'un triangle isocèle a un côté de longueur 6 et un autre côté de longueur 8, il est donc possible que les longueurs des côtés soient de 6, de 6 et de 8.
Dans ce cas, le périmètre du triangle est égal à $6 + 6 + 8 = 20$. Or, cette réponse ne figure pas parmi les choix de réponse.
Cela dit, la seule autre possibilité est que les longueurs des côtés soient de 6, de 8 et de 8.
Dans ce cas, le périmètre est égal à $6 + 8 + 8 = 22$.

Réponse : (C)

12. Les angles dont les mesures sont de 60° et de $(y + 5)^\circ$ sont situés sur le segment de droite PQ.
Ils ont donc une somme de 180°.
Ainsi, $60 + y + 5 = 180$ ou $y + 65 = 180$, alors $y = 180 - 65 = 115$.
Les angles dont les mesures sont de $(4x)^\circ$ et de $(y + 5)^\circ$ sont opposés, donc $4x = y + 5$.
Puisque $y = 115$, on obtient $4x = 120$ d'où $x = 30$.
Donc $x + y = 30 + 115 = 145$.

Réponse : (A)

13. Afin qu'il puisse exister un mode pour l'ensemble des cinq nombres $12, 9, 11, 16$ et x, ce dernier doit être égal à l'un des quatre autres nombres, soit $12, 9, 11$ ou 16.
Si $x = 9$, donc le mode est égal à 9. Or, la moyenne des cinq nombres $9, 9, 11, 12, 16$ est supérieure à 9.
Si $x = 16$, donc le mode est égal à 16. Or, la moyenne des cinq nombres $9, 11, 12, 16, 16$ est inférieure à 16.
Donc, x doit être égal à 11 ou à 12.
Si $x = 11$, la moyenne des nombres est de $\frac{9+11+11+12+16}{5} = \frac{59}{5}$. Or, cette moyenne n'est pas égale au mode de 11.

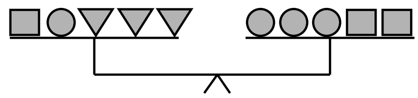
Si $x = 12$, la moyenne des nombres est de $\frac{9+11+12+12+16}{5} = \frac{60}{5} = 12$. Cette moyenne est égale au mode de 12.

Finalement, lorsque $x = 12$, la médiane (le nombre du milieu dans la liste $9, 11, 12, 12, 16$) est aussi égale à 12.

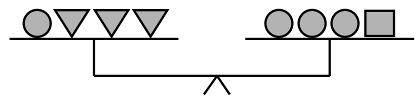
Réponse : (C)

14. Selon la première balance, l'ensemble ◯◯◯ a la même masse que l'ensemble ▽▽.
Selon la deuxième balance, l'ensemble □◯▽ a la même masse que l'ensemble □□.
Donc, lorsqu'on additionne la masse de l'ensemble ▽▽ à celle de l'ensemble □◯▽ on obtient une somme qui est égale à celle de l'addition de la masse de l'ensemble ◯◯◯ à la masse de l'ensemble □□.

D'où la balance à deux bras équilibrée ci-dessous :



Les côtés gauche et droit de cette balance contiennent chacun un ■. La balance reste donc en équilibre si on enlève un ■ de chaque côté (puisqu'ils ont la même masse).
D'où la balance à deux bras équilibrée ci-dessous :



Ainsi, parmi les choix de réponse, l'ensemble ●▽▽▽ a la même masse que l'ensemble ●●●■.

Réponse : (D)

15. *Solution 1*

Après qu'on ait fait tourner la flèche deux fois, les résultats possibles sont : rouge, rouge ; rouge, bleu ; rouge, vert ; bleu, rouge ; bleu, bleu ; bleu, vert ; vert, rouge ; vert, bleu ; vert, vert.
C'est-à-dire qu'il y a 9 résultats possibles.
Parmi ces 9 résultats, une même couleur paraît deux fois dans 3 résultats, soit : rouge, rouge ; bleu, bleu ; vert, vert.
La probabilité que la flèche s'arrête deux fois dans un secteur de la même couleur est égale à $\frac{3}{9}$ ou $\frac{1}{3}$.

Solution 2

On compte le nombre total de résultats possibles étant donné qu'on a fait tourner la flèche deux fois.
Il y a 3 résultats possibles (rouge, bleu, vert) lors du premier tour.
Il y a encore 3 résultats possibles lors du deuxième tour.
Donc, quand on fait tourner la flèche deux fois, il y a $3 \times 3 = 9$ résultats possibles.
On compte ensuite le nombre total de résultats possibles où la flèche s'arrêterait deux fois dans un secteur de la même couleur.
Il y a 3 résultats possibles lors du premier tour (rouge, bleu, vert).
Lors du deuxième tour, il n'y a qu'un seul résultat possible (puisque la flèche doit s'arrêter dans le même secteur, et donc la même couleur, qu'au premier tour).
Donc, quand on fait tourner la flèche deux fois, il y a $3 \times 1 = 3$ résultats possibles où la flèche s'arrêterait deux fois dans un secteur de la même couleur.
La probabilité que la flèche s'arrête deux fois dans un secteur de la même couleur est de $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Solution 3

Lors du premier tour, la flèche va s'arrêter sur une couleur parmi les trois.
Afin que la flèche s'arrête sur la même couleur deux fois, elle doit s'arrêter sur la même couleur au deuxième tour qu'au premier tour.
Puisqu'une seule couleur parmi les trois correspond à celle du premier tour, la probabilité que la flèche s'arrête deux fois sur la même couleur est de $\frac{1}{3}$.

Réponse : (D)

16. L'ampoule est allumée pendant 2 heures par jour et elle a une durée de vie de 24 999 heures.
Donc, l'ampoule ne durera que $24\,999 \div 2 = 12\,499{,}5$ jours. Elle arrêtera donc de fonctionner au $12\,500^{\text{e}}$ jour.
Combien de semaines y a-t-il dans 12 500 jours ?
Puisque $12\,500 \div 7 \approx 1785{,}71$, il y a entre 1785 et 1786 semaines dans 12 500 jours.
Plus précisément, $12\,500 - 7 \times 1785 = 12\,500 - 12\,495 = 5$. Il y a donc 1785 semaines complètes

et 5 jours supplémentaires dans 12 500 jours.
L'ampoule est allumée un lundi et donc, après 1785 semaines complètes, on arrive à un dimanche.
L'ampoule cessera de fonctionner 5 jours après ce dimanche, soit un vendredi.

Réponse : (B)

17. Puisque $w + x = 45$ et que $x + y = 51$, donc $x + y$ est 6 de plus que $w + x$ (puisque 51 est 6 de plus que 45).
Puisque $x+y$ et $w+x$ contiennent tous les deux un x, la différence de 6 entre ces deux expressions doit donc être la différence entre y et w.
Autrement dit, y est 6 de plus que w (ou $y = 6 + w$).
Étant donné la dernière équation, $y + z = 28$, et sachant que y est 6 de plus que w, on peut ainsi dire qu'on peut ajouter 6 de plus que w à z afin d'obtenir une somme de 28.
Puisque $6 + 22 = 28$, donc $w + z = 22$.

Réponse : (B)

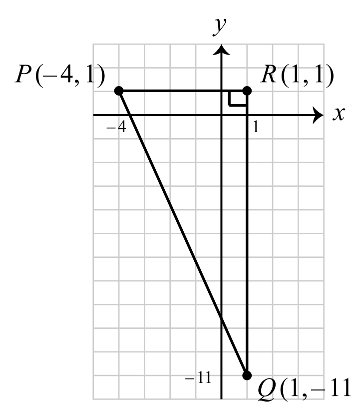
18. On sépare l'information comme suit :

- Kathy possède plus de chats qu'Alice
- Kathy possède plus de chiens que Bruce
- Alice possède plus de chiens que Kathy
- Bruce possède plus de chats qu'Alice

Des 2^e et 3^e puces, on peut conclure qu'Alice possède plus de chiens que Kathy et Bruce.
De la 4^e puce, on peut conclure que le choix de réponse (A) n'est pas le bon.
Des 1^{re} et 4^e puces, on peut conclure que Kathy et Bruce possèdent tous les deux plus de chats qu'Alice.
Par contre, on ne peut pas déterminer si Kathy possède plus de chats que Bruce ou vice versa.
Donc, on ne peut pas conclure que (B) ou (C) *doivent* être vrais.
De la 2^e puce, on peut conclure que (E) n'est pas vrai.
Donc l'énoncé qui *doit* être vrai est (D).

Réponse : (D)

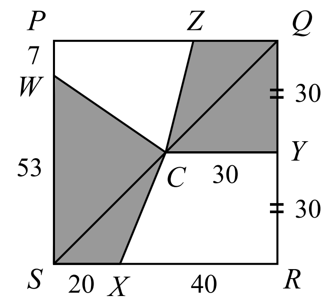
19. Dans la figure ci-contre, la ligne horizontale qui passe au point P et la ligne verticale qui passe au point Q se coupent en $R(1,1)$.
On relie les points P, Q et R afin de créer le triangle rectangle PQR dont l'hypoténuse est le segment PQ.
L'abscisse du point P est de -4 tandis que l'abscisse du point R est de 1, donc le segment PR a une longueur de $1 - (-4) = 5$ (car le point P et le point R ont les mêmes ordonnées).
L'ordonnée du point Q est de -11 tandis que l'ordonnée du point R est de 1, donc le segment QR a une longueur de $1-(-11) = 12$ (car le point Q et le point R ont les mêmes abscisses).
À l'aide du théorème de Pythagore, $PQ^2 = PR^2 + QR^2$ ou $PQ^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$, donc $PQ = \sqrt{169} = 13$ (puisque $PQ > 0$).
(Par ailleurs, on aurait pu dessiner une ligne verticale qui passe au point P et une ligne horizontale qui passe au point Q qui se coupent en $(-4, -11)$.)



Réponse : (A)

20. *Solution 1*

Le carré $PQRS$ a des côtés de longueur 60 et donc a une aire de $60^2 = 3600$.



Puisque l'aire totale des régions ombrées doit être égale à l'aire totale des régions non ombrées, donc l'aire totale des régions ombrées doit étre égale à 1800, soit la moitié de l'aire du carré.

La distance entre le centre du carré, C, et les côtés du carré est de $\frac{1}{2}(60) = 30$.

Afin de déterminer l'aire de chacune des régions ombrées, on remplit le carré dans la figure ci-contre avec les valeurs des longueurs fournises dans la question (ainsi que celles que l'on peut déterminer) et on y construit la diagonale SQ.

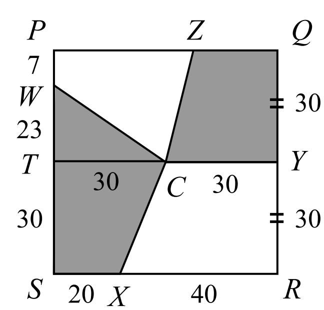
Le quadrilatère $WCXS$ est composé de deux triangles : le triangle SCX et le triangle SCW.
Dans le triangle SCX, la longueur de la base, SX, est de 20, tandis que la longueur de la hauteur qui relie le point C à SR est de 30 (puisque C est le centre du carré $PQRS$).
Donc, le triangle SCX a une aire de $\frac{1}{2}(20)(30) = 300$.
Dans le triangle SCW, la longueur de la base, SW, est de 53, tandis que la longueur de la hauteur qui relie le point C à SW est de 30.
Donc, le triangle SCW a une aire de $\frac{1}{2}(53)(30) = 795$.
Ainsi, le quadrilatère $WCXS$ a une aire de $300 + 795 = 1095$.

Le quadrilatère $ZQYC$ est composé de deux triangles : le triangle CQY et le triangle CQZ.
Y est le milieu de QR tandis que C est le centre du carré, donc CY est perpendiculaire à QY.
Dans le triangle CQY, la longueur de la base, CY, est de 30, tandis que la longueur de la hauteur, YQ, est de 30. Donc le triangle CQY a une aire de $\frac{1}{2}(30)(30) = 450$.
Dans le triangle CQZ, si la base est ZQ, donc la hauteur qui relie le point C à PQ est de 30.
Donc, le triangle CQZ a une aire de $\frac{1}{2}(ZQ)(30) = 15(ZQ)$.
Ainsi, le quadrilatère $ZQYC$ a une aire de $15 \times ZQ + 450$.

Finalement, on additionne les aires des régions ombrées afin d'obtenir $1095+15\times ZQ+450 = 1800$ ou $15 \times ZQ = 1800 - 1095 - 450 = 255$, d'où $ZQ = \frac{255}{15} = 17$.

Solution 2

Comme dans la solution 1, l'aire totale des régions ombrées doit étre égale à 1800.



Dans la figure ci-contre, on nomme T le milieu du côté PS.
Puisque Y est le milieu de QR, donc TY passe au point C et est perpendiculaire à PS et à QR.
Puisque C est le centre du carré, la distance entre ce dernier et les côtés du carré est de $\frac{1}{2}(60) = 30$.
On remplit le carré dans la figure ci-contre avec les valeurs des longueurs fournises dans la question (ainsi que celles que l'on peut déterminer).

Le quadrilatère $WCXS$ est composé du triangle WCT et du trapèze $TCXS$ (TC est parallèle à SX et donc $TCXS$ est un trapèze).
Dans le triangle WCT, la longueur de la base WT est égale à $WS-TS = 53-30 = 23$ tandis que la longueur de la hauteur, CT, est de 30. Donc, le triangle WCT a une aire de $\frac{1}{2}(23)(30) = 345$.
Dans le trapèze $TCXS$, les côtés parallèles ont des longueurs de $TC = 30$ et de $SX = 20$ tandis que la hauteur est de $TS = 30$.

Donc, le trapèze $TCXS$ a une aire de $\frac{1}{2}(30)(30+20)=750$.
Ainsi, le quadrilatère $WCXS$ a une aire de $345+750=1095$.

Le quadrilatère $ZQYC$ est aussi un trapèze (car ZQ est parallèle à CY).
Le trapèze $ZQYC$ a une aire de $\frac{1}{2}(QY)(ZQ+30)=15(ZQ+30)$.

On additionne les aires des régions ombrées afin d'obtenir $1095+15(ZQ+30)=1800$ ou $15(ZQ+30)=1800-1095=705$ ou $ZQ+30=\frac{705}{15}=47$, d'où $ZQ=17$.

Réponse : (E)

21. Soit n le nombre d'équipes qui font partie de la ligue de baseball de Jen.
Chacune de ces n équipes joue exactement 6 matchs contre chacune des $n-1$ autres équipes de la ligue.
Puisqu'il y a 2 équipes dans chaque match, le nombre total de matchs est égal à $\dfrac{6n(n-1)}{2}$.
Il y a eu un total de 396 matchs, donc $\dfrac{6n(n-1)}{2}=396$ ou $3n(n-1)=396$ ou $n(n-1)=132$.
La différence entre les nombres n et $n-1$ est de 1. On recherche donc deux entiers positifs consécutifs dont le produit est de 132.
Puisque $12\times 11=132$, il y a donc 12 équipes qui font partie de la ligue de baseball de Jen.

Réponse : (A)

22. Soit $abcd$ l'entier positif à 4 chiffres où d est le chiffre des unités, où c est le chiffre des dizaines, où b est le chiffre des centaines et où a est le chiffre des milliers du nombre original.
On commence en déterminant lequel des 4 chiffres a été effacé.
Si Rich efface le chiffre a, donc l'entier à 3 chiffres qui en résulte est bcd, ainsi la somme des deux entiers est exprimée par $abcd+bcd$.
On détermine le chiffre des unités de cette somme an additionnant les chiffres des unités de l'entier $abcd$ et de l'entier bcd, soit $d+d=2d$.
Dans ce cas, le chiffre des unités de la somme est un chiffre pair car $2d$ est pair.
Étant donné que la somme des deux entiers doit être 6031 et que ce dernier a un chiffre des unités impair, alors le chiffre qui a été effacé ne peut pas être le chiffre a.
Avec ce même raisonnement, on ne peut pas effacer les chiffres b ou c. Donc le chiffre qui a dû être effacé est le chiffre d.
Ensuite, on détermine les chiffres a,b,c,d afin que

$$\begin{array}{rr} & a\,bcd \\ + & abc \\ \hline & 6\,031 \end{array}$$

Lorsqu'on additionne $b+a$ à la retenue dans la colonne des dizaines, on obtient une somme dans la colonne des centaines qui a un 0 comme chiffre des unités.
Autrement dit, cette somme est égale à soit 0, soit 10, soit 20.
Si la somme est égale à 0, donc $a=0$. Or, à partir de la colonne des milliers, on constate que a ne peut pas être égal à 0.
Si la somme est égale à 20, donc $a+b=18$ (puisque la valeur maximale de tout chiffre est de 9 tandis que la retenue dans la colonne des dizaines a une valeur maximale de 2).
Si $a+b=18$, donc $a=9$. Or, à partir de la colonne des milliers, on constate que a ne peut pas être égal à 9.
Donc, lorsqu'on additionne $b+a$ à la retenue dans la colonne des dizaines, on obtient 10. Donc

la retenue de la colonne des centaines à la colonne des milliers est de 1.
À partir de la colonne des milliers, on obtient donc $a + 1 = 6$ d'où $a = 5$.

$$\begin{array}{rr} & 5\,bcd \\ + & 5bc \\ \hline & 6\,031 \end{array}$$

Lorsqu'on additionne $b + 5$ à la retenue dans la colonne des dizaines, on obtient une somme de 10 dans la colonne des centaines.
Si la retenue dans la colonne des dizaines est de 0, donc $b + 5 = 10$ d'où $b = 5$.
Dans la colonne des dizaines, si $b = 5$, donc $c + b = c + 5$ est supérieur à 3 et doit donc être 13.
On comprend alors qu'une retenue de 0 n'est pas possible dans la colonne des dizaines.
Si la retenue dans la colonne des dizaines est de 1, donc $b + 5 + 1 = 10$ d'où $b = 4$.
(On remarque que la somme de la colonne des dizaines a un 3 comme chiffre des unités et donc une retenue de 2 n'est pas possible.)

$$\begin{array}{rr} & 5\,4cd \\ + & 54c \\ \hline & 6\,031 \end{array}$$

La somme dans la colonne des dizaines a un 3 comme chiffre des unités. Donc, lorsqu'on additionne $c + 4$ à la retenue dans la colonne des unités, on obtient 13 (et non 3 ou 23).
S'il n'y a aucune retenue dans la colonne des unités, alors $c + 4 = 13$ d'où $c = 9$.
Mais si $c = 9$, donc le $d + 9$ de la colonne des unités doit être égal à 11 (ce qui indique qu'il y aurait eu une retenue dans la colonne des unités).
Ainsi c n'a pas une valeur de 9.
S'il y a une retenue de 1 dans la colonne des unités, alors $c + 4 + 1 = 13$ d'où $c = 8$ et $d = 3$.
La somme finale est comme suit :

$$\begin{array}{rr} & 5\,483 \\ + & 548 \\ \hline & 6\,031 \end{array}$$

La somme des chiffres de l'entier d'origine à 4 chiffres est égale à $a+b+c+d = 5+4+8+3 = 20$

Réponse : (B)

23. On constate que les choix de réponse ont tous un numérateur commun, soit (20!)(19!).
Puisque 20! est égal au produit des entiers de 1 à 20, on pourrait aussi dire que 20! est égal au produit des entiers de 1 à 19, le tout multiplié par 20.
Cela dit, le produit des entiers de 1 à 19 peut être réécrit sous la forme 19!, donc $20! = 19! \times 20$.
Autrement dit, le numérateur commun (20!)(19!) peut être réécrit sous la forme $(19! \times 20)(19!)$ ou $(19!)^2 \times 20$.
On considère ensuite le résultat de la division de $(19!)^2 \times 20$ par chacun des dénominateurs suivants :

$$\frac{(20!)(19!)}{1} = \frac{(19!)^2 \times 20}{1} = (19!)^2 \times 20$$

$$\frac{(20!)(19!)}{2} = \frac{(19!)^2 \times 20}{2} = (19!)^2 \times 10$$

$$\frac{(20!)(19!)}{3} = \frac{(19!)^2 \times 20}{3} = (19!)^2 \times \tfrac{20}{3}$$

$$\frac{(20!)(19!)}{4} = \frac{(19!)^2 \times 20}{4} = (19!)^2 \times 5$$

$$\frac{(20!)(19!)}{5} = \frac{(19!)^2 \times 20}{5} = (19!)^2 \times 4$$

Puisque $(19!)^2$ est le carré de l'entier $(19!)$, c'est donc un carré parfait.
Un carré parfait et un entier positif, f, ont comme produit un carré parfait uniquement lorsque f est un carré parfait.
Cette condition est remplie par le choix de réponse (E).
Comment se fait-il que $(19!)^2 \times 4$ soit un carré parfait ?
On réécrit $(19!)^2 \times 4 = (19!)^2 \times 2^2 = (19! \times 2)^2$ afin de démontrer que c'est le carré de l'entier $19! \times 2$ et que c'est donc un carré parfait.
Chacun des quatre autres choix de réponse n'est pas égal à un carré parfait, pourquoi ?

Réponse : (E)

24. On constate d'abord que la liste des 10 nombres a une somme de $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9$ ou 45.
Si n est le nombre de groupes et que m est la somme des nombres dans chaque groupe, donc $mn = 45$.
45 est donc un multiple du nombre de groupes.
Puisqu'il doit y avoir au moins 2 groupes, le nombre de groupes est l'un des suivants : $3, 5, 9, 15, 45$.
S'il y a 9 groupes, la somme des nombres dans chaque groupe est égale à $\frac{45}{9} = 5$. Or, ceci n'est pas possible car un des groupes doit contenir le nombre 9 et donc ne peut avoir une somme de 5.
De même, s'il y a 15 ou 45 groupes, la somme des nombres dans chaque groupe doit être respectivement 3 ou 1 ; ces sommes sont trop petites.
Donc, il y a soit 5 ou 3 groupes.

Supposons d'abord qu'il y ait cinq groupes.
Dans ce cas, la somme des nombres dans chaque groupe doit être égale à $\frac{45}{5} = 9$.
Puisque 0 ne contribue aucunement à la somme, on peut l'omettre pour l'instant.
Puisque la somme des nombres dans chaque groupe doit être égale à 9, un des groupes doit être composé uniquement du nombre 9.
Le nombre 8 doit être dans un groupe avec le nombre 1 afin de ne pas dépasser la somme requise de 9.
Autrement dit, un des groupes ne comporte que les nombres 1 et 8. Ce groupe est dénoté $\{1, 8\}$.
Le nombre 7 ne peut pas être dans un groupe avec un nombre supérieur à 2. Puisque le nombre 1 est déjà associé au nombre 8, le groupe qui comprend le nombre 7 doit être le groupe $\{2, 7\}$.
En suivant le même raisonnement, il en découle que $\{3,6\}$ soit un groupe et que $\{4,5\}$ soit un autre groupe.
Donc, s'il y a 5 groupes, ceux-ci doivent être les groupes $\{9\}, \{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}$ et $\{4, 5\}$.
Comme indiqué précédemment, 0 ne contribue aucunement à la somme, on peut donc l'insérer dans n'importe lequel des 5 groupes sans que cela n'affecte leurs sommes.
On peut faire cela de cinq manières : $\{0, 9\}$, $\{1, 8\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$, ou $\{9\}$, $\{0, 1,8\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$ et ainsi de suite.
On a donc montré qu'il y a 5 façons de séparer les nombres de 0 à 9 en cinq groupes de manière que chaque groupe ait la même somme.

Supposons maintenant qu'il y ait trois groupes.
Comme dans le cas ci-dessus, on omet le 0 pour l'instant.
Puisqu'il y a trois groupes, la somme des nombres dans chaque groupe doit être égale à $\frac{45}{3} = 15$.
On détermine maintenant les groupes dont la somme des nombres dans chacun d'eux est égale à 15.

Puisqu'il y en a 17, on les nomme de A à Q :

A	$\{6, 9\}$	G	$\{2, 5, 8\}$	M	$\{1, 3, 4, 7\}$
B	$\{1, 5, 9\}$	H	$\{3, 4, 8\}$	N	$\{4, 5, 6\}$
C	$\{2, 4, 9\}$	I	$\{1, 2, 4, 8\}$	O	$\{1, 3, 5, 6\}$
D	$\{1, 2, 3, 9\}$	J	$\{2, 6, 7\}$	P	$\{2, 3, 4, 6\}$
E	$\{7, 8\}$	K	$\{3, 5, 7\}$	Q	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
F	$\{1, 6, 8\}$	L	$\{1, 2, 5, 7\}$		

Parmi ces 17 groupes, le nombre 9 paraît uniquement dans les groupes A, B, C et D.
Par conséquent, tout moyen qui sépare les entiers en trois groupes doit utiliser uniquement un de ces quatre groupes.
Supposons que $A = \{6, 9\}$ est un des groupes. Cela veut dire que les deux autres groupes ne comprennent pas le nombre 6 ou le nombre 9.
Les groupes qui ne comprennent pas 6 et 9 sont les groupes E, G, H, I, K, L, M et Q.
Si $E = \{7, 8\}$ est un des groupes, on aura utilisé les nombres $6, 7, 8$ et 9, donc le groupe restant doit être $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Si $G = \{2, 5, 8\}$ est un des groupes, on aura utilisé les nombres $2, 5, 6, 8$ et 9.
Donc le troisième groupe devra être $M = \{1, 3, 4, 7\}$.
De même, si H est un des groupes, L l'est aussi, et si I est un des groupes, K l'est aussi.
À ce stade, nul besoin de continuer la vérification car si on suppose par exemple que M est l'un des groupes, on est obligé de prendre G en tant que troisième groupe. Or, on a déjà identifié le cas où on sépare les nombres en groupes A, M et G.
Pour résumer, si A est l'un des groupes, les configurations possibles sont les suivantes :

$$A, E, Q \qquad A, G, M \qquad A, H, L \qquad A, I, K$$

Si on suppose que B est un des groupes, les deux autres groupes ne peuvent pas comprendre les nombres 1, 5 et 9.
Les groupes remplissant cette condition sont les groupes E, H, J et P.
En suivant le même raisonnement que celui dans le paragaraphe précédent, les configurations comprenant B sont :

$$B, E, P \qquad B, H, J$$

Les groupes qui n'ont aucun membre en commun avec C sont les groupes E, F, K et O. Les configurations qui comprennent C sont donc :

$$C, E, O \qquad C, F, K$$

Les seuls groupes qui n'ont aucun membre en commun avec D sont les groupes E et N. La seule configuration qui comprend D est donc :

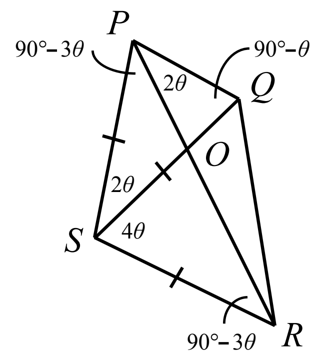
$$D, E, N.$$

En tout, on a trouvé 9 façons possibles de séparer les nombres de 1 à 9 en trois groupes, chacun ayant la même somme.
Comme indiqué précédemment, 0 ne contribue aucunement à la somme, on peut donc l'insérer dans n'importe lequel des groupes sans que cela n'affecte leurs sommes. Puisqu'il y a trois groupes, il y a donc trois manières possibles d'inclure le 0 dans chaque configuration, ainsi il y a $9 \times 3 = 27$ façons de séparer les entiers de 0 à 9 en trois groupes dont la somme de chacun est la même.

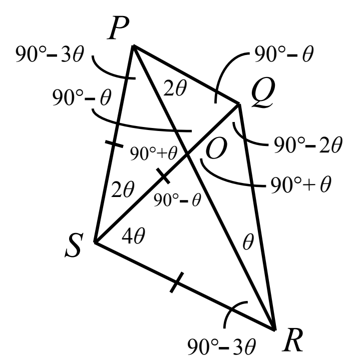
En se souvenant qu'il y avait 5 façons de séparer les nombres de 0 à 9 en cinq groupes, on peut séparer la liste $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ de $27 + 5 = 32$ différentes façons afin qu'il y ait au moins deux groupes et que la somme des nombres de chaque groupe soit la même.

Réponse : (E)

25. On nomme d'abord $\angle QSP = 2\theta$. Puisque $\angle QSR = 2\angle QSP$, donc $\angle QSR = 2 \times 2\theta = 4\theta$.



Ensuite, on détermine la mesure des 12 angles en fonction de θ.
Soit $x = \angle SPR$. Le triangle SPR est isocèle car $SP = SR$, donc $\angle SRP = \angle SPR = x$.
De plus, $\angle PSR = 2\theta + 4\theta = 6\theta$, donc $180^\circ = 6\theta + x + x$.
On a ainsi : $2x = 180^\circ - 6\theta$, d'où $x = 90^\circ - 3\theta$.
Dans le triangle SPQ, on sait que $\angle SPQ + \angle SQP + \angle PSQ = 180^\circ$, on se sert de cette règle et de $\angle PSQ = 2\theta$ afin d'écrire $\angle SPQ + \angle SQP = 180^\circ - 2\theta$.
Puisque $SP = SR$, le triangle SPQ est isocèle, donc $\angle SPQ = \angle SQP$.
On reporte cette dernière dans l'équation ci-dessus afin d'obtenir $2\angle SQP = 180^\circ - 2\theta$ ou $\angle SQP = 90^\circ - \theta$.
On remarque que ceci veut aussi dire $\angle SPQ = 90^\circ - \theta$, donc $\angle SPR + \angle RPQ = 90^\circ - \theta$.
On reporte $\angle SPR = 90^\circ - 3\theta$ afin d'obtenir $90^\circ - 3\theta + \angle RPQ = 90^\circ - \theta$ d'où $\angle RPQ = 2\theta$.



Puisque $\angle POQ + \angle PQO + \angle OPQ = 180^\circ$, donc $\angle POQ + (90^\circ - \theta) + 2\theta = 180^\circ$.
On obtient ainsi $\angle POQ = 90^\circ - \theta$.
Les angles $\angle POQ$ et $\angle ROS$ sont opposés, donc $\angle ROS = \angle POQ = 90^\circ - \theta$. De plus, $\angle POQ + \angle QOR = 180^\circ$, alors $\angle QOR = 180^\circ - \angle POQ = 180^\circ - (90^\circ - \theta) = 90^\circ + \theta$.
Puisque les angles $\angle POS$ et $\angle ROQ$ sont opposés, ils sont aussi égaux, donc $\angle POS = 90^\circ + \theta$.
On pose $\angle SQR = y$.
Puisque $SQ = SR$, le triangle SQR est isocèle, donc $\angle SRQ = \angle SQR = y$.
On reporte cette dernière, ainsi que $\angle QSR = 4\theta$, dans la règle $\angle QSR + \angle SRQ + \angle SQR = 180^\circ$ afin d'obtenir $4\theta + 2y = 180^\circ$, donc $2y = 180^\circ - 4\theta$ ou $y = 90^\circ - 2\theta$.
On a donc $\angle ROQ + \angle OQR + \angle QRO = 180^\circ$, d'où $\angle QRO = 180^\circ - (90^\circ + \theta) - (90^\circ - 2\theta) = \theta$.
En résumé, les 12 angles, exprimés en fonction de θ, sont :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \angle QSP & = & \angle RPQ & = & 2\theta \\
 & & & & \angle QSR & = & 4\theta \\
 & & \angle SRP & = & \angle RPS & = & 90^\circ - 3\theta \\
 & & & & \angle QRP & = & \theta \\
 & & & & \angle RQS & = & 90^\circ - 2\theta \\
\angle SQP & = & \angle POQ & = & \angle ROS & = & 90^\circ - \theta \\
 & & \angle POS & = & \angle QOR & = & 90^\circ + \theta
\end{array}$$

On sait que la mesure de chacun de ces angles en degrés est un entier.
On comprend notamment que θ doit être un degré entier puisque $\angle QRP = \theta$.
On sait aussi que PR et QS se coupent à l'intérieur de $PQRS$.
On déduit donc que $6\theta = \angle PSR < 180^\circ$.
Cela veut dire que $\theta < 30^\circ$.

Puisque 4θ est pair (et est supérieur à 2), il ne peut pas être un nombre premier pour tout entier θ.
Les entiers 2θ et 3θ sont uniquement des nombres premiers lorsque $\theta = 1°$.
Dans ce cas, les douze angles sont :

$$2°, 2°, 4°, 87°, 87°, 1°, 88°, 89°, 89°, 89°, 91°, 91°$$

dont cinq sont des nombres premiers : deux copies de 2° et trois copies de 89°.
Donc, $\theta \neq 1°$.
En factorisant, on obtient $90° - 2\theta = 2(45° - \theta)$ qui est pair.
Donc, celui-ci peut uniquement être un nombre premier lorsque $45° - \theta = 1$ ou $\theta = 44°$.
On sait que $\theta < 30°$, donc $90° - 2\theta$ est un nombre composé.
De même, $90° - 3\theta = 3(30° - \theta)$ peut uniquement être un nombre premier lorsque $30° - \theta = 1°$ ou $\theta = 29°$.
Lorsque $\theta = 29°$, les douze angles sont :

$$58°, 58°, 116°, 3°, 3°, 29°, 32°, 61°, 61°, 61°, 119°, 119°$$

dont six sont des nombres premiers : 29°, les deux copies de 3° et les trois copies de 61°.
Lorsque $\theta < 30°$ est tout autre que 1° et 29°, chacun des six angles

$$2\theta, 4\theta, 90° - 3\theta, 90° - 2\theta, 2\theta, 90° - 3\theta$$

est un nombre composé.
Afin de remplir la condition que les mesures de 6 angles soient des nombres premiers, il faut que les mesures des angles θ, $90° - \theta$ et $90° + \theta$ soient des nombres premiers.
Les nombres premiers inférieurs à 30 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ et 29.
On a déjà évalué la mesure des angles lorsque $\theta = 29°$. On évalue ensuite les valeurs des angles $\theta, 90° + \theta$ et $90° - \theta$ pour les autres cas dans le tableau suivant :

θ	$90° - \theta$	$90° + \theta$	Les trois angles sont des nombres premiers ?
2°	88°	92°	×
3°	87°	93°	×
5°	85°	95°	×
7°	83°	97°	✓
11°	79°	101°	✓
13°	77°	103°	×
17°	73°	107°	✓
19°	71°	109°	✓
23°	67°	113°	✓

Parmi les angles qui paraissent dans les deux colonnes du milieu, les nombres premiers sont :

$$67°, 71°, 73°, 79°, 83°, 97°, 101°, 103°, 107°, 109°, 113°.$$

Donc, les trois angles sont tous des nombres premiers lorsque θ est l'un de $7°, 11°, 17°, 19°, 23°$.
Finalement, en rassemblant nos résultats (à ne pas oublier ceux du cas où $\theta = 29°$), on obtient un total de 6 quadrilatères qui remplissent les conditions telles qu'indiquées dans la question.

Réponse : (D)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2018

(7e et 8e années – Secondaire I et II)

le mercredi 16 mai 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 17 mai 2018
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Jeff Anderson
Terry Bae
Jacquelene Bailey
Shane Bauman
Ersal Cahit
Serge D'Alessio
Rich Dlin
Jennifer Doucet
Fiona Dunbar
Mike Eden
Barry Ferguson
Judy Fox
Steve Furino
John Galbraith
Robert Garbary
Rob Gleeson
Sandy Graham
Conrad Hewitt
Angie Hildebrand
Carrie Knoll
Judith Koeller
Bev Marshman
Mike Miniou
Dean Murray
Jen Nelson
J.P. Pretti
Kim Schnarr
Carolyn Sedore
Kevin Shonk
Ashley Sorensen
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga
Christine Vender
Heather Vo
Tim Zhou

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), Winnipeg, MB
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
Sarah Garrett, Arbour Vista P.S., Guelph, ON
John McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
David Switzer, Scott Central P.S., Sandford, ON
Rachael Verbruggen, University of Waterloo, Waterloo, ON
Laurissa Werhun, Parkdale C.I., Toronto, ON
Chris Wu, Ledbury Park E. and M.S., Toronto, ON
Lori Yee, William Dunbar P.S., Pickering, ON

7^{e} année

1. Puisque $21 - 13 = 8$, le nombre que l'on doit soustraire de 21 pour obtenir 8 est 13.

Réponse : (B)

2. D'après le diagramme, 20 % des 100 élèves ont choisi la banane.
Puisque 20 % de 100 est 20, alors 20 élèves ont choisi la banane.

Réponse : (D)

3. Il y a 30 minutes entre 8 h 30 et 9 h 00.
Il y a 5 minutes entre 9 h 00 et 9 h 05.
La durée du cours est donc de 35 minutes ($30 + 5 = 35$).

Réponse : (C)

4. Le carré a une aire de 144 cm^2. Puisque $\sqrt{144} = 12$ ($12^2 = 144$), le carré a des côtés de 12 cm.

Réponse : (D)

5. Neuf items à 1 \$ et cinq items à 2 \$ coutent $(9 \times 1\,\$) + (5 \times 2\,\$)$, ce qui revient à $9\,\$ + 10\,\$$, ou 19 \$. La bonne réponse est donc (C).
(On peut vérifier que chacun des autres choix de réponse coute moins de 18 \$.)

Réponse : (C)

6. On récrit chaque fraction sous forme d'un nombre fractionnaire.
On obtient $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$, $\frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$, $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$ et $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$.
Le nombre situé entre 3 et 4 sur une droite numérique est $3\frac{1}{4}$, ou $\frac{13}{4}$.

Réponse : (D)

7. Il y a 9 résultats équiprobables possibles en tout ($2+3+4 = 9$), c'est-à-dire 9 graines que Carrie peut retirer. Il y a 2 graines de tournesol, c'est-à-dire 2 résultats favorables.
La probabilité pour Carrie de choisir une graine de tournesol est de $\frac{2}{9}$.

Réponse : (A)

8. Puisque $x = 4$, alors $y = 3 \times 4$, ou $y = 12$.

Réponse : (A)

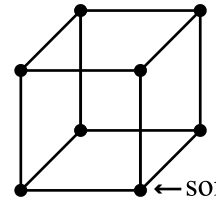
9. Les mesures des trois angles de n'importe quel triangle ont une somme de $180°$.
Si un angle d'un triangle isocèle mesure $50°$, les mesures des deux autres angles ont une somme de $180° - 50°$, ou $130°$.
Puisque le triangle est isocèle, deux des angles du triangle sont égaux.
Si les deux angles inconnus sont égaux, ils mesurent chacun $130° \div 2$, ou $65°$.
Or, $65°$ et $65°$ n'est pas un des choix de réponses.
Si les deux angles égaux mesurent chacun $50°$, alors le troisième angle mesure $180° - 50° - 50°$, ou $80°$.
Donc, les deux angles inconnus du triangle pourraient mesurer $50°$ et $80°$.

Réponse : (C)

10. La lettre qui est à 3 positions de la lettre W, dans le sens des aiguilles d'une montre, est le Z.
Si on continue dans le même sens à partir de Z, l'alphabet recommence à la lettre A.
Donc, la lettre qui est située à 4 positions du W est le A.
La lettre qui est située à 4 positions du I est le M.
La lettre qui est située à 4 positions du N est le R.
Le texte encodé du message WIN est AMR.

Réponse : (C)

11. Chaque cube a 8 sommets, comme on le voit dans la figure ci-contre.



RÉPONSE : (E)

12. La base de 2 cm sur 2 cm du prisme a une aire de 2×2 cm^2, ou 4 cm^2.
La face supérieure du prisme est identique à la base. Elle a donc une aire de 4 cm^2.
Chacune des 4 faces verticales (latérales) du prisme mesure 2 cm sur 1 cm. Chacune a donc une aire de 2×1 cm^2, ou 2 cm^2.
L'aire totale du prisme est donc égale à 2×4 cm^2 $+ 4 \times 2$ cm^2, ou 16 cm^2.

RÉPONSE : (E)

13. Puisque la machine distribue 11 410 kg de riz dans 3260 sacs, chaque sac contient 11 410 kg $\div$ 3260 de riz, ou 3,5 kg de riz.
Puisqu'une famille utilise 0,25 kg de riz par jour, la famille mettra $3{,}5 \div 0{,}25$ jours, ou 14 jours pour vider un sac de riz.

RÉPONSE : (D)

14. Puisque Dalia célèbre son anniversaire mercredi, alors un nombre exact de semaines plus tard, ce sera aussi un mercredi.
Donc, 8 semaines plus tard, ce sera un mercredi.
Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine, alors 56 jours après l'anniversaire de Dalia ($7 \times 8 = 56$), ce sera un mercredi.
Donc 4 jours plus tard (60 jours après l'anniversaire de Dalia), ce sera un dimanche.
Donc, Brice célèbre son anniversaire un dimanche.

RÉPONSE : (E)

15. *Solution 1*
Puisque chaque émeu reçoit 2 friandises et que chaque poule reçoit 4 friandises, chaque oiseau reçoit *au moins* 2 friandises.
Si Karl commence par donner 2 friandises à chacun des 30 oiseaux, il aura remis 30×2 friandises, ou 60 friandises.
Puisque Karl a 100 friandises à distribuer, il lui reste $(100 - 60)$ friandises, ou 40 friandises à remettre.
Or, chaque émeu a déjà reçu ses 2 friandises (puisque les 30 oiseaux ont chacun reçu 2 friandises).
Les 40 friandises qui restent doivent donc être remises aux poules.
Or, chaque poule a reçu 2 friandises, mais doit en recevoir 4.
Donc, chaque poule doit recevoir 2 autres friandises.
Puisqu'il reste 40 friandises et que $40 \div 2 = 20$, Karl a 20 poules.
(On peut vérifier que s'il y a 20 poules, il y a 10 émeus $(30 - 20 = 10)$ et que Karl distribuerait $4 \times 20 + 2 \times 10$ friandises, ou 100 friandises.)

Solution 2
On peut procéder par tâtonnements. Si Karl avait 5 émeus et 25 poules $(30 - 5 = 25)$, il distribuerait $5 \times 2 + 25 \times 4$ friandises, ou 110 friandises.
Puisqu'il n'a que 100 friandises, il doit y avoir moins de poules et plus d'émeus.
On inscrit ce résultat et d'autres essais dans le tableau suivant.

Nombre d'émeus	Nombre de poules	Nombre de friandises aux émeus	Nombre de friandises aux poules	Nombre total de friandises
5	$30-5=25$	$5\times 2=10$	$25\times 4=100$	$10+100=110$
7	$30-7=23$	$7\times 2=14$	$23\times 4=92$	$14+92=106$
10	$30-10=20$	$10\times 2=20$	$20\times 4=80$	$20+80=100$

Donc, Karl a 20 poules.

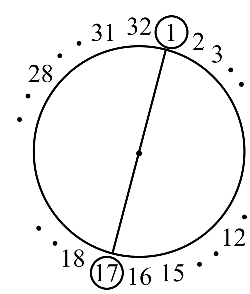
Réponse : (D)

16. *Solution 1*

Les entiers de 1 à 32 sont écrits en ordre et espacés également à l'extérieur du cercle.
On considère une droite qui passe au centre du cercle et qui joint deux de ces 32 nombres.
Il reste 30 nombres ($32-2=30$) à joindre de cette façon.
Puisque cette première droite passe au centre du cercle, elle divise le cercle en deux parties égales.
Il y aura donc 15 des 30 entiers qui restent de chaque côté de la droite.
Soit n le nombre qui sera joint à 12.
De chaque côté de la droite qui joint 12 et n, il y a 15 nombres entre 12 et n (en procédant dans un sens ou dans l'autre).
En commençant à 12 et en allant vers 13, les 15 nombres entre 12 et n sont $13, 14, 15, \ldots, 26, 27$.
Le nombre suivant est 28. Donc $n=28$.
Le nombre qui est joint au nombre 12 est 28.

Solution 2

On écrit les entiers de 1 à 32 en ordre et espacés également, dans le sens des aiguilles d'une montre, à l'extérieur du cercle.
Comme dans la solution 1, on sait qu'il y a 15 nombres de chaque côté de la droite qui passe à 1 et au centre du cercle.
En procédant dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de 1, ces 15 nombres sont $2, 3, 4, \ldots, 15, 16$. Donc, 1 est joint à 17, comme dans la figure ci-contre.
En procédant dans le sens des aiguilles d'une montre, on voit que 2 est joint à 18, 3 est joint à 19 et ainsi de suite.
Puisque le nombre 12 est situé à 11 positions du nombre 1, le nombre qui est joint à 12 est situé à 11 positions du nombre 17.
Le nombre qui est joint au nombre 12 est 28 ($17+11=28$).



Réponse : (A)

17. On suppose que le plus petit cercle a une aire de 1.

Puisque l'aire de l'anneau ombré est 6 fois l'aire du plus petit cercle, elle est égale à 6.
Puisque l'aire de l'anneau extérieur est 12 fois l'aire du plus petit cercle, elle est égale à 12.
L'aire du plus grand cercle est égale à la somme des aires du plus petit cercle et des deux anneaux. Elle est donc égale à $1+6+12$, ou 19.
Donc, l'aire du plus petit cercle est $\frac{1}{19}$ de l'aire du plus grand cercle.
Remarque : On a supposé que le plus petit cercle avait une aire de 1, mais on aurait pu choisir n'importe quelle aire. Par exemple, si on suppose qu'il a une aire de 5 et qu'on résout de nouveau, quelle réponse obtient-on ?

Réponse : (E)

18. Si deux entiers ont un produit égal à 1, ils doivent tous deux être 1 ou tous deux être -1.
De même, si le produit de six entiers est égal à 1, chacun des entiers doit être 1 ou -1.
De plus, le nombre de facteurs -1 doit être pair, car le produit d'un nombre impair de facteurs -1 est négatif. Il doit donc y avoir 2, 4 ou 6 facteurs -1 parmi les 6 entiers.
On examine les possibilités au moyen d'un tableau.

N^bre de -1	Produit des six entiers	Somme des six entiers
0	$(1)(1)(1)(1)(1)(1) = 1$	$1+1+1+1+1+1 = 6$
2	$(-1)(-1)(1)(1)(1)(1) = 1$	$(-1)+(-1)+1+1+1+1 = 2$
4	$(-1)(-1)(-1)(-1)(1)(1) = 1$	$(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+1+1 = -2$
6	$(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = 1$	$(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1) = -6$

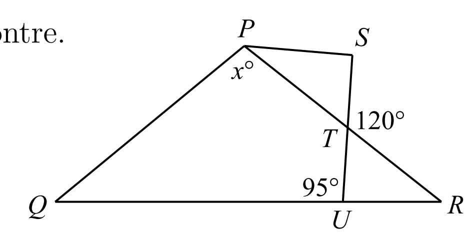
Le choix de réponse qui ne peut pas être la somme des six entiers est 0.

Réponse : (C)

19. Les tailles des 4 premières athlètes sont différentes. Si Laurissa avait une taille différente des 4 autres tailles, il y aurait 5 modes.
Pour qu'il n'y ait qu'un seul mode, la taille de Laurissa doit être la même que celle d'une autre athlète. Ceci élimine le choix de réponse (E).
Si Laurissa avait une taille de 135 cm, les 5 tailles auraient un mode de 135 cm et une médiane de 160 cm. Or, on sait que le mode est égal à la médiane et à la moyenne.
Si Laurissa avait une taille de 175 cm, les 5 tailles auraient un mode de 175 cm et une médiane de 170 cm, ce qui n'est pas le cas, car le mode et la médiane doivent être égaux.
Donc, Laurissa doit avoir une taille de 160 cm ou de 170 cm. Dans un cas comme dans l'autre, le mode sera égal à la médiane.
Si Laurissa avait une taille de 170 cm, les 5 athlètes auraient une taille moyenne de $\dfrac{135+160+170+170+175}{5}$ cm, ou 162 cm. Or, le mode et la médiane sont de 170 cm.
Si Laurissa avait une taille de 160 cm, les 5 athlètes auraient une taille moyenne de $\dfrac{135+160+160+170+175}{5}$ cm, ou 160 cm. Dans ce cas, les tailles des 5 athlètes, en centimètres, sont : 135, 160, 160, 170, 175.
Lorsque Laurissa a une taille de 160 cm, le mode, la médiane et la moyenne des tailles sont de 160 cm.

Réponse : (B)

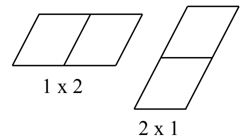
20. On nomme les points S, T et U, comme dans la figure ci-contre.
Since S, T et U sont alignés, $\angle STU = 180°$.
Donc $\angle RTU = 180° - \angle STR$, d'où $\angle RTU = 180° - 120°$, ou $\angle RTU = 60°$.
De même, puisque Q, U et R sont alignés, $\angle QUR = 180°$.
Donc $\angle TUR = 180° - \angle TUQ$, d'où $\angle TUR = 180° - 95°$, ou $\angle TUR = 85°$.



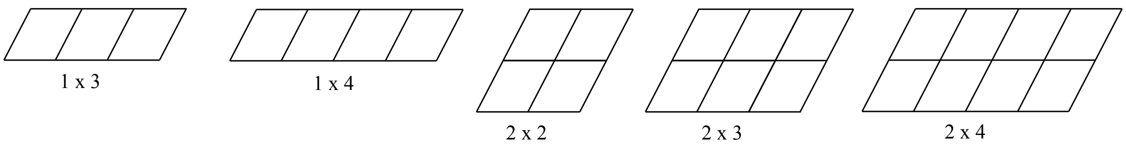
Les mesures des angles du triangle TUR ont une somme de 180°.
Donc $\angle TRU = 180° - \angle RTU - \angle TUR$, d'où $\angle TRU = 180° - 60° - 85°$, ou $\angle TRU = 35°$.
Puisque le triangle PQR est isocèle et que $PQ = PR$, alors $\angle PQR = \angle PRQ = 35°$.
Puisque les mesures des angles du triangle PQR ont une somme de 180°, alors $x° = 180° - \angle PQR - \angle PRQ$, d'où $x° = 180° - 35° - 35°$, ou $x = 110$.

Réponse : (A)

21. Lorsqu'on considère la figure formée par deux petits parallélogrammes contigus, on obtient un parallélogramme.
Par exemple, les deux figures ci-contre sont des parallélogrammes.
En effet, on obtient un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles et de même longueur. De même, on peut utiliser plus de 2 petits parallélogrammes pour former de nouveaux parallélogrammes. On écrira $a \times b$ pour indiquer que la nouvelle figure a a rangées de petits parallélogrammes et b colonnes de petits parallélogrammes.



En plus des petits parallélogrammes (1×1) et des parallélogrammes 1×2 et 2×1 ci-dessus, on peut voir dans la figure donnée des parallélogrammes de dimensions suivantes.



Le tableau ci-dessous indique le nombre de parallélogrammes de chaque grandeur.

Grandeur	1×1	1×2	2×1	1×3	1×4	2×2	2×3	2×4
Nombre de parallélogrammes	8	6	4	4	2	3	2	1

Le nombre de parallélogrammes qui paraissent dans la figure est égal à $8+6+4+4+2+3+2+1$, ou 30.

Réponse : (B)

22. *Solution 1*
Le nombre de pièces de 10 ¢ dans le bocal est un de plus que le nombre de pièces de 5 ¢.
Si on enlève une pièce de 10 ¢ du bocal, il y aura 49 pièces de monnaie dans le bocal ($50-1=49$) qui ont une valeur totale de 4,90 \$ (5,00 \$ − 0,10 \$ = 4,90 \$).
Maintenant, le nombre de pièces de 5 ¢ dans le bocal est égal au nombre de pièces de 10 ¢ et le nombre de pièces de 5 ¢ dans le bocal est trois fois le nombre de pièces de 25 ¢ dans le bocal.
Donc pour chaque pièce de 25 ¢ dans le bocal, il y a 3 pièces de 5 ¢ et 3 pièces de 10 ¢.
On forme des groupes contenant chacun 1 pièce de 25 ¢, 3 pièces de 5 ¢ et 3 pièces de 10 ¢.
Chaque groupe compte 7 pièces d'une valeur totale de 0,25 \$ + 3 × 0,05 \$ + 3 × 0,10 \$, ou 0,25 \$ + 0,15 \$ + 0,30 \$, ou 0,70 \$.
Puisqu'il reste 49 pièces dans le bocal avec une valeur totale de 4,90 \$, il doit y avoir 7 groupes de 7 pièces (puisque $7 \times 7 = 49$).
(On peut vérifier que 7 groupes de pièces, avec chacun une valeur de 0,70 \$, ont une valeur totale de 7 × 0,70 \$, ou 4,90 \$.)
Il y a donc 7 pièces de 25 ¢ dans le bocal.

Solution 2
Pour déterminer nombre de pièces de 25 ¢ dans le bocal, il suffit de se concentrer sur le nombre de pièces (50) ou sur la valeur total des pièces (5,00 \$).
Dans la solution qui suit, on considère chacun de ces aspects pour montrer que chacun mène à la même réponse.
On procède par essais systématiques.
Supposons qu'il y a 5 pièces de 25 ¢ dans le bocal (le plus petit choix de réponse donné).
Ces 5 pièces ont une valeur de 5 × 25 ¢, ou 125 ¢.
Puisque le nombre de pièces de 5 ¢ est trois fois le nombre de pièces de 25 ¢, il y aurait 15 pièces

de 5 ¢ ($3 \times 5 = 15$) dans le bocal.
Ces 15 pièces de 5 ¢ auraient une valeur de 75 ¢ (15×5 ¢ $= 75$ ¢).
Puisque le nombre de pièces de 10 ¢ dans le bocal est un de plus que le nombre de pièces de 5 ¢, il y aurait 16 pièces de 10 ¢ dans le bocal ($15 + 1 = 16$).
Ces 16 pièces de 10 ¢ auraient une valeur de 160 ¢ (16×10 ¢ $= 160$ ¢).
Donc s'il y avait 5 pièces de 25 ¢ dans le bocal, il y aurait 36 pièces en tout ($5 + 15 + 16 = 36$) et comme on sait qu'il y a 50 pièces dans le bocal, il doit y avoir plus de 5 pièces de 25 ¢.
De même, s'il y avait 5 pièces de 25 ¢ dans le bocal, la valeur totale des pièces dans le bocal serait égale à 290 ¢ (125 ¢ + 75 ¢ + 160 ¢ = 360 ¢).
Comme on sait que la valeur totale des pièces est de 5,00 \$, ou 500 ¢ il doit y avoir plus de 5 pièces de 25 ¢ dans le bocal.
On résume les résultats des deux essais suivants dans un tableau.

Nombre de pièces de 25 ¢	Valeur des pièces de 25 ¢	Nombre de de pièces de 5 ¢	Valeur des pièces de 5 ¢	Nombre de de pièces de 10 ¢	Valeur des pièces de 10 ¢	Valeur totale des pièces
6	150 ¢	18	90 ¢	19	190 ¢	430 ¢
7	175 ¢	21	105 ¢	22	220 ¢	500 ¢

Lorsqu'il y a 7 pièces de 25 ¢ dans le bocal, il y a 50 pièces dans le bocal, ce qu'il fallait ($7 + 21 + 22 = 50$).
Lorsqu'il y a 7 pièces de 25 ¢ dans le bocal, les pièces dans le bocal ont une valeur totale de 500 ¢ ($175 + 105 + 220 = 500$), ou 5,00 \$, ce qu'il fallait.
Dans les deux cas, il y a 7 pièces de 25 ¢ dans le bocal.

Réponse : (A)

23. Dans chaque bloc $1223334444 \cdots 999999999$, il y a 1 chiffre 1, 2 chiffres 2, 3 chiffres 3 et ainsi de suite. Chaque bloc contient 45 chiffres ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$).
Lorsqu'on divise $1953 \div 45$, on obtient un quotient de 43 et un reste de 18 (c'est-à-dire que $1953 = 45 \times 43 + 18$).
Puisque chaque bloc contient 45 chiffres, alors 43 blocs contiennent 1935 chiffres ($43 \times 45 = 1935$).
Puisque $1953 - 1935 = 18$, alors le 18e chiffre que l'on écrira dans le bloc suivant (le 44e bloc) sera le 1953e chiffre écrit depuis le début.
On écrit les 18 premiers chiffres du bloc suivant, 122333444455555666, pour constater que le 1953e chiffre écrit depuis le début est un 6.

Réponse : (C)

24. Un entier strictement positif est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 9.
Dans ce problème, on veut compter le nombre de nombres de six chiffres qui incluent les chiffres 2018 et qui sont divisibles par 9.
On cherche donc deux chiffres manquants qui, avec 2018, formeront un entier positif de six chiffres divisible par 9.
Les chiffres de 2018 ont une somme de 11 ($2 + 0 + 1 + 8 = 11$).
On suppose que les deux autres chiffres sont a et b. Le nombre de six chiffres peut donc être $ab2018$, $ba2018$, $a2018b$, $b2018a$, $2018ab$ ou $2018ba$.
Lorsqu'on additionne a et b à 11, on doit obtenir une somme divisible par 9.
Donc, $a + b + 11$ doit être divisible par 9.
La plus petite valeur possible de a et de b est 0, ce qui indique que la plus petite valeur possible de $a + b + 11$ est 11 ($0 + 0 + 11 = 11$).

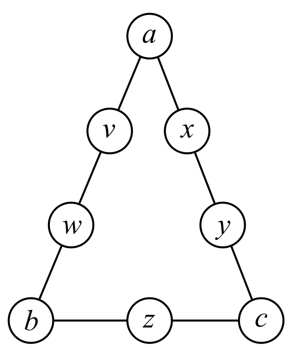
La plus grande valeur possible de a et de b est 9, ce qui indique que la plus grande valeur possible de $a + b + 11$ est 29 ($9 + 9 + 11 = 29$).
Or, les seuls entiers de 11 à 29 qui sont divisibles par 9 sont 18 et 27.
Donc $a + b = 7$ ($18 - 11 = 7$) ou $a + b = 16$ ($27 - 11 = 16$).
Si $a + b = 7$, alors les chiffres a et b sont 0 et 7, 1 et 6, 2 et 5 ou 3 et 4, dans un ordre quelconque.
Si $a = 1$ et $b = 6$, les entiers possibles de six chiffres sont $162\,018, 612\,018, 120\,186, 620\,181, 201\,816$, et $201\,861$. Dans ce cas, il y en a six.

De même, si $a = 2$ et $b = 5$, il y a 6 entiers possibles de 6 chiffres.
De même, si $a = 3$ et $b = 4$, il y a 6 entiers possibles de 6 chiffres.
Si $a = 0$ et $b = 7$, les entiers possibles de 6 chiffres sont $702\,018, 720\,180, 201\,870$ et $201\,807$, puisque ces entiers ne peuvent pas commencer par un 0.
Dans ce cas, il y a 4 entiers possibles de 6 chiffres.
Donc lorsque a et b ont une somme de 7, il y a 22 entiers possibles de 6 chiffres ($6+6+6+4 = 22$).

On considère maintenant le cas où a et b ont une somme de 16.
Si $a + b = 16$, les chiffres a et b sont 7 et 9 ou bien 8 et 8.
Si $a = 7$ et $b = 9$, il y a 6 entiers possibles de 6 chiffres ($792\,018, 972\,018, 720\,1869, 920\,187, 201\,879$ et $201\,897$).
Si $a = 8$ et $b = 8$, il y a 3 entiers possibles de 6 chiffres ($882\,018, 820\,188$ et $201\,888$).
Donc lorsque a et b ont une somme de 16, il y a 9 entiers possibles de 6 chiffres ($6 + 3 = 9$).
En tout, il y a 31 entiers possibles de 6 chiffres ($22 + 9 = 31$).
On remarque que ces 31 entiers de 6 chiffres sont tous différents les uns des autres et que ce sont les seuls entiers de 6 chiffres qui satisfont aux conditions.
Il y a donc 31 entiers de 6 chiffres qui incluent les chiffres 2018 ensemble dans cet ordre et qui sont divisibles par 9.

Réponse : (C)

25. Les nombres sont a, b, c, x, y, z, w et v, comme dans la figure :



Puisque la somme des nombres sur chaque côté est égale au même nombre S, alors :

$$S = a + v + w + b \qquad S = a + x + y + c \qquad S = b + z + c$$

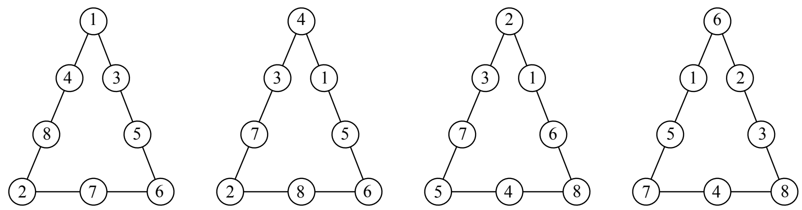
Lorsqu'on additionne les nombres sur les trois côtés, les nombres a, b et c sont comptés deux fois. On a :

$$S+S+S = (a+v+w+b)+(a+x+y+c)+(b+z+c) = (a+v+w+b+z+c+y+x)+a+b+c$$

Or, les nombres a, v, w, b, z, c, y, x sont les nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ dans un ordre quelconque.
Donc $a + v + w + b + z + c + y + x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$.
Donc :

$$3S = 36 + a + b + c$$

Puisque $3S$ est un multiple de 3 et que 36 est un multiple de 3, alors $a+b+c$ (qui est égal à $3S-36$) doit aussi être un multiple de 3.
On considère les nombres qui seront placés dans les cercles. On voit que la plus petite valeur possible de $a+b+c$ est 6 $(1+2+3=6)$ et dans ce cas, on a $3S=36+6$, ou $3S=42$, d'où $S=14$. Puisque $a+b+c$ ne peut avoir une valeur inférieure à 6 et que $3S=36+a+b+c$, $3S$ ne peut avoir une valeur inférieure à 42 et S ne peut donc avoir une valeur inférieure à 14.
On considère les nombres qui seront placés dans les cercles. On voit que la plus grande valeur possible de $a+b+c$ est 21 $(6+7+8=21)$ et dans ce cas, on a $3S=36+21$, ou $3S=57$, d'où $S=19$. Puisque $a+b+c$ ne peut avoir une valeur supérieure à 21, $3S$ ne peut avoir une valeur supérieure à 57 et S ne peut donc avoir une valeur supérieure à 19.
Parmi les nombres 14, 15, 16, 17, 18 et 19, quelles valeurs S peut-elle prendre ?
Les figures suivantes montrent comment placer les nombres pour obtenir $S=15,16,17,19$:



Pour trouver ces exemples, on procède par raisonnement et par tâtonnements.
Prenons par exemple le cas où $S=15$.
Puisque $3S=36+a+b+c$ et que $S=15$, alors $a+b+c=3\times 15-36$, ou $a+b+c=9$.
Dans l'exemple ci-haut, on a choisi $a=1$, $b=2$ et $c=6$.
Puisque le côté du bas $(b+z+c)$ contient le plus petit nombre de cercles, on place les deux plus grands des trois nombres 1, 2 et 6 sur ce côté, soit $b=2$ et $c=6$. Donc $z=15-b-c$, ou $z=7$.
On poursuit par tâtonnements pour attribuer les valeurs à u, v, x et y de manière à obtenir la même somme sur les deux autres côtés.
Il existe d'autres valeurs possibles de a, b et c pour que $a+b+c=9$ (p. ex., $1,3,5$ et $2,3,4$). Or, aucun de ces choix ne peut donner $S=15$.
On procède de la même manière pour obtenir les résultats ci-haut pour $S=16,17,19$.

Pour compléter la solution, on montre qu'il est impossible d'obtenir $S=14$ et $S=18$.
Supposons que $S=14$.
Puisque $a+b+c=3S-36$, alors $a+b+c=3\times 14-36$, ou $a+b+c=6$.
Les seules valeurs possibles de a, b, c , parmi $1,2,3,4,5,6,7,8$, sont $1,2,3$.
Le côté du bas donne $b+z+c=14$.
Puisque les valeurs de a, b, c sont $1,2,3$, dans un ordre quelconque, alors la valeur maximale de $b+c$ est 5 $(2+3=5)$. Puisque le nombre le plus grand est 8, la valeur maximale de z est 8.
La valeur maximale de $b+z+c$ est donc 13 $(5+8=13)$ et $b+z+c$ ne peut donc pas égaler 14.
Il est donc impossible d'obtenir $S=14$.
Supposons que $S=18$.
Puisque $a+b+c=3S-36$, alors $a+b+c=3\times 18-36$, ou $a+b+c=18$.
Les valeurs possibles de a, b, c sont $3,7,8$ et $4,6,8$ et $5,6,7$.
On considère le côté du bas avec $b+z+c=18$. On a donc $a+b+c=18$ et $b+z+c=18$.
Puisque ces deux sommes contiennent b et c et qu'elles ont le même total, on doit avoir $a=z$, ce qui n'est pas permis.
Il est donc impossible d'obtenir $S=18$.

Les valeurs possibles de S sont $15, 16, 17$ et 19.
Ces valeurs ont une somme de 67.

Réponse : (E)

8e année

1. Puisqu'un melon coute 3 \$, alors 6 melons coutent 18 \$ ($6 \times 3\,\$ = 18\,\$$).

Réponse : (C)

2. La partie de la droite numérique donnée a une longueur de 1 ($1 - 0 = 1$).
Elle est divisée en 10 parties égales et chaque partie a donc une longueur de 0,1 ($1 \div 10 = 0{,}1$).
Le P est situé à 2 espaces avant le 1. P a donc une valeur de $1 - (2 \times 0{,}1)$, ou $1 - 0{,}2$, ou 0,8.
(OU P est situé à 8 positions après le 0. P a donc une valeur de $8 \times 0{,}1$, ou 0,8.)

Réponse : (D)

3. Selon la priorité des opérations, on a $(2+3)^2 - (2^2 + 3^2) = 5^2 - (4+9) = 25 - 13 = 12$.

Réponse : (B)

4. Puisque Lakshmi parcourt 50 km dans une heure, alors dans une demi-heure (30 minutes), elle parcourt $50\,\text{km} \div 2$, ou 25 km.

Réponse : (C)

5. Evgeny a 15 fleurs ($3 + 2 + 4 + 6 = 15$) dont 2 sont des tulipes.
Il y a donc 2 choix favorables parmi 15 choix équiprobables.
La probabilité de choisir une tulipe est donc égale à $\frac{2}{15}$.

Réponse : (E)

6. L'étendue des tailles est égale à la différence entre la plus grande taille et la plus petite.
D'après le diagramme, Emma est la plus grande avec une taille d'environ 175 cm.
Kim est la plus petite avec une taille d'environ 100 cm.
L'étendue des tailles est plus près de 75 cm ($175 - 100 = 75$).

Réponse : (A)

7. *Solution 1*
La circonférence d'un cercle est égale à π fois son diamètre. On a donc $C = \pi \times d$, C étant la circonférence et d, le diamètre.
Puisque ce cercle a un diamètre de 1 cm, on a $C = \pi \times 1$ cm, ou $C = \pi$ cm.
Puisque π vaut environ 3,14, alors la circonférence est entre 3 cm et 4 cm.

Solution 2
La circonférence d'un cercle est donnée par la formule $C = 2 \times \pi \times r$, C étant la circonférence et r, le rayon.
Puisque le cercle a un diamètre de 1 cm, alors $r = \frac{1}{2}$ cm. On a donc $C = 2 \times \pi \times \frac{1}{2}$, ou $C = \pi$ cm.
Puisque π vaut environ 3,14, alors la circonférence est entre 3 cm et 4 cm.

Réponse : (B)

8. Le rapport de la quantité de gâteau qu'Alice a mangée à la quantité que Boris a mangée est de 3 : 1.
Si on coupe le gâteau en 4 parties égales, alors Alice a mangé 3 morceaux et Boris a mangé 1 morceau. Boris a donc mangé $\frac{1}{4}$ de gâteau.
Puisque $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\,\%$, Boris a mangé 25 % du gâteau.

Réponse : (D)

9. La lettre qui est à 3 positions de la lettre W, dans le sens des aiguilles d'une montre, est le Z.
Si on continue dans le même sens à partir de Z, l'alphabet recommence à la lettre A.
Donc, la lettre qui est située à 4 positions du W est le A.
La lettre qui est située à 4 positions du I est le M.
La lettre qui est située à 4 positions du N est le R.
Le texte encodé du message WIN est AMR.

Réponse : (C)

10. Le plus petit des trois entiers pairs consécutifs est 2 de moins que le nombre du milieu.
Le plus grand des trois entiers pairs consécutifs est 2 de plus que le nombre du milieu.
Donc, la somme des trois nombres est égale à trois fois le nombre du milieu.
(Pour le voir, on imagine soustraire 2 du plus grand nombre et l'ajouter au plus petit.
On n'a rien enlevé à la somme et maintenant, les trois nombres sont égaux, chacun étant égal au nombre du milieu.)
Puisque les trois nombres ont une somme de 312 et que $312 \div 3 = 104$, le nombre du milieu est donc 104.
Le plus grand des trois nombres est donc 106 ($104 + 2 = 106$).
(On peut vérifier que $102 + 104 + 106 = 312$.)

Réponse : (B)

11. Puisque $4x + 12 = 48$, alors $4x = 36$ car $36 + 12 = 48$.
Puisque $4x = 36$, alors $x = 9$, car $4 \times 9 = 36$.

Réponse : (E)

12. L'heure de Vancouver est 3 heures de moins que l'heure de Toronto.
Donc, quand il est 18 h 30 à Toronto, il est 15 h 30 à Vancouver.

Réponse : (C)

13. *Solution 1*
Mateo reçoit 20 \$ par heure pendant une semaine.
Puisqu'il y a 24 heures dans une journée et que $24 \times 20\,\$ = 480\,\$$, il reçoit 480 \$ par semaine.
Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine et que $7 \times 480\,\$ = 3360\,\$$, Mateo reçoit 3360 \$ dans une semaine.
Silviane reçoit 400 \$ par jour pendant une semaine.
Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine et que $7 \times 400\,\$ = 2800\,\$$, elle reçoit 2800 \$ dans une semaine.
La différence entre les deux sommes d'argent est de 560 \$ ($3360\,\$ - 2800\,\$ = 560\,\$$).

Solution 2
Mateo reçoit 20 \$ par heure pendant une semaine.
Puisqu'il y a 24 heures dans une journée et que $24 \times 20\,\$ = 480\,\$$, il reçoit 480 \$ par semaine.
Silviane reçoit 400 \$ par jour pendant une semaine. Mateo reçoit donc 80 \$ de plus que Silviane ($480\,\$ - 400\,\$ = 80\,\$$) à chaque jour.
Puisqu'il y a 7 jours par semaine, la différence entre les deux sommes qu'ils reçoivent par semaine est de 560 \$ ($80\,\$ \times 7 = 560\,\$$).

Réponse : (A)

14. Puisque $2018 = 2 \times 1009$ et que 2 et 1009 sont des nombres premiers, la réponse est $2 + 1009$, ou 1011.
Remarque : Dans la question, on affirme que 2018 a exactement deux diviseurs qui sont des nombres premiers. Puisque 2 est un diviseur premier de 2018, l'autre nombre premier doit être 1009, autrement 1009 aurait plus d'un diviseur premier et ainsi 2018 aurait plus de deux diviseurs premiers.

Réponse : (B)

15. Le premier prix peut être attribué à n'importe quel des 5 camarades.
Une fois que ce prix est attribué, le deuxième prix peut être attribué à n'importe quel des 4 autres camarades (puisque le deuxième prix ne peut être attribué au gagnant du premier prix).
Donc pour chacun des 5 choix pour le premier prix, il y a 4 choix pour le deuxième prix. Il y a donc 5×4 façons d'attribuer les deux premiers prix.
Une fois que les premier et deuxième prix sont attribués, le troisième prix peut être attribué à n'importe quel des 3 autres camarades (puisque le troisième prix ne peut être attribué aux gagnants des premier et deuxième prix).
Ainsi pour chacune des 5×4 façons d'attribuer les deux premiers prix, il y a 3 façons d'attribuer le troisième prix.
Il y a donc $5 \times 4 \times 3$ façons, ou 60 façons d'attribuer les trois premiers prix.

Réponse : (B)

16. Si deux entiers ont un produit égal à 1, ils doivent tous deux être 1 ou tous deux être -1.
De même, si le produit de six entiers est égal à 1, chacun des entiers doit être 1 ou -1.
De plus, le nombre de facteurs -1 doit être pair, car le produit d'un nombre impair de facteurs -1 est négatif. Il doit donc y avoir 2, 4 ou 6 facteurs -1 parmi les 6 entiers.
On examine les possibilités au moyen d'un tableau.

N$^{\text{bre}}$ de -1	Produit des six entiers	Somme des six entiers
0	$(1)(1)(1)(1)(1)(1) = 1$	$1+1+1+1+1+1 = 6$
2	$(-1)(-1)(1)(1)(1)(1) = 1$	$(-1)+(-1)+1+1+1+1 = 2$
4	$(-1)(-1)(-1)(-1)(1)(1) = 1$	$(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+1+1 = -2$
6	$(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = 1$	$(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1) = -6$

Le choix de réponse qui ne peut pas être la somme des six entiers est 0.

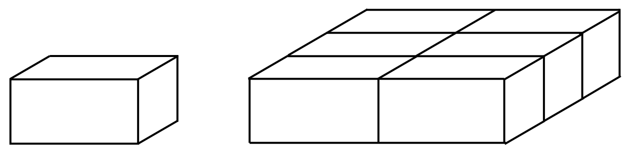
Réponse : (C)

17. *Solution 1*
Après chaque translation, l'abscisse de l'image est 5 unités de plus que celle du point qui subit la translation et l'ordonnée de l'image est 3 unités de plus que celle du point qui subit la translation.
Après la 1$^{\text{re}}$ translation, l'image du point $A(-3,2)$ est $B(-3+5, 2+3)$, ou $B(2,5)$.
Après la 2$^{\text{e}}$ translation, l'image du point $B(2,5)$ est $C(2+5, 5+3)$, ou $C(7,8)$.
Après la 3$^{\text{e}}$ translation, l'image du point $C(7,8)$ est $D(7+5, 8+3)$, ou $D(12,11)$.
Après la 4$^{\text{e}}$ translation, l'image du point $D(12,11)$ est $E(12+5, 11+3)$, ou $E(17,14)$.
Après la 5$^{\text{e}}$ translation, l'image du point $E(17,14)$ est $F(17+5, 14+3)$, ou $F(22,17)$.
Après la 6$^{\text{e}}$ translation, l'image du point $F(22,17)$ est $G(22+5, 17+3)$, ou $G(27,20)$.
L'image finale est le point $(27,20)$. Donc $x + y = 27 + 20$, ou $x + y = 47$.

Solution 2
Au départ, la somme $x + y$ des coordonnées de A est égale à -1.
Après chaque translation, l'abscisse est augmentée de 5 et l'ordonnée est augmentée de 3.
Ainsi après chaque translation, la valeur de $x + y$ est augmentée de $5 + 3$, ou 8.
Après 6 translations, la valeur de $x + y$ aura augmenté de 6×8, ou 48.
Elle sera donc égalle à $-1 + 48$, ou 47.

Réponse : (D)

18. *Solution 1*
Dans la figure suivante, la longueur du prisme à gauche est doublée et sa largeur est triplée. On obtient le prisme à droite.



On voit que le prisme à gauche fait 6 fois (2×3 fois) dans le deuxième. Le volume du deuxième prisme est donc 6 fois celui du premier. Il est donc égal à $6 \times 30\,\text{cm}^3$, ou $180\,\text{cm}^3$.
De même, si on divise la hauteur du deuxième prisme par 4, on obtient $\frac{1}{4}$ du prisme précédent. Le volume sera donc divisé par 4. Il sera égal à $45\,\text{cm}^3$ $(180 \div 4 = 45)$.
Si on double la longueur d'un prisme, qu'on triple sa largeur et qu'on divise sa hauteur par 4, le volume du nouveau prisme sera égal à $45\,\text{cm}^3$.

Solution 2
On obtient le volume d'un prisme droit à base rectangulaire en multipliant sa longueur, sa largeur et sa hauteur.
Lorsqu'on double la longueur du prisme, ce produit est doublé, c'est-à-dire que le volume est doublé. Puisque le prisme initial a un volume de 30 cm^3, le nouveau prisme a un volume de $30\,\text{cm}^3 \times 2$, ou 60 cm^3.
Lorsque la largeur de ce nouveau prisme est triplée, le produit de la longueur, de la largeur et de la hauteur est triplé, c'est-à-dire que le volume précédent est triplé. Puisque le volume était de 60 cm^3, le nouveau volume sera de $60\,\text{cm}^3 \times 3$, ou 180 cm^3.
Lorsque la hauteur de ce nouveau prisme est divisée par 4, le produit de la longueur, de la largeur et de la hauteur est divisé par 4, c'est-à-dire que le volume est divisé par 4. Puisque le volume du prisme précédent était de 180 cm^3, le nouveau prisme a un volume de $180\,\text{cm}^3 \div 4$, ou 45 cm^3.

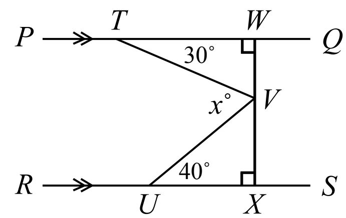
Solution 3
Le volume d'un prisme droit à base rectangulaire est égal au produit de la longueur L, de sa largeur l et de la hauteur h. Il est donc égal à Llh.
Lorsqu'on double la longueur L du premier prisme, la nouvelle longueur est $2L$.
Lorsqu'on triple la largeur l du premier prisme, la nouvelle largeur est $3l$ et lorsqu'on divise la hauteur h du premier prisme par 4, la nouvelle hauteur est $\frac{1}{4}h$.
Le volume du nouveau prisme est égal au produit de la longueur $2L$, de la largeur $3l$ et de la hauteur $\frac{1}{4}h$, ce qui est égal à $(2L)(3l)(\frac{1}{4}h)$, ou $\frac{3}{2}Llh$.
Le volume du nouveau prisme est donc $\frac{3}{2}$ fois plus grand que celui du prisme initial.
Puisque celui-ci a un volume de 30 cm^3, alors en doublant la longueur, en triplant sa largeur et en divisant la hauteur par 4, on obtient un volume de $30\,\text{cm}^3 \times \frac{3}{2}$, ou 45 cm^3.

Réponse : (E)

19. La taille moyenne d'un groupe d'enfants est égale à la somme des tailles divisée par le nombre d'enfants.
Si 12 enfants mesuraient 8 cm de plus, cela augmenterait la somme des tailles de $12 \times 8\,\text{cm}$, ou $96\,\text{cm}$. Cette augmentation totale augmenterait en moyenne la taille de chaque élève de la classe de $6\,\text{cm}$.
On a donc $96 \div (\text{nombre d'élèves}) = 6$. Or, on sait que $96 \div 16 = 6$.
Il y a donc 16 élèves dans la classe.

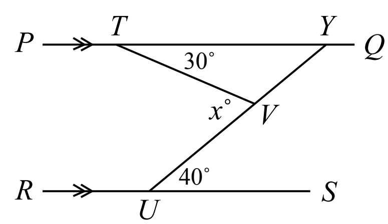
Réponse : (A)

20. *Solution 1*
Au point V, on construit un segment WX perpendiculaire à PQ.
Puisque RS est parallèle à PQ, alors WX est perpendiculaire à RS.
Dans le triangle TWV, $\angle TWV = 90°$ et $\angle WTV = 30°$.
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de $180°$, alors $\angle TVW = 180° - 30° - 90°$, ou $\angle TVW = 60°$.
De même, dans le triangle UXV, $\angle UXV = 90°$ et $\angle VUX = 40°$.
Donc $\angle UVX = 180° - 40° - 90°$, ou $\angle UVX = 50°$.



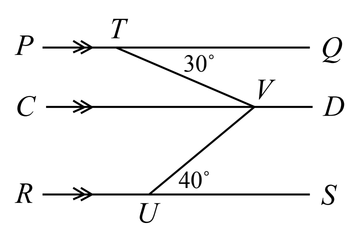
Puisque WX est un segment de droite, $\angle TVW + \angle TVU + \angle UVX = 180°$.
Donc $60° + \angle TVU + 50° = 180°$, ou $\angle TVU = 180° - 60° - 50°$, ou $\angle TVU = 70°$. Donc $x = 70$.

Solution 2
On prolonge le segment UV jusqu'au point Y sur PQ.
Puisque RS est parallèle à PQ, les angles alternes-internes TYV et VUS sont égaux. Donc $\angle TYV = \angle VUS = 40°$.
Dans le triangle TYV, $\angle TYV = 40°$ et $\angle YTV = 30°$.
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de $180°$, alors $\angle TVY = 180° - 40° - 30°$, ou $\angle TVY = 110°$.



Puisque UY est un segment de droite, $\angle TVU + \angle TVY = 180°$.
Donc $\angle TVU + 110° = 180°$, ou $\angle TVU = 180° - 110°$, ou $\angle TVU = 70°$. Donc $x = 70$.

Solution 3
Au point V, on construit un segment CD parallèle à PQ et à RS.
Puisque CD est parallèle à PQ, les angles alternes-internes QTV et TVC sont égaux. Donc $\angle TVC = \angle QTV = 30°$.
De même, puisque CD est parallèle à RS, les angles alternes-internes CVU et VUS sont égaux. Donc $\angle CVU = \angle VUS = 40°$.
Puisque $\angle TVU = \angle TVC + \angle CVU$, alors $\angle TVU = 30° + 40°$, ou $\angle TVU = 70°$. Donc $x = 70$.



Réponse : (D)

21. *Solution 1*
On suppose qu'il y a 100 billes dans le sac.
La probabilité de choisir une bille brune est de 0,3. Il y a donc 30 billes brunes dans le sac, puisque $\frac{30}{100} = 0{,}3$.
Il y a trois fois plus de chances de choisir une bille brune que de choisir une bille mauve. Il y a donc 10 billes mauves dans le sac ($30 \div 3 = 10$).
Il y a autant de chances de choisir une bille verte qu'une bille mauve. Il y a donc 10 billes vertes dans le sac.
Puisqu'il y a 30 billes brunes, 10 billes mauves et 10 billes vertes dans le sac, il reste 50 billes

qui doivent être rouges ou jaunes $(100 - 30 - 10 - 10 = 50)$.
Puisqu'il y a autant de chances de choisir une bille rouge qu'une bille jaune, il y a 25 billes rouges et 25 billes jaunes dans le sac $(50 \div 2 = 25)$.
Parmi les 100 billes du sac, il y en a 35 $(25 + 10 = 35)$ qui sont rouges ou vertes.
La probabilité de choisir une bille qui est rouge ou verte est égale à $\frac{35}{100}$, ou 0,35.

Solution 2
La probabilité de choisir une bille brune est de 0,3.
Il y a trois fois plus de chances de choisir une bille brune que de choisir une bille mauve. La probabilité de chosir une bille mauve est donc égale à $0{,}3 \div 3$, ou 0,1.
Il y a autant de chances de choisir une bille verte qu'une bille mauve. Il y a donc une probabilité de 0,1 de choisir une bille verte.
Soit p la probabilité de chosir une bille rouge.
Il y a autant de chances de choisir une bille rouge qu'une bille jaune. La probabilité de choisir une bille jaune est donc égale à p.
La somme des probabilités de choisir une bille est égale à 1.
Donc $0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}1 + p + p = 1$, ou $0{,}5 + 2p = 1$, ou $2p = 0{,}5$. Donc $p = 0{,}25$.
La probabilité de choisir une bille rouge est de 0,25 et celle de choisir une bille verte est de 0,1.
La probabilité de choisir une bille qui est rouge ou verte est égale à $0{,}25 + 0{,}1$, ou 0,35.

Réponse : (C)

22. L'aire du carré $PQRS$ est égale à 30×30, ou 900.
Chacune des 5 régions a la même aire. Cette aire est donc égale à $900 \div 5$, ou 180.
L'aire du triangle SPT est égale à $\frac{1}{2}(PS)(PT)$, ou $\frac{1}{2}(30)(PT)$, ou $15(PT)$. Elle est égale à 180.
Donc $15(PT) = 180$, d'où $PT = 180 \div 15$, ou $PT = 12$.
L'aire du triangle STU est égale à 180.
On considère la base UT du triangle STU.
La hauteur correspondante du triangle STU est PS, puisque PS est abaissé du sommet S perpendiculairement au prolongement de la base UT.
L'aire du triangle STU est égale à $\frac{1}{2}(PS)(UT)$, ou $\frac{1}{2}(30)(UT)$, ou $15(UT)$. Elle est égale à 180.
Donc $15(UT) = 180$, d'où $UT = 180 \div 15$, ou $UT = 12$.
Dans le triangle SPT, $\angle SPT = 90°$.
D'après le théorème de Pythagore, $ST^2 = PS^2 + PT^2$. Donc $ST^2 = 30^2 + 12^2$, ou $ST^2 = 900 + 144 = 1044$, ou $ST = \sqrt{1044}$ (puisque $ST > 0$).
Dans le triangle SPU, $\angle SPU = 90°$ et $PU = PT + UT$, ou $PU = 12 + 12$, ou $PU = 24$.
D'après le théorème de Pythagore, $SU^2 = PS^2 + PU^2$. Donc $ST^2 = 30^2 + 24^2$, ou $SU^2 = 900 + 576 = 1476$, ou $SU = \sqrt{1476}$ (puisque $SU > 0$).
Donc $\dfrac{SU}{ST} = \dfrac{\sqrt{1476}}{\sqrt{1044}}$, ce qui est à peu près égal à 1,189.
Parmi les choix de réponse, $\dfrac{SU}{ST}$ est plus près de 1,19.

Réponse : (B)

23. *Solution 1*

On remplit un tableau donnant les valeurs de $n(n+1)(n+2)$ pour les valeurs de n de 1 à 10 :

n	$n(n+1)(n+2)$
1	$1 \times 2 \times 3 = 6$
2	$2 \times 3 \times 4 = 24$
3	$3 \times 4 \times 5 = 60$
4	$4 \times 5 \times 6 = 120$
5	$5 \times 6 \times 7 = 210$
6	$6 \times 7 \times 8 = 336$
7	$7 \times 8 \times 9 = 504$
8	$8 \times 9 \times 10 = 720$
9	$9 \times 10 \times 11 = 990$
10	$10 \times 11 \times 12 = 1320$

On voit que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 5 lorsque $n = 3, 4, 5, 8, 9, 10$.
De façon générale, puisque 5 est un nombre premier, $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 5 lorsqu'un de ses facteurs $n, n+1, n+2$ est un multiple de 5.
Un entier positif est un multiple de 5 lorsque son chiffre des unités est un 0 ou un 5.
On remplit ensuite un tableau qui donne le chiffre des unités de $n+1$ et celui de $n+2$ selon le chiffre des unités de n :

Chiffre des unités de n	Chiffre des unités de $n+1$	Chiffre des unités de $n+2$
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	6
5	6	7
6	7	8
7	8	9
8	9	0
9	0	1
0	1	2

D'après ce tableau, un des trois facteurs a un chiffre des unités égal à 0 ou à 5 lorsque le chiffre des unités de n est $3, 4, 5, 8, 9$ ou 0. (On remarque que ceci concorde avec le premier tableau.)
Dans chaque bloc de 10 valeurs consécutives de n dont la dernière est un multiple de 10, il y a 6 valeurs de $n(n+1)(n+2)$ qui sont des multiples de 5.
On cherche la 2018^{e} valeur de n pour laquelle $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 5.
Or $2018 = 336 \times 6 + 2$.
Cela nous dit que parmi les 3360 premières valeurs de n ($336 \times 10 = 3360$), il y a 2016 valeurs de n ($336 \times 6 = 2016$) pour lesquelles $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 5. (Six entiers sur dix vérifient cette propriété.)
Il nous faut deux autres valeurs de n, dans la liste, qui vérifient cette propriété.
Les deux valeurs suivantes de n pour lesquelles $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 5 auront 3 et 4 pour chiffre des unités. Ce sont donc 3363 et 3364.
Donc, 3364 est le 2018^{e} entier de la liste.

Solution 2
On remplit un tableau donnant les valeurs de $n(n+1)(n+2)$ pour les valeurs de n de 1 à 10 :

n	$n(n+1)(n+2)$
1	$1 \times 2 \times 3 = 6$
2	$2 \times 3 \times 4 = 24$
3	$3 \times 4 \times 5 = 60$
4	$4 \times 5 \times 6 = 120$
5	$5 \times 6 \times 7 = 210$
6	$6 \times 7 \times 8 = 336$
7	$7 \times 8 \times 9 = 504$
8	$8 \times 9 \times 10 = 720$
9	$9 \times 10 \times 11 = 990$
10	$10 \times 11 \times 12 = 1320$

D'après le tableau, on voit que la valeur de $n(n+1)(n+2)$ n'est pas un multiple de 5 lorsque $n = 1$ ou lorsque $n = 2$, mais qu'elle est un multiple de 5 lorsque $n = 3, 4, 5$.
De même, la valeur de $n(n+1)(n+2)$ n'est pas un multiple de 5 lorsque $n = 6, 7$, mais qu'elle est un multiple de 5 lorsque $n = 8, 9, 10$.
Si on considère des groupes de 5 valeurs consécutives de n en commençant par $n = 1$, il semble que pour les deux premiers entiers de chaque groupe, la valeur de $n(n+1)(n+2)$ n'est pas un multiple de 5 et que pour les trois derniers entiers du groupe, la valeur de $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 5.
Cette régularité continue-t-elle ?
Puisque 5 est un nombre premier, alors pour chaque valeur de $n(n+1)(n+2)$ qui est un multiple de 5, au moins un des facteurs $n, n+1$ ou $n+2$ doit être divisible par 5.
(On remarque aussi que pour chaque valeur de $n(n+1)(n+2)$ qui n'est pas un multiple de 5, chaque facteur n, $n+1$ et $n+2$ n'est pas divisible par 5.)
Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles au moins un des facteurs n, $n+1$ ou $n+2$ est divisible par 5 et ainsi $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5 ?
Lorsque n est un multiple de 5, la valeur de $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5.
Lorsque n est 1 de moins qu'un multiple de 5, alors $n+1$ est un multiple de 5 et $n(n+1)(n+2)$ est ainsi divisible par 5.
Lorsque n est 2 de moins qu'un multiple de 5, alors $n+2$ est un multiple de 5 et ainsi $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5.
De plus, lorsque n est 3 de moins qu'un multiple de 5, aucun des facteurs n, $n+1$ (qui est 2 de moins qu'un multiple de 5) et $n+2$ (qui est 1 de moins qu'un multiple de 5) n'est divisible par 5 et ainsi $n(n+1)(n+2)$ n'est pas divisible par 5.
De même, lorsque n est 4 de moins qu'un multiple de 5, aucun des facteurs n, $n+1$ (qui est 3 de moins qu'un multiple of 5) et $n+2$ (qui est 2 de moins qu'un multiple of 5) n'est divisible par 5 et ainsi $n(n+1)(n+2)$ n'est pas divisible par 5.
On a montré que la valeur de $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 5 lorsque n est un multiple de 5 ou 1 de moins qu'un multiple de 5 ou 2 de moins qu'un multiple de 5.
On a aussi montré que la valeur de $n(n+1)(n+2)$ n'est pas un multiple de 5 lorsque n est 3 de moins qu'un multiple de 5 ou 4 de moins qu'un multiple de 5.
Puisque tout entier positif est un multiple of 5 ou 1 de moins, 2 de moins, 3 de moins ou 4 de moins qu'un multiple de 5, on a tenu compte des valeurs de $n(n+1)(n+2)$ pour tous les entiers strictement positifs n.
On peut résumer au moyen du tableau suivant :

La valeur de l'expression $n(n+1)(n+2)$ est-elle divisible par 5 ?

Non	Non	Oui	Oui	Oui
$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$n=11$	$n=12$	$n=13$	$n=14$	$n=15$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dans ce tableau, il y a 3 valeurs de n par ligne pour lesquelles l'expression $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5. On remarque que le dernier nombre de la $k^{\text{ième}}$ ligne est $5k$.
On cherche le 2018^e tel entier de cette liste.
Puisque $2018 \div 3 = 672{,}666\cdots$, les 672 premières rangées nous donnent les 2016 premières valeurs de n pour lesquelles l'expression $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5 (car $672 \times 3 = 2016$).
La 2018^e valeur de n est dans la rangée suivante.
Or, le dernier terme de la 672^e rangée est 5×672, ou 3360. Voici donc les 672^e et 673^e rangées du tableau :

Non	Non	Oui	Oui	Oui
$n=3356$	$n=3357$	$n=3358$	$n=3359$	$n=3360$
$n=3361$	$n=3362$	$n=3363$	$n=3364$	$n=3365$

La valeur $n=3360$ est donc la 2016^e valeur de n pour laquelle l'expression $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5.
La 2017^e telle valeur de n est dans la rangée suivante, soit $n=3363$.
La 2018^e telle valeur de n est donc $n=3364$.

Réponse : (E)

24. Soit a, b, c et d les quatre chiffres distincts choisis parmi les chiffres de 1 à 9.
On peut placer ces quatre chiffres en ordres différents de 24 façons de manière à former 24 entiers distincts de quatre chiffres.
On procède en trois étapes.

1re étape : On détermine le nombre de fois que chacun des chiffres a, b, c et d parait dans la colonne des unités, dans la colonne des dizaines, dans la colonne des centaines et dans la colonne des milliers, parmi les 24 nombres de 4 chiffres.

Si un des 24 nombres de 4 chiffres a a pour chiffre des milliers, les trois autres chiffres peuvent paraitre de 6 façons, soit bcd, bdc, cbd, cdb, dbc ou dcb.
Il y a donc 6 entiers de quatre chiffres dont le chiffre des milliers est a.
Si un des 24 nombres de 4 chiffres a b pour chiffre des milliers, les trois autres chiffres peuvent être placés de 6 façons différentes pour former 6 entiers de 4 chiffres dont le chiffre des milliers est b.
De même, il y a 6 entiers de quatre chiffres dont le chiffre des milliers est c et 6 entiers de quatre chiffres dont le chiffre des milliers est d.
On peut utiliser le même raisonnement pour montrer qu'il y a 6 entiers de quatre chiffres dont le chiffre des centaines est a, 6 entiers de quatre chiffres dont le chiffre des centaines est b, 6 entiers de quatre chiffres dont le chiffre des centaines est c et 6 entiers de quatre chiffres dont le chiffre des centaines est d.
De fait, on peut généraliser pour montrer que chacun des chiffres a, b, c et d, parait 6 fois dans la colonne des milliers, 6 fois dans la colonne des centaines, 6 fois dans la colonne des dizaines et 6 fois dans la colonne des unités.

2[e] étape : On détermine N, la somme des 24 entiers de 4 chiffres.

Puisque chacun des chiffres a, b, c et d parait 6 fois comme chiffre des unités dans les 24 entiers de 4 chiffres, la somme des chiffres des unités des 24 entiers de 4 chiffres est égale à $6a+6b+6c+6d$, ou $6 \times (a+b+c+d)$.
Puisque chacun des chiffres a, b, c et d parait 6 fois comme chiffre des dizaines dans les 24 entiers de 4 chiffres, la somme des chiffres des dizaines des 24 entiers de 4 chiffres est égale à $10 \times 6 \times (a+b+c+d)$.
On continue de la même façon pour la somme des chiffres des centaines et des milliers pour obtenir :

$$\begin{aligned} N &= 1000 \times 6 \times (a+b+c+d) + 100 \times 6 \times (a+b+c+d) + 10 \times 6 \times (a+b+c+d) \\ &\quad + 6 \times (a+b+c+d) \\ &= 6000 \times (a+b+c+d) + 600 \times (a+b+c+d) + 60 \times (a+b+c+d) + 6 \times (a+b+c+d) \end{aligned}$$

On pose $s = a+b+c+d$. Donc $N = 6000s + 600s + 60s + 6s$, ou $N = 6666s$.

3[e] étape : On détermine la plus grande somme des diviseurs premiers de $N = 6666s$

On écrit 6666 en factorisation première : $6666 = 6 \times 1111 = 2 \times 3 \times 11 \times 101$.
On a donc $N = 2 \times 3 \times 11 \times 101 \times s$. La somme des diviseurs premiers de N est donc égale à $2+3+11+101$ plus les diviseurs premiers de s qui sont différents de $2, 3, 11$ et 101.
Pour déterminer la plus grande somme des diviseurs premiers de N, il suffit donc de déterminer la plus grande somme des diviseurs premiers de s qui n'égalent pas $2, 3, 11$ ou 101.
Or, $s = a+b+c+d$ et la valeur de s est calculée pour chaque choix de a, b, c et d parmi les chiffres de 1 à 9. La plus grande valeur de s est donc $9+8+7+6$, ou 30 et sa plus petite valeur est $1+2+3+4$, ou 10.
Si $s = 29$ (on obtient cette valeur lorsque a, b, c et d égalent $9, 8, 7$ et 5 dans un ordre quelconque), alors $N = 2 \times 3 \times 11 \times 101 \times 29$ et la somme des diviseurs premiers de N est égale à $2+3+11+101+29$, ou 146 (puisque 29 est un nombre premier).
Si s prend une autre valeur de 10 à 30, la somme de ses diviseurs est inférieure à 29.
(On peut s'en convaincre ou faire une liste des diviseurs premiers des entiers de 10 à 30 pour vérifier que 29 est bien la plus grande somme.)
Donc, la plus grande somme des diviseurs premiers de N est 146.

Réponse : (D)

25. Puisque le quadrillage a une hauteur de 2, il n'y a que deux longueurs possibles pour les flèches verticales, soit 1 ou 2.
Puisque toutes les flèches d'un chemin doivent être de longueurs distinctes, il peut y avoir un maximum de deux flèches verticales dans n'importe quel chemin.
Il ne peut donc y avoir plus de 3 flèches horizontales dans un chemin. (S'il y avait 4 flèches horizontales ou davantage, il faudrait au moins 3 flèches verticales, car deux flèches consécutives doivent être perpendiculaires. Cela contredirait l'énoncé précédent.)
On peut conclure qu'un chemin est formé d'un maximum de 5 flèches.

On utilise le fait que les flèches qui composent un chemin doivent être de longueurs distinctes pour déterminer les combinaisons possibles de longueurs de flèches horizontales et verticales qui permettent de se rendre de A à F.
Lorsqu'on aura déterminé les combinaisons possibles de flèches verticales et de flèches horizontales, on tentera de les placer en ordres différents.
On considère d'abord les flèches verticales.
Le quadrillage a une hauteur de 2 et A est 1 unité dessous F. Donc n'importe quelle combinaison

de flèches verticales doit avoir pour résultat 1 unité vers le haut.
On utilise H pour « vers le haut » et B pour « vers le bas ».
Les combinaisons possibles sont :

H1 (flèche vers le haut de longueur 1)
B1, H2 (flèche vers le bas de longueur 1, flèche vers le haut de longueur 2)

On considère ensuite les flèches horizontales.
Le quadrillage a une longueur de 12. Il y a une distance de 9 unités entre A de F. Donc, n'importe quelle combinaison de flèches horizontales doit avoir pour résultat 9 vers la droite.
On utilise D pour « droite » et G pour « gauche ».
Plusieurs de ces combinaisons peuvent être placées dans des ordres différents. On en tiendra compte plus loin.
On traite de chemins de 1 flèches, puis de chemins de 2 flèches, puis de chemins de 3 flèches.
On remarque que toute combinaison de flèches verticales contient une flèche de longueur 1. Puisque les flèches d'un chemin ont des longueurs distinctes, il n'y aura aucune flèche horizontale de longueur 1.
Aussi, toute combinaison de 3 flèches horizontales doit être combinée avec 2 flèches verticales, qui seront de longueurs 1 et 2. Il n'y aura donc aucune combinaison de 3 flèches horizontales avec une flèche horizontale de longueur 1 et/ou une flèche horizontale de longueur 2.

a) D9
b) D2, D7
c) D3, D6
d) D4, D5
e) G2, D11
f) G3, D12
g) G3, D4, D8
h) G3, D5, D7
i) G4, D3, D10
j) G4, D5, D8
k) G4, D6, D7
l) G5, D3, D11
m) G5, D4, D10
n) G5, D6, D8
o) G6, D3, D12
p) G6, D4, D11
q) G6, D5, D10
r) G6, D7, D8
s) G7, D4, D12
t) G7, D5, D11
u) G7, D6, D10
v) G8, D5, D12
w) G8, D6, D11
x) G8, D7, D10
y) G9, D6, D12
z) G9, D7, D11
aa) G9, D8, D10
ab) G10, D7, D12
ac) G10, D8, D11
ad) G11, D8, D12

Il y a une seule combinaison contenant 1 flèche horizontale.
Les combinaisons de 2 flèches horizontales indiquent d'abord celles de deux flèches vers la droite (en ordre croissant selon la longueur de la première flèche) et ensuite celles formées d'une flèche vers la gauche suivie de flèches vers la droite (en ordre croissant selon la longueur de la première flèche).
Les combinaisons de 3 flèches sont plus difficiles à inscrire au complet.
Il n'y a aucune combinaison utile qui inclut 3 flèches vers la droite ou 2 flèches vers la gauche, puisqu'au moins une de ces flèches serait de longueur 1 ou 2.
On a inscrit les combinaisons avec G3 (flèche vers la gauche de longueur 3), puis celles avec G4, et ainsi de suite.

On combine maintenant les flèches horizontales et verticales pour former les chemins.
Chaqque combinaison de flèches de diverses directions et longueurs peut être reproduite pour former un chemin.
La combinaison H1 peut seulement être utilisée avec les déplacements horizontaux de a) à f) dans la liste, puisqu'il ne peut pas être utilisé avec trois flèches horizontales.
a) Il y a deux chemins : H1/D9 et D9/H1.

b) Il y a deux chemins : D2/H1/D7 et D7/H1/D2.

c) De même, il y a deux chemins.

d) De même, il y a deux chemins.

e) Il y a un chemin : G2/H1/D11. En effet, on doit alterner horizontal, vertical, horizontal et on ne peut terminer par une flèche vers la gauche.

f) De même, il y a un chemin.

Jusqu'à présent, on a 10 chemins.
La combinaison B1, H2 peut être combinée avec des flèches horizontales de longueurs 1, 2 ou 3.

a) Il y a 1 chemin : B1/D9/H2. En effet, on ne peut terminer par une flèche vers la gauche.

b) Impossible, car on aurait deux flèches de longueur 2.

c) Il y a 4 chemins : D3/B1/D6/H2, D6/B1/D3/H2, B1/D3/H2/D6, B1/D6/H2/D3. On peut remplacer D3 et D6 l'un pour l'autre et choisir de commencer par une flèche verticale ou horizontale.

d) De même, il y a 4 chemins.

e) Impossible, car on aurait deux flèches de longueur 2.

f) Il y a 2 chemins : G3/B1/D12/H2 et B1/G3/H2/D12.

g) Il y a 4 chemins : G3/B1/D4/H2/D8, D4/B1/G3/H2/D8, G3/B1/D8/H2/D4, D8/B1/G3/H2/D4. Dans chaque cas, on doit commencer par une flèche horizontale et terminer par une flèche vers la droite. En plus, la flèche vers le bas doit précéder la flèche vers le haut.

h) De même, il y a 4 chemins.

i) Il y a 1 chemin : D3/B1/G4/H2/D10. On ne peut commencer par D10 ou G4, puisqu'on sortirait du quadrillage. On doit aussi terminer par une flèche vers la droite.

j, k) Il y a 2 chemins dans chaque cas. Par exemple, dans le cas j), on a D5/B1/G4/H2/D8 et D8/B1/G4/H2/D5.

l, m) Comme dans le cas i), il y a 1 chemin dans chaque cas.

n) Comme dans le cas j), il y a 2 chemins.

o, p, q) Comme dans le cas i), il y a 1 chemin dans chaque cas.

r) Comme dans le cas j), il y a 2 chemins.

s) à ad) Dans chacun de ces 12 cas, il y a 1 chemin comme dans le cas i).

En incluant les 10 chemins déjà comptés qui utilisent H1 seulement, le nombre total de chemins de A à F est égal à :

$$10 + 1 + 4 + 4 + 2 + 4 + 4 + 1 + 2(2) + 2(1) + 2 + 3(1) + 2 + 12(1) = 55$$

Réponse : (B)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2017

(7^{e} et 8^{e} années – Secondaire I et II)

le mercredi 10 mai 2017
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 11 mai 2017
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Jeff Anderson
Terry Bae
Jacquelene Bailey
Shane Bauman
Carmen Bruni
Ersal Cahit
Serge D'Alessio
Janine Dietrich
Jennifer Doucet
Fiona Dunbar
Mike Eden
Barry Ferguson
Judy Fox
Steve Furino
Rob Gleeson
John Galbraith
Alain Gamache
Robert Garbary
Sandy Graham
Conrad Hewitt
Angie Hildebrand
Carrie Knoll
Judith Koeller
Bev Marshman
Mike Miniou
Brian Moffat
Dean Murray
Jen Nelson
J.P. Pretti
Kim Schnarr
Carolyn Sedore
Kevin Shonk
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga
Christine Vender
Heather Vo
Ashley Webster

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), Winnipeg, MB
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
Sarah Garrett, J.D. Hogarth P.S., Fergus, ON
John McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
David Switzer, Scott Central P.S., Sandford, ON
Rachael Verbruggen, University of Waterloo, Waterloo, ON
Ashley Webster, University of Waterloo, Waterloo, ON
Laurissa Werhun, Parkdale C.I., Toronto, ON
Robert Wong, Vernon Barford School, Edmonton, ON
Chris Wu, Rippleton P.S., Toronto, ON
Lori Yee, William Dunbar P.S., Pickering, ON

7^e année

1. On a : $(2+4+6)-(1+3+5)=12-9=3$

Réponse : (B)

2. D'après la bande la plus longue, environ 50 élèves jouent au soccer.
Puisqu'il s'agit de la bande la plus longue, plus d'élèves pratiquent ce sport que tout autre sport.

Réponse : (C)

3. Michel a 280 $ en billets de 20 $. Puisque $280 \div 20 = 14$, il a 14 billets de 20 $.

Réponse : (C)

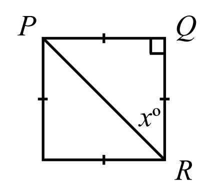
4. Il y a deux multiplications d'entiers positifs qui donnent un résultat de 14, soit 2×7 et 1×14.
Puisque les deux entiers doivent être des entiers de 1 à 10, on doit avoir 2×7.
La somme de 2 et de 7 est 9.

Réponse : (D)

5. Sous forme fractionnaire, trois millièmes est égal à $\frac{3}{1000}$.
Sous forme décimale, trois millièmes est égal à 0,003 ($3 \div 1000 = 0{,}003$).

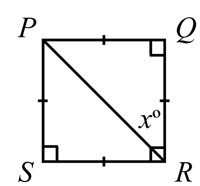
Réponse : (E)

6. *Solution 1*



Puisque la figure est un carré, alors $PQ = QR$ et $\angle PQR = 90^\circ$.
Puisque $PQ = QR$, le triangle PQR est isocèle et on a donc $\angle QPR = \angle QRP = x^\circ$.
Or, la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.
Puisque $\angle PQR = 90^\circ$, alors $\angle QPR + \angle QRP = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.
Puisque $\angle QPR = \angle QRP$, alors $\angle QRP = 90^\circ \div 2 = 45^\circ$. Donc $x = 45$.

Solution 2



La diagonale PR coupe le carré $PQRS$ en deux triangles identiques (isométriques), soit les triangles PQR et PSR.
Puisque ces triangles sont identiques, $\angle PRS = \angle PRQ = x^\circ$.
Puisque $PQRS$ est un carré, alors $\angle QRS = 90^\circ$.
Donc $\angle PRS + \angle PRQ = 90^\circ$, d'où $x^\circ + x^\circ = 90^\circ$, ou $2x = 90$.
Donc $x = 45$.

Réponse : (B)

7. *Solution 1*
On écrit la fraction sous la forme d'un nombre fractionnaire : $\frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}$.
Puisque $\frac{3}{4}$ est plus près de 1 que de 0, alors $8\frac{3}{4}$ est plus près de 9 que de 8.
L'entier le plus près de $\frac{35}{4}$ est 9.

Solution 2
On écrit la fraction sous la forme décimale : $\frac{35}{4} = 35 \div 4 = 8{,}75$.
Puisque 0,75 est plus près de 1 que de 0, alors 8,75 est plus près de 9 que de 8.
L'entier le plus près de $\frac{35}{4}$ est 9.

Réponse : (C)

8. On évalue chaque expression lorsque $n = 101$:

$$\begin{aligned}3n &= 3 \times 101 = 303\\ n+2 &= 101 + 2 = 103\\ n-12 &= 101 - 12 = 89\\ 2n-2 &= 2 \times 101 - 2 = 202 - 2 = 200\\ 3n+2 &= 3 \times 101 + 2 = 303 + 2 = 305.\end{aligned}$$

Seule l'expression $2n - 2$ a pour valeur un nombre pair lorsque $n = 101$. (De fait, l'expression $2n - 2$ a toujours pour valeur un nombre pair, peu importe la valeur entière de n. Pourquoi ?)

Réponse : (D)

9. Puisque les trois nombres ont une somme de 153, leur moyenne est égale à $\frac{153}{3}$, ou 51.
Or, la moyenne de trois entiers consécutifs est égale au nombre du milieu.
Donc, le nombre du milieu est 51 et le plus grand des trois entiers est donc 52.
(On peut vérifier que $50 + 51 + 52 = 153$.)

Réponse : (A)

10. Chacun des 4 petits triangles est équilatéral. Leurs côtés ont donc tous la même longueur.
Puisque chacun de ces triangles a un périmètre de 9 cm, chacun a des côtés de 3 cm ($\frac{9}{3} = 3$).
Chaque côté du triangle PQR est composé de deux sections de 3 cm. Chacun a donc une longueur de 6 cm.
Le triangle PQR a donc un périmètre de 3×6 cm, ou 18 cm.

Réponse : (E)

11. Les fractions ont pour dénominateurs respectifs 7 et 63.
Puisque $7 \times 9 = 63$ et que les fractions sont égales, le numérateur de la deuxième fraction doit être égal à 3×9.
On a donc $\dfrac{3}{7} = \dfrac{3 \times 9}{7 \times 9} = \dfrac{27}{63}$.
Le nombre que l'on doit placer dans le $\square$ pour que l'égalité soit vraie est donc 27.

Réponse : (A)

12. Si on achète 6 casse-tête au cout de 10 \$ chacun, cela coute 6×10 \$, ou 60 \$.
Or, une boite de 6 casse-tête coute 50 \$. C'est donc moins cher d'acheter des casse-tête par boites de 6 que de les acheter à la pièce.
Si on achète 4 boites de 6 casse-tête, on obtient 24 casse-tête au cout de 4×50 \$, ou 200 \$.
L'achat d'un autre casse-tête de 10 \$ donne un total de 25 casse-tête au cout minimal de 210 \$.

Réponse : (A)

13. L'image d'une figure par une translation a la même orientation que la figure. Les côtés correspondants sont donc parallèles deux à deux.
Parmi les triangles donnés, seul le triangle D a la même orientation que le triangle ombré.
Donc, le triangle D peut être obtenu comme image du triangle ombré par une translation.

Réponse : (D)

14. Puisqu'il est 14 h 30 à Gander lorsqu'il est 13 h 00 à Toronto, l'heure de Gander est 1 heure et 30 minutes en avance de l'heure de Toronto.
Un vol qui part à 15 h 00 (heure de Toronto) et qui dure 2 heures et 50 minutes arrive à Gander à 17 h 50 (heure de Toronto).
Or, l'heure de Gander a une heure et 30 minutes d'avance.
L'avion arrive donc à 19 h 20 (heure de Gander).

Réponse : (A)

15. Henri était plus lent que Faiz. Il termine donc la course derrière Faiz.
Rémi était plus rapide que Henri et Faiz. Il termine donc la course devant eux.
À la fin, on a donc Rémi devant Faiz devant Henri.
Toma était plus rapide que Rémi, mais plus lent qu'Omar.
À la fin, on a donc Omar devant Toma devant Rémi devant Faiz devant Henri.
Donc, Faiz a terminé en quatrième position.

Réponse : (A)

16. Les diviseurs positifs de 20 sont 1, 2, 4, 5, 10 et 20.
Donc, 6 des 20 nombres sur le disque sont des diviseurs de 20.
Or, la flèche peut s'arrêter dans n'importe quel des 20 secteurs avec la même probabilité. Il y a donc 6 résultats favorables sur 20 résultats équiprobables possibles.
Il y a donc une probabilité de $\frac{6}{20}$ pour que la flèche s'arrête dans un secteur dont le numéro est un diviseur de 20.

Réponse : (E)

17. *Solution 1*
Puisque 78 est 2 de moins que 80 et que 82 est 2 de plus que 80, 78 et 82 ont une moyenne de 80.
Puisque les quatre entiers ont une moyenne de 80, 83 et x doivent aussi avoir une moyenne de 80.
Or, 83 est 3 de plus que 80. Donc, x doit être 3 de moins que 80.
(Donc $x = 80 - 3$, ou $x = 77$. On peut vérifier que $78, 83, 82$ et 77 ont bien une moyenne de 80.)

Solution 2
Puisque les quatre entiers ont une moyenne de 80, ils ont une somme de 4×80, ou 320.
Or 78, 83 et 82 ont une somme de 243. Donc $x = 320 - 243$, ou $x = 77$.
L'entier x est donc 3 de moins que la moyenne 80.

Réponse : (D)

18. Un escompte de 20 % sur un livre qui se vend 100 \$ correspond à 0,20 × 100 \$, ou 20 \$.
Selon l'option (A), le prix en solde est de 80 \$ (100 \$ − 20 \$ = 80 \$).

Un escompte de 10 % sur un livre qui se vend 100 \$ correspond à 0,10 × 100 \$, ou 10 \$.
Le prix en solde est de 90 \$ (100 \$ − 10 \$ = 90 \$).
Un deuxième escompte de 10 % du nouveau prix de 90 \$ correspond à 0,10 × 90 \$, ou 9 \$.
Selon l'option (B), le prix en solde est de 81 \$ (90 \$ − 9 \$ = 81 \$).

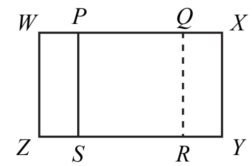
Un escompte de 15% sur un livre qui se vend 100 \$ correspond à 0,15 × 100 \$, ou 15 \$.
Le prix en solde est de 85 \$ (100 \$ − 15 \$ = 85 \$).
Un deuxième escompte de 5 % du nouveau prix de 85 \$ correspond à 0,05 × 85 \$, ou 4,25 \$.
Selon l'option (C), le prix en solde est de 80,75 \$ (85 \$ − 4,25 \$ = 80,75 \$).

Un escompte de 5% sur un livre qui se vend 100 \$ correspond à 0,05 × 100 \$, ou 5 \$.
Le prix en solde est de 95 \$ (100 \$ − 5 \$ = 95 \$).
Un deuxième escompte de 15 % du nouveau prix de 95 \$ correspond à 0,15 × 95 \$, ou 14,25 \$.
Selon l'option (D), le prix en solde est de 80,75 \$ (95 \$ − 14,25 \$ = 80,75 \$).

Les quatre options ne donnent pas toutes le même prix en solde et l'option (A) donne le meilleur prix en solde.

Réponse : (A)

19. Dans la figure ci-contre, les rectangles $WQRZ$ et $PXYS$ représentent les deux feuilles de papier 11 cm$\times$ 8 cm.
Le carré $PQRS$, qui représente la partie superposée, a des côtés de 8 cm.



Donc $WQ = ZR = PX = SY = 11$ cm et $WZ = QR = PS = XY = PQ = SR = 8$ cm.
Dans le rectangle $WQRZ$, $WQ = WP + PQ = 11$ cm.
Donc $WP = 11 - PQ$, d'où $WP = 11 - 8$, ou $WP = 3$ cm.
Dans le rectangle $WXYZ$, $WX = WP + PX$, d'où $XY = 3 + 11$, ou $XY = 14$ cm.
Puisque $WX = 14$ cm et $XY = 8$ cm, l'aire de $WXYZ$ est égale à (14×8) cm^2, ou 112 cm^2.

Réponse : (B)

20. Les points P, Q, R, S et T divisent le côté inférieur du parc en six segments de même longueur.
Chaque segment a donc une longueur de $600\,\text{m} \div 6$, ou 100 m.
Si Baya et Anne s'étaient rencontrées la première fois au point Q, alors Baya aurait parcouru une distance de $(600 + 400 + 4 \times 100)$ m, ou 1400 m, et Anne aurait parcouru une distance de $(400 + 2 \times 100)$ m, ou 600 m.
Lorsqu'elles se rencontrent, Baya et Anne ont marché pendant le même intervalle de temps.
Donc, le rapport de la vitesse de Baya à la vitesse d'Anne est égal au rapport de la distance parcourue par Baya à la distance parcourue par Anne.
Donc, si elles s'étaient rencontrées la première fois au point Q, le rapport de leurs vitesses aurait été égal à 1400 : 600, ou 14 : 6, ou 7 : 3.
De même, si elles s'étaient rencontrées la première fois au point R, Baya aurait parcouru une distance de $(600 + 400 + 3 \times 100)$ m, ou 1300 m, et Anne aurait parcouru une distance de $(400 + 3 \times 100)$ m, ou 700 m.
Dans ce cas, le rapport de leurs vitesses aurait été égal à 1300 : 700, ou 13 : 7.
Or, Baya et Anne se sont rencontrées la première fois entre Q and R.
Donc, Baya a parcouru une plus grande distance que si elles s'étaient rencontrées à Q et une plus petite distance que si elles s'étaient rencontrées à R.
Donc, le rapport de la vitesse de Baya à la vitesse d'Anne est inférieur à 7 : 3 et supérieur à 13 : 7.
On doit déterminer le choix de réponse qui est inférieur à 7 : 3 et supérieur à 13 : 7.
Pour ce faire, on peut exprimer chaque rapport sous la forme d'un nombre fractionnaire.
On a $7 : 3 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ et $13 : 7 = \frac{13}{7} = 1\frac{6}{7}$.
On convertit les choix de réponse : $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$, $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, $\frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$, $\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$ et $\frac{17}{7} = 2\frac{3}{7}$.
Le seul choix de réponse qui est inférieur à $2\frac{1}{3}$ et supérieur à $1\frac{6}{7}$ est $2\frac{1}{4}$.
Le seul rapport qui pourrait être le rapport de la vitesse de Baya à la vitesse d'Anne est 9 : 4.

Réponse : (B)

21. *Solution 1*
Le 1er et le 10e rectangle contribuent la même longueur au périmètre de la figure.
Chacun contribue les longueurs des deux côtés verticaux (deux longueurs de 2), une longueur complète d'un côté horizontal (le côté supérieur du 1er rectangle ou le côté inférieur du 10e rectangle, chacun de longueur 4), et la moitié de la longueur du côté opposé.
Le 1er et le 10e rectangle contribuent donc chacun $2 + 2 + 4 + 2$, ou 10 au périmètre de la figure.
Chacun des 8 autres rectangles contribue une même longueur au périmètre de la figure.
Chacun contribue les longueurs des deux côtés verticaux (deux longueurs de 2), la moitié de la longueur du côté supérieur (de longueur 4) et la moitié de la longueur du côté inférieur (de longueur 4). Chacun de ces rectangles contribue donc $2+2+2+2$, ou 8 au périmètre de la figure.
Le périmètre de la figure est donc égal à $(2 \times 10) + (8 \times 8)$, ou $20 + 64$, ou 84.

Solution 2
Pour déterminer le périmètre de la figure, on peut considérer la longueur des segments verticaux et celle des segments horizontaux.
Chacun des 10 rectangles a deux côtés verticaux (un à gauche et un à droite) dont les longueurs contribuent au périmètre de la figure.
Ces 20 côtés ont chacun une longueur de 2. Ces longueurs contribuent une longueur totale de 20×2, ou 40 au périmètre de la figure.
Puisque ces 20 côtés sont les seuls côtés verticaux de la figure, on peut maintenant considérer les côtés horizontaux.

Les côtés horizontaux font partie des côtés supérieurs ou des côtés inférieurs des rectangles.
Les 9 premiers rectangles contribuent chacun la moitié de la longueur d'un côté inférieur. Il contribuent donc $\frac{1}{2} \times 4 \times 9$, ou 18 au périmètre de la figure.
Le 10e rectangle contribue la longueur complète de son côté inférieur au périmètre de la figure.
De même, le 1er rectangle contribue la longueur complète de son côté supérieur, soit 4, au périmètre de la figure et les 9 rectangles suivants contribuent chacun la moitié de la longueur d'un côté. Ils contribuent donc $\frac{1}{2} \times 4 \times 9$, ou 18 au périmètre de la figure.
Les côtés contribuent une longueur totale de $18 + 4 + 4 + 18$, ou 44, au périmètre de la figure.

Puisque tous les côtés de la figure ont été pris en considération, la figure a un périmètre de $40 + 44$, ou 84.

Solution 3
Chacun des 10 rectangles a un périmètre de $2 \times (2 + 4)$, ou 12, pour un total de 10×12, ou 120.
Lorsqu'on place les rectangles pour former la figure, on doit soustraire de ce total pour obtenir le périmètre de la figure.
On doit soustraire la longueur de tous les côtés qui chevauchent.
Il y a 9 endroits où il y a chevauchement, soit entre le 1er rectangle et le 2e, entre le 2e rectangle et le 3e, et ainsi de suite.
À chaque chevauchement, on doit soustraire la moitié de la longueur de chaque côté qui chevauche.
En tout, on doit donc soustraire $9 \times (2 + 2)$, ou 36.
On doit donc soustraire 36 du total de 120. La figure a donc un périmètre de $120 - 36$, ou 84.

Réponse : (D)

22. Le chiffre des unités du produit $1ABCDE \times 3$ est un 1. Donc, le chiffre des unités du produit $3 \times E$ doit être un 1.
Donc, E doit être un 7. Il n'y a aucune autre possibilité.
On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,A\,B\,C\,D\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline A\,B\,C\,D\,7\,1 \end{array}$$

Lorsqu'on commence à effectuer cette multiplication, on obtient $3 \times 7 = 21$ et le 2 représente 2 dizaines (qui devient une retenue de 2 dans la colonne des dizaines).
Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times D + 2$ (dizaines) pour obtenir 7 (dizaines) dans la colonne des dizaines de la réponse. Si on avait fait $3 \times D$, on aurait obtenu 5 (dizaines).
Donc, D doit être un 5. Il n'y a aucune autre possibilité. On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,A\,B\,C\,5\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline A\,B\,C\,5\,7\,1 \end{array}$$

Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times C + 1$ (dizaines) pour obtenir un 5 dans la colonne des centaines de la réponse.
Si on avait fait $3 \times C$, on aurait obtenu 4 (centaines).
Donc, C doit être un 8. Il n'y a aucune autre possibilité. On sait que $3 \times 8 + 1 = 25$ (centaines), ce qui représente 5 centaines et une retenue de 2 dans la colonne des milliers. On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,A\,B\,8\,5\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline A\,B\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times B + 2$ (milliers) pour obtenir un 8 dans la colonne des milliers de la réponse. Si on avait fait $3 \times B$, on aurait obtenu 6 (milliers). Donc, B doit être un 2. Il n'y a aucune autre possibilité. On sait que $3 \times 2 + 2 = 8$ (milliers). On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,A\,2\,8\,5\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline A\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times A$ (dix milliers) pour obtenir un 2 dans la colonne des dix milliers de la réponse.
Donc, A doit être un 4. Il n'y a aucune autre possibilité. On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,4\,2\,8\,5\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline 4\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

On peut vérifier cette multiplication pour s'assurer qu'elle est bonne.
Donc $A + B + C + D + E = 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 26$.

Réponse : (B)

23. On a 8 pièces de 10 ¢ et 3 pièces de 25 ¢. On remplit le tableau ci-dessous qui indique les sommes différentes d'argent (en cents) que l'on peut former en employant diverses combinaisons de pièces. On raie les sommes qui ont déjà paru dans les rangées précédentes.

N^bre de pièces de 10 ¢

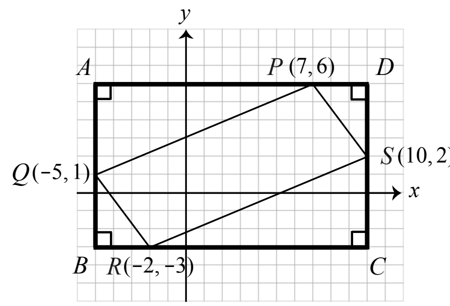
Nbre de pièces de 25 ¢

25 ¢ \ 10 ¢	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	10	20	30	40	50	60	70	80
1	25	35	45	55	65	75	85	95	105
2	~~50~~	~~60~~	~~70~~	~~80~~	90	100	110	120	130
3	~~75~~	~~85~~	~~95~~	~~105~~	115	125	135	145	155

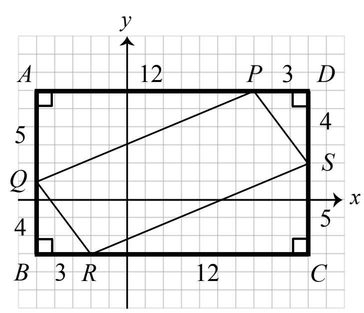
On omet le résultat 0 du tableau, puisqu'on devait utiliser au moins une des 11 pièces de monnaie. Il est donc possible de former 27 sommes différentes en employant une pièce ou plus des 11 pièces de monnaie.

Réponse : (A)

24. On construit d'abord un rectangle $ABCD$ autour du quadrilatère $PQRS$, comme dans la figure ci-contre.
Les côtés verticaux AB et DC passent aux points respectifs Q et S.
Les côtés horizontaux AD et BC passent aux points respectifs P et R.
On déterminera l'aire de $PQRS$ en soustrayant l'aire des triangles rectangles AQP, QBR, CSR et SDP de l'aire de $ABCD$.



Pour déterminer les longueurs des cathètes des triangles rectangles, on compte les nombres d'unités de longueur à l'horizontale ou à la verticale ou on soustrait les abscisses ou les ordonnées des extrémités.
Par exemple, puisque AB est vertical et qu'il passe en $Q(-5,1)$, A et B ont la même abscisse que Q, soit -5.
La longueur de AP est ainsi égale à l'abscisse de P moins celle de A, soit $7-(-5)$, ou 12.
De même, la longueur de BR est égale à $-2-(-5)$, ou 3.
Puisque DC est vertical et qu'il passe en $S(10,2)$, D et C ont la même abscisse que S, soit 10.
Donc, la longueur de PD est égale à $10-7$, ou 3, et la longueur de RC est égale à $10-(-2)$, ou 12.
De plus, puisque AD est horizontal et qu'il passe en $P(7,6)$, A et D ont la même ordonnée que P, soit 6.
La longueur de AQ est donc égale à l'ordonnée de A moins celle de Q.
Elle est donc égale à $6-1$, ou 5.
De même, la longueur de DS est égale à $6-2$, ou 4.
Puisque BC est horizontal et qu'il passe en $R(-2,-3)$, B et C ont la même ordonnée que R, soit -3.
La longueur de QB est donc égale à $1-(-3)$, ou 4, et celle de SC est égale à $2-(-3)$, ou 5.



L'aire du triangle AQP est égale à $\frac{1}{2}\times AQ\times AP$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}\times 5\times 12$, ou 30.
L'aire du triangle CSR est aussi égale à 30.
L'aire du triangle QBR est égale à $\frac{1}{2}\times QB\times BR$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}\times 4\times 3$, ou 6.
L'aire du triangle SDP est aussi égale à 6.
Puisque $AB=AQ+QB=5+4=9$ et $BC=BR+RC=3+12=15$, l'aire de $ABCD$ est égale à 9×15, ou 135.
L'aire de $PQRS$ est donc égale à $135-30\times 2-6\times 2$, ou $135-60-12$, ou 63.

Réponse : (B)

25. *Solution 1*
Ashley a écrit les entiers de 1 à 2017. Elle doit ensuite additionner ces entiers, moins ceux qu'elle a soulignés, soit les multiples de 2, les multiples de 3 et les multiples de 5. Lors des soustractions, il faut s'assurer qu'elle ne soustrait pas un même nombre plus d'une fois, comme 30 qui est un multiple de 2, de 3 et de 5, mais qui ne parait qu'une fois dans la liste.
On peut calculer la somme des entiers de 1 à n à l'aide de l'expression $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Par exemple, pour $n=6$, on peut calculer $1+2+3+4+5+6$ en additionnant les termes pour obtenir 21 ou en utilisant l'expression $\dfrac{6(6+1)}{2}$ pour obtenir $\dfrac{42}{2}$, ou 21.

On utilise l'expression pour obtenir la somme des entiers de 1 à 2017 :
$1+2+3+4+\cdots+2016+2017$ est égal à $\dfrac{2017(2018)}{2}$, ou $\dfrac{4\,070\,306}{2}$, ou $2\,035\,153$.

Pour obtenir la somme des nombres qui n'ont pas été soulignés, on doit soustraire de $2\,035\,153$ tous les entiers de 1 à 2017 qui sont multiples de 2, multiples de 3 ou multiples de 5, tout en s'assurant qu'on ne soustrait pas un même nombre plus d'une fois.

On détermine d'abord la somme les entiers de 1 à 2017 qui sont des multiples de 2.
Il s'agit de la somme de $2+4+6+8+\cdots+2014+2016$, ou $2(1+2+3+4+\cdots+1007+1008)$.
D'après la formule, $1+2+3+4+\cdots+1007+1008$ est égal à $\dfrac{1008(1009)}{2}$, ou $\dfrac{1\,017\,072}{2}$, ou $508\,536$. Donc $2+4+6+8+\cdots+2014+2016 = 2\times 508\,536 = 1\,017\,072$.

De même, on détermine la somme des entiers de 1 à 2017 qui sont des multiples de 3.
Il s'agit de la somme de $3+6+9+12+\cdots+2013+2016$, ou $3(1+2+3+4+\cdots+671+672)$.
D'après la formule, $1+2+3+4+\cdots+671+672$ est égal à $\dfrac{(672)(673)}{2}$, ou $\dfrac{452\,256}{2}$, ou $226\,128$.
Donc $3+6+9+12+\cdots+2013+2016 = 3\times 226\,128 = 678\,384$.

On détermine aussi la somme les entiers de 1 à 2017 qui sont des multiples de 5
Il s'agit de la somme de $5+10+15+20+\cdots+2010+2015$, ou $5(1+2+3+4+\cdots+402+403)$.
D'après la formule, $1+2+3+4+\cdots+402+403$ est égal à $\dfrac{403(404)}{2}$, ou $\dfrac{162\,812}{2}$, ou $81\,406$.
Donc $5+10+15+20+\cdots+2010+2015 = 5\times 81\,406 = 407\,030$.
Le tableau suivant résume nos calculs à date.

Description	Nombres additionnés	Somme
Entiers de 1 à 2017	$1+2+3+4+\cdots+2016+2017$	2 035 153
Entiers qui sont des multiples de 2	$2+4+6+8+\cdots+2014+2016$	1 017 072
Entiers qui sont des multiples de 3	$3+6+9+12+\cdots+2013+2016$	678 384
Entiers qui sont des multiples de 5	$5+10+15+20+\cdots+2010+2015$	407 030

Si on soustrait de $2\,035\,153$ les trois sommes suivantes dans le tableau, c'est-à-dire la somme des multiples de 2, des multiples de 3 et des multiples de 5, est-ce qu'on obtient la somme demandée ?
La réponse est non. Pourquoi ?
Il y a des nombres qui paraissent dans plus d'une liste et qui ont été soustraits plus d'une fois.
Par exemple, tous les entiers qui sont multiples de 2 et de 3 (et donc multiples de 6) paraissaient dans deux listes et ils ont été soustraits deux fois.
Il en est de même pour les entiers qui sont multiples de 2 et de 5 (et donc multiples de 10) et des nombres qui sont multiples de 3 et de 5 (et donc multiples de 15).
On devra donc rajouter la somme de tous les multiples de 6, de tous les multiples de 10 et de tous les multiples de 15.

Somme des multiples de 6 : $6+12+18+24+\cdots+2010+2016 = 6(1+2+3+4+\cdots+335+336)$
On sait que $1+2+3+4+\cdots+335+336$ est égal à $\dfrac{336(337)}{2}$, ou $\dfrac{(336)(337)}{2}$, ou $\dfrac{113\,232}{2}$, ou $56\,616$. La somme des multiples de 6 est donc égale à $6\times 56\,616$, ou $339\,696$.

Somme des multiples de 10 : $10+20+30+40+\cdots+2000+2010 = 10(1+2+3+4+\cdots+200+201)$
On sait que $1+2+3+4+\cdots+200+201$ est égal à $\dfrac{(201)(202)}{2}$, ou $\dfrac{40\,602}{2}$, ou $20\,301$.
La somme des multiples de 10 est donc égale à $10\times 20\,301$, ou $203\,010$.

Somme des multiples de 15 : $15+30+45+60+\cdots+1995+2010 = 15(1+2+3+4+\cdots+133+134)$

On sait que $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 133 + 134$ est égal à $\dfrac{(134)(135)}{2}$, ou $\dfrac{18\,090}{2}$, ou 9045.

La somme des multiples de 15 est donc égale à 15×9045, ou 135 675.

Le tableau suivant résume nos calculs à date.

Description	Nombres additionnés	Somme
Entiers de 1 à 2017	$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2016 + 2017$	2 035 153
Entiers qui sont des multiples de 2	$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2014 + 2016$	1 017 072
Entiers qui sont des multiples de 3	$3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 2013 + 2016$	678 384
Entiers qui sont des multiples de 5	$5 + 10 + 15 + 20 + \cdots + 2010 + 2015$	407 030
Entiers qui sont des multiples de 6	$6 + 12 + 18 + 24 + \cdots + 2010 + 2016$	339 696
Entiers qui sont des multiples de 10	$10 + 20 + 30 + 40 + \cdots + 2000 + 2010$	203 010
Entiers qui sont des multiples de 15	$15 + 30 + 45 + 60 + \cdots + 1995 + 2010$	135 675

On considère donc la somme des entiers de 1 à 2017, on soustrait la somme des multiples de 2, des multiples de 3 et des multiples de 5, puis on rajoute la somme des multiples de 6, des multiples de 10 et des multiples de 15. On obtient :

$$2\,035\,153 - 1\,017\,072 - 678\,384 - 407\,030 + 339\,696 + 203\,010 + 135\,675 = 611\,048$$

Est-ce la somme que l'on demande ?
La réponse est encore non, mais on n'est pas loin !

On considère les entiers de 1 à 2017 qui sont des multiples de 2, de 3 et de 5 (et donc des multiples de 30, car $2 \times 3 \times 5 = 30$).
Ashley a souligné chacun de ces entiers.
Or, chaque multiple de 30 a été soustrait trois fois de la somme 2 035 153 (une fois comme multiple de 2, une fois comme multiple de 3 et une fois comme multiple de 5), puis a été rajouté trois fois (une fois comme multiple de 6, une fois comme multiple de 10 et une fois comme multiple de 15).
Donc, chaque multiple of 30 doit être soustrait de 611 048 pour obtenir la somme demandée.
Somme des multiples de 30 : $30+60+90+120+\cdots+1980+2010 = 30(1+2+3+4+\cdots+66+67)$
On sait que $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 66 + 67$ est égal à $\dfrac{(67)(68)}{2}$, ou $\dfrac{4556}{2}$, ou 2278.
La somme des multiples de 30 est donc égale à 30×2278, ou 68 340.
La somme des entiers qui n'ont pas été soulignés est égale à $611\,048 - 68\,340$, ou 542 708.

Solution 2
On considère d'abord les entiers de 1 à 60.
Lorsqu'Ashley souligne les entiers divisibles par 2 ou par 5, cela élimine les entiers qui se terminent par 0, 2, 4, 5, 6 ou 8.
Il reste alors les entiers 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39, 41, 43, 47, 49, 51, 53, 57 et 59. Parmi ceux-ci, 3, 9, 21, 27, 33, 39, 51 et 57 sont divisibles par 3.
Parmi les entiers de 1 à 60, seuls les entiers suivants ne seront pas soulignés :

$$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59$$

On remarque que les huit derniers entiers sont tous 30 de plus que les huit premiers entiers, dans l'ordre.
Cette régularité se poursuit de manière que dans chaque bloc de 30 entiers, huit entiers correspondants ne seront pas soulignés.

Puisque 2010 est le plus grand multiple de 30 inférieur à 2017, Ashley doit additionner les entiers suivants :

1	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	49	53	59
61	67	71	73	77	79	83	89
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1981	1987	1991	1993	1997	1999	2003	2009
2011	2017						

Soit S la somme de ces entiers.
Avant de continuer, on justifie pourquoi la régularité se poursuit :

Chaque entier strictement positif est un multiple de 30, ou 1 de plus qu'un multiple de 30, ou 2 de plus qu'un multiple de 30, ainsi de suite, ou 29 de plus qu'un multiple de 30. De façon algébrique, on dit que chaque entier strictement positif peut être écrit selon une des expressions suivantes,

$$30k, 30k + 1, 30k + 2, 30k + 3, \ldots, 30k + 27, 30k + 28, 30k + 29$$

selon le reste lorsqu'on l'a divisé par 30.
Tout entier avec un reste pair, lorsqu'on l'a divisé par 30, est pair puisque 30 est pair.
De même, tout entier dont le reste est divisible par 3 ou par 5 lorsqu'on l'a divisé par 30 est lui-même divisible par 3 ou par 5, respectivement.
Il reste donc les formes suivantes :

$$30k + 1, 30k + 7, 30k + 11, 30k + 13, 30k + 17, 30k + 19, 30k + 23, 30k + 29$$

Aucun entier représenté par une de ces expression n'est souligné, puisque par exemple, $30k + 11$ est 1 de plus qu'un multiple de 2 ou de 5 (c'est-à-dire de $30k + 10$) et 2 de plus qu'un multiple de 3 (c'est-à-dire de $30k + 9$) et il n'est donc pas divisible par 2, par 3 ou par 5.

Les 8 entiers de la première rangée du tableau ci-dessus ont une somme de 120.
Or, chaque nombre de la 2e rangée du tableau est 30 de plus que le nombre correspondant de la 1re rangée. Les nombres de la 2e rangée ont donc une somme égale à $120 + 8 \times 30$.
De même, les nombres de la 3e rangée ont une somme égale à $120 + 8 \times 60$, et ainsi de suite.
On sait que $2010 = 67 \times 30$ et que $1980 = 66 \times 30$. Il y a donc 67 rangées complètes dans le tableau. Donc :

$$\begin{aligned}
S &= 120 + (120 + 8 \times 30) + (120 + 8 \times 60) + \cdots + (120 + 8 \times 1980) + (2011 + 2017) \\
&= 120 \times 67 + 8 \times (30 + 60 + \cdots + 1980) + 4028 \\
&= 8040 + 8 \times 30 \times (1 + 2 + \cdots + 65 + 66) + 4028 \\
&= 12\,068 + 240 \times (33 \times 67) \\
&= 12\,068 + 530\,640 \\
&= 542\,708
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que les entiers de 1 à 66 peuvent être regroupés en paires de nombres ayant une somme de 67 :

$$1 + 2 + \cdots + 65 + 66 = (1 + 66) + (2 + 65) + \cdots + (33 + 34) = 67 + 67 + \cdots + 67 = 33 \times 67$$

Réponse : (A)

8e année

1. Michel a 280 \$ en billets de 20 \$. Le nombre de billets de 20 \$ est donc égal à $280 \div 20$, ou 14.
Réponse : (C)

2. On a : $4^2 - 2^3 = 16 - 8 = 8$.
Réponse : (A)

3. Il y a 5 résultats équiprobables possibles et 1 résultat favorable.
Donc, la probabilité pour que la flèche s'arrête dans la section 4 est égale à $\frac{1}{5}$.
Réponse : (E)

4. Le nombre d'élèves de 8e année qui font partie de l'équipe d'échecs est égal à 10 % de 160, ou $\frac{10}{100}$ de 160, ou $\frac{1}{10}$ de 160, ou 16.
Réponse : (B)

5. Puisque $44 = 2 \times 11$ et que $22 = 2 \times 11$, alors :
$44 \times 22 = 4 \times 11 \times 2 \times 11 = (4 \times 11 \times 2) \times 11 = 88 \times 11$
Réponse : (B)

6. En fonction de x, les longueurs des côtés du triangle ont une somme de $x + x + 1 + x - 1$, ou $3x$.
Puisque le triangle a un périmètre de 21, alors $3x = 21$. Donc $x = 7$.
Réponse : (B)

7. D'après le diagramme, 20 élèves ont choisi rose et 25 élèves ont choisi bleu.
Le rapport du nombre d'élèves qui ont choisi rose au nombre d'élèves qui ont choisi bleu est de 20 : 25.
On simplifie ce rapport (on divise chaque nombre par 5), pour obtenir le rapport équivalent 4 : 5.
Réponse : (A)

8. *Solution 1*
Pour obtenir le nombre, on procède à rebours.
Puisqu'on a diminué le nombre intermédiaire de 6 pour obtenir 15, le nombre intermédiaire est 21 $(21 - 6 = 15)$.
Puisqu'on a triplé le nombre initial pour obtenir 21, le nombre initial est 7 $(3 \times 7 = 21)$.

Solution 2
Le nombre initial est x. Lorsqu'on le triple, on obtient $3x$.
Lorsqu'on diminue ce résultat de 6, on obtient $3x - 6$ qui est égal à 15.
On résout l'équation $3x - 6 = 15$: puisqu'on sait que $21 - 6 = 15$, alors $3x = 21$; puisqu'on sait que $3 \times 7 = 21$, alors $x = 7$.
Réponse : (D)

9. Tian parcourt 500 m en faisant 625 pas. Puisque $500 \div 625 = 0{,}8$, elle parcourt 0,8 m par pas.
En faisant 10 000 pas à ce même taux, elle parcourra $0{,}8 \times 10\,000$ m, ou 8000 m.
Puisqu'il y a 1000 m dans un kilomètre et que $8000 = 8 \times 1000$, Tian parcourra 8 km.
Réponse : (D)

10. Puisque les segments PQ et RS se coupent en T, les angles PTR et STQ sont opposés par le sommet. Donc $\angle STQ = \angle PTR = 88°$.
Puisque $TS = TQ$, le triangle STQ est isocèle. Donc $\angle TSQ = \angle TQS = x°$.
Les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°.
Donc $88° + x° + x° = 180°$, d'où $2x = 180 - 88$, ou $2x = 92$, ou $x = 46$.
Réponse : (B)

11. Le volume d'un prisme est égal au produit de l'aire de sa base par sa hauteur.
Or, l'aire de la base est égale à 4×5 cm^2, ou 20 cm^2, et le prisme a une hauteur de x cm.
Puisque le prisme a un volume de 60 cm^3, alors $20x = 60$, d'où $x = 3$.

Réponse : (D)

12. Puisque $\angle ACB = 90^\circ$, le triangle ACB est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Si la longueur de AB est égale à x m, alors $x^2 = 8^2 + 15^2$, ou $x^2 = 64 + 225$, ou $x^2 = 289$.
Puisque $x > 0$, alors $x = \sqrt{289}$, ou $x = 17$. Donc, Carla marche une distance de 17 m.
En marchant de A à C à B, David marche une distance de 8 m + 15 m, ou 23 m.
Donc, David marche 6 m de plus que Carla ($23 - 17 = 6$).

Réponse : (D)

13. Chaque terme de l'expression $10 + 20 + 30 + \cdots + 990 + 1000$ est 10 fois plus grand que le terme correspondant de l'expression $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$. Donc, la somme que l'on cherche est 10 fois plus grande que la somme donnée.
Puisque $1+2+3+\cdots+99+100 = 5050$, alors $10+20+30+\cdots+990+1000$ est égal à 5050×10, ou 50 500.

Réponse : (C)

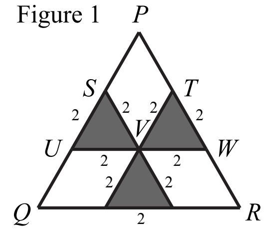
14. Si trois des élèves reçoivent chacun le plus petit nombre possible de stylos, alors le quatrième élève recevra le plus grand nombre possible de stylos.
Puisque chaque élève reçoit au moins un stylo, le plus petit nombre de stylos que l'élève A peut recevoir est 1.
Or, les élèves reçoivent tous un nombre différent de stylos. Le plus petit nombre de stylos que l'élève B peut recevoir est donc 2 et le plus petit nombre de stylos que l'élève C peut recevoir est 3.
Ces élèves reçoivent un total de 6 stylos et il en reste donc 14 pour l'élève D ($20 - 6 = 14$).
Le plus grand nombre de stylos qu'un élève peut recevoir est 14.

Réponse : (C)

15. Les entiers pairs entre 1 et 103 sont $2 = 2 \times 1, 4 = 2 \times 2, 6 = 2 \times 3, 8 = 2 \times 4$, jusqu'à $102 = 2 \times 51$ inclusivement.
Puisqu'il y a 51 entiers pairs dans la liste $2, 4, 6, \ldots, 100, 102$, il y a 51 entiers pairs entre 1 et 103.
On cherche ensuite un entier N de manière qu'il y ait 51 entiers impairs entre 4 et N.
On remarque que cette borne inférieure, 4, est 3 de plus que la borne inférieure précédente, 1.
Si on augmente chacun des 51 entiers pairs de la liste précédente de 3, on obtiendra 51 entiers impairs supérieurs à 4.
Ces entiers impairs sont $2 \times 1 + 3 = 5, 2 \times 2 + 3 = 7, 2 \times 3 + 3 = 9, 2 \times 4 + 3 = 11$ et ainsi de suite jusqu'à $2 \times 51 + 3 = 105$ inclusivement.
Puisqu'il y a 51 entiers impairs dans la liste $5, 7, 9, \ldots, 103, 105$, il y a 51 entiers impairs entre 4 et 106.
Donc le nombre d'entiers pairs entre 1 et 103 est le même que le nombre d'entiers impairs entre 4 et 106.

Réponse : (E)

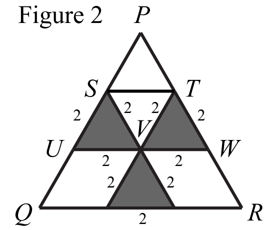
16. On nomme les points S, T, U, V et W, comme dans la figure 1.



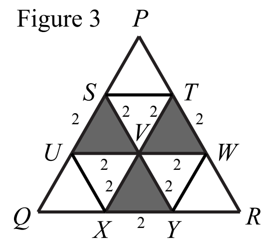
Les triangles ombrés sont équilatéraux, de même que le triangle PQR. Leurs angles mesurent donc 60°.
Les angles PSV et PTV mesurent donc 120°, puisque chacun est un angle supplémentaire d'un angle de 60°.
Dans le quadrilatère $PSVT$,

$$\angle SVT = 360^\circ - \angle PSV - \angle SPT - \angle PTV$$

d'où $\angle SVT = 360^\circ - 120^\circ - 60^\circ - 120^\circ$, ou $\angle SVT = 60^\circ$.
$PSVT$ est un parallélogramme, puisque ses angles opposés sont isométriques deux à deux.
Puisque $SV = TV = 2$, alors $PS = PT = 2$ (les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques).
On joint S et T, comme dans la figure 2.



Puisque le triangle STV est isocèle ($SV = TV$) et que $\angle SVT = 60^\circ$, le triangle est équilatéral avec des côtés de longueur 2. Il est donc isométrique aux triangles ombrés.
On joint U à X et W à Y, comme dans la figure 3. De la même manière, les triangles UQX, UXV, WRY et WYV sont isométriques aux triangles ombrés.



Ainsi le triangle PQR peut être divisé en 9 triangles isométriques.
Puisque 3 des 9 triangles sont ombrés, $\frac{3}{9}$ de la surface du triangle PQR est ombrée, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$ de la surface.

Réponse : (B)

17. L'étendue des tailles des joueuses est la différence entre la taille de la plus grande et celle de la plus petite. Or, la plus grande joueuse, Mahé, a une taille de 188 cm et les tailles des joueuses ont une étendue de 33 cm. Donc Aglaé, la plus petite, a une taille de $(188 - 33)$ cm, ou 155 cm. Donc, l'énoncé (D) permet de déterminer la taille d'Aglaé et il est donc le seul des cinq énoncés qui le permet.
(Pourquoi chacun des quatre autres énoncés ne donne-t-il pas suffisamment d'information pour déterminer la taille d'Aglaé ?)

Réponse : (D)

18. Lorsque Blaise et René conduisent leur voiture l'une vers l'autre à des vitesses contantes respectives de 50 km/h et de 40 km/h, la distance entre elles diminue à une vitesse de $(50 + 40)$ km/h, ou 90 km/h.
Puisqu'il y a une distance de 120 km entre les voitures au départ et que la distance diminue à une vitesse de 90 km/h, elles vont se rencontrer après $\dfrac{120}{90}$ h, ou $\dfrac{4}{3}$ h, ou $1\frac{1}{3}$ h.
(Ou : Après une heure, les voitures se seront rapprochées de 90 km et il restera 30 km à faire. À une vitesse de 90 km/h, cela prendra $\frac{1}{3}$ h, ou 20 minutes, soit 1 h 20 minutes en tout.)
Puisque $\frac{1}{3}$ d'une heure correspond à 20 minutes, les voitures vont se rencontrer après 1 h 20 minutes.

Réponse : (E)

19. Trois des amis ont une moyenne d'âge de 12 ans et 3 mois, ou 147 mois ($12 \times 12 + 3 = 144 + 3 = 147$).
Puisque la moyenne d'âge est égale à la somme des âges divisée par 3, la somme des âges de ces 3 amis est égale à 3×147 mois, ou 441 mois.
Les quatre autres amis ont une moyenne d'âge de 13 ans et 5 mois, ou 161 mois ($12 \times 13 + 5 = 156 + 5 = 161$).
La somme des âges de ces 4 amis est donc égale à 4×161 mois, ou 644 mois.
La somme des âges des 7 amis est de $(441 + 644)$ mois, ou 1085 mois. La moyenne d'âge des 7 amis est de 155 mois ($1085 \div 7 = 155$).

Réponse : (E)

20. Le chiffre des unités du produit $1ABCDE \times 3$ est un 1. Donc, le chiffre des unités du produit $3 \times E$ doit être un 1.
Donc, E doit être un 7. Il n'y a aucune autre possibilité.
On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,A\,B\,C\,D\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline A\,B\,C\,D\,7\,1 \end{array}$$

Lorsqu'on commence à effectuer cette multiplication, on obtient $3 \times 7 = 21$ et le 2 représente 2 dizaines (qui devient une retenue de 2 dans la colonne des dizaines).
Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times D + 2$ (dizaines) pour obtenir 7 (dizaines) dans la colonne des dizaines de la réponse. Si on avait fait $3 \times D$, on aurait obtenu 5 (dizaines).
Donc, D doit être un 5. Il n'y a aucune autre possibilité. On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,A\,B\,C\,5\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline A\,B\,C\,5\,7\,1 \end{array}$$

Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times C + 1$ (dizaines) pour obtenir un 5 dans la colonne des centaines de la réponse.
Si on avait fait $3 \times C$, on aurait obtenu 4 (centaines).
Donc, C doit être un 8. Il n'y a aucune autre possibilité. On sait que $3 \times 8 + 1 = 25$ (centaines), ce qui représente 5 centaines et une retenue de 2 dans la colonne des milliers. On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,A\,B\,8\,5\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline A\,B\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times B + 2$ (milliers) pour obtenir un 8 dans la colonne des milliers de la réponse. Si on avait fait $3 \times B$, on aurait obtenu 6 (milliers). Donc, B doit être un 2. Il n'y a aucune autre possibilité. On sait que $3 \times 2 + 2 = 8$ (milliers). On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,A\,2\,8\,5\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline A\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times A$ (dix milliers) pour obtenir un 2 dans la colonne des dix milliers de la réponse.
Donc, A doit être un 4. Il n'y a aucune autre possibilité. On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,4\,2\,8\,5\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline 4\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

On peut vérifier cette multiplication pour s'assurer qu'elle est bonne.
Donc $A + B + C + D + E = 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 26$.

Réponse : (B)

21. Sur le premier dé à partir du bas, on voit une face qui a 2 points et une face qui a 4 points.
Puisque les nombres de points sur deux faces opposées ont toujours une somme de 7, la face opposée à la face de 2 points a 5 points et la face opposée à la face de 4 points a 3 points.
Donc la face supérieure de ce dé (celle qui est cachée entre deux dés) a donc 1 point ou 6 points.

Sur le deuxième dé à partir du bas, il y a un total de 7 points sur ses faces supérieure et inférieure. (Il n'est pas nécessaire de savoir le nombre de points sur chacune de ces faces, mais on peut tout de même déterminer qu'il s'agit de 1 point et de 6 points.)

De même, sur le troisième dé à partir du bas, il y a un total de 7 points sur ses faces supérieure et inférieure.

Il y a 3 points sur la face supérieure du quatrième dé à partir du bas. Il y a donc 4 points sur sa face inférieure (celle qui est cachée entre deux dés).

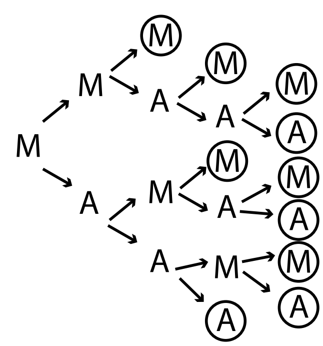
La somme des points cachés sur les faces entre les dés est donc égale à 19 $(1 + 7 + 7 + 4 = 19)$ ou à 24 $(6 + 7 + 7 + 4 = 24)$.
Seule la réponse 24 parait dans les choix de réponse.

Réponse : (C)

22. Pour que l'expression $Y^X - W^V$ ait la plus grande valeur possible, on attribue à Y^X la plus grande valeur possible, tout en attribuant à W^V la plus petite valeur possible.
Pour que Y^X ait la plus grande valeur possible, on choisit les plus grandes valeurs possibles pour Y et X. On attribuera aussi à W et à V les deux plus petites valeurs possibles.
Donc Y et X auront pour valeurs respectives 4 et 5 dans un ordre quelconque.
Puisque $4^5 = 1024$ et $5^4 = 625$, on choisit $Y = 4$ et $X = 5$ pour que la valeur de Y^X soit aussi grande que possible.
De même, W et V auront pour valeurs respectives 2 et 3 dans un ordre quelconque.
Puisque $2^3 = 8$ et $3^2 = 9$, on choisit $W = 2$ et $V = 3$ pour que la valeur de W^V soit aussi petite que possible.
La plus grande valeur possible de l'expression $Y^X - W^V$ est égale à $4^5 - 2^3$, ou $1024 - 8$, ou 1016.
Ainsi $X + V = 5 + 3$, ou $X + V = 8$.

Réponse : (D)

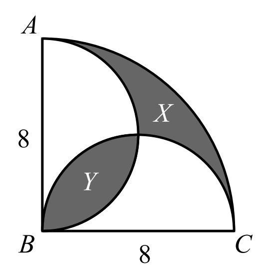
23. On utilisera la lettre M pour représenter une partie que Marc a gagnée et la lettre A pour représenter une partie qu'Alain a gagnée.
On utilise un diagramme en arbre pour représenter tous les résultats possibles.
La lettre M à l'extrême gauche indique la première partie gagnée par Marc.
La colonne immédiatement à la droite de ce M indique les deux résultats possibles de la deuxième partie : Marc peut gagner (M) ou Alain peut gagner (A).
Les troisième, quatrième et cinquième colonnes représentent les résultats possibles respectifs des 3e, 4e et 5e parties.



Chaque branche de l'arbre est composée de flèches qui relient les résultats des parties successives jusqu'à ce qu'un champion soit déclaré.
Une fois que Marc a gagné trois parties ou qu'Alain a gagné trois parties, la branche est terminée

et la lettre représentant le champion est encerclée.
Puisque le premier joueur qui gagne trois parties est déclaré champion, Marc pourrait devenir champion en gagnant les deuxième et troisième parties, puisqu'il a déjà gagné la première.
Cette façon de devenir champion est représentée par la première branche de l'arbre ou le M final est encerclé pour indiquer que Marc est champion
On peut aussi la représenter en écrivant MMM.
Puisqu'on nous demande de déterminer la probabilité pour que Marc devienne champion, on identifie les branches qui contiennent trois M (celles qui se terminent par un M encerclé).
Il y a 6 telles branches : MMM, MMAM, MMAAM, MAMM, MAMAM et MAAMM.
Toutes les autres branches se terminent par un A encerclé, ce qui indique que dans ces cas, Alain a gagné trois parties et est déclaré champion.
Puisque chacun a les mêmes chances de gagner une partie, Marc peut gagner une partie avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et Alain peut gagner une partie avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.
Parmi les six façons pour Marc de devenir champion (voir la liste ci-haut), une seule se termine après trois parties (MMM).
La probabilité pour que Marc devienne champion après 3 parties est égale à la probabilité pour qu'il gagne la 2$^{\text{e}}$ partie, soit $\frac{1}{2}$, multipliée par la probabilité pour qu'il gagne la troisième partie, soit $\frac{1}{2}$.
La probabilité pour que Marc devienne champion après 3 parties est donc égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{4}$.
Parmi les six façons pour Marc de devenir champion, deux se terminent après quatre parties (MMAM, MAMM).
La probabilité pour que Marc gagne les 2$^{\text{e}}$ et 4$^{\text{e}}$ parties et qu'Alain gagne la 3$^{\text{e}}$ partie (MMAM) est égale à la probabilité pour qu'il gagne la 2$^{\text{e}}$ partie, soit $\frac{1}{2}$, multipliée par la probabilité pour qu'Alain gagne la 3$^{\text{e}}$ partie, soit $\frac{1}{2}$, multipliée par la probabilité pour que Marc gagne la 4$^{\text{e}}$ partie, soit $\frac{1}{2}$.
Dans ce cas, la probabilité pour que Marc devienne champion est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{8}$.
De même, la probabilité pour que Marc devienne champion en gagnant les 3$^{\text{e}}$ et 4$^{\text{e}}$ parties et en perdant la 2$^{\text{e}}$ partie est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{8}$.
Enfin, Marc peut gagner après exactement cinq parties (il y a 3 possibilités : MMAAM, MAMAM ou MAAMM).
Chacune de ces possibilités a une probabilité égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{16}$.
Si Marc a gagné la première partie, la probabilité pour qu'il devienne champion est égale à $\frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{16}$, ou $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16}$, ou $\frac{4+4+3}{16}$, ou $\frac{11}{16}$.

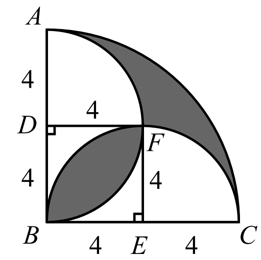
Réponse : (C)



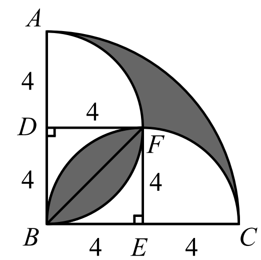
24. X représentera l'aire de la région ombrée à l'extérieur des deux demi-cercles.
Y représentera l'aire de la région ombrée à l'intérieur des deux demi-cercles.
Lorsqu'on additionne l'aire des deux demi-cercles, on compte deux fois l'aire Y (puisque Y est l'aire de la partie où les deux demi-cercles chevauchent).
Donc si on additionne l'aire des deux demi-cercles, qu'on soustrait Y et qu'on ajoute X, on obtient l'aire du quart de disque ABC.
L'aire du quart de disque ABC est donc égale à
(l'aire du demi-cercle de diamètre AB)+(l'aire du demi-cercle de diamètre BC)$-Y+X$.
Or, l'aire du quart de disque ABC est égale à $\frac{1}{4}\pi(8)^2$, ou 16π.
L'aire du demi-cercle de diamètre AB est égale à $\frac{1}{2}\pi(4)^2$, ou 8π.
L'aire du demi-cercle de diamètre BC est aussi égale à 8π.

Donc $16\pi = 8\pi + 8\pi - Y + X$, ou $16\pi = 16\pi - Y + X$, d'où $Y = X$.

Soit D le milieu de AB et E le milieu de BC. Donc $BD = 4$ et $BE = 4$.
On construit un carré $DBEF$. On montrera que F est situé sur chaque demi-cercle.
Puisque ABC est un quart de disque, $\angle ABC = 90^\circ$.
Puisque D est le milieu du diamètre AB, que $BDFE$ est un carré et que $AB = 8$, alors $BD = DF = 4$ et DF est donc un rayon du demi-cercle de diamètre AB. Donc F est situé sur ce demi-cercle.



De même, puisque E est le milieu du diamètre BC, que $BDFE$ est un carré et que $BC = 8$, alors $BE = EF = 4$ et EF est donc un rayon du demi-cercle de diamètre BC et F est situé sur ce demi-cercle.
On détermine maintenant la valeur de Y.
On trace la diagonale BF du carré $DBEF$.
Par symétrie, BF divise la région ombrée d'aire Y en deux régions de même aire.
L'aire de chacune de ces régions, $\dfrac{Y}{2}$, est égale à l'aire du quart de cercle BEF moins l'aire du triangle BEF.
Donc $\dfrac{Y}{2} = \frac{1}{4}\pi(4)^2 - \frac{1}{2}(4)(4)$, d'où $\dfrac{Y}{2} = 4\pi - 8$, ou $Y = 8\pi - 16$.



L'aire totale des deux régions ombrées est égale à $X + Y$, ou $2Y$, ou $16\pi - 32$.
Parmi les choix de réponse, $16\pi - 32$ est plus près de 18,3.

Réponse : (D)

25. *Solution 1*
Soit n, d et r les nombres respectifs de bols noirs, dorés et rouges (n, d et r sont des entiers non négatifs).
Puisque Boris empile 600 bols, alors $n + d + r = 600$. De plus, on sait que n est un multiple de 2, d est un multiple de 3 et r est un multiple de 6.
On récrit l'équation sous la forme $d = 600 - n - r$ et on considère le membre de droite de l'équation.
Puisque 600 est un multiple de 2, que n est un multiple de 2 et que r est un multiple de 2 (tout multiple de 6 est un multiple de 2), alors $600 - n - r$ est un multiple de 2 (la différence de deux nombres pairs est paire).
Puisque le membre de droite de l'équation est un multiple de 2, le membre de gauche, d, est aussi un multiple de 2.
Or, on sait que d est un multiple de 3. Puisque d est aussi un multiple de 2, il est un multiple pair de 3, c'est-à-dire un multiple de 6.
De même, on récrit l'équation sous la forme $n = 600 - d - r$ et on considère le membre de droite de l'équation : 600 est un multiple de 6, d est un multiple de 6 et r est un multiple de 6. Donc $600 - d - r$ est un multiple de 6 (la différence de multiples de 6 est un multiple de 6).
Puisque le membre de droite est un multiple de 6, le membre de gauche, n, est aussi un multiple de 6.
Donc n, d et r sont des multiples de 6. On peut donc écrire $n = 6N$, $d = 6D$ et $r = 6R$, où N, D et R sont des entiers non négatifs.
L'équation $n + d + r = 600$ devient donc $6N + 6D + 6R = 600$, qui est équivalente à l'équation $N + D + R = 100$ (on a divisé chaque membre de l'équation par 6).

Chaque solution de l'équation $N + D + R = 100$ correspond à une façon pour Boris d'empiler 600 bols et inversement, chaque façon pour Boris d'empiler les bols correspond à une solution de l'équation $N + D + R = 100$.
Par exemple, la solution $N = 30, D = 50, R = 20$ correspond à $n = 6\times30 = 180, d = 6\times50 = 300$, $r = 6 \times 20 = 120$, ce qui correspond à Boris qui empile 180 bols noirs en dessous de 300 bols dorés en dessous de 120 bols rouges.
Puisque $N + D + R = 100$, alors chacune des variables N, D et R a une valeur maximale de 100.
Si $N = 100$, alors $D = R = 0$.
Si $N = 99$, alors $D + R = 100 - B = 1$ et on a donc $D = 0$ et $R = 1$, ou $D = 1$ et $R = 0$.
Donc une fois qu'on attribue des valeurs à N et à D, il n'y a aucun choix pour la valeur de R qui est déterminée par l'équation $R = 100 - N - D$.
Donc pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $N + D + R = 100$, on doit déterminer le nombre de couples (N, D) qui mènent à une solution.
Ainsi dans l'exemple ci-dessous, on a montré que chacun des couples $(100, 0)$, $(99, 0)$ et $(99, 1)$ détermine une solution de l'équation.
On continue de cette manière pour déterminer tous les couples (N, D) (qui détermineront chacun une valeur de R) qui vérifient $N + D + R = 100$.

Valeur de N	Valeur de D	Nombres de bols : n, d, r
100	0	600, 0, 0
99	0	594, 0, 6
99	1	594, 6, 0
98	0	588, 0, 12
98	1	588, 6, 6
98	2	588, 12, 0
97	0	582, 0, 18
97	1	582, 6, 12
97	2	582, 12, 6
97	3	582, 18, 0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$100 - m$	0	$6(100 - m), 0, 6m$
$100 - m$	1	$6(100 - m), 6, 6(m - 1)$
$100 - m$	2	$6(100 - m), 12, 6(m - 2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$100 - m$	m	$6(100 - m), 6m, 0$

On voit, d'après le tableau, que si N est égal à $100 - m$, m étant un entier non négatif inférieur ou égal à 100, alors D peut prendre n'importe quelle valeur entière de 0 à m et qu'il y a alors $m + 1$ valeurs possibles de D.
En d'autres mots, si $N = 100$, il y a 1 valeur possible de D, si $N = 99$, il y a 2 valeurs possibles de D, si $N = 98$, il y a 3 valeurs possibles de D et ainsi de suite.
Chaque baisse de 1 dans le nombre de valeurs possibles de N donne 1 valeur possible de plus de D, jusqu'à ce qu'on arrive à $N = 0$ $(m = 100)$, ce qui donne $m + 1$ valeurs, soit $100 + 1$ valeurs, ou 101 valeurs possibles de D $(0, 1, 2, 3, \ldots, 100)$.
Le nombre total de solutions de l'équation $N + D + R = 100$ est donc égal à $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 + 101$.
Or, on sait que la somme des entiers de 1 à s, soit $1 + 2 + 3 + \cdots + s$, est égale à $\dfrac{s(s + 1)}{2}$.

On obtient donc $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 + 101 = \dfrac{101(102)}{2} = 5151$.
Puisque chacune de ces solutions correspond à une façon pour Boris d'empiler les bols, il y a 5151 façons pour lui d'empiler les bols selon les conditions données.

Solution 2
Soit n le nombre de groupes de 2 bols noirs, d le nombre de groupes de 3 bols dorés de r le nombre de groupes de 6 bols rouges dans une pile.
Il y a donc $2n$ bols noirs, $3d$ bols dorés et $6r$ bols rouges.
Puisqu'il y a 600 bols dans une pile, alors $2n + 3d + 6r = 600$.
On remarque que les nombres de bols noirs, de bols dorés et de bols rouges déterminent la pile (on ne peut pas replacer les bols d'une autre façon). Le nombre de façons d'empiler les bols est donc le même que le nombre de solutions de l'équation $2n + 3d + 6r = 600$, n, d et r étant des entiers supérieurs ou égaux à 0.
Puisque r est supérieur ou égal à 0 et que $6r$ est inférieur ou égal à 600, alors les valeurs possibles de r sont $0, 1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100$.

Lorsque $r = 0$, l'équation devient $2n + 3d = 600$.
Puisque d est supérieur ou égal à 0 et que $3d$ est inférieur ou égal à 600, alors d est inférieur ou égal à 200.
Puisque $2n$ et 600 sont pairs, alors $3d$ est pair, alors d est pair.
Les valeurs possibles de d sont donc $0, 2, 4, \ldots, 196, 198, 200$.
Puisque $200 = 100 \times 2$, il y a 101 valeurs possibles de d.
Lorsque $d = 0$, l'équation devient $2n = 600$, d'où $n = 300$.
Lorsque $d = 2$, l'équation devient $2n = 600 - 3 \times 2$, ou $2n = 594$, d'où $n = 297$.
À chaque fois que d augmente de 2, le nombre de bols dorés augmente de 6 et le nombre de bols noirs doit alors diminuer de 6, ce qui fait que n diminue de 3.
Donc à mesure que les valeurs de d augmentent par tranches de 2, à partir de 2 jusqu'à 200, les valeurs correspondantes de n diminuent par tranches de 3, à partir de 297 jusqu'à 0.
Donc, pour chaque valeur paire de d, il y a une valeur correspondante entière de n.
Donc lorsque $r = 0$, l'équation admet 101 solutions.

Lorsque $r = 1$, l'équation devient $2n + 3d = 600 - 6 \times 1$, ou $2n + 3d = 594$.
Comme ci-haut, d est un nombre pair supérieur ou égal à 0 et inférieur ou égal à $594 \div 3$, ou 198.
Les valeurs possibles de d sont donc $0, 2, 4, \ldots, 194, 196, 198$.
Pour chaque valeur possible de d, il y a une valeur correspondante entière de n.
Donc lorsque $r = 1$, l'équation admet 100 solutions.

On considère une valeur particulière de r. L'équation devient $2b + 3d = 600 - 6r$.
Comme ci-haut, d est un nombre pair supérieur ou égal à 0.
La plus grande valeur possible de d est $\dfrac{600 - 6r}{3}$, ou $200 - 2r$.
Il y a donc $(100 - r) + 1$, ou $101 - r$ valeurs possibles de d. (Pourquoi ?)
À chaque valeur particulière de d, il y a une valeur correspondante entière de n.
Donc pour chaque valeur particulière de r, de 0 à 100, l'équation admet $101 - r$ solutions.

On résume à l'aide d'un tableau :

r	d	n	N[bre] de solutions
0	$0, 2, 4, \ldots, 196, 198, 200$	$300, 297, 294, \ldots, 6, 3, 0$	101
1	$0, 2, 4, \ldots, 194, 196, 198$	$297, 294, 291, \ldots, 6, 3, 0$	100
2	$0, 2, 4, \ldots, 192, 194, 196$	$294, 291, 288, \ldots, 6, 3, 0$	99
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
98	$0, 2, 4$	$6, 3, 0$	3
99	$0, 2$	$3, 0$	2
100	0	0	1

Le nombre total de façons d'empiler les bols est donc égal à :

$$101 + 100 + 99 + \cdots + 3 + 2 + 1$$

Or, les entiers de 1 à 100 peuvent être regroupés en 50 paires de nombres ayant chacune une somme de 101 $(1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, \ldots, 50 + 51)$.
Le nombre total de façons d'empiler les bols est donc égal à $101 + 50 \times 101$, ou 5151.

Réponse : (E)

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2016

(7^e^ et 8^e^ années – Secondaire I et II)

le mercredi 11 mai 2016

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 12 mai 2016

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson	Robert Garbary
Jeff Anderson	Sandy Graham
Terry Bae	Conrad Hewitt
Shane Bauman	Angie Hildebrand
Steve Brown	Carrie Knoll
Carmen Bruni	Judith Koeller
Ersal Cahit	Bev Marshman
Heather Culham	Mike Miniou
Serge D'Alessio	Brian Moffat
Janine Dietrich	Dean Murray
Jennifer Doucet	Jen Nelson
Fiona Dunbar	J.P. Pretti
Mike Eden	Kim Schnarr
Barry Ferguson	Carolyn Sedore
Judy Fox	Ian VanderBurgh
Steve Furino	Troy Vasiga
John Galbraith	Ashley Webster
Alain Gamache	Tim Zhou

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), St. John's Ravenscourt School, Winnipeg, MB
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
Sarah Garrett, King George P.S., Guelph, ON
John McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
David Switzer, Sixteenth Ave. P.S., Richmond Hill, ON
Rachael Verbruggen, University of Waterloo, Waterloo, ON
Laurissa Werhun, Parkdale C.I., Toronto, ON
Chris Wu, Zion Heights J.H.S., Toronto, ON
Lori Yee, William Dunbar P.S., Pickering, ON

7^e année

1. On a : $333 + 33 + 3 = 366 + 3 = 369$

   Réponse : (D)

2. Le jour où Théo a reçu le plus de textos correspond au jour vis-à-vis la bande la plus haute. Il a donc reçu le plus grand nombre de textos vendredi.

   Réponse : (A)

3. *Solution 1*
   Un nombre est un multiple de 7 si on peut l'obtenir en multipliant 7 par un entier.
   Parmi les choix de réponse, seul 77 est un multiple de 7 ($77 = 7 \times 11$).

   Solution 2
   Un nombre est un multiple de 7 si on obtient un entier lorsqu'on le divise par 7.
   Parmi les choix de réponse, seul 77 est un multiple de 7 ($77 \div 7 = 11$).

   Réponse : (C)

4. *Solution 1*
   Une fraction positive est supérieure à $\frac{1}{2}$ si son dénominateur est inférieur à deux fois son numérateur.
   Parmi les choix de réponse, $\frac{4}{7}$ est la seule fraction dont le dénominateur est inférieur à deux fois son numérateur (le dénominateur 7 est inférieur à 2×4).
   Donc, la fraction $\frac{4}{7}$ est supérieure à $\frac{1}{2}$.

   Solution 2
   L'expression décimale d'un nombre supérieur à $\frac{1}{2}$ sera supérieure à 0,5.
   On écrit les choix de réponse sous forme décimale. On obtient :
   $\frac{2}{5} = 0{,}4 \quad \frac{3}{7} = 0{,}428\ldots \quad \frac{4}{7} = 0{,}571\ldots \quad \frac{3}{8} = 0{,}375 \quad \frac{4}{9} = 0{,}444\ldots$
   Seule la fraction $\frac{4}{7}$ a une expression décimale supérieure à 0,5.

   Réponse : (C)

5. Si on fait rouler le cube, la grandeur du triangle ne change pas. On peut donc éliminer le choix de réponse (A).
   Si on fait rouler le cube, cela ne change pas le nombre de triangles peints. On peut donc éliminer les choix de réponse (D) et (E).
   Si on fait rouler le cube, cela ne change pas l'orientation du triangle par rapport à la face sur laquelle il est peint. On peut donc éliminer le choix de réponse (C).
   Le choix de réponse (B) est le seul qui peut représenter le même cube.

   Réponse : (B)

6. Les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°.
   Puisque deux angles mesurent respectivement 25° et 70°, le troisième angle du triangle mesure $180° - 25° - 70°$, ou 85°.

   Réponse : (A)

7. Les choix de n'importe quel des 30 fruits sont équiprobables. Il y a 10 choix favorables (les 10 oranges). Donc, il y a une probabilité de $\frac{10}{30}$, ou $\frac{1}{3}$ pour que le fruit choisi soit une orange.

   Réponse : (D)

8. *Solution 1*
Puisqu'Alex paie 2,25 \$ par trajet, alors 20 trajets lui couteront $20 \times 2{,}25\,\$$, ou 45 \$.
Puisque Samuel paie 3,00 \$ par trajet, alors 20 trajets lui couteront $20 \times 3{,}00\,\$$, ou 60 \$.
Puisque $60\,\$ - 45\,\$ = 15\,\$$, Alex paiera 15 \$ de moins que Samuel en tout.

Solution 2
Puisqu'Alex paie 2,25 \$ par trajet, que Samuel paie 3,00 \$ par trajet et que $3{,}00\,\$ - 2{,}25\,\$ = 0{,}75\,\$$, Alex paie 0,75 \$ de moins que Samuel à chaque trajet d'autobus. Pour 20 trajets, Alex paie 15 \$ de moins que Samuel ($20 \times 0{,}75\,\$ = 15\,\$$).

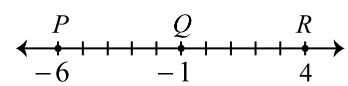
Réponse : (C)

9. *Solution 1*
En voyageant à une vitesse constante de 85 km/h sur une distance de 510 km, Carla mettrait $(510 \div 85)$ heures, ou 6 heures pour compléter son trajet.
Puisqu'elle est à mi-chemin, il lui reste la moitié du temps qu'elle mettrait pour le trajet au complet, soit 3 heures.

Solution 2
Puisque Carla est à mi-chemin d'un voyage de 510 km, il lui reste la moitié de la distance à parcourir, soit $(510 \div 2)$ km, ou 255 km.
Puisqu'elle voyage à une vitesse constante de 85 km/h et qu'il lui reste 255 km à parcourir, elle mettra $(255 \div 85)$ heures, ou 3 heures avant d'arriver.

Réponse : (E)

10. Puisque Q est à mi-chemin entre P et R, alors la distance entre P et Q est égale à la distance entre Q et R.
La distance entre P et Q est égale à $-1 - (-6)$, ou $-1 + 6$, ou 5.
Puisque P est situé à 5 unités à la gauche de Q, alors R est situé à 5 unités à la droite de Q.
Donc, R est situé à $-1 + 5$, ou 4 sur la droite numérique.



Réponse : (A)

11. Dans la figure, il y a 4 rangées d'octogones et chaque rangée contient 5 octogones pour un total de 20 octogones ($4 \times 5 = 20$).
Dans la figure, il y a aussi 3 rangées de carrés et chaque rangée contient 4 carrés pour un total de 12 carrés ($3 \times 4 = 12$).
Le rapport du nombre d'octogones au nombre de carrés est donc de 20 : 12, ou de 5 : 3.

Réponse : (E)

12. La somme de la colonne des unités est égale à $Q + Q + Q$, ou $3 \times Q$.
Puisque Q est un chiffre et que $3 \times Q$ se termine par un 6, la seule possibilité est $Q = 2$.
Puisque $2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$, il n'y a aucune retenue dans la colonne des dizaines.
La somme de la colonne des dizaines est donc égale à $2 + P + 2$, ou $P + 4$, car $Q = 2$.
Puisque P est un chiffre et que $P + 4$ se termine par un 7, la seule possibilité est $P = 3$.
Puisque $3 + 4 = 7$, il n'y a aucune retenue dans la colonne des centaines.
On peut vérifier que dans la colonne des centaines, on a $3+3+2 = 8$, puisque $P = 3$ et $Q = 2$.
La valeur de $P + Q$ est donc égale à $3 + 2$, ou 5.
L'addition est indiquée ci-contre.

$$\begin{array}{r} 322 \\ 332 \\ +\,222 \\ \hline 876 \end{array}$$

Réponse : (B)

13. Puisque le cube est un prisme à base carrée, son volume est égal au produit de l'aire de la base $(L \times l)$, par la hauteur h.
Or, tous les côtés d'un cube ont la même longueur. On a donc $L = l = h$.
Le volume d'un cube est donc le produit de trois nombres égaux.
Puisque le grand cube a un volume de $64\,\text{cm}^3$ et que $64 = 4 \times 4 \times 4$, chaque arête du grand cube a une longueur de $4\,\text{cm}$.
Les arêtes du petit cube ont la moitié de la longueur des arêtes du grand cube. Les arêtes du petit cube ont donc une longueur de $2\,\text{cm}$.
Le volume du petit cube est donc égal à $2 \times 2 \times 2\,\text{cm}^3$, ou $8\,\text{cm}^3$.

Réponse : (C)

14. Ahmed pourrait choisir les paires d'items suivants pour sa collation : pomme et orange, pomme et banane, pomme et barre de céréales, orange et banane, orange et barre de céréales, banane et barre de céréales.
Il peut donc choisir 6 paires différentes d'items.

Réponse : (D)

15. *Solution 1*
Sophie a fait des pompes pendant 7 jours (un nombre impair de jours) et chaque jour, elle a augmenté le nombre de pompes de façon constante (5 de plus chaque jour).
Donc, le nombre de pompes qu'elle a faites le jour du milieu (le jour 4) est égal à la moyenne du nombre de pompes par jour.
Elle a fait 175 pompes en tout pendant les 7 jours. En moyenne, elle a fait $(175 \div 7)$ pompes, ou 25 pompes par jour.
Donc, le 4e jour, elle a fait 25 pompes, le 5e jour, elle a fait 5 pompes de plus, soit 30 pompes, le 6e jour, elle a fait 5 pompes de plus, soit 35 pompes et le 7e jour, elle a fait 5 pompes de plus, soit 40 pompes.
(On peut vérifier que $10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35 + 40 = 175$.)

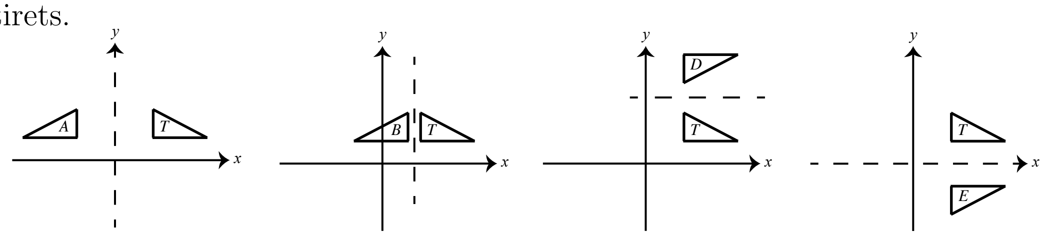
Solution 2
Supposons que Sophie fait 1 pompe le premier jour. Les six jours suivants, elle en fait donc 6, 11, 16, 21, 26 et 31.
Le nombre total de pompes est égal à $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + 26 + 31$, ou 112.
Selon l'énoncé, Sophie fait un total de 175 pompes en 7 jours. Il lui manque donc un total de 63 pompes $(175 - 112 = 63)$.
Puisque $63 \div 7 = 9$, Sophie doit donc faire 9 pompes de plus par jour pour atteindre un total de 175 pompes.
Donc, au lieu de faire 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31 pompes, elle en fait 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40. On peut vérifier que $10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35 + 40 = 175$.
Donc, le dernier jour, Sophie fait 40 pompes.

Réponse : (E)

16. Puisque $\square = \triangle + \triangle + \triangle$, alors en ajoutant $\blacklozenge$ à chaque membre de l'équation, on obtient $\square + \blacklozenge = \blacklozenge + \triangle + \triangle + \triangle$.
Puisque $\square + \blacklozenge = \blacklozenge + \triangle + \triangle + \triangle$, alors en ajoutant $\triangle$ à chaque membre, on obtient $\square + \blacklozenge + \triangle = \blacklozenge + \triangle + \triangle + \triangle + \triangle$.
(Défi : Expliquer pourquoi aucun autre des choix de réponse ne peut égaler $\square + \blacklozenge + \triangle$.)

Réponse : (B)

17. Chacune des figures suivantes montre l'image du triangle T après une réflexion par rapport à la droite à tirets.



Donc, chacun des triangles A, B, D, et E est l'image du triangle T par exactement une réflexion. Le triangle C est le seul qui ne peut pas être l'image du triangle T par une réflexion.

Réponse : (C)

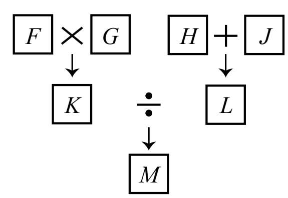
18. Puisque les six nombres ont une moyenne de 10, les six nombres ont une somme de 6×10, ou 60.
Lorsqu'on retire le nombre 25 de l'ensemble des six nombres, on conclut que les cinq autres nombres ont une somme de $60 - 25$, ou 35.
Les cinq autres nombres ont donc une moyenne de $35 \div 5$, ou 7.

Réponse : (B)

19. Le ruban est divisé en cinq sections de même longueur.
La longueur de chaque section est donc égale à $\frac{1}{5}$ de la longueur du ruban. À partir de l'extrémité gauche, le point A est situé après 3 sections et le point D est situé après 4 sections.
La longueur jusqu'à A correspond donc à $\frac{3}{5}$ (ou $\frac{9}{15}$) de la longueur du ruban et la longueur jusqu'à D correspond à $\frac{4}{5}$ (ou $\frac{12}{15}$) de la longueur du ruban.
Puisque les cinq points sont situés à égale distance l'un de l'autre, que A est situé à $\frac{9}{15}$ et que D est situé à $\frac{12}{15}$, alors B est situé à $\frac{10}{15}$, C est situé à $\frac{11}{15}$ et E est situé à $\frac{13}{15}$.
Si Susie coupe le ruban à la verticale au point C, la partie gauche du ruban aura une longueur égale à $\frac{11}{15}$ de la longueur initiale du ruban.
(On remarque qu'à partir de l'extrémité droite du ruban, aucun des cinq points n'est situé à plus de 2 sections, ou à plus de $\frac{2}{5}$ (ou $\frac{6}{15}$) de la longueur initiale. Les mesures devaient donc être faites à partir de l'extrémité gauche.)

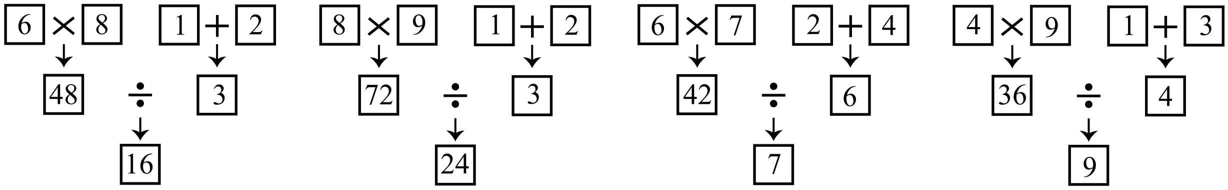
Réponse : (C)

20. On nomme les cases comme dans la figure ci-contre.
Parmi les cinq choix de réponse, le nombre qui ne peut paraitre dans la case M est 20.
En effet, si le 20 paraissait dans la case M, il faudrait que la case K contienne un multiple de 20 et que l'on ait $K \div L = 20$.



Les premiers multiples de 20 sont 20, 40, 60, 80, ... Or, les chiffres de 1 à 9 ne permettent pas d'obtenir 80 dans la case K, car la plus grande valeur possible de K est 72 (en utilisant $8 \times 9 = 72$ ou $9 \times 8 = 72$).
Est-il possible d'obtenir 20, 40 ou 60 dans la case K ?
Avec 20 dans la case K, la division $K \div L = M$ deviendrait $20 \div 1 = 20$. Or, il est impossible d'avoir une addition $H + J = 1$ avec des chiffres de 1 à 9.
Avec 40 dans la case K, la division $K \div L = M$ deviendrait $40 \div 2 = 20$. Or, il est impossible d'avoir une addition $H + J = 2$ avec des chiffres de 1 à 9.
Avec 60 dans la case K, la division $K \div L = M$ deviendrait $60 \div 3 = 20$. Il est possible de choisir $H = 1$ et $J = 2$ pour obtenir $H + J = 3$, mais il est impossible d'avoir un produit $F \times G = 60$ avec des chiffres de 1 à 9.
Donc, 20 ne peut pas paraitre dans la case M.

Les figures suivantes indiquent que chacun des autres choix de réponse peut paraitre dans la case M.

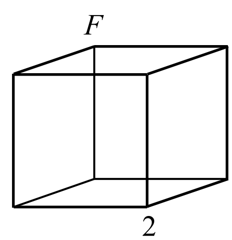


Réponse : (D)

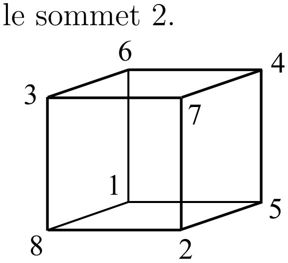
21. Le segment PQ sera vertical si Q est choisi parmi les points dans la même colonne que P. Puisque cette colonne contient 9 points autres que P, il y a 9 points favorables pour le choix de Q de manière que PQ soit vertical.
Le segment PQ sera horizontal si Q est choisi parmi les points dans la même rangée que P. Puisque cette rangée contient 9 points autres que P, il y a 9 points favorables pour le choix de Q de manière que PQ soit horizontal.
Il y a donc 18 points distincts favorables pour le choix de Q.
En tout, on peut choisir Q parmi n'importe quels des 99 points autres que P et ces choix sont équiprobables.
Donc, il y a une probabilité de $\frac{18}{99}$, ou $\frac{2}{11}$ pour que le choix de Q donne un segment PQ vertical ou horizontal.

Réponse : (A)

22. On nomme d'abord un des sommets 2, puis on nomme F le sommet le plus éloigné du sommet 2, comme dans la figure ci-contre.
(Défi : Expliquer pourquoi ce sommet F est le plus éloigné du sommet 2.)
Chacun des six autres sommets est situé sur une même face que le sommet 2.



On remarque que le sommet F est le seul sommet qui n'est pas situé sur une même face que le sommet 2.
Parmi les listes données, on considère celles qui contiennent le sommet 2, soit $(1, 2, 5, 8)$, $(2, 4, 5, 7)$ et $(2, 3, 7, 8)$.
Donc, chacun des sommets 1, 3, 4, 5, 7 et 8 est sur une même face que le sommet 2.
Le seul sommet qui ne parait pas sur une même face que le sommet 2 est le sommet 6.
Le sommet F, qui est le plus éloigné du sommet 2, est donc le sommet 6.
La figure ci-contre indique une façon de nommer les sommets.



Réponse : (D)

23. *Solution 1*
Une bille rouge sera représentée par la lettre R et une bille bleue par la lettre B.
Lors du premier tirage, Alexa peut tirer RR, RB ou BB.

1[er] cas : Alexa obtient RR ou RB lors du premier tirage
Puisqu'Alexa tire RR ou RB lors du premier tirage, elle se débarasse d'une R et remet l'autre bille dans le bocal qui contient maintenant RBB.
Lors du deuxième tirage, Alexa peut choisir RB ou BB.

Si elle tire RB, elle se débarasse de R et remet B dans le bocal qui contient maintenant BB.
Puisque le bocal ne contient aucune bille rouge, il est impossible que la dernière bille qui restera après le troisième tirage soit rouge.
Si Alexa tire BB lors du deuxième tirage, elle se débarasse d'une B et remet l'autre B dans le bocal qui contient maintenant RB.
Lorsqu'elle tire ces deux billes lors du troisième tirage, elle se débarasse de R et la bille qui reste est B.
Dans ce cas, il est encore impossible que la dernière bille soit rouge après le troisième tirage.
Pour résumer, si Alexa tire RR ou RB lors du premier tirage, il y a une probabilité de zéro pour que la dernière bille soit rouge après le troisième tirage.

2$^{\text{e}}$ cas : Alexa obtient BB lors du premier tirage
Puisqu'Alexa tire BB lors du premier tirage, elle se débarasse d'une B et remet l'autre B dans le bocal qui contient maintenant RRB.
Lors du deuxième tirage, Alexa peut tirer RR ou RB.
Dans chaque cas, elle se débarasse d'une R et remet l'autre bille dans le bocal qui contient maintenant RB.
Lorsqu'elle tire ces deux billes lors du troisième tirage, elle se débarasse de R et la bille qui reste est B.
Dans ce cas, il est encore impossible que la dernière bille soit rouge après le troisième tirage.
Pour résumer, si Alexa tire BB lors du premier tirage, il y a une probabilité de zéro pour que la dernière bille soit rouge après le troisième tirage.

Selon les règles du jeu, il y a une probabilité de zéro pour que la bille qui reste après trois tirages soit rouge.

Solution 2
Une bille rouge sera représentée par la lettre R et une bille bleue par la lettre B.
On procède à rebours.
Si la dernière bille qui reste est R, alors il doit y avoir au moins une R parmi les deux dernières billes, c'est-à-dire que les deux dernières billes doivent être RB ou RR.
Si les deux dernières billes sont RB, alors lorsqu'elles seront choisies lors du troisième tirage, il faudra se débarasser de la R et il ne restera qu'une B, ce qui contredit la prémisse.
Puisque la dernière bille est R, il est donc impossible que les deux dernières billes soient RB.
Les deux dernières billes doivent donc être RR.
Les trois dernières billes doivent donc être BRR (puisqu'il n'y a que deux R dans le bocal au départ).
Dans ce cas, lors du deuxième tirage, il faudra tirer au moins une R, se débarasser d'une R et remettre l'autre bille dans le bocal qui contiendra alors BR, ce qui est impossible.
Il est donc impossible que les deux dernières billes soient RR.
Si la dernière bille est R, on a vu que les deux dernières billes doivent être RR et que ce résultat est impossible.
Selon les règles du jeu, il y a une probabilité de zéro pour que la bille qui reste après trois tirages soit rouge.

RÉPONSE : (E)

24. On montre d'abord que chacun des nombres 101, 148, 200 et 621 peut être exprimé comme la somme de deux ou plusieurs entiers consécutifs strictement positifs :

$$\begin{aligned} 101 &= 50 + 51 \\ 148 &= 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 \\ 200 &= 38 + 39 + 40 + 41 + 42 \\ 621 &= 310 + 311 \end{aligned}$$

Ceci élimine quatre des cinq choix de réponse et la réponse est donc (B).

On démontre ensuite que 512 ne peut être exprimé comme la somme de deux ou plusieurs entiers consécutifs strictement positifs.
Supposons que 512 est égal à la somme de p entiers consécutifs strictement positifs, p étant un entier impair supérieur à 1.
Puisque p est impair, cette liste de p entiers admet un terme du milieu, m.
Puisque les p nombres sont consécutifs et que m est le nombre du milieu, la moyenne des nombres est égale à m.
(Par exemple, la moyenne des cinq entiers 6, 7, 8, 9 et 10 est égale à 8.)
Or, la somme des entiers est égale à la moyenne (m) multipliée par le nombre d'entiers (p). On a donc $512 = mp$.
Puisque $512 = 2^9$, ses diviseurs sont 1, 2^1, 2^2, 2^3, $\ldots$, 2^9. Donc, 512 n'admet aucun diviseur impair supérieur à 1.
Donc, 512 ne peut être écrit sous la forme mp où m et p sont des entiers et p est un entier impair supérieur à 1.
Donc, 512 ne peut être égal à la somme d'un nombre impair d'entiers consécutifs strictement positifs.

Supposons que 512 est égal à la somme de p entiers consécutifs strictement positifs, p étant un entier pair (qui est donc supérieur à 1).
Puisque p est pair, la liste n'admet pas un nombre du milieu m. On peut dire que la liste admet deux nombres du milieu, m et $m + 1$.
Puisque les entiers sont consécutifs, leur moyenne est égale au nombre à mi-chemin entre m et $m + 1$, c'est-à-dire à $m + \frac{1}{2}$.
(Par exemple, la moyenne des six entiers 6, 7, 8, 9, 10 et 11 est égale au nombre à mi-chemin entre 8 et 9, c'est-à-dire à $8\frac{1}{2}$.)
Or, la somme des entiers est égale à la moyenne ($m + \frac{1}{2}$) multipliée par le nombre d'entiers (p). On a donc $512 = (m + \frac{1}{2})p$, donc $2(512) = 2(m + \frac{1}{2})p$, ou $1024 = (2m + 1)p$.
Puisque $1024 = 2^{10}$, ses diviseurs sont 1, 2^1, 2^2, 2^3, $\ldots$, 2^{10}. Donc, 1024 n'admet aucun diviseur impair supérieur à 1.
Donc, 1024 ne peut pas être écrit sous la forme $(2m + 1)p$, puisque m et p sont des entiers strictement positifs et $2m + 1$ a toujours une valeur impaire supérieure à 1.
Donc, 512 ne peut être égal à la somme d'un nombre pair d'entiers consécutifs strictement positifs.

Donc, 512 ne peut être égal à la somme d'entiers consécutifs strictement positifs.
On peut démontrer qu'il en est de même pour n'importe quelle autre puissance de 2.

Réponse : (B)

25. On considère les lignes en diagonale qui commencent du côté gauche du triangle et qui descendent vers la droite.
Le premier nombre de la $n^{\text{ième}}$ ligne en diagonale est n et ce nombre est situé sur la $n^{\text{ième}}$ ligne horizontale. Par exemple, la 3e ligne en diagonale est $(\mathbf{3}, 6, 9, 12, \ldots)$ et son premier nombre, 3, est situé sur la 3e ligne horizontale $(\mathbf{3}, 4, 3)$.
Le deuxième nombre de la $n^{\text{ième}}$ ligne en diagonale est $n+n$, ou $2n$ et ce nombre est situé sur la ligne horizontale numéro $n+1$.
Le troisième nombre de la $n^{\text{ième}}$ ligne en diagonale est $n+n+n$, ou $3n$ et ce nombre est situé sur la ligne horizontale numéro $n+2$ (chaque nombre d'une ligne en diagonale est situé sur la ligne horizontale suivante en comparaison au nombre précédent de la ligne en diagonale).
D'après cette régularité, le $m^{\text{ième}}$ nombre sur la $n^{\text{ième}}$ ligne en diagonale est égal à $m \times n$ et il est situé sur la ligne horizontale numéro $n + (m-1)$.
Le tableau suivant illustre cette situation pour $n = 3$, c'est-à-dire la 3e ligne en diagonale.

m	$m^{\text{ième}}$ nombre de la diagonale	Numéro de la ligne horizontale
1	3	3
2	$2 \times 3 = 6$	$3+1=4$
3	$3 \times 3 = 9$	$3+2=5$
4	$4 \times 3 = 12$	$3+3=6$
5	$5 \times 3 = 15$	$3+4=7$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$m \times n$	$3+(m-1)$

Le nombre 2016 est situé sur une ligne ou sur plusieurs lignes en diagonale quelconques.
Pour déterminer ces diagonales, on exprime 2016 comme produit $m \times n$ de deux entiers positifs m et n. Si on obtient $2016 = m \times n$, alors 2016 paraitra dans la $m^{\text{ième}}$ position dans la $n^{\text{ième}}$ diagonale, et sera situé dans la ligne horizontale numéro $n+m-1$.
Puisqu'on cherche la ligne horizontale dans laquelle 2016 parait pour la première fois, on doit chercher des entiers positifs m et n tels que $m \times n = 2016$ et $n+m$ soit aussi petit que possible (et donc $n+m-1$ aussi).
Dans le tableau suivant, on donne tous les couples (m,n) pour lesquels $m \times n = 2016$ et le numéro $n+m-1$ de la ligne horizontale dans laquelle 2016 parait.

Couple (m,n)	Numéro de la ligne horizontale $n+m-1$
$(1, 2016)$	2016
$(2, 1008)$	1009
$(3, 672)$	674
$(4, 504)$	507
$(6, 336)$	341
$(7, 288)$	294
$(8, 252)$	259
$(9, 224)$	232
$(12, 168)$	179

Couple (m,n)	Numéro de la ligne horizontale $n+m-1$
$(14, 144)$	157
$(16, 126)$	141
$(18, 112)$	129
$(21, 96)$	116
$(24, 84)$	107
$(28, 72)$	99
$(32, 63)$	94
$(36, 56)$	91
$(42, 48)$	89

(Remarque : Si on constate que lorsque $m \times n = 2016$, la somme $n+m$ est minimisée lorsque la différence positive entre m et n est minimisée, on peut raccourcir le travail ci-dessus.)
On a inclu dans le tableau tous les couples (m,n) pour lesquels $m \times n = 2016$.
On voit que 2016 paraitra dans 18 positions différentes dans le triangle.
Le nombre 2016 paraitra pour la première fois dans la ligne horizontale numéro 89.

Réponse : (E)

8^e^ année

1. On a : $444 - 44 - 4 = 400 - 4 = 396$

Réponse : (A)

2. *Solution 1*
La fraction $\frac{4}{5}$ est égale à $4 \div 5$, ou 0,8.

Solution 2
Puisque $\frac{4}{5}$ est égal à $\frac{8}{10}$, alors $\frac{4}{5} = 0{,}8$.

Réponse : (B)

3. On remplit un tableau qui indique le nombre d'heures par jour consacrées par Stan à son projet selon le diagramme.

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
Nombre d'heures	2	0	3	1	2

En tout, Stan a consacré 8 heures à son projet ($2 + 0 + 3 + 1 + 2 = 8$).

Réponse : (C)

4. Trois dixièmes plus quatre millièmes est égal à : $\frac{3}{10} + \frac{4}{1000} = \frac{300}{1000} + \frac{4}{1000} = \frac{304}{1000} = 0{,}304$
(On pourrait aussi calculer $0{,}3 + 0{,}004 = 0{,}300 + 0{,}004 = 0{,}304$.)

Réponse : (C)

5. On plie le long des côtés communs entre deux carrés.
On peut considérer la face 3 comme étant le dessous du cube.
On plie vers le haut le long des quatre côtés du carré 3 (entre 3 et 5, entre 3 et 4, entre 3 et 6, entre 3 et 2).
À la suite de ce pliage, les carrés 2, 5, 4 et 6 deviennent les faces latérales du cube.
On plie le long de la ligne entre les carrés 1 et 2.
La face 1 devient ainsi la face du dessus du cube.
Puisque la face du dessus est opposée à la face du dessous, la face 3 est opposée à la face 1.

Réponse : (B)

6. Puisque PR est horizontal, les points P et R ont la même ordonnée, soit -2.
Puisque PQ est vertical, les points P et Q, ont la même abscisse, soit -11.
Donc, les coordonnées de P sont $(-11, -2)$.

Réponse : (D)

7. Un rectangle qui a une largeur de 2 cm et une longueur de 18 cm a une aire de $(2 \times 18)\,\text{cm}^2$, ou $36\,\text{cm}^2$.
Puisque les côtés d'un carré ont la même longueur, que le carré a la même aire que le rectangle et que $6 \times 6 = 36$, les côtés du carré ont une longueur de 6 cm.

Réponse : (A)

8. Parmi les nombres 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, seuls 3, 5 et 7 sont premiers.
Les nombres 4, 6, 8 et 9 sont composés.
Le rapport du nombre de nombres premiers au nombre de nombres composés est de 3 : 4.

Réponse : (A)

9. Puisque $10\,\%$ de 200 est égal à $\frac{10}{100}$ de 200, ou $\frac{1}{10}$ de 200 et que $200 \div 10 = 20$, alors $10\,\%$ de 200 est égal à 20.
Or, $20\,\%$ de 100 est égal à 20. Donc, $10\,\%$ de 200 est égal à $20\,\%$ de 100.

Réponse : (C)

10. La circonférence d'un cercle de diamètre d est égale à $\pi \times d$.
Puisque le cercle donné a une circonférence de 100π cm (c'est-à-dire $\pi \times 100$ cm), il a un diamètre de 100 cm.
Le cercle a donc un rayon de 50 cm.

Réponse : (C)

11. Dans le triangle équilatéral QRS, chaque angle a la même mesure. Donc $\angle SQR = 60^\circ$.
Puisque $\angle PQR = 90^\circ$ et $\angle PQS = \angle PQR - \angle SQR$, alors $\angle PQS = 90^\circ - 60^\circ$, ou $\angle PQS = 30^\circ$.
Dans le triangle isocèle PQS, $\angle QPS = \angle PQS = 30^\circ$.
Donc $\angle QPR = \angle QPS = 30^\circ$.

Réponse : (E)

12. On vérifie les résultats selon les choix de réponse :

(A) : $3 + 5 \times 7 + 9 = 3 + 35 + 9 = 47$
(B) : $3 + 5 + 7 \times 9 = 3 + 5 + 63 = 71$
(C) : $3 \times 5 \times 7 - 9 = 15 \times 7 - 9 = 105 - 9 = 96$
(D) : $3 \times 5 \times 7 + 9 = 15 \times 7 + 9 = 105 + 9 = 114$
(E) : $3 \times 5 + 7 \times 9 = 15 + 63 = 78$

Les opérations, dans l'ordre, sont $\times, +, \times$.

Réponse : (E)

13. Ahmed pourrait choisir les paires d'items suivants pour sa collation : pomme et orange, pomme et banane, pomme et barre de céréales, orange et banane, orange et barre de céréales, banane et barre de céréales.
Il peut donc choisir 6 paires différentes d'items.

Réponse : (D)

14. Un ballon et un maillot de soccer coutent 100 \$.
Donc, deux ballons et deux maillots de soccer coutent le double, soit 200 \$.
Selon l'énoncé, deux ballons et trois maillots de soccer coutent 262 \$ en tout. Donc l'ajout d'un maillot fait passer le prix de 200 \$ à 262 \$, une augmentation de 62 \$. Un maillot coute donc 62 \$.
Puisqu'un ballon et un maillot coutent 100 \$, un ballon coute 100 \$ − 62 \$, ou 38 \$.

Réponse : (A)

15. L'échelle de 1 : 600 000 signifie qu'une distance de 1 cm sur la carte représente une distance réelle de 600 000 cm.
Or, 600 000 cm = 6000 m (car $600\,000 \div 100 = 6000$) et 6000 m = 6 km (car $6000 \div 1000 = 6$).
Donc, une distance de 2 cm sur la carte représente une distance réelle de 2×6 km, ou 12 km.
Il y a donc une distance de 12 km entre Gaussville et Piville.

Réponse : (A)

16. Puisque les six nombres ont une moyenne de 10, les six nombres ont une somme de 6×10, ou 60.
Lorsqu'on retire le nombre 25 de l'ensemble des six nombres, les cinq autres nombres ont une somme de $60 - 25$, ou 35.
Les cinq autres nombres ont donc une moyenne de $35 \div 5$, ou 7.

Réponse : (B)

17. Les entiers positifs entre 10 et 2016 dont tous les chiffres sont égaux sont :
11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999 et 1111.
Un entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Parmi les entiers précédents de deux chiffres, les nombres 33, 66 et 99 (dont la somme des chiffres respective est égale à 6, 12 et 18) sont divisibles par 3. (On peut vérifier que la somme des chiffres des nombres 11, 22, 44, 55, 77 et 88 n'est pas divisible par 3.)
Dans la liste, tous les nombres de trois chiffres égaux sont divisibles par 3, puisque la somme de leurs chiffres est le triple d'un même chiffre. Il y a 9 tels nombres.
Le nombre 1111 n'est pas divisible par 3, car la somme de ses chiffres, 4, n'est pas divisible par 3.
Il y a donc 12 entiers entre 10 et 2016 dont tous les chiffres sont égaux et qui sont divisibles par 3, soit 3 nombres de deux chiffres et 9 nombres de trois chiffres.

Réponse : (B)

18. Jos a utilisé $\frac{3}{8}$ de l'essence pour parcourir 165 km. Il a donc utilisé $\frac{1}{8}$ de l'essence pour parcourir $165\,\text{km} \div 3$, ou 55 km.
Il lui reste $\frac{5}{8}$ du réservoir d'essence (car $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$). Il peut donc encore parcourir $5 \times 55\,\text{km}$, ou 275 km avant que son réservoir ne soit vide.

Ou puisqu'il a utilisé $\frac{1}{8}$ de l'essence dans le réservoir pour parcourir 55 km, en utilisant le réservoir au complet, il pourrait parcourir $8 \times 55\,\text{km}$, ou 440 km en tout. Puisqu'il a déjà parcouru 165 km, il peut encore parcourir $440\,\text{km} - 165\,\text{km}$, ou 275 km avant que son réservoir ne soit vide.

Réponse : (E)

19. La première balance indique que 2 ◯ sont en équilibre avec 6 □. Donc, 1 ◯ est en équilibre avec 3 □. Donc, l'égalité du choix de réponse (C) est vraie.
La deuxième balance indique que 2 ◯ et 6 □ sont en équilibre avec 4 △. Donc, 1 ◯ et 3 □ sont en équilibre avec 2 △.
Donc, l'égalité du choix de réponse (B) est vraie.
D'après la première balance, on peut remplacer les 6 □ dans sur le plateau de gauche de la deuxième balance par 2 ◯. On peut conclure que sur la deuxième balance, 4 ◯ sont en équilibre avec 4 △. Donc, 1 ◯ est en équilibre avec 1 △.
Donc, l'égalité du choix de réponse (A) est vraie.
Si on compare les égalités des choix de réponse (A) et (E), les deux membres de gauche sont égaux, puisque 1 ◯ est en équilibre avec 1 △. Ces deux égalités sont donc équivalentes. Puisque l'égalité (A) est vraie, celle de (E) est vraie.
On sait donc que les égalités des choix de réponse (A), (B), (C) et (E) sont vraies.
Donc, l'égalité du choix de réponse (D) n'est pas vraie.

Réponse : (D)

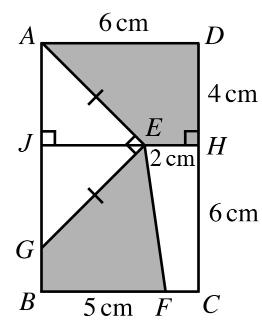
20. Puisque les points D et C ont la même ordonnée, -3, le segment DC est horizontal. Il a une longueur de $3 - (-2)$, ou 5.
Puisque les points B et C ont la même abscisse, 3, le segment BC est vertical. Il a une longueur de $9 - (-3)$, ou 12.
Donc, le triangle BCD a des côtés DC et BC perpendiculaires. Il est donc rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, $BD^2 = DC^2 + BC^2$. Donc $BD^2 = 5^2 + 12^2$, d'où $BD^2 = 25 + 144$, ou $BD^2 = 169$. Donc $BD = \sqrt{169}$, ou $BD = 13$ (puisque $BD > 0$).

Réponse : (A)

21. On remarque que les cinq choix de réponse sont des nombres de trois chiffres. Les chiffres des dix milliers des deux nombres que l'on écrit doivent différer de 1, car ils ne peuvent être égaux et s'ils différaient de plus que 1, la différence des deux nombres serait un nombre de 5 chiffres. (Par exemple, si on soustrayait $50\,000 - 39\,999$, on obtiendrait $10\,001$).
Quels que soient les chiffres des dix milliers des deux nombres, si le premier est 1 de plus que l'autre, la différence entre les deux nombres aura moins de cinq chiffres. On choisira donc ces chiffres consécutifs plus loin. Pour le moment, le chiffre des dix milliers du premier nombre sera C et celui du deuxième nombre sera c.
On veut que la différence $C\_\_\_\_ - c\_\_\_\_$ soit aussi petite que possible. Pour cela, les deux nombres doivent être aussi près l'un de l'autre que possible. Pour réussir, on tentera de rendre $C\_\_\_\_$ aussi près de $C0\,000$ que possible et $c\_\_\_\_$ aussi près de $c9\,999$ que possible, tout en utilisant des chiffres distincts.
En d'autres mots, on tentera de rendre $C\_\_\_\_$ aussi petit que possible et $c\_\_\_\_$ aussi grand que possible, tout en utilisant des chiffres distincts.
La plus grande valeur possible de $c\_\_\_\_$ est $c9\,876$.
Pour obtenir la plus petite valeur possible de $C\_\_\_\_$, on doit utiliser les plus petits chiffres possibles, soit 0, 1, 2 et 3, et les placer de manière que les petits chiffres occupent les colonnes qui ont les plus grandes valeurs. Donc, la plus petite valeur possible de $C\_\_\_\_$ est $C0\,123$.
Heureusement, les deux chiffres non encore utilisés sont 4 et 5, soit deux chiffres consécutifs. On pose donc $C = 5$ et $c = 4$. Les deux nombres sont $50\,123$ et $49\,876$.
La plus petite différence possible est : $50\,123 - 49\,876 = 247$

Réponse : (C)

22. Le quadrilatère ombré $BFEG$ est irrégulier et son aire ne peut être calculée facilement. Les deux formes non ombrées sont un triangle isocèle et un trapèze. Pour calculer l'aire totale des régions ombrées, on calculera donc l'aire des régions non ombrées et on les soustraira de celle du rectangle.



On prolonge d'abord HE jusqu'au point J sur le côté AB.
Puisque HE est perpendiculaire à DH, alors HJ l'est aussi.
Puisque DH est parallèle à AJ, alors HJ est perpendiculaire à AJ. $ADHJ$ est donc un rectangle. Donc $AJ = DH = 4\,\text{cm}$.
De plus, $AD = JH = 6\,\text{cm}$.
Puisque $JH = 6\,\text{cm}$, alors $HE + EJ = 6\,\text{cm}$, ou $2\,\text{cm} + EJ = 6\,\text{cm}$. Donc $EJ = 4\,\text{cm}$.
Puisque le triangle AEG est isocèle avec $AE = GE$, alors la hauteur EJ coupe la base AG en son milieu. Puisque $AJ = 4\,\text{cm}$ et que $GJ = AJ$, alors $GJ = 4\,\text{cm}$.
On calcule l'aire du triangle AEG en utilisant la base AG de $8\,\text{cm}$ et la hauteur EJ de $4\,\text{cm}$.
L'aire est égale à $\frac{1}{2}(8)(4)\ \text{cm}^2$, ou $16\,\text{cm}^2$.
Puisque $BC = AD = 6\,\text{cm}$, $BF = 5\,\text{cm}$ et $BF + CF = 6\,\text{cm}$, alors $CF = 1\,\text{cm}$.
Les côtés FC et EH du quadrilatère $EHCF$ sont perpendiculaires au côté HC. Ils sont donc parallèles et le quadrilatère est donc un trapèze.
Pour les côtés parallèles du trapèze, on a $HE = 2\,\text{cm}$ et $CF = 1\,\text{cm}$. Le côté HC est la hauteur (puisqu'il est perpendiculaire aux deux bases HE et CF) et $HC = 6\,\text{cm}$.
L'aire du trapèze $EHCF$ est donc égale à $\frac{1}{2}(6)(2+1)\,\text{cm}^2$, ou $9\,\text{cm}^2$.
Le rectangle a une base de $6\,\text{cm}$ et une hauteur de $(4+6)\,\text{cm}$, ou $10\,\text{cm}$.
L'aire du rectangle est égale à $(6 \times 10)\,\text{cm}^2$, ou $60\,\text{cm}^2$.
L'aire totale des régions ombrées est égale à l'aire du rectangle moins l'aire du triangle et l'aire du trapèze. Elle est égale à $60\,\text{cm}^2 - 16\,\text{cm}^2 - 9\,\text{cm}^2$, ou $35\,\text{cm}^2$.

Réponse : (D)

23. Pour se rendre au point $(1056, 1007)$, Zeus doit se déplacer vers la droite et vers le haut à partir de son point de départ $(0, 0)$.
Il devra se déplacer au moins 1056 fois vers la droite (D).
Puisqu'il ne peut pas se déplacer deux fois de suite dans une même direction, il ne pourra pas faire deux déplacements D de suite. Il devra donc y avoir un autre déplacement entre n'importe quels deux déplacements D. Pour représenter les déplacements, on imagine que l'on écrit 1056 D de suite avec une espace entre chaque D pour un total de 1055 espaces.
Chaque espace sera rempli par un H (vers le haut) ou un B (vers le bas).
Pour se rendre à n'importe quel point qui a une ordonnée de 1007, Zeus doit faire au moins 1007 déplacements H.
On place donc un H entre le 1^er^ D et le 2^e^ D, un autre entre le 2^e^ D et le 3^e^ D, ..., un autre entre le 1007^e^ D et le 1008^e^ D.
On a donc écrit en alternance et commençant par un D, 1008 D et 1007 H. Après avoir parcouru 1008 D et 1007 H, Zeus est au point $(1008, 1007)$.
Il reste donc $(1055 - 1007)$ espaces, ou 48 espaces à remplir entre les D qui suivent (entre le 1008^e^ et le 1009^e^, entre le 1009^e^ et le 1010^e^, ..., entre le 1055^e^ et le 1056^e^).
On veut que Zeus fasse ces déplacements sans nuire à sa position (on ne veut pas qu'il recule).
On ajoute 24 H dans les espaces qui suivent et 24 B dans les 24 derniers espaces. Ainsi Zeus devra faire 24 déplacements additionnels vers le haut suivis de 24 déplacements additionnels vers le bas, ce qui ne changera pas sa position nette par rapport au haut ou au bas.
Au départ, Zeus peut ainsi faire 1008 déplacements D et 1007 déplacements H en alternance. Ensuite, il fait 24 déplacements H et 24 déplacements D en alternance, suivis de 24 déplacements B et 24 déplacements D en alternance, pour un total de $(1008 + 1007 + 24 + 24 + 24 + 24)$ déplacements, ou 2111 déplacements.
On a démontré que Zeus a besoin d'au moins 2111 déplacements et qu'il est possible de se rendre au point $(1056, 1007)$ en 2111 déplacements. Donc, le plus petit nombre déplacement que Zeus peut faire pour se rendre au point $(1056, 1007)$ est 2111.

Réponse : (D)

24. Lorsqu'on multiplie deux entiers, les deux derniers chiffres (le chiffre des dizaines et le chiffre des unités) du produit sont déterminés par les deux derniers chiffres des nombres qu'on a multipliés.
En effet, le chiffre des unités de chaque nombre contribue au chiffre des unités et aux autres chiffres du produit. Le chiffre des dizaines de chaque nombre contribue au chiffre des dizaines et aux autres chiffres du produit, mais pas au chiffre des unités du produit. Le chiffre des centaines de chaque nombre contribue au chiffre des centaines et aux autres chiffres du produit, mais pas aux chiffres des unités ou des dizaines du produit, et ainsi de suite.
Donc pour déterminer le chiffre des dizaines d'un produit, il suffit d'utiliser les chiffres des dizaines et des unités des nombres que l'on multiplie.
Par exemple, pour déterminer les deux derniers chiffres du produit 1215×603, il suffit d'examiner ceux du produit 15×03, qui est égal à 45. On peut vérifier que $1215 \times 603 = 732\,645$ et que le chiffre des dizaines est bien 4 et celui des unités est bien 5.
Puisque $3^5 = 243$, alors pour déterminer les deux derniers chiffres de 3^{10}, qui est égal à $3^5 \times 3^5$, ou 243×243, il suffit d'examiner ceux de 43×43, ou 1849. Ce sont 49.
Puisque les deux derniers chiffres de 3^{10} sont 49 et que $3^{20} = 3^{10} \times 3^{10}$, alors les deux derniers chiffres de 3^{20} sont ceux de 49×49, ou 2401. Ce sont 01.
Donc, les deux derniers chiffres de 3^{40}, ou $3^{20} \times 3^{20}$, sont 01 (puisque $01 \times 01 = 01$).
De même, les deux derniers chiffres de $(3^{20})^{100}$, ou 3^{2000}, sont 01.
Puisque les deux derniers chiffres de 3^{10} sont 49 et que ceux de 3^5 sont 43, alors ceux de 3^{15}, ou $3^{10} \times 3^5$, sont les mêmes que ceux de 49×43, ou 2107. Ce sont 07.

Donc les deux derniers chiffres de 3^{16}, ou $3^{15} \times 3^1$, sont $07 \times 03 = 21$.
Enfin, les deux derniers chiffres de 3^{2016}, ou $3^{2000} \times 3^{16}$, sont ceux de $01 \times 21 = 21$, soit 21.
Le chiffre des dizaines du nombre 3^{2016} est 2.

Réponse : (B)

25. On ajoute des inconnues au tableau pour faciliter la communication :

				18
	43	f	g	h
		40		j
		k		m
x	n	p	26	q

Les nombres de chaque rangée forment une suite arithmétique de gauche à droite et les nombres de chaque colonne forment une suite arithmétique du haut vers le bas. Pour chacune de ces suites, la *raison* est le nombre que l'on additionne de gauche à droite ou du haut vers le bas pour passer d'un terme au terme suivant.
Soit r la raison de la suite dans la 3e colonne.
Donc $k = 40 + r$ et $p = k + r$, ou $p = 40 + 2r$.
Aussi, $40 = f + r$, d'où $f = 40 - r$.
On considère maintenant la suite dans la 2e rangée. La raison de cette suite est égale à $f - 43$.
Elle est donc égale à $(40 - r) - 43$, c'est-à-dire à $-3 - r$.
Donc :

$$g = f + (-3 - r) = (40 - r) + (-3 - r) = 37 - 2r$$
$$h = g + (-3 - r) = (37 - 2r) + (-3 - r) = 34 - 3r$$

On a donc :

				18
	43	$40 - r$	$37 - 2r$	$34 - 3r$
		40		j
		$40 + r$		m
x	n	$40 + 2r$	26	q

On considère la suite dans la 5e colonne. On obtient la raison de cette suite en soustrayant 18 de $34 - 3r$.
La raison de cette suite est donc égale à $(34 - 3r) - 18$, ou $16 - 3r$.
Dans le reste de cette colonne, on a donc :

$$j = (34 - 3r) + (16 - 3r) = 50 - 6r$$
$$m = (50 - 6r) + (16 - 3r) = 66 - 9dr$$
$$q = (66 - 9r) + (16 - 3r) = 82 - 12r$$

Dans chaque cas, on a ajouté la raison au terme précédent pour obtenir le terme suivant.

Le tableau devient donc :

				18
	43	$40-r$	$37-2r$	$34-3r$
		40		$50-6r$
		$40+r$		$66-9r$
x	n	$40+2r$	26	$82-12r$

Dans la 5e rangée, la différence entre les 4e et 5e termes doit être égale à la différence entre les 5e et 6e termes (cette différence étant égale à la raison de la suite dans cette rangée).
Donc

$$\begin{aligned}
26-(40+2r) &= (82-12r)-26 \\
-14-2r &= 56-12r \\
10r &= 70 \\
r &= 7
\end{aligned}$$

On reporte $r=7$ partout dans le tableau pour obtenir :

				18
	43	33	23	13
		40		8
		47		3
x	n	54	26	-2

On peut maintenant déterminer la valeur de x en procédant à rebours dans la 5e rangée.
On voit que $26-54=-28$ et que $-2-26=-28$. Donc, la suite dans cette rangée a une raison égale à -28.
Donc $n+(-28)=54$, d'où $n=54+28$, ou $n=82$.
De même, $x+(-28)=n$, ou $x+(-28)=82$. Donc $x=82+28$, ou $x=110$.
La somme des chiffres de la valeur de x est égale à $1+1+0$, ou 2.

Réponse : (B)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2015

(7^e et 8^e années – Secondaire I et II)

le mercredi 13 mai 2015

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 mai 2015

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Jeff Anderson
Terry Bae
Steve Brown
Ersal Cahit
Heather Culham
Serge D'Alessio
Frank DeMaio
Janine Dietrich
Jennifer Doucet
Fiona Dunbar
Mike Eden
Barry Ferguson
Judy Fox
Steve Furino
John Galbraith
Sandy Graham
Conrad Hewitt
Angie Hildebrand
Carrie Knoll
Judith Koeller
Bev Marshman
Mike Miniou
Dean Murray
Jen Nelson
J.P. Pretti
Kim Schnarr
Carolyn Sedore
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga
JoAnn Vincent
Tim Zhou

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), St. John's Ravenscourt School, Winnipeg, MB
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
Sarah Garrett, King George P.S., Guelph, ON
John McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
David Switzer, Sixteenth Ave. P.S., Richmond Hill, ON
Rachael Verbruggen, University of Waterloo, Waterloo, ON
Laurissa Werhun, Parkdale C.I., Toronto, ON
Chris Wu, Zion Heights J.H.S., Toronto, ON
Lori Yee, William Dunbar P.S., Pickering, ON

7^e année

1. Le cercle est divisé en 4 régions égales. Puisque 1 des régions est ombrée, $\frac{1}{4}$ du cercle est ombré.
Réponse : (C)

2. On a : $10 \times (5 - 2) = 10 \times 3 = 30$.
Réponse : (D)

3. D'après le diagramme, Phil a parcouru 4 km, Théo a parcouru 6 km, Paul a parcouru 2 km, Amal a parcouru 8 km et Sanjay a parcouru 7 km. Donc, Paul a parcouru la plus petite distance.
Réponse : (C)

4. D'après la balance, 2 rectangles ont la même masse que 6 cercles.
Si on divise les objets en deux piles égales de chaque côté de la balance, on voit que 1 rectangle a la même masse que 3 cercles.
Réponse : (B)

5. Parmi les choix de réponse, la longueur de votre pouce est la plus près de 5 cm.
Réponse : (E)

6. Il y a 100 centimètres dans 1 mètre. Dans 3,5 mètres, il y a donc $3{,}5 \times 100$ cm, ou 350 cm.
Réponse : (A)

7. Le côté du haut a une longueur égale à la somme des longueurs des deux autres côtés horizontaux, soit $2 + 3$, ou 5. Le périmètre de la figure est donc égal à $5 + 5 + 2 + 3 + 3 + 2$, ou 20.
Réponse : (D)

8. Puisque Hanna a compté une moyenne de 13 points par partie pour un total de 312 points, on a $13 + 13 + 13 + \cdots + 13 = 312$, ou $? \times 13 = 312$.
Puisque $312 \div 13 = 24$, alors $24 \times 13 = 312$. Hanna a donc joué 24 parties.
Réponse : (A)

9. On sait que $1 \times 20 = 20$, $2 \times 10 = 20$ et $4 \times 5 = 20$. Les diviseurs positifs de 20 sont donc 1, 2, 4, 5, 10 et 20.
Le nombre 20 a donc 6 diviseurs positifs.
Réponse : (B)

10. Avec 4 comme premier chiffre, on peut former les nombres 479 et 497.
Avec 7 comme premier chiffre, on peut former les nombres 749 et 794.
Avec 9 comme premier chiffre, on peut former les nombres 947 et 974.
En utilisant les chiffres 4, 7 et 9, sans répéter un chiffre dans un nombre, on peut former 6 nombres entiers de trois chiffres.
Réponse : (A)

11. *Solution 1*
À l'école de Gaussville, 40 % des 480 élèves ont voté pour les maths. Or $40\,\% = \frac{40}{100} = \frac{4}{10}$.
Puisque 1 dixième de 480 est égal à 48, alors 4 dixièmes de 480 égalent 4×48, ou 192.
Donc, 192 élèves ont voté pour les maths.

Solution 2
À l'école de Gaussville, 40 % des 480 élèves, ou 0,4 des 480 élèves ont voté pour les maths.
Le nombre d'élèves qui ont voté pour les maths est donc égal à $0{,}4 \times 480$, ou 192.
Réponse : (B)

12. Le premier pli forme 2 épaisseurs de papier. Le 2e pli place 2 couches de 2 épaisseurs l'une sur l'autre pour un total de 4 épaisseurs. De même, le 3e pli place 2 couches de 4 épaisseurs l'une sur l'autre pour un total de 8 épaisseurs.
Donc, chaque pli place 2 couches l'une sur l'autre du nombre précédent dépaisseurs, ce qui double le nombre d'épaisseurs.
Le tableau suivant représente le nombre d'épaisseurs après chacun des 5 premiers plis.

Nombre de plis	0	1	2	3	4	5
Nombre d'épaisseurs	1	2	4	8	16	32

Après 5 plis, la feuille compte 32 épaisseurs.

Réponse : (B)

13. *Solution 1*
Les multiples de 5, entre 1 et 99, sont :

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95$$

Parmi ces multiples, seuls $10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$ et 90 sont pairs.
Il y a donc 9 entiers pairs, entre 1 et 99, qui sont des multiples de 5.

Solution 2
Pour obtenir un multiple pair de 5, il faut multiplier 5 par un entier pair (si on multipliait l'entier impair 5 par un entier impair, on obtiendrait un entier impair).
On a donc : $2 \times 5 = 10$, $4 \times 5 = 20$, $6 \times 5 = 30$, $\ldots$, $18 \times 5 = 90$, $20 \times 5 = 100$. Le plus petit multiple pair de 5 est 10 et le plus grand multiple pair de 5 inférieur à 99 est 90.
Il y a 9 multiples pairs de 5 entre 1 et 99.

Réponse : (C)

14. On considère la valeur de U dans le tableau ci-contre.
Puisqu'il y a un 3 dans la 2e rangée, U ne peut être égal à 3 (chacun des nombres 1, 2 et 3 ne parait qu'une fois dans chaque rangée).
Puisqu'il y a un 1 dans la 3e colonne, U ne peut être égal à 1 (chacun des nombres 1, 2 et 3 ne parait qu'une fois dans chaque colonne).
Puisque U n'est pas égal à 3 ou à 1, alors $U = 2$.
Puisque la 2e rangée contient un 2 et un 3, alors $X = 1$. Puisque la 3e colonne contient un 1 et un 2, alors $Y = 3$.
Donc $X + Y = 1 + 3$, ou $X + Y = 4$.

		1
3	X	U
		Y

Réponse : (E)

15. Le rectangle a une aire de $(5 \times 12)\,\text{cm}^2$, ou $60\,\text{cm}^2$.
Les deux triangles non ombrés sont isométriques. Leur aire est égale à $\frac{1}{2} \times 2 \times 5\,\text{cm}^2$, ou $5\,\text{cm}^2$.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $(60 - 5 - 5)\,\text{cm}^2$, ou $50\,\text{cm}^2$.

Réponse : (E)

16. Une pièce de 25 ¢, une pièce de 10 ¢ et une pièce de 5 ¢ ont une valeur totale de 25 ¢ + 10 ¢ + 5 ¢, ou 40 ¢.
Puisque vous avez le même nombre de pièces de chaque sorte, vous pouvez placer les pièces en piles contenant chacune une pièce de 25 ¢, une pièce de 10 ¢ et une pièce de 5 ¢.
Chaque pile a une valeur de 40 ¢ et puisque $440 \div 40 = 11$, vous avez 11 piles, c'est-à-dire 11 pièces de 25 ¢, 11 pièces de 10 ¢ et 11 pièces de 5 ¢.
Vous avez donc 11 pièces de 10 ¢.
Remarque : On peut vérifier que $11 \times (25$ ¢ $+10$ ¢ $+5$ ¢$) = 11 \times 40$ ¢ $= 440$ ¢ $= 4{,}40$ \$.

Réponse : (B)

17. Au départ, le cube avait 12 arêtes.
Lorsqu'on découpe un coin du cube, on n'enlève aucune de ses arêtes.
En découpant le coin, on ajoute cependant trois nouvelles arêtes, soit celles qui forment la nouvelle face triangulaire. Le nouveau solide a donc $(12+3)$ arêtes, ou 15 arêtes.

Réponse : (D)

18. Pour déterminer l'image du segment PQ, on trouve celles des points P et Q et on les joint.
Puisque P est situé à 3 unités au-dessus de l'axe des abscisses, son image est à 3 unités au-dessous de l'axe et les deux points ont la même abscisse.
Le point T est donc l'image de P par une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
De même, l'image du point Q sera située à 6 unités au-dessous de l'axe des abscisses, Q et son image ayant la même abscisse.
Le point U est donc l'image de Q par une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
Le segment TU est donc l'image du segment PQ par cette réflexion.

Réponse : (B)

19. Puisque les 6 chiffres 142857 sont répétés à l'infini et que $120 = 6 \times 20$, alors le 120^{e} chiffre est un 7 (le 6^{e} chiffre est un 7, le 12^{e} est un 7, le 18^{e} est un 7, $\ldots$, le 120^{e} est un 7).
Donc, le 121^{e} chiffre est un 1, le 122^{e} chiffre est un 4 et le 123^{e} chiffre est un 2.

Réponse : (C)

20. Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors les mesures des deux autres angles du triangle ont une somme de $180° - 45°$, ou 135°.
Puisque ces mesures sont dans un rapport de 4 : 5, on peut les couper en 9 parties égales, soit 4 parties pour le premier angle et 5 parties pour le deuxième.
Puisque $135 \div 9 = 15$, chacune de ces 9 parties mesure 15°. Le premier angle mesure $4 \times 15°$, ou 60°, et le deuxième angle mesure $5 \times 15°$, ou 75°.
On peut vérifier que $60° + 75° + 45° = 180°$.
Le plus grand angle du triangle mesure 75°.

Réponse : (C)

21. On considère la liste L formée du plus grand nombre de chaque rangée, soit $5, 10, 15, 20, 25$. Les cinq nombres de L ont une somme de $5+10+15+20+25$, ou 75. Les nombres de L proviennent de 5 rangées différentes, mais pas de 5 colonnes différentes, car ils proviennent tous des colonnes 1 ou 5. Donc, le plus grand choix de réponse, 75, n'est pas possible.
Remarque : En prenant un nombre de chaque rangée, soit le plus grand nombre de chaque rangée, pour obtenir L, on s'assure que c'est la seule liste qui a une somme de 75.

Le plus grand choix de réponse, après 75, est 73.
Puisque L a une somme de 75 et qu'elle utilise le plus grand nombre de chaque rangée, on peut obtenir une somme de 73 en remplaçant un des nombres de L par un nombre qui lui est inférieur de 2 ou en remplaçant deux des nombres de L par deux nombres qui leur sont inférieurs de 1. (Tout autre remplacement des nombres de L diminuerait la somme davantage et il faudrait remplacer un autre nombre dans une autre rangée par un nombre supérieur pour maintenir la somme à 73, ce qui est impossible, car les nombres de L sont les plus grands de chaque rangée.)
Par exemple, la liste $3, 10, 15, 20, 25$ (un changement à L) a une somme de 73, de même que la liste $4, 9, 15, 20, 25$ (deux changements à L).
Donc pour obtenir une somme de 73 en choisissant exactement un nombre de chaque rangée, il faudrait choisir au moins trois des nombres de L.
Or, puisque deux des nombres de L proviennent de la colonne 1 et que trois des nombres de L proviennent de la colonne 5, il est impossible de remplacer 1 ou 2 nombres de L, tout en

s'assurant que les 5 nombres de la nouvelle liste proviennent des 5 colonnes. Au moins 2 des nombres de la nouvelle liste proviendront de la colonne 1 ou de la colonne 5.
Il est donc impossible d'obtenir une somme de 73.

Le plus grand choix de réponse, après 75 et 73, est 71.
En choisissant les nombres $3, 9, 14, 20, 25$, on obtient une somme de $3 + 9 + 14 + 20 + 25$, ou 71, tout en satisfaisant à la condition qu'il n'y a pas deux nombres qui proviennent d'une même rangée ou d'une même colonne.
Donc, 71 est la plus grande somme que l'on puisse obtenir.
Remarque : D'autres choix de 5 nombres sont possibles pour une somme de 71, tout en satisfaisant à la condition de l'énoncé.

Réponse : (C)

22. *Solution 1*
On considère un carré particulier qui mesure 6 sur 6 et on travaille à rebours pour déterminer les longueurs des côtés du rectangle.
Puisque la largeur du rectangle a été doublée pour obtenir la largeur de 6, elle était de 3 au départ. Puisque la longueur du rectangle a été réduite de moitié pour obtenir la longueur de 6, elle était de 12 au départ.
Le rectangle mesurait donc 3 sur 12.
Le carré a un périmètre de 4×6, d'où $P = 24$. Le rectangle a un périmètre de $2(3 + 12)$, ou 30.
On voit immédiatement que le périmètre du rectangle n'est pas égal à P, à $2P$ ou à $\frac{P}{2}$.
Est-il égal à $\frac{5}{4}P$? On vérifie : $\frac{5}{4}P = \frac{5}{4}(24) = 5 \times \frac{1}{4}(24) = 5 \times 6 = 30$.
Donc, le rectangle avait un périmètre égal à $\frac{5}{4}P$.

Solution 2
Puisque le carré a un périmètre de P et que les quatre côtés ont la même longueur, chaque côté a une longueur de $\frac{1}{4}P$. On travaille à rebours pour déterminer la longueur des côtés du rectangle.
Puisque la largeur du rectangle a été doublée pour obtenir la largeur de $\frac{1}{4}P$, elle était de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}P$, ou $\frac{1}{8}P$ au départ.
Puisque la longueur du rectangle a été réduite de moitié pour obtenir la longueur de $\frac{1}{4}P$, elle était de $2 \times \frac{1}{4}P$, ou $\frac{1}{2}P$ au départ.
Le rectangle avait donc une largeur de $\frac{1}{8}P$ et une longueur de $\frac{1}{2}P$.
Son périmètre était donc égal à $2 \times \frac{1}{8}P + 2 \times \frac{1}{2}P$, ou $\frac{1}{4}P + P$, ou $\frac{5}{4}P$.

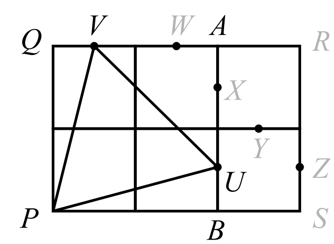
Réponse : (D)

23. *Solution 1*
Tout palindrome de 4 chiffres est de la forme *abba*, a étant un chiffre de 1 à 9 et b étant un chiffre de 0 à 9 (b n'est pas nécessairement différent de a).
Tout palindrome de 5 chiffres est de la forme *abcba*, a étant un chiffre de 1 à 9, b étant un chiffre de 0 à 9 (b n'est pas nécessairement différent de a) et c étant un chiffre de 0 à 9 (c n'est pas nécessairement différent de a ou de b).
Donc pour tout palindrome *abba* de 4 chiffres, il y a 10 valeurs de c pour lesquelles *abcba* est un palindrome de 5 chiffres.
Par exemple si $a = 2$ et $c = 3$, le palindrome 2332 peut être utilisé pour créer 10 palindromes de 5 chiffres, soit 23032, 23132, 23232, 23332, 23432, 23532, 23632, 23732, 23832 et 23932.
Donc pour tout palindrome *abba* de 4 chiffres, il existe exactement 10 palindromes *abcba* de 5 chiffres. Le rapport du nombre de palindromes de 4 chiffres au nombre de palindromes de 5 chiffres est donc de 1 : 10.

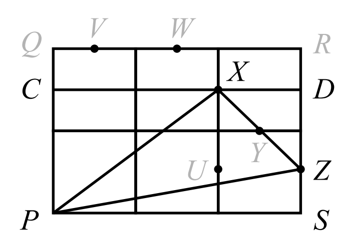
Solution 2
Tout palindrome de 4 chiffres est de la forme $abba$, a étant un chiffre de 1 à 9 et b étant un chiffre de 0 à 9 (b n'est pas nécessairement différent de a).
Il y a 9 choix possibles pour la valeur de a et pour chacun de ces choix, il y a 10 choix possibles pour la valeur de b. En tout, il y a donc 9×10 choix, ou 90 choix pour les deux premiers chiffres ab. Or, chacun de ces choix fixe aussi le choix des deux derniers chiffres (le quatrième chiffre est égal au premier et le troisième chiffre est égal au deuxième).
Il y a donc 90 palindromes de 4 chiffres.
Tout palindrome de 5 chiffres est de la forme $defed$, d étant un chiffre de 1 à 9, e étant un chiffre de 0 à 9 (e n'est pas nécessairement différent de d) et f étant un chiffre de 0 à 9 (f n'est pas nécessairement différent de d ou de e).
Il y a 9 choix possibles pour la valeur de d et pour chacun de ces choix, il y a 10 choix possibles pour la valeur de e. Pour chacun des choix précédents, il y a 10 choix possibles pour la valeur de f. En tout, il y a donc $9 \times 10 \times 10$ choix, ou 900 choix pour les trois premiers chiffres def.
Or, chacun de ces choix fixe aussi le choix des deux derniers chiffres (le cinquième chiffre est égal au premier et le quatrième chiffre est égal au deuxième).
Il y a donc 900 palindromes de cinq chiffres.
Le rapport du nombre de palindromes de 4 chiffres au nombre de palindromes de 5 chiffres est donc de 90 : 900, ou 1 : 10.

Réponse : (E)

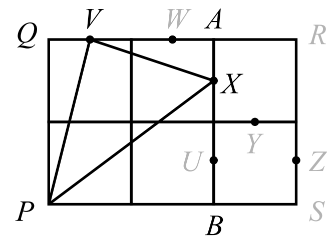
24. On suppose que chacun des six carrés mesure 4 sur 4. On calculera ensuite l'aire des cinq triangles pour déterminer celui qui a la plus grande aire.



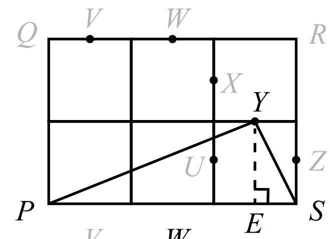
On construit d'abord le triangle PVU et on constate qu'il est contenu dans le carré $QABP$ ci-contre. On peut obtenir l'aire du triangle PVU en soustrayant l'aire des triangles PQV, VAU et PBU de celle du carré $QABP$.
Puisque $QA = 8$ et $AB = 8$, le carré $QABP$ a une aire de 8×8, ou 64.
Puisque $PQ = 8$ et $QV = 2$, le triangle PQV a une aire de $\frac{1}{2} \times 8 \times 2$, ou 8.
Puisque $VA = 6$ et $AU = 6$, le triangle VAU a une aire de $\frac{1}{2} \times 6 \times 6$, ou 18.
Puisque $PB = 8$ et $UB = 2$, le triangle PBU a une aire de $\frac{1}{2} \times 8 \times$, ou 8.
Le triangle PVU a donc une aire de $64 - 8 - 18 - 8$, ou 30.



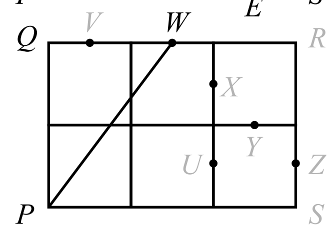
On construit ensuite le triangle PXZ, ainsi que le rectangle $CDSP$ en traçant au point X le segment CD parallèle à PS. Puisque X est le milieu d'un côté d'un carré, C et D sont aussi les milieux de deux côtés de carrés.
On peut obtenir l'aire du triangle PXZ en soustrayant l'aire des triangles PCX, XDZ et PSZ de celle du rectangle $CDSP$.
Puisque $CD = 12$ et $DS = 6$, le rectangle $CDSP$ a une aire de 12×6, ou 72.
Puisque $PC = 6$ et $CX = 8$, le triangle PCX a une aire de $\frac{1}{2} \times 6 \times 8$, ou 24.
Puisque $XD = 4$ et $DZ = 4$, le triangle XDZ a une aire de $\frac{1}{2} \times 4 \times 4$, ou 8.
Puisque $PS = 12$ et $ZS = 2$, le triangle PSZ a une aire de $\frac{1}{2} \times 12 \times 2$, ou 12.
Le triangle PXZ a donc une aire de $72 - 24 - 8 - 12$, ou 28.



On construit le triangle PVX et on constate qu'il est contenu dans le carré $QABP$ ci-contre. On peut obtenir l'aire du triangle PVX en soustrayant l'aire des triangles PQV, VAX et PBX de celle du carré $QABP$.
On a déjà calculé l'aire du carré $QABP$, qui est de 64, et celle du triangle PQV, qui est de 8.
Puisque $VA = 6$ et $AX = 2$, le triangle VAX a une aire de $\frac{1}{2} \times 6 \times 2$, ou 6.
Puisque $PB = 8$ et $XB = 6$, le triangle PBX a une aire de $\frac{1}{2} \times 8 \times 6$, ou 24.
Le triangle PVX a donc une aire de $64 - 8 - 6 - 24$, ou 26.



On construit le triangle PYS et au point Y, on abaisse une perpendiculaire YE à PS, comme dans la figure ci-contre. On a $PS = 12$ et $YE = 4$ (YE est parallèle à RS et sa longueur est donc égale à celle d'un côté d'un carré). Le triangle PYS a donc une aire de $\frac{1}{2} \times 12 \times 4$, ou 24.



On construit le triangle PQW ci-contre. Puisque $PQ = 8$ et $QW = 6$, le triangle PQW a une aire de $\frac{1}{2} \times 8 \times 6$, ou 24.

Les 5 triangles ont une aire respective de 30, 28, 26, 24 et 24.
Le triangle PVU a la plus grande aire.

Réponse : (A)

25. Tous les nombres premiers de deux chiffres sont impairs et pour former un couple inverse de deux nombres premiers de deux chiffres, il faut que les deux chiffres soient impairs (sinon un des deux nombres serait pair).
On remarque aussi que le chiffre 5 ne peut paraitre dans un des deux nombres premiers d'un couple inverse, car un nombre de deux chiffres qui se termine par 5 est divisible par 5 et ne peut donc pas être premier.
On considère donc seulement les nombres premiers impairs suivants pour tenter de former des couples inverses : 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79 et 97.
Les seuls couples inverses sont donc 13 et 31, 17 et 71, 37 et 73, 79 et 97.
(Le nombre 11 ne forme pas un nombre différent lorsqu'on renverse l'ordre de ses chiffres. De plus, si on renverse l'ordre des chiffres de 19, on obtient 91, qui n'est pas premier, puisque $7 \times 13 = 91$.)

Pour chacun de ces couples inverses, on doit déterminer les nombres premiers (différents de ceux du couple) de manière que le produit des trois nombres premiers soit inférieur à 10 000.

Le couple inverse 79 et 97 donne un produit de 79×97, ou 7663.
Or, le plus petit nombre premier est 2 et puisque $2 \times 7663 = 15\,326$, ce qui est supérieur à 10 000, le couple inverse 79 et 97 ne peut satisfaire aux conditions de l'énoncé.

On continue de la même façon avec les trois autres couples inverses, en plaçant les résultats dans le tableau suivant.

Nombre premier	Produit du nombre premier et du couple inverse			
	13 et 31	17 et 71	37 et 73	79 et 97
2	$2 \times 13 \times 31 = 806$	$2 \times 17 \times 71 = 2414$	$2 \times 37 \times 73 = 5402$	supérieur à 10 000
3	$3 \times 13 \times 31 = 1209$	$3 \times 17 \times 71 = 3621$	$3 \times 37 \times 73 = 8103$	
5	$5 \times 13 \times 31 = 2015$	$5 \times 17 \times 71 = 6035$	supérieur à 10 000	
7	$7 \times 13 \times 31 = 2821$	$7 \times 17 \times 71 = 8449$		
11	$11 \times 13 \times 31 = 4433$	supérieur à 10 000		
13	13×13 interdit			
17	$17 \times 13 \times 31 = 6851$			
19	$19 \times 13 \times 31 = 7657$			
23	$23 \times 13 \times 31 = 9269$			
29	supérieur à 10 000			
Total	8	4	2	0

Dans n'importe quelle colonne, on peut s'arrêter dès qu'on obtient un produit supérieur à 10 000, car la ligne suivante utilise un nombre premier plus grand, ce qui donnera un produit encore plus grand.

En tout, le nombre d'entiers inférieurs à 10 000 qui satisfont aux conditions de l'énoncé est égal à $8 + 4 + 2$, ou 14.

Réponse : (B)

8e année

1. On a : $1000 + 200 - 10 + 1 = 1200 - 10 + 1 = 1190 + 1 = 1191$

Réponse : (A)

2. Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure, alors 40 minutes après 10:20, il est 11:00.
Donc, 45 minutes après 10:20, il est 11:05.

Réponse : (E)

3. Parmi les choix de réponse, la longueur de votre pouce est la plus près de 5 cm.

Réponse : (E)

4. D'après le diagramme, Phil a parcouru 4 km, Théo a parcouru 6 km, Paul a parcouru 2 km, Amal a parcouru 8 km et Sanjay a parcouru 7 km.
On place les distances en ordre croissant : Paul, 2 km ; Phil, 4 km ; Théo, 6 km ; Sanjay, 7 km ; Amal, 8 km.
Dans cette liste ordonnée des 5 distances, la distance médiane est la troisième, celle du milieu.
Donc, Théo a parcouru la distance médiane.

Réponse : (B)

5. *Solution 1*
Puisque $x + 3 = 10$, alors $x = 7$, car $7 + 3 = 10$.
Lorsque $x = 7$, $5x$ a une valeur de $5(7)$, ou 35, et $5x + 15$ a donc une valeur de $35 + 15$, ou 50.
Solution 2
Si on multiplie $x + 3$ par 5, on obtient $5 \times (x + 3)$, ou $5 \times x + 5 \times 3$, ou $5x + 15$ (on peut aussi faire $(x + 5) + (x + 5) + (x + 5) + (x + 5) + (x + 5)$, qui est égal à $5x + 15$).
On sait que $x + 3 = 10$. Donc, 5 fois le membre de gauche est égal à 5 fois le membre de droite.
Donc $5 \times (x + 3)$ est égal à 5×10, ou 50.
Donc, $5x + 15$ est égal à 50.

Réponse : (E)

6. Les deux côtés de longueur 4 contribuent $(4 + 4)$ unités, ou 8 unités, au périmètre du rectangle.
Les deux autres côtés contribuent le reste du périmètre, soit $(42 - 8)$ unités, ou 34 unités.
Puisque les deux autres côtés ont la même longueur, chacun mesure $(34 \div 2)$ unités, ou 17 unités.
Donc, le rectangle mesure 4 sur 17. Il a une longueur de 17.

Réponse : (B)

7. Au départ, le bras gauche contient 4 cercles et 2 rectangles et le bras droit contient 10 cercles, la balance étant en équilibre.
Si on enlève quatre cercles de chaque bras, la balance reste en équilibre, puisqu'on enlève la même masse de chaque bras.
Donc, les 2 rectangles qui restent sur le bras gauche ont la même masse que les 6 cercles qui restent sur le bras droit.
Puisque 2 rectangles ont la même masse que 6 cercles, 1 rectangle a la même masse que 3 cercles.

Réponse : (B)

8. *Solution 1*
1 % de 160 cm est égal à $\frac{1}{100}$ de 160 cm, ou 1,60 cm. Donc, 5 % de 160 cm est égal à $5 \times 1{,}60$ cm, ou 8 cm. (On peut aussi faire : 5 % de 160 cm $= \frac{5}{100} \times 160$ cm $= 0{,}05 \times 160$ cm $= 8$ cm)
Donc, la taille d'Alain a augmenté de 8 cm pour atteindre 160 cm + 8 cm, ou 168 cm.
Solution 2
La taille d'Alain a augmenté de 5 % pendant l'été. À la fin de l'été, elle est égale à 105 % de 160 cm, ou $\frac{105}{100} \times 160$ cm, ou $1{,}05 \times 160$ cm, ou 168 cm.

Réponse : (A)

9. Lorsque $x = 4$ et $y = 2$, alors $x+y = 4+2 = 6$, $xy = 4\times 2 = 8$, $x-y = 4-2 = 2$, $x\div y = 4\div 2 = 2$ et $y \div x = 2 \div 4 = \frac{1}{2}$.
Lorsque $x = 4$ et $y = 2$, l'expression $y \div x$ a la plus petite valeur.

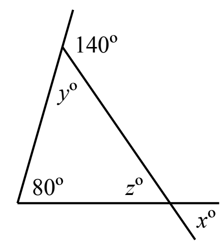
Réponse : (E)

10. *Solution 1*
On évalue le membre de gauche avec 12 pour dénominateur commun : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{3}{12} = \frac{9}{12}$.
Le nombre représenté par $\square$ est donc 9.

Solution 2
On sait que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et que $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$. Donc $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{9}{12}$.
Le nombre représenté par $\square$ est donc 9.

Réponse : (C)

11. Les angles plats mesurent 180°.
Donc $y° + 140° = 180°$. Donc $y = 40$, puisque $40 + 140 = 180$.
Les mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°. Donc $40° + 80° + z° = 180°$. Donc $z = 60$, puisque $40 + 80 + 60 = 180$.
Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Puisque l'angle qui mesure $z°$ est opposé par le sommet à l'angle qui mesure $x°$, alors $x = z = 60$.



Réponse : (C)

12. Puisque le pneu a une circonférence de 1,5 m, alors à chaque rotation du pneu, Sara avance de 1,5 m.
Lorsque Sara parcourt 900 m en vélo, le nombre de rotations de la roue est de $900 \div 1{,}5$, ou 600.

Réponse : (C)

13. Pour déterminer l'image du segment PQ, on trouve celles des points P et Q et on les joint.
Puisque P est situé à 3 unités au-dessus de l'axe des abscisses, son image est à 3 unités au-dessous de l'axe et les deux points ont la même abscisse.
Le point T est donc l'image de P par une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
De même, l'image du point Q sera située à 6 unités au-dessous de l'axe des abscisses, Q et son image ayant la même abscisse.
Le point U est donc l'image de Q par une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
Le segment TU est donc l'image du segment PQ par cette réflexion.

Réponse : (B)

14. Dans le tableau suivant, on détermine la somme des trois billets qui restent dans le portefeuille lorsque chacun des quatre billets est retiré.

Billet retiré	Somme des billets qui restent
5 \$	10 \$+20 \$+50 \$=80 \$
10 \$	5 \$+20 \$+50 \$=75 \$
20 \$	5 \$+10 \$+50 \$=65 \$
50 \$	5 \$+10 \$+20 \$=35 \$

Les quatre billets ont la même probabilité d'être retirés. Donc, les quatre sommes ci-dessus, soit 80 \$, 75 \$, 65 \$ et 35 \$, sont équiprobables.
Deux des sommes sont supérieures à 70 \$.
Donc, la probabilité pour que les trois billets qui restent aient une valeur totale supérieure à 70 \$ est de $\frac{2}{4}$, ou 0,5.

Réponse : (A)

15. Le tableau suivant représente la masse de chaque chiot à la fin de chaque mois.

Mois	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Masse de Victor (kg)	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
Marque de Sancho (kg)	6	8,5	11	13,5	16	18,5	21	23,5	26	28,5	31	33,5	36

Après 12 mois, Sancho a une masse de 36 kg qui est égale à celle de Victor.
(Puisque la masse de Sancho augmente à un taux plus rapide que celle de Victor, c'est la seule fois que les deux chiots auront la même masse.)

Réponse : (D)

16. On doit d'abord déterminer le périmètre du triangle.
Soit x cm la longueur du troisième côté.
Puisque le triangle est rectangle, on a $x^2 = 8^2 + 6^2$ d'après le théorème de Pythagore. Donc $x^2 = 64 + 36$, ou $x^2 = 100$, d'où $x = 10$ (puisque $x > 0$).
Le triangle a donc un périmètre de 10 cm + 8 cm + 6 cm, ou 24 cm.
Le carré a donc un périmètre de 24 cm. Puisque ses côtés ont la même longueur et que $24 \div 4 = 6$, ils mesurent tous 6 cm.
L'aire du carré est donc égale à (6×6) cm^2, ou 36 cm^2.

Réponse : (D)

17. Puisque les 6 chiffres 142857 sont répétés à l'infini et que $120 = 6 \times 20$, alors le 120^e chiffre est un 7 (le 6^e chiffre est un 7, le 12^e est un 7, le 18^e est un 7, ..., le 120^e est un 7).
Donc, le 121^e chiffre est un 1, le 122^e chiffre est un 4 et le 123^e chiffre est un 2.

Réponse : (C)

18. D'après la définition de Δ, on a $p\Delta 3 = p \times 3 + p + 3 = 3p + p + 3 = 4p + 3$.
Puisque $p\Delta 3 = 39$, alors $4p + 3 = 39$. Puisque $36 + 3 = 39$, alors $4p = 36$. Puisque $4 \times 9 = 36$, alors $p = 9$.

Réponse : (C)

19. *Solution 1*
Au départ, il y avait 3 fois plus de garçons que de filles en classe. Donc, pour chaque fille, il y avait 3 garçons. On pouvait donc placer les élèves en groupes de 4, soit 3 garçons et 1 fille. Seuls les choix de réponse (B), (C), (D) et (E) sont divisibles par 4.
Le tableau suivant représente les nombres respectifs de groupes, de filles et de garçons dans la classe pour chacun des choix de réponse.
Situation au départ :

Choix de réponse	(B)	(C)	(D)	(E)
Nombre d'élèves	20	24	32	40
Nombre de groupes	$20 \div 4 = 5$	$24 \div 4 = 6$	$32 \div 4 = 8$	$40 \div 4 = 10$
Nombre de filles	5	6	8	10
Nombre de garçons	15	18	24	30

Situation à la fin :

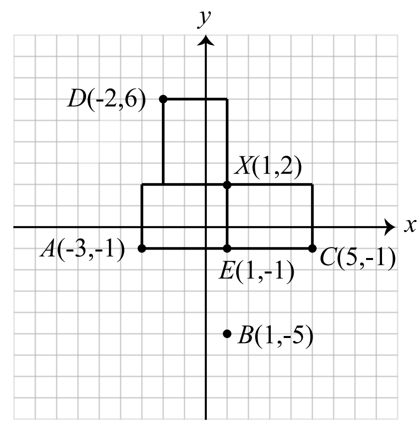
Choix de réponse	(B)	(C)	(D)	(E)
Nombre de filles	$5 - 4 = 1$	$6 - 4 = 2$	$8 - 4 = 4$	$10 - 4 = 6$
Nombre de garçons	$15 - 4 = 11$	$18 - 4 = 14$	$24 - 4 = 20$	$30 - 4 = 26$

D'après l'énoncé, il y a 5 fois plus de garçons que de filles à la fin. Seul le choix de réponse (D) satisfait à cette condition ($20 = 5 \times 4$).
Donc, au départ, il y avait 32 élèves dans la classe.

Solution 2
Au départ, il y a 3 fois plus de garçons que de filles dans la classe. S'il y a x filles, il y a $3x$ garçons.
Lorsque 4 garçons quittent la classe, il reste $3x - 4$ garçons.
Lorsque 4 filles quittent la classe, il reste $x - 4$ filles.
À ce moment, il y a 5 fois plus de garçons que de filles.
On a donc : Nombre de garçons $= 5 \times$ Nombre de filles.
Donc $3x - 4 = 5(x - 4)$, d'où $3x - 4 = 5x - 20$. Donc $-4 = 5x - 20 - 3x$, ou $-4 + 20 = 2x$, d'où $2x = 16$, ou $x = 8$.
Il y avait donc 8 filles dans la classe au départ. Le nombre de garçons était égal à 3×8, ou 24.
Au départ, il y avait $8 + 24$ élèves, ou 32 élèves dans la classe.

RÉPONSE : (D)

20. *Solution 1*
Soit X le sommet $(1, 2)$ du rectangle. Les points des choix de réponse sont nommés A, B, C, D et E, comme dans le plan ci-contre.



Le point $E(1, -1)$ est 3 unités au-dessous du point X (puisque les deux points ont la même abscisse et que leur ordonnée diffère de 3). Donc, $E(1, -1)$ pourrait être le sommet d'un rectangle 3 sur 4 ayant aussi X pour sommet (X et E seraient des sommets adjacents du rectangle).

Le point $C(5, -1)$ est situé à 3 unités au-dessous et à 4 unités à la droite du point X (puisque leurs ordonnées diffèrent de 3 et leurs abscisses diffèrent de 4). Donc, $C(5, -1)$ pourrait être le sommet d'un rectangle 3 sur 4 ayant aussi X pour sommet (X et C seraient des sommets opposés du rectangle).

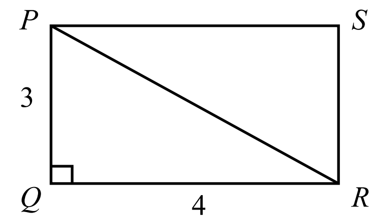
Le point $A(-3, -1)$ est situé à 3 unités au-dessous et à 4 unités à la gauche du point X (puisque leurs ordonnées diffèrent de 3 et leurs abscisses diffèrent de 4). Donc, $A(-3, -1)$ pourrait être le sommet d'un rectangle 3 sur 4 ayant aussi X pour sommet (X et A seraient des sommets opposés du rectangle).

Le point $D(-2, 6)$ est situé à 4 unités au-dessus et à 3 unités à la gauche du point X (puisque leurs ordonnées diffèrent de 4 et leurs abscisses diffèrent de 3). Donc, $D(-2, 6)$ pourrait être le sommet d'un rectangle 3 sur 4 ayant aussi X pour sommet (X et D seraient des sommets opposés du rectangle).

Il reste le point $B(1, -5)$. Puisque les quatre autres choix de réponse peuvent être les sommets d'un rectangle ayant aussi X pour sommet, alors $(1, -5)$ sont les coordonnées d'un point qui ne peut l'être.
Le point $B(1, -5)$ est situé à 7 au-dessous du point X (puisque leurs ordonnées diffèrent de 7). Comment peut-on montrer qu'il est impossible pour deux sommets d'un rectangle 3 sur 4 d'être à 7 unités l'un de l'autre ? (Voir la Solution 2).

Solution 2

Deux sommets adjacents d'un rectangle 3 sur 4, $PQRS$, sont distants de 3 ou de 4 unités (comme P et Q ou Q et R, ci-contre).



La distance entre deux sommets opposés d'un tel rectangle peut être déterminée par le théorème de Pythagore (Par exemple, la longueur de la diagonale PR peut être déterminée par le théorème de Pythagore.)
Le triangle PQR est un triangle rectangle remarquable 3-4-5.
Donc, $PR = 5$.
La plus grande distance possible entre deux sommets d'un rectangle 3 sur 4 est donc de 5 unités.
Dans la Solution 1, on a vu que la distance entre les points $X(1, 2)$ et $B(1, -5)$ est de 7 unités.
Donc, les coordonnées $(1, -5)$ ne peuvent être les coordonnées d'un rectangle 3 sur 4 qui a aussi $X(1, 2)$ pour sommet.

Réponse : (B)

21. Dans le carré $PQRS$, $PS = SR$ et puisque M et N sont les milieux respectifs de ces côtés, alors $MS = SN$.
L'aire du triangle SMN est égale à $\frac{1}{2} \times MS \times SN$.
Puisque cette aire est égale à 18, alors $\frac{1}{2} \times MS \times SN = 18$, d'où $MS \times SN = 36$, ou $MS = SN = 6$ (puisqu'ils ont la même longueur).
La longueur du côté PS, du carré est deux fois celle de MS, puisque M est le milieu de PS.
Donc $PS = SR = RQ = QP = 12$.
L'aire du triangle QMN est égale à l'aire du carré $PQRS$ moins l'aire des triangles, SMN, NRQ et QPM.
L'aire du carré $PQRS$ est égale à $PS \times SR$, ou 12×12, ou 144.
L'aire du triangle SMN est égale à 18, selon l'énoncé.
L'aire du triangle NRQ est égale à $\frac{1}{2} \times QR \times RN$, ou $\frac{1}{2} \times 12 \times 6$, ou 36 (puisque $SN = RN = 6$).
L'aire du triangle QPM est égale à $\frac{1}{2} \times QP \times PM$, ou $\frac{1}{2} \times 12 \times 6$, ou 36.
L'aire du triangle QMN est donc égale à $144 - 18 - 36 - 36$, ou 54.

Réponse : (E)

22. *Solution 1*
On procède par essais systématiques à partir des choix de réponse.
Dans la première ligne du tableau, il y a 10 billets pour ainés. Il y a donc $(120 - 10)$ billets, ou 110 billets, pour les adultes et les enfants. Puisque le nombre de billets pour adultes est le même que le nombre de billets pour enfants, il y a $110 \div 2$ billets, ou 55 billets pour adultes et 55 billets pour enfants.

N^bre de billets pour ainés	N^bre de billets restants	N^bre de billets pour adultes	N^bre de billets pour enfants	Total des recettes
10	110	55	55	$10 \times 10\,\$ + 55 \times 12\,\$ + 55 \times 6\,\$ = 1090\,\$$
20	100	50	50	$20 \times 10\,\$ + 50 \times 12\,\$ + 50 \times 6\,\$ = 1100\,\$$

La deuxième ligne du tableau satisfait aux conditions de l'énoncé. On a donc vendu 20 billets pour ainés.

Solution 2
Soit a le nombre de billets vendus pour adultes.
Puisque chaque billet pour adultes coute 12 \$, les a billets pour adultes ont rapporté $12 \times a$ dollars, ou $12a$ dollars.
Puisqu'on a vendu le même nombre de billets pour adultes que pour enfants, on a vendu a billets pour enfants. Puisque chaque billet pour enfants coute 6 \$, les a billets pour enfants ont rapporté $6 \times a$ dollars, ou $6a$ dollars.
En tout, les billets pour adultes et les billets pour enfants ont rapporté $(12a + 6a)$ dollars, ou $18a$ dollars.

Puisqu'on a vendu 120 billets en tout et qu'on a vendu a billets pour adultes et a billets pour enfants, alors les $120 - 2a$ billets qui restent ont été vendus aux ainés.
Puisque chaque billet pour ainé coute 10 \$, alors les $(120 - 2a)$ billets pour ainés ont rapporté $10 \times (120 - 2a)$ dollars.
En tout, la vente des billets a rapporté $10 \times (120 - 2a) + 18a$ dollars.

Or, on sait que cette vente a rapporté 1100 \$. Donc $10 \times (120 - 2a) + 18a = 1100$.
On a donc $10 \times 120 - 10 \times 2a + 18a = 1100$, ou $1200 - 20a + 18a = 1100$, d'où $1200 - 2a = 1100$.
Donc $2a = 100$, ou $a = 50$.
Puisqu'on a vendu $120 - 2a$ billets pour ainés, ce nombre est égal à $120 - 2(50)$, ou $120 - 100$, ou 20.

On peut vérifier :
Puisque $a = 50$, on a vendu 50 billets pour adultes et 50 billets pour enfants. On a aussi vendu 20 billets pour ainés.
Le nombre total de billets vendus est donc égal à $50 + 50 + 20$, ou 120, ce qui correspond à l'énoncé.
Les 50 billets pour adultes ont rapporté 50×12 \$, soit 600 \$.
Les 50 billets pour enfants ont rapporté 50×6 \$, soit 300 \$.
Les 20 billets pour ainés ont rapporté 20×10 \$, soit 200 \$.
En tout, les billets ont rapporté 600 \$ + 300 \$ + 200 \$, ou 1100 \$, ce qui correspond à l'énoncé.

Réponse : (B)

23. Les entiers $4, 4, x, y, 13$ sont placés en ordre croissant. Donc $4 \leq x$ et $x \leq y$ et $y \leq 13$.
La somme des cinq entiers est égale à $4 + 4 + x + y + 13$, ou $21 + x + y$. La moyenne de ces cinq entiers est donc égale à $\dfrac{21 + x + y}{5}$.
Puisque la moyenne doit être un entier, $21 + x + y$ doit être divisible par 5, c'est-à-dire que $21 + x + y$ doit être un multiple de 5.
Quelle est la plus petite valeur possible de $21 + x + y$?
Puisque les entiers sont en ordre croissant, la plus petite valeur possible de x est 4, de même que celle de y. C'est-à-dire que les cinq entiers pourraient être 4, 4, 4, 4, 13. Ainsi la plus petite valeur possible de $21 + x + y$ est $21 + 4 + 4$, ou 29.
Quelle est la plus grande valeur possible de $21 + x + y$?
Puisque les entiers sont en ordre croissant, la plus grande valeur possible de y est 13, de même que celle de x. C'est-à-dire que les cinq entiers pourraient être 4, 4, 13, 13, 13. Ainsi la plus grande valeur possible de $21 + x + y$ est $21 + 13 + 13$, ou 47.
Les multiples de 5 entre 29 et 47 sont 30, 35, 40 et 45.

Lorsque $21 + x + y = 30$, alors $x + y = 9$.
Le seul couple (x, y) pour lequel $4 \leq x$ et $x \leq y$ et $y \leq 13$ et $x + y = 9$ est le couple $(4, 5)$.
On recommence pour les multiples 35, 40 et 45 en remplissant le tableau suivant.

Valeur de $21 + x + y$	Valeur de $x + y$	Couples (x, y) où $4 \leq x$ et $x \leq y$ et $y \leq 13$
30	$30 - 21 = 9$	$(4, 5)$
35	$35 - 21 = 14$	$(4, 10), (5, 9), (6, 8), (7, 7)$
40	$40 - 21 = 19$	$(6, 13), (7, 12), (8, 11), (9, 10)$
45	$45 - 21 = 24$	$(11, 13), (12, 12)$

Il y a 11 couples (x, y) possibles pour que la moyenne des cinq entiers $4, 4, x, y, 13$ soit un entier.

Réponse : (E)

24. Les deux coureurs se croisent à toutes les 36 secondes.
Donc en 36 secondes, les deux coureurs parcourent une distance totale qui est égale à un tour de piste. Cette distance est constante, peu importe la vitesse respective des coureurs.
Plus la vitesse constante du premier coureur est grande, plus celle du deuxième coureur est petite, car ensemble, ils doivent faire l'équivalent d'un tour de piste en 36 secondes.
De même, plus la vitesse constante du premier coureur est petite, plus celle du deuxième coureur est grande, car ensemble, ils doivent faire l'équivalent d'un tour de piste en 36 secondes.

On sait que le temps que met le premier coureur pour faire un tour de piste est un nombre de secondes entre 80 et 100.
S'il courait le plus vite possible de manière à pouvoir faire un tour de piste en 80 secondes, alors le deuxième coureur courrait le plus lentement possible.
Soit t_{max} le nombre maximal de secondes que le deuxième coureur mettrait pour faire un tour de piste.
De même, si le premier coureur courait le plus lentement possible de manière à pouvoir faire un tour de piste en 100 secondes, alors le deuxième coureur courrait le plus vite possible.
Soit t_{min} le nombre minimal de secondes que le deuxième coureur mettrait pour faire un tour de piste.

<u>On détermine la valeur de t_{max}</u>

On sait que t_{max} est le nombre de secondes que mettrait le deuxième coureur pour faire un tour de piste lorsque le premier coureur peut faire un tour de piste en 80 secondes.
Dans ces conditions, en 36 secondes, le premier coureur parcourt $\frac{36}{80}$ d'un tour de piste, ou $\frac{9}{20}$ d'un tour de piste.
Pendant ces 36 secondes, les deux coureurs parcourent une distance égale à un tour de piste. Le deuxième coureur parcourt donc $\frac{11}{20}$ d'un tour de piste en 36 secondes. Pour obtenir le temps pour un tour de piste, il faut diviser par $\frac{11}{20}$, ou multiplier par $\frac{20}{11}$. Le deuxième coureur mettrait donc $\frac{20}{11} \times 36$ secondes, ou $\frac{720}{11}$ secondes pour compléter un tour de piste à cette vitesse.
Donc $t_{max} = \frac{720}{11} = 65{,}\overline{45}$.

<u>On détermine la valeur de t_{min}</u>

On sait que t_{min} est le nombre de secondes que mettrait le deuxième coureur pour faire un tour de piste lorsque le premier coureur peut faire un tour de piste en 100 secondes.
Dans ces conditions, en 36 secondes, le premier coureur parcourt $\frac{36}{100}$ d'un tour de piste, ou $\frac{9}{25}$ d'un tour de piste.
Pendant ces 36 secondes, les deux coureurs parcourent une distance égale à un tour de piste. Le

deuxième coureur parcourt donc $1 - \frac{9}{25}$ d'un tour de piste, ou $\frac{16}{25}$ d'un tour de piste.
Pour obtenir le temps pour un tour de piste, il faut diviser par $\frac{16}{25}$, ou multiplier par $\frac{25}{16}$. Le deuxième coureur mettrait donc $\frac{25}{16} \times 36$ secondes, ou $\frac{900}{16}$ secondes pour compléter un tour de piste à cette vitesse.
Donc $t_{min} = \frac{900}{16} = 56{,}25$.

On détermine le produit de la plus petite et de la plus grande des valeurs entières de t

Puisque le deuxième coureur complète un tour de piste en au plus $65{,}\overline{45}$ secondes, la plus grande valeur entière possible de t est de 65 secondes.
Puisque le deuxième coureur complète un tour de piste en au moins 56,25 secondes, la plus petite valeur entière possible de t est de 57 secondes.
Le produit de ces deux valeurs est égal à 57×65, ou 3705.

Réponse : (A)

25. Soit S la somme alternée de l'entier de 7 chiffres $abcdefg$. Donc $S = a - b + c - d + e - f + g$.
Les termes de cette somme peuvent être regroupés en deux parties, soit ceux qui augmentent la somme et ceux qui la diminuent.
On a alors $S = (a + c + e + g) - (b + d + f)$.
Soit A la somme des 4 termes qui augmentent la somme S, c'est-à-dire que $A = a + c + e + g$.
De même, soit D la somme des 3 termes qui diminuent la somme S, c'est-à-dire que $D = b+d+f$.
Puisque $S = (a + c + e + g) - (b + d + f)$, alors $S = A - D$.

On détermine la plus grande valeur possible de S en choisissant les quatre plus grands chiffres, soit $4, 5, 6, 7$ (dans n'importe quel ordre), pour former A et en choisissant les trois plus petits entiers, soit $1, 2, 3$ (dans n'importe quel ordre), pour former D.
La plus grande somme alternée possible est donc $S = (4 + 5 + 6 + 7) - (1 + 2 + 3)$, ou $S = 16$.
On détermine la plus petite valeur possible de S en choisissant les quatre plus petits chiffres, soit $1, 2, 3, 4$ (dans n'importe quel ordre) pour former A, et en choisissant les trois plus grands chiffres, soit $5, 6, 7$ (dans n'importe quel ordre), pour former D.
La plus petite somme alternée possible est donc $S = (1 + 2 + 3 + 4) - (5 + 6 + 7)$, ou $S = -8$.
Puisque S doit être divisible par 11 (avec $S \geq -8$ et $S \leq 16$), alors $S = 11$ ou $S = 0$.
La somme des entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 est égale à 28. Puisque chacun des entiers contribue à A ou à D, alors $A + D = 28$.

1er cas : La somme alternée est égale à 11, c.-à-d. que $S = 11$

Puisque $S = 11$ et que $S = A - D$, alors $A - D = 11$. Puisque $A - D$ est égal à 11 (un nombre impair), alors A est pair et D est impair, ou A est impair et D est pair, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent être pairs tous les deux ou impairs tous les deux (de façon générale, la différence de deux entiers est impaire si un des entiers est pair et l'autre est impair).
Dans ce cas, la somme de A et D doit aussi être impaire. Or $A + D = 28$, ce qui est un nombre pair.
On a donc une contradiction et il est donc impossible que $S = 11$.
Il n'existe donc aucun entier de 7 chiffres, formé des entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7, dont la somme alternée est égale à 11.

2e cas : La somme alternée est égale à 0, c.-à-d. que $S = 0$

Puisque $S =$ et que $S = A - D$, alors $A = D$.

Puisque $A + D = 28$, alors $A = D = 14$.
On cherche tous les groupes de trois chiffres, parmi les chiffres de 1 à 7, dont la somme est égale à 14, c'est-à-dire $D = 14$.
Il y a quatre groupes possibles : $(7, 6, 1), (7, 5, 2), (7, 4, 3)$, et $(6, 5, 3)$.
Dans chaque cas, les quatre chiffres qui n'ont pas été choisis, soit $(2, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 6), (1, 2, 5, 6)$, et $(1, 2, 4, 7)$, ont aussi une somme de 14 et on a $A = 14$.
Le tableau suivant résume ces résultats :

4 chiffres pour lesquels $A = 14$	3 chiffres pour lesquels $D = 14$	2 exemples d'entiers de 7 chiffres à partir de ces chiffres
$2, 3, 4, 5$	$7, 6, 1$	$2736415, 3126475$
$1, 3, 4, 6$	$7, 5, 2$	$1735426, 6745321$
$1, 2, 5, 6$	$7, 4, 3$	$2714536, 5763241$
$1, 2, 4, 7$	$6, 5, 3$	$4615237, 7645231$

On considère la première rangée du tableau.
Chaque arrangement des 4 chiffres $2, 3, 4, 5$ avec chaque arrangement des 3 chiffres $7, 6, 1$ (les chiffres étant placés en alternance) donne un entier de 7 chiffres dont la somme alternée est égale à 0.
Deux des possibilités sont données (on peut vérifier que $S = 0$ dans chaque cas).
Le nombre d'arrangements des 4 chiffres de la 1re colonne est égal à $4 \times 3 \times 2 \times 1$, ou 24 (4 choix pour le premier chiffre, 3 choix pour le deuxième, 2 choix pour le troisième et 1 choix pour le dernier). De même, le nombre d'arrangements des 3 chiffres de la 2e colonne est égal à $3 \times 2 \times 1$, ou 6. Pour chacun des 24 arrangements des chiffres de la 1re colonne, il y a 6 arrangements des chiffres de la 2e colonne, pour un total de 24×6 arrangements, ou 144 arrangements.
Dans chacun de ces cas, $A = D = 14$ et puisque $S = A - D$, alors $S = 0$. Chacun des 144 entiers obtenus est donc divisible par 11.
De même, il existe 144 entiers divisibles par 11 que l'on peut obtenir avec les chiffres des trois autres rangées du tableau.
En utilisant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7, on peut donc former 4×144 entiers, ou 576 entiers divisibles par 11.

En plaçant les sept chiffres au hasard, le nombre d'entiers que l'on peut former est égal à $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, ou 5040.
La probabilité pour que l'entier ainsi formé soit divisible par 11 est donc égale à $\frac{576}{5040}$, ou $\frac{4}{35}$.

Réponse : (E)

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2014

(7e et 8e années – Secondaire I et II)

le mercredi 14 mai 2014

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 15 mai 2014

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

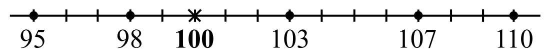
7^e année

1. On a : $(4 \times 3) + 2 = 12 + 2 = 14$

RÉPONSE : (C)

2. *Solution 1*

On place les cinq nombres, ainsi que 100, sur une droite numérique.
Parmi les choix de réponse, les deux nombres les plus près de 100 sont 98 et 103.
Puisque 98 est à 2 unités de 100 et que 103 est à 3 unités de 100, alors 98 est le plus près de 100.



Solution 2

On calcule la différence positive entre 100 et chacun des choix de réponse.
La différence positive la plus petite correspondra au nombre le plus près de 100.

Choix de réponse	98	95	103	107	110
Différences positives	$100 - 98 = 2$	$100 - 95 = 5$	$103 - 100 = 3$	$107 - 100 = 7$	$110 - 100 = 10$

La plus petite différence est 2, ce qui correspond au nombre le plus près de 100, soit 98.

RÉPONSE : (A)

3. Puisque cinq fois le nombre est égal à 100, le nombre est égal à 100 divisé par cinq. Le nombre est égal à $100 \div 5$, ou 20.

RÉPONSE : (E)

4. Le disque contient six secteurs égaux et deux de ces secteurs contiennent la lettre Q.
Puisque les secteurs sont égaux, la probabilité pour que la flèche s'arrête dans n'importe quel secteur est la même pour chacun.
La probabilité pour que la flèche s'arrête dans un secteur qui contient la lettre Q est donc de $\frac{2}{6}$.

RÉPONSE : (D)

5. Chaque cuillerée de nourriture peut nourrir 8 poissons rouges.
Donc, 4 cuillerées de nourriture peuvent nourrir 4×8 poissons, ou 32 poissons.

RÉPONSE : (E)

6. Le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{15}{25}$ sont divisibles par 5.
On a donc $\frac{15}{25} = \frac{15 \div 5}{25 \div 5} = \frac{3}{5}$. Donc, la fraction $\frac{15}{25}$ est équivalente à $\frac{3}{5}$.

RÉPONSE : (C)

7. Le plus grand nombre de deux chiffres qui est un multiple de 7 est 7×14, ou 98.
Il y a donc 14 multiples de 7 inférieurs à 100.
Or, ceci inclut le nombre 7×1, ou 7, qui n'a pas deux chiffres.
Il y a donc $14 - 1$ entiers, ou 13 entiers de deux chiffres qui sont des multiples de 7.
(Ces 13 nombres sont $14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91$ et 98.)

RÉPONSE : (E)

8. *Solution 1*

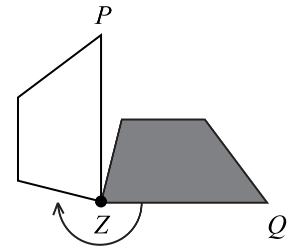
Le membre de gauche de l'équation est égal à $9210 - 9124$, ou 86.
Le membre de droite de l'équation, $210 - \square$, doit aussi être égal à 86.
Puisque $210 - 124 = 86$, la valeur représentée par $\square$ est 124.

Solution 2

Puisque $9210 - 9124 = (9000 + 210) - (9000 + 124) = 9000 - 9000 + 210 - 124 = 210 - 124$, alors a valeur représentée par $\square$ est 124.

RÉPONSE : (D)

9. L'angle PZQ est formé par le côté inférieur ZQ du quadrilatère ombré et l'image ZP de ce côté par la rotation. L'angle mesure environ 90°.
La transformation qui déplace le quadrilatère ombré jusqu'au quadrilatère non ombré est une rotation de centre Z et l'angle de la rotation est l'angle rentrant PZQ.
La somme des mesures de l'angle saillant PZQ et de l'angle rentrant PZQ est égale à 360°, car ces angles forment un angle plein.
L'angle rentrant PZQ mesure environ $360° - 90°$, ou 270°.
L'angle de rotation est donc d'environ 270°.



Réponse : (B)

10. Dans le tableau, on évalue chaque expression en tenant compte de la priorité des opérations.

Expression	Valeur
(A) $3 - 4 \times 5 + 6$	$3 - 20 + 6 = -17 + 6 = -11$
(B) $3 \times 4 + 5 \div 6$	$12 + 5 \div 6 = 12 + \frac{5}{6} = 12\frac{5}{6}$
(C) $3 + 4 \times 5 - 6$	$3 + 20 - 6 = 23 - 6 = 17$
(D) $3 \div 4 + 5 - 6$	$\frac{3}{4} + 5 - 6 = 5\frac{3}{4} - 6 = \frac{23}{4} - \frac{24}{4} = -\frac{1}{4}$
(E) $3 \times 4 \div 5 + 6$	$12 \div 5 + 6 = \frac{12}{5} + 6 = 2\frac{2}{5} + 6 = 8\frac{2}{5}$

Seule l'expression $3 + 4 \times 5 - 6$ a une valeur de 17.

Réponse : (C)

11. *Solution 1*
Puisque chaque nombre de l'ensemble est entre 0 et 1, le chiffre des dixièmes contribue davantage à sa valeur que les autres chiffres.
Parmi les nombres de l'ensemble, le plus grand chiffre des dixièmes est 4. Donc, 0,43 est le plus grand nombre de l'ensemble.
Le plus petit chiffre des dixièmes est 0. Donc, 0,034 est le plus petit nombre de l'ensemble.
Donc, la somme du plus grand et du plus petit nombre de l'ensemble est égale à $0{,}034 + 0{,}43$, ou 0,464.

Solution 2
On écrit les nombres sous forme de millièmes. Les nombres sont donc 0,340 ; 0,304 ; 0,034 et 0,430. En ordre croissant, on a 0,034 ; 0,304 ; 0,340 ; 0,430. Donc, la somme du plus grand et du plus petit nombre de l'ensemble est égale à $0{,}034 + 0{,}43$, ou 0,464.

Réponse : (D)

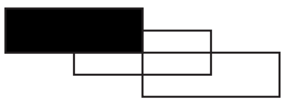
12. Les deux diagonales se coupent en leur milieu au milieu du carré.
Les diagonales coupent donc le carré en quatre triangles identiques.
Donc, la partie ombrée, qui est un de ces triangles, a une aire égale à un quart de l'aire du carré.
Puisque l'aire du carré est égale à 8×8 cm^2, ou 64 cm^2, la partie ombrée a une aire de 64 cm$^2 \div 4$, ou 16 cm^2.

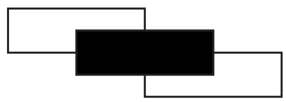
Réponse : (C)

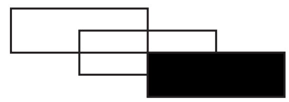
13. La somme des nombres de la première colonne est égale à $13 + 14 + 9$, ou 36.
Puisque la somme des nombres de chaque rangée et de chaque colonne est la même, la somme des nombres de la deuxième rangée est égale à 36.
Donc $14 + x + 10 = 36$, ou $x + 24 = 36$, d'où $x = 12$.

Réponse : (E)

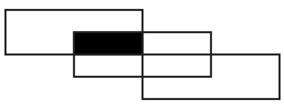
14. On compte le nombre de rectangles en cherchant d'abord les rectangles qui ont les mêmes dimensions.
Les plus grands rectangles dans la figure ont à peu près les mêmes dimensions et chevauchent deux par deux.
Il y a trois tels rectangles, indiqués en noir ci-dessous.

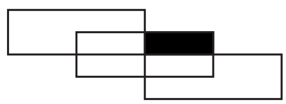

Rectangle 1

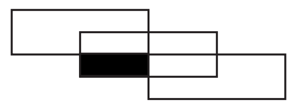

Rectangle 2

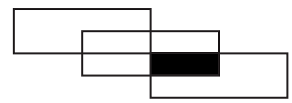

Rectangle 3

Le rectangle 2 (ci-dessus) est formé de 4 petits rectangles.
Ils sont indiqués en noir ci-dessous. On les nomme rectangles $4, 5, 6, 7$.

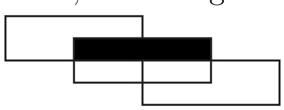

Rectangle 4

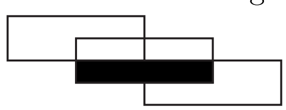

Rectangle 5


Rectangle 6

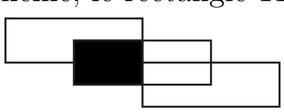

Rectangle 7

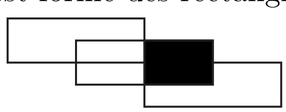
Le rectangle 8 ci-dessous est formé des rectangles 4 et 5 ci-dessus.
De même, le rectangle 9 est formé des rectangles 6 et 7.


Rectangle 8


Rectangle 9

Le rectangle 10 ci-dessous est formé des rectangles 4 et 6.
De même, le rectangle 11 est formé des rectangles 5 et 7.

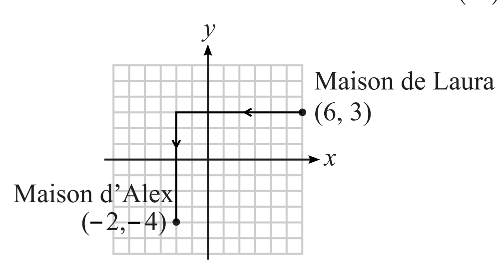

Rectangle 10


Rectangle 11

On a tenu compte de tous les rectangles possibles.
Il y a donc 11 rectangles de toutes grandeurs dans la figure.

Réponse : (A)

15. La partie horizontale de la translation correspond à la différence entre l'abscisse de la maison de Laura, soit 6, et celle de la maison d'Alex, soit -2. La distance parcourue à l'horizontale est égale à $6 - (-2)$, ou $6 + 2$, ou 8.
La partie verticale de la translation correspond à la différence entre l'ordonnée de la maison de Laura, soit 3, et celle de la maison d'Alex, soit -4. La distance parcourue à la verticale est égale à $3 - (-4)$, ou $3 + 4$, ou 7.
Pour se rendre de la maison de Laura à celle d'Alex, il faut se déplacer vers la gauche et vers le bas.
La translation qu'il faut effectuer est donc de 8 unités vers la gauche et de 7 unités vers le bas.



Réponse : (D)

16. D'après le diagramme, Renée a compté 8 points dans la 1$^{\text{re}}$ joute, 7 points dans la 2$^{\text{e}}$ joute, 20 points dans la 3$^{\text{e}}$ joute, 7 points dans la 4$^{\text{e}}$ joute et 18 points dans la 5$^{\text{e}}$ joute.
La moyenne des points comptés par joute est donc égale à $\frac{8+7+20+7+18}{5}$, ou $\frac{60}{5}$, ou 12.
Les points comptés par joute, en ordre croissant, sont $7, 7, 8, 18, 20$. La médiane est le nombre du milieu, soit 8.
La différence entre la médiane et la moyenne des points comptés par joute est donc égale à $12-8$, ou 4.

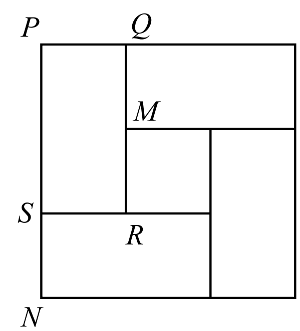
Réponse : (D)

17. *Solution 1*
Puisque PQR est un segment de droite, alors $\angle PQR = 180°$.
Puisque $\angle SQP + \angle SQR = 180°$, alors $\angle SQR = 180° - \angle SQP$, d'où $\angle SQR = 180° - 75°$, ou $\angle SQR = 105°$.
Puisque les mesures d'angles d'un triangle ont une somme de $180°$, alors
$\angle QSR + \angle SQR + \angle QRS = 180°$, d'où $\angle QSR = 180° - \angle SQR - \angle QRS$, ou
$\angle QSR = 180° - 105° - 30°$, ou $\angle QSR = 45°$.

Solution 2
La mesure d'un angle extérieur d'un triangle est égale à la somme des mesures des deux angles intérieurs non adjacents.
Puisque l'angle SQP est un angle extérieur du triangle SQR et que les deux angles intérieurs non adjacents sont les angles QSR et QRS, alors $\angle SQP = \angle QSR + \angle QRS$.
Donc $75° = \angle QSR + 30°$, d'où $\angle QSR = 75° - 30°$, ou $\angle QSR = 45°$.

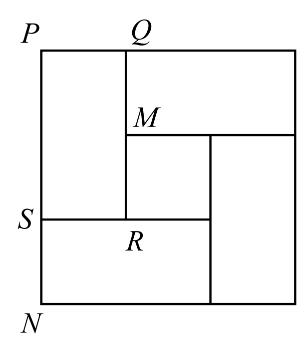
Réponse : (E)

18. *Solution 1*



Le grand carré extérieur a une aire de 9 cm^2. Ses côtés ont donc une longueur de 3 cm (puisque $3 \times 3 = 9$). Donc $PN = 3$ cm.
Le petit carré a une aire de 1 cm^2. Ses côtés ont donc une longueur de 1 cm (puisque $1 \times 1 = 1$). Donc $MR = 1$ cm.
Puisque $PN = 3$ cm, alors $PS+SN = 3$ cm. Donc $QR+SN = 3$ cm (puisque $QR = PS$).
Or $QR = QM + MR$. Donc $QM + MR + SN = 3$ cm, ou $QM + 1$ cm $+ SN = 3$ cm (puisque $MR = 1$ cm).
D'après cette dernière équation, on a $QM + SN = 2$ cm.
Puisque QM et SN sont des petits côtés de rectangles identiques, alors $QM = SN = 1$ cm.
Puisque $PS + SN = 3$ cm, alors $PS + 1$ cm $= 3$ cm, d'où $PS = 2$ cm.
Puisque les rectangles sont identiques, ils mesurent tous 1 cm sur 2 cm.
Chacun a donc un périmètre égal à $2(1$ cm $+ 2$ cm$)$, ou 6 cm.

Solution 2



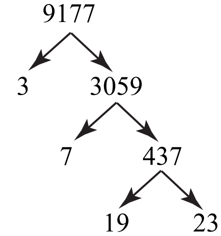
Le grand carré extérieur a une aire de 9 cm^2. Ses côtés ont donc une longueur de 3 cm (puisque $3 \times 3 = 9$). Donc $PN = 3$ cm.
Puisque $PN = 3$ cm, alors $PS + SN = 3$ cm.
Puisque PQ et SN sont des petits côtés de rectangles identiques, alors $PQ = SN$. Donc $PS + SN = PS + PQ = 3$ cm.
Le périmètre du rectangle $PQRS$ est égal à $2 \times (PS + PQ)$, ou 2×3 cm, ou 6 cm.

Réponse : (A)

19. Le plancher a une largeur de 18 longueurs de main. Puisque chaque main a une longueur de 20 cm, le plancher a une largeur de 18×20 cm, ou 360 cm. Le plancher a une longueur de 22 longueurs de main. Puisque chaque main a une longueur de 20 cm, le plancher a une longueur de 22×20 cm, ou 440 cm. Le plancher a donc une aire de $360 \times 440\ \text{cm}^2$, ou $158\,400\ \text{cm}^2$. Parmi les choix de réponse, le plus près est $160\,000\ \text{cm}^2$. Réponse : (A)

20. *Solution 1*
Puisque $20 \times 20 \times 20 = 8000$ et que $30 \times 30 \times 30 = 27\,000$, on peut supposer que les trois entiers impairs consécutifs qui ont un produit de 9177 sont plus près de 20 que de 30. À l'aide d'essais systématiques, on vérifie que $21 \times 23 \times 25 = 12\,075$, ce qui est trop grand. Les trois entiers impairs consécutifs suivants, en reculant, sont 19, 21 et 23 et ils ont un produit de $19 \times 21 \times 23$, ou 9177, ce que l'on voulait. Donc, la somme des trois entiers impairs consécutifs qui ont un produit de 9177 est égale à $19 + 21 + 23$, ou 63.

Solution 2
On écrit le nombre 9177 en *factorisation première* (c.-à-d. comme produit de nombres premiers). On obtient l'arbre de facteurs ci-contre. Cet arbre indique que $9177 = 3 \times 3059 = 3 \times 7 \times 437 = 3 \times 7 \times 19 \times 23$. Puisque $3 \times 7 = 21$, alors $9177 = 21 \times 19 \times 23$. Les trois entiers impairs consécutifs qui ont un produit de 9177 sont donc 19, 21 et 23. Donc, la somme des trois entiers impairs consécutifs qui ont un produit de 9177 est égale à $19 + 21 + 23$, ou 63.



Réponse : (D)

21. Au magasin Q, le cout régulier du vélo est 15 % de plus que celui du même vélo au magasin P, soit 15 % de plus que 200 \$. Or, 15 % de 200 est égal à $\frac{15}{100} \times 200$, ou $0{,}15 \times 200$, ou 30. Donc, 15 % de plus que 200 \$ est égal à $200\,\$ + 30\,\$$, ou 230 \$. Or, le vélo est en solde au magasin Q, soit un rabais de 10 % du cout régulier, 230 \$. Puisque 10 % de 230 est égal à $\frac{10}{100} \times 230$, ou $0{,}10 \times 230$, ou 23, alors le cout en solde est égal à $230\,\$ - 23\,\$$, ou 207 \$.
Réponse : (D)

22. On suppose que la face du haut est peinte en vert.
Puisque la face du devant partage une arête avec la face du haut, elle ne peut être peinte en vert. Il faut donc au moins deux couleurs.
On suppose donc que la face du devant est peinte en bleu, comme dans la Figure 1.
Puisque la face de droite partage une arête avec la face du haut et une arête avec la face du devant, elle ne peut être peinte en vert ou en bleu. Il faut donc une troisième couleur.
On suppose donc que la face de droite est peinte en rouge, comme dans la Figure 2.
On a démontré qu'il faut au moins 3 couleurs. De fait, on peut utiliser exactement trois couleurs pour peindre le cube. Il suffit de peindre la face de gauche en rouge, la face arrière en bleu et la face du dessous en vert. (Voir la Figure 3.)
Ainsi, il a fallu exactement 3 couleurs pour peindre le cube de manière que n'importe quelles deux faces qui partagent une même arête soient de couleurs différentes.

Figure 1

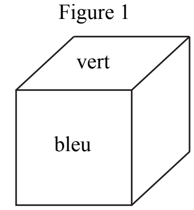


Figure 2

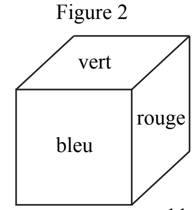
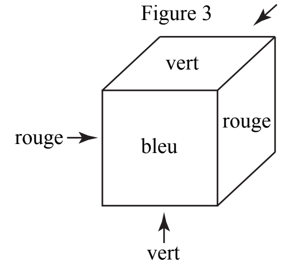


Figure 3



Réponse : (B)

23. *Solution 1*

Pour chacun des résultats possibles du dé rouge, il y a 6 résultats possibles du bleu.
Donc, lorsqu'on jette un dé régulier rouge et un dé régulier bleu, le nombre de résultats équiprobables est égal à 6×6, ou 36.
Ces 36 résultats correspondent aux cases du tableau suivant.
Lorsque le numéro sur le dé rouge est supérieur au nombre sur le dé bleu, on a placé un crochet dans la case appropriée, celle qui correspond à l'intersection de la colonne et de la rangée.
Par exemple, la case qui contient deux crochets ✓✓représente le résultat ≪ 4 sur le dé rouge et 2 sur le dé bleu ≫.

Numéro sur le dé rouge

Numéro sur le dé bleu

Rouge / Bleu	1	2	3	4	5	6
1		✓	✓	✓	✓	✓
2			✓	✓✓	✓	✓
3				✓	✓	✓
4					✓	✓
5						✓
6						

Parmi les 36 résultats équiprobables possibles, 15 indiquent un nombre sur le dé rouge qui est plus grand que le nombre qui parait sur le dé bleu.
La probabilité pour que le nombre qui parait sur le dé rouge soit plus grand que le nombre qui parait sur le dé bleu est donc de $\frac{15}{36}$.

Solution 2

Comme dans la Solution 1, on détermine qu'il y a 36 résultats possibles équiprobables.
On peut regrouper ces résultats en trois groupes distincts : ceux dont le numéro sur le dé rouge est supérieur à celui sur le dé bleu, ceux dont le numéro sur le dé rouge est inférieur à celui sur le dé bleu, ceux dont les numéros sur les deux dés sont indentiques.
Il y a 6 résultats dans ce dernier groupe (les deux numéros sont 1, les deux numéros sont 2, et ainsi de suite).
Il y a donc $36 - 6$ résultats, c'est-à-dire 30 résultats où le numéro sur le dé rouge est supérieur à celui sur le dé bleu ou celui sur le dé rouge est inférieur à celui sur le dé bleu.
Or, ces deux possibilités sont équiprobables (puisque les dés sont identiques à l'exception de leur couleur). Donc, la moitié des 30 résultats, soit 15 résultats, auront un numéro sur le dé rouge supérieur à celui sur le dé bleu.
La probabilité pour que le numéro sur le dé rouge soit supérieur à celui sur le dé bleu est donc de $\frac{15}{36}$.

Réponse : (C)

24. On joint d'abord Q à P.
Puisque Q et P sont les milieux respectifs de ST et de UV, alors QP est parallèle à SV et à TU. Les rectangles $SQPV$ et $QTUP$ sont donc isométriques.
VQ est une diagonale du rectangle $SQPV$.
Puisque PR est parallèle à VQ, le prolongement de PR jusqu'à T est une diagonale du rectangle $QTUP$, comme dans la Figure 1.

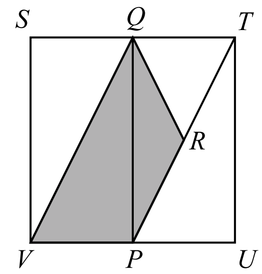


Figure 1

Dans la Figure 2, on nomme A, B, C, D, E et F les milieux respectivs de SQ, QT, TU, UP, PV et VS.
On joint A à E, B à D et F à C. Les segments FC et QP se coupent au centre O du carré.
Puisque $PR = QR$ et que R est situé sur la diagonale PT, alors les segments FC et BD passent au point R. (Donc R est le centre de $QTUP$.)
Les segments AE, QP, BD et FC divisent le carré $STUV$ en 8 rectangles isométriques.
Dans un de ces rectangles, soit $QBRO$, la diagonale QR coupe le rectangle en deux triangles isométriques.
Donc, l'aire du triangle QOR est la moitié de celle du rectangle $QBRO$.
De même, l'aire du triangle POR est la moitié de celle du rectangle $PORD$.

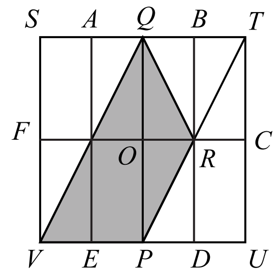


Figure 2

L'aire du rectangle $SQPV$ a une aire égale à celle de 4 des 8 rectangles isométriques.
Donc, l'aire du triangle QPV a une aire égale à celle de 2 des 8 rectangles isométriques (puisque la diagonale VQ divise le rectangle $SQPV$ et son aire en deux parties égales).
L'aire de la partie ombrée, soit celle des triangles QOR, POR et QPV, est égale à celle de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2$ rectangles isométriques, ou 3 des rectangles isométriques.
Puisque le carré $STUV$ est divisé en 8 rectangles isométriques et que la partie ombrée occupe 3 de ces 8 rectangles, alors la partie non ombrée occupe $8 - 3$ rectangles, ou 5 rectangles.
Le rapport de l'aire de la région ombrée à l'aire de la région non ombrée est donc de 3 : 5.

Réponse : (B)

25. On remplit d'abord un tableau indiquant le point terminal de chaque segment.

Numéro du segment	Point terminal du segment
1	$(1, 0)$
2	$(1, 2)$
3	$(4, 2)$
4	$(4, 6)$
5	$(9, 6)$
6	$(9, 12)$
7	$(16, 12)$
8	$(16, 20)$

Puisque chaque segment est horizontal ou vertical, alors seule une des coordonnées est changé lorsqu'on passe d'un point terminal au suivant.
De plus, puisque les segments qui ont un numéro impair sont tous horizontaux, l'abscisse de leur point terminal est changée par rapport à celle du point terminal précédent, tandis que l'ordonnée est la même.

De même, puisque les segments qui on un numéro pair sont tous verticaux, l'ordonnée de leur point terminal est changée par rapport à celle du point terminal précédent, tandis que l'abiscisse est la même.

On sait qu'un des segments termine au point $(529, 506)$.
On détermine d'abord combien il faut tracer de segments pour qu'un d'entre eux termine à un point d'abscisse 529.
Le 1[er] segment est tracé à l'horizontale vers la droite et et son point terminal a pour abscisse 1.
Le 3[e] segment est tracé à l'horizontale vers la droite et et son point terminal a pour abscisse $1 + 3$, ou 4.
Le 5[e] segment est tracé à l'horizontale vers la droite et et son point terminal a pour abscisse $1 + 3 + 5$, ou 9.
On procède par tâtonnements pour déterminer le nombre de segments qu'il faut pour que le point terminal du dernier segment ait une abscisse de 529.
Avec 21 segments, le point terminal du dernier segment a une abscisse égale à
$1 + 3 + 5 + \cdots + 17 + 19 + 21$.
Pour calculer cette somme, on place les termes dans l'ordre suivant :
$(1+21)+(3+19)+(5+17)+(7+15)+(9+13)+11 = 22+22+22+22+22+11 = 22\times 5+11 = 121$.
Puisque 121 est beaucoup plus petit que 529, on augmente le nombre de segments jusqu'à ce qu'on arrive à 45 segments.
Le point terminal du dernier segment a une abscisse égale à $1 + 3 + 5 + \cdots + 41 + 43 + 45$.
Pour calculer cette somme, on place les termes dans l'ordre suivant :

$$(1 + 45) + (3 + 43) + (5 + 41) + \cdots + (19 + 27) + (21 + 25) + 23 = 46 \times 11 + 23 = 529.$$

Donc, le point terminal du 45[e] segment a une abscisse de 529.
Le segment suivant, soit le 46[e], termine aussi à un point qui a une abscisse de 529, puisque les segments qui ont un numéro pair sont verticaux (et seule l'ordonnée du point terminal changera).
Donc, le point $(529, 506)$ est le point terminal du 45[e] ou du 46[e] segment.

On peut confirmer que 506 est l'ordonnée du point terminal du 45[e] segment (et donc du 44[e] segment aussi).
Le 2[e] segment est tracé à la verticale vers le haut et il a une longueur de 2. Le point terminal a donc une ordonnée de 2.
Le 4[e] segment est tracé à la verticale vers le haut et il a une longueur de 4. Le point terminal a donc une ordonnée de $2 + 4$, ou 6.
Le 6[e] segment est tracé à la verticale vers le haut et il a une longueur de 6. Le point terminal a donc une ordonnée de $2 + 4 + 6$, ou 12.
Le point terminal du 45[e] segment a une ordonné égale à $2 + 4 + 6 + \cdots + 40 + 42 + 44$.
On replace les termes dans l'ordre suivant :

$$(2 + 44) + (4 + 42) + (6 + 40) + \cdots + (20 + 26) + (22 + 24) = 46 \times 11 = 506.$$

Donc, $(529, 506)$ est le point terminal du 45[e] segment.
Le 46[e] segment est tracé à la verticale et il a une longueur de 46.
Le point terminal de ce segment a donc une ordonnée égale à :

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 40 + 42 + 44 + 46 = 506 + 46 = 552.$$

Puisque l'abscisse du point terminal du 46[e] segment est la même que celle du point terminal du 45[e] segment, alors le point terminal du segment suivant a pour coordonnées $(529, 552)$.

Réponse : (A)

8e année

1. Le nombre 10 101 est dix-mille-cent-un.
   Il est donc égal à $10\,000 + 100 + 1$.

   Réponse : (D)

2. Chaque cuillerée de nourriture peut nourrir 8 poissons rouges.
   Donc, 4 cuillerées de nourriture peuvent nourrir 4×8 poissons, ou 32 poissons.

   Réponse : (E)

3. On a $(2014 - 2013) \times (2013 - 2012) = 1 \times 1 = 1$.

   Réponse : (B)

4. Les mesures d'angles d'un triangle ont une somme de 180°. Or, deux des angles mesurent respectivement 90° et 55°. Le troisième angle mesure donc $180° - 90° - 55°$, ou 35°.
   Le plus petit angle du triangle mesure 35°.

   Réponse : (D)

5. Le signe d'un nombre indique que sa position est à gauche ou à droite de zéro sur la droite numérique.
   Plus un nombre est près de zéro, plus sa distance du point zéro est petite.
   Si on ne tient pas compte des signes, les nombres indiquent leur distance du point zéro. Dans l'ordre donné, les distances des nombres du point zéro sont $\{1101, 1011, 1010, 1001, 1110\}$. La plus petite distance est 1001 et elle correspond au nombre -1001.
   Donc -1001 est le nombre le plus près de zéro.

   Réponse : (D)

6. On a $5y - 100 = 125$ et on sait que $225 - 100 = 125$. Donc $5y = 225$.
   On a $5y = 225$ et on sait que $5 \times 45 = 225$. Donc $y = 45$.

   Réponse : (A)

7. Le seul multiple de 2 qui soit un nombre premier est 2, car il admet exactement deux diviseurs, soit 1 et lui-même. Les autres nombres pairs sont des multiples de 2, car ils admettent plus de deux diviseurs chacun, soit 1, 2 et un autre entier. (Par exemple, puisque $12 = 2 \times 6$, 6 est un troisième diviseur de 12 ; puisque $14 = 2 \times 7$, 7 est un troisième diviseur de 14, et ainsi de suite.)
   Donc, les nombres pairs 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26 et 28 ne sont pas premiers.
   De même, le seul multiple de 3 qui soit un nombre premier est 3. Donc, les autres multiples de 3, comme 15, 21 et 27, ne sont pas premiers.
   De même, le seul multiple de 5 qui soit un nombre premier est 5. Donc, les autres multiples de 5, comme 25, ne sont pas pas premiers.
   Parmi les entiers entre 10 et 30, il reste 11, 13, 17, 19, 23 et 29.
   Ces nombres sont tous premiers, car ils admettent chacun exactement deux diviseurs, soit 1 et le nombre lui-même.
   Il y a donc 6 nombres premiers entre 10 et 30.

   Réponse : (C)

8. Puisque le triangle est isocèle, le côté gauche a aussi une longueur de x cm.
   Puisque le triangle a un périmètre de 53 cm, alors $x + x + 11 = 53$, ou $2x + 11 = 53$. Or, on sait que $42 + 11 = 53$. Donc $2x = 42$. Or, on sait que $2 \times 21 = 42$. Donc $x = 21$.

   Réponse : (B)

9. *Solution 1*
Pour placer les fractions $\left\{\frac{3}{7}, \frac{3}{2}, \frac{6}{7}, \frac{3}{5}\right\}$ en ordre croissant, on écrit chaque fraction avec un dénominateur commun, soit $7 \times 2 \times 5$, ou 70.
L'ensemble $\left\{\frac{3}{7}, \frac{3}{2}, \frac{6}{7}, \frac{3}{5}\right\}$ devient donc $\left\{\frac{3\times10}{7\times10}, \frac{3\times35}{2\times35}, \frac{6\times10}{7\times10}, \frac{3\times14}{5\times14}\right\}$, ou $\left\{\frac{30}{70}, \frac{105}{70}, \frac{60}{70}, \frac{42}{70}\right\}$.
On place les fractions du dernier ensemble en ordre croissant selon leur numérateur et on obtient $\left\{\frac{30}{70}, \frac{42}{70}, \frac{60}{70}, \frac{105}{70}\right\}$.
L'ensemble donné, avec les fractions en ordre croissant, est donc $\left\{\frac{3}{7}, \frac{3}{5}, \frac{6}{7}, \frac{3}{2}\right\}$.

Solution 2
Puisque les numérateurs sont tous 3 ou 6, on récrit chaque fraction avec le numérateur 6.
L'ensemble$\left\{\frac{3}{7}, \frac{3}{2}, \frac{6}{7}, \frac{3}{5}\right\}$ devient donc $\left\{\frac{3\times2}{7\times2}, \frac{3\times2}{2\times2}, \frac{6}{7}, \frac{3\times2}{5\times2}\right\}$, ou $\left\{\frac{6}{14}, \frac{6}{4}, \frac{6}{7}, \frac{6}{10}\right\}$.
Puisque les numérateurs sont égaux, plus le dénominateur est petit, plus la fraction est grande.
On place les fractions du dernier ensemble en ordre croissant et on obtient $\left\{\frac{6}{14}, \frac{6}{10}, \frac{6}{7}, \frac{6}{4}\right\}$. L'ensemble donné, avec les fractions en ordre croissant, est donc $\left\{\frac{3}{7}, \frac{3}{5}, \frac{6}{7}, \frac{3}{2}\right\}$.

Réponse : (A)

10. *Solution 1*
Puisque le rapport du nombre de filles au nombre de garçons est de 3 : 5, alors pour chaque 3 filles dans la classe, il y a 5 garçons et donc 8 élèves.
Le nombre de filles dans la classe est donc $\frac{3}{8}$ du nombre d'élèves.
Puisqu'il y a 24 élèves dans la classe, le nombre de filles est égal à $\frac{3}{8}$ de 24. Or, $\frac{1}{8}$ de 24, c'est 3.
Donc, $\frac{3}{8}$ de 24, c'est 3 fois plus, soit 9.
Puisqu'il y a 9 filles, il y a $24 - 9$ garçons, ou 15 garçons.
La différence entre le nombre de garçons et le nombre de filles est donc de $15 - 9$, ou 6.

Solution 2
Puisque le rapport du nombre de filles au nombre de garçons est de 3 : 5, on peut placer les filles en 3 groupes et les garçons en 5 groupes, tous les groupes étant égaux. Il y a donc 8 groupes égaux d'élèves.
Puisqu'il y a 24 élèves en tout et qu'ils sont divisés en 8 groupes égaux, il y a 3 élèves par groupe.
Il y a donc 3 groupes de 3 filles, c'est-à-dire 9 filles, et 5 groupes de 3 garçons, c'est-à-dire 15 garçons dans la classe.
La différence entre le nombre de garçons et le nombre de filles est donc de $15 - 9$, ou 6.

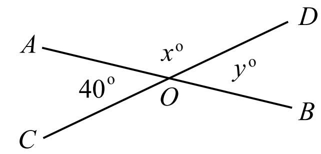
Solution 3
Puisque le rapport du nombre de filles au nombre de garçons est de 3 : 5, alors pour chaque 3 filles dans la classe, il y a 5 garçons et donc 8 élèves.
Donc, $\frac{3}{8}$ des élèves sont des filles et $\frac{5}{8}$ des élèves sont des garçons.
La différence entre le nombre de garçons et le nombre de filles est donc de $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$ du nombre d'élèves dans la classe, soit $\frac{2}{8}$, ou $\frac{1}{4}$ du nombre d'élèves dans la classe.
Cette différence est donc égale à $\frac{1}{4}$ de 24, ou 6 élèves.

Réponse : (D)

11. Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine, le 7$^{\text{e}}$ jour après un mercredi sera un mercredi. Il en sera de même le 14$^{\text{e}}$ jour, le 21$^{\text{e}}$ jour, et ainsi de suite, jusqu'au 70$^{\text{e}}$ jour.
Puisqu'Alexa est née 72 jours après Jean, elle est née 2 jours après un mercredi.
Elle est donc née un vendredi.

Réponse : (E)

12. Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Puisque les angles AOC et DOB sont opposés par le sommet, alors $y = 40$.
L'angle plat COD mesure 180°.
Puisque $\angle AOC + \angle AOD = \angle COD$, alors $40° + x° = 180°$, d'où $x = 140$.
Donc $x - y$ a une valeur de $140 - 40$, ou 100.



Réponse : (E)

13. *Solution 1*
Puisque les 5 résultats de chaque ensemble sont présentés en ordre croissant, la médiane est égale au résultat du milieu, soit le 3e résultat.
On a placé la médiane et le calcul de la moyenne dans le tableau suivant.

Ensemble de résultats	Médiane	Moyenne
$10, 20, 40, 40, 40$	40	$\frac{10+20+40+40+40}{5} = \frac{150}{5} = 30$
$40, 50, 60, 70, 80$	60	$\frac{40+50+60+70+80}{5} = \frac{300}{5} = 60$
$20, 20, 20, 50, 80$	20	$\frac{20+20+20+50+80}{5} = \frac{190}{5} = 38$
$10, 20, 30, 100, 200$	30	$\frac{10+20+30+100+200}{5} = \frac{360}{5} = 72$
$50, 50, 50, 50, 100$	50	$\frac{50+50+50+50+100}{5} = \frac{300}{5} = 60$

Dans le tableau, on voit que seul le premier ensemble de résultats donne une médiane plus grande que la moyenne.

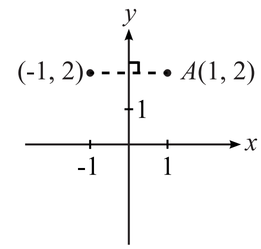
Solution 2
Puisque les 5 résultats $10, 20, 40, 40, 40$ du premier ensemble sont présentés en ordre croissant, la médiane est égale au résultat du milieu, soit le 3e résultat, 40.
Puisque les 3 derniers résultats de cet ensemble sont 40, ces 3 résultats ont une moyenne de 40. Puisque les 2 premiers résultats de cet ensemble sont inférieurs à chacun des 3 derniers, qui est de 40, la moyenne de l'ensemble est inférieur à 40.
En utilisant un argument semblable pour les quatre autres ensembles de résultats, on voit que dans chaque cas, la médiane est inférieure à la moyenne.
Donc, seul le premier ensemble de résultats donne une médiane plus grande que la moyenne.

Réponse : (A)

14. Betty a 3 choix équiprobables pour le parfum, soit chocolat, vanille ou fraise.
Pour chacun de ces choix, elle a 2 choix pour le sirop, soit caramel ou fudge. Cela fait 3×2 choix, ou 6 choix équiprobables pour le parfum et le sirop.
Pour chacun de ces 6 choix, elle a 3 choix équiprobables pour le nappage, soit cerise, banane ou ananas. Cela fait donc 6×3 choix, ou 18 choix équiprobables pour les coupes de crème glacée.
Or, 1 de ces choix est le choix favorable, soit une coupe à la vanille avec fudge et banane. Donc, la probabilité de choisir cette coupe au hasard est de $\frac{1}{18}$

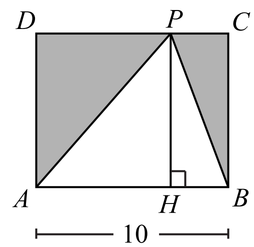
Réponse : (A)

15. L'image du point $A(1,2)$, par une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, aura la même ordonnée que celle du point A, soit 2. Le point A est situé à 1 unité à la droite de l'axe des ordonnées. L'image du point A est donc située à 1 unité à la gauche de l'axe des ordonnées. L'image de A a donc une abscisse de -1. Les coordonnées de l'image sont donc $(-1,2)$.



Réponse : (B)

16. *Solution 1*
Au point P, on abaisse une perpendiculaire PH au côté AB. Le rectangle $ABCD$ et le triangle ABP ont la même base AB et la même hauteur PH. L'aire du triangle ABP est donc la moitié de celle du rectangle $ABCD$. Puisque le triangle ABP a une aire de 40, le rectangle $ABCD$ a une aire de 2×40, ou 80. L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du rectangle $ABCD$ moins celle du triangle ABP. Elle est donc égale à $80-40$, ou 40.



Solution 2
Au point P, on abaisse une perpendiculaire PH au côté AB.
Puisque DA et CB sont perpendiculaires à AB, alors PH est parallèle à DA et à CB.
$DAHP$ et $PHBC$ sont donc des rectangles.
La diagonale PA divise le rectangle $DAHP$ en deux triangles isométriques, PAH et PAD.
La diagonale PB divise le rectangle $PHBC$ en deux triangles isométriques, PBH et PBC.
L'aire du triangle PAH plus celle du triangle PBH égale donc l'aire du triangle PAD plus celle du triangle PBC.
Or, l'aire du triangle PAH plus celle du triangle PBH est égale à l'aire du triangle ABP, soit 40.
Donc, l'aire du triangle PAD plus celle du triangle PBC est égale à 40.
La région ombrée a donc une aire de 40.

Réponse : (B)

17. Janette a réussi 80 % des 10 questions à choix multiple, soit $\frac{8}{10}$ de 10 questions, ou 8 questions.
Elle a réussi 70 % des 30 questions à réponse courte, soit $\frac{7}{10}$ de 30 questions ou $0{,}7 \times 30$ questions, ou 21 questions.
En tout, elle a réussi $8+21$ questions, ou 29 des 40 questions.
Puisque $\frac{29}{40} = 0{,}725 = 72{,}5\,\%$, elle a réussi 72,5 % des 40 questions.

Réponse : (B)

18. Puisque l'aire du rectangle, 48 cm^2, est le produit de la longueur et de la largeur et que celles-ci sont des entiers, on cherche d'abord toutes les paires d'entiers qui ont un produit de 48.
Le tableau contient tous les produits possibles, dans l'ordre.

Facteurs de 48	Longueurs des côtés du rectangle	Périmètre du rectangle
$48 = 1 \times 48$	1 et 48	$2 \times (1+48) = 2 \times 49 = 98$
$48 = 2 \times 24$	2 et 24	$2 \times (2+24) = 2 \times 26 = 52$
$48 = 3 \times 16$	3 et 16	$2 \times (3+16) = 2 \times 19 = 38$
$48 = 4 \times 12$	4 et 12	$2 \times (4+12) = 2 \times 16 = 32$
$48 = 6 \times 8$	6 et 8	$2 \times (6+8) = 2 \times 14 = 28$

Le rectangle qui a une aire de 48 cm^2 et un périmètre de 32 cm mesure 4 cm sur 12 cm.
La différence, en centimètres, entre la longueur et la largeur du triangle est de $12-4$, ou 8.

Réponse : (D)

19. Au magasin Q, le cout régulier du vélo est 15 % de plus que celui du même vélo au magasin P, soit 15 % de plus que 200 \$.
Or, 15 % de 200 est égal à $\frac{15}{100} \times 200$, ou $0{,}15 \times 200$, ou 30. Donc, 15 % de plus que 200 \$ est égal à 200 \$ + 30 \$, ou 230 \$.
Or, le vélo est en solde au magasin Q, soit un rabais de 10 % du cout régulier, 230 \$.
Puisque 10 % de 230 est égal à $\frac{10}{100} \times 230$, ou $0{,}10 \times 230$, ou 23, alors le cout en solde est égal à 230 \$ − 23 \$, ou 207 \$.

Réponse : (D)

20. On peut utiliser 7 timbres de 5 ¢ (35 ¢) et 1 timbre de 8 ¢ (8 ¢) pour un affranchissement de 43 ¢.
On peut utiliser 3 timbres de 5 ¢ (15 ¢) et 3 timbres de 8 ¢ (24 ¢) pour un affranchissement de 39 ¢.
Ceci élimine les deux derniers choix de réponse. Parmi les trois choix qui restent, le choix le plus grand est de 27 ¢.
Pour un affranchissement de 27 ¢ il faut utiliser 0, 1, 2 ou 3 timbres de 8 ¢ (si on utilisait plus de 3 timbres de 8 ¢ on dépasserait l'affranchissement de 27 ¢).
Si on utilise 0 timbre de 8 ¢ il faudrait combler 27 ¢ avec des timbres de 5 ¢ ce qui est impossible puisque 27 n'est pas un multiple de 5.
Si on utilise 1 timbre de 8 ¢ il faudrait combler 27 ¢ − 8 ¢ , ou 19 ¢ avec des timbres de 5 ¢ ce qui est impossible puisque 19 n'est pas un multiple de 5.
Si on utilise 2 timbres de 8 ¢ il faudrait combler 27 ¢ − 16 ¢ ou 11 ¢ avec des timbres de 5 ¢ ce qui est impossible puisque 11 n'est pas un multiple de 5.
Si on utilise 3 timbres de 8 ¢ il faudrait combler 27 ¢ − 24 ¢ ou 3 ¢ avec des timbres de 5 ¢ ce qui est impossible.
Donc parmi les cinq choix de réponse, 27 ¢ est le plus grand affranchissement qu'il est impossible d'obtenir en utilisant des timbres de 5 ¢ et de 8 ¢.
Il est intéressant de noter que tout affranchissement de plus de 27 ¢ peut être obtenu en utilisant seulement des timbres de 5 ¢ et de 8 ¢.
Pour le vérifier, on considère d'abord les affranchissements consécutifs de 28 ¢ à 32 ¢ obtenus dans le tableau suivant.

Nombre de timbres de 5 ¢	Nombre de timbres de 8 ¢	Valeur des timbres
4	1	(4 × 5 ¢)+(1 × 8 ¢)= 28 ¢
1	3	(1 × 5 ¢)+(3 × 8 ¢)= 29 ¢
6	0	(6 × 5 ¢)+(0 × 8 ¢)= 30 ¢
3	2	(3 × 5 ¢)+(2 × 8 ¢)= 31 ¢
0	4	(0 × 5 ¢)+(4 × 8 ¢)= 32 ¢

On peut obtenir les cinq affranchissements suivants, de 33 ¢ à 37 ¢, en ajoutant un timbre de 5 ¢ à chacun des cinq affranchissements précédents.
En effet, 28 ¢ + 5 ¢ = 33 ¢, 29 ¢ + 5 ¢ = 34 ¢, et ainsi de suite.
On peut obtenir n'importe quel affranchissement supérieur à 27 ¢ en ajoutant un timbre de 5 ¢ à chaque affranchissement du groupe de cinq affranchissements précédents.

Réponse : (C)

21. Les trois rangées supérieures contiennent 6 cercles ombrés de rayon 1 cm.
La rangée du bas contient 4 demi-cercles ombrés de rayon 1 cm, soit l'équivalent de 2 cercles de rayon 1 cm.
Les parties ombrées sont donc formées de 8 cercles de rayon 1 cm.
En cm^2, l'aire totale est égale à $8 \times \pi \times 1^2$, ou 8π.

Réponse : (E)

22. On détermine d'abord l'aire totale du cube initial avant d'enlever les deux petits cubes.
Le cube initial avait 6 faces mesurant 3 cm sur 3 cm. Chaque face avait donc une aire de 3×3 cm^2, ou 9 cm^2.
L'aire totale était donc de 6×9 cm^2, ou 54 cm^2.
On explique ensuite pourquoi le nouveau solide a la même aire totale que celle du cube initial, soit 54 cm^2.

On considère le coin inférieur droit du devant du cube, indiqué dans la Figure 1.
Lorsqu'on enlève un cube mesurant 1 cm sur 1 cm sur 1 cm de ce coin, on expose trois nouvelles faces, soit $RSPQ$, $RSTU$ et $SPWT$, qui ne faisaient pas partie du cube initial.

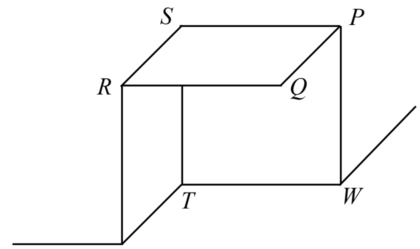


Figure 1

Pour mieux visualiser la situation avant et après l'enlèvement du petit cube, on replace le sommet V du cube initial et on trace les segments QV, UV et WV, comme dans la Figure 2.
On remarque que le solide $PQRSTUVW$ représente le petit cube mesurant 1 cm sur 1 cm sur 1 cm qui a été enlevé.
Dans la Figure 2, on remarque que les faces du cube initial qui ne font plus partie du nouveau solide sont les 3 faces carrées $UTWV$, $QPWV$ et $RQVU$.

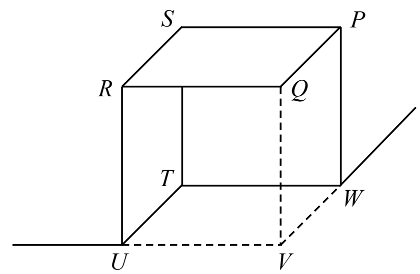


Figure 2

Donc, en enlevant le petit cube mesurant 1 cm sur 1 cm sur 1 cm, on expose 3 nouvelles faces carrées, soit $RSPQ$, $RSTU$ et $SPWT$, qui ne faisaient pas partie du cube initial.
Ces trois faces représentent la moitié des faces du cube initial $PQRSTUVW$ (soit 3 faces sur 6).
Or, en enlevant le petit cube mesurant 1 cm sur 1 cm sur 1 cm, les 3 faces $UTWV$, $QPWV$ et $RQVU$ sont perdues.
On a donc enlevé 3 faces du cube $PQRSTUVW$ pour ajouter 3 faces identiques.
Donc, en enlevant le petit cube mesurant 1 cm sur 1 cm sur 1 cm, l'aire totale n'a pas changé.
La même chose se produit lorsqu'on enlève le cube mesurant 2 cm sur 2 cm sur 2 cm.
L'aire totale du nouveau solide est donc égale à celle du cube initial, soit 54 cm^2.

Réponse : (E)

23. Le 1$^{\text{er}}$ entier positif impair est 1, le 2$^{\text{e}}$ est $2(2)-1=3$, le 3$^{\text{e}}$ est $2(3)-1=5$, le 4$^{\text{e}}$ est $2(4)-1=7$.
Le 100$^{\text{e}}$ entier positif impair est donc $2(100)-1$, ou 199. On nous demande de déterminer la somme $1+3+5+\cdots+195+197+199$.

Solution 1
Puisque chaque entier impair est la somme de deux entiers consécutifs, on récrit $1+3+5+\cdots+195+197+199$ sous la forme $1+(1+2)+(2+3)+\cdots+(97+98)+(98+99)+(99+100)$.
On peut récrire cette dernière somme sous la forme
$(1+2+3+\cdots+98+99+100)+(1+2+3+\cdots+97+98+99)$.
La somme de l'expression entre les premières parenthèses, $1+2+3+\cdots+98+99+100$, est égale à 5050.
La somme de l'expression entre les deuxièmes parenthèses, $1+2+3+\cdots+98+99$, est 100 de moins que 5050, ou 4950.
Donc $1+3+5+\cdots+195+197+199=5050+4950=10\,000$.

Solution 2

On double les deux membres de l'égalité $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 = 5050$, ce qui conserve l'égalité entre les membres.
Donc $2 + 4 + 6 + \cdots + 196 + 198 + 200 = 10\,100$.
En soustrayant 1 de chaque terme du membre de gauche de l'égalité, on obtient
$(2-1)+(4-1)+(6-1)+\cdots+(196-1)+(198-1)+(200-1)$, ou $1+3+5+\cdots+195+197+199$.
Puisque le membre de gauche contient 100 termes, on a soustrait 1 100 fois. Le membre de gauche est donc diminué de 100. On soustrait donc 100 du membre de droite pour conserver l'égalité, ce qui donne $10\,100 - 100 = 10\,000$.
Donc $1 + 3 + 5 + \cdots + 195 + 197 + 199 = 10\,000$.

Solution 3

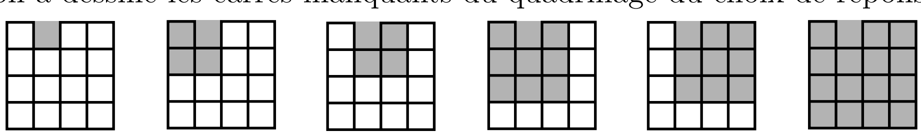
On peut déterminer la somme des 100 premiers entiers impairs positifs,
soit $1 + 3 + 5 + \cdots + 195 + 197 + 199$, sans utiliser le résultat donné dans l'énoncé.
On place les termes de l'addition en paires soit le plus petit avec le plus grand, le deuxième plus petit avec le deuxième plus grand, et ainsi de suite, pour obtenir :
$1+3+5+\cdots+195+197+199 = (1+199)+(3+197)+(5+195)+\cdots+(97+103)+(99+101)$.
La première paire a une somme de $1 + 199$, ou 200. Chaque paire par la suite a un terme qui est 2 de plus qu'un des termes précédents et un terme qui est 2 de moins que le deuxième des termes précédents. Donc, chaque paire a une somme de 200.
Puisqu'il y a 100 termes dans la suite, il y a 50 paires et chacune a une somme de 200.
Donc $1 + 3 + 5 + \cdots + 195 + 197 + 199 = 50 \times 200 = 10\,000$.

Réponse : (B)

24. Le quadrillage initial de dimensions 4×4 contient exactement 30 carrés dont 16 carrés de dimensions 1×1, 9 carrés de dimensions 2×2, 4 carrés de dimensions 3×3, et 1 carré de dimensions 4×4 $(16 + 9 + 4 + 1 = 30)$.
Dans chaque choix de réponse, un carré 1×1 est absent du quadrillage.
On détermine combien des 30 carrés ne peuvent pas être formés à cause de l'absence du carré 1×1 et on soustrait de 30 pour déterminer le nombre de carrés qu'il existe dans chaque choix de réponse.

	Nombre de carrés manquants				Nombre total de carrés
	1×1	2×2	3×3	4×4	
A	1	1	1	1	$30 - 4 = 26$
B	1	2	2	1	$30 - 6 = 24$
C	2	2	2	1	$30 - 7 = 23$
D	2	2	2	1	$30 - 7 = 23$
E	2	2	2	1	$30 - 7 = 23$

Pour clarifier, on a dessiné les carrés manquants du quadrillage du choix de réponse B.

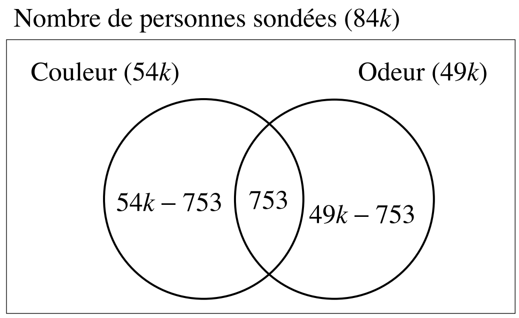


1x1 2x2 2x2 3x3 3x3 4x4

Le quadrillage qui correspond au choix de réponse B contient exactement 24 carrés.

Réponse : (B)

25. En tout, N personnes ont participé au sondage.
Exactement $\frac{9}{14}$ des gens sondés, soit $\frac{9}{14} \times N$ personnes, ont affirmé que la couleur est importante.
Exactement $\frac{7}{12}$ des gens sondés, soit $\frac{7}{12} \times N$ personnes, ont affirmé que l'odeur est importante.
Puisque le nombre de personnes sondées doit être un entier, N doit être un multiple de 14 et de 12. Or, le plus petit commun multiple de 14 et de 12 est égal à $2 \times 7 \times 6$, ou 84. Donc, N est un multiple de 84.
Puisque N est un multiple de 84, soit $N = 84k$, k étant un entier strictement positif quelconque.
Or $\frac{9}{14} \times N = \frac{9}{14}(84k) = 54k$ et $\frac{7}{12} \times N = \frac{7}{12}(84k) = 49k$. Donc $54k$ personnes ont affirmé que la couleur est importante et $49k$ personnes ont affirmé que l'odeur est importante.
On représente les renseignements par le diagramme de Venn suivant.



Puisque $N = 84k$, on doit déterminer une valeur minimale et une valeur maximale de k, ce qui indiquera le nombre de valeurs possibles de N.

Détermination d'une valeur minimale de k

On sait que 753 personnes ont affirmé que la couleur et l'odeur sont importantes.
On sait aussi que $54k$ personnes ont affirmé que la couleur est importante et $49k$ personnes ont affirmé que l'odeur est importante.
Les 753 personnes qui ont affirmé que la couleur et l'odeur sont importantes figurent parmi les $54k$ personnes et parmi les $49k$ personnes.
Donc, $54k$ doit valoir au moins 753 et $49k$ doit valoir au moins 753.
Puisque $54k$ est supérieur à $49k$, il suffit de déterminer les valeurs de k pour lesquelles $49k$ est supérieur ou égal à 753.
Or, $49 \times 15 = 735$ et $49 \times 16 = 784$.
Donc, la plus petite valeur de k pour laquelle $49k$ est supérieure ou égale à 753 est $k = 16$.
On remarque que ces valeurs font en sorte que l'expression $54k$ a une valeur supérieure à 753.
Donc, la valeur minimale de k est 16.

Détermination d'une valeur maximale de k

En tout, $84k$ personnes ont été sondées dont $54k$ ont affirmé que la couleur est importante.
Il y a donc $84k - 54k$ personnes, ou $30k$ personnes qui ont laissé entendre que la couleur n'est pas importante.
Or, $49k$ personnes ont affirmé que l'odeur est importante. Ces $49k$ personnes incluent certaines des $30k$ personnes qui ont laissé entendre que la couleur n'est pas importante.
En d'autres mots, au plus $30k$ des $49k$ ont affirmé que l'odeur est importante et que la couleur n'est pas importante. Donc au moins $49k - 30k$ personnes, ou $19k$ personnes ont laissé entendre que la couleur est importante et que l'odeur est importante.

Or, on sait que 753 personnes ont affirmé que l'odeur et la couleur sont importantes.
Donc 753 est supérieur ou égal à $19k$.

Puisque $19 \times 40 = 760$ et $19 \times 39 = 741$, alors k ne peut dépasser 39.

La valeur minimale de k est donc 16 et la valeur maximale de k est 39.
Il y a donc $39 - 15$ valeurs, ou 24 valeurs possibles de k. Puisque $N = 84k$, il a donc 24 valeurs possibles de N.

Remarque : Il faudrait justifier que chaque valeur de k de 16 à 39 est possible.
D'après le diagramme de Venn, $84k$ personnes ont été sondées.
Donc $84k-(54k-753)-753-(49k-753)$ personnes, ou $753-19k$ personnes sont à l'extérieur des deux cercles.
D'après la recherche d'une valeur minimale, ci-haut, on peut conclure que les expressions $54k - 753$, 753 et $49k - 753$ sont positives pour chacune des valeurs de k de 16 à 39, puisque k est supérieur ou égal à 16. D'après la recherche d'une valeur maximale, ci-haut, on peut conclure que l'expression $753 - 19k$ est positive pour chacune des valeurs de k de 16 à 39, puisque k est inférieur ou égal à 39.
Donc, les quatre quantités sont positives pour chaque valeur de k de 16 à 39, ce qui indique que l'on peut construire un diagramme de Venn pour ces valeurs.

RÉPONSE : (D)

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

Concours Gauss 2013

(7e et 8e années – Secondaire I et II)

le mercredi 15 mai 2013

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 mai 2013

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Comité du concours Gauss

7e année

1. On a : $(5 \times 3) - 2 = 15 - 2 = 13$

RÉPONSE : (E)

2. *Solution 1*
Un multiple de 9 est un entier qui est le produit de 9 et d'un entier.
Parmi les choix de réponse, seul 45 est le produit de 9 et d'un entier. En effet, $45 = 9 \times 5$.

Solution 2
Un entier est un multiple de 9 si son quotient, par une division par 9, est un entier.
Seul le choix de réponse 45 donne un quotient entier. En effet, $45 \div 9 = 5$.

RÉPONSE : (D)

3. Trente-six centièmes est égal à $\frac{36}{100}$, ou 0,36.

RÉPONSE : (A)

4. On regroupe les termes entre parenthèses, comme suit : $(1+1-2)+(3+5-8)+(13+21-34)$.
On voit que chaque parenthèse a une valeur de 0.
Donc, $1+1-2+3+5-8+13+21-34$ a une valeur de 0.

RÉPONSE : (D)

5. Puisque PQ est un segment de droite, la somme des mesures des trois angles est égale à 180°.
On a donc $90° + x° + 20° = 180°$, d'où $x° = 180° - 90° - 20°$, ou $x = 70$.

RÉPONSE : (B)

6. Nico a six pièces de 5 ¢ pour une valeur de 6×5 ¢, ou 30 ¢.
Il a deux pièces de 10 ¢ pour une valeur de 2×10 ¢, ou 20 ¢.
Il a aussi une pièce de 25 ¢.
En tout, Nico a 30 ¢ + 20 ¢ + 25 ¢, ou 75 ¢.

RÉPONSE : (B)

7. *Solution 1*
Pour déterminer le plus petit nombre de l'ensemble $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}\right\}$, on utilise un dénominateur commun, soit 12. L'ensemble $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}\right\}$ est équivalent à l'ensemble $\left\{\frac{1\times6}{2\times6}, \frac{2\times4}{3\times4}, \frac{1\times3}{4\times3}, \frac{5\times2}{6\times2}, \frac{7}{12}\right\}$, ou à l'ensemble $\left\{\frac{6}{12}, \frac{8}{12}, \frac{3}{12}, \frac{10}{12}, \frac{7}{12}\right\}$.
Le plus petit de ces nombres est $\frac{3}{12}$. Donc, le plus petit nombre de l'ensemble donné est $\frac{1}{4}$.

Solution 2
À l'exception du nombre $\frac{1}{4}$, chaque nombre est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.
En effet, on voit que chaque numérateur est supérieur ou égal à la moitié de son dénominateur.
Puisque $\frac{1}{4}$ est le seul nombre inférieur à $\frac{1}{2}$, il doit être le plus petit nombre de l'ensemble.

RÉPONSE : (C)

8. Puisque Ahmed s'arrête pour parler à Kee à un quart du chemin, les 12 km qui restent correspondent à $1 - \frac{1}{4}$, ou $\frac{3}{4}$, de la distance totale.
Donc, $\frac{1}{4}$ de la distance totale correspond à 4 km, soit 3 fois moins.
Donc, Ahmed a parcouru 4 km jusqu'à Kee et il continue sur 12 km.
En tout, il parcourt 4 km + 12 km, ou 16 km.

RÉPONSE : (B)

9. Lorsque $n = 4$, l'expression doit donner une valeur de 7.
Dans le tableau suivant, on reporte $n = 4$ dans chaque expression pour en déterminer la valeur.

Expression	Valeur
(A) $3n - 2$	$3(4) - 2 = 12 - 2 = 10$
(B) $2(n - 1)$	$2(4 - 1) = 2(3) = 6$
(C) $n + 4$	$4 + 4 = 8$
(D) $2n$	$2(4) = 8$
(E) $2n - 1$	$2(4) - 1 = 8 - 1 = 7$

Puisque $2n - 1$ est la seule expression qui donne une valeur de 7 lorsque $n = 4$, il s'agit de la seule expression possible. On peut vérifier que l'expression $2n - 1$ donne les autres valeurs, soit $1, 3, 5$ et 9, lorsque n prend les valeurs respectives $1, 2, 3$ et 5.
(En évaluant les expressions lorsque $n = 1$, on aurait pu éliminer les choix de réponse (B), (C) et (D). En évaluant les expressions (A) et (E) lorsque $n = 2$, on aurait pu éliminer le choix (A). En reportant les valeurs $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$ dans l'expression (E), on aurait confirmé le choix de réponse (E).)

Réponse : (E)

10. Pour que la différence $UVW - XYZ$ soit aussi grande que possible, on rend UVW aussi grand que possible et XYZ aussi petit que possible.
Le chiffre des centaines d'un nombre contribue davantage à la valeur du nombre que le chiffre des dizaines et celui-ci contribue davantage que le chiffre des unités.
On forme donc la plus grande valeur possible du nombre UVW en choisissant 9 (le plus grand chiffre disponible) comme chiffre des centaines U, en choisissant 8 (le plus grand chiffre disponible suivant) comme chiffre des dizaines V et en choisissant 7 (le plus grand chiffre disponible suivant) comme chiffre des unités W.
De même, on forme la plus petite valeur possible du nombre XYZ en choisissant 1 (le plus petit chiffre disponible) comme chiffre des centaines X, en choisissant 2 (le plus petit chiffre disponible suivant) comme chiffre des dizaines Y et en choisissant 3 (le plus petit chiffre disponible suivant) comme chiffre des unités Z.
La plus grande valeur possible de $UVW - XYZ$ est donc égale à $987 - 123$, ou 864.

Réponse : (B)

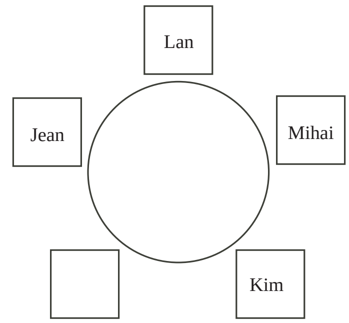
11. Chaque face du cube est un carré qui mesure 1 cm sur 1 cm. Par définition, chaque face a donc une aire de $1\,\text{cm}^2$.
Puisque le cube a 6 faces identiques, il a une aire totale de $6 \times 1\,\text{cm}^2$, ou $6\,\text{cm}^2$.

Réponse : (E)

12. Le plus grand commun diviseur de deux nombres est le plus grand nombre qui puisse diviser ces deux nombres sans laisser de reste. On procède par essais systématiques.
Choix (A) : On voit qu'on peut diviser 200 et 2000 par 200 sans laisser de reste. Donc, 20 n'est pas le plus grand commun diviseur, ce qui élimine ce choix.
Choix (B) : Lorsqu'on divise 50 par 20, on obtient un reste, ce qui élimine ce choix.
Choix (C) : Lorsqu'on divise 20 et 40 par 20, on obtient 1 et 2. Donc, le plus grand commun diviseur de ces nombres est 20.
Choix (D) : Lorsqu'on divise 25 par 20, on obtient un reste, ce qui élimine ce choix.
Choix (E) : On voit qu'on peut diviser 40 et 80 par 40 sans laisser de reste. Donc, 20 n'est pas le plus grand commun diviseur, ce qui élimine ce choix.
Donc, le bon choix de réponse est (C).

Réponse : (C)

13. Puisque Lan et Mihai sont assis l'un à côté de l'autre et que Jean et Kim ne le sont pas, il n'y a qu'une seule position possible pour la chaise vide (celle de Nahel), soit entre Jean et Kim, comme dans la figure ci-contre. Donc, les 2 personnes assises de chaque côté de Nahel sont Jean et Kim.



RÉPONSE : (B)

14. Puisque $x = 4$, l'équation $3x + 2y = 30$ devient $3 \times 4 + 2y = 30$, ou $12 + 2y = 30$.
Or, on sait que $12 + 18 = 30$. Donc $2y = 18$.
Puisque $2 \times 9 = 18$, alors $y = 9$.

RÉPONSE : (E)

15. Chaque fois que Daniel met la main dans le bocal, il retire la moitié des pièces qui sont dans le bocal. Le tableau suivant tient compte des pièces qui restent.

Nombre de fois que l'argent est retiré	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de pièces qui restent dans le bocal	64	32	16	8	4	2	1

Daniel doit mettre la main dans le bocal 6 fois pour qu'il reste exactement une pièce de monnaie dans le bocal.

RÉPONSE : (C)

16. *Solution 1*
On considère les cinq entiers pairs consécutifs 8,10,12,14,16.
Leur moyenne est égale à $\frac{8+10+12+14+16}{5}$, ou $\frac{60}{5}$, ou 12.
Si les cinq entiers pairs consécutifs étaient plus petits, leur moyenne serait plus petite que 12.
S'ils étaient plus grands, leur moyenne serait plus grande que 12.
Les entiers 8,10,12,14,16 sont donc ceux dont on parle.
La moyenne du plus grand et du plus petit est égale à $\frac{8+16}{2}$, ou $\frac{24}{2}$, ou 12.

Solution 2
La moyenne de cinq entiers pairs consécutifs est le nombre du milieu, c'est-à-dire le troisième.
En effet, on voit que le plus petit nombre est 4 de moins que le nombre du milieu, tandis que le plus grand nombre est 4 de plus que le nombre du milieu.
Donc, la moyenne du plus petit nombre et du plus grand nombre est égale au nombre du milieu.
De même, le deuxième nombre est 2 de moins que le nombre du milieu, tandis que le quatrième nombre est 2 de plus que le nombre du milieu.
Donc, la moyenne du deuxième nombre et du quatrième nombre est égale au nombre du milieu.
Puisque les cinq nombres ont une moyenne de 12, le nombre du milieu est 12.
La moyenne du plus petit nombre et du plus grand nombre est donc égale à 12.

RÉPONSE : (A)

17. Pour chaque 3 chocolats que Claire achète au prix régulier, elle achète un quatrième chocolat au prix de 25 ¢. Puisqu'elle achète 12 chocolats en tout, on peut considérer qu'elle a acheté 3 groupes de 4 chocolats.
Dans chaque groupe de 4 chocolats, il y a 3 chocolats achetés au prix régulier et un chocolat acheté au prix de 25 ¢. Donc, Claire a acheté 9 chocolats au prix régulier et 3 chocolats au prix

de 25 ¢ chacun.
Ces trois chocolats lui ont coûté 3×25 ¢ en tout, ou 75 ¢.
Puisque Claire a payé 6,15 \$ en tout et que les trois chocolats au prix spécial ont coûté 0,75 \$, les 9 chocolats au prix régulier ont coûté 6,15 \$ − 0,75 \$, ou 5,40 \$.
Elle a donc payé 5,40 \$ pour 9 chocolats au prix régulier, soit $\frac{5{,}40\,\$}{9}$ par chocolat, ou 0,60 \$ par chocolat.
Le prix régulier d'un chocolat est donc de 60 ¢.

Réponse : (C)

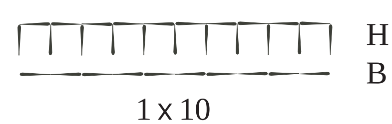
18. L'aire totale des régions ombrées est égale à l'aire du carré $JKLM$ moins l'aire de la partie du rectangle $PQRS$ qui chevauche $JKLM$.
Puisque $JK = 8$, le carré $JKLM$ a une aire de 8×8, ou 64.
Puisque JK est parallèle à PQ, alors la partie du rectangle $PQRS$ qui chevauche le carré est un rectangle. Sa longueur est égale à JK, soit 8, et sa hauteur est égale à PS, soit 2.
Donc, la partie du rectangle $PQRS$ qui chevauche le carré a une aire égale à 8×2, ou 16.
L'aire totale des régions ombrées est donc égale à $64 - 16$, ou 48.

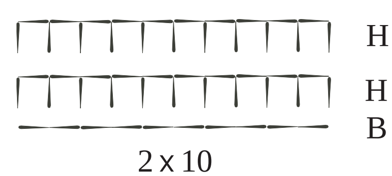
Réponse : (D)

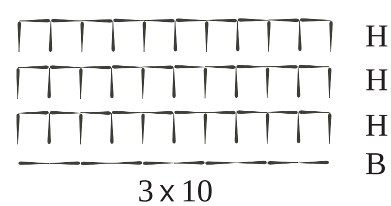
19. On sait qu'avec ce dé particulier, la probabilité d'obtenir un multiple de 3 est égale à $\frac{1}{2}$. Donc, la moitié des 6 faces du dé, c'est-à-dire 3 faces, doivent avoir un nombre qui est un multiple de 3.
On peut donc éliminer le choix (A) qui a 2 multiples de 3 sur ses faces (3 et 6), ainsi que le choix (E) qui a 4 multiples de 3 sur ses faces (3, 3, 3 et 6).
On sait aussi que la probabilité d'obtenir un nombre pair est égale à $\frac{1}{3}$. Donc, un tiers des 6 faces du dé, soit 2 faces, doivent avoir un nombre pair.
On peut donc éliminer le choix (C) qui a 4 nombres pairs sur ses faces (2, 4, 6 et 6), ainsi que le choix (D) qui a 3 nombres pairs sur ses faces (2, 4 et 6).
Il reste le choix (B) qui doit être le bon choix. Dans ce choix, il y a exactement 3 multiples de 3 (3, 3 et 6) et 2 nombres pairs (2 et 6).

Réponse : (B)

20. Dans la 1^{re} figure ci-contre, le quadrillage 1×10 a été séparé en deux parties.
La partie du haut, H, est formée de 11 cure-dents verticaux et 11 cure-dents horizontaux pour un total de 21 cure-dents.
La partie du bas, B, est formée de 10 cure-dents horizontaux.
Dans la 2^{e} figure, le quadrillage 2×10 a été séparé en 2 parties H et 1 partie B.
Dans la 3^{e} figure, le quadrillage 3×10 a été séparé en 3 parties H et 1 partie B.







En continuant de cette façon, on peut conclure qu'un quadrillage $n \times 10$ peut être séparé en n parties H et 1 partie B.
Donc, un quadrillage 43×10 peut être séparé en 43 parties H et 1 partie B.
Chaque partie H est formée de 11 cure-dents verticaux et 11 cure-dents horizontaux pour un total de 21 cure-dents. La partie B est formée de 10 cure-dents horizontaux.
Le nombre total de cure-dents dans un quadrillage 43×10 est égal à $(43 \times 21) + (1 \times 10)$, ou $903 + 10$, ou 913.

Réponse : (A)

21. La somme des chiffres de la colonne des unités est égale à $P+P+P$, ou $3P$. Puisque la somme des chiffres de cette colonne se termine par un 7, il faut que le produit $3P$ se termine par un 7. Puisque P est un chiffre, il faut que $P=9$. On a donc :

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 7 & 9 \\ & 6 & Q & 9 \\ + & Q & Q & 9 \\ \hline 1 & 9 & 9 & 7 \end{array}$$

La somme des chiffres de la colonne des unités est donc égale à $9+9+9$, ou 27. Il y a donc une retenue de 2 qui est ajoutée à la colonne des dizaines.
La somme des chiffres de la colonne des dizaines, y compris la retenue, est donc égale à $2+7+Q+Q$, ou $9+2Q$. Puisque cette somme $9+2Q$ se termine par un 9, alors $2Q$ doit se terminer par un 0 (car $9+0=9$).
Puisque Q est un chiffre et que $2Q$ se termine par un 0, on doit avoir $Q=0$ ou $Q=5$.
Si $Q=0$, la somme des chiffres de la colonne des dizaines est égale à 9 et il n'y a aucune retenue qui est ajoutée à la colonne des centaines. La somme des chiffres de la colonne des centaines est alors égale à $7+6+0$, ou 13, ce qui ne correspond pas au 9 dans la somme au bas. On peut donc conclure que Q n'est pas égal à 0.
Donc $Q=5$. Donc $P+Q=14$.
On a donc la situation suivante. On peut vérifier que l'addition est bonne.

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 7 & 9 \\ & 6 & 5 & 9 \\ + & 5 & 5 & 9 \\ \hline 1 & 9 & 9 & 7 \end{array}$$

Réponse : (C)

22. On représente les nombres de certaines cases de la 4ᵉ rangée par les lettres m et n, comme dans le tableau ci-contre. Donc, $10, m, 36$ et n sont quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique.
On remarque que 36 est 26 de plus que 10. Or, pour passer de 10 à 36, dans cette suite, il faut ajouter la constante deux fois. Puisque $\frac{26}{2}=13$, il faut que la constante soit 13. On a donc $m=10+13$ (ou $m=23$), $23+13=36$ et $n=36+13$ (ou $n=49$).
On voit que $10, 23, 36, 49$ est bien une suite arithmétique.
Dans la 4ᵉ colonne, il y a une différence de 24 entre 25 et n (qui est égal à 49). Or, pour passer de 25 à 49, il faut ajouter la constante deux fois. Puisque $\frac{24}{2}=12$, la constante est égale à 12. On a donc $x=25+12$, ou $x=37$.
On peut voir le tableau rempli ci-contre.

1			
4			25
7			*x*
10	*m*	36	*n*

1	5	9	13
4	11	18	25
7	17	27	37
10	23	36	49

Réponse : (A)

23. Le triangle PQR est isocèle et rectangle, car $PQ=QR$ et $\angle PQR=90^\circ$.
On a donc $\angle QPR=\angle QRS=45^\circ$.
Si on considère la base PR de ce triangle, la hauteur correspondante QS coupe la base en son milieu S. Les triangles SQP et SQR sont donc identiques et leur aire est $\frac{1}{2}$ de celle du triangle PQR.

Le triangle SQR est isocèle et rectangle, car $\angle QSR=90^\circ$ et $\angle QRS=45^\circ$, d'où $\angle SQR=45^\circ$. Donc $SQ=SR$.

Comme pour le triangle précédent, la hauteur ST coupe la base QR en son milieu T de manière à former deux triangles identiques, SQT et SRT. L'aire de chacun de ces triangles est donc $\frac{1}{2}$ de l'aire du triangle SQR, ou $\frac{1}{4}$ de l'aire du triangle PQR.

De même, la hauteur TU du triangle RST divise ce triangle en deux triangles identiques, STU et RTU. Chacun de ces triangles a une aire égale à $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ de l'aire du triangle PQR, ou $\frac{1}{8}$ de l'aire du triangle PQR.

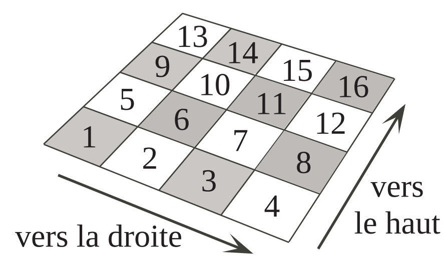
De même, la hauteur UV du triangle RTU coupe ce triangle en deux triangles identiques, RUV et TUV. Chacun de ces triangles a une aire égale à $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{8}$ de l'aire du triangle PQR, ou $\frac{1}{16}$ de l'aire du triangle PQR.

De même, la hauteur VW du triangle RUV divise ce triangle en deux triangles identiques, UVW et RVW. Chacun de ces triangles a une aire égale à $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{16}$ de l'aire du triangle PQR, ou $\frac{1}{32}$ de l'aire du triangle PQR.

Puisque l'aire du triangle STU est $\frac{1}{8}$ de l'aire du triangle PQR et que l'aire du triangle UVW est $\frac{1}{32}$ de l'aire du triangle PQR, que $\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{4+1}{32}$, ou $\frac{5}{32}$, alors la partie ombrée correspond à $\frac{5}{32}$ du triangle PQR.

Réponse : (D)

24. On numérote les cases du damier comme dans la figure ci-contre. Un roulement vers le haut est noté H et un roulement vers la droite est noté D.



On déterminera d'abord les cases qui ne seront pas en contact avec la face du cube qui contient le cercle, puis on démontrera que les autres cases du damier seront en contact avec cette face du cube.

En position initiale, on voit que la case 1 n'est pas en contact avec la face qui contient le cercle. Elle ne le sera donc jamais.

Pour atteindre les cases 2, 3 et 4, il faut rouler le cube vers la droite et aucune de ces cases ne sera en contact avec la face du cube qui contient le cercle (les séquences de roulements pour atteindre ces cases respectives sont D, DD et DDD), car cette face est toujours sur le devant.

Pour atteindre les cases 5 et 9, il faut rouler le cube vers le haut, et dans chaque cas, la face qui contient le cercle n'est jamais en contact avec ces cases (les séquences de roulements pour atteindre ces cases respectives sont H et HH).

La case 6 peut être atteinte par deux séquences de roulements, soit DH ou HD, et dans chaque cas, la face qui contient le cercle n'est jamais en contact avec cette case.

La case 10 peut être atteinte par trois séquences de roulements, soit HHD, HDH ou DHH et dans chaque cas, la face qui contient le cercle n'est jamais en contact avec cette case.

Il arrive que ces huit cases $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10)$ sont les seules cases qui ne seront jamais en contact avec la face du cube qui contient le cercle.

Dans le tableau suivant, on indique, pour chaque autre case, une séquence de roulements qui fait en sorte que la face du cube qui contient le cercle arrive sur cette case.

Dans la troisième colonne, on indique la position de la face du cube qui contient le cercle après chaque roulement de la séquence.

On utilise les lettres G pour gauche, D pour droite, H pour haut, B pour bas, A pour arrière et F pour le devant (de face).

Case	Séquence de roulements	Position du cercle
7	HDD	HDB
8	$DHDD$	$FHDB$
11	$HDHD$	$HDDB$
12	$DHDHD$	$FHDDB$
13	HHH	HAB
14	$DHHH$	$FHAB$
15	$DDHHH$	$FFHAB$
16	$DDDHHH$	$FFFHAB$

Donc, 8 cases du damier ne seront jamais en contact avec la face du cube qui contient un cercle, quel que soit le trajet.

Réponse : (C)

25. Soit b, v, r, j et o les nombres respectifs de billets bleus, verts, rouges, jaunes et orangés.
On sait que $b : v : r = 1 : 2 : 4$ et $v : j : o = 1 : 3 : 6$.
Seule la lettre v parait dans les deux rapports. Pour qu'elle ait la même valeur dans les deux rapports, on multiplie les membres du deuxième rapport par 2. Le rapport $1 : 3 : 6$ devient $2 : 6 : 12$, ce qui est équivalent.
On a donc $b : \mathbf{v} : r = 1 : \mathbf{2} : 4$ et $\mathbf{v} : j : o = \mathbf{2} : 6 : 12$. Puisque v est égal à 2 dans les deux rapports, on peut combiner les deux rapports pour obtenir $b : v : r : j : o = 1 : 2 : 4 : 6 : 12$.
Donc pour chaque billet bleu, il y a 2 billets verts, 4 billets rouges, 6 billets jaunes et 12 billets orangés, pour un total de $1 + 2 + 4 + 6 + 12$, ou 25 billets.
Puisqu'il y a 400 billets en tout et qu'on peut les regrouper en groupes de 25, on peut former 16 groupes, car $16 \times 25 = 400$.
Il y a donc 16 billets bleus, 32 billets verts ($16 \times 2 = 32$), 64 billets rouges ($16 \times 4 = 64$), 96 billets jaunes ($16 \times 6 = 96$) et 192 billets orangés ($16 \times 12 = 192$).
Il reste à déterminer le plus petit nombre de billets qu'il faut tirer de la boite pour s'assurer qu'on a tiré au moins 50 billets d'une même couleur.
Il est important de comprendre que l'on pourrait tirer 49 billets d'une même couleur sans *s'assurer* qu'on a tiré au moins 50 billets d'une même couleur.
Ainsi il serait possible que les 195 premiers billets tirés soient 49 billets orangés, 49 billets jaunes, 49 billets rouges, tous les 32 billets verts et tous les 16 billets bleus ($49+49+49+32+16 = 195$).
Dans ce cas, le billet suivant que l'on tire devrait être un billet orangé, jaune ou rouge, car tous les billets verts et bleus auraient déjà été tirés. Ce billet suivant serait donc le 50$^{\text{e}}$ billet orangé, jauge ou rouge.
Donc, le plus petit nombre de billets qu'il faut tirer de la boite pour s'assurer qu'on a tiré au moins 50 billets d'une même couleur est 196.

Réponse : (D)

8e année

1. On a : $10^2 + 10 + 1 = 10 \times 10 + 10 + 1 = 100 + 10 + 1 = 111$

Réponse : (D)

2. On a : $15 - 3 - 15 = 12 - 15 = -3$

Réponse : (D)

3. *Solution 1*
Pour déterminer le plus petit nombre de l'ensemble $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}\right\}$, on utilise un dénominateur commun, soit 12. L'ensemble $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}\right\}$ est équivalent à l'ensemble $\left\{\frac{1\times6}{2\times6}, \frac{2\times4}{3\times4}, \frac{1\times3}{4\times3}, \frac{5\times2}{6\times2}, \frac{7}{12}\right\}$, ou à l'ensemble $\left\{\frac{6}{12}, \frac{8}{12}, \frac{3}{12}, \frac{10}{12}, \frac{7}{12}\right\}$.
Le plus petit de ces nombres est $\frac{3}{12}$. Donc, le plus petit nombre de l'ensemble donné est $\frac{1}{4}$.
Solution 2
À l'exception du nombre $\frac{1}{4}$, chaque nombre est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.
En effet, on voit que chaque numérateur est supérieur ou égal à la moitié de son dénominateur.
Puisque $\frac{1}{4}$ est le seul nombre inférieur à $\frac{1}{2}$, il doit être le plus petit nombre de l'ensemble.

Réponse : (C)

4. Puisque Ahmed s'arrête pour parler à Kee à un quart du chemin, les 12 km qui restent correspondent à $1 - \frac{1}{4}$, ou $\frac{3}{4}$, de la distance totale.
Donc, $\frac{1}{4}$ de la distance totale correspond à 4 km, soit 3 fois moins.
Donc, Ahmed a parcouru 4 km jusqu'à Kee et il continue sur 12 km.
En tout, il parcourt 4 km + 12 km, ou 16 km.

Réponse : (B)

5. Puisque Jarek a multiplié un nombre par 3 pour obtenir 90, le nombre qu'il a multiplié doit être 30, car $\frac{90}{3} = 30$ ou $30 \times 3 = 90$.
Si, au contraire, Jarek divisait le nombre 30 par 3, il obtiendrait 10.

Réponse : (B)

6. *Solution 1*
On évalue le membre de gauche de l'équation :
$10 \times 20 \times 30 \times 40 \times 50 = 200 \times 30 \times 40 \times 50 = 6000 \times 40 \times 50 = 240\,000 \times 50 = 12\,000\,000$.
De même, on évalue le produit du membre de droite de l'équation :
$100 \times 2 \times 300 \times 4 \times \square = 200 \times 300 \times 4 \times \square = 60\,000 \times 4 \times \square = 240\,000 \times \square$.
L'équation devient donc $12\,000\,000 = 240\,000 \times \square$.
Puisque $12\,000\,000 \div 240\,000 = 50$, on doit placer le nombre 50 dans la case.

Solution 2
Le produit des deux premiers nombres du membre de gauche est égal au produit des deux premiers nombres du membre de droite, c'est-à-dire que $10 \times 20 = 200 = 100 \times 2$.
De même, le produit des 3e et 4e nombres du membre de gauche est égal au produit des 3e et 4e nombres du membre de droite, c'est-à-dire que $30 \times 40 = 1200 = 300 \times 4$.
Puisque le produit des quatre premiers nombres du membre de gauche est égal au produit des quatre premiers nombres du membre de droite, le 5e nombre du membre de gauche doit être égal au 5e nombre du membre de droite.
Donc, on doit placer le nombre 50 dans la case.

Réponse : (C)

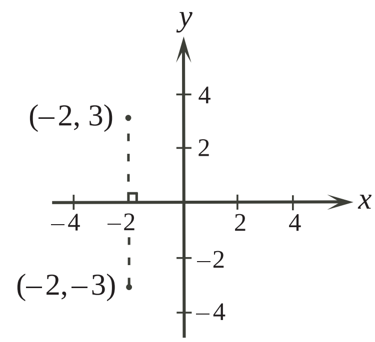
7. Il y a 26 lettres dans l'alphabet.
Dans le nom d'Alonso, il y a 5 lettres différentes, soit a, l, o, n, s.
Si Alonso prend au hasard un carreau du sac, il y a une possibilité de 5 résultats favorables sur 26. La probabilité de prendre un carreau qui porte une lettre de son nom est donc de $\frac{5}{26}$.

Réponse : (C)

8. Lorsque l'autographe de Manuel Mathé a perdu 30 % de sa valeur, elle a perdu $\frac{30}{100} \times 100\,\$$, ou $0{,}30 \times 100\,\$$, ou 30 $ en valeur.
Après cette perte, l'autographe valait donc $100\,\$ - 30\,\$$, ou 70 $.
Si la valeur de l'autographe augmentait ensuite de 40 %, il y aurait une augmentation de $\frac{40}{100} \times 70\,\$$, ou $0{,}40 \times 70\,\$$, ou 28 $.
Après cette augmentation, l'autographe vaudrait alors $70\,\$ + 28\,\$$, ou 98 $.

Réponse : (A)

9. Lorsqu'on fait subir au point $(-2, -3)$ une réflexion par rapport à l'axe des abscisses, l'image aura la même abscisse que le point initial, soit -2.
Puisque le point initial est à une distance de 3 unités en dessous de l'axe des abscisses, l'image sera à une distance de 3 unités au-dessus de l'axe des abscisses.
L'image aura donc une ordonnée de 3.
L'image aura donc pour coordonnées $(-2, 3)$.



Réponse : (E)

10. Les 4 pièces de 5 ¢ ont une valeur de 4×5 ¢, ou 20 ¢.
Les 6 pièces de 10 ¢ ont une valeur de 6×10 ¢, ou 60 ¢.
Les 2 pièces de 25 ¢ ont une valeur de 2×25 ¢, ou 50 ¢.
Le rapport de la valeur de quatre pièces de 5 ¢ à la valeur de six pièces de 10 ¢ à la valeur de deux pièces de 25 ¢ est de 20 : 60 : 50, ou 2 : 6 : 5.

Réponse : (B)

11. Puisque $x = 4$, l'équation $3x + 2y = 30$ devient $3 \times 4 + 2y = 30$, ou $12 + 2y = 30$.
Or, on sait que $12 + 18 = 30$. Donc $2y = 18$.
Puisque $2 \times 9 = 18$, alors $y = 9$.

Réponse : (E)

12. *Solution 1*
D'après la priorité des opérations, on a : $(2^3)^2 - 4^3 = 8^2 - 4^3 = 64 - 64 = 0$

Solution 2
On exprime 4 sous la forme 2^2 et on utilise une loi des exposants qui n'est autre que le comptage des facteurs :

$$\begin{aligned}(2^3)^2 - 4^3 &= (2^3)^2 - (2^2)^3 \\ &= 2^{3\times 2} - 2^{2\times 3} \\ &= 2^6 - 2^6 \\ &= 0\end{aligned}$$

Réponse : (A)

13. Il y a une période de 4 ans entre deux jeux olympiques d'été consécutifs.
Il faut 4 autres années pour de nouveaux jeux olympiques d'été.
Dans le tableau suivant, on indique le nombre minimum d'années entre 2, 3, 4, 5 et 6 jeux olympiques d'été consécutifs.

Nombre de jeux olympiques d'été	Nombre minimum d'années entre ces jeux
2	4
3	8
4	12
5	16
6	20

On voit qu'il faut au moins 16 ans entre 5 jeux olympiques d'été et au moins 20 ans entre 6 jeux olympiques d'été.
(Par exemple, il pourrait y avoir des jeux olympiques d'été les années 1, 5, 9, 13 et 17.)
Donc durant une période de 18 ans, il pourrait y avoir un maximum de 5 jeux d'été.

Réponse : (C)

14. Un cube a 6 faces identiques. Puisque l'aire totale du cube est de 54 cm^2, chaque face a une aire de 9 cm^2, car $54 \div 6 = 9$.
Chaque face carrée du cube a des côtés de 3 cm, car $3 \times 3 = 9$.
Le volume du cube est égal au produit de l'aire de la base et de la hauteur, soit $9 \times 3\,\text{cm}^3$, ou $27\,\text{cm}^3$. (On aurait pu utiliser le produit de la longueur, de la largeur et de la hauteur, soit $3 \times 3 \times 3\,\text{cm}^3$, ou $27\,\text{cm}^3$.)

Réponse : (D)

15. *Solution 1*
Lorsqu'on divise 10 000 par 13 à l'aide de la calculatrice, on obtient $10\,000 \div 13 = 769{,}230\ldots$
Puisque $769 \times 13 = 9997$ et que $10\,000 - 9997 = 3$, on a un quotient de 769 et un reste de 3.
On peut écrire ce résultat au moyen d'un *énoncé de division* : $10\,000 = 769 \times 13 + 3$.
Le tableau suivant contient l'énoncé de division qui correspond à chaque choix de réponse, ainsi que le reste.

Choix de réponse	Énoncé de division	Reste
(A)	$9\,997 = 769 \times 13 + 0$	0
(B)	$10\,003 = 769 \times 13 + 6$	6
(C)	$10\,013 = 770 \times 13 + 3$	3
(D)	$10\,010 = 769 \times 13 + 0$	0
(E)	$10\,016 = 770 \times 13 + 6$	6

Seul le nombre 10 013 donne un reste de 3 lorsqu'il est divisé par 13.

Solution 2
Selon l'énoncé, il y a un reste de 3 lorsque 10 000 est divisé par 13.
Si on ajoute n'importe quel multiple de 13 au nombre 10 000 et qu'on divise le résultat par 13, on aura aussi un reste de 3.
On voit que parmi les choix de réponses, seul le nombre 10 013 diffère de 10 000 par un multiple de 13. Donc lorsqu'on divise 10 013 par 13, on obtient un reste de 3.

Réponse : (C)

16. Puisqu'il est aussi probable d'avoir un garçon qu'une fille, il y a 2 résultats possibles équiprobables par rapport au premier enfant, soit G et F.
Dans chaque cas, il est aussi probable d'avoir un garçon qu'une fille en ce qui regarde le deuxième enfant. Il y a donc 4 résultats possibles équiprobables par rapport aux deux premiers enfants, soit GG, GF, FG et FF.
Dans chaque cas, il est aussi probable d'avoir un garçon qu'une fille en ce qui regarde le troisième enfant. Il y a donc 8 résultats possibles équiprobables par rapport aux trois premiers enfants, soit GGG, GGF, GFG, GFF, FGG, FGF, FFG et FFF.
Dans une famille de trois enfants, il y a donc 8 résultats possibles équiprobables. Parmi ces résultats, il y a 1 résultat favorable où tous les enfants sont des filles.
Donc, la probabilité pour que les 3 enfants soient des filles est de $\frac{1}{8}$.

Réponse : (E)

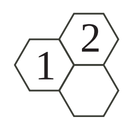
17. Puisque $PQRS$ est un rectangle, alors $\angle PQR = 90^\circ$.
Puisque $\angle PQR = \angle PQS + \angle RQS$, alors $90^\circ = (5x)^\circ + (4x)^\circ$, d'où $90 = 9x$, ou $x = 10$.
Dans le triangle SRQ, $\angle SRQ = 90^\circ$ et $\angle RQS = (4x)^\circ = 40^\circ$.
Donc $\angle QSR = y^\circ = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ$, d'où $y^\circ = 50^\circ$.
Donc $y = 50$.

Réponse : (D)

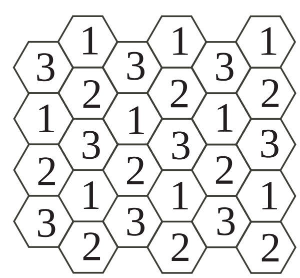
18. Calcul de Sylvia : $\frac{2}{3} \times 1\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$.
Calcul de Jani : $\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$.
La différence entre les deux réponses est égale à $2\frac{1}{6} - 1$, ou $1\frac{1}{6}$.

Réponse : (B)

19. On cherche le plus petit nombre de couleurs que Séréna peut utiliser pour colorier les hexagones. On sait qu'il faut plus d'une couleur. Est-il possible de n'utiliser que deux couleurs ? On utilise les numéros $1, 2, 3$ pour représenter les trois premières couleurs différentes.
On considère deux hexagones adjacents de couleurs 1 et 2 (puisqu'ils partagent un côté), ainsi qu'un troisième hexagone qui leur est adjacent, comme dans la figure ci-contre.



Puisque le troisième hexagone partage un côté avec chaque autre hexagone, il ne peut pas recevoir la couleur 1 ou la couleur 2.
Il faut donc au moins 3 couleurs pour colorier les hexagones du carrelage.
Est-il possible de colorier tous les hexagones en employant seulement trois couleurs ?
La figure ci-contre montre une façon de le faire.
D'autres façons sont possibles aussi.
On peut donc conclure que le plus petit nombre de couleurs qu'il faut pour colorier le carrelage est trois.
On peut remarquer plusieurs régularités intéressantes dans ce carrelage colorié.
On suggère de trouver une autre façon de colorier le carrelage.



Réponse : (E)

20. *Solution 1*
Soit C dollars le cout initial du livre.
Christine a donc $\frac{3}{4}C$ dollars et Fabia a $\frac{1}{2}C$ dollars.
En tout, le nombre de dollars qu'elles ont est égal à $\frac{3}{4}C + \frac{1}{2}C$, ou $\frac{3}{4}C + \frac{2}{4}C$, ou $\frac{5}{4}C$.
Si le livre coutait 3 \$ de moins, son cout serait de $C - 3$ dollars et deux copies du livre couteraient $2(C-3)$ dollars, ou $2C - 6$ dollars.
Au nouveau prix, Christine et Fabia pourraient acheter deux copies du livre.
On a donc $2C - 6 = \frac{5}{4}C$. On résout :

$$\begin{aligned} 2C - 6 &= \tfrac{5}{4}C \\ 2C - \tfrac{5}{4}C &= 6 \\ \tfrac{8}{4}C - \tfrac{5}{4}C &= 6 \\ \tfrac{3}{4}C &= 6 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{3}{4}$ de $8 = 6$, alors $C = 8$. Le cout initial du livre est donc de 8 \$.

Solution 2
On procède par essais systématiques en utilisant les valeurs dans les choix de réponse.

Cout initial du livre	Argent que Christine et Fabia peuvent partager	Nouveau cout	Nombre de livres qu'elles peuvent acheter
4 \$	$\frac{3}{4}$ de 4 \$ + $\frac{1}{2}$ de 4 \$ = 3,00 \$ + 2 \$ = 5 \$	1 \$	$5 \div 1 = 5$
16 \$	$\frac{3}{4}$ de 16 \$ + $\frac{1}{2}$ de 16 \$ = 12 \$ + 8 \$ = 20 \$	13 \$	$20 \div 13 = 1{,}53\ldots$
12 \$	$\frac{3}{4}$ de 12 \$ + $\frac{1}{2}$ de 12 \$ = 9 \$ + 6 \$ = 15 \$	9 \$	$15 \div 9 = 1{,}66\ldots$
10 \$	$\frac{3}{4}$ de 10 \$ + $\frac{1}{2}$ de 10 \$ = 7,50 \$ + 5 \$ = 12,5 \$	7 \$	$12{,}50 \div 7 = 1{,}78\ldots$
8 \$	$\frac{3}{4}$ de 8 \$ + $\frac{1}{2}$ de 8 \$ = 6 \$ + 4 \$ = 10 \$	5 \$	$10 \div 5 = 2$

On voit que si le livre coutait 8 \$ au départ, Christine et Fabia pourraient acheter exactement deux copies du livre. Le cout initial du livre est donc de 8 \$.

Réponse : (E)

21. On représente les nombres de certaines cases de la 1[re] colonne par les lettres m et n, comme dans le tableau ci-contre.
Donc $5, m, n, 23$ forment une suite arithmétique.
On remarque que 23 est 18 de plus que 5. Or, pour passer de 5 à 23, dans cette suite, il faut ajouter la constante trois fois.
Puisque $\frac{18}{3} = 6$, il faut que la constante soit 6.
Donc $m = 5 + 6$, et $n = 11 + 6$, ou $m = 11$ et $n = 17$.
(On voit que les nombres $5, 11, 17, 23$ forment bien une suite arithmétique.)

5			
m			1211
n		1013	
23	x		

On représente les nombres de certaines cases de la 2e rangée par les lettres p et q, comme dans le tableau ci-contre.
Donc $11, p, q, 1211$ forment une suite arithmétique.
On remarque que 1211 est 1200 de plus que 11. Or, pour passer de 11 à 1211, dans cette suite, il faut ajouter la constante trois fois. Puisque $\frac{1200}{3} = 400$, il faut que la constante soit 400.
Donc $p = 11 + 400$, ou $p = 411$. Donc $q = 411 + 400$, ou $q = 811$.
(On voit que les nombres $11, 411, 811, 1211$ forment bien une suite arithmétique.)

5			
11	p	q	1211
17		1013	
23	x		

On représente un nombre de la 3e rangée par r, comme dans le tableau ci-contre.
Donc $17, r, 1013$ forment une suite arithmétique.
Puisque 1013 est 996 de plus que 17. Or, pour passer de 17 à 1013, dans cette suite, il faut ajouter la constante deux fois. Puisque $\frac{996}{2} = 498$, il faut que la constante soit 498.
Donc $r = 17 + 498$, ou $r = 515$.
(On voit que les nombres $17, 515, 1013$ forment bien une suite arithmétique.)

5			
11	411	811	1211
17	r	1013	
23	x		

Dans la 2e colonne, les nombres $411, 515, x$ forment une suite arithmétique.
Puisque $515 - 411 = 104$, le nombre 515 est 104 de plus que le nombre 411. Il s'agit donc de la constante. Donc, x est 104 de plus que 515.
Donc $x = 619$.
On peut voir le tableau rempli ci-contre.

5	307	609	911
11	411	811	1211
17	515	1013	1511
23	619	1215	1811

Réponse : (B)

22. Dans le triangle FGH, soit $x = FG = GH$, puisque le triangle est isocèle.
Puisque le triangle est rectangle, alors par le théorème de Pythagore, on a $FH^2 = FG^2 + GH^2$, d'où $(\sqrt{8})^2 = x^2 + x^2$, ou $2x^2 = 8$. Donc $x^2 = 4$. Puisque $x > 0$, alors $x = 2$.
FG, GH et l'arc FH forment un secteur de centre G et de rayon GH.
Puisque l'angle FGH mesure $90°$, soit $\frac{1}{4}$ de $360°$, alors l'aire de ce secteur est $\frac{1}{4}$ de l'aire d'un cercle de centre G et de rayon 2.
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du secteur FGH moins celle du triangle FGH.
L'aire du secteur FGH est égale à $\frac{1}{4}\pi(2)^2$, ou $\frac{1}{4}\pi(4)$, ou π.
L'aire du triangle FGH est égale à $\frac{FG \times GH}{2}$, ou $\frac{2\times 2}{2}$, ou 2.
Donc, l'aire de la région ombrée est égale à $\pi - 2$.

Réponse : (A)

23. *Solution 1*
Dans la 1re course, Charlène est 20 m derrière lorsque Azarah traverse la ligne d'arrivée. Elle a donc parcouru 80 m dans le même temps que Azarah a mis pour parcourir 100 m.
Le rapport de la vitesse d'Azarah à la vitesse de Charlène est donc de 100 : 80.
Dans la 2e course, Gino est 10 m derrière lorsque Charlène traverse la ligne d'arrivée.
Il a donc parcouru 90 m dans le même temps que Charlène a mis pour parcourir 100 m.
Le rapport de la vitesse de Charlène à la vitesse de Gino est donc de 100 : 90.

Soit A, C et G les vitesses respectives de Azarah, Charlène et Gino.
On a donc $A : C = 100 : 80 = 25 : 20$ et $C : G = 100 : 90 = 20 : 18$.
Donc $A : C : G = 25 : 20 : 18$ et $A : G = 25 : 18 = 100 : 72$.
Dans un même intervalle de temps, le rapport des distances parcourues est le même que le rapport des vitesses.
Donc pendant que Azarah parcourt 100 m, Gino parcourt 72 m.
Lorsque Azarah traverse la ligne d'arrivée, Gino est 28 m derrière, car $100 - 72 = 28$.

Solution 2
Dans la 1re course, Charlène est 20 m derrière lorsque Azarah traverse la ligne d'arrivée. Elle a donc parcouru 80 m dans le même temps que Azarah a mis pour parcourir 100 m.
Le rapport de la vitesse d'Azarah à la vitesse de Charlène est donc de 100 : 80. Donc, la vitesse de Charlène est 80 % de la vitesse d'Azarah.
De même, la vitesse de Gino est 90 % de la vitesse de Charlène.
La vitesse de Gino est donc 90 % de 80 % de la vitesse d'Azarah.
Or, 90 % de 80 % est équivalent à $0{,}90 \times 0{,}80$, ce qui est égal à 0,72, ou 72 %. Donc, la vitesse de Gino est 72 % de la vitesse d'Azarah.
Lorsque Azarah a parcouru 100 m (c.-à-d. qu'elle a traversé la ligne d'arrivée), Gino a parcouru 72 % de 100 m, ou 72 m dans le même intervalle de temps.
Lorsque Azarah traverse la ligne d'arrivée, Gino est 28 m derrière, car $100 - 72 = 28$.

Réponse : (C)

24. La longueur z du plus grand côté est moins de la moitié du périmètre de 57.
Or $\frac{57}{2} = 28{,}5$. Puisque z est un entier, alors $z \leq 28$.
Lorsque $z = 28$, on a $x + y = 57 - 28$, ou $x + y = 29$.
On remplit un tableau donnant toutes les valeurs entières possibles de x et de y, sachant que $z = 28$ et que $x < y < z$.

y	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

On reprend en diminuant la valeur de z et en donnant toutes les valeurs entières possibles de x et de y.
Lorsque $z = 27$, on a $x + y = 57 - 27$, ou $x + y = 30$.

y	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
x	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Lorsque $z = 26$, on a $x + y = 57 - 26$, ou $x + y = 31$.

y	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
x	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Lorsque $z = 25$, on a $x + y = 57 - 25$, ou $x + y = 32$.

y	24	23	22	21	20	19	18	17
x	8	9	10	11	12	13	14	15

Lorsque $z = 24$, on a $x + y = 57 - 24$, ou $x + y = 33$.

y	23	22	21	20	19	18	17
x	10	11	12	13	14	15	16

Lorsque $z = 23$, on a $x + y = 57 - 23$, ou $x + y = 34$.

y	22	21	20	19	18
x	12	13	14	15	16

Lorsque $z = 22$, on a $x + y = 57 - 22$, ou $x + y = 35$.

y	21	20	19	18
x	14	15	16	17

Lorsque $z = 21$, on a $x + y = 57 - 21$, ou $x + y = 36$.

y	20	19
x	16	17

Lorsque $z = 20$, on a$x + y = 57 - 20$, ou $x + y = 37$.

y	19
x	18

La valeur suivante de z serait 19, ce qui donnerait $x + y = 57 - 19$, ou $x + y = 38$.
Or d'après l'équation $x + y = 38$, la valeur de x ou celle de y doit être supérieure à 19, ce qui contredit les conditions $z = 19$ et $x < y < z$.
Donc, la plus petite valeur possible de z est 20 et nous avons donné toutes les valeurs possibles de x, y et z.
Le nombre de triangles possibles est donc égal à $13 + 11 + 10 + 8 + 7 + 5 + 4 + 2 + 1$, ou 61.

Réponse : (B)

25. *Solution 1*
Soit g et f les nombres respectifs de garçons et de filles inscrits au début de l'hiver dans le cours de ski.
Lorsque 11 garçons se sont ajoutés et que treize filles ont abandonné, il y avait $g + 11$ garçons et $f - 13$ filles dans le cours.
Or à ce moment, le rapport du nombre de garçons au nombre de filles était de $1 : 1$. Le nombre de garçons était donc égal au nombre de filles. Donc $g + 11 = f - 13$, d'où $f = g + 24$.
Puisqu'il y avait au moins 66 élèves inscrits au départ, alors $g + f \geq 66$.
Si on reporte $f = g+24$ dans l'expression $g+f$, on obtient $g+(g+24)$, ou $2g+24$. L'inéquation devient alors $2g + 24 \geq 66$, ou $2g \geq 42$, d'où $g \geq 21$.
On utilise les conditions $f = g + 24$ et $g \geq 21$ pour éliminer certains choix de réponses.
On vérifie si le rapport $g : (g + 24)$ peut être équivalent au rapport donné dans le choix de réponse, tout en respectant la condition $g \geq 21$.
Dans (A), on a $g : (g + 24) = 4 : 7$, ou $\frac{g}{g+24} = \frac{4}{7}$, d'où $7g = 4g + 96$, ou $3g = 96$, ou $g = 32$.
Dans (B), on a $g : (g + 24) = 1 : 2$ ou $\frac{g}{g+24} = \frac{1}{2}$, d'où $2g = g + 24$, ou $g = 24$.
Dans (C), on a $g : (g + 24) = 9 : 13$ ou $\frac{g}{g+24} = \frac{9}{13}$, d'où $13g = 9g + 216$, ou $4g = 216$, ou $g = 54$.
Dans (D), on a $g : (g + 24) = 5 : 11$ ou $\frac{g}{g+24} = \frac{5}{11}$, d'où $11g = 5g + 120$, ou $6g = 120$, ou $g = 20$.
Dans (E), on a $g : (g + 24) = 3 : 5$ ou $\frac{g}{g+24} = \frac{3}{5}$, d'où $5g = 3g + 72$, ou $2g = 72$, ou $g = 36$.
Donc, seul le rapport $5 : 11$ ne satisfait pas à la condition $g \geq 21$, car $g = 20$.

Solution 2
Comme dans la Solution 1, on établit les conditions $f = g + 24$ et $g \geq 21$.
La fraction $\frac{g}{f}$ devient alors $\frac{g}{g+24}$ (puisque $f = g + 24$).
Puisque $g \geq 21$, alors g peut égaler $21, 22, 23, 24, \ldots$ et la plus petite valeur possible de g est 21.
Lorsque $g = 21$, $\frac{g}{g+24}$ devient $\frac{21}{21+24}$, ou $\frac{21}{45} = 0{,}4\overline{6}$.
Lorsque $g = 22$, $\frac{g}{g+24}$ devient $\frac{22}{22+24}$, ou $\frac{22}{46} \approx 0{,}478$.
Lorsque $g = 23$, $\frac{g}{g+24}$ devient $\frac{23}{23+24}$, ou $\frac{23}{47} \approx 0{,}489$.
Lorsque $g = 24$, $\frac{g}{g+24}$ devient $\frac{24}{24+24}$, ou $\frac{24}{48} = 0{,}5$.

À mesure que la valeur de g augmente, la valeur du rapport $\frac{g}{g+24}$ ou de la fraction $\frac{g}{f}$ augmente. Peut-on le vérifier ?
Donc, la plus petite valeur possible du rapport $\frac{g}{f}$ est $\frac{21}{45}$, ou $0{,}4\overline{6}$.
Si on compare ce rapport aux 5 choix de réponses, on obtient, pour le choix (D),
$\frac{5}{11} = 0{,}\overline{45} < 0{,}4\overline{6} = \frac{21}{45}$, ce qui contredit le plus petit rapport possible. Donc, ce choix n'est pas un rapport possible.
(Pour les autres choix de réponse, on remarque que les rapports donnés sont tous supérieurs à $\frac{21}{45}$ et qu'ils sont possibles, comme dans la Solution 1.)
Donc, seul le rapport (D) n'est pas un rapport possible du nombre de garçons au nombre de filles.

Réponse : (D)

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2012

(7^e^ et 8^e^ années – Secondaire I et II)

le mercredi 16 mai 2012

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 17 mai 2012

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Comité du concours Gauss

7^{e} année

1. On a : $202 - 101 + 9 = 101 + 9 = 110$

Réponse : (B)

2. En chiffres, le nombre 33 millions s'écrit 33 000 000.

Réponse : (D)

3. Les six nombres, soit 1, 2, 3, 4, 5 et 6, sont des résultats possibles et équiprobables.
Il y a 1 résultat favorable sur 6 résultats possibles.
Donc, la probabilité d'obtenir un 5 est égale à $\frac{1}{6}$.

Réponse : (B)

4. Une fraction positive augmente en valeur à mesure que son dénominateur diminue et elle diminue en valeur à mesure que son dénominateur augmente.
Puisque les cinq fractions ont le même numérateur, la plus grande fraction est celle qui a le plus petit dénominateur.
La plus grande fraction de l'ensemble $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right\}$ est $\frac{1}{2}$.

Réponse : (A)

5. *Solution 1*
L'angle indiqué par $\square$ et l'angle de 60° sont opposés par le sommet.
Or, deux angles opposés par le sommet sont congrus. Donc, l'angle indiqué par $\square$ mesure 60°.

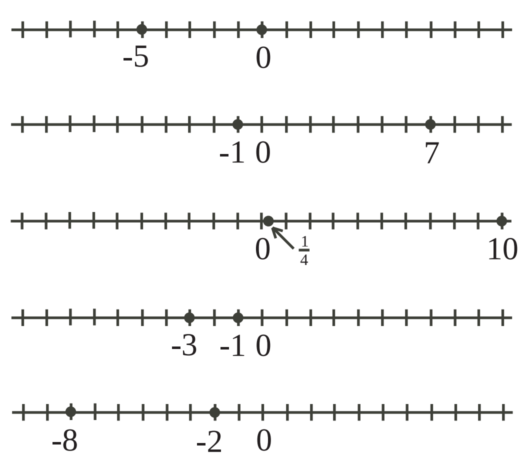
Solution 2
Tout angle plat mesure 180°.
Or, l'angle de 120° et l'angle indiqué par $\square$ forment un angle plat.
On a donc $120° + \square = 180°$.
Donc, l'angle indiqué par $\square$ mesure 60°.

Réponse : (A)

6. Puisque quinze fois le nombre est égal à 300, le nombre est égal à 300 divisé par 15, soit 20.

Réponse : (A)

7. Pour chaque énoncé, on place les deux nombres sur une droite numérique. Les cinq énoncés sont représentés ci-contre.
Lorsqu'on se déplace de gauche à droite, les nombres augmentent.
Lorsqu'on dit que le nombre A est moins que le nombre B, cela signifie donc que le nombre A est situé à gauche du nombre B.
On voit donc que les quatre premiers énoncés sont faux et que le cinquième est vrai. En effet, le nombre -8 est placé à la gauche du nombre -2, ce qui indique que -8 est moins que -2.



Réponse : (E)

8. Puisque Briana compte sur 6 de ses 8 tirs, elle ne compte pas sur 2 des 8 tirs.
Or $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\,\%$.
Donc, le pourcentage des tirs où elle ne compte pas est de 25 %.

Réponse : (E)

9. Selon le diagramme, les nombres de visites par jour que Ben a reçues, du lundi au vendredi, sont 300, 400, 300, 200 et 200.
On obtient la moyenne du nombre de visites par jour en additionnant ces nombres et en divisant la somme par 5.
Elle est donc égale à $(300 + 400 + 300 + 200 + 200) \div 5$, ce qui est égal à $1400 \div 5$, ou 280.
La moyenne du nombre de visites par jour est entre 200 et 300.

Réponse : (C)

10. Le graphique indique que le véhicule se déplace à une vitesse constante de 20 m/s.
À cette vitesse, le véhicule mettra 5 secondes pour parcourir une distance de 100 m, puisque $5 \times 20 = 100$, ou $100 \div 20 = 5$.

Réponse : (E)

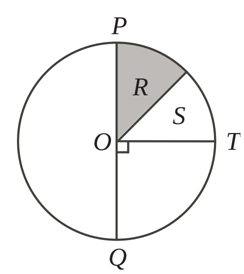
11. Puisque les quatre côtés d'un carré ont la même longueur et que le carré a un périmètre de 36 cm, chaque côté a une longueur de 9 cm, car $36 \div 4 = 9$.
Puisque le carré a une base de 9 cm et une hauteur de 9 cm, il a une aire de 9×9 cm^2, ou 81 cm^2.

Réponse : (B)

12. Le choix (A) est égal à 3,75, ou $3\frac{3}{4}$, ou $\frac{15}{4}$.
Le choix (B) est égal à $\frac{14+1}{3+1}$, ou $\frac{15}{4}$.
Le choix (C) est égal à $\frac{3}{4} + 3$, ou $3\frac{3}{4}$. Il est donc égal à $\frac{15}{4}$.
Le choix (D) est égal à $\frac{5}{4} \times \frac{3}{4}$, ou $\frac{5\times3}{4\times4}$, ou $\frac{15}{16}$, ce qui n'est pas égal à $\frac{15}{4}$.
Le choix (E) est égal à $\frac{21}{4} - \frac{5}{4} - \frac{1}{4}$, ou $\frac{16}{4} - \frac{1}{4}$, ou $\frac{15}{4}$.
Seule l'expression numérique de (D) n'est pas égale à $\frac{15}{4}$.

Réponse : (D)

13. Puisque PQ passe par le centre O du cercle, il est un diamètre du cercle.
Puisque $\angle QOT = 90°$, alors $\angle POT = 180° - 90°$, ou $\angle POT = 90°$.
Puisque $\frac{90°}{360°} = \frac{1}{4} = 25\,\%$, l'aire du secteur POT est $\frac{1}{4}$ de l'aire du cercle, ou 25 % de l'aire du cercle.
Puisque les régions R et S ont la même aire, chacune a une aire égale à la moitié de 25 % de l'aire du cercle, soit 12,5 % de l'aire du cercle.
Donc, la flèche s'arrêtera dans la région ombrée 12,5 % du temps.



Réponse : (E)

14. Pour que la différence soit la plus grande possible, on crée un nombre aussi grand que possible et le deuxième aussi petit que possible.
Le chiffre des dizaines contribue davantage à la grandeur d'un nombre que le chiffre des unités.
Pour créer le plus grand nombre possible, on choisit le 8 (le plus grand des quatre chiffres) comme chiffre des dizaines et le 6 (le deuxième plus grand des quatre chiffres) comme chiffre des unités.
De même, pour créer le plus petit nombre possible, on choisit le 2 (le plus petit des quatre chiffres) comme chiffre des dizaines et le 4 comme chiffre des unités.
La plus grande différence possible est égale à $86 - 24$, ou 62.

Réponse : (B)

15. Puisqu'il tombe 1 mm de neige à toutes les 6 minutes, il en tombe 10 fois plus, soit 10 mm, en 60 minutes. Cela correspond à 1 cm en 60 minutes, ou 1 cm en 1 heure.
Puisqu'il tombe 1 cm de neige à chaque heure, il en tombera 100 cm en 100 heures.
Puisque 100 cm correspondent à 1 m, il faudra 100 heures pour que 1 m de neige soit tombée.
Réponse : (E)

16. Puisque $1 \times 2012 = 2012$, 1 et 2012 sont des diviseurs de 2012.
Puisque 2012 est pair, il est disible par 2. On a $2012 \div 2 = 1006$. Puisque $2 \times 1006 = 2012$, 2 et 1006 sont des diviseurs de 2012.
Puisque 1006 est pair, on peut conclure que 2012 est divisible par 4. On a $2012 \div 4 = 503$. Puisque $4 \times 503 = 2012$, 4 et 503 sont des diviseurs de 2012. Or, on donne que 503 est un nombre premier. Ce nombre n'admet donc aucun autre diviseur.
Les diviseurs de 2012, en paires, sont 1 et 2012, 2 et 1006, 4 et 503.
Le nombre 2012 a donc 6 diviseurs positifs entiers.
Réponse : (D)

17. *Solution 1*
Puisque le rapport du nombre de garçons au nombre de filles est de 8 : 5, on peut former 8 groupes de garçons et 5 groupes de filles, tous les groupes étant égaux.
Puisque les 128 garçons peuvent être placés en 8 groupes égaux et que $128 \div 8 = 16$, il y a 16 élèves par groupe.
Il y a donc 5 groupes de 16 filles pour un total de 80 filles dans l'école.
Puisqu'il y a 128 garçons et 80 filles dans l'école, il y a 208 élèves en tout.

Solution 2
On sait que le rapport du nombre de garçons au nombre de filles est de 8 : 5. On considère des rapports équivalents à 8 : 5, soit 16 : 10, 24 : 15, 32 : 20, ...
Puisqu'il y a 128 garçons dans l'école, on cherche le rapport équivalent 128 :?. Pour obtenir ce rapport équivalent, il faut multiplier les deux termes du rapport 8 : 5 par 16, car $128 \div 8 = 16$.
On obtient le rapport équivalent 128 : 80.
Il y a donc 128 garçons et 80 filles dans l'école pour un total de 208 élèves.

Solution 3
Puisque le rapport du nombre de garçons au nombre de filles est de 8 : 5, alors pour chaque 5 filles dans l'école, il y a 8 garçons.
Le nombre de filles dans l'école est donc égal à $\frac{5}{8}$ du nombre de garçons.
Puisqu'il y a 128 garçons dans l'école, le nombre de filles est égal à $\frac{5}{8}$ de 128.
Or $\frac{1}{8}$ de 128 est égal à 16. Donc $\frac{5}{8}$ de 128 est égal à 5×16, ou 80.
Il y a donc 128 garçons et 80 filles dans l'école pour un total de 208 élèves.

Solution 4
Puisque le rapport du nombre de garçons au nombre de filles est de 8 : 5, alors pour chaque 8 garçons dans l'école il y a 5 filles, ou 13 élèves.
Le nombre d'élèves dans l'école est donc égal à $\frac{13}{8}$ du nombre de garçons.
Puisqu'il y a 128 garçons dans l'école, le nombre d'élèves est égal à $\frac{13}{8}$ de 128.
Or $\frac{1}{8}$ de 128 est égal à 16. Donc $\frac{13}{8}$ de 128 est égal à 13×16, ou 208.
Il y a donc 208 élèves dans l'école.
Réponse : (C)

18. On peut utiliser les trois balances connues pour tenter d'obtenir un cercle, un losange et un triangle sur un plateau en équilibre avec l'autre plateau.
De plus, le contenu de l'autre plateau doit être dans un des cinq choix de réponse.
Par exemple, on considère la balance en haut à droite. Un losange et un cercle sont équilibrés par un triangle.
Si on ajoutait un triangle à chaque plateau de la balance, on aurait un cercle, un losange et un triangle équilibrés par deux triangles. Or, on ne retrouve pas deux triangles dans les choix de réponse.
On considère ensuite la balance en haut à gauche. Un triangle et un cercle sont équilibrés par un carré.
Si on ajoutait un losange à chaque plateau de la balance, on aurait un cercle, un losange et un triangle équilibrés par un carré et un losange.
Puisqu'on retrouve cette réponse dans les choix, il s'agit de la réponse que l'on cherche.

Dans une question à choix multiple, il n'est pas nécessaire de montrer que seul le choix (D) peut équilibrer un cercle, un losange et un triangle. Il est toutefois possible de démontrer que les autres choix de réponse ne peuvent pas équilibrer un cercle, un losange et un triangle.

Réponse : (D)

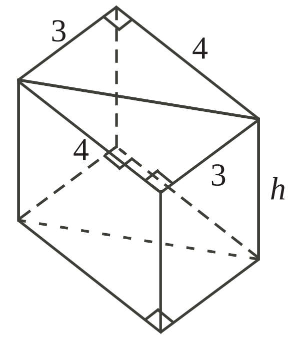
19. Si on place les cinq nombres en ordre croissant, la médiane est située au milieu.
On a donc __, __, 18, __, __.
Les nombres ont une moyenne de 20 et on veut que le dernier soit aussi grand que possible. Pour cela, il faudra que les autres nombres soient aussi petits que possible. On rappelle que les cinq nombres doivent être différents les uns des autres.
Les deux premiers nombres doivent donc être 1 et 2. On a donc 1, 2, 18, __, __.
Pour que le dernier nombre soit aussi grand que possible, il faut aussi que l'avant-dernier soit aussi petit que possible, tout en étant supérieur à 18. Ce nombre est donc égal à 19.
On a donc 1, 2, 18, 19, __.
Puisque les cinq nombres ont une moyenne de 20, ils ont une somme de 5×20, ou 100.
Puisque les quatre premiers nombres ont une somme de 40, le cinquième nombre est 60.
Le plus grand nombre possible est donc 60.

Réponse : (A)

20. Si Carl ou Marc dit « Demain, je mentirai » un jour qu'il ment, alors il dira la vérité le lendemain, car il ment.
Cela peut donc seulement se produire un jour qu'il ment qui est suivi d'un jour qu'il dit la vérité.
Dans le cas de Carl, cela se produit seulement le dimanche, puisqu'il ment le dimanche et dit la vérité le lundi. Dans le cas de Marc, cela se produit seulement le jeudi, car il ment le jeudi et dit la vérité le vendredi.
Si Carl ou Marc dit « Demain, je mentirai » un jour qu'il dit la vérité, alors il mentira le lendemain, puisqu'il dit la vérité.
Cela peut donc seulement se produire un jour qu'il dit la vérité qui est suivi d'un jour qu'il ment.
Dans le cas de Carl, cela se produit seulement le jeudi, car il dit la vérité le jeudi et ment le vendredi. Dans le cas de Marc, cela se produit seulement le lundi, car il dit la vérité le lundi et ment le mardi.
Le seul jour de la semaine que Carl et Marc peuvent dire « Demain, je mentirai » est donc le jeudi.

Réponse : (B)

21. On peut créer le prisme à base triangulaire en prenant un prisme dont la base est un rectangulaire de dimensions 3 cm sur 4 cm et en le tranchant à la verticale le long de la diagonale de la base.
Le prisme à base triangulaire est donc la moitié du prisme à base rectangulaire ci-contre.
Or, le prisme à base triangulaire a un volume de 120 cm^3. Le prisme à base rectangulaire a donc un volume deux fois plus grand, soit de 240 cm^3.
La base du prisme à base rectangulaire a une aire de 3×4 cm^2, ou 12 cm^2. Le volume de ce prisme est égal au produit de cette aire et de la hauteur. On a donc $12h = 240$.
Puisque $12 \times 20 = 240$, alors $h = 20$.
Le grand prisme a un volume de 240 cm^3 et le prisme donné a un volume de 120 cm^3 lorsque les prismes ont une hauteur de 20 cm.



Réponse : (B)

22. On peut supposer que la classe compte 100 élèves, sans que cela ne change la moyenne.
Donc, 20 élèves ont obtenu 0 bonne réponse, 5 élèves ont obtenu 1 bonne réponse, 40 élèves ont obtenu 2 bonnes réponses et 35 élèves ont obtenu 3 bonnes réponses.
Le nombre total de points obtenus est donc égal à :

$$(20 \times 0) + (5 \times 1) + (40 \times 2) + (35 \times 3) = 0 + 5 + 80 + 105 = 190$$

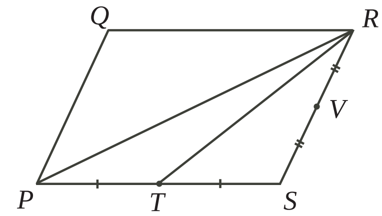
Puisque les 100 élèves ont obtenu un total de 190 points, la moyenne de la classe est égale à $190 \div 100$, ou 1,9.

Réponse : (B)

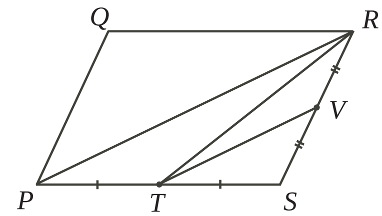
23. On peut obtenir le chiffre des unités d'un produit en multipliant seulement les chiffres des unités des nombres qui sont multipliés.
Par exemple, pour obtenir le chiffre des unités du produit 12×53, on multiplie 2×3, pour obtenir 6. Le chiffre des unités du produit 12×53 est 6.
Pour déterminer le chiffre des unités de N, on détermine le produit des chiffres des unités des nombres qui sont utilisés pour obtenir N.
Les chiffres des unités de ces nombres sont 1, 3, 7, 9, 1, 3, 7, 9, $\ldots$, et ainsi de suite.
Les chiffres 1, 3, 7 et 9 sont donc répétés dans chaque groupe de quatre nombres dans la multiplication.
Or, il y a dix groupes de quatre nombres dans la multiplication. Le chiffre des unités de N est donc égal au chiffre des unités du produit de dix groupes de $1 \times 3 \times 7 \times 9$.
On détermine d'abord le chiffre des unités du produit de $1 \times 3 \times 7 \times 9$.
Le chiffre des unités du produit de 1×3 est 3.
Le chiffre des unités du produit de 3×7 est 1 (puisque $3 \times 7 = 21$).
Le chiffre des unités du produit de 1×9 est 9.
Donc, le chiffre des unités du produit de $1 \times 3 \times 7 \times 9$ est 9.
(On aurait pu calculer $1 \times 3 \times 7 \times 9 = 189$ pour déterminer le chiffre des unités du produit.)
Dans la multiplication pour obtenir N, chacun des dix groupes de quatre nombres a un produit dont le chiffre des unités égal à 9. Pour obtenir le chiffre des unités de N, il suffit donc d'obtenir le chiffre des unités du produit de $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$.
Ce produit est égal au produit de $81 \times 81 \times 81 \times 81 \times 81$.
Puisque tous les chiffres des unités égalent 1, on obtient un chiffre des unités égal à 1.

Réponse : (A)

24. La diagonale PR coupe le parallélogramme $PQRS$ en deux triangles de même aire. L'aire du triangle PRS est donc égale à la moitié de celle du parallélogramme $PQRS$, soit 20.
On construit la médiane RT du triangle PRS. (Une *médiane* est un segment qui joint un sommet du triangle au milieu du côté opposé.)
La médiane RT divise le triangle PRS en deux triangles de même aire, puisque la base PS est coupée en son milieu et que la hauteur est inchangée. Donc, l'aire du triangle TRS est égale à la moitié de celle du triangle PRS, soit 10.



De même, on construit la médiane TV du triangle TRS, comme dans la figure ci-contre. La médiane TV coupe le triangle TRS en deux triangles de même aire, puisque sa base SR est coupée en son milieu et que la hauteur est inchangée.
Donc, l'aire du triangle TVS est égale à la moitié de celle du triangle TRS, soit 5.
L'aire de la région $PRVT$ est égale à l'aire du triangle PRS moins celle du triangle TVS, soit $20 - 5$, ou 15.



Réponse : (C)

25. Il existe une formule très utile et bien connue pour la somme des n premiers entiers strictement positifs, $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n$.
Selon cette formule, la somme $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n$ est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (la preuve se trouve à la fin de la solution).
Par exemple, si $n = 6$, la somme $1+2+3+4+5+6$ est égale à : $\dfrac{6(6+1)}{2} = \dfrac{6 \times 7}{2} = \dfrac{42}{2} = 21$.
On peut le vérifier en additionnant au long dans sa tête.
Dans le tableau donné, il y a 1 nombre dans la rangée 1, 2 nombres dans la rangée 2, 3 nombres dans la rangée 3, et ainsi de suite. Il y a donc toujours n nombres dans la rangée n.
Chaque rangée contient un entier de plus que la rangée précédente.
Le dernier nombre de chaque rangée est égal au nombre de nombres dans le tableau jusque là.
Par exemple, le dernier nombre de la rangée 4 est égal à 10, ce qui est égal au nombre de nombres dans le tableau jusque là, soit $1 + 2 + 3 + 4$.
Donc le dernier nombre de la rangée n est égal à $1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n$, ce qui est égal à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
On utilise ceci pour déterminer le numéro de la rangée qui contient 2016.
Par tâtonnements, on obtient $\dfrac{62(63)}{2} = 1953$ et $\dfrac{63(64)}{2} = 2016$. Donc, le dernier nombre de la rangée 62 est 1953 et le dernier nombre de la rangée 63 est 2016.
Puisque 2000 est situé entre 1953 et 2016, il se trouve dans la rangée 63.
On doit maintenant déterminer dans quelle colonne le nombre 2000 est situé de manière à pouvoir déterminer combien il y a d'entiers inférieurs à 2000 dans cette colonne.
On sait que le nombre 2016 est le dernier nombre de la rangée 63 et qu'il n'y a donc aucun nombre au-dessus de lui dans la même colonne du tableau.
À partir de 2016, si on se déplace de 1 position vers la gauche, on arrive au nombre 2015 qui a 1 nombre au-dessus de lui dans la même colonne du tableau ; si on se déplace de 2 positions vers la gauche, on arrive au nombre 2014 qui a 2 nombres au-dessus de lui dans la même colonne du tableau, et ainsi de suite.

Si on se déplace vers la gauche de k positions à partir de 2016, on arrive au nombre $2016 - k$ qui a k nombres au-dessus de lui dans la même colonne du tableau.
En d'autres mots, dans la rangée 63, il y a k entiers au-dessus du nombre $2016 - k$ dans la même colonne du tableau.
Puisque le nombre 2000 est situé dans la rangée 63, on pose $2016 - k = 2000$ et on résout pour obtenir $k = 16$.
Il y a donc 16 nombres au-dessus du nombre 2000 dans la même colonne que le nombre 2000.

<u>Vérification de la formule</u> : $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
Soit S la somme des n premiers entiers strictement positifs. Donc $S = 1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n$.
Si on renverse l'ordre des nombres, on a $S = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1$.
On additionne les membres de droites de ces deux équations, terme par terme :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\ + & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & (n-3) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Dans cette somme, l'expression $(n+1)$ paraît n fois. La somme est donc égale à $n(n+1)$.
Or, cette somme représente $S + S$, ou $2S$. On a donc $2S = n(n+1)$, ou $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Réponse : (D)

8e année

1. On fait appel à la priorité des opérations : $3 \times (3 + 3) \div 3 = 3 \times 6 \div 3 = 18 \div 3 = 6$

RÉPONSE : (A)

2. Les six nombres, soit 1, 2, 3, 4, 5 et 6, sont des résultats possibles et équiprobables.
Il y a 1 résultat favorable sur 6 résultats possibles.
Donc, la probabilité d'obtenir un 5 est égale à $\frac{1}{6}$.

RÉPONSE : (B)

3. Sous forme décimale, le nombre cinquante-six centièmes s'écrit 0,56.

RÉPONSE : (D)

4. Puisque les points P, Q et R sont situés sur une même ligne droite, $\angle PQR = 180^\circ$.
Donc $42^\circ + x^\circ + x^\circ = 180^\circ$, ou $42 + 2x = 180$, ou $2x = 138$. Donc $x = 69$.

RÉPONSE : (A)

5. Le nombre de pièces de 5 ¢ qu'il faut pour faire un dollar (100 ¢) est égal à $100 \div 5$, ou 20.
Le nombre de pièces de 10 ¢ qu'il faut pour faire un dollar (100 ¢) est égal à $100 \div 10$, ou 10.
Donc, si on utilisait des pièces de 5 ¢ pour faire un dollar, il faudrait 10 pièces de plus que si on utilisait des pièces de 10 ¢.

RÉPONSE : (B)

6. Lorsque Robert a coupé chacune des 12 parties de la pizza en 2 morceaux égaux, la pizza compte 24 morceaux égaux.
Robert mange 3 de ces morceaux égaux.
Il a donc mangé $\frac{3}{24}$ de la pizza, ou $\frac{1}{8}$ de la pizza.

RÉPONSE : (E)

7. La feuille de papier de forme rectangulaire mesure 25 cm sur 9 cm. Puisque $25 \times 9 = 225$, la feuille a une aire de 225 cm^2.
Une feuille carrée a une hauteur égale à sa base.
Si les côtés ont une longueur c, alors l'aire du carré est égale à $c \times c$, ou c^2.
On a donc $c^2 = 225$, d'où $c = \sqrt{225}$, car c représente une longueur qui est positive. Donc $c = 15$.
La feuille carrée mesure donc 15 cm sur 15 cm.

RÉPONSE : (A)

8. Puisque le nombre donné, soit 0,2012, est sous forme décimale, il est plus facile de comparer les intervalles si on écrit les autres nombres sous forme décimale.
On a donc : $\frac{1}{10} = 0{,}1$; $\frac{1}{5} = 0{,}2$; $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$; $\frac{1}{2} = 0{,}5$
Puisque le nombre 0,2012 est supérieur à 0,2 et inférieur à 0,25, il est situé entre $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{4}$.

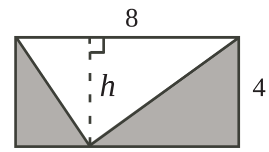
RÉPONSE : (C)

9. On reporte $x = 2$ dans l'expression $3^x - x^3$ pour obtenir :

$$3^2 - 2^3 = (3 \times 3) - (2 \times 2 \times 2) = 9 - 8 = 1$$

RÉPONSE : (D)

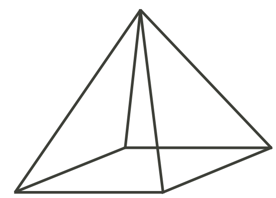
10. Le rectangle a une aire de 8×4, ou 32.
La partie non ombrée est un triangle qui a une base de 8 et une hauteur h de 4, puisque la hauteur indiquée est parallèle à un des côtés verticaux du rectangle.



Ce triangle non ombré a donc une aire égale à $\frac{1}{2} \times 8 \times 4$, ou 4×4, ou 16.
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du rectangle moins celle du triangle.
Elle est donc égale à $32 - 16$, ou 16.

Réponse : (B)

11. Puisque la pyramide a une base carrée, les 4 côtés de la base forment 4 arêtes de la pyramide.
Comme l'indique la figure ci-contre, chaque sommet à la base de la pyramide est relié à l'apex de la pyramide par une arête.
En tout, la pyramide a 8 arêtes.



Réponse : (A)

12. Puisqu'il tombe 1 mm de neige à toutes les 6 minutes, il en tombe 10 fois plus, soit 10 mm, en 60 minutes. Cela correspond à 1 cm en 60 minutes, ou 1 cm en 1 heure.
Puisqu'il tombe 1 cm de neige à chaque heure, il en tombera 100 cm en 100 heures.
Puisque 100 cm correspondent à 1 m, il faudra 100 heures pour que 1 m de neige soit tombée.

Réponse : (E)

13. Le mode d'un ensemble de nombres est le nombre qui se présente le plus souvent.
Les trois nombres ont un mode de 9.
Au moins deux des trois nombres doivent égaler 9, autrement les trois nombres seraient distincts et il y aurait trois modes.
Si les trois nombres égalaient 9, la moyenne ne pourrait pas être égale à 7. Donc, exactement deux des nombres égalent 9 et ils ont une somme de 18.
Puisque les trois nombres ont une moyenne de 7, ils ont une somme de 3×7, ou 21.
Puisque deux des nombres ont une somme de 18, le troisième nombre doit être 3. Les nombres sont donc 9, 9 et 3.
Le plus petit des nombres est 3.

Réponse : (C)

14. *Solution 1*
Puisque la moitié de la racine carrée d'un nombre est égale à 1, la racine carrée est égale à 2.
Puisque la racine carrée du nombre est égale à 2, le nombre est 4.

Solution 2
Soit x le nombre qu'on cherche.
Puisque la moitié de la racine carrée de x est égale à 1, alors $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 1$.
On obtient une équation équivalente si on double chaque membre de l'équation.
Donc $2 \times \frac{1}{2}\sqrt{x} = 1 \times 2$, ou $\sqrt{x} = 2$.
Puisque les deux membres de l'équation sont égaux, alors le carré du membre de gauche est égal au carré du membre de droite. Donc $x = 4$.

Réponse : (B)

15. On remplit un tableau pour indiquer les lettres et les nombres qui sont récités en même temps.

Elena	P	Q	R	S	T	U	P	Q	R	S	T	U
Zacharie	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4

Après ces 12 étapes, on voit qu'Elena recommence sa série de 6 lettres en récitant « P » de nouveau. De même, Zacharie recommencera sa série de 4 nombres en récitant « 1 » de nouveau. Donc, cette suite de 12 entrées du tableau se répétera.
Pour connaître la combinaison qui ne sera pas dite en même temps, il suffit de vérifier lequel des cinq choix de réponse ne fait pas partie du tableau.
La seule combinaison qui ne fait pas partie du tableau est $R2$. C'est elle qui ne sera pas dite.

Réponse : (D)

16. *Solution 1*
Il y a 25 % plus d'autos que de camions dans le stationnement.
Pour déterminer un rapport, on peut choisir un nombre facile à utiliser. On suppose donc qu'il y a 100 camions dans le stationnement.
Il y a 25 % plus d'autos que de camions. Puisque 25 % de 100 est égal à 25, il y a 25 autos de plus que de camions. Il y a donc 125 autos dans le stationnement.
Le rapport du nombre d'autos au nombre de camions est de 125 : 100, ou 5 : 4.

Solution 2
Il y a 25 % plus d'autos que de camions dans le stationnement, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$ de plus.
Pour déterminer un rapport, on peut choisir un nombre facile à utiliser. On suppose qu'il y a 4 camions dans le stationnement. Il y a donc 1 auto de plus, soit 5 autos.
Le rapport du nombre d'autos au nombre de camions est de 5 : 4.

Solution 3
Soit x le nombre de camions dans le stationnement.
Puisqu'il y a 25 % plus d'autos que de camions, le nombre d'autos est égal à $1{,}25x$.
Le rapport du nombre d'autos au nombre de camions est égal à $1{,}25x : x$, ou $1{,}25 : 1$, ou $(1{,}25 \times 4) : (1 \times 4)$, ou $5 : 4$.

Réponse : (D)

17. Le chiffre des dizaines contribue davantage à la grandeur d'un nombre que le chiffre des unités.
Pour déterminer la plus petite différence possible entre deux nombres, on cherche d'abord la plus petite différence possible entre les chiffres des dizaines.
Parmi les chiffres donnés, la plus petite différence possible entre les chiffres des dizaines est 2 et il y a trois façons de l'obtenir. En effet, on peut choisir 2 et 4, 4 et 6 ou 6 et 8 comme chiffres des dizaines. On a donc :

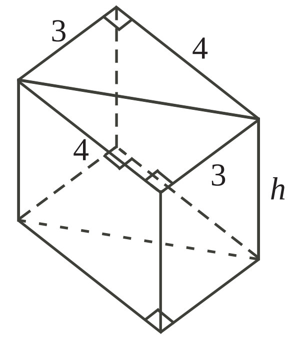
$$\begin{array}{r} 4\square \\ -2\square \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\square \\ -4\square \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\square \\ -6\square \\ \hline \end{array}$$

On complète les nombres en utilisant les deux chiffres restants.
Pour que la différence soit aussi petite que possible, on place le plus grand des deux chiffres avec le plus petit des deux nombres et le plus petit des deux chiffres avec le plus grand des deux nombres. On obtient ce qui suit :

$$\begin{array}{r} 46 \\ -28 \\ \hline 18 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 62 \\ -48 \\ \hline 14 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 82 \\ -64 \\ \hline 18 \end{array}$$

La plus petite différence possible est égale à $62 - 48$, ou 14.

Réponse : (B)



18. On peut créer le prisme à base triangulaire en prenant un prisme dont la base est un rectangulaire de dimensions 3 cm sur 3 cm et en le tranchant à la verticale le long de la diagonale de la base.
Le prisme à base triangulaire est donc la moitié du prisme à base rectangulaire ci-contre.
Or, le prisme à base triangulaire a un volume de 120 cm^3. Le prisme à base rectangulaire a donc un volume deux fois plus grand, soit de 240 cm^3.
La base du prisme à base rectangulaire a une aire de 3×4 cm^2, ou 12 cm^2. Le volume de ce prisme est égal au produit de cette aire et de la hauteur. On a donc $12h = 240$.
Puisque $12 \times 20 = 240$, alors $h = 20$.
Le grand prisme a un volume de 240 cm^3 et le prisme donné a un volume de 120 cm^3 lorsque les prismes ont une hauteur de 20 cm.

Réponse : (B)

19. Il y a 480 élèves qui participent et chacun participe à 4 épreuves différentes pour un total de 480×4 participations, ou 1920 participations.
Chaque épreuve compte 20 participants.
Le nombre d'épreuves est donc égal à $1920 \div 20$, ou 96.
Chaque épreuve est surveillée par 1 surveillant adulte et chacun des 16 surveillants adultes surveille le même nombre d'épreuves.
Le nombre d'épreuves que chaque adulte surveille est donc égal à $96 \div 16$, ou 6.

Réponse : (C)

20. *Solution 1*
Puisque la probabilité de choisir une boule bleue est de $\frac{2}{5}$, au départ, il y a 2 boules bleues pour chaque 5 boules dans le sac, c'est-à-dire 2 boules bleues pour chaque 3 boules rouges. Le rapport du nombre de boules bleues au nombre de boules rouges est donc de 2 : 3.
Après avoir ajouté 5 boules bleues et avoir enlevé 5 boules rouges, le rapport doit être de 3 : 2 pour que la probabilité de choisir une boule bleue soit de $\frac{3}{5}$.
On procède par essais systématiques en examinant des nombres possibles de boules bleues et de boules rouges au départ. Dans chaque cas, on ajoute 5 boules bleues et on enlève 5 boules rouges et on examine le rapport obtenu.

Avant		Après		
Nombre de boules bleues	Nombre de boules rouges	Nombre de boules bleues	Nombre de boules rouges	Nouveau rapport
4	6	9	1	9 : 1
6	9	11	4	11 : 4
8	12	13	7	13 : 7
10	15	15	10	15 : 10 = 3 : 2

Il y a donc 25 boules dans le sac.

Solution 2
Puisque la probabilité de choisir une boule bleue est de $\frac{2}{5}$, au départ, il y a 2 boules bleues pour chaque 5 boules dans le sac, c'est-à-dire 2 boules bleues pour chaque 3 boules rouges. Le rapport du nombre de boules bleues au nombre de boules rouges est donc de 2 : 3.
Il y a donc 2 groupes de boules bleues et 3 groupes équivalents de boules rouges dans le sac.
Or, lorsqu'on ajoute 5 boules bleues et qu'on enlève 5 boules rouges, le nouveau rapport du

nombre de boules bleues au nombre de boules rouges est de 3 : 2, ce qui fait qu'il y a maintenant 3 groupes de boules bleues et 2 groupes équivalents de boules rouges.
En ajoutant 5 boules bleues, on a ajouté 1 groupe et en enlevant 5 boules rouges, on a enlevé 1 groupe. Il y a donc 5 boules par groupe, avant et après.
À la fin, il y a donc 3 groupes de 5 boules bleues et 2 groupes de 5 boules rouges pour un total de 25 boules.

Solution 3
Puisque la probabilité de choisir une boule bleue est de $\frac{2}{5}$, au départ, il y a 2 boules bleues pour chaque 5 boules dans le sac, c'est-à-dire 2 boules bleues pour chaque 3 boules rouges. Le rapport du nombre de boules bleues au nombre de boules rouges est donc de 2 : 3.
Il y a donc 2 groupes de boules bleues et 3 groupes équivalents de boules rouges dans le sac.
Supposons qu'il y a k boules par groupe. Au départ, il y a donc $2k$ boules bleues et $3k$ boules rouges.
Lorsque Luc ajoute 5 boules bleues, il y a alors $2k+5$ boules bleues dans le sac.
Luc enlève aussi 5 boules rouges du sac et le nombre total de boules, soit $2k+3k$, ou $5k$, demeure le même qu'au départ.
La nouvelle probabilité de choisir une boule bleue est égale au nombre de boules bleues, soit $2k+5$, divisé par le nombre total de boules, soit $5k$.
On a donc $\dfrac{2k+5}{5k} = \dfrac{3}{5}$. Pour résoudre, on peut obtenir un dénominateur commun $5k$.
On a donc $\dfrac{2k+5}{5k} = \dfrac{3k}{5k}$. Puisque les dénominateurs sont égaux, les numérateurs le sont aussi.
Donc $2k+5 = 3k$, ou $2k+5 = 2k+k$. Donc $k = 5$.
Il y a donc 5 boules par groupe. Il y a donc 3 groupes de 5 boules bleues et 2 groupes de 5 boules rouges pour un total de 25 boules.

Solution 4
Soit N le nombre de boules dans le sac au départ.
Puisque la probabilité de choisir une boule bleue est de $\frac{2}{5}$, au départ, il y a donc $\frac{2}{5}N$ boules bleues dans le sac au départ.
Lorsqu'on ajoute 5 boules bleues et qu'on enlève 5 boules rouges, le nombre total de boules dans le sac est encore égal à N.
Puisque la probabilité de choisir une boule bleue est de $\frac{3}{5}$, à la fin, il y a donc $\frac{3}{5}N$ boules bleues dans le sac à la fin.
Or, la différence entre le nombre de boules bleues à la fin et le nombre de boules bleues au départ est de 5, puisqu'on a ajouté 5 boules bleues.
Donc $\frac{3}{5}N - \frac{2}{5}N = 5$, ou $\frac{1}{5}N = 5$, ou $N = 25$.
Il y a donc 25 boules dans le sac.

Réponse : (E)

21. D'après la première balance, 1 cercle est équilibré par 2 triangles.
On peut doubler ce qu'il y a sur chaque plateau. Donc, 2 cercles sont équilibrés par 4 triangles.
D'après la deuxième balance, 2 cercles sont aussi équilibrés par 1 triangle et 1 carré.
Donc, 4 triangles sont équilibrés par 1 triangle et 1 carré, ce qui fait que 3 triangles sont équilibrés par 1 carré.
Donc, 6 triangles sont équilibrés par 2 carrés.
(On remarque qu'on a réussi à trouver un équilibre pour 2 carrés, mais notre solution ne paraît pas dans les cinq choix de réponse. On doit donc continuer.)
On peut remplacer 4 des 6 triangles par 2 cercles, comme on l'a vu plus haut.

Donc les 2 carrés, qui sont équilibrés par 6 triangles, sont aussi équilibrés par 2 cercles et 2 triangles.
On peut donc remplacer le ? par 2 cercles et 2 triangles.

Réponse : (D)

22. Puisque un seul des énoncés est vrai, les deux autres sont faux.
Supposons que le 2^e énoncé est vrai et que les deux autres sont faux.
D'après le 2^e énoncé, l'édifice Euclide est le plus élevé.
Puisque le 3^e énoncé est faux, l'édifice Galilée est le plus élevé.
On a une contradiction, puisque l'Euclide et le Galilée ne peuvent pas tous les deux être le plus élevé. Notre supposition est donc fausse et le 2^e énoncé n'est pas vrai.

Supposons que le 3^e énoncé est vrai et que les deux autres sont faux
Donc, le Galilée n'est pas le plus élevé.
Puisque le 2^e énoncé est faux, l'Euclide n'est pas le plus élevé.
Puisque le Galilée et l'Euclide ne sont pas le plus élevé, il faut que le Newton soit le plus élevé.
Or, d'après le 1^{er} énoncé, qui est faux, le Newton est le moins élevé. On a une contradiction, puisque le Newton ne peut pas être le plus élevé et le moins élevé. Notre supposition est donc fausse et le 3^e énoncé n'est pas vrai.

Puisque les 2^e et 3^e énoncés ne sont pas vrais, le 1^{er} doit être vrai.
Puisque le 1^{er} énoncé est vrai, le Newton doit être le plus élevé ou le deuxième plus élevé.
Puisque le 3^e énoncé est faux, le Galilée doit être le plus élevé. Le Newton est donc le deuxième plus élevé.
Il reste l'Euclide qui doit être le moins élevé. Ceci est en accord avec le 2^e énoncé, qui est faux, ce qui veut dire que l'Euclide n'est pas le plus élevé
En ordre croissant selon leur hauteur, les trois édifices sont l'Euclide (E), le Newton (N) et le Galilée (G).

Réponse : (C)

23. Il faut procéder avec soin pour compter les motifs de façon systématique.
On procède en considérant des groupes de motifs qui ont des attributs communs.
On regroupe les motifs selon le nombre de triangles de « coin » qui sont ombrés, soit 3, 2, 1 ou 0.

<u>3 coins ombrés</u>
On peut créer un seul motif ayant trois coins ombrés, soit celui de la Figure 1.

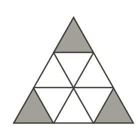


Figure 1

<u>2 coins ombrés</u>
On fixe d'abord 2 coins ombrés (en haut et à droite). On numérote les autres triangles comme dans la figure A.
Il suffit d'ombrer un seul de ces 6 triangles pour compléter un motif. On ne peut pas ombrer le triangle 2 ou le triangle 6, puisqu'ils partagent un côté avec un triangle ombré.

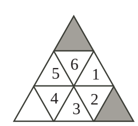


Figure A

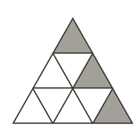


Figure 2

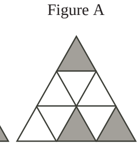


Figure 3

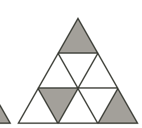


Figure 4

On peut ombrer le triangle 1, ce qui nous donne un premier motif, comme dans la figure 2.
On peut aussi ombrer le triangle 3 (Figure 3) ou le triangle 4 (Figure 4).
On ne peut pas ombrer le triangle 5, car on obtiendrait le même motif que celui de la figure 3

par réflexion.
Les motifs des figures 2, 3 et 4 ne peuvent pas être appariés entre eux par une rotation ou une réflexion.
Il y a donc 3 motifs différents qui ont 2 coins ombrés.

<u>1 coin ombré</u>
On fixe d'abord le coin ombré (en haut).
On numérote les autres triangles comme dans la figure B.
Il suffit d'ombrer 2 de ces 6 triangles pour compléter un motif.
On ne peut ombrer le triangle 6, puisqu'il partage un côté avec le triangle ombré.

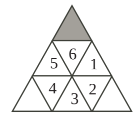


Figure B

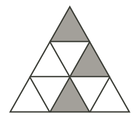


Figure 5

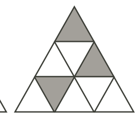


Figure 6

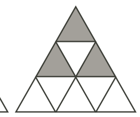


Figure 7

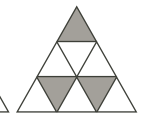


Figure 8

De plus, on ne peut pas ombrer deux triangles adjacents, puisqu'ils partagent un côté.
On obtient un premier motif en ombrant les triangles 1 et 3 (Figure 5).
On obtient un deuxième motif en ombrant les triangles 1 et 4 (Figure 6).
On obtient un troisième motif en ombrant les triangles 1 et 5 (Figure 7).
On obtient un quatrième motif en ombrant les triangles 2 et 4 (Figure 8).
Si on ombre les triangles 2 et 5, on obtient une réflexion de la figure 6, ce qui est interdit.
Si on ombre les triangles 3 et 5, on obtient une réflexion de la figure 5, ce qui est interdit
Les motifs des figures 5, 6, 7 et 8 ne peuvent pas être appariés entre eux par une rotation ou une réflexion.
Il n'y a aucun autre choix de deux triangles.
Il y a donc 4 motifs différents qui ont 1 coin ombré.

<u>Aucun coin ombré</u>
On numérote les petits triangles comme dans la figure C.
Il faut ombrer 3 de ces 6 triangles pour créer un motif. Puisqu'on ne peut ombrer deux triangles adjacents, il n'y a que deux choix. On peut ombrer les triangles 1, 3 et 5 (Figure 9) ou les triangles 2, 4 et 6 (Figure 10).

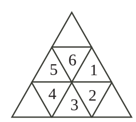


Figure C

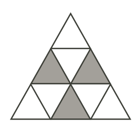


Figure 9

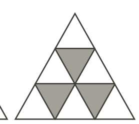


Figure 10

Ces deux motifs ne peuvent être appariés par une rotation ou une réflexion.
Il y a donc 2 motifs dans lesquels aucun coin n'est ombré.

Dans les quatre cas que l'on a considérés, il y a un total de $1 + 3 + 4 + 2$ motifs, ou 10 motifs. Puisque chaque cas compte un nombre différent de coins ombrés, aucun motif ne peut être apparié à un autre par une rotation ou une réflexion.
On peut donc créer 10 motifs différents.

Réponse : (C)

24. On cherche tous les groupes de cailloux qui ont une somme de 11.
On considère d'abord les groupes de 2 cailloux.
Il y a 5 groupes possibles qui ont une somme de 11, soit : $\{1, 10\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$ et $\{5, 6\}$.
On considère les groupes de 3 cailloux.
Il y a 5 groupes possibles qui ont une somme de 11, soit : $\{1, 2, 8\}$, $\{1, 3, 7\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{2, 3, 6\}$ et $\{2, 4, 5\}$. Comment peut-on vérifier que ce sont les seuls groupes de 3 cailloux ?

Il est possible de former un groupe de 4 cailloux qui ont une somme de 11, soit $\{1, 2, 3, 5\}$, mais il est impossible de former deux autres groupes avec les cailloux qui restent, soit $\{4, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
Il suffit donc de considérer des groupes de 2 ou de 3 cailloux.
Il faut maintenant compter le nombre de façons qu'il y a de choisir trois des dix groupes ci-haut de manière qu'aucun nombre n'est répété dans les groupes.
On considère quatre façons de choisir, soit : 3 groupes de 3 cailloux, 2 groupes de 2 cailloux et 1 groupe de 3 cailloux, 1 groupe de 2 cailloux et 2 groupes de 3 cailloux, 3 groupes de 3 cailloux.

1$^{\text{er}}$ cas : 3 groupes de 2 cailloux

Puisqu'aucun nombre n'est répété dans les cinq groupes, il suffit de choisir 3 groupes.
Il y a 10 façons de choisir 3 groupes de 2 cailloux, soit :

$$\begin{array}{ll} \{1,10\}, \{2,9\}, \{3,8\} & \{1,10\}, \{4,7\}, \{5,6\} \\ \{1,10\}, \{2,9\}, \{4,7\} & \{2,9\}, \{3,8\}, \{4,7\} \\ \{1,10\}, \{2,9\}, \{5,6\} & \{2,9\}, \{3,8\}, \{5,6\} \\ \{1,10\}, \{3,8\}, \{4,7\} & \{2,9\}, \{4,7\}, \{5,6\} \\ \{1,10\}, \{3,8\}, \{5,6\} & \{3,8\}, \{4,7\}, \{5,6\} \end{array}$$

2$^{\text{e}}$ cas : 2 groupes de de 2 cailloux et 1 groupe de 3 cailloux

On remarque que certains nombres se trouvent à la fois dans un groupe de 2 cailloux et dans un groupe de 3 cailloux. Il faut donc faire attention.
Pour procéder de façon systématique, on choisit d'abord un groupe de 3 cailloux et on choisit ensuite 2 groupes de 2 cailloux de manière à éviter les répétitions. On obtient :

1 groupe de 3 cailloux	2 groupes de 2 cailloux
$\{1, 2, 8\}$	$\{4, 7\}, \{5, 6\}$
$\{1, 3, 7\}$	$\{2, 9\}, \{5, 6\}$
$\{1, 4, 6\}$	$\{2, 9\}, \{3, 8\}$
$\{2, 3, 6\}$	$\{1, 10\}, \{4, 7\}$
$\{2, 4, 5\}$	$\{1, 10\}, \{3, 8\}$

Il y a 5 façons de choisir un groupe de 3 cailloux et 2 groupes de 2 cailloux.

3$^{\text{e}}$ cas : 1 groupe de 2 cailloux et 2 groupes de 3 cailloux

On considère les groupes de 3 cailloux, soit $\{1, 2, 8\}$, $\{1, 3, 7\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{2, 3, 6\}$, and $\{2, 4, 5\}$.
Il y a beaucoup de répétitions entre ces groupes. Seuls $\{1, 3, 7\}$ et $\{2, 4, 5\}$ n'admettent aucune répétition entre eux.
Or, avec ces groupes, il est impossible de choisir un groupe de 2 cailloux sans répétitions.
Il n'y a donc aucune solution dans ce cas.

4$^{\text{e}}$ cas : 3 groupes de 3 cailloux

Dans le cas précédent, on a vu qu'il n'y avait que 2 groupes de 3 cailloux sans répétitions. Il est donc impossible de choisir 3 groupes de 3 cailloux sans répétitions
Il n'y a donc aucune solution dans ce cas.

Le nombre de choix de trois groupes de nombres ayant une somme de 11 est égal à $10 + 5$, ou 15.

Réponse : (E)

25. Puisque $WXYZ$ est un rectangle, alors $\angle XWZ = \angle WZY = 90^\circ$. Les triangles PWS et SZR sont donc rectangles.
On a aussi $WX = ZY = 15$ et $WZ = XY = 9$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PWS, $PS^2 = 3^2 + 4^2$, d'où $PS^2 = 9 + 16$, ou $PS^2 = 25$. Donc $PS = 5$ (puisque $PS > 0$).
De même, dans le triangle SZR, on a $SR^2 = 5^2 + 12^2$, d'où $SR^2 = 25 + 144$, ou $SR^2 = 169$. Donc $SR = 13$ (puisque $SR > 0$).
Dans les triangles PWS et RYQ, on a $PW = RY = 3$, $WS = YQ = 4$ et $\angle PWS = \angle RYQ = 90^\circ$.
Chacun de ces triangles a donc une aire de $\frac{1}{2} \times 3 \times 4$, ou 6.
Dans les triangles SZR et QXP, on a $SZ = QX = 5$, $ZR = XP = 12$ et $\angle SZR = \angle QXP = 90^\circ$.
Chacun de ces triangles a donc une aire de $\frac{1}{2} \times 12 \times 5$, ou 30.
On obtient l'aire du parallélogramme $PQRS$ en soustrayant l'aire des triangles PWS, RYQ, SZR et QXP de l'aire du rectangle $WXYZ$.
L'aire du rectangle $WXYZ$ est égale à $WX \times XY$, c'est-à-dire à 15×9, ou 135.
L'aire du parallélogramme $PQRS$ est donc égale à $135 - (2 \times 6) - (2 \times 30)$, ou 63.
Or, on peut aussi déterminer l'aire du parallélogramme $PQRS$ en multipliant la longueur de sa base et sa hauteur.
On considère la base SR du parallélogramme. La hauteur est donc égale à PT.
On a donc $SR \times PT = 63$, d'où $13 \times PT = 63$, ou $PT = \frac{63}{13}$.
Puisque $\angle STP = \angle PTR = 90^\circ$, le triangle PTS est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PTS, $ST^2 = PS^2 - PT^2$, d'où $ST^2 = 5^2 - \left(\frac{63}{13}\right)^2$.
Donc $ST^2 = 25 - \frac{3969}{169}$, ou $ST^2 = \frac{4225-3969}{169}$, ou $ST^2 = \frac{256}{169}$.
Donc $ST = \sqrt{\frac{256}{169}}$, ou $ST = \frac{16}{13}$ (puisque $ST > 0$).

Réponse : (D)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

Concours Gauss 2011

(7^{e} et 8^{e} années – Secondaire I et II)

le mercredi 11 mai 2011

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Lloyd Auckland
Terry Bae
Steve Brown
Ersal Cahit
Karen Cole
Jennifer Couture
Serge D'Alessio
Frank DeMaio
Fiona Dunbar
Mike Eden
Barry Ferguson
Barb Forrest
Judy Fox
Steve Furino
John Galbraith
Sandy Graham
Angie Hildebrand
Judith Koeller
Joanne Kursikowski
Bev Marshman
Dean Murray
Jen Nissen
J.P. Pretti
Linda Schmidt
Kim Schnarr
Jim Schurter
Carolyn Sedore
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), St. John's Ravenscourt School, Winnipeg, MB
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
Allison McGee, All Saints C.H.S., Kanata, ON
Kim Stenhouse, William G. Davis P.S., Cambridge, ON
David Switzer, Sixteenth Ave. P.S., Richmond Hill, ON
Tanya Thompson, Nottawa, ON
Chris Wu, Amesbury M.S., Toronto, ON

7^{e} année

1. On a : $5 + 4 - 3 + 2 - 1 = 9 - 3 + 2 - 1 = 6 + 2 - 1 = 8 - 1 = 7$

Réponse : (E)

2. On doit d'abord additionner 9 et 16. Donc $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$, ce qui est égal à 5.

Réponse : (E)

3. D'après le diagramme, un seul élève a choisi le printemps.
Puisqu'il y avait 10 élèves en tout, l'élève qui a choisi le printemps représente $\frac{1}{10}$ des élèves, c'est-à-dire $\frac{10}{100}$ des élèves, ou 10 % des élèves.

Réponse : (B)

4. Puisque le bœuf haché se vend 5,00 \$ le kilo, alors 12 kg de bœuf coûtent $12 \times 5{,}00$ \$, ou 60,00 \$.

Réponse : (C)

5. Puisque chaque nombre est entre 1 et 2, on considère les chiffres des dixièmes.
Les nombres 1,0101, 1,0011 et 1,0110 sont entre 1 et 1,1, tandis que les nombres 1,1001 et 1,1100 sont supérieurs à 1,1.
On peut donc éliminer ces deux derniers choix de réponse.
On considère ensuite les chiffres des centièmes.
Les nombres 1,0101 et 1,0110 ont 1 pour chiffre des centièmes, tandis que le nombre 1,0011 a un 0. Ce dernier nombre est donc le plus petit.
Voici les nombres en ordre croissant : $\{1{,}0011; 1{,}0101; 1{,}0110; 1{,}1001; 1{,}1100\}$

Réponse : (B)

6. Puisque vous choisissez un des cinq choix *au hasard*, chacun des cinq choix a la même chance d'être choisi. Il y a un choix favorable sur cinq choix possibles. La probabilité est donc égale à $\frac{1}{5}$.

Réponse : (A)

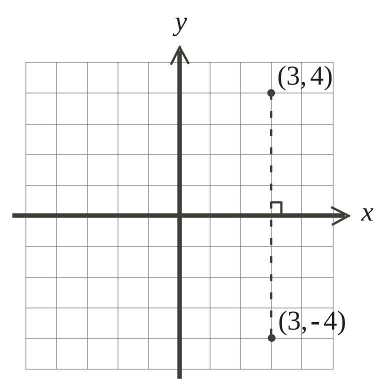
7. Puisqu'on additionne la fraction $\frac{1}{3}$ sept fois, la somme est égale à $7 \times \frac{1}{3}$.

Réponse : (E)

8. Avant le repas, Karl a parcouru 12 km du voyage de 36 km.
Puisque $36 - 12 = 24$, il lui reste 24 km à parcourir après le repas.
La fraction du voyage au complet qu'il lui reste à parcourir après le repas est égale à $\frac{24}{36}$, ou $\frac{2}{3}$.

Réponse : (D)

9. Après une réflexion par rapport à l'axe des abscisse, l'image du point $(3, 4)$ est le point $(3, -4)$, car les deux points auront la même abscisse 3, mais l'image sera au-dessous de l'axe et son ordonnée sera négative. De plus, les deux points seront à une distance de 4 de l'axe de réflexion.



Réponse : (D)

10. Anika dit que la plante est une rose *rouge* et Carla dit que c'est une dahlia *rouge*.
La couleur rouge est correcte ou incorrecte. Si elle est incorrecte, alors chaque fille a donné le bon nom, ce qui ne peut être vrai, car la plante ne peut être une rose et une dahlia en même temps.
Donc, la couleur est correcte, c'est-à-dire que les deux filles ont donc donné la couleur rouge correctement. Elles ont donc donné le nom incorrect. La plante n'est donc ni une rose, ni une dahlia. Elle est donc une pâquerette.
La plante est donc une pâquerette rouge.
On peut vérifier que Bertrand a donné le bon nom et la mauvaise couleur.

Réponse : (E)

11. L'angle de $2x^\circ$ et l'angle de $3x^\circ$ sont complémentaires. La somme des mesures est donc de 90°.
Donc $2x + 3x = 90$, ou $5x = 90$. Donc $x = 18$, car $5 \times 18 = 90$.

Réponse : (D)

12. Puisque les quatre côtés ont la même longueur et que le carré a un périmètre de 28 cm, chaque côté a une longueur de 7 cm, car 4×7 cm $= 28$ cm.
Le carré a donc une base de 7 cm et une hauteur de 7 cm.
Son aire, en cm^2, est égale à 7×7, ou 49.

Réponse : (D)

13. Karine a mangé moins que Max qui a mangé moins que Cédric.
Or, Ben et Tanya ont mangé moins que Karine.
Donc, Max a mangé la 2$^{\text{e}}$ plus grande quantité de nourriture.

Réponse : (D)

14. Le plus petit palindrome de trois chiffres est 101.
Le plus grand palindrome de trois chiffres est 999.
La différence entre le plus grand et le plus petit est égale à $999 - 101$, ou 898.

Réponse : (B)

15. Puisque 10 minutes correspondent à $\frac{10}{60}$, ou $\frac{1}{6}$ d'une heure, le skieur se déplace de 2 km, car 12 km $\div 6 = 2$ km.

Réponse : (C)

16. Peu importe leur nombre, les tiges de 2 cm donnent un nombre pair de cm.
Pour obtenir une longueur totale impaire de 51 cm, il faut donc utiliser un nombre impair de tiges de 5 cm.
On procède par essais systématiques au moyen d'un tableau.

Nombre de tiges de 5 cm	Longueur totale (en cm) des tiges de 5 cm	Longueur totale (en cm) des tiges de 2 cm	Nombre de tiges de 2 cm
1	5	$51 - 5 = 46$	$46 \div 2 = 23$
3	15	$51 - 15 = 36$	$36 \div 2 = 18$
5	25	$51 - 25 = 26$	$26 \div 2 = 13$
7	35	$51 - 35 = 16$	$16 \div 2 = 8$
9	45	$51 - 45 = 6$	$6 \div 2 = 3$

Si on tente d'utiliser 11 tiges ou plus de 5 cm, on dépasse la longueur totale de 51 cm.
Il y a donc 5 façons différentes de construire la tige de 51 cm.

Réponse : (A)

17. *Solution 1*
En choisissant une viande et un fruit, les repas possibles sont : poulet et pomme, poulet et poire, poulet et banane, boeuf et pomme, boeuf et poire, bœuf et banane.
Deux des six repas comprennent une banane.
Si la viande et le fruit sont choisis au hasard, la probabilité pour qu'un repas comprenne une banane est donc de $\frac{2}{6}$, ou $\frac{1}{3}$.

Solution 2
Chaque repas qu'Éric peut recevoir contient un fruit.
La viande choisie n'a aucun effet sur le choix du fruit. Donc, la probabilité pour que le repas comprenne une banane est indépendante du choix de la viande.
Puisqu'il y a 3 fruits possibles, la probabilité pour que le repas comprenne une banane est de $\frac{1}{3}$.

Réponse : (A)

18. *Solution 1*
Supposons que les citrouilles A et B ont contribué au poids de 12 kg, que les citrouilles A et C ont contribué au poids de 13 kg et que les citrouilles B et C ont contribué au poids de 15 kg.
On voit que chaque citrouille a contribué deux fois. Donc si on additionne ces poids pour obtenir un poids total de 40 kg, on obtient deux fois le poids total des trois citrouilles. Les trois citrouilles ont donc un poids total de 20 kg.
On compare le poids des citrouilles A et B (12 kg) au poids total des trois citrouilles (20 kg). La citrouille C pèse donc 8 kg.
On compare le poids des citrouilles A et C (13 kg) au poids total des trois citrouilles (20 kg). La citrouille B pèse donc 7 kg.
Puisque la citrouille A pèse 8 kg, que la citrouille B pèse 7 kg et que les trois citrouilles ont un poids total de 20 kg, la citrouille C pèse 5 kg. Donc, la citrouille la moins lourde pèse 5 kg.

Solution 2
Soit A, B et C le poids, en kilogrammes, des trois citrouilles *en ordre croissant*.
Le poids combiné le moins lourd, de 12 kg, doit provenir des deux citrouilles les moins lourdes.
Donc $A + B = 12$.
Le poids combiné le plus lourd, de 15 kg, doit provenir des deux citrouilles les plus lourdes.
Donc $B + C = 15$.
Donc, le troisième poids combiné, de 13 kg, provient de la citrouille la moins lourde et de la citrouille la plus lourde. Donc $A + C = 13$.
Puisque $A + B = 12$ et $A + C = 13$, alors C est 1 de plus que B.
Puisque $B + C = 15$ et que C est 1 de plus que B, alors $B = 7$ et $C = 8$.
L'équation $A + B = 12$ devient $A + 7 = 12$, d'où $A = 5$.
On vérifie que lorsque $A = 5$, $B = 7$ et $C = 8$, les paires de citrouilles pèsent bien 12 kg, 13 kg et 15 kg.
Donc, la citrouille la moins lourde pèse 5 kg.

Réponse : (B)

19. Au début, la somme des quatre nombres est égale à T. Lorsqu'on augmente chaque nombre de 1, il y a une augmentation totale de 4.
La somme des quatre nouveaux nombres est donc 4 de plus que la somme T. Elle est donc égale à $T + 4$.
Lorsqu'on triple cette somme, on obtient $3 \times (T + 4)$, ou $(T + 4) + (T + 4) + (T + 4)$, ou $3T + 12$.

Réponse : (C)

20. Le prisme à base rectangulaire a une base de (6×4) cm^2, ou 24 cm^2.
Puisqu'il a une hauteur de 2 cm, son volume est égal à (24×2) cm^3, ou 48 cm^3.
Le prisme à base triangulaire a une hauteur de 4 cm. Le triangle qui forme la base du prisme a une base de 3 cm (car 6 cm $-$ 3 cm $=$ 3 cm) et une hauteur de 3 cm (car 5 cm $-$ 2 cm $=$ 3 cm).
L'aire du triangle est égale à $(3 \times 3 \div 2)$ cm^2, ou 4,5 cm^2.
Le volume du prisme à base triangulaire est donc égal à $(4{,}5 \times 4)$ cm^3, ou 18 cm^3.
Le volume du solide combiné est donc égal à 48 cm^3 + 18 cm^3, ou 66 cm^3.

Réponse : (E)

21. Sylvio compte à rebours à partir de 7 en augmentant de 3 à chaque fois. Chaque nombre qu'il mentionne est donc 7 de plus qu'un multiple de 3.
On vérifie chaque choix de réponse en soustrayant 7 et en vérifiant si le résultat est divisible par 3. On inscrit les résultats à l'aide du tableau suivant.

Choix de réponse	Résultat après avoir soustrait 7	Divisible par 3 ?
1009	1002	Oui
1006	999	Oui
1003	996	Oui
1001	994	Non
1011	1004	Non

Parmi les choix de réponse, Sylvio a seulement mentionné 1009, 1006 et 1003.
Damien compte à rebours à partir de 2001, en diminuant de 5 à chaque fois : 2001, 1996, 1991, 1986, ...
Puisqu'il soustrait 5 à chaque fois, les nombres qu'il mentionne se terminent tous par 1 ou par 6.
Parmi les choix de réponse, Damien mentionne seulement 1006, 1001 et 1011.
Donc, 1006 est le seul nombre qui est mentionné par les deux garçons.

Réponse : (B)

22. Pendant les 20 premières minutes, Sophie ajoute de l'eau au taux de 20 L/min. Elle ajoute donc 20×20 L, ou 400 L d'eau.
Puisque la piscine peut contenir 4000 L et que 4000 L $-$ 400 L $=$ 3600 L, il faut ajouter 3600 L d'eau pour remplir la piscine.
Or, après 20 minutes, l'eau se met à s'échapper au taux de 2 L/min.
Puisque Sophie continue à verser de l'eau dans la piscine au taux de 20 L/min, la quantité d'eau dans la piscine augmente de 18 L/min, car 20 L/min $-$ 2 L/min $=$ 18 L/min.
Il faut 3600 L d'eau pour remplir la piscine et la quantité d'eau augmente de 18 L à chaque minute. Puisque 3600 min $\div$ 18 $=$ 200 min, il faut 200 minutes pour remplir la piscine.
En tout, il faut $(20 + 200)$ minutes, ou 220 minutes, c'est-à-dire 3 heures et 40 minutes.

Réponse : (B)

23. La somme des chiffres dans la colonne des unités est égale à $E + E + E$, ou $3E$.
Puisque E est un chiffre et que $3E$ se termine par un 1, il faut que $E = 7$.
Donc $3E = 3 \times 7$, ou $3E = 21$. Il y a donc une retenue de 2 dizaines qui est ajoutée à la colonne des dizaines. On a donc :

$$\begin{array}{cccc} & & {\scriptstyle 2} & \\ & A & B & 7 \\ & A & C & 7 \\ & A & D & 7 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

On examine la colonne des dizaines. Chacun des chiffres B, C et D est inférieur à 10 et la somme $2+B+C+D$ ne peut donc pas dépasser 29 (c'est-à-dire $2+9+9+9$). Cette somme produira donc une retenue égale à 0, à 1 ou à 2. On a donc :

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 2} & \\ & A & B & 7 \\ & A & C & 7 \\ & A & D & 7 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & \\ & A & B & 7 \\ & A & C & 7 \\ & A & D & 7 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & \\ & A & B & 7 \\ & A & C & 7 \\ & A & D & 7 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

On examine la colonne des centaines dont la somme, avec la retenue, est égale à 20.
On cherche une valeur de A de manière que $0+A+A+A=20$ ou $1+A+A+A=20$ ou $2+A+A+A=20$.

- On voit que équation $0+A+A+A=20$ n'admet aucune solution, puisque 20 n'est pas divisible par 3.
- Par tâtonnements (on essaie $A=1$ jusqu'à $A=9$), on voit que équation $1+A+A+A=20$ n'admet aucune solution.
- Par tâtonnements (on essaie $A=1$ jusqu'à $A=9$), on voit que équation $2+A+A+A=20$ admet une seule solution, $A=6$ $(2+6+6+6=20)$.

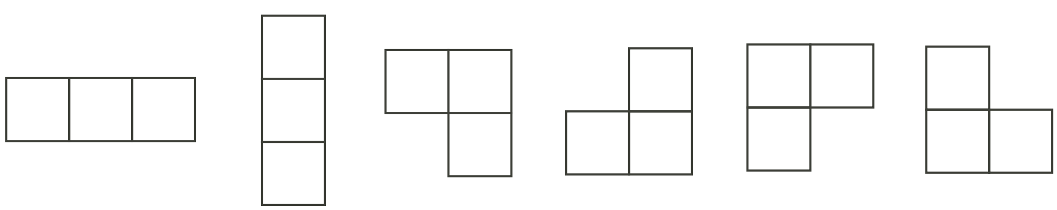
On a donc :

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & \\ & 6 & B & 7 \\ & 6 & C & 7 \\ & 6 & D & 7 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

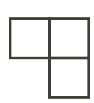
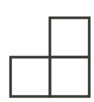
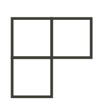
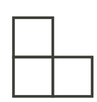
On remarque que l'on ne connaît pas B, C et D, mais on sait que $B+C+D=19$, car $2+B+C+D=21$.
Puisque $A=6$ et que $E=7$, alors $A+B+C+D+E=6+19+7$, d'où $A+B+C+D+E=32$.

Réponse : (C)

24. Étant donné la condition imposée aux trois carreaux choisis, les trois carreaux choisis doivent former une des 6 formes possibles suivantes.



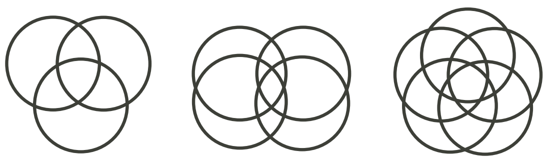
Pour déterminer le nombre de façons de choisir les trois carreaux, on détermine le nombre de façons de choisir chacune des 6 formes possibles. Les résultats paraissent dans le tableau suivant.

Forme						
Nombre de façons	3	2	4	3	3	4

Le nombre total de façons est égal à $3+2+4+3+3+4$, ou 19.

Réponse : (A)

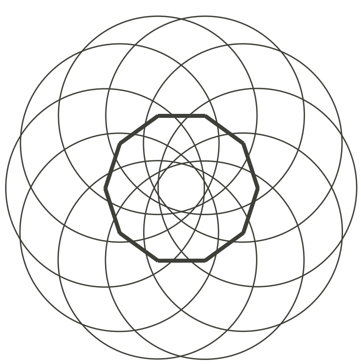
25. On remarque d'abord qu'un cercle peut couper un autre cercle en un maximum de deux points. On trace le premier cercle.
On trace ensuite le deuxième cercle de manière qu'il coupe le premier cercle en deux points.
Puisque n'importe quels deux cercles doivent se chevaucher partiellement (mais aucun cercle ne doit chevaucher un autre cercle au complet), on peut tracer le troisième cercle de manière qu'il coupe chaque cercle précédent en deux points.
On continue de tracer chaque nouveau cercle de manière qu'il coupe chaque cercle précédent en deux points.
Donc, le quatrième cercle coupe chacun des trois cercles précédents en deux points, le cinquième cercle coupe chacun des quatre précédents en deux points, et ainsi de suite.
Voici des façons possibles de placer 3 cercles, 4 cercles et 5 cercles.



Le tableau suivant indique les nombres de points d'intersection.

Numéro du cercle tracé	Nombre de nouveaux points d'intersection	Nombre total de points d'intersection
1	0	0
2	2	2
3	$2 \times 2 = 4$	$2 + 4$
4	$3 \times 2 = 6$	$2 + 4 + 6$
5	$4 \times 2 = 8$	$2 + 4 + 6 + 8$
6	$5 \times 2 = 10$	$2 + 4 + 6 + 8 + 10$
7	$6 \times 2 = 12$	$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$
8	$7 \times 2 = 14$	$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14$
9	$8 \times 2 = 16$	$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16$
10	$9 \times 2 = 18$	$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18$

Le plus grand nombre total possible de points d'intersection est égal à $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18$, ou 90.
Pour fin de précision, on montre qu'il est vraiment possible de tracer tous ces points d'intersection. La figure suivante montre un positionnement possible des dix cercles qui produit le nombre maximum de 90 points d'intersection.
Chaque cercle coupe chaque autre cercle à exactement deux endroits et tous les points d'intersection sont distincts.
On a construit la figure en choisissant comme centres des cercles les sommets d'un décagone régulier de grandeur appropriée.



RÉPONSE : (D)

8e année

1. Les fractions $\frac{8}{12}$ et $\frac{\square}{3}$ sont équivalentes.
   Pour réduire la première fraction, on a divisé son dénominateur par 4. Le numérateur est donc divisé par 4 pour obtenir un 2.
   On a donc $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Donc, $\square$ a une valeur de 2.
   Réponse : (D)

2. Puisque le bœuf haché se vend 5,00 \$ le kilogramme, alors 12 kg de bœuf haché coûtent $12 \times 5{,}00$ \$, ou 60,00 \$.
   Réponse : (C)

3. L'angle qui mesure y° et l'angle droit qui mesure 90° forment un angle plein de 360°. On a donc $y^\circ + 90^\circ = 360^\circ$, d'où $y = 270$.
   Réponse : (E)

4. *Solution 1*
   Pour comparer les fractions, on les écrit avec un dénominateur commun de 100.
   La liste $\left\{\frac{3}{10}, \frac{9}{20}, \frac{12}{25}, \frac{27}{50}, \frac{49}{100}\right\}$ devient $\left\{\frac{30}{100}, \frac{45}{100}, \frac{48}{100}, \frac{54}{100}, \frac{49}{100}\right\}$.
   Le plus grand nombre de cette liste est $\frac{54}{100}$. Donc, le plus grand nombre de la liste donnée est $\frac{27}{50}$.

   Solution 2
   On remarque que toutes les fractions de la liste, à l'exception de $\frac{27}{50}$, sont inférieures à $\frac{1}{2}$, car leur numérateur est inférieur à la moitié de leur dénominateur.
   Or, la fraction $\frac{27}{50}$ est supérieure à $\frac{1}{2}$.
   Donc, le plus grand nombre de la liste donnée est $\frac{27}{50}$.
   Réponse : (D)

5. Il y a 3 résultats favorables (balles rouges) sur 15 résultats possibles. Donc, la probabilité pour que la balle choisie soit rouge est de $\frac{3}{15}$, ou $\frac{1}{5}$.
   Réponse : (A)

6. *Solution 1*
   Clara a doublé un nombre et elle a ajouté 3 au résultat pour obtenir 23. Donc, avant d'ajouter 3, le double du nombre devait être 20.
   Puisque 20 est le double de 10, le nombre initial devait être 10.

   Solution 2
   On représente le nombre initial par l'inconnue x.
   Lorsqu'on double ce nombre, on obtient $2x$ et lorsqu'on ajoute 3 à ce résultat, on obtient $2x+3$.
   On a donc $2x + 3 = 23$. Puisque $20 + 3 = 23$, alors $2x = 20$. Puisque $2 \times 10 = 20$, alors $x = 10$.
   Réponse : (B)

7. La recette demande $4\frac{1}{2}$ tasses de farine, soit 4 tasses plus $\frac{1}{2}$ tasse.
   Or, la moitié de 4 tasses, c'est 2 tasses. La moitié de $\frac{1}{2}$ tasse, c'est $\frac{1}{4}$ tasse.
   Donc, pour une demi-recette, il faut $2\frac{1}{4}$ tasses de farine.
   Réponse : (B)

8. Puisque $\angle PQR = \angle PRQ$, le triangle PQR est isocèle et on a donc $PQ = PR = 7$.
   Le triangle PQR a donc un périmètre de $7 + 5 + 7$, ou 19.
   Réponse : (E)

9. Puisque 15 des 27 élèves de la classe sont des filles, il y a 12 garçons dans la classe, car $27-15=12$.
Le rapport du nombre de garçons au nombre de filles est égal à 12 : 15, ou 4 : 5.

Réponse : (A)

10. Karine a mangé moins que Max qui a mangé moins que Cédric.
Or, Ben et Tanya ont mangé moins que Karine.
Donc, Max a mangé la 2e plus grande quantité de nourriture.

Réponse : (D)

11. On évalue chaque expression :
(A) : $(2 \times 3)^2 = 6^2 = 36$
(B) : $3 + 2^2 = 3 + 4 = 7$
(C) : $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$
(D) : $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$
(E) : $(3 + 2)^2 = 5^2 = 25$
Seule l'expression (D) est égale à 5.

Réponse : (D)

12. Pour chaque heure de gardiennage, Nico reçoit 10 $ si on ne tient pas compte des frais de voyage.
Donc, pour y heures de gardiennage, Nico reçoit $10y$ dollars, sans compter les frais de voyage.
En plus de cet argent, Nico reçoit une somme de 7 $ pour voyager.
Donc, si on inclut les frais de voyage, l'expression $10y + 7$ repésente le nombre de dollars que Nico reçoit pour y heures de gardiennage.

Réponse : (A)

13. La fenêtre de Karim mesure 50 cm sur 80 cm. L'aire de la fenêtre est doublée si une des dimensions est doublée.
Or, dans le choix de réponse (C), les dimensions sont 50 cm sur 160 cm. La première dimension est identique à celle de la fenêtre, tandis que la deuxième dimension est le double de celle de la fenêtre.
Donc, les dimensions de 50 cm sur 160 cm donnent une aire qui est le double de l'aire de la fenêtre.

Réponse : (C)

14. Le numéro du jour et le numéro du mois doivent être identiques pour qu'ils soient une racine carrée.
Puisque $3^2 = 9$ et $10^2 = 100$, ces deux nombres doivent être supérieurs à 3 et inférieurs à 10 pour permettre à la date d'être située de 2012 à 2099.
On procède par essais systématiques en inscrivant les résultats dans le tableau suivant.

Jour et mois	Deux derniers chiffres de l'année	Date
4	$4^2 = 16$	4/4/2016
5	$5^2 = 25$	5/5/2025
6	$6^2 = 36$	6/6/2036
7	$7^2 = 49$	7/7/2049
8	$8^2 = 64$	8/8/2064
9	$9^2 = 81$	9/9/2081

Puisque ces dates sont des journées racine carrée du 1er janvier 2012 au 31 décembre 2099, on voit qu'il y en a 6.

Réponse : (E)

15. Le triangle CDE est rectangle et on sait que $CE = 5$ et $DE = 3$.
D'après le théorème de Pythagore, $CE^2 = CD^2 + DE^2$, ou $5^2 = CD^2 + 3^2$. Donc $25 = CD^2 + 9$, d'où $CD^2 = 16$, ou $CD = 4$.
Puisque $BD = 16$ et $CD = 4$, alors $BC = 12$. Le triangle ABC est rectangle et on sait que $AB = 9$ et que $BC = 12$. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, ou $AC^2 = 9^2 + 12^2$. Donc $AC^2 = 81 + 144$, ou $AC^2 = 225$, d'où $AC = 15$.

Réponse : (C)

16. La taille de Béatrice est 2 fois celle de Viola et la taille de Viola est $\frac{2}{3}$ de la taille de Gaby. Donc, la taille de Béatrice est $2 \times \frac{2}{3}$ de la taille de Gaby, ou $\frac{4}{3}$ de la taille de Gaby.

Réponse : (C)

17. Puisque x peut être n'importe quel nombre entre 0 et 1, on peut choisir une valeur particulière de x. On choisit $x = \frac{1}{4}$, car on peut calculer sa racine carrée. On évalue ensuite chacune des expressions données dans les choix de réponse.
On a $x = \frac{1}{4}$; $x^2 = (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$; $2x = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$; $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$.
Puisque la plus petite valeur est $\frac{1}{16}$, x^2 produit la plus petite valeur.
Il est possible de démontrer que peu importe la valeur de x entre 0 et 1, la valeur de l'expression x^2 est toujours la plus petite des cinq expressions.

Réponse : (B)

18. On suppose que chaque carré a des côtés de longueur 2. Chacun a donc une aire de 4.
La diagonale AC coupe le carré $ABCD$ en deux triangles identiques.
L'aire du triangle ACD est donc la moité de l'aire du carré $ABCD$. Elle est donc égale à 2.
Puisque AC est la diagonale du carré $ABCD$, $\angle ACD = 45°$.
Or, le prolongement de la diagonale forme aussi un angle de 45° avec le côté EH du carré $EFGH$. (On peut s'en convaincre en additionnant les angles ACD, DCH et HCJ qui forment un angle plat. Le premier mesure 45°, le deuxième mesure 90° et le troisième doit donc mesurer 45°.) Le triangle CHJ a un angle de 45° et un angle de 90°. Son troisième angle doit donc mesurer 45°, car la somme des mesures de ses angles est égale à 180°. Le triangle CHJ est donc isocèle et $CH = HJ = 1$, car J est le milieu de GH.
L'aire du triangle CHJ est donc égale à $1 \times 1 \div 2$, ou $\frac{1}{2}$.
L'aire totale des deux parties ombrées est donc égale à $2 + \frac{1}{2}$, ou $2\frac{1}{2}$.
Puisque les deux carrés ont une aire totale de 8, la fraction des deux carrés qui est ombrée est égale à $\frac{2\frac{1}{2}}{8}$. On multiplie le numérateur et le dénominateur par 2 pour obtenir $\frac{5}{16}$.

Réponse : (D)

19. Les entiers que l'on peut former peuvent être des entiers de 1 chiffre, de 2 chiffres ou de 3 chiffres.
Avec les chiffres 1, 2 ou 3, on peut former 3 entiers de 1 chiffre, soit 1, 2 et 3.
On considère les entiers de 2 chiffres.
Le 1$^{\text{er}}$ chiffre peut être 1, 2 ou 3. Pour chacun de ces choix, le 2$^{\text{e}}$ chiffre peut être 1, 2 ou 3, ce qui donne 3×3 possibilités, ou 9 possibilités en tout, soit 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.
On considère les entiers de 3 chiffres.
Il y a 3 choix pour le premier chiffre, soit 1, 2 ou 3. Pour chacun de ces choix, il y a 3 choix pour le deuxième chiffre, soit 1, 2 ou 3. Il y a donc 3×3 possibilités, ou 9 possibilités pour les deux premiers chiffres. Pour chaque possibilité, il y a 3 choix pour le troisième chiffre, soit 1, 2 ou 3. En tout, il y a 9×3 possibilités, ou 27 possibilités pour les trois chiffres. (Tous ces entiers sont inférieurs à 400, car le plus grand est 333.)

En tout, le nombre d'entiers positifs inférieurs à 400 que l'on peut former en utilisant seulement les chiffres de 1 à 3, les chiffres pouvant être répétés, est égal à $3 + 9 + 27$, ou 39.

RÉPONSE : (D)

20. Puisque la taille moyenne des 22 élèves de la classe est de 103 cm, alors la somme des tailles de ces élèves est égale à 22×103 cm, ou 2266 cm.
Puisque la taille moyenne des 12 garçons de la classe est de 108 cm, alors la somme des tailles des garçons est égale à 12×108 cm, ou 1296 cm.
Donc, la somme des tailles des filles de la classe est égale 2266 cm $-$ 1296 cm, ou 97 cm.
Puisqu'il y a 10 filles dans la classe, leur taille moyenne est égale à 970 cm $\div$ 10, ou 97 cm.

RÉPONSE : (B)

21. On considère d'abord le nombre minimal de pièces de monnaie qu'il faut pour obtenir 99 ¢, la plus grande quantité d'argent que l'on doit pouvoir former.
On peut former 75 ¢ avec un nombre minimal de pièces en utilisant 3 pièces de 25 ¢.
Il nous faut 24 ¢ de plus pour atteindre 99 ¢. On peut le faire en utilisant 2 pièces de 10 ¢ et 4 pièces de 1 ¢.
Donc pour former 99 ¢, il nous faut au moins 9 pièces, soit 3 pièces de 25 ¢, 2 pièces de 10 ¢ et 4 pièces de 1 ¢.
(De fait, il s'agit du seul groupe possible de 9 pièces de monnaie que l'on peut utiliser pour former 99 ¢. En effet, on doit avoir 4 pièces de 1 ¢ et 3 pièces de 25 ¢, mais ces 7 pièces ensemble ne forment que 79 ¢. Pour former 20 ¢ de plus, les deux autres pièces doivent donc être des pièces de 10 ¢. Donc, le seul groupe de 9 pièces de monnaie possible que l'on peut utiliser pour former 99 ¢ doit comprendre 3 pièces de 25 ¢, 2 pièces de 10 ¢ et 4 pièces de 1 ¢.)
On vérifie s'il est possible de former n'importe quelle quantité d'argent inférieure à un dollar avec ces 9 pièces.
Avec les pièces de 1 ¢, on peut former les quantités 1 ¢, 2 ¢, 3 ¢ et 4 ¢.
Or, il est impossible de former une quantité de 5 ¢ avec notre collection de 9 pièces. Il faut donc ajouter une 10^{e} pièce de monnaie. On pourrait ajouter une pièce de 1 ¢ ou une pièce de 5 ¢. Or, seule la pièce de 5 ¢ nous permettrait aussi de former une quantité de 9 ¢.
On ajoute donc une pièce de 5 ¢ à notre collection qui contient maintenant 10 pièces, soit 3 pièces de 25 ¢, 2 pièces de 10 ¢, 1 pièce de 5 ¢ et 4 pièces de 1 ¢.
Notre collection de 10 pièces nous permet maintenant de former :

- n'importe quelle quantité de 1 ¢ à 4 ¢ en utilisant 4 pièces de 1 ¢ ;
- n'importe quelle quantité de 5 ¢ à 9 ¢ en utilisant 1 pièce de 5 ¢ et 4 pièces de 1 ¢ ;
- n'importe quelle quantité de 10 ¢ à 14 ¢ en utilisant 1 pièce de 10 ¢ et 4 pièces de 1 ¢ ;
- n'importe quelle quantité de 15 ¢ à 19 ¢ en utilisant 1 pièce de 5 ¢, 1 pièce de 10 ¢ et 4 pièces de 1 ¢ ;
- n'importe quelle quantité de 20 ¢ à 24 ¢ en utilisant 2 pièces de 10 ¢ et 4 pièces de 1 ¢.

Si on ajoute une pièce de 25 ¢, on peut former n'importe quelle quantité de 25 ¢ à 49 ¢.
Si on ajoute deux pièces de 25 ¢, on peut former n'importe quelle quantité de 50 ¢ à 74 ¢.
Si on ajoute deux pièces de 25 ¢, on peut former n'importe quelle quantité de 75 ¢ à 99 ¢.
Donc, il nous faut un minimum de 10 pièces de monnaie pour former n'importe quelle quantité d'argent inférieure à un dollar.

Peux-tu vérifier qu'il existe une combinaison différente de 10 pièces de monnaie qui nous permettrait de former n'importe quelle quantité d'argent inférieure à un dollar ?

RÉPONSE : (A)

22. On considère d'abord toutes les façons possibles de former une somme de 18 en utilisant trois nombres différents de 1 à 9. On a $1+8+9$, $2+7+9$, $3+6+9$, $3+7+8$, $4+5+9$, $4+6+8$ et $5+6+7$.
On considère ensuite la ligne $1+d+f$ dans la figure 1. Puisque la somme des trois nombres est égale à 18, alors $d+f=17$. On a donc $d=8$ et $f=9$ ou bien $d=9$ et $f=8$.
On considère ensuite les trois lignes qui contiennent x. On a donc $a+x+d$, $b+x+f$ et $c+x+6$. Puisque x paraît dans trois sommes distinctes, on cherche dans les sept sommes possibles pour constater que seuls les nombres 6, 7 et 8 paraissent dans trois sommes distinctes. Donc, x doit être égal à 6, 7 ou 8.
Puisque le nombre 6 paraît déjà dans la figure, x est égal à 7 ou à 8. Or, on a déjà conclu que d ou f est égal à 8. Donc $x=7$.
La figure 2 montre la position finale des nombres.

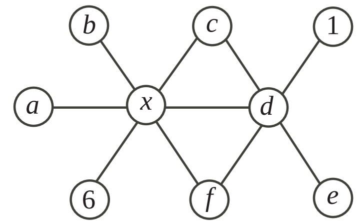


Fig.1

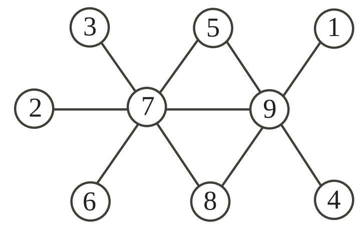
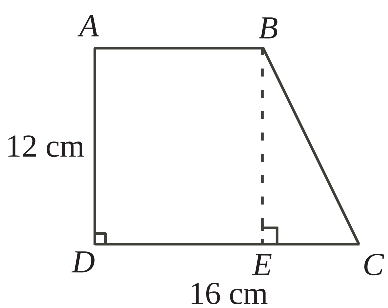


Fig.2

Réponse : (C)

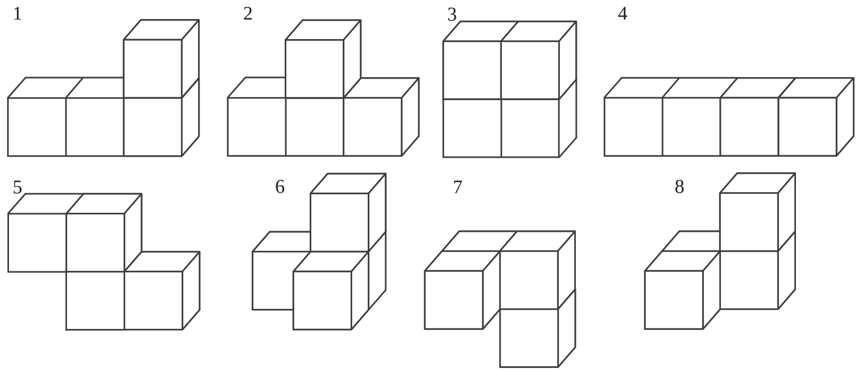
23. On nomme le trapèze $ABCD$ comme dans la figure ci-dessous.
Puisque le trapèze a une aire de 162 cm^2, alors $\frac{1}{2}(12)(AB+16)=162$, ou $(6)(AB+16)=162$.
Puisque $6\times 27=162$, alors $AB+16=27$, d'où $AB=11$.
Au point B, on abaisse une perpendiculaire BE au côté DC.
Puisque AB est parallèle à DE et que AD et BE sont tous deux perpendiculaires à DE, alors $ABED$ est un rectangle.
Donc $DE=AB=11$, $BE=AD=12$ et $EC=16-11$, ou $EC=5$.
Le triangle BEC est rectangle. D'après le théorème de Pythagore, $BC^2=12^2+5^2$.
Donc $BC^2=169$, d'où $BC=13$.
Le trapèze a donc un périmètre, en cm, égal à $11+13+16+12$, ou 52.



Réponse : (B)

24. Lorsque les faces de deux cubes sont collées l'une sur l'autre, elles doivent coïncider. De plus, chacun des 4 cubes doit avoir une face qui coïncide avec une face d'au moins un des 3 autres cubes.
Dans la figure 1, ci-dessous, on voit le solide qui paraissait dans la question. On essaie ensuite de déplacer un des cubes pour former un autre solide. À chaque fois, on vérifie qu'il est différent des solides précédents.
On peut ainsi obtenir les figures 2 à 5 dont les solides ont la même épaisseur (du devant à l'arrière) que celui de la figure 1.
Les solides des figures 1 à 5 sont les seuls qui ont une épaisseur de 1 cube. On peut s'en convaincre en tentant d'en construire un sixième et en lui faisant subir des rotations pour vérifier s'il est différent des cinq premiers.
On tente ensuite de construire des solides qui ont une épaisseur de 2 (du devant à l'arrière).

Les trois seuls solides possibles sont illustrés dans les figures 6, 7 et 8. Bien que les solides 7 et 8 paraissent identiques, il est impossible de faire subir une rotation à un de ces solides pour obtenir l'autre.
Si on tente d'obtenir un solide ayant une épaisseur de 3, on obtient toujours un des solides déjà illustrés dans les figures de 1 à 5.
Les seuls solides qu'Aïda peut construire sont les 8 solides illustrés.



Réponse : (D)

25. Il est possible de regrouper les termes de manière à découvrir plusieurs régularités intéressantes. Par exemple, on peut regrouper les termes en groupes de 4 termes consécutifs. On pourrait ainsi calculer la somme S en écrivant :

$$S = [1 + (-4) + (-9) + 16] + [25 + (-36) + (-49) + 64] + [81 + (-100) + (-121) + 144] + \dots$$

On constate alors que chaque groupe de 4 termes consécutifs a une somme de 4. On a ainsi $1 + (-4) + (-9) + 16 = 4$, $25 + (-36) + (-49) + 64 = 4$, $81 + (-100) + (-121) + 144 = 4$, et ainsi de suite.
On suppose que cette régularité continue. Pour ceux et celles que cela intéresse, on présente une preuve de la régularité à la fin de cette solution. La preuve fait appel à de l'algèbre avancée.
Puisque chaque groupe de 4 termes a une somme de 4, la somme des 8 premiers termes est égale à 8, la somme des 12 premiers termes est égale à 12 et ainsi de suite. Donc, la somme des n premiers termes est égale à n si n est un multiple de 4.
Donc, la somme des 2008 premiers termes est égale à 2008, car 2008 est un multiple de 4.
Donc, la somme des 2011 premiers termes de la suite est égale à $1008 + [2009^2 - 2010^2 - 2001^2]$, ou $-4\,046\,132$.

Vérification de la régularité

On ne s'attend pas que les candidats du concours Gauss puissent suivre le raisonnement suivant, car il fait appel au produit de binômes qui est enseigné dans les cours plus avancés.
Si n représente le premier de quatre entiers consécutifs, alors les trois entiers suivants sont $n+1$, $n+2$ et $n+3$.
Puisque les termes de la suite sont des carrés, alors les carrés des quatre entiers consécutifs sont n^2, $(n+1)^2$, $(n+2)^2$ et $(n+3)^2$.
Puisque les premier et quatrième termes sont positifs, tandis que les deuxième et troisième termes sont négatifs, la somme des quatre termes consécutifs est égale à $n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2$. (Par exemple, si $n = 5$, on a $5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2$.)
Pour simplifier l'expression algébrique, on voit d'abord comment simplifier chaque partie.
L'expression $(n+1)^2$ signifie $(n+1) \times (n+1)$. Le terme n de la 1re parenthèse multiplie chaque terme de la 2e parenthèse, puis le 1 de la 1re parenthèse multiplie chaque terme de la 2e parenthèse.

Les produits sont additionnés. On a donc :

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= (n+1)\times(n+1)\\ &= n\times n+n\times 1+1\times n+1\times 1\\ &= n^2+n+n+1\\ &= n^2+2n+1\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}(n+2)^2 &= (n+2)\times(n+2)\\ &= n\times n+n\times 2+2\times n+2\times 2\\ &= n^2+2n+2n+4\\ &= n^2+4n+4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(n+3)^2 &= (n+3)\times(n+3)\\ &= n\times n+n\times 3+3\times n+3\times 3\\ &= n^2+3n+3n+9\\ &= n^2+6n+9\end{aligned}$$

La somme des quatre termes consécutifs est donc égale à :

$$\begin{aligned}n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2 &= n^2-(n^2+2n+1)-(n^2+4n+4)+(n^2+6n+9)\\ &= n^2-n^2-2n-1-n^2-4n-4+n^2+6n+9\\ &= n^2-n^2-n^2+n^2-2n-4n+6n+9-1-4\\ &= 4\end{aligned}$$

Réponse : (E)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

Concours Gauss 2010

(7^{e} et 8^{e} années – Secondaire I et II)

mercredi le 12 mai 2010

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Lloyd Auckland
Terry Bae
Janet Baker
Steve Brown
Ersal Cahit
Karen Cole
Jennifer Couture
Frank DeMaio
Fiona Dunbar
Jeff Dunnett
Mike Eden
Barry Ferguson
Judy Fox
Steve Furino
Sandy Graham
Angie Hildebrand
Judith Koeller
Joanne Kursikowski
Angie Murphy
Dean Murray
Jen Nissen
J.P. Pretti
Linda Schmidt
Kim Schnarr
Jim Schurter
Carolyn Sedore
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), St. John's Ravenscourt School, Winnipeg, MB
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
Allison McGee, All Saints C.H.S., Kanata, ON
Kim Stenhouse, William G. Davis P.S., Cambridge, ON
David Switzer, Sixteenth Ave. P.S., Richmond Hill, ON
Tanya Thompson, Nottawa, ON
Chris Wu, Amesbury M.S., Toronto, ON

7e année

1. La bande qui correspond à *poisson* monte jusqu'au nombre 40 sur l'axe vertical. Donc, 40 élèves ont répondu « poisson ».

Réponse : (D)

2. On a $\frac{20}{25} = \frac{80}{100} = 80\,\%$ (ou $\frac{20}{25} = 0{,}80 = 80\,\%$).
Donc, la note de Tanya correspond à $80\,\%$.

Réponse : (C)

3. On respecte la priorité des opérations. Donc $4 \times 5 + 5 \times 4$ est égal à $20 + 20$, ou 40.

Réponse : (E)

4. Pour situer le point $(-2, -3)$, on part de l'origine, soit du point $(0, 0)$, et on bouge de 2 unités vers la gauche, puis de 3 unités vers le bas.
Les coordonnées $(-2, -3)$ correspondent au point D.

Réponse : (D)

5. Charbel part du 11e étage et descend de 2 étages. Il arrive au 9e étage.
À partir du 9e étage, il descend de 4 étages. Il arrive au 5e étage et il sort.
Donc, Charbel est sorti de l'ascenseur au 5e étage.

Réponse : (D)

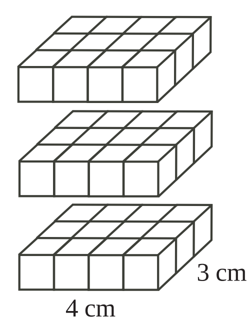
6. La réponse de la multiplication, soit 10 000,3, est 1000 fois plus grande que 10,0003. On peut le constater en divisant 10 000,3 par 10,0003 ou en voyant que les chiffres du nombre 10,0003 bougent de trois places, par rapport à la virgule, pour obtenir le nombre 10 000,3, qui est plus grand. Donc, le nombre $\square$ est égal à 1000.

Réponse : (B)

7. Les quatre angles de la figure, soit les angles de 150°, 90°, x° et 90°, forment un angle plein, soit un angle de 360°.
Or, la somme des mesures des trois angles connus est égale à $150^\circ + 90^\circ + 90^\circ$, ou 330°.
Donc $x^\circ = 360^\circ - 330^\circ$, ou $x^\circ = 30^\circ$.

Réponse : (D)

8. *Solution 1*
La base du prisme mesure 4 cm sur 3 cm. Pour construire la première couche de cubes, il faut donc placer 4 rangées de 3 cubes pour un total de 4×3 cubes, ou 12 cubes.
Puisque le prisme a une hauteur de 3 cm, il faut placer 3 couches de 12 cubes pour le construire, soit un total de 3×12 cubes, ou 36 cubes.



Solution 2
Le nombre de petits cubes correspond au volume du prisme.
Le volume d'un prisme est égal au produit de l'aire de la base et de la hauteur, ou $V = A_{\text{base}} \times h$.
Or, l'aire de la base est égale à 4×3 cm^2, ou 12 cm^2.
Le volume est donc égal à 3×12 cm^3, ou 36 cm^3. Il faut donc 36 cubes pour construire le prisme.

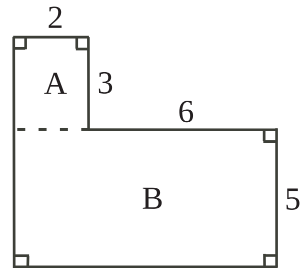
Réponse : (E)

9. Le cadran indique 3:33. La prochaine fois que tous les chiffres seront identiques, le cadran indiquera 4:44. De 3:33 à 4:44, il y a 1 heure et 11 minutes, soit 60 minutes + 11 minutes, ou 71 minutes.

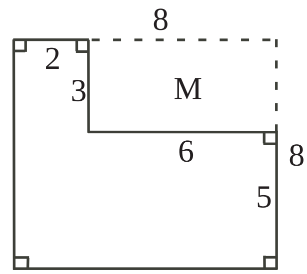
Réponse : (A)

10. Puisque 700 est le produit de 35 et de y, alors $35 \times y = 700$, ou $y = 700 \div 35$, ou $y = 20$.
Puisque 20 est le produit de 5 et de x, alors $5 \times x = 20$, ou $x = 20 \div 5$, ou $x = 4$.
Réponse : (B)

11. *Solution 1*
On trace un segment à tirets, d'une longueur de 2 unités, comme dans la figure ci-contre, de manière à diviser la figure en deux rectangles, A et B.
Le rectangle A a une aire de 2×3, ou 6 unités carrées. La longueur du rectangle B mesure 6 unités plus les 2 unités du segment à tirets. Le rectangle a donc une longueur de 8 unités. Le rectangle B a donc une aire de 8×5, ou 40 unités carrées. La figure a donc une aire de $6 + 40$, ou 46 unités carrées.



Solution 2
On trace les segments à tirets comme dans la figure ci-contre, soit un tiret de 6 unités et un tiret de 3 unités. Le grand rectangle ainsi formé a une longueur de 8 unités $(2 + 6)$ et une largeur de 8 unités $(3 + 5)$ (il s'agit donc d'un carré).
L'aire de la figure initiale est égale à celle du grand carré moins celle du rectangle M. Elle est donc égale à $(8 \times 8) - (6 \times 3)$, soit $64 - 18$, ou 46 unités carrées.



Réponse : (C)

12. Chaque école recycle $\frac{3}{4}$ d'une tonne de papier.
Ensemble, les 4 écoles recyclent $4 \times \frac{3}{4}$ tonnes, soit $\frac{12}{4}$ tonnes, ou 3 tonnes.
Puisqu'on épargne 24 arbres en recyclant 1 tonne de papier, on épargne 3×24 arbres, ou 72 arbres, en recyclant 3 tonnes.
Réponse : (B)

13. *Solution 1*
La moyenne de 5 entiers consécutifs est égale au nombre du milieu. En effet, puisque les nombres ont une moyenne de 21, si on partageait les quantités de façon équitable, on aurait 21, 21, 21, 21 et 21. Or, puisque les nombres sont consécutifs, le 2^{e} nombre est 1 de moins que le 21 du milieu, tandis que le 4^{e} nombre est 1 de plus que le 21 du milieu. De même, le 1er nombre est 2 de moins que le 21 du milieu, tandis que le 5^{e} nombre est 2 de plus que le 21 du milieu. Les nombres sont donc $21 - 2$, $21 - 1$, 21, $21 + 1$, $21 + 2$, ou 19, 20, 21, 22 et 23. Le plus petit nombre est 19.

Solution 2
Puisque les cinq nombres consécutifs ont une moyenne de 21, le plus petit des nombres est inférieur à 21. On procède par tâtonnements.
Supposons que le 1er nombre est 20. Les nombres sont donc 20, 21, 22, 23 et 24 et leur moyenne est égale à $\dfrac{20 + 21 + 22 + 23 + 24}{5}$, ou 22. Les nombres sont donc trop grands.
Supposons que le 1er nombre est 19. Les nombres sont donc 19, 20, 21, 22 et 23 et leur moyenne est égale à $\dfrac{19 + 20 + 21 + 22 + 23}{5}$, ou 21, ce qui est la moyenne donnée.
Donc, le plus petit des cinq nombres est 19.
Réponse : (E)

14. *Solution 1*
Puisque le sac ne contient que des menthes vertes et des menthes rouges, et que 75 % des menthes sont vertes, alors 25 % des menthes sont rouges, car $100\,\% - 75\,\% = 25\,\%$.
Le rapport du nombre de menthes vertes au nombre de menthes rouges est donc égal à 75 : 25, ou 3 : 1.

Solution 2
Puisque 75 % des menthes sont vertes, alors $\frac{3}{4}$ des menthes sont vertes.
Puisque le sac ne contient que des menthes vertes et des menthes rouges, alors $\frac{1}{4}$ des menthes sont rouges, car $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Il y a donc 3 fois plus de menthes vertes que de menthes rouges. Le rapport du nombre de menthes vertes au nombre de menthes rouges est donc égal à 3 : 1.
Réponse : (B)

15. Puisque l'aire du carré N est quatre fois l'aire du carré M, elle est égale à 4×100 cm^2, ou 400 cm^2. Puisque $\sqrt{400} = 20$ (ou $20 \times 20 = 400$), alors chaque côté du carré N a une longueur de 20 cm. Donc, le carré N a un périmètre de 4×20 cm, ou 80 cm.
Réponse : (C)

16. On détermine d'abord la *constante magique*, c'est-à-dire la somme des nombres qui est la même pour chaque rangée, chaque colonne et chaque diagonale. D'après la 1re colonne, la constante magique est égale à $(+1) + (-4) + (-3)$, ou -6.
On examine la diagonale qui va de la case supérieure gauche à la case inférieure droite. Les deux nombres de cette diagonale, soit $+1$ et -5, ont une somme de -4.
Pour obtenir une somme de -6 dans cette diagonale, il faut que le nombre du milieu soit -2.
Dans l'autre diagonale, les deux nombres connus, soit -3 et -2, ont une somme de -5.
Pour obtenir une somme de -6 dans cette diagonale, il faut que Y soit égal à -1.
Voici le carré magique rempli au complet :

+1	−6	−1
−4	−2	0
−3	+2	−5

Réponse : (A)

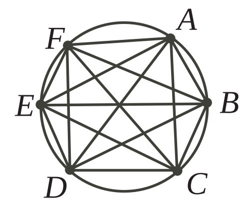
17. Le plus petit entier de trois chiffres qui est 17 de plus qu'un entier de deux chiffres est 100 (100 est 17 de plus que 83 ; de fait, 100 est le plus petit entier possible de trois chiffres).
Or, 101 est 17 de plus que 84, 102 est 17 de plus que 85, et ainsi de suite. Si on continue de cette manière, on arrive à 117 qui est 17 de plus que 100, mais 100 n'est pas un entier de deux chiffres.
Donc, le plus grand entier de trois chiffres qui est 17 de plus qu'un entier de deux chiffres est 116 (116 est 17 de plus que 99).
Donc, chaque entier de 100 à 116 est 17 de plus qu'un entier de deux chiffres. Il y en a 17.
Réponse : (A)

18. *Solution 1*

On nomme les 6 points A, B, C, D, E et F, comme dans la figure ci-contre. On joint chaque paire de points par un segment.

Du point A, on trace 5 segments, soit un segment qui se rend à chacun des points de B à F.

Du point B, on trace 4 nouveaux segments, soit un segment qui se rend à chacun des points de C à F, car le segment AB a déjà été tracé.



De même, on trace 3 nouveaux segments à partir du point C, 2 à partir du point D et 1 à partir du point E. On ne trace aucun nouveau segment à partir du point F, puisque ce point a déjà été relié aux autres points.

En tout, il y a $5 + 4 + 3 + 2 + 1$ segments, ou 15 segments.

Solution 2

On nomme les 6 points A, B, C, D, E et F, comme dans la figure précédente.

À partir de chacun des 6 points, on peut tracer 5 segments de droite, soit 1 segment vers chacun des 5 autres points. Il semble donc y avoir un total de 30 segments ($6 \times 5 = 30$).

Or selon cette méthode de compter, chaque segment est compté deux fois, soit une fois à chaque extrémité. Par exemple, le segment AD est compté une fois de A vers D et une fois de D vers A. On doit donc diviser le nombre de segments par 2 : $30 \div 2 = 15$. Il y a donc un total de 15 segments.

Réponse : (D)

19. Plus le numérateur d'une fraction est grand et plus le dénominateur est petit, plus la fraction est grande. Pour obtenir la plus grande somme possible, il faut donc choisir 6 et 7 comme numérateurs et 3 et 4 comme dénominateurs. On a :

$$\frac{7}{3} + \frac{6}{4} = \frac{28}{12} + \frac{18}{12} = \frac{46}{12} = \frac{23}{6}$$

Normalement, on devrait aussi calculer $\frac{7}{4} + \frac{6}{3}$ (qui est égal à $3\frac{3}{4}$), pour choisir laquelle des deux sommes est la plus grande, mais on peut voir que $\frac{23}{6}$ est la plus grande valeur des 5 choix de réponses. L'autre somme doit donc être plus petite. La plus grande somme possible est donc égale à $\frac{23}{6}$.

Réponse : (E)

20. *Solution 1*

On détermine les quatre personnes qui *peuvent* être assises au milieu. La cinquième sera donc celle qui *ne peut pas* occuper cette chaise.

D'abord supposons que Safa et Mia, qui sont l'une à côté de l'autre, occupent les chaises 1 et 2. Alors Jean et Alex, qui ne sont pas l'un à côté de l'autre, occupent les chaises 3 et 5, dans n'importe quel ordre. Donc, Jean et Alex peuvent occuper la chaise du milieu.

Ensuite, supposons que Safa et Mia occupent les chaises 2 et 3, dans n'importe quel ordre.

Les chaises 1, 4 et 5 sont vides, ce qui permet à Jean et à Alex de ne pas être assis l'un à côté de l'autre. Ceci montre que Safa et Mia peuvent occuper la chaise du milieu.

Puisque Alex, Jean, Safa et Mia peuvent être assis au milieu, il faut donc que ce soit Tom qui ne peut pas être assis au milieu.

Solution 2
Supposons que Tom est assis au milieu, dans la chaise 3.
Puisque Safa est à côté de Mia, elles occupent les chaises 1 et 2 ou les chaises 4 et 5.
Dans un cas, les chaises 4 et 5 restent libres et dans l'autre, les chaises 1 et 2 restent libres.
Puisque Alex et Jean ne sont pas assis l'un à côté de l'autre, cette situation est impossible.
Donc, Tom n'est pas assis au milieu.
Or, selon la question, il y a une seule réponse. Il s'agit donc de Tom.

RÉPONSE : (E)

21. En 3 heures, le vélo, qui avance à une vitesse constante de 15 km/h, parcourt un total de 3×15 km, ou 45 km.
Au départ de l'autobus, le vélo a une avance de 195 km.
Pour rattraper le vélo en 3 heures, l'autobus doit donc parcourir 195 km plus les 45 km additionnels parcourus par le vélo pendant ces 3 heures, soit un total de 240 km.
Pour parcourir 240 km en 3 heures, l'autobus doit voyager à une vitesse moyenne de $240 \div 3$ km/h, ou 80 km/h.

RÉPONSE : (B)

22. Lorsqu'on lance une pièce de monnaie, il y a 2 résultats possibles, soit pile (P) ou face (F).
Lorsqu'on lance deux pièces de monnaie, il y a 4 (2×2) résultats possibles : PP, PF, FP et FF.
Lorsqu'on lance trois pièces de monnaie, il y a 8 $(2 \times 2 \times 2)$ résultats possibles : PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP et FFF.
Or, 2 des 8 résultats sont favorables, soit PPP et FFF.
Donc, la probabilité de gagner au *jeu de monnaie* est égale à $\frac{2}{8}$, ou $\frac{1}{4}$.

RÉPONSE : (B)

23. Puisque $\text{E} \times \text{R} \times \text{E} = 49$, alors $\text{E} = 7$ et $\text{R} = 1$ ou bien $\text{E} = 1$ et $\text{R} = 49$.
Or, le mot TROT a une valeur de 18 et R est donc un diviseur de 18. Donc $R \neq 49$.
Donc $\text{E} = 7$ et $\text{R} = 1$.
Puisque $\text{T} \times \text{R} \times \text{O} \times \text{T} = 18$ et que $\text{R} = 1$, on a $\text{T} \times \text{O} \times \text{T} = 18$.
Donc $\text{T} = 3$ et $\text{O} = 2$ ou bien $\text{T} = 1$ et $\text{O} = 18$.
Or, $\text{R} = 1$ et toutes les lettres ont une valeur différente. Donc, T ne peut être égal à 1.
Donc, $\text{T} = 3$ et $\text{O} = 2$.
Le mot TOME a une valeur de 168. Donc $\text{T} \times \text{O} \times \text{M} \times \text{E} = 168$, ou $3 \times 2 \times \text{M} \times 7 = 168$.
Donc $42 \times \text{M} = 168$, d'où $\text{M} = 168 \div 42$, ou $\text{M} = 4$.
Le mot ROSE a une valeur de 70. Donc $\text{R} \times \text{O} \times \text{S} \times \text{E} = 70$, ou $1 \times 2 \times \text{S} \times 7 = 70$.
Donc $14 \times \text{S} = 70$, d'où $\text{S} = 70 \div 14$, ou $\text{S} = 5$.
Donc, le mot METS a une valeur égale à $\text{M} \times \text{E} \times \text{T} \times \text{S}$, ou $4 \times 7 \times 3 \times 5$, ou 420.

RÉPONSE : (C)

24. La somme de deux nombres pairs est paire. La somme de deux nombres impairs est paire. La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire.
Donc, la somme $m + n$ est seulement paire si m et n sont tous deux pairs ou tous deux impairs.
Si $m = 2$, alors n doit être pair et supérieur à 2. Il peut donc être égal à 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 ou 20. Il y a donc 9 couples (m, n) lorsque $m = 2$.
Si $m = 4$, alors n doit être pair et supérieur à 4. Il peut donc être égal à 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 ou 20. Il y a donc 8 couples (m, n) lorsque $m = 4$.
On continue de cette manière. À chaque fois que m augmente de 2, le nombre de valeurs de n diminue de 1 et le nombre de couples (m, n) diminue de 1. La dernière valeur de m que l'on considère est $m = 18$ pour laquelle il n'y a qu'une valeur de n, soit $n = 20$.

Donc, le nombre de couples (m, n) où m et n sont pairs est égal à $9+8+7+6+5+4+3+2+1$, ou 45.
De même, si $m = 1$, alors n doit être impair et supérieur à 1. Il peut donc être égal à 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 ou 19. Il y a donc 9 couples (m, n) lorsque $m = 1$.
Si $m = 3$, alors n doit être impair et supérieur à 3. Il peut donc être égal à 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 ou 19. Il y a donc 8 couples (m, n) lorsque $m = 3$.
On continue de cette manière. À chaque fois que m augmente de 2, le nombre de valeurs de n diminue de 1 et le nombre de couples (m, n) diminue de 1. La dernière valeur de m que l'on considère est $m = 17$ pour laquelle il n'y a qu'une valeur de n, soit $n = 19$.
Donc, le nombre de couples (m, n) où m et n sont impairs est égal à $9+8+7+6+5+4+3+2+1$, ou 45.
Donc, le nombre total de couples (m, n) que l'on peut former en utilisant des nombres de la liste $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, de manière que $m < n$ et que $m + n$ soit pair, est égal à $45 + 45$, ou 90.

Réponse : (B)

25. Si on utilise le tuyau A et le tuyau B en même temps, on remplit la piscine en 6 heures.
Donc le tuyau A, employé seul, met plus de 6 heures pour remplir la piscine.
Puisque a est un entier, on a donc $a \geq 7$.
De même le tuyau B, employé seul, met plus de 6 heures pour remplir la piscine.
Puisque b est un entier, on a donc $b \geq 7$.
Puisque le tuyau A, employé seul, remplit la piscine en a heures, la fraction de piscine qu'il remplit en 6 heures est égale à $\frac{6}{a}$.
Puisque le tuyau B, employé seul, remplit la piscine en b heures, la fraction de piscine qu'il remplit en 6 heures est égale à $\frac{6}{b}$.
Lorsqu'on utilise le tuyau A et le tuyau B en même temps, ils emplissent *une* piscine en 6 heures. Donc $\frac{6}{a} + \frac{6}{b} = 1$.
Sachant que $a \geq 7$, que $b \geq 7$ et que a et b sont des entiers, on peut déterminer les valeurs de a et de b qui vérifient l'équation $\frac{6}{a} + \frac{6}{b} = 1$ par tâtonnements de façon systématique.
Par exemple, posons $a = 7$. L'équation devient $\frac{6}{7} + \frac{6}{b} = 1$, ou $\frac{6}{b} = 1 - \frac{6}{7}$, ou $\frac{6}{b} = \frac{1}{7}$. Or, on sait que $\frac{6}{42} = \frac{1}{7}$. Donc $b = 42$. On a donc trouvé une valeur possible de a, soit $a = 7$.
On continue de cette façon jusqu'à $a = 11$. Pour $a = 11$, l'équation devient $\frac{6}{11} + \frac{6}{b} = 1$, ou $\frac{6}{b} = 1 - \frac{6}{11}$, ou $\frac{6}{b} = \frac{5}{11}$, ou $\frac{30}{5b} = \frac{30}{66}$.
Puisqu'il n'y a aucune valeur entière de b pour laquelle $5b = 66$, l'équation n'admet aucune solution. Donc, $a = 11$ n'est pas une valeur possible.
Les autres valeurs possibles de a se trouvent dans le tableau suivant, de même que les valeurs correspondantes de b.

a	7	8	9	10	12	15	18	24	42
b	42	24	18	15	12	10	9	8	7

Une valeur de a supérieure à 42 fait en sorte que b soit inférieur à 7. Or, on sait que $b \geq 7$.
Il y a donc 9 valeurs possibles de a.
Remarque :
On peut réduire le temps consacré à la résolution de l'équation $\frac{6}{a} + \frac{6}{b} = 1$, si on reconnaît que si (a, b) est une solution, alors (b, a) est une solution ; si (a, b) n'est pas une solution, alors (b, a) n'est pas une solution.
Par exemple, lorsqu'on détermine que $a = 7$ et $b = 42$ vérifient l'équation, on peut conclure que $a = 42$ et $b = 7$ vérifient aussi l'équation (c.-à.d. que puisque $\frac{6}{7} + \frac{6}{42} = 1$, alors $\frac{6}{42} + \frac{6}{7} = 1$).
La symétrie des résultats dans le tableau est un reflet des valeurs interchangeables de a et de b.
Lorsqu'on reconnaît cette symétrie, on remplit le tableau par les deux bouts et on s'arrête à $a = 12$, $b = 12$.

Réponse : (C)

8^e^ année

1. On respecte la priorité des opérations. Donc $2 + 3 \times 4 + 10$ est égal à $2 + 12 + 10$, ou 24.
Réponse : (A)

2. L'athlète qui a gagné la course est celui qui a mis le moins de temps à la terminer.
Donc, l'athlète C a gagné.
Réponse : (C)

3. On reporte $x = 2$ et $y = 1$ dans l'expression $2x - 3y$ pour obtenir $2 \times 2 - 3 \times 1$.
On respecte la priorité des opérations pour obtenir $4 - 3$, ou 1.
Réponse : (B)

4. *Solution 1*
Le membre gauche de l'équation est égal à 44×25, ou 1100.
Or, on sait que $11 \times 100 = 1100$. L'équation devient donc $11 \times 100 = \square \times 100$.
Par comparaison, on voit que le nombre $\square$ est égal à 11.

Solution 2
Le membre de gauche de l'équation, soit 44×25, peut être écrit sous la forme $11 \times 4 \times 25$, ou 11×100. L'équation devient donc $11 \times 100 = \square \times 100$.
Par comparaison, on voit que le nombre $\square$ est égal à 11.
Réponse : (A)

5. On calcule l'aire de 12 en multipliant la largeur et la longueur. Les seules possibilités, avec des entiers, sont donc 1×12, 2×6 et 3×4.
Pour chacune, on calcule le périmètre en additionnant 2 fois la longueur et 2 fois la largeur.
Le tableau suivant indique les résultats.

Largeur	Longueur	Périmètre
1	12	26
2	6	16
3	4	14

Le plus petit périmètre possible est de 14 unités.
Réponse : (D)

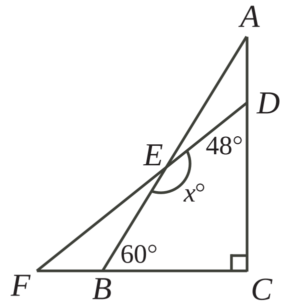
6. On remarque que la fraction $\frac{1}{4}$ paraît dans chaque expression. La grandeur relative de chaque somme dépend donc de la deuxième fraction seulement.
Puisque $\frac{1}{3}$ est la plus grande des fractions $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{7}$, on conclut que l'expression $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ a la plus grande valeur.
Réponse : (C)

7. Puisque 15 graines de tournesol pèsent environ 1 gramme, alors 300×15 graines, soit 4500 graines, pèsent environ 300 grammes. Il y a donc environ 4500 graines dans le sac.
Réponse : (B)

8. Le cadran indique 10:25. La prochaine fois que tous les chiffres du cadran seront identiques, il sera 11:11. De 10:25 à 11:00, il y a 35 minutes. De 11:00 à 11:11, il y a 11 minutes. Donc, le plus petit nombre de minutes qui s'écouleront est égal à 46.
Réponse : (D)

9. Charles reçoit $\frac{1}{3}$ des 84 biscuits. Ce nombre est égal à $84 \div 3$, ou 28.
Il mange $\frac{3}{4}$ des 28 biscuits qu'il reçoit. Or, $\frac{1}{4}$ de 28 biscuits, c'est 7 biscuits. Charles mange donc 3×7 biscuits, ou 21 biscuits.
Réponse : (E)

10. *Solution 1*
La somme des mesures d'angles d'un quadrilatère est égale à 360°.
Dans le quadrilatère $BCDE$ ci-dessous, on a donc $x + 48 + 90 + 60 = 180$, ou $x + 198 = 360$, d'où $x = 162$.



Solution 2
Dans le triangle ABC ci-dessus, $\angle BAC = 180° - 60° - 90°$, ou $\angle BAC = 30°$.
Puisque l'angle ADC est plat, $\angle ADE = 180° - 48°$, ou $\angle ADE = 132°$.
Dans le triangle AED, $\angle AED = 180° - 132° - 30°$, ou $\angle AED = 18°$.
Puisque l'angle AEB est plat, $x° = 180° - 18°$, ou $x° = 162°$.
Donc, x vaut 162.

Réponse : (E)

11. *Solution 1*
La moyenne de 5 entiers consécutifs est égale au nombre du milieu. En effet, puisque les nombres ont une moyenne de 21, si on partageait les quantités de façon équitable, on aurait 21, 21, 21, 21 et 21. Or, puisque les nombres sont consécutifs, le 2^{e} nombre est 1 de moins que le 21 du milieu, tandis que le 4^{e} nombre est 1 de plus que le 21 du milieu. De même, le 1er nombre est 2 de moins que le 21 du milieu, tandis que le 5^{e} nombre est 2 de plus que le 21 du milieu. Les nombres sont donc $21 - 2$, $21 - 1$, 21, $21 + 1$, $21 + 2$, ou 19, 20, 21, 22 et 23. Le plus petit nombre est 19.

Solution 2
Puisque les cinq nombres consécutifs ont une moyenne de 21, le plus petit des nombres est inférieur à 21. On procède par tâtonnements.
Supposons que le 1er nombre est 20. Les nombres sont donc 20, 21, 22, 23 et 24 et leur moyenne est égale à $\dfrac{20 + 21 + 22 + 23 + 24}{5}$, ou 22. Les nombres sont donc trop grands.
Supposons que le 1er nombre est 19. Les nombres sont donc 19, 20, 21, 22 et 23 et leur moyenne est égale à $\dfrac{19 + 20 + 21 + 22 + 23}{5}$, ou 21, ce qui est la moyenne donnée.
Donc, le plus petit des cinq nombres est 19.

Réponse : (E)

12. Pour chaque 3 boules blanches dans le sac, il y a 2 boules rouges.
Puisque le sac contient 9 boules blanches, c'est-à-dire 3 groupes de 3 boules blanches, il contient 3 groupes de 2 boules rouges.
Il y a donc 6 boules rouges dans le sac.

Réponse : (D)

13. On évalue : $\left(\frac{11}{12}\right)^2 = \left(\frac{11}{12}\right) \times \left(\frac{11}{12}\right) = \frac{11\times 11}{12\times 12} = \frac{121}{144}$
Cette fraction est entre $\frac{1}{2}$ et 1, car $\frac{121}{144} > \frac{72}{144}$ et $\frac{121}{144} < \frac{144}{144}$.

Réponse : (B)

14. Pendant les 5 parties, le total des tirs qu'elle a reçus est égal à $10 + 13 + 7 + 11 + 24$, ou 65.
Pendant les 5 parties, le total des arrêts qu'elle a effectués est égal à $7 + 9 + 6 + 9 + 21$, ou 52.
Or $\frac{52}{65} = \frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80\,\%$ (ou $\frac{52}{65} = 0{,}80 = 80\,\%$).
Gina a donc arrêté 80 % des tirs qu'elle a reçus.

Réponse : (C)

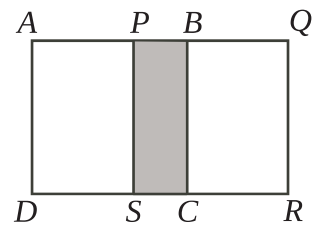
15. Pour déterminer la plus petite somme possible, on choisit les plus petits nombres comme chiffres des dizaines, soit 5 et 6.
Ensuite, on choisit les plus petits nombres qui restent comme chiffres des unités, soit 7 et 8.
Il y a donc deux sommes possibles qu'il faut évaluer :

$$\begin{array}{rr} & 57 \\ + & 68 \\ \hline & 125 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 58 \\ + & 67 \\ \hline & 125 \end{array}$$

(Pourquoi faut-il que ces deux sommes soient égales ?)
La plus petite somme possible est de 125.

Réponse : (B)

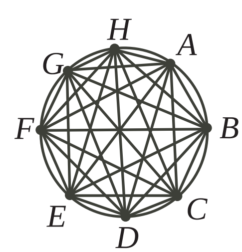
16. *Solution 1*
Puisque $AQ = 20$ et $AB = 12$, alors $BQ = AQ - AB$, d'où $BQ = 20 - 12$, ou $BQ = 8$.
Donc $PB = PQ - BQ$. d'où $PB = 12 - 8$, ou $PB = 4$.
Puisque $PS = 12$, l'aire du rectangle $PBCS$ est égale à 12×4, ou 48.



Solution 2
La somme de l'aire des carrés $ABCD$ et $PQRS$ est égale à $2 \times (12 \times 12)$, ou 2×144, ou 288.
L'aire du rectangle $AQRD$ est égale à 12×20, ou 240.
La différence entre ces aires est égale à $288 - 240$, ou 48. Donc, la partie cachée par les carrés partiellement superposés a une aire de 48. Supposons que le carré $ABCD$ est partiellement par dessus le carré $PQRS$. Une partie de ce dernier carré est donc cachée et son aire doit donc être égale à 48.
Or, elle forme un rectangle identique au rectangle $PBCS$, car celui-ci est formé par les parties qui chevauchent. Donc, le rectangle $PBCS$ a une aire de 48.

Réponse : (C)

17. *Solution 1*
On nomme les 8 points A, B, C, D, E, F, G et H, comme dans la figure ci-contre. On joint chaque paire de points par un segment.
Du point A, on trace 7 segments, soit un segment qui se rend à chacun des points de B à H.
Du point B, on trace 6 nouveaux segments, soit un segment qui se rend à chacun des points C à H, car le segment AB a déjà été tracé.
De même, on trace 5 nouveaux segments à partir du point C, 4 à partir du point D, 3 à partir du point E, 2 à partir du point F et 1 à partir du point G. On ne trace aucun nouveau segment à partir du point H, puisque ce point a déjà été relié aux autres points.



En tout, il y a $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ segments, ou 28 segments.

Solution 2
On nomme les 8 points A, B, C, D, E, F, G et H, comme dans la figure précédente.
À partir de chacun des 8 points, on peut tracer 7 segments de droite, soit 1 segment vers chacun des 7 autres points. Il semble donc y avoir un total de 56 segments ($8 \times 7 = 56$).
Or, selon cette méthode de compter, chaque segment est compté deux fois, soit une fois à chaque extrémité. Par exemple, le segment AD est compté une fois de A vers D et une fois de D vers A.
On doit donc diviser le nombre de segments par 2 : $56 \div 2 = 28$. Il y a donc un total de 28 segments.

Réponse : (E)

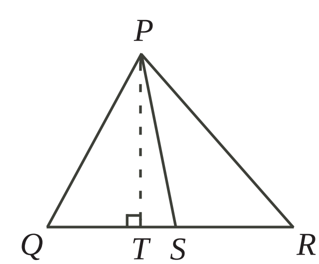
18. En 3 heures, le vélo, qui avance à une vitesse constante de 15 km/h, parcourt un total de 3×15 km, ou 45 km.
Au départ de l'autobus, le vélo a une avance de 195 km.
Pour rattraper le vélo en 3 heures, l'autobus doit donc parcourir 195 km plus les 45 km additionnels parcourus par le vélo pendant ces 3 heures, soit un total de 240 km.
Pour parcourir 240 km en 3 heures, l'autobus doit voyager à une vitesse moyenne de $240 \div 3$ km/h, ou 80 km/h.

Réponse : (B)

19. La figure 1 est formée de 1 carreau.
La figure 2 est formée de 1 carreau au milieu et de 4 autres carreaux, soit $1 + 4$ carreaux.
La figure 3 est formée de 1 carreau au milieu et de 4 groupes de 2 carreaux, soit $1+4\times 2$ carreaux.
La figure 4 est formée de 1 carreau au milieu et de 4 groupes de 3 carreaux, soit $1+4\times 3$ carreaux.
La figure 5 est formée de 1 carreau au milieu et de 4 groupes de 4 carreaux, soit $1+4\times 4$ carreaux.
Dans chaque cas, la figure est formée de 1 carreau au milieu et de 4 groupes de carreaux, le nombre de carreaux de chaque groupe étant égal à 1 de moins que le numéro de la figure.
Par exemple, la figure 10 sera formée de 1 carreau au milieu et de 4 groupes de 9 carreaux, soit $1 + 4 \times 9$ carreaux.
De façon générale, la figure N est formée de 1 carreau au milieu et de 4 groupes de $N - 1$ carreaux.
Donc, la figure 2010 sera formée de 1 carreau au milieu et de 4 groupes de 2009 carreaux, pour un total de $4 \times 2009 + 1$ carreaux, soit $8036 + 1$ carreaux, ou 8037 carreaux.

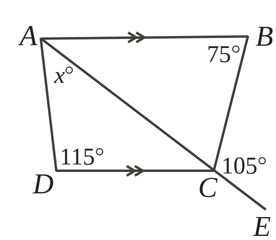
Réponse : (A)

20. On place un point T sur le côté QR de manière que PT soit perpendiculaire à QR.
Le segment PT est la hauteur de triangle PQS par rapport à la base QS. Il est aussi la hauteur du triangle PRS par rapport à la base SR.
Puisque les triangles PQS et PRS ont la même hauteur et la même aire, leurs bases correspondantes doivent être de même longueur.
Donc $QS = SR$.



Réponse : (D)

21. Puisque l'angle ACE est plat, $\angle ACB = 180° - 105°$, ou $\angle ACB = 75°$.
Dans le triangle ABC, $\angle BAC = 180° - 75° - 75°$, ou $\angle BAC = 30°$.
Puisque AB est parallèle à DC, $\angle ACD = \angle BAC = 30°$ (angles alternes-internes).
Dans le triangle ADC, $x° = 180° - 115° - 30°$, ou $x° = 35°$.
Donc, x a une valeur de 35.



Réponse : (A)

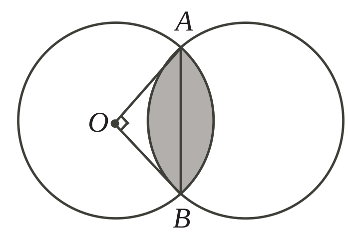
22. On remarque r est la seule variable qui paraît dans chacun des trois produits $r \times s$, $u \times r$ et $t \times r$. Pour que l'expression $r \times s + u \times r + t \times r$ ait la plus grande valeur possible, on attribue donc à r la plus grande valeur disponible, soit 5.
Puisque chacune des variables s, u et t est multipliée par r exactement une fois et que les trois produits sont ensuite additionnés, il n'importe pas quelle valeur on attribue à chacune parmi 2, 3 et 4. On choisit donc $s = 2$, $u = 3$ et $t = 4$.
La plus grande valeur possible de l'expression $r \times s + u \times r + t \times r$ est égale à $5 \times 2 + 3 \times 5 + 4 \times 5$, ou $10 + 15 + 20$, ou 45.

Réponse : (B)

23. Puisque Karim a besoin de 12 heures pour pelleter toute la neige dans sa cour, il peut pelleter $\frac{1}{12}$ de toute cette neige à chaque heure.
Puisque Dany a besoin de 8 heures pour pelleter toute la neige dans la cour, il peut pelleter $\frac{1}{8}$ de toute la neige à chaque heure.
De même, Jean peut pelleter $\frac{1}{6}$ de toute la neige à chaque heure et Alexa peut pelleter $\frac{1}{4}$ de toute la neige à chaque heure.
Ensemble, ils peuvent pelleter $\frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$, ou $\frac{2}{24} + \frac{3}{24} + \frac{4}{24} + \frac{6}{24}$, ou $\frac{15}{24}$ de la neige à chaque heure.
Ensemble, ils peuvent donc pelleter $\frac{15}{24} \div 60$, ou $\frac{15}{24} \times \frac{1}{60}$, ou $\frac{15}{1440}$, ou $\frac{1}{96}$ de la neige à chaque minute.
Ensemble, ils mettront donc 96 minutes pour pelleter toute la neige dans la cour de Karim.

Réponse : (D)

24. Soit A et B les points d'intersection des cercles et O le centre du cercle gauche.



On trace le segment AB qui, par symétrie, coupe la région ombrée en moitiés.
On trace les rayons OA et OB. On a $OA = OB = 10$ cm.
Puisque chaque cercle contient 25 %, ou $\frac{1}{4}$ de l'arc de l'autre cercle, $\angle AOB = \frac{1}{4} \times 360°$, ou $\angle AOB = 90°$.
Donc, l'aire du secteur AOB est $\frac{1}{4}$ de l'aire du cercle, soit $\frac{1}{4}\pi r^2$ cm^2, ou $\frac{1}{4}\pi 10^2$ cm^2, ou 25π cm^2.
L'aire du triangle AOB est égale à $\dfrac{OA \times OB}{2}$, ou $\dfrac{10 \times 10}{2}$ cm^2, ou 50 cm^2.
Si on soustrait l'aire du triangle AOB de l'aire du secteur AOB, on obtient la moitié de l'aire de la région ombrée.
Donc, l'aire de la région ombrée est égale à $2 \times (25\pi - 50)$ cm^2, ou environ $2 \times (28{,}5398)$ cm^2, ou 57,0796 cm^2.
L'aire de la région ombrée est plus près de 57,08 cm^2.

Réponse : (A)

25. Les deux premiers termes de la suite sont 1 et x.
Puisque chacun des termes suivants est la somme des deux termes précédents, le 3$^{\text{e}}$ terme est $1 + x$.
Le 4$^{\text{e}}$ terme est donc $x + (1 + x)$, ou $1 + 2x$.
On continue de cette manière pour obtenir les 10 termes de la suite :

$$1, x, 1 + x, 1 + 2x, 2 + 3x, 3 + 5x, 5 + 8x, 8 + 13x, 13 + 21x, 21 + 34x.$$

Après le 1$^{\text{er}}$ terme, chacun des autres termes dépend de x. Chacun de ces termes pourrait donc égaler 463.

Le 2$^{\text{e}}$ terme est égal à 463 si $x = 463$.
Le 3$^{\text{e}}$ terme est égal à 463 si $1 + x = 463$, ou $x = 462$.
Le 4$^{\text{e}}$ terme est égal à 463 si $1 + 2x = 463$, ou $2x = 462$, ou $x = 231$.
Le 5$^{\text{e}}$ terme est égal à 463 si $2 + 3x = 463$, ou $3x = 461$, ou $x = \frac{461}{3}$.
Or, $\frac{461}{3}$ n'est pas un entier et le 5$^{\text{e}}$ terme ne peut donc pas être égal à 463.
On continue de cette manière. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant.

Terme	Expression	Équation	Valeur de x	x est-il un entier ?
2$^{\text{e}}$	x	$x = 463$	$x = 463$	Oui
3$^{\text{e}}$	$1 + x$	$1 + x = 463$	$x = 462$	Oui
4$^{\text{e}}$	$1 + 2x$	$1 + 2x = 463$	$x = 231$	Oui
5$^{\text{e}}$	$2 + 3x$	$2 + 3x = 463$	$x = \frac{461}{3}$	Non
6$^{\text{e}}$	$3 + 5x$	$3 + 5x = 463$	$x = 92$	Oui
7$^{\text{e}}$	$5 + 8x$	$5 + 8x = 463$	$x = \frac{458}{8}$	Non
8$^{\text{e}}$	$8 + 13x$	$8 + 13x = 463$	$x = 35$	Oui
9$^{\text{e}}$	$13 + 21x$	$13 + 21x = 463$	$x = \frac{450}{21}$	Non
10$^{\text{e}}$	$21 + 34x$	$21 + 34x = 463$	$x = 13$	Oui

Donc la somme de toutes les valeurs de x pour lesquelles le nombre 463 paraît dans la suite est égale à $463 + 462 + 231 + 92 + 35 + 13$, ou 1296.

Réponse : (B)

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

Concours Gauss 2009

(7^e^ et 8^e^ années – Secondaire I et II)

le mercredi 13 mai 2009

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Comité du concours Gauss

7^e^ année

1. On a : $4{,}1 + 1{,}05 + 2{,}005 = 5{,}15 + 2{,}005 = 7{,}155$

Réponse : (A)

2. Puisque le triangle est équilatéral, tous ses côtés ont la même longueur.
Le périmètre, en mètres, est donc égal à $8 + 8 + 8$ (ou 3×8), soit 24.

Réponse : (C)

3. Puisque les nombres 12, 14 et 16 sont pairs, ils sont divisibles par 2 et ne sont donc pas des nombres premiers. Puisque le nombre 15 est divisible par 3, il n'est pas un nombre premier.
Chacun des autres nombres, soit 11, 13 et 17, n'est divisible que par 1 et par lui-même. Chacun est donc premier.
Il y a donc 3 nombres premiers dans la liste.

Réponse : (D)

4. *Solution 1*
Chacun des nombres de la liste est supérieur à 0 et inférieur à 1. On peut les placer en ordre ascendant en comparant les chiffres des dixièmes, ce qui donne

$$\{0{,}05; 0{,}25; 0{,}37; 0{,}40; 0{,}81\}.$$

Le plus petit nombre de la liste est 0,05.

Solution 2
On écrit chaque nombre sous forme fractionnaire :
$0{,}40 = \frac{40}{100}$, $0{,}25 = \frac{25}{100}$, $0{,}37 = \frac{37}{100}$, $0{,}05 = \frac{5}{100}$, $0{,}81 = \frac{81}{100}$.
Toutes les fractions ont le même dénominateur, soit 100. On peut donc choisir la fraction qui a le plus petit numérateur. Le plus petit nombre de la liste est donc $\frac{5}{100}$, ou 0,05.

Réponse : (D)

5. L'abscisse du point P se situe entre -2 et 0. L'ordonnée de P se situe entre 2 et 4.
Parmi les choix donnés, seules les coordonnées $(-1, 3)$ satisfont aux deux conditions.

Réponse : (E)

6. À Vancouver, la température est de 22 °C.
À Calgary, la température est de 22 °C − 19 °C, ou 3 °C .
À Québec, la température est de 3 °C − 11 °C, ou −8 °C.

Réponse : (C)

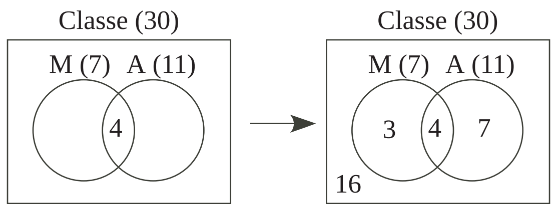
7. Puisqu'une distance réelle de 60 km est représentée par 1 cm sur la carte, alors une distance réelle de 540 km est représentée par $\dfrac{540}{60}$ cm, ou 9 cm sur la carte.

Réponse : (A)

8. Dans un triangle, la somme de la mesure des trois angles est toujours égale à 180°.
Dans le triangle PQR, $\angle P + \angle Q = 60°$. Donc, $\angle R = 180° - 60°$, ou $\angle R = 120°$.

Réponse : (C)

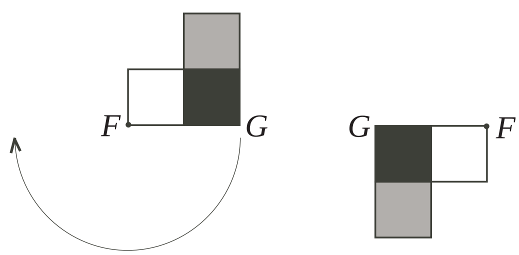
9. Le premier diagramme de Venn, ci-dessous, indique que la classe compte 30 élèves, que 7 élèves sont allés au Mexique, 11 élèves sont allés en Angleterre et 4 de ces élèves sont allés dans les deux pays.
Parmi les 7 élèves qui sont allés au Mexique, 4 sont aussi allés en Angleterre.
Donc, 3 élèves $(7 - 4)$ sont allés au Mexique, mais ne sont pas allés en Angleterre.
Parmi les 11 élèves qui sont allés en Angleterre, 4 sont aussi allés au Mexique.
Donc, 7 élèves $(11 - 4)$ sont allés en Angleterre, mais ne sont pas allés au Mexique.



Donc, 3 élèves sont allés seulement au Mexique, 7 élèves sont allés seulement en Angleterre et 4 élèves sont allés dans les deux pays, pour un total de 14 élèves.
Dans cette classe de 30 élèves, 16 élèves $(30-14)$ ne sont jamais allés au Mexique ou en Angleterre.

Réponse : (B)

10. On se concentre sur le segment horizontal FG (voir la première figure ci-dessous) alors que la figure subit une rotation de 180° de centre F.
Une rotation de 180° correspond à une rotation d'un demi-tour. Le point F reste fixe, alors que le segment FG (et le reste de la figure) se déplace à la gauche de F. Le choix de réponse C indique la bonne position.



Réponse : (C)

11. Puisque Serge parcourt 4 m pour chaque 5 m que parcourt Carl, Serge parcourt $\frac{4}{5}$ de la distance parcourue par Carl. Lorsque Carl traverse la ligne d'arrivée, il a parcouru 100 m.
À ce moment, Serge a parcouru $\frac{4}{5}$ de 100 m, ou 80 m.

Réponse : (E)

12. *Solution 1*
L'aire du triangle est la moitié de l'aire d'un parallélogramme ayant la même base et la même hauteur que le triangle. Ce parallélogramme a donc une aire de 54 cm^2 $(2 \times 27 = 54)$. Puisqu'il a une base de 6 cm, il a une hauteur de 9 cm $(6 \times 9 = 54)$. Puisque le triangle et le parallélogramme ont la même hauteur, le triangle a une hauteur de 9 cm.

Solution 2
On peut calculer l'aire d'un triangle en utilisant la formule Aire $= \frac{1}{2} \times$ base $\times$ hauteur.
Puisque l'aire est de 27 cm^2 et que la base mesure 6 cm, la formule devient $27 = \frac{1}{2} \times 6 \times h$, d'où $27 = 3h$. Donc $h = 9$ et le triangle a une hauteur de 9 cm.

Réponse : (A)

13. Il y a 60 secondes dans une minute, 60 minutes dans une heure, 24 heures dans une journée et 7 jours dans une semaine. Donc, le nombre de secondes dans une semaine est égal à $60 \times 60 \times 24 \times 7$.
Réponse : (D)

14. *Solution 1*
S correspond à une valeur d'environ 1,5 sur la droite numérique, tandis que T correspond à environ 1,6. Donc, $S \div T$ est à peu près égal à $1{,}5 \div 1{,}6$, ou 0,9375. R est la seule valeur légèrement inférieure à 1. Elle représente donc mieux la valeur de $S \div T$.

Solution 2
La valeur de S est légèrement inférieure à celle de T. Donc, la valeur de $S \div T$ est légèrement inférieure à 1. Donc, la valeur de $S \div T$ est mieux représentée par R.
Réponse : (C)

15. Pour obtenir une somme maximale, on essaie d'utiliser le plus gros diviseur de 144 possible.
Or, le plus grand diviseur de 144 est 144. Si on l'utilisait pour créer une multiplication, il faudrait utiliser $144 = 144 \times 1 \times 1$, ce qui est interdit, car on parle du produit de trois entiers différents.
Donc, la réponse ne peut être égale à $144 + 1 + 1$, ou 146, qui correspond au choix (C).
Le deuxième plus grand diviseur de 144 est 72 et on peut écrire $144 = 72 \times 2 \times 1$.
Les trois facteurs sont différents et leur somme est égale à $72 + 2 + 1$, ou 75.
Puisque 75 est le plus grand nombre parmi les choix qui restent, il s'agit de la somme maximale possible.
Réponse : (B)

16. *Solution 1*
Puisque le carré a une aire de 25, ses côtés ont une longueur de 5, car $5 \times 5 = 25$.
Puisque le rectangle a la même largeur que le carré, il a donc une largeur de 5.
Puisque la longueur du rectangle est le double de sa largeur, il a donc une longueur de 10, car $5 \times 2 = 10$.
L'aire du rectangle est donc égale à 5×10, ou 50.

Solution 2
Le rectangle a la même largeur que le carré et sa longueur est le double de la longueur du carré.
Donc, l'aire du rectangle est le double de celle du carré. Elle est égale à 2×25, ou 50.
Réponse : (D)

17. Les six autres joueuses de l'équipe ont compté une moyenne de 3,5 points chacune.
Elles ont donc compté un total de $6 \times 3{,}5$ points, ou 21 points.
Vanessa a compté le reste des 48 points, soit $48 - 21$ points, ou 27 points.
Réponse : (E)

18. Puisque x et z sont des entiers positifs et que $xz = 3$, on doit donc avoir $x = 1$ et $z = 3$ ou bien $x = 3$ et $z = 1$.
Supposons que $x = 1$ et $z = 3$; l'équation $yz = 6$ devient donc $3y = 6$, d'où $y = 2$.
On a donc $x = 1$ et $y = 2$, ce qui donne $xy = 2$ et cela contredit la première équation $xy = 18$.
Donc, notre supposition est incorrecte et c'est le deuxième choix, $x = 3$ et $z = 1$, qui doit être vrai. L'équation $yz = 6$ devient donc $y = 6$.
On vérifie : $x = 3$, $y = 6$ et $z = 1$ satisfont bien aux trois équations données.
Donc $x + y + z = 3 + 6 + 1$, ou $x + y + z = 10$.
Réponse : (B)

19. Les pièces de 25 cents ont une valeur de 10,00 \$. Chaque pièce de 25 cents a une valeur de 0,25 \$. Il y a donc 40 pièces de 25 cents dans le bocal (4 pièces pour chacun des 10 dollars ou $10 \div 0{,}25 = 40$).
De même, il y a 200 pièces de 5 cents (20 pièces pour chacun des 10 dollars ou $10 \div 0{,}05 = 200$) et 1000 pièces de 1 cent (100 pièces pour chacun des 10 dollars ou $10 \div 0{,}01 = 1000$).
Le nombre total de pièces de monnaie dans le bocal est donc égal à $40 + 200 + 1000$, ou 1240.
La probabilité de choisir une pièce de 25 cents est donc égale à :
$$\frac{\text{nombre de pièces de 25 cents}}{\text{nombre total de pièces de monnaie}} = \frac{40}{1240} = \frac{1}{31}$$
Réponse : (B)

20. Puisque V est le milieu de PR, alors $PV = VR$.
Puisque $UVRW$ est un parallélogramme, alors $VR = UW$.
Puisque W est le milieu de US, alors $UW = WS$.
Donc $PV = VR = UW = WS$.
De même, $QW = WR = UV = VT$.
Puisque R est le milieu de TS, alors $TR = RS$.
Donc, les triangles VTR et WRS sont congruents et ils ont donc la même aire.
La diagonale VW du parallélogramme $UVRW$ coupe le parallélogramme en deux triangles UVW et RWV de même aire.
Dans le quadrilatère $VRSW$, $VR = WS$ et VR est parallèle à WS. Donc, $VRSW$ est un parallélogramme et l'aire du triangle RWV est égale à l'aire du triangle WRS.
Donc, les triangles VTR, WRS, RWV et UVW ont la même aire. Ils divisent donc le triangle STU en quarts.
Le parallélogramme $UVRW$ est donc composé de deux quarts du triangle STU, c'est-à-dire la moitié du triangle STU.
L'aire du parallélogramme $UVRW$ est donc égale à $\frac{1}{2}$.
Réponse : (B)

21. Ensemble, Lara et Rudi ont mangé $\frac{1}{4} + \frac{3}{10}$ de la tarte, c'est-à-dire $\frac{5}{20} + \frac{6}{20}$, ou $\frac{11}{20}$ de la tarte.
Il reste donc $1 - \frac{11}{20}$ de la tarte, ou $\frac{9}{20}$ de la tarte.
Le lendemain, Cora a mangé $\frac{2}{3}$ de ce qui restait. Après que Cora a mangé sa portion, la fraction de la tarte initiale qui n'a pas été mangée est égale à $(1 - \frac{2}{3})$ de ce qui restait le jour précédent, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$ de ce qui restait le jour précédent.
À la fin, il reste donc $\frac{1}{3}$ de $\frac{9}{20}$ de la tarte initiale, ou $\frac{3}{20}$ de la tarte initiale.
Réponse : (D)

22. Dans la 1re rangée, il manque un 2 et un 4. Puisqu'il y a déjà un 2 dans la 2e colonne, on doit placer le 2 dans la 4e colonne et le 4 dans la 2e. On peut compléter le carré 2×2 en haut à gauche en plaçant un 3 dans la 1re case vide de la 2e rangée. Dans la 2e rangée, il manque maintenant un 1 et un 4 Puisqu'il y a déjà un 4 dans la 4e colonne, on doit placer le 4 dans la 3e colonne et un 1 dans la 4e. On peut compléter la 4e colonne en plaçant un 3 dans la 3e rangée. P ne peut être un 3, car il y a déjà un 3 dans la 3e rangée. De plus, P ne peut être un 4 ou un 2, car ces nombres paraissent déjà dans la 2e colonne. Donc, P doit être un 1.
Réponse : (A)

23. *Solution 1*

On peut supposer que le pot contient 1 litre d'eau au départ. On utilise un tableau pour tenir compte des quantités versées et des quantiés qui restent dans le pot. On s'arrête lorsque la quantié d'eau qui reste dans le pot est inférieure à 0,5 L.

N^bre de verres	Quantité d'eau versée (L)	Quantité d'eau qui reste dans le pot (L)
1	10 % de $1 = 0{,}1$	$1 - 0{,}1 = 0{,}9$
2	10 % de $0{,}9 = 0{,}09$	$0{,}9 - 0{,}09 = 0{,}81$
3	10 % de $0{,}81 = 0{,}081$	$0{,}81 - 0{,}081 = 0{,}729$
4	10 % de $0{,}729 = 0{,}0729$	$0{,}729 - 0{,}0729 = 0{,}6561$
5	10 % de $0{,}6561 = 0{,}06561$	$0{,}6561 - 0{,}06561 = 0{,}59049$
6	10 % de $0{,}59049 = 0{,}059049$	$0{,}59049 - 0{,}059049 = 0{,}531441$
7	10 % de $0{,}531441 = 0{,}0531441$	$0{,}531441 - 0{,}0531441 = 0{,}4782969$

D'après le tableau, Kim doit verser un minimum de 7 verres pour qu'il reste moins de la moitié de l'eau dans le pot.

Solution 2

Lorsqu'on enlève 10 % de l'eau du pot, cela équivaut à laisser 90 % de l'eau dans le pot.
Donc, la quantité d'eau qui reste dans le pot après un versement est égale à $\frac{9}{10}$ (ou 0,9) de la quantié d'eau qu'il y avait dans le pot avant le versement.
On utilise un tableau pour tenir compte de la fraction d'eau qui reste dans le pot après chaque versement.

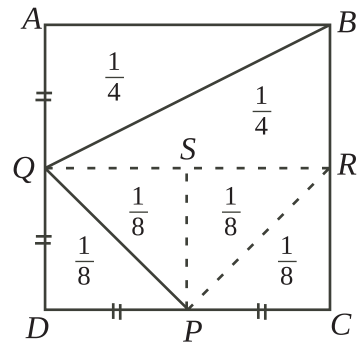
N^bre de verres	Fraction de la quantitié initiale d'eau qui reste dans le pot
1	0,9 de $1 = 0{,}9$
2	0,9 de $0{,}9 = 0{,}81$
3	0,9 de $0{,}81 = 0{,}729$
4	0,9 de $0{,}729 = 0{,}6561$
5	0,9 de $0{,}6561 = 0{,}59049$
6	0,9 de $0{,}59049 = 0{,}531441$
7	0,9 de $0{,}531441 = 0{,}4782969$

D'après le tableau, Kim doit verser un minimum de 7 verres pour qu'il reste moins de la moitié de l'eau dans le pot.

Réponse : (C)

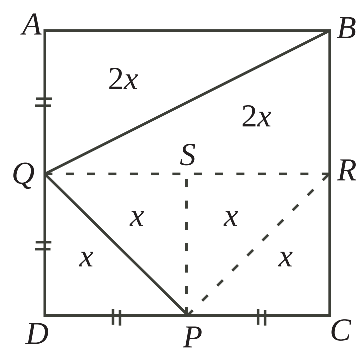
24. *Solution 1*

On trace le segment QR parallèle à DC, comme dans la figure ci-dessous. Ce segment coupe le carré $ABCD$ en deux demies. Puisque les triangles ABQ et RQB sont congruents, chacun représente la moitié du rectangle $ABRQ$, c'est-à-dire un quart du carré $ABCD$. On trace le segment PS parallèle à DA, puis le segment PR. Les triangles PDQ, PSQ, PSR et PCR sont congruents. Donc, chacun représente un quart du rectangle $DCRQ$, c'est-à dire un huitième du carré $ABCD$.



Le quadrilatère $QBCP$ représente donc $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ du carré $ABCD$, c'est-à-dire $\frac{5}{8}$ du carré. Son aire est donc égale à $\frac{5}{8}$ de l'aire du carré.
On sait donc que $\frac{5}{8}$ de l'aire du carré est égale à 15. Donc, $\frac{1}{8}$ de l'aire du carré est égale à 3. Donc, l'aire du carré est égale à 24.

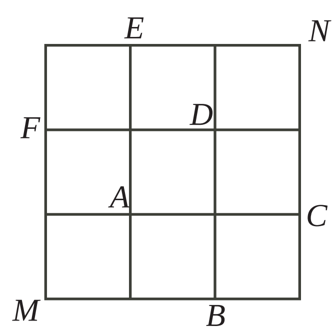
Solution 2
On trace le segment QR parallèle à DC, comme dans la figure ci-dessous. Ce segment coupe le carré $ABCD$ en deux rectangles congruents.
On trace le segment PS parallèle à DA, puis le segment PR. Les triangles PDQ, PSQ, PSR et PCR sont congruents. Donc, chacun a la même aire x. Puisque le rectangle $DCRQ$ a une aire égale à $x+x+x+x$, ou $4x$, le rectangle $ABRQ$ a aussi une aire de $4x$.



Puisque le segment BQ coupe le rectangle $ABRQ$ en deux triangles congruents, chacun a une aire de $2x$, car $2x+2x=4x$.
L'aire du quadrilatère $QBCP$ est égale à $x+x+x+2x$, ou $5x$. On a donc $5x=15$, d'où $x=3$.
Or, l'aire du carré $ABCD$ est égale à $x+x+x+x+2x+2x$, ou $8x$. Elle est donc égale à 8×3, ou 24.

Réponse : (E)

25. On nomme certains points comme dans la figure suivante.



Le chemin $MADN$ est le seul chemin de longueur 3, c'est-à-dire qui utilise 3 diagonales.
Puisque la figure est symétrique par rapport au segment MN, tous les autres chemins auront un *chemin-image* par rapport au segment MN. Tous les autres chemins surviennent donc en paires, ce qui signifie que le nombre total de chemins est impair. Ceci nous permet d'éliminer les choix (B) et (D), qui présentent des nombres pairs.
Le tableau suivant présente tous les chemins possibles de M à N en n'utilisant que des diagonales.

Longueur du chemin	Nom du chemin	Nom du chemin-image
3	$MADN$	même
5	$MABCDN$	$MAFEDN$
9	$MABCDEFADN$	$MAFEDCBADN$
	$MABCDAFEDN$	$MAFEDABCDN$
	$MADCBAFEDN$	$MADEFABCDN$

Nous avons présenté 9 chemins. Puisqu'il n'y a pas un plus grand nombre dans les choix de réponses, il y a un total de 9 chemins possibles.

Réponse : (E)

8e année

1. En tenant compte de la priorité des opérations, on a : $1 + 3^2 = 1 + 9 = 10$

RÉPONSE : (B)

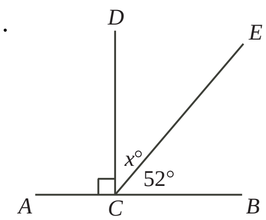
2. On a $-10 + (-12) = -22$.

RÉPONSE : (D)

3. S'il utilisait un pot de 1 litre, Jean pourrait remplir 2 bouteilles de 0,5 litre (un demi-litre).
En utilisant un pot de 3 litres, Jean peut remplir 6 bouteilles d'eau ($3 \times 2 = 6$).
(Vérification : $3 \div 0{,}5 = 3 \div \frac{1}{2} = 3 \times 2 = 6$)

RÉPONSE : (C)

4. Puisque AB est un segment de droite, $\angle ACD + \angle DCE + \angle ECB = 180°$.
Donc $90° + x° + 52° = 180°$, d'où $x° = 180° - 90° - 52°$, ou $x = 38$.



RÉPONSE : (B)

5. On a $\frac{7}{9} = 7 \div 9 = 0{,}7777\ldots = 0{,}\overline{7}$. Arrondi au centième près, $\frac{7}{9} \approx 0{,}78$.

RÉPONSE : (C)

6. D'après le diagramme, la voiture X utilise le moins d'essence pour parcourir 100 km. Elle est donc la plus économique par rapport à la consommation d'essence. C'est donc elle qui irait le plus loin si toutes les voitures utilisaient 50 litres d'essence.

RÉPONSE : (D)

7. Karine a dépensé 25 \$ ($\frac{1}{4}$ de 100 \$ = 25 \$) sur les manèges et 10 \$ sur de la nourriture ($\frac{1}{10}$ de 100 \$ = 10 \$). Elle a dépensé 35 \$ en tout.

RÉPONSE : (E)

8. Le polyèdre a 6 faces et 8 sommets.
L'équation $F + S - A = 2$ devient $6 + 8 - A = 2$, d'où $14 - A = 2$, ou $A = 12$.
Le polyèdre a 12 arêtes.

RÉPONSE : (A)

9. Le mot PROBABILITE utilise 9 lettres différentes de l'alphabet, soit A, B, E, I, L, O, P, R et T. Il y a 26 lettres dans l'alphabet. Donc, la probabilité pour que Jules choisisse une des 9 lettres du mot PROBABILITE est égale à $\frac{9}{26}$.

RÉPONSE : (A)

10. *Solution 1*
Supposons que deux nombres égaux ont une somme de 20. Il s'agit donc de $10 + 10 = 20$.
Si on diminue le premier nombre de 1 et qu'on augmente le deuxième nombre de 1, on a deux nombres qui ont une différence de 2 et une somme de 20, soit $9 + 11 = 20$. Les deux nombres sont 9 et 11.

Solution 2
Puisque les deux nombres ont une différence de 2, on peut représenter le petit nombre par x et le plus grand nombre par $x + 2$.
Puisque les nombres ont une somme de 20, alors $x+x+2 = 20$, c'est-à-dire $2x = 18$, d'où $x = 9$.
Le petit nombre est 9 et le grand nombre est 11.

RÉPONSE : (A)

11. Puisque $\angle ABC = \angle ACB$, alors le triangle ABC est isocèle et $AB = AC$.
Puisque le triangle ABC a un périmètre de 32, alors $AB + AC + 12 = 32$, d'où $AB + AC = 20$.
Puisque $AB = AC$, alors $2AB = 20$, ou $AB = 10$.

RÉPONSE : (C)

12. On reporte $C = 10$ dans l'équation $F = \frac{9}{5}C + 32$ qui devient $F = \frac{9}{5} \times 10 + 32$, c'est-à-dire $F = 18+32$, ou $F = 50$. Une température de 10 degrés Celcius correspond à 50 degrés Fahrenheit.

RÉPONSE : (D)

13. On peut commencer par utiliser 1 comme premier nombre. On a alors $101 = 1 + 100$.
On peut ensuite augmenter le premier nombre de 1 et diminuer le deuxième nombre de 1, ce qui maintient une somme de 101. On continue de la même façon pour les autres additions.
Voici la liste des additions possibles :

$$\begin{aligned} 101 &= 1 + 100 \\ 101 &= 2 + 99 \\ 101 &= 3 + 98 \\ &\vdots \\ 101 &= 50 + 51 \end{aligned}$$

Si on continuait à augmenter le premier nombre de 1 et à diminuer le deuxième nombre de 1, le deuxième ne serait pas plus grand que le premier.
Il y a donc 50 additions possibles.

RÉPONSE : (A)

14. Les six autres joueuses de l'équipe ont compté une moyenne de 3,5 points chacune.
Elles ont donc compté un total de $6 \times 3{,}5$ points, ou 21 points.
Vanessa a compté le reste des 48 points, soit $48 - 21$ points, ou 27 points.

RÉPONSE : (E)

15. Le triangle PQR est rectangle, car $\angle PQR = 90^\circ$ ($PQRS$ est un rectangle).
Selon le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} PR^2 &= PQ^2 + QR^2 \\ 13^2 &= 12^2 + QR^2 \\ 169 &= 144 + QR^2 \\ QR^2 &= 25 \end{aligned}$$

Puisque $QR > 0$, alors $QR = 5$. L'aire du rectangle $PQRS$ est donc égale à 12×5, ou 60.

RÉPONSE : (B)

16. Lorsqu'il est 15 h 00 à Victoria, il est 18 h 00 à Timmins.
Donc, l'heure à Victoria est toujours 3 heures de moins que l'heure à Timmins.
Lorsque l'avion arrive à 16 h 00, heure locale de Timmins, il est 13 h 00 à Victoria.
L'avion est donc parti à 6 h 00, heure de Victoria, et il est arrivé à 13 h 00, heure de Victoria.
Le vol a duré 7 heures.

Réponse : (D)

17. Les pièces de 25 cents ont une valeur de 10,00 \$. Chaque pièce de 25 cents a une valeur de 0,25 \$.
Il y a donc 40 pièces de 25 cents dans le bocal (4 pièces pour chacun des 10 dollars).
De même, il y a 200 pièces de 5 cents (20 pièces pour chacun des 10 dollars ou $10 \div 0{,}05 = 200$) et 1000 pièces de 1 cent (100 pièces pour chacun des 10 dollars ou $10 \div 0{,}01 = 1000$).
Le nombre total de pièces de monnaie dans le bocal est donc égal à $40 + 200 + 1000$, ou 1240.
La probabilité de choisir une pièce de 25 cents est donc égale à :

$$\frac{\text{nombre de pièces de 25 cents}}{\text{nombre total de pièces de monnaie}} = \frac{40}{1240} = \frac{1}{31}$$

Réponse : (B)

18. Des 40 élèves de la classe, 12 n'aiment aucun des desserts.
Donc, 28 élèves ($40 - 12 = 28$) aiment au moins un des desserts.
Or, 18 élèves aiment la tarte aux pommes et 15 aiment le gâteau au chocolat.
Puisque $18 + 15 = 33$, alors 5 élèves ($33 - 28 = 5$) aiment les deux desserts.

Réponse : (E)

19. Dans la colonne des unités, la somme de $P + Q$ se termine par un 9. On a donc $P + Q = 9$ ou $P + Q = 19$. Puisque P et Q sont des chiffres différents, leur somme maximale possible est $9 + 8$, ou 17. Donc $P + Q \neq 19$. Donc $P + Q = 9$.
Dans la colonne des dizaines, la somme de $Q + Q$ se termine par un 0. Donc $Q + Q = 0$ ou $Q + Q = 10$, d'où $Q = 0$ ou $Q = 5$.
Il est impossible que $Q = 0$, car si c'était le cas, il n'y aurait aucune retenue de la colonne des dizaines à la colonne des centaines et dans cette dernière colonne, la somme de $P + Q$ ne pourrait donc pas se terminer par un 0, car on sait déjà que $P + Q = 9$.
On a donc $Q = 5$ et $P = 4$. Dans la colonne des unités, on a $4 + 5$. Dans la colonne des dizaines, on a $5 + 5$, ce qui produit une retenue de 1 appliquée à la colonne des centaines. Dans la colonne des centaines, on a $1 + 4 + 5$, ce qui produit une retenue de 1 appliquée à la colonne des milliers. Dans la colonne des milliers, on a $1 + R = 2$, d'où $R = 1$.
Donc $P + Q + R = 4 + 5 + 1$, ou $P + Q + R = 10$.

$$\begin{array}{rcccc} & & P & Q & P \\ + & R & Q & Q & Q \\ \hline & 2 & 0 & 0 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & & 4 & 5 & 4 \\ + & 1 & 5 & 5 & 5 \\ \hline & 2 & 0 & 0 & 9 \end{array}$$

Réponse : (B)

20. Puisque le carré a une aire de 144, chacun de ses côtés a une longueur de 12 ($\sqrt{144} = 12$ ou $12 \times 12 = 144$).
La longueur de la ficelle correspond au périmètre du carré, soit 48 ($4 \times 12 = 48$).
Le plus grand cercle que l'on peut former avec cette ficelle a donc une circonférence de 48.
Donc $\pi \times d = 48$, d'où $d = 48 \div \pi$, ou $d \approx 15{,}28$. Donc $r \approx 15{,}28 \div 2$, ou $r \approx 7{,}64$.
L'aire du plus grand cercle que l'on peut former avec la ficelle est égale à $\pi(7{,}64)^2$, ou environ 183.

Réponse : (E)

21. Pour obtenir une somme maximale, on essaie d'utiliser le plus grand diviseur possible de 360 comme facteur, ce qui signifie que les trois autres facteurs doivent être aussi petits que possible. Les trois plus petits diviseurs de 360 sont 1, 2 et 3, ce qui donne 60 comme quatrième facteur ($\frac{360}{1\times2\times3} = 60$ ou $1 \times 2 \times 3 \times 60 = 360$).
On obtient ainsi une somme des facteurs égale à 66 ($1+2+3+60 = 66$). On peut ainsi éliminer trois des choix de réponses qui sont inférieurs à 66.
Puisque 1, 2 et 3 sont les trois plus petits diviseurs différents de 360, il est impossible de trouver un quatrième facteur plus grand que 60.
Si on remplace le facteur 60 par un facteur plus petit, cela diminuera la somme des quatre facteurs. En effet, le produit de trois entiers différents est toujours supérieur à leur somme. Par exemple, $1 \times 2 \times 4 = 8 > 1 + 2 + 4 = 7$.
Le plus grand diviseur de 360 qui est inférieur à 60 est 45. Puisque $360 \div 45 = 8$, si on prenait 45 comme facteur, la somme des trois autres facteurs serait inférieure à 8 et la somme des quatre facteurs serait inférieure à 53 ($8 + 45 = 53$), ce qui est inférieur à la somme précédente de 66.
De la même manière, on obtient des sommes inférieures à 66 si on considère les autres diviseurs de 360 comme plus grand des quatre facteurs. La somme maximale possible des quatre entiers est donc égale à 66.

Réponse : (B)

22. La première ligne verticale coupe la lettre S en 4 morceaux, soit 2 morceaux à gauche de la ligne et 2 morceaux à droite de la ligne.
Chaque ligne additionnelle ajoute 3 nouveaux morceaux, entre les lignes, tout en conservant les 2 morceaux à gauche des lignes et les 2 morceaux à droite des lignes.
Le tableau suivant compare les nombres de lignes qui augmentent de 1 et les nombres de morceaux qui augmentent de 3.

Nombre de lignes	Nombre de morceaux
1	4
2	7
3	10
4	13
⋮	⋮

On veut un total de 154 morceaux, c'est-à-dire 150 morceaux de plus que pour 1 ligne. Puisque chaque nouvelle ligne crée 3 nouveaux morceaux, il faut donc ajouter 50 autres lignes ($150 \div 3 = 50$) pour un total de 51 lignes.

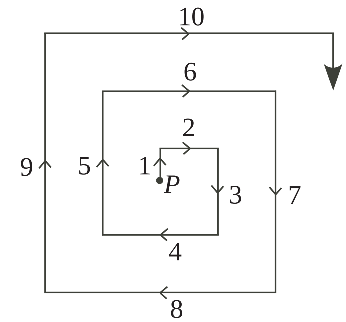
Réponse : (D)

23. Puisqu'on cherche un pourcentage d'une longueur, on peut choisir n'importe quelle longueur pour les côtés du carré. On suppose que les côtés du carré ont une longueur de 2. Puisque le diamètre du cercle est égal à la largeur du carré, il est égal à 2.
D'après le théorème de Pythagore, $XY^2 = 2^2 + 2^2$, d'où $XY^2 = 8$, ou $XY = \sqrt{8}$.
La partie du segment XY qui est située à l'extérieur du cercle a une longueur égale à $\sqrt{8} - 2$ (on a soustrait le diamètre de la longueur).
Puisque $\dfrac{\text{longueur de la partie à l'extérieur du cercle}}{\text{longueur de } XY} = \dfrac{\sqrt{8}-2}{\sqrt{8}} \approx 0{,}293$, alors 29,3 % du segment XY est situé à l'extérieur du cercle.

Réponse : (A)

24. *Solution 1*

Les segments de la spirale sont dessinés vers le haut, vers la droite, vers le bas ou vers la gauche. Puisque les segments vers le haut sont dessinés à tous les quatre segments, ils ont pour longueur respective $1, 5, 9, 13, 17, 21, \ldots$ Donc, le segment de longueur 21 est le sixième segment dessiné vers le haut, du côté gauche de la spirale (tous ces segments ont une longueur qui est 1 de plus qu'un multiple de 4).



On voit que l'extrémité supérieure de chaque segment vers le haut est située à 2 unités vers la gauche et 2 unités au-dessus de celle du segment vers le haut précédent. L'extrémité supérieure F du segment de longueur 21 est donc située à $2+2+2+2+2$ unités, ou 10 unités, à la gauche du point P et à $1+2+2+2+2+2$ unités, ou 11 unités, au-dessus du point P. Les paragraphes suivants démontrent ces résultats de façon plus formelle.

On considère le trajet en spirale à partir du point P. Après le premier segment vers le haut, on se dirige à l'horizontale de 2 unités vers la droite, c'est-à-dire de $+2$, le signe positif indiquant un mouvement vers la droite.

Deux segments plus loin, on se dirige à l'horizontale de 4 unités vers la gauche, c'est-à-dire de -4, le signe négatif indiquant un mouvement vers la gauche. On arrive alors au deuxième segment vers le haut, soit un segment de longueur 5.

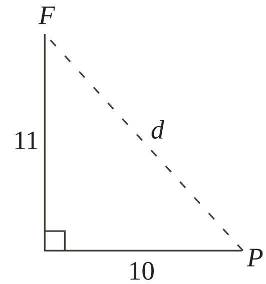
Pour y arriver, on a bougé à l'horizontale de $(+2)+(-4)$ unités, ou -2, ou de 2 unités vers la gauche.

On peut déterminer la distance du point P au segment vers le haut suivant (de longueur 9) de façon semblable. Sur le segment de longueur 5, on est à -2 unités à l'horizontale, ou 2 unités à la gauche de P et on bouge de 6 unités vers la droite (ou $+6$), puis de 8 unités vers la gauche (ou -8). Pour arriver au segment vers le haut de longueur 9, on a bougé à l'horizontale de $(-2)+(+6)+(-8)$ unités, ou -4 unités, soit 4 unités à la gauche de P. Le tableau suivant indique les mouvements horizontaux à partir de P à chacun des segments vers le haut.

On doit aussi déterminer la distance verticale du point P au point F. À partir de P, le premier segment vertical monte de 1, ou $+1$, le deuxième descend de 3, ou -3 et le troisième monte de 5, ou $+5$. Donc, la position verticale de l'extrémité du segment vers le haut de longueur 5 est de $(+1)+(-3)+(+5)$ unités, ou $+3$ unités, soit 3 unités au-dessus de P. Le tableau suivant indique les mouvements verticaux à partir de P.

Longueur du segment	Distance horizontale	Distance verticale
5	$(+2)+(-4)=-2$	$(+1)+(-3)+(+5)=+3$
9	$(-2)+(+6)+(-8)=-4$	$(+3)+(-7)+(+9)=+5$
13	$(-4)+(+10)+(-12)=-6$	$(+5)+(-11)+(+13)=+7$
17	$(-6)+(+14)+(-16)=-8$	$(+7)+(-15)+(+17)=+9$
21	$(-8)+(+18)+(-20)=-10$	$(+9)+(-19)+(+21)=+11$

Il reste maintenant à déterminer la distance d du point P au point F.



Puisque les distances sont mesurées à l'horizontale et à la verticale, on a formé un angle droit et on peut déterminer la distance d en utilisant le théorème de Pythagore.
On a $d^2 = 10^2 + 11^2$, d'où $d^2 = 100 + 121$, ou $d^2 = 221$. Donc $d = \sqrt{221}$, ou $d \approx 14{,}866$.

Solution 2
On place la spirale dans un plan cartésien, le point P étant à l'origine. Les coordonnées des extrémités des segments présentent une régularité.

Longueur du segment	Coordonnées de l'extrémité
1	$(0, 1)$
2	$(2, 1)$
3	$(2, -2)$
4	$(-2, -2)$
5	$(-2, 3)$
6	$(4, 3)$
7	$(4, -4)$
8	$(-4, -4)$
$\vdots$	$\vdots$

On remarque que lorsque la longueur d'un segment est un multiple de 4, disons $4k$, l'extrémité du segment a pour coordonnés $(-2k, -2k)$ (on peut le démontrer en suivant les arguments de la solution 1). Donc, l'extrémité du segment de longueur 20 a pour coordonnées $(-10, -10)$. Tous les segments de longueur $4k$ sont dessinés vers la gauche. Pour le segment suivant, de longueur 21, on bouge vers le haut, sur une distance de 21 unités, à partir du point $(-10, -10)$ pour arriver au point $F(-10, 11)$. La position de ce point est de 10 unités à la gauche et de 11 unités au-dessus de celle du point $P(0, 0)$. On utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $PF^2 = 10^2 + 11^2$, d'où $PF^2 = 100 + 121$, ou $PF^2 = 221$. Donc $PF = \sqrt{221}$, ou $PF \approx 14{,}866$.

Réponse : (B)

25. On considère toutes les sommes des paires de nombres qui incluent p, soit $p + q$, $p + r$, $p + s$, $p + t$ et $p + u$. On voit que p participe à 5 sommes, soit une fois avec chaque autre nombre.
De la même manière, chacun des autres nombres participe à 5 sommes.
Si on additionne chacune des sommes des 15 paires de nombres, chacun des nombres p, q, r, s, t et u participera 5 fois. Donc $5p + 5q + 5r + 5s + 5t + 5u = 25 + 30 + 38 + 41 + \ldots + 103 + 117$, ou $5p+5q+5r+5s+5t+5u = 980$, ou $5(p+q+r+s+t+u) = 980$. Donc $p+q+r+s+t+u = 196$.
Puisque p et q sont les deux plus petits entiers, leur somme doit être la plus petite des sommes de paires d'entiers; donc $p + q = 25$. De même, puisque t et u sont les deux plus grands entiers, leur somme doit être la plus grande des sommes de paires d'entiers; donc $t+u = 117$. L'équation $(p+q)+r+s+(t+u) = 196$ devient $25+r+s+117 = 196$, ou $r+s = 196-142$, ou $r+s = 54$.

Réponse : (B)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

Concours Gauss 2008

(7^{e} et 8^{e} années – Secondaire I et II)

le mercredi 14 mai 2008

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Lloyd Auckland
Steve Brown
Jennifer Couture
Fiona Dunbar
Jeff Dunnett
Barry Ferguson
Judy Fox
Sandy Graham
Judith Koeller
Joanne Kursikowski
Angie Lapointe
Dean Murray
J.P. Pretti
Linda Schmidt
Kim Schnarr
Jim Schurter
Carolyn Sedore
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), St. John's Ravenscourt School, Winnipeg, MB
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
Ed Barbeau, Toronto, ON
John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
Allison McGee, All Saints C.H.S., Kanata, ON
Kim Stenhouse, William G. Davis P.S., Cambridge, ON
David Switzer, Sixteenth Ave. P.S., Richmond Hill, ON
Tanya Thompson, Collingwood C.I., Collingwood, ON
Chris Wu, Elia M.S., Toronto, ON

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

7^e^ année

1. On a : $6 \times 2 - 3 = 12 - 3 = 9$

Réponse : (A)

2. On a : $1 + 0{,}01 + 0{,}0001 = 1{,}01 + 0{,}0001 = 1{,}0100 + 0{,}0001 = 1{,}0101$

Réponse : (E)

3. On utilise 8 comme dénominateur commun : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Réponse : (D)

4. Puisque le polygone a un périmètre de 108 cm et que chacun de ses côtés mesure 12 cm, alors le nombre de côtés est égal à $108 \div 12$, ou 9.

Réponse : (D)

5. Dans l'ensemble, il y a le nombre 3, deux nombres supérieurs à 3 et deux nombres inférieurs à 3.
Le plus petit nombre doit être un de ces deux derniers nombres, soit 2,3 ou 2,23.
Le plus petit de ces deux nombres est 2,23. Il s'agit donc du plus petit nombre de l'ensemble.

Réponse : (D)

6. Puisque PQ est une droite, alors $x^\circ + x^\circ + x^\circ + x^\circ + x^\circ = 180^\circ$, d'où $5x = 180$, ou $x = 36$.

Réponse : (A)

7. 20 n'est pas un nombre premier, puisqu'il est divisible par 2.
21 n'est pas un nombre premier, puisqu'il est divisible par 3.
25 n'est pas un nombre premier, puisqu'il est divisible par 5.
27 n'est pas un nombre premier, puisqu'il est divisible par 3.
23 est un nombre premier, puisque ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 23.

Réponse : (C)

8. Lundi, Katia a marché 8 km.
Mardi, elle a marché la moitié de 8 km, soit 4 km.
Mercredi, elle a marché la moitié de 4 km, soit 2 km.
Jeudi, elle a marché la moitié de 2 km, soit 1 km.
Vendredi, elle a marché la moitié de 1 km, soit 0,5 km.

Réponse : (E)

9. Puisque 50 % des gens interrogés préfèrent la crème glacée au chocolat et que 10 % préfèrent la crème glacée aux fraises, alors 50 % + 10 %, soit 60 % des gens interrogés préfèrent la crème glacée au chocolat ou aux fraises. Or $60\,\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$.
Donc $\frac{3}{5}$ des gens interrogés préfèrent la crème glacée au chocolat ou aux fraises.

Réponse : (A)

10. Puisque Max a vendu 41 verres de limonade samedi et 53 verres dimanche, il a vendu $41 + 53$ verres, soit 94 verres en tout.
Puisqu'il a obtenu 25 ¢ par verre, il a obtenu $94 \times 0{,}25$ \$, soit 23,50 \$ en tout.

Réponse : (A)

11. Christian a acheté un casque protecteur au prix de 25 \$ et il a dépensé 68 \$ en tout. Il a donc dépensé 68 \$ − 25 \$, soit 43 \$ pour les deux bâtons de hockey.
Puisque les deux bâtons coûtent le même prix, un bâton coûte 43 \$ ÷ 2, soit 21,50 \$.

Réponse : (C)

12. Le nombre situé dans la 2^e^ ligne, entre 17 et 6, est égal à $17 - 6$, ou 11.
Le nombre situé dans la 3^e^ ligne, entre 8 et 11, est égal à $11 - 8$, ou 3.
Le nombre situé dans la 3^e^ ligne, entre 11 et 2, est égal à $11 - 2$, ou 9.
Le nombre situé dans la 4^e^ ligne, entre 7 et 3, est égal à $7 - 3$, ou 4.
Le nombre situé dans la 4^e^ ligne, entre 3 et 9, est égal à $9 - 3$, ou 6.

$$\begin{array}{ccccccccc} 8 & & 9 & & 17 & & 6 & & 4 \\ & 1 & & 8 & & 11 & & 2 & \\ & & 7 & & 3 & & 9 & & \\ & & & 4 & & 6 & & & \\ & & & & x & & & & \end{array}$$

Donc $x = 6 - 4$, ou $x = 2$.

Réponse : (B)

13. Puisque $PQ = PR$, alors $\angle PQR = \angle PRQ$.
Puisque les mesures d'angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors

$$40^\circ + \angle PQR + \angle PRQ = 180^\circ$$

d'où $\angle PQR + \angle PRQ = 140^\circ$. Puisque $\angle PQR = \angle PRQ$, alors $\angle PQR = \angle PRQ = 70^\circ$.
Puisque l'angle qui a pour mesure x° est opposé à l'angle PRQ, alors $x^\circ = \angle PRQ = 70^\circ$.
Donc $x = 70$.

Réponse : (B)

14. La somme de l'âge de Walid et de l'âge de Bahia est de 22 ans.
À chaque année, chaque âge augmente de 1 an et la somme augmente donc de 2 ans.
La somme doit passer de 22 ans à 2×22 ans, soit 44 ans. Elle doit donc augmenter de 22 ans, ce qui prendra $(22 \div 2)$ ans, soit 11 ans.

Réponse : (E)

15. Par la première transformation, la lettre subit une rotation de 180°, ce qui donne G → ⅁.
Par la deuxième transformation, l'image subit une réflexion par rapport à un axe vertical, ce qui donne G → ⅁ → ᘓ.

Réponse : (D)

16. Dans la figure, il y a 8 rangées de 8 petits carrés, pour un total de 8×8, ou 64 petits carrés.
Il y a 48 carrés ombrés. (On peut les compter ou soustraire les 16 carrés *non ombrés*.)
On a donc 48 des 64 carrés qui sont ombrés. On peut exprimer cette fraction en pourcentage : $\frac{48}{64} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\,\%$.

Réponse : (D)

17. *Solution 1*
Puisque le rectangle a un périmètre de 120, il a un demi-périmètre de 60.
Puisque la longueur est 6 de plus que le double de la largeur, alors le double de la largeur plus

la largeur ont une somme de $60 - 6$, ou 54.
Donc, trois fois la largeur donnent 54. La largeur mesure donc $54 \div 3$, ou 18.

Solution 2
Soit l la largeur du rectangle.
Donc, la longueur du rectangle est égale à $2l + 6$.
Puisque le rectangle a un périmètre de 120, alors

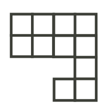
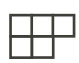
$$\begin{aligned} l + 2l + 6 + l + 2l + 6 &= 120 \\ 6l + 12 &= 120 \\ 6l &= 108 \\ l &= 18 \end{aligned}$$

Donc, le rectangle a une largeur de 18.

Réponse : (B)

18. La somme des notes des quatre premières épreuves est égale à $71 + 77 + 80 + 87$, ou 315.
Puisque la note de la 5$^{\text{e}}$ épreuve peut varier de 0 à 100, la somme des notes des cinq épreuves peut varier de $315 + 0$ à $315 + 100$, soit de 315 à 415.
Puisque la moyenne est égale à la somme divisée par le nombre d'épreuves, la moyenne peut varier de $\dfrac{315}{5}$ à $\dfrac{415}{5}$, soit de 63 à 83.
Le seul choix qui paraît dans cet intervalle est 82.

Réponse : (C)

19. Après beaucoup de tâtonnements, on se rend compte que la seule façon de réussir est de faire subir à la deuxième figure une rotation de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre et de la combiner à la première figure pour obtenir  .
La troisième figure est donc  .

Réponse : (C)

20. Voici toutes les façons d'exprimer 72 comme produit de trois entiers positifs différents : $1 \times 2 \times 36$; $1 \times 3 \times 24$; $1 \times 4 \times 18$; $1 \times 6 \times 12$; $1 \times 8 \times 9$; $2 \times 3 \times 12$; $2 \times 4 \times 9$; $3 \times 4 \times 6$.
(Pour trouver ces possibilités, on prend le plus petit premier facteur et on le combine avec toutes les paires possibles de deuxième et troisième facteurs, puis on recommence avec le plus petit premier facteur suivant, et ainsi de suite.)
Les sommes des trois facteurs, dans l'ordre, sont 39, 28, 23, 19, 18, 17, 15 et 13. La plus petite somme possible est égale à 13.

Réponse : (A)

21. Puisque Andréa a parcouru $\frac{3}{7}$ de la distance totale de 168 km et que $\frac{1}{7}$ de 168 km correspond à 24 km, elle a parcouru 3×24 km, ou 72 km.
Il lui reste 96 km à parcourir, car $168 - 72 = 96$.
Pour parcourir 96 km en trois jours, elle doit parcourir une distance moyenne de $\frac{96}{3}$ km, soit 32 km par jour.

Réponse : (D)

22. *Solution 1*

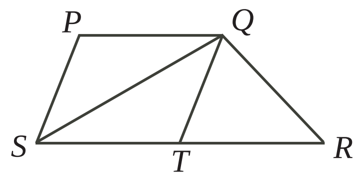
Puisque PQ est parallèle à SR, alors la base du triangle PQS (qui correspond à la base PQ) est la même que la hauteur du triangle SRQ (qui correspond à la base SR). Cette hauteur correspond à la distance de PQ à SR, mesurée verticalement).

Puisque SR est deux fois plus long que PQ et que les hauteurs sont les mêmes, alors l'aire du triangle SRQ est deux fois l'aire du triangle PQS.

Donc, l'aire du triangle PQS est $\frac{1}{3}$ de l'aire du trapèze, soit $\frac{1}{3} \times 12$, ou 4.

Solution 2

Au point Q, on trace un segment QT, T étant le milieu de SR.



Puisque $SR = 2(PQ)$ et que T est le milieu de SR, alors $PQ = ST = TR$.

On considère les bases PQ, ST et TR des triangles respectifs PQS, STQ et TRQ.

Par rapport à ces bases, les triangles ont la même hauteur, puisque PQ est parallèle à SR.

Puisque $PQ = ST = TR$ et que les triangles ont la même hauteur, ils ont la même aire.

Le trapèze a donc été coupé en trois triangles ayant la même aire.

L'aire du triangle PQS est donc égale à un tiers de l'aire du trapèze, soit $\frac{1}{3} \times 12$, ou 4.

RÉPONSE : (B)

23. Puisque Eduardo n'est pas assis à côté de Diane, les quatre personnes doivent s'asseoir selon une des configurations suivantes :

D __ E __   D __ __ E   __ D __ E
E __ D __   E __ __ D   __ E __ D

Pour chacune de ces six configurations, il y a 2 façons d'asseoir Bianca et Jamal, soit Bianca à gauche et Jamal à droite ou vice versa).

Le nombre de façons d'asseoir les quatre personnes est donc égal à 6×2, soit 12. (Essayer de toutes les écrire!)

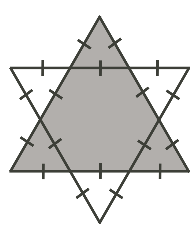
RÉPONSE : (B)

24. Puisque les deux grands triangles sont équilatéraux, alors chacun de leurs angles mesure 60°.

Donc, chacun des six petits triangles qui forment l'étoile a un angle de 60° entre deux côtés congrus.

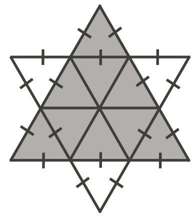
Puisque chacun de ces petits triangles est isocèle, chacun de ses deux autres angles doit mesurer $\frac{1}{2}(180° - 60°)$, soit 60°.

Donc, chacun des petits triangles est équilatéral.



Donc, l'hexagone intérieur a six côtés congrus et ses angles intérieurs mesurent chacun $180° - 60°$, soit 120°. Donc, cet hexagone est régulier.

On trace les trois diagonales qui passent par le centre de l'hexagone (ce qui est possible à cause de la symétrie de l'hexagone).



À cause de la symétrie de l'hexagone, chacun de ses angles intérieurs est par le fait même coupé en deux angles congrus de $120^\circ \div 2$, ou 60°.
Chacun des six nouveaux petits triangles a donc deux angles de 60°. Leur troisième angle doit donc mesurer 60° également. Donc, chacun de ces six nouveaux triangles est équilateral.
On a donc 12 petits triangles équilatéraux. Chacun a au moins un côté indiqué par une petite barre. Les 12 petits triangles sont donc identiques.
Puisque l'étoile a une aire de 36, chacun des petits triangles a une aire de $36 \div 12$, soit 3.
La région ombrée est formée de 9 de ces petits triangles. Son aire est donc égale à 9×3, soit 27.

Réponse : (C)

25. On examine d'abord les entiers de 2000 à 2008.
Puisqu'on peut ignorer les zéros dans l'addition des chiffres, la somme des chiffres de ces entiers est égale à :

$$2 + (2 + 1) + (2 + 2) + (2 + 3) + (2 + 4) + (2 + 5) + (2 + 6) + (2 + 7) + (2 + 8) = 54$$

On examine ensuite les entiers de 1 à 1999.
Puisqu'on peut ignorer le chiffre zéro dans l'addition, on peut considérer qu'il s'agit des nombres de 0001 à 1999. On ajoutera même le nombre 0000 à la liste pour avoir 2000 nombres.
De ces 2000 nombres, 200 ont 0 pour chiffre des unités, 200 ont 1 pour chiffre des unités, etc. (Un dixième des nombres a 0 pour chiffre des unités et ainsi de suite.)
Donc, la somme des chiffres des unités de ces nombres est égale à :

$$200(0)+200(1)+\cdots+200(8)+200(9) = 200+400+600+800+1000+1200+1400+1600+1800 = 9000$$

De ces 2000 nombres, 200 ont 0 pour chiffre des dizaines, 200 ont 1 pour chiffre des dizaines, etc. (Un dixième des nombres a 0 pour chiffre des dizaines et ainsi de suite.)
Donc, la somme des chiffres des dizaines de ces nombres est égale à :

$$200(0) + 200(1) + \cdots + 200(8) + 200(9) = 9000$$

De ces 2000 nombres, 200 ont 0 pour chiffre des centaines, (il s'agit des entiers de 0000 à 0099 et de 1000 à 1099), 200 ont 1 pour chiffre des centaines, etc.
(Un dixième des nombres a 0 pour chiffre des centaines et ainsi de suite.)
Donc, la somme des chiffres des centaines de ces nombres est égale à :

$$200(0) + 200(1) + \cdots + 200(8) + 200(9) = 9000$$

Des 2000 nombres, 1000 ont 0 pour chiffre des milliers et 1000 ont 1 pour chiffre des milliers.
Donc, la somme des chiffres des milliers de ces nombres est égale à :

$$1000(0) + 1000(1) = 1000$$

Donc, la somme de tous les chiffres des entiers de 1 à 2008 est égale à $54+9000+9000+9000+1000$, soit 28 054.

Réponse : (E)

8e année

1. On utilise la priorité des opérations : $8 \times (6 - 4) + 2 = 8 \times 2 + 2 = 16 + 2 = 18$

Réponse : (C)

2. Puisque le polygone a un périmètre de 108 cm et que chacun de ses côtés mesure 12 cm, alors le nombre de côtés est égal à $108 \div 12$, ou 9.

Réponse : (D)

3. Puisque $\angle PQR = 90^\circ$, alors $2x^\circ + x^\circ = 90^\circ$, d'où $3x = 90$, ou $x = 30$.

Réponse : (A)

4. On a : $(1 + 2)^2 - (1^2 + 2^2) = 3^2 - (1 + 4) = 9 - 5 = 4$.

Réponse : (B)

5. Lorsqu'on place ces nombres en ordre croissant, on place deux nombres négatifs, suivis de deux nombres positifs.
Des deux nombres positifs, soit 0,28 et 2,8, le plus petit est 0,28.
Des deux nombres négatifs, soit $-0{,}2$ et $-8{,}2$, le plus petit est $-8{,}2$.
En ordre croissant, les nombres sont : $-8{,}2$; $-0{,}2$; 0,28 ; 2,8

Réponse : (A)

6. D'après la formule, le nombre qui doit être placé dans la case est $5^3 + 5 - 1$, soit $125 + 4$, ou 129.

Réponse : (E)

7. Puisque 50 % des gens interrogés préfèrent la crème glacée au chocolat et que 10 % préfèrent la crème glacée aux fraises, alors 50 % + 10 %, soit 60 % des gens interrogés préfèrent la crème glacée au chocolat ou aux fraises. Or $60\,\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$.
Donc $\frac{3}{5}$ des gens interrogés préfèrent la crème glacée au chocolat ou aux fraises.

Réponse : (A)

8. *Solution 1*
Puisqu'on obtient 51 après avoir soustrait 9, on avait 60 avant de soustraire. Donc, 5 fois le nombre initial est égal à 60.
Donc, le nombre initial est égal à 60 divisé par 5, soit 12.

Solution 2
Soit x le nombre initial.
Donc $5x - 9 = 51$, d'où $5x = 60$, ou $x = 12$.

Réponse : (D)

9. *Solution 1*
Daniel pèse 40 kg. Donc, 20 % de son poids est égal à $\frac{20}{100}$ de 40 kg, soit $\frac{1}{5}$ de 40 kg, ou 8 kg.
Puisque Stan pèse 20 % de plus que Daniel, son poids est de 40 kg + 8 kg, soit 48 kg.

Solution 2
Puisque Stan pèse 20 % de plus que Daniel, alors son poids est égal à 120 % du poids de Daniel.
Daniel pèse 40 kg. Donc, le poids de Stan est égal à $\frac{120}{100}$ de 40 kg, soit $\frac{6}{5}$ de 40 kg, ou 48 kg.

Réponse : (C)

10. Parmi les 11 nombres donnés, 3, 5, 7, 11 et 13 sont premiers. (4, 6, 8, 10 et 12 ne sont pas premiers, puisqu'ils sont divisibles par 2 ; 9 n'est pas premier, puisqu'il est divisible par 3.)
Donc, 5 des 11 nombres sont premiers.
Si on choisit un carton au hasard et qu'on le retourne à l'endroit, la probabilité pour que le nombre sur le carton soit premier est égale à $\frac{5}{11}$.

Réponse : (E)

11. Les dimensions de la boîte, en centimètres, sont 20 cm, 50 cm et 100 cm (puisque 1 m est égal à 100 cm).
Le volume de la boîte est donc égal à :

$$20 \times 50 \times 100 \text{ cm}^3 = 100\,000 \text{ cm}^3$$

Réponse : (D)

12. *Solution 1*
Puisque chaque pizza a 8 tranches et que chaque tranche est vendue 1 \$, alors chaque pizza rapporte 8 \$ en recettes.
Puisque 55 pizzas ont été vendues, les recettes sont de 55×8 \$, ou 440 \$.
Le coût total des 55 pizzas est de $55 \times 6{,}85$ \$, soit 376,75 \$.
Le profit total est donc égal à 440,\$ $-$ 376,75 \$, soit 63,25 \$.

Solution 2
Puisque chaque pizza a 8 tranches et que chaque tranche est vendue 1 \$, alors chaque pizza rapporte 8 \$.
Puisque chaque pizza a coûté 6,85 \$, chacune rapporte un profit 8,00 \$ $-$ 6,85 \$, soit 1,15 \$.
Puisque l'école a acheté et vendu 55 pizzas, le profit total est égal à $55 \times 1{,}15$ \$, soit 63,25 \$.

Réponse : (D)

13. Puisque RSP est un segment de droite, alors $\angle RSQ + \angle QSP = 180^\circ$. Donc $\angle RSQ = 180^\circ - 80^\circ$, ou $\angle RSQ = 100^\circ$.
Puisque le triangle RSQ est isocèle ($RS = SQ$), alors :

$$\angle RQS = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle RSQ) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ$$

De même, puisque le triangle PSQ est isocèle ($PS = SQ$), alors :

$$\angle PQS = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle PSQ) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ$$

Donc $\angle PQR = \angle PQS + \angle RQS$, d'où $\angle PQR = 50^\circ + 40^\circ$, ou $\angle PQR = 90^\circ$.

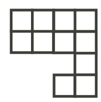
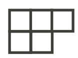
Réponse : (B)

14. Lundi, Alain a lu 40 pages.
Mardi, Alain a lu 60 pages, pour un total de $40 + 60$ pages, soit 100 pages.
Mercredi, Alain a lu 80 pages, pour un total de $100 + 80$, soit 180 pages.
Jeudi, Alain a lu 100 pages, pour un total de $180 + 100$, soit 280 pages.
Vendredi, Alain a lu 120 pages, pour un total de $280 + 120$, soit 400 pages.
Donc, Alain finit le livre de 400 pages vendredi.

Réponse : (A)

15. Si Aglaé avait 23 pièces de 5 ¢, la valeur des pièces serait de $23 \times 0{,}05\,\$$, soit 1,15 \$.
Or, la valeur totale des pièces qu'Aglaé a en sa possession est de 4,55 \$, ce qui est 3,40 \$ de plus.
Puisqu'une pièce de 25 ¢ vaut 20 cents de plus qu'une pièce de 5 ¢, alors à chaque fois qu'une pièce de 5 ¢ est remplacée par une pièce de 25 ¢, la valeur totale des pièces de monnaie est augmentée de 20 cents.
Pour que la valeur totale augmente de 3,40 \$, il faut remplacer une pièce de 5 ¢ par une pièce de 25 ¢ 17 fois, car $17 \times 0{,}20\,\$ = 3{,}40\,\$$.
Donc, Aglaé a 17 pièces de 25 ¢.
(On peut le vérifier : Si Aglaé avait 17 pièces de 25 ¢ et 6 pièces de 5 ¢, la valeur totale des pièces serait de $17 \times 0{,}25\,\$ + 6 \times 0{,}05\,\$$, soit $4{,}25\,\$ + 0{,}30\,\$$, ou 4,55 \$.)

Réponse : (B)

16. Après beaucoup de tâtonnements, on se rend compte que la seule façon de réussir est de faire subir à la deuxième figure une rotation de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre et de la combiner à la première figure pour obtenir  .
La troisième figure est donc  .

Réponse : (C)

17. Après la virgule, les décimales se présentent en tranches répétées de 6 chiffres.
Puisque $2008 \div 6 = 334{,}666...$, alors le 2008^e chiffre après la virgule se présente dans la 335^e tranche.
Dans les 334 premières tranches de 6 chiffres, le nombre total de chiffres est égal à 334×6, soit 2004. Donc, le 2008^e chiffre est le 4^e chiffre de la 335^e tranche, soit un 8.

Réponse : (A)

18. Puisque Andréa a parcouru $\frac{3}{7}$ de la distance totale de 168 km et que $\frac{1}{7}$ de 168 km correspond à 24 km, elle a parcouru 3×24 km, ou 72 km.
Il lui reste 96 km à parcourir, car $168 - 72 = 96$.
Pour parcourir 96 km en trois jours, elle doit parcourir une distance moyenne de $\frac{96}{3}$ km, soit 32 km par jour.

Réponse : (D)

19. *Solution 1*
Après des tâtonnements, on peut découvrir que $x = 0$ et $y = 7$, puisque $307 + 703 = 1010$.
Puisqu'on nous demande *la* valeur de $y - x$, elle doit être égale à $7 - 0$, soit 7.

Solution 2
Si on additionne les chiffres des unités, on obtient soit $y + 3 = x$, soit $y + 3 = x$ et une retenue de 1, ce qui signifie que $y + 3 = 10 + x$.
On a donc soit $y - x = -3$, soit $y - x = 10 - 3$, c'est-à-dire $y - x = 7$.
Or, s'il n'y avait aucune retenue, la somme de la colonne des centaines donnerait $x + x$, ou $2x$, qui est pair. Puisque le chiffre des dizaines de la somme est égal à 1, on peut conclure que cette situation est impossible. Donc, il doit y avoir une retenue dans l'addition des chiffres des unités.
Donc $y - x = 7$.

Réponse : (C)

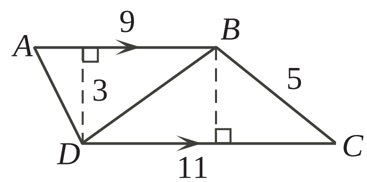
20. *Solution 1*

L'aire d'un trapèze est égale à la moitié du produit de la somme des bases et de la hauteur. Donc, l'aire de ce trapèze est égale à :

$$\frac{1}{2} \times (9 + 11) \times 3 = \frac{1}{2} \times 20 \times 3 = 10 \times 3 = 30$$

Solution 2

On trace la diagonale BD.

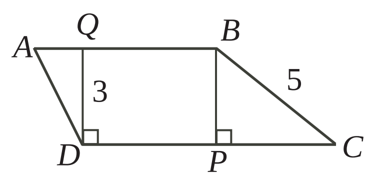


Le triangle ABD a une base de 9 et une hauteur de 3. Le triangle BCD a une base de 11 et une hauteur de 3. L'aire du trapèze est égale à la somme de l'aire des deux triangles. Elle est donc égale à :

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 3 + \frac{1}{2} \times 11 \times 3 = \frac{27}{2} + \frac{33}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

Solution 3

On abaisse des perpendiculaires DQ et PB aux bases AB et CD.



D'après le théorème de Pythagore, $BP^2 + PC^2 = BC^2$. Donc $3^2 + PC^2 = 5^2$, ou $PC^2 = 25 - 9$, d'où $PC^2 = 16$, ou $PC = 4$.

Puisque $DC = 11$, alors $DP = 11 - 4$, ou $DP = 7$.

Puisque $QBPD$ est un rectangle, alors $QB = DP = 7$. Donc $AQ = 9 - 7$, ou $AQ = 2$.

L'aire du trapèze $ABCD$ est égale à la somme de l'aire du triangle AQD, du rectangle $QBPD$ et du triangle BPC. Elle est donc égale à :

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 3 + 7 \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 3 + 21 + 6 = 30$$

Réponse : (D)

21. Lorsqu'on regarde l'objet de face, on voit 7 carrés mesurant 1×1. Donc, cette surface a une aire de $7 \times 1 \times 1$, ou 7.

De même, si on regarde l'objet de l'arrière, on voit une surface qui a une aire de 7.

On considère maintenant les faces vues de la gauche, de la droite, du dessus et du dessous. Chacune est formée de rectangles mesurant 1×2 et dont l'aire est donc égale à 2.

Combien de ces rectangles y a-t-il ?

Si on commence en bas, à gauche, et si on on fait le tour de la forme dans le sens des aiguilles d'une montre, on voit, dans l'ordre, 2 rectangles à gauche, 2 rectangles au dessus, 2 rectangles à gauche, 1 rectangle au dessus, trois rectangles à droite, 1 rectangle en dessous, 1 rectangle à droite et 2 rectangles en dessous, pour un total de 14 rectangles.

L'aire totale de ces rectangles est égale à 14×2, ou 28.

L'aire totale de l'objet est donc égale à $7 + 7 + 28$, ou 42.

Réponse : (A)

22. Il y a 6 façons de remplir la première rangée du tableau :

$$1,2,3 \quad 1,3,2 \quad 2,1,3 \quad 2,3,1 \quad 3,1,2 \quad 3,2,1$$

On considère la première rangée suivante :

1	2	3

.

La première colonne pourrait contenir 1, 2, 3 ou 1, 3, 2 :

1	2	3
2		
3		

ou

1	2	3
3		
2		

.

Chacun de ces tableaux peut être rempli d'une seule façon.
(Dans le 1$^{\text{er}}$ tableau, le 2$^{\text{e}}$ nombre de la ligne du bas ne peut être un 2 ou un 3 ; il doit donc être un 1. Le nombre au-dessus de lui est donc un 3. La colonne de droite est donc 3, 1, 2.
De même, le nombre au milieu du 2$^{\text{e}}$ tableau doit être un 1. Essaie de remplir ce tableau !)
Pour résumer, une première ligne 1, 2, 3 donne deux tableaux possibles.
De même, chacune des 5 autres premières rangées possibles donne deux tableaux possibles.
(On peut le voir en l'essayant ou, par exemple, en interchangeant tous les 2 et les 3 du premier tableau pour obtenir les tableaux ayant 1, 3, 2 dans la 1$^{\text{re}}$ rangée.)
Donc, le nombre de façons différentes de remplir le tableau est égal à 6×2, ou 12.

Réponse : (B)

23. Puisque le grand cercle a une aire de 64π et qu'il a été séparé en deux régions de même aire, l'aire de la grande partie ombrée est égale à $\frac{1}{2}$ de 64π, soit 32π.
Soit r le rayon du grand cercle. Puisque l'aire de ce cercle est égale à 64π, alors $\pi r^2 = 64\pi$. Donc $r^2 = 64$ et $r = \sqrt{64} = 8$, puisque $r > 0$.
Puisque le petit cercle passe par le centre du grand cercle et qu'il touche au grand cercle, alors par symétrie, le rayon du grand cercle est un diamètre du petit cercle. (En d'autres mots, si on joint le point de contact des deux cercles au point O, le segment obtenu est un diamètre du petit cercle et un rayon du grand cercle.)
Donc, le petit cercle a un diamètre de 8 et un rayon de 4.
L'aire du petit cercle est égale à $\pi(4^2)$, ou 16π. L'aire de la petite région ombrée est donc égale à $\frac{1}{2}$ de 16π, soit 8π.
L'aire totale des régions ombrées est donc égale à $32\pi + 8\pi$, ou 40π.

Réponse : (D)

24. On examine d'abord les entiers de 2000 à 2008.
Puisqu'on peut ignorer les zéros dans l'addition des chiffres, la somme des chiffres de ces entiers est égale à :

$$2 + (2 + 1) + (2 + 2) + (2 + 3) + (2 + 4) + (2 + 5) + (2 + 6) + (2 + 7) + (2 + 8) = 54$$

On examine ensuite les entiers de 1 à 1999.
Puisqu'on peut ignorer le chiffre zéro dans l'addition, on peut considérer qu'il s'agit des nombres de 0001 à 1999. On ajoutera même le nombre 0000 à la liste pour avoir 2000 nombres.
De ces 2000 nombres, 200 ont 0 pour chiffre des unités, 200 ont 1 pour chiffre des unités, etc.
(Un dixième des nombres a 0 pour chiffre des unités et ainsi de suite.)
Donc, la somme des chiffres des unités de ces nombres est égale à :

$$200(0)+200(1)+\cdots+200(8)+200(9) = 200(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 200(45) = 9000$$

De ces 2000 nombres, 200 ont 0 pour chiffre des dizaines, 200 ont 1 pour chiffre des dizaines, etc. (Un dixième des nombres a 0 pour chiffre des dizaines et ainsi de suite.)
Donc, la somme des chiffres des dizaines de ces nombres est égale à :

$$200(0) + 200(1) + \cdots + 200(8) + 200(9) = 9000$$

De ces 2000 nombres, 200 ont 0 pour chiffre des centaines, (il s'agit des entiers de 0000 à 0099 et de 1000 à 1099), 200 ont 1 pour chiffre des centaines, etc.
(Un dixième des nombres a 0 pour chiffre des centaines et ainsi de suite.)
Donc, la somme des chiffres des centaines de ces nombres est égale à :

$$200(0) + 200(1) + \cdots + 200(8) + 200(9) = 9000$$

Des 2000 nombres, 1000 ont 0 pour chiffre des milliers et 1000 ont 1 pour chiffre des milliers.
Donc, la somme des chiffres des milliers de ces nombres est égale à :

$$1000(0) + 1000(1) = 1000$$

Donc, la somme de tous les chiffres des entiers de 1 à 2008 est égale à 54+9000+9000+9000+1000, soit 28 054.

Réponse : (E)

25. Puisque les deux chandelles avaient la même longueur à 21 h, que la plus longue a fini de brûler à 22 h et que la plus courte a fini de brûler à minuit, alors la plus longue a mis 1 heure et la plus courte a mis 3 heures pour brûler cette même longueur.
Donc, la chandelle longue a brûlé 3 fois plus vite que la courte.
Supposons que la chandelle courte a brûlé x cm par heure.
Donc, la chandelle longue a brûlé $3x$ cm par heure.
Depuis qu'elle a été allumée à 15 h jusqu'à 21 h, la chandelle longue a brûlé pendant 6 heures. Elle a donc brûlé $6 \times 3x$ cm, soit $18x$ cm.
Depuis qu'elle a été allumée à 19 h jusqu'à 21 h, la chandelle courte a brûlé pendant 2 heures. Elle a donc brûlé $2 \times x$ cm, soit $2x$ cm.
Or, jusqu'à 21 h, la chandelle longue a brûlé 32 cm de plus que la chandelle courte, puisqu'elle était 32 cm plus longue que l'autre au départ.
Donc $18x - 2x = 32$, d'où $16x = 32$, ou $x = 2$.
Pour résumer, la chandelle courte a brûlé pendant 5 heures à une vitesse de 2 cm par heure. Elle mesurait donc 10 cm au départ.
La chandelle longue a brûlé pendant 7 heures à une vitesse de 6 cm par heure. Elle mesurait donc 42 cm au départ.
Au départ, la somme des longueurs des chandelles était de 42 cm + 10 cm, soit 52 cm.

Réponse : (E)

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

Concours Gauss 2007

(7^{e} et 8^{e} années – Secondaire I et II)

le mercredi 16 mai 2007

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Lloyd Auckland
Steve Brown
Jennifer Couture
Fiona Dunbar
Jeff Dunnett
Barry Ferguson
Judy Fox
Sandy Graham
Judith Koeller
Joanne Kursikowski
Angie Lapointe
Dean Murray
Matthew Oliver
Larry Rice
Linda Schmidt
Kim Schnarr
Jim Schurter
Carolyn Sedore
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), St. John's Ravenscourt School, Winnipeg, MB
Sandy Emms Jones (présidente adjointe), Forest Heights C.I., Kitchener, ON
Ed Barbeau, Toronto, ON
Kevin Grady, Cobden District P.S., Cobden, ON
John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
Allison McGee, All Saints C.H.S., Kanata, ON
David Switzer, Sixteenth Ave. P.S., Richmond Hill, ON
Tanya Thompson, Collingwood C.I., Collingwood, ON
Chris Wu, Elia M.S., Toronto, ON

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

7e année

1. On a : $(4-3)\times 2 = 1\times 2 = 2$

Réponse : (B)

2. Puisque mille est égal à 1000, alors dix mille est égal à 10 000.

Réponse : (C)

3. Lorsqu'on soustrait 5 du nombre manquant, on obtient 2. Pour obtenir le nombre manquant, on ajoute donc 5 à 2 pour obtenir 7. (Vérification : $7-5=2$.)

Réponse : (A)

4. *Solution 1*
80 % correspond à la fraction $\frac{80}{100}$, ou $\frac{4}{5}$.
Donc, Madih a obtenu $\frac{4}{5}$ des 50 points, soit $\frac{4}{5}\times 50$ points, ou 40 points.

Solution 2
Madih a obtenu 80 % des 50 points, soit $\frac{80}{100}\times 50$ points, ce qui donne $\frac{80}{2}$ points, ou 40 points.

Réponse : (A)

5. *Solution 1*

$$\begin{aligned}\frac{7}{10}+\frac{3}{100}+\frac{9}{1000} &= \frac{700}{1000}+\frac{30}{1000}+\frac{9}{1000} \qquad \text{(on a utilisé un dénominateur commun)}\\ &= \frac{739}{1000}\\ &= 0{,}739\end{aligned}$$

Solution 2

$$\begin{aligned}\frac{7}{10}+\frac{3}{100}+\frac{9}{1000} &= 0{,}7+0{,}03+0{,}009 \qquad \text{(on a écrit chaque fraction sous forme décimale)}\\ &= 0{,}739\end{aligned}$$

Réponse : (D)

6. *Solution 1*
Marc a $\frac{3}{4}$ d'un dollar, soit 75 cents.
Caroline a $\frac{3}{10}$ d'un dollar, soit 30 cents.
Ensemble ils ont 105 cents $(75+30)$, c'est-à-dire 1,05 $.

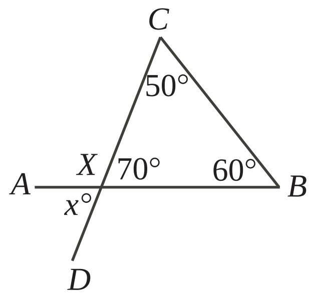
Solution 2
Puisque Marc a $\frac{3}{4}$ d'un dollar et que Caroline a $\frac{3}{10}$ d'un dollar, ils ont un total de $\frac{3}{4}+\frac{3}{10}$ d'un dollar, c'est-à-dire $\frac{15}{20}+\frac{6}{20}$ d'un dollar, ou $\frac{21}{20}$ d'un dollar.
Puisque $\frac{21}{20}$ est équivalent à $\frac{105}{100}$, ils ont 1,05 $ en tout.

Réponse : (E)

7. D'après le diagramme, l'élève qui a mangé le plus de pommes en a mangé 6. Donc, Lorenzo a mangé 6 pommes. L'élève qui a mangé le moins de pommes en a mangé 1. Donc, Joanne a mangé 1 pomme. Donc, Lorenzo a mangé 5 pommes de plus que Joanne $(6-1=5)$.

Réponse : (B)

8. Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, alors l'angle manquant du triangle mesure $180^\circ - 50^\circ - 60^\circ$, c'est-à-dire 70°.
On a donc :



Puisque $\angle BXC = 70^\circ$, alors $\angle AXC = 180^\circ - \angle BXC$, c'est-à-dire que $\angle AXC = 110^\circ$.
Puisque $\angle AXC = 110^\circ$, alors $\angle DXA = 180^\circ - \angle AXC$, c'est-à-dire que $\angle DXA = 70^\circ$.
Donc $x = 70$.
(On aurait pu utiliser le fait que deux angles opposés par le sommet sont congrus.
Donc $\angle DXA = \angle BXC = 70^\circ$.)

Réponse : (E)

9. Lorsqu'on regarde le mot GARE de l'intérieur de l'édifice, l'ordre des lettres est inversé et chaque lettre paraît en sens inverse. Le mot paraît sous la forme ƎЯA⅁.

Réponse : (D)

10. Puisqu'une grande boîte coûte 3 \$ de plus qu'une petite boîte et que les deux boîtes coûtent 15 \$ en tout, on épargnerait 3 \$ si on remplaçait la grande boîte par une petite. Ainsi deux petites boîtes coûteraient 12 \$.
Donc, une petite boîte coûte 6 \$.

Réponse : (D)

11. Puisque chaque nombre de la suite de Fibonacci, à partir du 2, est égal à la somme des deux nombres précédents, la suite continue comme suit : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$.
Donc, le nombre 21 paraît dans la suite.

Réponse : (B)

12. La probabilité pour que Marie gagne est égale au nombre de billets qu'elle a achetés divisé par le nombre total de billets de la loterie.
Or, on sait que la probabilité pour qu'elle gagne est égale à $\frac{1}{15}$.
Puisqu'il y a 120 billets en tout, on veut exprimer $\frac{1}{15}$ comme une fraction ayant 120 au dénominateur. Puisque $120 \div 15 = 8$, on doit multiplier le numérateur et le dénominateur de $\frac{1}{15}$ par 8 pour obtenir un dénominateur de 120.
Donc, la probabilité pour que Marie gagne est égale à $\dfrac{1 \times 8}{15 \times 8}$, c'est-à-dire à $\dfrac{8}{120}$.
Donc, Marie a acheté 8 billets.

Réponse : (D)

13. *Solution 1*

On regarde chacun des cinq choix et on essaie de les former avec des timbres de 3 cents et de 5 cents :

(A) : Le 7 ne peut être formé, car on ne pourrait utiliser plus d'un timbre de 5 cents et deux timbres de 3 cents. (On peut essayer les diverses possibilités !)

(B) : $13 = 5 + 5 + 3$

(C) : Le 4 ne peut être la réponse, car il existe un plus grand affranchissement, soit 7 ¢, qui ne peut être obtenu.

(D) : $8 = 5 + 3$

(E) : $9 = 3 + 3 + 3$

Donc, la réponse doit être 7.

(On n'a pas justifié que l'affranchissement de 7 ¢ est le plus grand qu'il est impossible d'obtenir. On a tout simplement déterminé que parmi les choix, la réponse doit être 7 ¢ ! Dans la Solution 2, on démontre que le plus grand affranchissement est celui de 7 ¢.)

Solution 2

On utilise un tableau pour déterminer les entiers qui peuvent être exprimés à l'aide de 3 et de 5 :

Entier	Combinaison
1	Ne peut être obtenu
2	Ne peut être obtenu
3	3
4	Ne peut être obtenu
5	5
6	$3 + 3$
7	Ne peut être obtenu
8	$5 + 3$
9	$3 + 3 + 3$
10	$5 + 5$
11	$5 + 3 + 3$

À partir de 11, tous les nombres peuvent être obtenus, car les trois derniers nombres du tableau peuvent être obtenus. On peut ainsi ajouter 3 à chacun des nombres 9, 10 et 11 pour obtenir des combinaisons pour 12, 13 et 14 et ainsi de suite.

D'après le tableau, le plus grand nombre qu'il est impossible d'obtenir est le 7.

Réponse : (A)

14. On écrit tous les ordres possibles en utilisant les lettres H, R et N pour Harry, Ron et Neville. On obtient HNR, HRN, NHR, NRH, RHN, RNH.

(Il est plus facile de les écrire en ordre alphabétique pour bien les suivre et éviter des répétitions ou des oublis.)

Il y a 6 ordres possibles.

Réponse : (B)

15. *Solution 1*

Les diviseurs de 40 sont 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 et 40.

Les diviseurs de 72 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72.

Les nombres qui paraissent dans les deux listes sont 1, 2, 4 et 8. Il y en a quatre.

Solution 2
Le plus grand commun diviseur de 40 et de 72 est 8.
Tout diviseur commun de 40 et de 72 est aussi un diviseur du plus grand commun diviseur, soit de 8, et vice versa.
Or, les diviseurs de 8 sont 1, 2, 4 et 8. Il y en a quatre.

Réponse : (C)

16. Selon la première balance, le carré et le cercle ont une masse totale de 8.
Selon la deuxième balance, le carré et deux cercles ont une masse totale de 11.
Puisque la deuxième balance soutient un cercle de plus que la première et qu'elle soutient une masse supplémentaire de 3, le cercle ajouté a une masse de $11 - 8$, c'est-à-dire de 3.
Selon la troisième balance, un cercle et deux triangles ont une masse totale de 15. Puisque le cercle a une masse de 3, les deux triangles ont une masse totale de $15 - 3$, c'est-à-dire de 12.
Donc, un triangle a une masse de $12 \div 2$, c'est-à-dire de 6.

Réponse : (D)

17. La location du kayak pour 3 heures coûte 3×5 \$, ou 15 \$. Puisqu'une location de 3 heures coûte 30 \$ en tout, le prix fixe pour la pagaie est de 30 \$ $-$ 15 \$, ou 15 \$.
Le coût total d'une location de 6 heures est de 15 \$ $+$ (6×5 \$), soit 15 \$ $+$ 30 \$, ou 45 \$.

Réponse : (C)

18. *Solution 1*
L'anniversaire de Julie arrive 104 jours $(37 + 67)$ avant celui de Frédéric.
Lorsqu'on divise 104 par 7, soit le nombre de jours dans une semaine, on obtient un quotient de 14 et un reste de 6.
À partir de l'anniversaire de Frédéric, un lundi, on recule de 14 semaines (ou 98 jours) et on est un lundi. Pour arriver à l'anniversaire de Julie, on doit reculer de 6 jours de plus. Le 6e jour avant un lundi est un mardi.
Donc, l'anniversaire de Julie tombait un mardi.

Solution 2
Un intervalle de 37 jours correspond à 5 semaines et 2 jours. Puisque l'anniversaire de Frédéric est un lundi et que l'anniversaire de Pat arrive 37 jours avant celui de Frédéric, l'anniversaire de Pat arrive un samedi.
Un intervalle de 67 jours correspond à 9 semaines et 4 jours. Puisque l'anniversaire de Pat est un samedi et que l'anniversaire de Julie arrive 67 jours avant celui de Pat, l'anniversaire de Julie tombait un mardi.

Réponse : (D)

19. Les entiers positifs inférieurs à 1000 qui se terminent par 77 sont 77, 177, 277, 377, 477, 577, 677, 777, 877, 977.
Les entiers positifs inférieurs à 1000 qui commencent par 77 sont 77, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779.
Il n'y a aucune autre façon d'obtenir des nombres inférieurs à 1000 qui contiennent au moins deux chiffres 7 écrits côte-à-côte.
Il y a 10 nombres dans la première liste et 11 nombres dans la deuxième. Puisque 2 nombres paraissent dans les deux listes, le nombre total de nombres dans ces listes est égal à $10 + 11 - 2$, soit 19.

Réponse : (E)

20. Puisque le carré a un périmètre de 48, ses côtés mesurent $48 \div 4$, ou 12.
L'aire du carré est donc égale à 12×12, ou 144.
L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2} \times 48 \times x$, ou $24x$.
Puisque le carré et le triangle ont la même aire, alors $24x = 144$, d'où $x = 6$.

Réponse : (C)

21. *Solution 1*
En partant de la lettre K, on peut choisir deux chemins. À chaque lettre A, on peut choisir deux chemins. À chaque lettre R, on peut choisir deux chemins.
Donc, le nombre total de chemins est égal à $2 \times 2 \times 2$, ou 8.
(On peut le vérifier en traçant chaque chemin.)

Solution 2
Chaque chemin doit épeler le mot KARL.
Il y a 1 chemin qui se termine au premier L. Ce chemin passe par le 1er A et le 1er R.
Il y a 3 chemins qui se terminent au deuxième L. Le premier chemin passe par le 1er A et le 1er R. Le deuxième chemin passe par le 1er A et le 2e R. Le troisième chemin passe par le 2e A et le 2e R.
Il y a 3 chemins qui se terminent au troisième L. Le premier chemin passe par le 1er A et le 2e R. Le deuxième chemin passe par le 2e A et le 2e R. Le troisième chemin passe par le 2e A et le 3e R.
Il y a 1 chemin qui se termine au quatrième L. Le chemin passe par le dernier A et le dernier R.
Le nombre total de chemins qui se terminent par un L est égal à $1 + 3 + 3 + 1$, soit 8. Il s'agit du nombre de chemins qui épèlent le mot KARL.

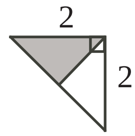
Réponse : (D)

22. Puisque les quatre nombres ont une moyenne de 4, ils ont une somme de 4×4, ou 16.
Pour que la différence entre le plus grand et le plus petit de ces nombres soit aussi grande que possible, on aimerait que le plus petit nombre soit aussi petit que possible, soit 1, et que le plus grand nombre, qu'on appellera G, soit aussi grand que possible.
Puisqu'un des nombres est 1, la somme des autres est égale à $16 - 1$, ou 15.
Pour que G soit aussi grand que possible, il faut que les deux autres nombres soient aussi petits que possible. Or, tous les nombres sont diffŕents. Donc, ces deux autres nombres doivent être 2 et 3. Donc, G est égal à $15 - 2 - 3$, ou 10.
La moyenne des deux autres nombres est donc égale à $\dfrac{2+3}{2}$, c'est-à-dire à $\dfrac{5}{2}$, ou $2\frac{1}{2}$.

Réponse : (B)

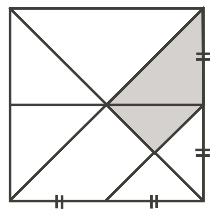
23. *Solution 1*
Puisqu'on traite de fractions de l'aire totale, on peut choisir une valeur commode pour la longueur des côtés du carré.
On suppose donc que les côtés ont une longueur de 4 qui se divise facilement en demis et en quarts.
Le carré a donc une aire de 4×4, soit 16.
Les deux diagonales du carré le divisent en quatre triangles de même aire. Chaque triangle a donc une aire de $16 \div 4$, soit 4).
La surface ombrée correspond à un de ces triangles dont on a enlevé un petit triangle blanc. Son aire est donc égale à 4 moins l'aire de ce petit triangle blanc.

Le petit triangle blanc est la moitié d'un autre triangle.



La base et la hauteur de cet autre triangle ont une longueur qui est la moitié de la longueur de côté du carré. Le triangle a donc une base de 2 et une hauteur de 2. Il a donc une aire de $\frac{1}{2} \times 2 \times 2$, soit 2.
Le petit triangle blanc a donc une aire de $\frac{1}{2} \times 2$, soit 1. La partie ombrée a donc une aire $4 - 1$, soit 3.
L'aire de la partie ombrée est donc $\frac{3}{16}$ de l'aire du carré.

Solution 2
Au centre du carré, on trace une ligne horizontale à travers du carré.



Les deux diagonales du carré le divisent en quatre triangles de même aire. La ligne horizontale coupe un de ces triangles en deux parties de même aire. Donc, la partie ombrée qui est au-dessus de la ligne horizontale a une aire égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ de l'aire du carré, c'est-à-dire à $\frac{1}{8}$ de l'aire du carré.
L'aire de la partie ombrée qui est en dessous de la ligne horizontale est la moitié de l'aire de l'autre partie ombrée. (On voit que le petit triangle ombré et le petit triangle blanc ont la même forme et ensemble, ils forment un triangle égal au grand triangle ombré.) L'aire du petit triangle ombré est donc égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}$ de l'aire du carré, c'est-à-dire à $\frac{1}{16}$ de l'aire du carré.
L'aire totale de la partie ombrée est donc égale à $(\frac{1}{8} + \frac{1}{16})$ de l'aire du carré, c'est-à-dire à $\frac{3}{16}$ de l'aire du carré.

Réponse : (C)

24. On commence par déterminer la valeur de Q.
Si on porte attention aux chiffres des unités, on voit que le produit de $Q \times Q$ a un chiffre des unités égal à Q. Donc, Q doit être égal à 0, 1, 5 ou 6, car seuls ces chiffres ont cette propriété.
Or, Q ne peut être égal à 0, sinon le produit de PPQ et de Q serait égal à 0. Q ne peut être égal à 1, sinon le produit de PPQ et de Q serait égal à PPQ, qui est un nombre de 3 chiffres. Or, le produit $RQ5Q$ comporte 4 chiffres, Donc, Q doit être égal à 5 ou à 6.
Si Q était égal à 5, alors le multiplicateur Q et le multiplicande PPQ seraient des multiples de 5 et leur produit serait un multiple de 25. Or, le produit $RQ5Q$ aurait la forme $R555$ et un tel nombre, qui se termine par 55, n'est pas un multiple de 25. Donc, Q ne peut être égal à 5.
Donc $Q = 6$.
La multiplication ressemble donc à ce qui suit :

$$\begin{array}{r} PP6 \\ \times \quad 6 \\ \hline R6\,5\,6 \end{array}$$

On commence la multiplication : 6×6 est égal à 36 ; on écrit le chiffre 6 dans la réponse et on a une retenue de 3.

Lorsqu'on multiplie $6 \times P$ et qu'on ajoute la retenue de 3, on obtient un chiffre des unités (qui est placé dans la colonne des dizaines) égal à 5. Donc, le chiffre des unités de $6 \times P$ doit être un 2.

On a donc $P = 2$ ou $P = 7$.

On vérifie chacune de ces possibilités : $6 \times 226 = 1356$ et $6 \times 776 = 4656$. Seul la deuxième réponse se termine par les chiffres 656 comme le produit $R656$.

Donc $P = 7$ et $R = 4$. $P + Q + R$ est égal à $7 + 6 + 4$, soit 17.

Réponse : (E)

25. Pour tenir compte des lettres, il est probablement plus facile d'utiliser un tableau qui indique les lettres qui sont déposées, celles qui sont enlevées et celles qui restent dans la pile, à toutes les 5 minutes.

Heure	Lettres déposées	Lettres enlevées	Lettres qui restent dans la pile (de bas en haut)
12 h 00	1, 2, 3	3, 2	1
12 h 05	4, 5, 6	6, 5	1, 4
12 h 10	7, 8, 9	9, 8	1, 4, 7
12 h 15	10, 11, 12	12, 11	1, 4, 7, 10
12 h 20	13, 14, 15	15, 14	1, 4, 7, 10, 13
12 h 25	16, 17, 18	18, 17	1, 4, 7, 10, 13, 16
12 h 30	19, 20, 21	21, 20	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19
12 h 35	22, 23, 24	24, 23	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
12 h 40	25, 26, 27	27, 26	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25
12 h 45	28, 29, 30	30, 29	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28
12 h 50	31, 32, 33	33, 32	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31
12 h 55	34, 35, 36	36, 35	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34
13 h 00	Aucune	34, 31	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28
13 h 05	Aucune	28, 25	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
13 h 10	Aucune	22, 19	1, 4, 7, 10, 13, 16
13 h 15	Aucune	16, 13	1, 4, 7, 10

(À 12 h 55, toutes les 36 lettres ont été déposées. Donc, à partir de 13 h 00, les lettres sont enlevées, mais aucune n'est déposée.)

La 13^{e} lettre est enlevée à 13 h 15.

Réponse : (A)

8^e année

1. On a : $(4 \times 12) - (4 + 12) = 48 - 16 = 32$

Réponse : (E)

2. On convertit en forme décimale : $\frac{3}{10} + \frac{3}{1000} = 0{,}3 + 0{,}003 = 0{,}303$.

Réponse : (B)

3. On utilise le diagramme pour déterminer la différence entre le maximum et le minimum à chaque jour.

Jour	Maximum	Minimum	Différence
Lundi	20°	10°	10°
Mardi	20°	15°	5°
Mercredi	25°	25°	0°
Jeudi	30°	10°	20°
Vendredi	25°	20°	5°

La différence entre le maximum et le minimum était la plus grande le jeudi.

Réponse : (D)

4. Lorsqu'on lance le cube, il y a 6 résultats possibles et 2 résultats favorables.
La probabilité d'obtenir un 5 ou un 6 est donc égale à $\frac{2}{6}$, ou $\frac{1}{3}$.

Réponse : (C)

5. Puisque les côtés du cube ont une longueur de x cm, le cube a un volume de x^3 cm^3.
Or, on sait qu'il a un volume de 8 cm^3. Donc $x^3 = 8$, d'où $x = 2$ (la racine cubique de 8).

Réponse : (A)

6. Puisqu'un appel de 3 minutes coûte 0,18 \$, le taux est de $0{,}18 \div 3$ dollars par minute, ou 0,06 \$ par minute.
Un appel de 10 minutes coûte $10 \times 0{,}06$ \$, soit 0,60 \$.

Réponse : (B)

7. Puisque 1000 mètres correspondent à 1 kilomètre, alors 200 mètres correspondent à $\dfrac{200}{1000}$ km, ou 0,2 km.

Réponse : (A)

8. Voici l'âge des enfants : 7, 7, 7, 14, 15.
L'âge moyen des enfants est égal à $\dfrac{7+7+7+14+15}{5}$ ans, c'est-à-dire à $\dfrac{50}{5}$ ans, ou 10 ans.

Réponse : (E)

9. Puisque $x = 5$ et $y = x + 3$, alors $y = 5 + 3$, c'est-à-dire que $y = 8$.
Puisque $y = 8$ et $z = 3y + 1$, alors $z = 3(8) + 1$, d'où $z = 24 + 1$, ou $z = 25$.

Réponse : (B)

10. Voici tous les nombres possibles que l'on peut former avec les chiffres 5, 1 et 9 : 519, 591, 951, 915, 195 et 159.
Le plus grand est 951 et le plus petit est 159.
La différence de ces deux nombres est égale à $951 - 159$, c'est-à-dire à 792.

Réponse : (C)

11. *Solution 1*
Puisque Lili a une taille de 90 cm, que la taille d'Anika est $\frac{4}{3}$ de celle de Lili et que la taille de Sadaf est $\frac{5}{4}$ de celle d'Anika, alors la taille de Sadaf est de $\frac{5}{4} \times \frac{4}{3} \times 90$ cm, c'est-à-dire $\frac{5}{3} \times 90$ cm, soit $\frac{450}{3}$ cm, ou 150 cm.

Solution 2
Puisque Lili a une taille de 90 cm et que la taille d'Anika est $\frac{4}{3}$ de celle de Lili, alors la taille d'Anika est de $\frac{4}{3} \times 90$ cm, c'est-à-dire $\frac{360}{3}$ cm, ou 120 cm.
Puisque Anika a une taille de 120 cm et que la taille de Sadaf est de $\frac{5}{4}$ de la taille d'Anika, alors la taille de Sadaf est de $\frac{5}{4} \times 120$ cm, c'est-à-dire $\frac{600}{4}$ cm, ou 150 cm.

Réponse : (E)

12. *Solution 1*
Puisque $\angle BCA = 40°$ et que le triangle ADC est isocèle, avec $AD = DC$, alors $\angle DAC = \angle ACD = 40°$.
Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, alors
$\angle ADC = 180° - \angle DAC - \angle ACD$, c'est-à-dire que $\angle ADC = 180° - 40° - 40°$, ou $\angle ADC = 100°$.
Puisque les angles ADB et ADC sont supplémentaires, alors $\angle ADB = 180° - \angle ADC$, c'est-à-dire que $\angle ADB = 180° - 100°$, ou $\angle ADB = 80°$.
Puisque le triangle ADB est isocèle, avec $AD = DB$, alors $\angle BAD = \angle ABD$.
Donc $\angle BAD = \frac{1}{2}(180° - \angle ADB)$, c'est-à-dire que $\angle BAD = \frac{1}{2}(180° - 80°)$, soit $\angle BAD = \frac{1}{2}(100°)$, ou $\angle BAD = 50°$.
Donc $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$, c'est-à-dire que $\angle BAC = 50° + 40°$, ou $\angle BAC = 90°$.

Solution 2
Puisque les triangles ABD et ACD sont isocèles, $\angle BAD = \angle ABD$ et $\angle DAC = \angle ACD$.
Puisque ces quatre angles forment les trois angles du triangle ABC, la somme de leur mesure est égale à 180°.
Puisque la mesure de l'angle BAC est égale à la moitié de la somme de la mesure de ces angles (cet angle est formé d'un élément de chaque paire), $\angle BAC = \frac{1}{2}(180°)$, d'où $\angle BAC = 90°$.

Réponse : (D)

13. Pour chaque choix parmi les 2 activités dans les arts, Cathia peut choisir parmi 3 activités dans les sports. Cela fait 2×3 choix, ou 6 choix. Pour chacun de ces 6 choix, elle peut choisir parmi 4 activités en musique. En tout, cela fait 6×4 choix, ou 24 choix.

Réponse : (B)

14. Aux Olympiques de mathématiques de 2007, l'équipe canadienne a remporté 17 médailles sur 100 médailles possibles, ce qui représente 0,17 des médailles possibles.
On écrit les choix de réponse sous forme décimale pour trouver celui qui est le plus près de 0,17 :

(A) $\frac{1}{4} = 0{,}25$ (B) $\frac{1}{5} = 0{,}2$ (C) $\frac{1}{6} = 0{,}166666...$ (D) $\frac{1}{7} = 0{,}142857...$ (E) $\frac{1}{8} = 0{,}125$

Le choix le plus près de 0,17 est $\frac{1}{6}$, c'est-à-dire (C).

Réponse : (C)

15. Voyons ce qui arrive si les entiers sont 5, 6, 7 et 8.
Lorsqu'on divise 5 par 4, on obtient un quotient de 1 et un reste de 1.
Lorsqu'on divise 6 par 4, on obtient un quotient de 1 et un reste de 2.

Lorsqu'on divise 7 par 4, on obtient un quotient de 1 et un reste de 3.
Lorsqu'on divise 8 par 4, on obtient un quotient de 2 et un reste de 0.
La somme des restes est égale à $1 + 2 + 3 + 0$, c'est-à-dire à 6.
(Peu importe le choix des quatre nombres consécutifs, lorsqu'on les divise par 4, l'un aura un reste de 0, l'un aura un reste de 1, l'un aura un reste de 2 et l'un aura un reste de 3.)

Réponse : (A)

16. Supposons que le cercle a un rayon initial de 1. Il a donc une aire initiale de $\pi(1)^2$, c'est-à-dire de π, et une circonférence initiale de $2\pi(1)$, c'est-à-dire de 2π.
Lorsque le rayon est triplé, il prend une valeur de 3.
La nouvelle aire est égale à $\pi(3)^2$, c'est-à-dire à 9π, et la nouvelle circonférence est égale à $2\pi(3)$, c'est-à-dire à 6π. Donc, l'aire est multipliée par 9 et la circonférence est multipliée par 3.

Réponse : (A)

17. Puisque tous les nombres du problème sont des multiples de 1000, on travaillera avec les nombres de milliers de votes, ce qui simplifiera les calculs.
Il y a eu un total de 5219 milliers de votes en tout.
Supposons que le gagnant a reçu x milliers de votes. Ses adversaires ont donc reçu $x - 22$ milliers de votes, $x - 30$ milliers de votes et $x - 73$ milliers de votes, respectivement.
On obtient donc l'égalité suivante entre les nombres de milliers de votes :

$$\begin{aligned} x + (x - 22) + (x - 30) + (x - 73) &= 5219 \\ 4x - 125 &= 5219 \\ 4x &= 5344 \\ x &= 1336 \end{aligned}$$

Donc, le gagnant a reçu 1 336 000 votes.

Réponse : (D)

18. Lorsque le nombre n est doublé, on obtient $2n$.
Lorsqu'on y ajoute y, on obtient $2n + y$.
Lorsqu'on divise ce résultat par 2, on obtient $\frac{1}{2}(2n + y)$, ce qui est équivalent à $n + \dfrac{y}{2}$.
Lorsqu'on soustrait le nombre n, on obtient $\dfrac{y}{2}$.

Réponse : (E)

19. Pour créer la plus grande fraction possible, on choisit le plus grand numérateur possible et le plus petit dénominateur possible.
D'après la figure, le plus grand nombre est z et le plus petit est w. Donc, la plus grande fraction possible est $\dfrac{z}{w}$.

Réponse : (E)

20. *Solution 1*
L'aller de 240 km, à une vitesse de 120 km/h, a pris $240 \div 120$ heures, c'est-à-dire 2 heures.
Le retour de 240 km, à une vitesse de 80 km/h, a pris $240 \div 80$ heures, c'est-à-dire 3 heures.
En tout, elle a parcouru 480 km en 5 heures. Sa vitesse moyenne était donc de $\dfrac{480}{5}$ km/h, c'est-à-dire de 96 km/h.

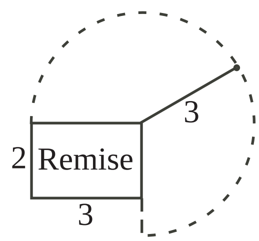
Solution 2
L'aller de 240 km, à une vitesse de 120 km/h, a pris $240 \div 120$ heures, c'est-à-dire 2 heures.
Le retour de 240 km, à une vitesse de 80 km/h, a pris $240 \div 80$ heures, c'est-à-dire 3 heures.
Pendant les 5 heures du trajet, ses vitesses étaient de 120 km/h, 120 km/h, 80 km/h, 80 km/h et 80 km/h. Donc, sa vitesse moyenne était de $\dfrac{120+120+80+80+80}{5}$ km/h, c'est-à-dire de $\dfrac{480}{5}$ km/h, ou 96 km/h.

RÉPONSE : (B)

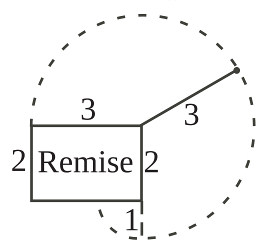
21. L'aire du rectangle $WXYZ$ est égale à 10×6, ou 60.
Puisque l'aire de la partie ombrée est égale à la moitié de celle de $WXYZ$, elle est égale à $\frac{1}{2} \times 60$, ou 30.
Puisque AD et WX sont perpendiculaires, la région ombrée comprend quatre angles droits. Il s'agit donc d'un rectangle.
Puisque le carré $ABCD$ a des côtés de longueur 6, alors $DC = 6$.
Puisque la région ombrée a une aire de 30, alors $PD \times DC = 30$, c'est-à-dire $PD \times 6 = 30$, d'où $PD = 5$.
Puisque $AD = 6$ et $PD = 5$, alors $AP = 1$.

RÉPONSE : (A)

22. Lorsque la corde est étirée sur toute sa longueur, Léo et la corde peuvent balayer un angle de 270°. La région ainsi balayée est $\frac{3}{4}$ de l'intérieur d'un cercle dont le centre est le point d'attache de la corde.



L'aire de cette région est donc $\frac{3}{4}$ de l'aire à l'intérieur d'un cercle de rayon 3, c'est-à-dire $\frac{3}{4} \times \pi(3^2)$, ou $\frac{27}{4}\pi$.
Dans une direction, Léo vient rejoindre le coin supérieur gauche de la remise.
Dans l'autre direction, en bas de la figure, la corde s'étend sur 1 mètre au-delà de la remise.
Léo peut donc se déplacer plus loin, comme l'indique la figure suivante.



Dans cette région, la corde balaie un angle de 90°. L'aire de cette région est donc $\frac{1}{4}$ de l'aire de l'intérieur d'un cercle de rayon 1. Cette aire est égale à $\frac{1}{4} \times \pi(1^2)$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}\pi$.
La surface de jeu dans laquelle Léo peut se déplacer a donc une aire totale de $\frac{27}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi$, c'est-à-dire $\frac{28}{4}\pi$, ou 7π.

RÉPONSE : (A)

23. *Solution 1*
En utilisant des billets de 5 \$, on peut former n'importe quelle somme qui est un multiple de

5 $, c'est-à-dire qui se termine par un 0 ou un 5.
Pour obtenir une somme de 207 $ à partir d'un multiple de 5 $, en n'ajoutant que des pièces de 2 $, il faut que le multiple de 5 $ se termine par un 5. (S'il se terminait par un 0, on obtiendrait toujours une somme paire en y ajoutant des pièces de 2 $. Cette somme ne pourrait donc pas égaler 207 $.)
Peu importe le multiple de 5 $ qui se termine par un 5, s'il est inférieur à 207 $, on peut toujours y ajouter suffisamment de pièces de 2 $ pour obtenir une somme de 207 $.
Les multiples de 5 qui se terminent par 5 et qui sont inférieurs à 207 sont 5, 15, 25, ..., 195, 205.
Pour compter facilement le nombres de multiples dans cette liste, on peut omettre le chiffre des unités (c'est-à-dire le 5), ce qui donne 0, 1, 2, ..., 19, 20 ; il y a 21 nombres dans cette liste.
Il y a donc 21 multiples de 5 $ auxquels on peut ajouter des pièces de 2 $ pour obtenir une somme de 207 $. Il y a donc 21 façons de former une somme de 207 $ en n'employant que des pièces de 2 $ et des billets de 5 $.

Solution 2
On nous dit que 1 pièce de 2 $ et 41 billets de 5 $ ont une valeur de 207 $. On ne peut utiliser moins de pièces de 2 $, car avec 0 pièce de 2 $, on ne peut obtenir une somme de 207 $. On peut seulement utiliser un plus grand nombre de pièces de 2 $.
Pour le faire, on « fera de la monnaie » en échangeant des billets de 5 $ pour des pièces de 2 $.
Puisque 5 est un nombre impair, on ne peut échanger 1 billet de 5 $ pour des pièces de 2 $. On peut cependant échanger 2 billets de 5 $ pour 5 pièces de 2 $.
Avec cet échange, on obtient 6 pièces de 2 $ et 39 billets de 5 $.
Si on fait l'échange de nouveau, on obtient 11 pièces de 2 $ et 37 billets de 5 $.
On recommence l'échange jusqu'à ce qu'il ne reste que 1 billet de 5 $. On a alors 202 $ en pièces de 2 $, ce qui représente 101 pièces.
Voici donc les nombres possibles de billets de 5 $: 41, 39, 37, ..., 3, 1. Il s'agit de tous les nombres impairs de 1 à 41. Il y en a 21. Il y a donc 21 façons de former une somme de 207 $.

RÉPONSE : (E)

24. Pour se rendre du point (2,1) au point (12,21), on avance de 10 unités vers la droite et on monte de 20 unités ; donc, chaque fois qu'on avance de 1 unité, on monte de 2 unités. Donc, chaque fois qu'on avance de 1 unité, on arrive à un point de treillis. Les points de treillis sur ce segment sont donc :

$$(2,1), (3,3), (4,5), (5,7), (6,9), (7,11), (8,13), (9,15), (10,17), (11,19), (12,21)$$

(Il ne peut pas y avoir d'autres points de treillis sur ce segment, puisque toutes les valeurs entières de x ont été utilisées.)
Pour se rendre du point (2,1) au point (17,6), on avance de 15 unités vers la droite et on monte de 5 unités ; donc, chaque fois qu'on monte de 1 unité, on avance de 3 unités. Donc, chaque fois qu'on monte de 1 unité, on arrive à un point de treillis. Les points de treillis sur ce segment sont donc :

$$(2,1), (5,2), (8,3), (11,4), (14,5), (17,6)$$

Pour se rendre du point (12,21) au point (17,6), on avance de 5 unités vers la droite et on descend de 15 unités ; donc, chaque fois qu'on avance de 1 unité, on descend de 3 unités. Donc, chaque fois qu'on avance de 1 unité, on arrive à un point de treillis. Les points de treillis sur ce segment sont donc :

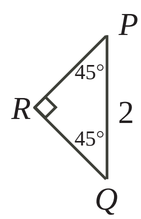
$$(12,21), (13,18), (14,15), (15,12), (16,9), (17,12)$$

Il y a 23 points $(11 + 6 + 6)$ dans ces trois listes. Or, trois points, soit les trois sommets, ont été comptés deux fois. Il y a donc 20 points différents $(23 - 3)$ dans ces listes.

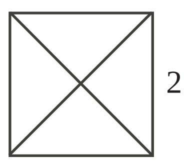
Il y a donc 20 points de treillis sur les côtés du triangle.

Réponse : (C)

25. Pour calculer l'aire du quadrilatère $DRQC$, on soustraira l'aire du triangle PRQ de l'aire du triangle PDC.
On calcule d'abord l'aire du triangle PDC.
On sait que $DC = AB = 5$ cm et que $\angle DCP = 90°$.
Lorsqu'on forme le premier pli, PC devient parallèle à AB et C est placé sur le côté AD. Donc $PC = AB = 5$ cm.
Donc, l'aire du triangle PDC est égale à $\frac{1}{2} \times 5 \times 5$ cm^2, c'est-à-dire à $\frac{25}{2}$ cm^2, ou 12,5 cm^2.
On calcule ensuite l'aire du triangle PRQ.
Dans le triangle PDC, on a $PC = 5$ cm, $\angle PCD = 90°$ et $PC = CD$.
Donc $\angle DPC = 45°$.
De même, dans le triangle ABQ, on a $AB = BQ = 5$ cm et $\angle BQA = 45°$.
Puisque $BC = 8$ cm et que $PB = BC - PC$, alors $PB = 3$ cm. De même, $QC = 3$ cm. Puisque $PQ = BC - BP - QC$, alors $PQ = 2$ cm
De plus, $\angle RPQ = \angle DPC = 45°$ et $\angle RQP = \angle BQA = 45°$.



Quatre de ces triangles peuvent former un carré ayant des côtés de 2 cm (et une aire de 4 cm^2).



L'aire d'un de ces triangles (par exemple, l'aire du triangle PRQ) est donc égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire du carré, c'est-à-dire à 1 cm^2.
L'aire du quadrilatère $DRQC$ est donc égale à $(12{,}5 - 1)$ cm^2, c'est-à-dire à 11,5 cm^2.

Réponse : (D)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

Concours Gauss 2006

(7^{e} et 8^{e} années – Secondaire I et II)

le mercredi 10 mai 2006

Solutions

Personnel du Concours canadien de mathématiques

Barry Ferguson (directeur)
Ed Anderson
Lloyd Auckland
Fiona Dunbar
Jeff Dunnett
Judy Fox
Judith Koeller
Joanne Kursikowski
Angie Lapointe
Matthew Oliver
Larry Rice
Linda Schmidt
Kim Schnarr
Carolyn Sedore
Ian VanderBurgh

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), St. John's Ravenscourt School, Winnipeg, MB
Sandy Emms Jones (présidente adjointe), Forest Heights C. I., Kitchener, ON
Ed Barbeau, Toronto, ON
Kevin Grady, Cobden District P. S., Cobden, ON
Joanne Halpern, Toronto, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
Gerry Stephenson, St. Thomas More C. S. S., Hamilton, ON

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

7^e année

1. On a $(8 \times 4) + 3 = 32 + 3 = 35$.

Réponse: (D)

2. Puisque les deux angles forment un angle plat, la somme de leur mesure est égale à 180°. Donc $x° + 40° = 180°$, ou $x + 40 = 180$. Donc $x = 140$.

Réponse: (B)

3. Pour obtenir le nombre de billets de 50 $, on divise la somme par 50. On obtient $10\,000 \div 50 = 200$. Donc, Mikhail a 200 billets de 50 $.

Réponse: (B)

4. La figure est composée de 8 côtés de même longueur. Puisque chaque côté a une longueur de 2, le périmètre est égal à 8×2, ou 16.

Réponse: (A)

5. On utilise un dénominateur commun : $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15}$. Cette somme est égale à $\frac{11}{15}$.

Réponse: (C)

6. On calcule d'abord les produits, puis on additionne :

$$6 \times 100\,000 + 8 \times 1000 + 6 \times 100 + 7 \times 1 = 600\,000 + 8000 + 600 + 7 = 608\,607$$

Réponse: (C)

7. Puisque $3 + 5x = 28$, alors $5x = 25$. Donc $x = 5$.

Réponse: (C)

8. On sait que $9^2 = 9 \times 9$ et que $\sqrt{9} = 3$. Donc, $9^2 - \sqrt{9} = 81 - 3 = 78$.

Réponse: (E)

9. Le nombre total de boules est égal à $2 + 5 + 4$, ou 11. Puisqu'il y a 5 boules jaunes, la probabilité de choisir une boule jaune est égale à $\frac{5}{11}$.

Réponse: (B)

10. Une extrémité du bloc est vis-à-vis du 2 sur la règle, tandis que l'autre extrémité est entre le 4 et le 5. La longueur du bloc est donc entre 2 et 3 unités.
Or, seul le choix (C), c'est-à-dire 2,4 cm, est entre 2 et 3.
(On peut vérifier que ce choix est raisonnable. En effet, l'extrémité du bloc est à peut près à mi-chemin entre le 4 et le 5. Donc, 2,4 cm est une réponse raisonnable.)

Réponse: (C)

11. *Solution 1*
Puisque le taux de taxe est de 15 %, le coût total du disque est égal à $1{,}15 \times 14{,}99$ $, ce qui est égal à 17,2385 $, ou 17,24 $.

Solution 2
Puisque le taux de taxe est de 15 % et que le disque coûte 14,99 $, la taxe est égale à $0{,}15 \times 14{,}99$ $, ce qui est égal à 17,2385 $, ou 17,24 $.
Le prix du disque, incluant la taxe, est égal à 14,99 $ + 2,25 $, ou 17,24 $.

Réponse: (A)

12. *Solution 1*
La base de la piscine mesure 6 m sur 12 m. Son aire est donc égale à (6×12) m^2, ou 72 m^2. Le volume de la piscine est égal à (72×4) m^3, ou 288 m^3.
Puisque la piscine est à moitié pleine, le volume d'eau dans la piscine est égal à la moitié de 288 m^3, soit 144 m^3.

Solution 2
Puisque la piscine est à moitié pleine, la profondeur de l'eau est égale à la moitié de 4 m, c'est-à-dire 2 m.
L'eau forme un prisme à base rectangulaire et cette base a une aire de (6×12) m^2, ou 72 m^2.
Son volume est égal à (2×72) m^3, ou 144 m^3.

Réponse: (E)

13. Pour déterminer le nombre qui doit être additionné à 8 pour donner une réponse de -5, on soustrait 8 de -5 pour obtenir $(-5) - 8$, ou -13. Vérification : $8 + (-13) = -5$.

Réponse: (D)

14. *Solution 1*
Puisque AOB est un diamètre du cercle, alors $\angle AOB = 180°$.
L'angle du secteur « Hiver » est droit. Il mesure donc 90°. L'angle du secteur « Printemps » mesure 60°.
Donc, l'angle du secteur « Automne » mesure $180° - 90° - 60°$, ou 30°.
Le secteur qui a un angle de 30° correspond à quelle fraction d'un disque complet ? Puisque le disque balaie un angle de 360° au centre, la fraction correspond à $\dfrac{30}{360}$, c'est-à-dire $\frac{1}{12}$.
Donc, $\frac{1}{12}$ des élèves ont choisi l'automne comme saison préférée, ce qui représente $\frac{1}{12} \times 600$ élèves, ou 50 élèves.

Solution 2
Puisque AOB est un diamètre du cercle, alors la moitié des 600 élèves, soit 300 élèves, ont choisi l'été comme saison préférée.
Puisque l'angle du secteur « Hiver » est droit (il mesure 90°) et qu'un angle droit est le quart d'un angle plein, alors un quart des 600 élèves, soit 150 élèves, ont choisi l'hiver.
Puisque l'angle du secteur « Printemps » mesure 60° et que cet angle est $\frac{1}{6}$ d'un angle plein, alors $\frac{1}{6}$ des 600 élèves, soit 100 élèves, ont choisi le printemps.
Puisqu'il y avait 600 élèves en tout, le nombre d'élèves qui ont choisi l'automne est égal à $600 - 300 - 150 - 100$, ou 50.

Réponse: (B)

15. Puisque Hervé demande 50 % de plus pour chaque heure additionnelle que pour l'heure précédente, son taux horaire est 1,5 fois le taux horaire précédent.
Hervé reçoit 4 \$ pour la première heure.
Il reçoit $1{,}5 \times 4$ \$, soit 6 \$, pour la deuxième heure.
Il reçoit $1{,}5 \times 6$ \$, soit 9 \$, pour la troisième heure.
Il reçoit $1{,}5 \times 9$ \$, soit 13,50 \$, pour la quatrième heure.
En tout, il reçoit 4 \$ + 6 \$ + 9 \$ + 13,50 \$, ou 32,50 \$.

Réponse: (C)

16. *Solution 1*
On obtient des fractions équivalentes à $\frac{5}{8}$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par le même nombre.

La somme du numérateur et du dénominateur de $\frac{5}{8}$ est égale à 13. Lorsqu'on multiplie le numérateur et le dénominateur par un même nombre, la somme aussi est multipliée par ce même nombre.
Puisque $91 = 13 \times 7$, on devrait multiplier le numérateur et le dénominateur par 7 pour obtenir $\frac{5\times7}{8\times7} = \frac{35}{56}$. Cette dernière fraction est équivalente à $\frac{5}{8}$ et la somme de son numérateur et de son dénominateur est égale à 91.
La différence entre le dénominateur et le numérateur de cette fraction est égale à $56 - 35$, ou 21.

Solution 2
On construit une suite de fractions équivalentes à $\frac{5}{8}$ en multipliant successivement le numérateur et le dénominateur par 2, par 3, par 4, etc. On obtient :

$$\frac{5}{8}, \frac{10}{16}, \frac{15}{24}, \frac{20}{32}, \frac{25}{40}, \frac{30}{48}, \frac{35}{56}, \ldots$$

Puisque la somme du numérateur et du dénominateur de $\frac{35}{56}$ est égale à 91 (on a $35 + 56 = 91$), il s'agit de la fraction que l'on cherche.
La différence entre le dénominateur et le numérateur de cette fraction est égale à $56 - 35$, ou 21.

Solution 3
On obtient des fractions équivalentes à $\frac{5}{8}$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par le même nombre.
Si on multiplie par n, on obtient la fraction $\frac{5n}{8n}$ qui est équivalente à $\frac{5}{8}$.
On veut que la somme du numérateur et du dénominateur soit égale à 91, c'est-à-dire que $5n + 8n = 91$. Donc $13n = 91$, d'où $n = 7$.
La fraction que l'on cherche est $\frac{5\times7}{8\times7}$, c'est-à-dire $\frac{35}{56}$.
La différence entre le dénominateur et le numérateur de cette fraction est égale à $56 - 35$, ou 21.

Réponse: (A)

17. *Solution 1*
Puisque le soulier a une longueur de 28 cm et que le soulier peut être placé 15 fois le long d'un côté du tapis, ce côté mesure 15×28 cm, ou 420 cm.
Puisque le soulier peut être placé 10 fois le long d'un autre côté, ce côté mesure 10×28 cm, ou 280 cm.
On a $420 \times 280 = 117\,600$. L'aire du tapis est égale à $117\,600$ cm^2.

Solution 2
Puisque le soulier peut être placé 15 fois le long d'un côté du tapis et 10 fois le long d'un autre côté et que $15 \times 10 = 150$, l'aire du tapis est égale à 150 « souliers carrés » (c'est-à-dire 150 carrés qui mesurent un soulier sur un soulier).
Puisque le soulier a une largeur et une longueur de 28 cm, un « soulier carré » a une aire de (28×28) cm^2, c'est-à-dire 784 cm^2. On a $150 \times 784 = 117\,600$. L'aire du tapis est égale à $117\,600$ cm^2.

Réponse: (E)

18. *Solution 1*
Puisque Kotima met 120 secondes pour faire 3 fois le tour de la piste, elle met 40 secondes ($120 \div 3 = 40$) pour faire 1 fois le tour de la piste.
Puisque Leah met 160 secondes pour faire 5 fois le tour de la piste, elle met 32 secondes ($160 \div 5 = 32$) pour faire 1 fois le tour de la piste.
Puisque Leah met moins de temps pour faire le tour de la piste, elle est la plus rapide.

Puisque Leah met 32 secondes pour parcourir les 150 m autour de la piste, sa vitesse est égale à $\frac{150}{32}$ m/s, c'est-à-dire 4,6875 m/s, soit environ 4,69 m/s.
Donc, Leah est la plus rapide. Elle court à une vitesse de 4,69 m/s.

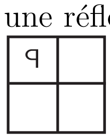
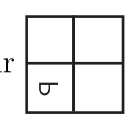
Solution 2
Puisque Kotima met 120 secondes pour faire 3 fois le tour de la piste, elle parcourt 3×150 m, ou 450 m en tout. Sa vitesse est égale à $\frac{450}{120}$ m/s, c'est-à-dire 3,75 m/s.
Puisque Leah met 160 secondes pour faire 5 fois le tour de la piste, elle parcourt 5×150 m, ou 750 m en tout. Sa vitesse est égale à $\frac{750}{160}$ m/s, c'est-à-dire 4,6875 m/s, soit environ 4,69 m/s.
Puisque sa vitesse est plus grande, Leah est la plus rapide. Elle court à une vitesse de 4,69 m/s.

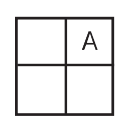
Réponse: (D)

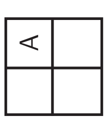
19. *Solution 1*
Dans une minute, il y a 60 secondes.
Dans une heure, il y a 60 minutes. Il y a donc 3600 secondes ($60 \times 60 = 3600$).
Dans une journée, il y a 24 heures. Il y a donc 86 400 secondes ($24 \times 3600 = 86\,400$).
Donc, 10^6 secondes correspondent à $\frac{10^6}{86\,400}$ jours, ou environ 11,574 jours. Le choix de réponse le plus près est 10 jours.

Solution 2
Puisqu'il y a 60 secondes dans une minute, 10^6 secondes correspondent à $\frac{10^6}{60}$ minutes, soit environ 16 666,67 minutes.
Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure, 16 666,67 minutes correspondent à $\frac{16\,666{,}67}{60}$ heures, soit environ 277,78 heures.
Puisqu'il y a 24 heures dans une journée, 277,78 heures correspondent à $\frac{277{,}78}{24}$ jours, soit environ 11,574 jours. Le choix de réponse le plus près est 10 jours.

Réponse: (B)

20. Pour transformer le quadrillage qui contient le P de la position initiale à la position finale, on peut lui faire subir une réflexion par rapport à la ligne verticale au milieu du quadrillage, pour obtenir la position  puis lui faire subir une rotation de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, par rapport au centre du quadrillage, pour obtenir  .

Si on fait subir les mêmes transformations au quadrillage qui contient le A, on obtient 

puis 

. (On peut combiner des transformations de plusieurs façons pour transformer le P de sa position à sa position finale ; à chaque fois, on obtiendra la même position finale du A.)

Réponse: (B)

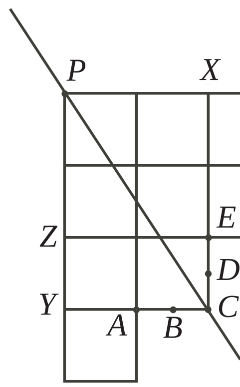
21. *Solution 1*
De x heures du matin à x heures du soir, il y a 12 heures. (Par exemple, de 10 heures du matin

à 10 heures du soir, il y a 12 heures.)
Donc, Gaël travaille 12 heures le samedi.

Solution 2
De x heures du matin jusqu'à midi, Gaël travaille $12 - x$ heures.
De midi jusqu'à x heures du soir, elle travaille x heures.
Le nombre total d'heures de travail est égal à $(12 - x) + x$, ou 12.

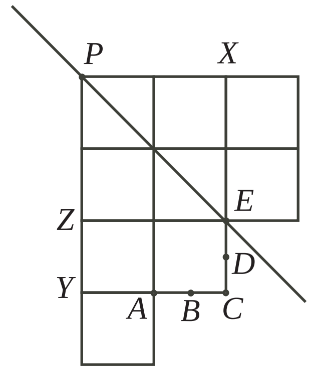
Réponse: (E)

22. À titre d'essai, on examine le résultat si la droite passe au point C.



Puisque chaque petit carré est un carré-unité, on voit que le rectangle $PXCY$ a une aire de 6. La droite qui passe par les points P et C coupe le rectangle en deux moitiés qui ont chacune une aire de 3.
(On a utilisé une propriété qui sera reprise plusieurs fois dans cette démonstration : Si une droite forme une diagonale d'un rectangle, elle le coupe en deux triangles congruents qui ont donc chacun la même aire.)
La partie de la figure qui est en dessous de la droite a une aire de $3 + 1$, ou 4, car on doit ajouter le carré du bas du demi-rectangle.
La partie de la figure qui est au-dessus de la droite a une aire de $3 + 2$, ou 5, car on doit ajouter les deux carrés à droite du demi-rectangle.
Une droite qui passe au point C ne coupe donc pas la figure en deux morceaux de même aire. Donc, il ne faut pas choisir C.
De plus, puisque le morceau du dessous a une plus petite aire que le morceau du dessus, il faut bouger la droite un peu vers le haut (et on ne peut donc pas choisir A ou B).

La droite devrait-elle passer au point E ?



Dans ce cas, la droite forme une diagonale du carré $PXEZ$, qui a une aire de 4, et elle le coupe en deux moitiés qui ont chacune une aire de 2.
L'aire du morceau supérieur de la figure a donc une aire de $2 + 2$, ou 4, tandis que le morceau inférieur a une aire de $2 + 3$, ou 5.
Puisque cette droite ne coupe pas la figure en deux morceaux de même aire, il ne faut pas choisir le point E.
Il ne reste que le point D parmi les cinq choix. C'est donc ce point qu'il faut choisir.

(On devrait vérifier que la droite qui passe au point D coupe bien la figure en deux morceaux de même aire.
La figure a une aire de 9, car elle est formée de 9 carrés-unités.
Si la droite passe au point D, le morceau supérieur est formé du triangle PXD et de deux carrés-unités.
L'aire du triangle PXD est égale à $\frac{1}{2} \times 2 \times 2\frac{1}{2}$, c'est-à-dire à $2\frac{1}{2}$, puisque $PX = 2$ et que $XD = 2\frac{1}{2}$.
L'aire du morceau supérieur est donc égale à $2\frac{1}{2} + 2$, ou $4\frac{1}{2}$, ce qui est bien la moitié de l'aire totale de la figure.)

Réponse: (D)

23. On nomme les sept cases pour faciliter la communication.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & \boxed{A} & \boxed{B} \\
+ & & \boxed{C} & \boxed{D} \\
\hline
 & \boxed{E} & \boxed{F} & \boxed{G}
\end{array}
$$

Puisqu'on additionne deux nombres de deux chiffres, la somme doit être inférieure à 200 ; donc, E doit être égal à 1. (Il ne peut être égal à 0, puisque la somme compte trois chiffres.)

Où peut-on placer le chiffre 0 ?
Puisqu'aucun des nombres ne peut commencer par 0, alors ni A, ni C n'est égal à 0.
Puisque les sept chiffres sont différents, alors ni B, ni D n'est égal à 0, sinon D et G, ou bien B et G, seraient identiques.
Donc, F ou G est égal à 0.

Puisqu'on additionne deux nombres de deux chiffres et que la somme est supérieure à 100, alors $A+C$ doit être supérieur ou égal à 9. (Il pourrait être égal à 9 s'il y avait une retenue dans l'addition des chiffres des unités.)
Donc, A et C doivent prendre les valeurs suivantes dans un ordre quelconque : 3 et 6, ou 4 et 5,

ou 4 et 6, ou 5 et 6.

Si G est égal à 0, alors B et D doivent égaler 4 et 6, ou 6 et 4. Or dans ce cas, les plus grandes valeurs possibles de A et de C sont 3 et 5, ou 5 et 3, et ces valeurs ne figurent pas parmi les possibilités énumérées ci-dessus.
Donc, G ne peut pas être égal à 0. Donc $F = 0$.

$$\begin{array}{ccc} & \boxed{A} & \boxed{B} \\ + & \boxed{C} & \boxed{D} \\ \hline \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{G} \end{array}$$

On sait que la somme de A et de C est égale à 9 ou à 10 et que A et C doivent prendre les valeurs suivantes dans un ordre quelconque : 3 et 6, ou 4 et 5, ou 4 et 6.
Dans chacun de ces cas, les valeurs possibles qui restent pour B et D sont trop petites pour donner une retenue.
Il faut donc que A et C aient une somme de 10. Donc, A et C prennent les valeurs 4 et 6, ou 6 et 4.
On examine ce qui arrive si $A = 4$ et $C = 6$.

$$\begin{array}{ccc} & \boxed{4} & \boxed{B} \\ + & \boxed{6} & \boxed{D} \\ \hline \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{G} \end{array}$$

Les autres chiffres sont 2, 3 et 5. Pour que l'addition soit juste, il faut que B et D prennent les valeurs 2 et 3 et que G soit égal à 5. (On peut vérifier que B et D peuvent prendre ces valeurs dans un ordre ou l'autre ; on peut aussi vérifier que l'on peut aussi avoir $A = 6$ et $C = 4$.)

Donc, le chiffre des unités de la somme est égal à 5, comme dans cet exemple :

$$\begin{array}{ccc} & \boxed{4} & \boxed{2} \\ + & \boxed{6} & \boxed{3} \\ \hline \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{5} \end{array}$$

(Remarquer qu'il est possible d'en arriver à cette réponse par tâtonnements au lieu de suivre une méthode logique.)

Réponse: (D)

24. La somme de la longueur de deux côtés d'un triangle doit être supérieure à la longueur du troisième côté.
(Si on sait que deux côtés sont congrus, il suffit de vérifier que la somme de la longueur de ces deux côtés est supérieure à la longueur du troisième côté, car la somme de la longueur d'un des côtés congrus et de la longueur du troisiéme côté est alors supérieure à la longueur de l'autre côté congru.)
Si les deux côtés congrus ont une longueur de 2, le 3^{e} côté doit mesurer moins de $2 + 2$, ou 4. Il y a une seule possibilité, soit une longueur de 3 (car le triangle ne peut être équilatéral et le 3^{e} côté ne peut donc pas mesurer 3).
Si les deux côtés congrus ont une longueur de 3, le 3^{e} côté doit mesurer moins de $3 + 3$, ou 6. Le

3^e côté peut donc mesurer 2 ou 5. (Il ne peut mesurer 3, car le triangle ne peut être équilatéral.) Il y a donc deux possibilités.
Si les deux côtés ont une longueur de 5, le 3^e côté doit mesurer moins de $5 + 5$, ou 10. Le 3^e côté peut mesurer 2, 3 ou 7. (Il ne peut mesurer 5, car le triangle ne peut être équilatéral.) Il y a trois possibilités.
Si les deux côtés congrus ont une longueur de 7, le 3^e côté doit mesurer moins de $7+7$, ou 14. Le 3^e côté peut mesurer 2, 3, 5 ou 11. (Il ne peut mesurer 7, car le triangle ne peut être équilatéral.) Il y a quatre possibilités.
Si les deux côtés ont une longueur de 11, le 3^e côté doit mesurer moins de $11 + 11$, ou 22. Le 3^e côté peut mesurer 2, 3, 5 and 7. (Il ne peut mesurer 11, car le triangle ne peut être équilatéral.) Il y a quatre possiblilités.
Le nombre de triangles différents que l'on peut former et qui ont exactement deux côtés congrus, est égal à $1 + 2 + 3 + 4 + 4$, ou 14.

Réponse: (E)

25. Les cinq notes sont N, 42, 43, 46 et 49.
Si $N < 43$, la médiane est égale à 43.
Si $N > 46$, la médiane est égale à 46.
Si $N \geq 43$ et $N \leq 46$, alors la médiane est égale à N.
On poursuit l'examen de chaque cas.

Si $N < 43$, la médiane est égale à 43 et la moyenne est donc égale à 43.
Puisque la moyenne est égale à 43, la somme des cinq notes est donc égale à 5×43, ou 215.
Donc, $N+42+43+46+49 = 215$, ou $N+180 = 215$, d'où $N = 35$. Cette note est bien inférieure à 43.
On peut vérifier que la médiane et la moyenne de 35, 42, 43, 46 et 49 sont toutes deux 43.

Si $N > 46$, la médiane est égale à 46 et la moyenne est donc égale à 46.
Puisque la moyenne est égale à 46, la somme des cinq notes est donc égale à 5×46, ou 230.
Donc, $N + 42 + 43 + 46 + 49 = 230$, ou $N + 180 = 230$, d'où $N = 50$. Cette note est bien supérieure à 46.
On peut vérifier que la médiane et la moyenne de 42, 43, 46, 49 et 50 sont toutes deux 46.

Si $N \geq 43$ et $N \leq 46$, alors la médiane est égale à N et la moyenne est donc égale à N.
Puisque la moyenne est égale à N, la somme des cinq notes est donc égale à $5N$.
Donc, $N + 42 + 43 + 46 + 49 = 5N$, ou $N + 180 = 5N$, d'où $4N = 180$ et $N = 45$. Cette note est bien supérieure à 43 et inférieure à 46.
On peut vérifier que la médiane et la moyenne de 42, 43, 45, 46 et 49 sont toutes deux 45.

Il y a donc 3 valeurs possibles de N.

Réponse: (A)

8e année

1. On tient compte de la priorité des opérations : $30 - 5^2$ est égal à $30 - 25$, ou 5.
Réponse: (E)

2. *Solution 1*
Puisque $98 \div 2 = 49$, $98 \div 7 = 14$, $98 \div 14 = 7$, $98 \div 49 = 2$ et $98 \div 4 = 24{,}5$, le seul choix qui n'est pas un diviseur de 98 est 4.

Solution 2
La factorisation première de 98 est : $98 = 2 \times 7 \times 7$
Parmi les choix de réponse, seul 4 n'est pas un diviseur de 98, car $4 = 2 \times 2$ et il n'y a pas deux facteurs 2 dans la factorisation première de 98.
Réponse: (B)

3. Puisque le taux de taxe est de 15 % et que l'appareil-photo se vend 200,00 $, la taxe est égale à $0{,}15 \times 200{,}00$ $, ou 30,00 $.
Réponse: (A)

4. Puisque $1 + 1{,}1 + 1{,}11 = 3{,}21$, alors pour obtenir une somme de 4,44, il faut ajouter $4{,}44 - 3{,}21$, ou 1,23. On doit donc placer le nombre 1,23 dans la case.
Réponse: (B)

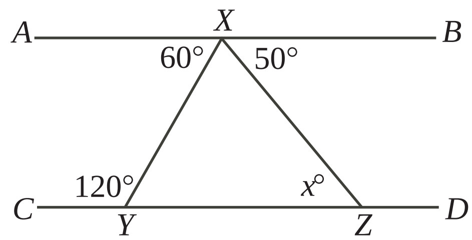
5. Le nombre total de boules est égal à $2 + 5 + 4$, ou 11.
Puisq'il y a 5 boules jaunes, la probabilité de choisir une boule jaune est égale à $\frac{5}{11}$.
Réponse: (B)

6. On vérifie chaque nombre entre 20 et 30.
Les nombres 22, 24, 26 et 28 ne sont pas premiers, car ils sont divisibles par 2.
Les nombres 21 et 27 ne sont pas premiers, car ils sont divisibles par 3.
De plus, 25 n'est pas premier, car il est divisible par 5.
Les deux nombres qui restent, soit 23 et 29, sont premiers. Il y a donc 2 nombres premiers entre 20 et 30.
Réponse: (C)

7. Le bloc est un prisme à base rectangulaire. Son volume est égal au produit de l'aire de sa base et de sa hauteur. Puisque la base a une aire de 24 cm^2 et que $5 \times 24 = 120$, la boîte a une hauteur de 5 cm.
Réponse: (A)

8. À vitesse lente, le ventilateur fait 100 rotations en une minute. Puisqu'il tourne deux fois plus vite à vitesse moyenne, il fait 200 rotations en une minute à cette vitesse.
Puisqu'il tourne encore deux fois plus vite à haute vitesse, il fait 400 rotations en une minute à haute vitesse.
En 15 minutes à haute vitesse, il fait donc 15×400 rotations, soit 6000 rotations.
Réponse: (C)

9. *Solution 1*



Puisque $\angle AXB = 180^\circ$, alors $\angle YXZ = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ$, c'est-à-dire que $\angle YXZ = 70^\circ$.
De plus, $\angle XYZ = 180^\circ - \angle CYX$, c'est-à-dire que $\angle XYZ = 180^\circ - 120^\circ$, ou $\angle XYZ = 60^\circ$.
Puisque la somme de la mesure des angles du triangle XYZ est égale à 180°, alors $x^\circ = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ$, d'où $x = 50$.

Solution 2
Puisque $\angle CYX + \angle AXY = 180^\circ$, alors AB est parallèle à CD.
Donc $\angle YZX = \angle ZXB$, c'est-à-dire que $x^\circ = 50^\circ$, ou $x = 50$.

Réponse: (A)

10. *Solution 1*
Lorsqu'on divise 8362 par 12, on obtient :

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 696 \\
12 & \overline{)8362} \\
 & \underline{72} \\
 & 116 \\
 & \underline{108} \\
 & 82 \\
 & \underline{72} \\
 & 10
\end{array}
\qquad \text{ou} \qquad
\begin{array}{l|l}
8362 & 12 \\ \cline{2-2}
\underline{72} & 696 \\
116 & \\
\underline{108} & \\
82 & \\
\underline{72} & \\
10 &
\end{array}
$$

Donc $\dfrac{8362}{12} = 696\dfrac{10}{12}$.
En d'autres mots, avec 8362 suçons, on peut préparer 696 emballages et il restera 10 suçons.

Solution 2
Lorsqu'on divise 8362 par 12, on obtient environ 696,83. Le nombre maximal possible d'emballages est donc égal à 696.
Or, dans 696 emballages, il y a 8352 suçons. Il en reste donc 10, puisqu'il y avait 8362 suçons au départ.

Réponse: (E)

11. Puisque le tonnerre voyage à une vitesse de 331 m/s et que Jos l'entend 12 secondes après l'éclair, la distance entre Jos et l'éclair est égale à 12×331 m, ou 3972 m. Cette distance est égale à 3,972 km ou, au kilomètre près, à 4,0 km.

Réponse: (C)

12. Le triangle ombré a une base de 10 cm.
La hauteur qui correspond à cette base est la même que celle du rectangle, soit 3 cm.
(On sait que le quadrilatère est un rectangle, car il a deux paires de côtés opposés congrus et deux angles droits.)
L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2} \times 10 \times 3$ cm^2, ou 15 cm^2.

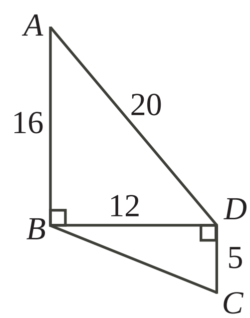
Réponse: (C)

13. On cherche deux entiers consécutifs, le premier étant un multiple de 7 et le second étant un multiple de 5.
On examine les premiers multiples de 7 et dans chaque cas, le nombre suivant.
S'agit-il de 7 et 8 ? Non, car 8 n'est pas un multiple de 5.
S'agit-il de 14 et 15 ? Oui, car 15 est un multiple de 5.
Donc, Kim a 15 ans cette année.
Elle aura 26 ans dans 11 ans.
(Bien sûr, d'autres nombres sont possibles, comme 49 et 50 ou 84 et 85, mais dans ces cas, Kim aurait 50 ans ou 85 ans cette année et elle aurait eu 26 ans dans le passé.)
Réponse: (A)

14. On sait que le 2e terme est égal à 260.
Pour obtenir le 3e terme, on divise 260 par 2, ce qui donne 130, puis on ajoute 10 pour obtenir 140.
Le 3e terme est égal à 140.
Pour obtenir le 4e terme, on divise 140 par 2, ce qui donne 70, puis on ajoute 10 pour obtenir 80.
Le 4e terme est égal à 80.
Réponse: (E)

15. Lorsque la lettre  est réfléchie par rapport à la droite 1, on obtient la figure  .
Lorsque cette figure est réfléchie par rapport à la droite 2, on obtient la figure  .
Réponse: (D)

16. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABD, on a $BD^2 + 16^2 = 20^2$, ou $BD^2 + 256 = 400$, d'où $BD^2 = 144$. Donc $BD = 12$.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BDC, on a $BC^2 = 12^2+5^2$, ou $BC^2 = 144+25$. Donc $BC^2 = 169$, d'où $BC = 13$.
Réponse: (A)

17. Puisque $10^x - 10 = 9990$, alors $10^x = 10\,000$.
Donc $x = 4$, puisque $10\,000$ se termine par 4 zéros.
Réponse: (D)

18. Puisque le carré a un périmètre de 24, ses côtés mesurent $\frac{1}{4} \times 24$, ou 6.
L'aire du carré est donc égale à 6^2, ou 36.
Puisque le rectangle a la même aire, soit 36, et une largeur de 4, il a une longueur de $\dfrac{36}{4}$, ou 9.
Le rectangle a donc un périmètre de $4 + 9 + 4 + 9$, ou 26.
Réponse: (A)

19. *Solution 1*
On peut écrire toutes les façons de s'asseoir en utilisant la première lettre de chaque nom et en se rappelant qu'il y a deux façons pour Dominique et Émilie de s'asseoir ensemble :

DEBC, DECB, EDBC, EDCB, BDEC, CDEB, BEDC, CEDB, BCDE, CBDE, BCED, CBED

Il y a 12 façons d'asseoir les quatre amies.

Solution 2
Puisque Dominique et Émilie doivent s'asseoir ensemble, on peut les combiner en une personne, qu'on appellera Dominique ou Émilie, selon l'ordre dans lequel elles s'asseoient. On combine aussi leurs sièges.
On cherche maintenant le nombre de façons d'asseoir Béatrice, Carla et Dominique et le nombre de façons d'asseoir Béatrice, Carla et Émilie.
Puisqu'il y a 3 personnes, il y a 3 façons de choisir la personne qui s'assoit à gauche. Pour chacun de ces choix, il y a 2 façons de choisir la personne qui s'assoit à sa droite. La personne qui reste s'assoit à l'extrême droite. Il y a donc 3×2, ou 6 façons d'asseoir 3 personnes dans 3 sièges.
Il y a donc 6 façons d'asseoir Béatrice, Carla et Dominique et 6 façons d'asseoir Béatrice, Carla et Émilie, pour un total de 12 façons.

RÉPONSE: (C)

20. On nomme les sept cases pour faciliter la communication.

$$\begin{array}{cccc} & & \boxed{A} & \boxed{B} \\ + & & \boxed{C} & \boxed{D} \\ \hline & \boxed{E} & \boxed{F} & \boxed{G} \end{array}$$

Puisqu'on additionne deux nombres de deux chiffres, la somme doit être inférieure à 200 ; donc, E doit être égal à 1. (Il ne peut être égal à 0, puisque la somme compte trois chiffres.)

Où peut-on placer le chiffre 0 ?
Puisqu'aucun des nombres ne peut commencer par 0, alors ni A, ni C n'est égal à 0.
Puisque les sept chiffres sont différents, alors ni B, ni D n'est égal à 0, sinon D et G, ou bien B et G, seraient identiques.
Donc, F ou G est égal à 0.

Puisqu'on additionne deux nombres de deux chiffres et que la somme est supérieure à 100, alors $A + C$ doit être supérieur ou égal à 9. (Il pourrait être égal à 9 s'il y avait une retenue dans l'addition des chiffres des unités.)
Donc, A et C doivent prendre les valeurs suivantes dans un ordre quelconque : 3 et 6, ou 4 et 5, ou 4 et 6, ou 5 et 6.

Si G est égal à 0, alors B et D doivent égaler 4 et 6, ou 6 et 4. Or dans ce cas, les plus grandes valeurs possibles de A et de C sont 3 et 5, ou 5 et 3, et ces valeurs ne figurent pas parmi les possibilités énumérées ci-dessus.
Donc, G ne peut pas être égal à 0. Donc $F = 0$.

$$\begin{array}{rccc} & & \boxed{A} & \boxed{B} \\ + & & \boxed{C} & \boxed{D} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{G} \end{array}$$

On sait que la somme de A et de C est égale à 9 ou à 10 et que A et C doivent prendre les valeurs suivantes dans un ordre quelconque : 3 et 6, ou 4 et 5, ou 4 et 6.
Dans chacun de ces cas, les valeurs possibles qui restent pour B et D sont trop petites pour donner une retenue.
Il faut donc que A et C aient une somme de 10. Donc, A et C prennent les valeurs 4 et 6, ou 6 et 4.
On examine ce qui arrive si $A = 4$ et $C = 6$.

$$\begin{array}{rccc} & & \boxed{4} & \boxed{B} \\ + & & \boxed{6} & \boxed{D} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{G} \end{array}$$

Les autres chiffres sont 2, 3 et 5. Pour que l'addition soit juste, il faut que B et D prennent les valeurs 2 et 3 et que G soit égal à 5. (On peut vérifier que B et D peuvent prendre ces valeurs dans un ordre ou l'autre ; on peut aussi vérifier que l'on peut aussi avoir $A = 6$ et $C = 4$.)

Donc, le chiffre des unités de la somme est égal à 5, comme dans cet exemple :

$$\begin{array}{rccc} & & \boxed{4} & \boxed{2} \\ + & & \boxed{6} & \boxed{3} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{5} \end{array}$$

(Remarquer qu'il est possible d'en arriver à cette réponse par tâtonnements au lieu de suivre une méthode logique.)

Réponse: (D)

21. *Solution 1*

Si Nathalie avait 9 pièces de 25 cents, 3 pièces de 10 cents et 1 pièce de 5 cents, elle aurait un total de $(9 \times 25 + 3 \times 10 + 5)$ cents, soit 260 cents, ou 2,60 \$.
Puisque les nombres de chaque pièce forment ce même rapport, soit 9 : 3 : 1, il lui est possible de partager ses pièces dans des ensembles de 9 pièces de 25 cents, 3 pièces de 10 cents et 1 pièce de 5 cents, chaque ensemble ayant la valeur de 2,60 \$.
Puisque ses pièces de monnaie ont une valeur totale de 18,20 \$ et que $\dfrac{18{,}20}{2{,}60} = 7$, elle peut former 7 ensembles.
Puisque chaque ensemble contient 7 pièces de monnaie, elle a 7×13 pièces, ou 91 pièces en tout.

Solution 2

Supposons que Nathalie a n pièces de 5 cents. Puisque le rapport du nombre de pièces de 25 cents au nombre de pièces de 10 cents au nombre de pièces de 5 cents est égal à 9 : 3 : 1, alors elle doit avoir $3n$ pièces de 10 cents et $9n$ pièces de 25 cents.
La valeur totale de ces pièces de monnaie, en cents, est égale à $(9n \times 25) + (3n \times 10) + (n \times 5)$, ou $260n$.

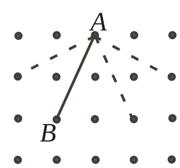
Or, on sait que la valeur totale des pièces est égale à 1820 cents. Donc $260n = 1820$, d'où $n = 7$. Nathalie a donc 7 pièces de 5 cents, 21 pièces de 10 cents et 63 pièces de 25 cents pour un total de 91 pièces de monnaie.

Réponse: (D)

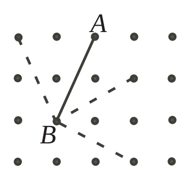
22. Disons que les 8 premières personnes se nomment A, B, C, D, E, F, G et H.
A donne la main aux 7 autres personnes ; B donne la main à 6 personnes (à C, D, E, F, G et H, car il a déjà donné la main à A) ; C donne la main à 5 personnes (à D, E, F, G et H, car il a déjà donné la main à A et à B) ; D donne la main à 4 personnes (à E, F, G et H) ; E donne la main à 3 personnes (à F, G et H) ; F donne la main à 2 personnes (à G et H) ; G donne la main à 1 personne (à H). H a déjà donné la main aux 7 autres personnes.
Avant que la 9^{e} personne n'arrive, le nombre de poignées de main est donc égal à
$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$, ou 28.
Puisqu'il y a un total de 32 poignées de main en tout et que $32 - 28 = 4$, la 9^{e} personne a donné la main à 4 personnes.

Réponse: (B)

23. De combien de façons peut-on choisir le point C de manière que $AB = AC$?
Pour se rendre de A à B, on se déplace de 1 unité dans une direction et de 2 unités dans une direction perpendiculaire.
Pour choisir C de manière que $AB = AC$, il faut se rendre de A à C en se déplaçant de 1 unité dans une direction et de 2 unités dans une direction perpendiculaire.
Il y a alors 3 positions possibles pour le point C :



De combien de façons peut-on choisir le point C de manière que $BA = BC$?
Pour choisir C de manière que $BA = BC$, il faut se rendre de B à C en se déplaçant de 1 unité dans une direction et de 2 unités dans une direction perpendiculaire.
Il y a alors 3 positions possibles pour le point C :



On a trouvé 6 positions possibles à date et le plus grand choix possible est 6.
La réponse doit donc être 6.
(On devrait aussi chercher des positions de C de manière que $CA = CB$. On peut vérifier qu'il n'y en a pas.)

Réponse: (A)

24. Dans la ligne 1, chaque case est ombrée.
Dans la ligne 2, les cases sont ombrées lorsque le numéro de leur colonne est un multiple de 2.
Dans la ligne 3, les cases sont ombrées lorsque le numéro de leur colonne est un multiple de 3.
Dans la ligne n, les cases sont ombrées lorsque le numéro de leur colonne est un multiple de n.
Si on examine une colonne en particulier, une case est ombrée si le numéro de sa ligne est un diviseur du numéro de la colonne.
(On peut le vérifier : Dans la colonne 4, les cases des lignes 1, 2 et 4 sont ombrées. Dans la colonne 6, les cases des lignes 1, 2, 3 et 6 sont ombrées.)

Pour déterminer le numéro de la colonne qui contient le plus grand nombre de cases ombrées, il faut déterminer la colonne dont le numéro admet le plus grand nombre de diviseurs.
Pour déterminer les diviseurs d'un nombre comme 144, il est plus facile de l'écrire d'abord en factorisation première.
Pour le faire, on écrit $144 = 16 \times 9 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$.
On voit que les diviseurs de 144 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72 et 144. Il y en a 15.
De même, on a $120 = 2^2 \times 3 \times 5$ et on voit que les diviseurs de 120 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60 et 120. Il y en a 16.
On a $150 = 2 \times 3 \times 5^2$. Les diviseurs de 150 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75 et 150. Il y en a 12.
On a $96 = 2^5 \times 3$. Les diviseurs de 96 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48 et 96. Il y en a 12.
On a $100 = 2^2 \times 5^2$. Les diviseurs de 100 sont 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 et 100. Il y en a 9.
Le nombre qui admet le plus grand nombre de diviseurs est 120. C'est donc la colonne 120 qui contient le plus grand nombre de cases ombrées.

Réponse: (B)

25. Il reste à placer les nombres 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 et 19.
On considère d'abord les nombres dans les coins, car ils ont le moins de voisins.
On considère 25 dans le coin. Il doit être la somme de deux de ses voisins. Il doit donc être égal à 24+1 ou à 9+16. Puisque le 1 a déjà été placé, la case vide au-dessus du 25 doit donc contenir 16.

On considère ensuite 21 dans un autre coin. Il doit être égal à $20 + 1$ ou à $4 + 17$. Puisque le 1 a déjà été placé, la case vide en dessous de 21 doit contenir 17.

			20	21
	6	5	4	17
23	7	1	3	?
16	9	8	2	
25	24			22

Puisque 17 doit être égal à la somme de deux voisins, il doit être égal à $4 + 13$ ou à $3 + 14$ et le « ? » doit être égal à 13 ou à 14.

On considère 22 dans un autre coin. Puisque le 20 est déjà placé, alors 22 ne peut être égal à $2 + 20$. Donc, 22 est égal à la somme de ses deux voisins dans les cases vides.
Puisque seuls les nombres 10, 11, 12, 13, 14, 15 et 18 n'ont pas été placés, les deux voisins doivent être 10 et 12 dans un ordre quelconque.
Or, le 10 ne peut pas être placé au-dessus du 22, car il ne serait pas égal à la somme de deux voisins (le 7 et le 8 étant déjà placés).
Donc, la case au-dessus du 22 contient un 12.

			20	21
	6	5	4	17
23	7	1	3	?
16	9	8	2	12
25	24		10	22

Or, le « ? » ne peut pas être égal à 13, parce que 13 n'est pas la somme de deux des nombres 17, 4, 3, 2 et 12.
Donc, 14 prend la place du « ? ».

On a terminé, mais on peut vérifier que la grille sera remplie comme suit :

19	11	15	20	21
13	6	5	4	17
23	7	1	3	14
16	9	8	2	12
25	24	18	10	22

Réponse: (C)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et un informatique

Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

Concours Gauss 2005

(7^{e} et 8^{e} années – Secondaire I et II)

Le mercredi 11 mai 2005

Solutions

Personnel du Concours canadien de mathématiques

Barry Ferguson (directeur)
Ed Anderson
Lloyd Auckland
Peter Crippin
Mike Eden
Judy Fox
Judith Koeller
Joanne Kursikowski
Angie Lapointe
Matthew Oliver
Larry Rice
Linda Schmidt
Kim Schnarr
Carolyn Sedore
Ian VanderBurgh

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), St. John's Ravenscourt School, Winnipeg, MB
Sandy Emms Jones (présidente adjointe), Forest Heights C. I., Kitchener, ON
Ed Barbeau, Toronto, ON
Kevin Grady, Cobden District P. S., Cobden, ON
Joanne Halpern, Toronto, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, N.-B.
Paul Ottaway, Halifax, N.-É.
Gerry Stephenson, St. Thomas More C. S. S., Hamilton, ON

7e année

1. On simplifie en commençant par le numérateur : $\dfrac{3 \times 4}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$.

Réponse: (B)

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

2. On a : $0{,}8 - 0{,}07 = 0{,}80 - 0{,}07 = 0{,}73$.

Réponse: (E)

3. La flèche indique un endroit à peu près à mi-chemin entre 9,6 et 9,8. Elle indique donc 9,7.

Réponse: (C)

4. Douze millions s'écrit 12 000 000 et douze mille s'écrit 12 000. La somme des deux nombres est donc égale à 12 012 000.

Réponse: (A)

5. Pour déterminer le plus grand nombre, on examine d'abord le chiffre des dixièmes. Quatre des nombres ont le chiffre 1 et un nombre a le chiffre 2. Donc, 0,2 est le plus grand.

Réponse: (B)

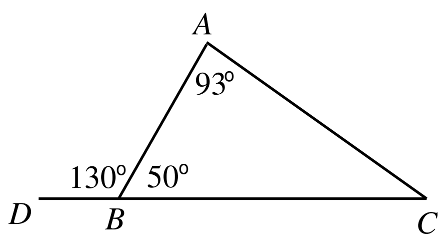
6. Puisque la probabilité de choisir un livre est égale à $\frac{2}{3}$, alors $\frac{2}{3}$ des 27 prix sont des livres. Or, $\frac{2}{3}$ de 27 est égal à 18. Il y a donc 18 livres dans le sac.

Réponse: (E)

7. La forme décimale de 83 % est 0,83. Donc 83 % de 1 480 000 est égal à $0{,}83 \times 1\,480\,000$, c'est-à-dire à 1 228 400. Donc, 1 228 400 personnes ont voté pour Lina.

Réponse: (B)

8. Puisque les angles ABD et ABC sont supplémentaires, alors $\angle ABD + \angle ABC = 180^\circ$, d'où $\angle ABC = 50^\circ$. Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, alors $\angle ACB = 180^\circ - 93^\circ - 50^\circ$. Donc $\angle ACB = 37^\circ$.



Réponse: (B)

9. Il y a six rangées dont le numéro est impair, soit les rangées 1, 3, 5, 7, 9 et 11.
Ces six rangées ont un total de 6×15 sièges, soit 90 sièges.
Il y a cinq rangées dont le numéro est pair, soit les rangées 2, 4, 6, 8 et 10.
Ces cinq rangées ont un total de 5×16 sièges, soit 80 sièges.
Il y a donc $90 + 80$ sièges, soit 170 sièges dans le cinéma.

Réponse: (D)

10. Lorsqu'il est 17 h 36 à St-Jean, il est 90 minutes plus tôt à L'Orignal, c'est-à-dire $1\frac{1}{2}$ heure plus tôt. Il est donc 16 h 06 à L'Orignal.
Lorsqu'il est 16 h 06 à L'Orignal, il est 3 h plus tôt à Whitehorse. Il est donc 13 h 06 à Whitehorse.

Réponse: (A)

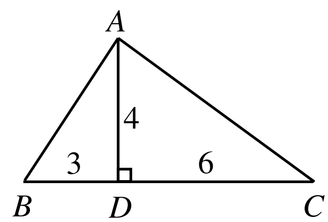
11. Chaque jour, l'étendue de la température est égale à la différence entre la température maximale et la température minimale.
Lundi, l'étendue est égale à 6 °C−(−4 °C), soit 10 °C.
Mardi, l'étendue est égale 3 °C−(−6 °C), soit 9 °C.
Mercredit, l'étendue est égale 4 °C−(−2 °C), soit 6 °C.
Jeudi, l'étendue est égale 4 °C−(−5 °C), soit 9 °C.
Vendredi, l'étendue est égale 8 °C−0 °C, soit 8 °C.
On a obtenu la plus grande étendue de température le lundi.

Réponse: (A)

12. Du 1er mai à midi au 8 mai à midi, il y a 7 jours. Puisque la plante pousse de 105 cm par jour, elle a poussé de 7×105 cm, c'est-à-dire de 735 cm, ou de 7,35 m.
Le 8 mai à midi, la plante mesurait donc 2 m + 7,35 m, c'est-à-dire 9,35 m.

Réponse: (E)

13. Puisque DC est deux fois plus long que BD et que $BD = 3$, alors $DC = 6$.



Le triangle ABC a donc une base de 9 et une hauteur de 4.
Son aire est égale à $\frac{9\times4}{2}$, c'est-à-dire à 18.

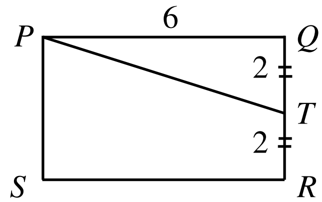
Réponse: (D)

14. *Solution 1*
Puisque les numéros sur les faces opposées d'un dé ont toujours une somme de 7, les numéros 1 et 6 sont sur des faces opposées, les numéros 2 et 5 sont sur des faces opposées, de même que les numéros 3 et 4.
Sur le 1er dé, on voit les numéros 2, 3 et 6. Ses faces cachées ont donc les numéros 5, 4 et 1.
Sur le 2e dé, on voit les numéros 1, 4 et 5. Ses faces cachées ont donc les numéros 6, 3 et 2.
La somme des numéros sur les faces cachées des deux dés est donc égale à $1+4+5+6+3+2$, c'est-à-dire à 21.

Solution 2
La somme des numéros sur un dé est égale à $1+2+3+4+5+6$, c'est-à-dire à 21.
La somme des numéros sur les deux dés est donc égale à 2×21, c'est-à-dire à 42.
Puisque les numéros sur les six faces visibles ont une somme de 21, la somme des numéros sur les faces cachées est égale à $42 - 21$, c'est-à-dire à 21.

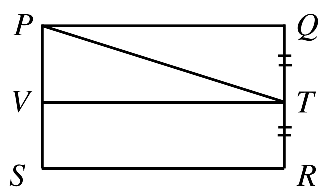
Réponse: (C)

15. *Solution 1*
Puisque le rectangle $PQRS$ a une aire de 24, on suppose que $PQ = 6$ et que $QR = 4$.
Puisque $TQ = TR$, alors $TQ = 2$.



Le triangle PQT a une base de 6 et une hauteur de 2.
Son aire est égale à $\frac{6 \times 2}{2}$, c'est-à-dire à 6.
L'aire du quadrilatère $PTRS$ est égale à celle du rectangle moins celle du triangle. Elle est donc égale à $24 - 6$, c'est-à-dire à 18.

Solution 2
Au point T, on trace un segment TV parallèle au côté PQ.
Puisque T est le milieu du côté QR, V est le milieu du côté PS.
L'aire du rectangle $PQTV$ est donc la moitié de l'aire du rectangle $PQRS$. Elle est donc égale à 12.



De même, l'aire du rectangle $RSVT$ est égale à 12.
Puisque la diagonale PT du rectangle $PQTV$ coupe le rectangle en deux triangles congrus, le triangle PTV a une aire de 6.
L'aire du quadrilatère $PTRS$ est égale à celle du rectangle $RSVT$ plus celle du triangle PTV. Elle est donc égale à $12 + 6$, c'est-à-dire à 18.

Réponse: (A)

16. Nicolas a dormi pendant une heure et demie, c'est-à-dire pendant 90 minutes.
Puisque trois brebis traversent le chemin à toutes les minutes, alors 90×3 brebis, c'est-à-dire 270 brebis ont traversé le chemin pendant son sommeil.
Donc, un total de $(42+270)$ brebis, c'est-à-dire 312 brebis avaient traversé la route lorsqu'il s'est réveillé. Puisque cela représente la moitié du troupeau, il y a 2×312 brebis, c'est-à-dire 624 brebis dans le troupeau.

Réponse: (D)

17. *Solution 1*
Pour calculer la valeur du symbole, on additionne le produit des nombres dans chaque diagonale. Or le produit des nombres 6 et 1 d'une diagonale est égal à 6.
Puisque le symbole a une valeur de 16, le produit des nombres de l'autre diagonale est égal à 10.
Or, un des nombres de cette diagonale est 2. L'autre nombre doit donc être 5.

Solution 2
Soit x le nombre qui devrait paraître dans la case vide. D'après la définition, on sait que $2\times x + 6\times 1$ est égal à 16. Donc $2x + 6 = 16$, d'où $2x = 10$ et $x = 5$.

Réponse: (E)

18. Lorsqu'on jette un dé, il y a six résultats possibles, soit 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Ils ont la même probabilité.
Pour que le jeu soit juste, la moitié des résultats possibles doivent être des résultats gagnants.
Dans le 1^{er} jeu, on gagne si on obtient un 2. Ce jeu n'est pas juste.
Dans le 2^{e} jeu, on gagne si on obtient un 2, un 4 ou un 6. Ce jeu est juste.
Dans le 3^{e} jeu, on gagne si on obtient un 1, un 2 ou un 3. Ce jeu est juste.
Dans le 4^{e} jeu, on gagne si on obtient un 3 ou un 6. Ce jeu n'est pas juste.
Donc, deux des jeux sont justes.

Réponse: (C)

19. À chaque distance qui sépare Carl et Pat, le ballon est lancé deux fois.
Les 1^{er} et 2^{e} lancers se font à une distance de 1 m, les 3^{e} et 4^{e} se font à une distance de 2 m, ainsi de suite. Les 27^{e} et 28^{e} lancers se font à une distance de 14 m.
Donc, le 29^{e} lancer est fait à une distance de 15 m. Les lancers impairs sont faits par Pat. C'est donc Carl qui n'a pas réussi à attraper le ballon au 29^{e} lancer, à une distance de 15 m.

Réponse: (A)

20. Puisque la voiture roule à 80 km/h, elle parcourt 80 000 m en une heure.
Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure, la voiture parcourt $\frac{1}{60} \times 80\,000$ km en une minute.
Puisqu'il y a 60 secondes dans une minute, la voiture parcourt $\frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times 80\,000$ km par seconde.
En 4 secondes, la voiture parcourt donc $4 \times \frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times 80\,000$ m, soit environ 88,89 m.
Parmi les choix possible, la distance la plus appropriée est de 90 m.

Réponse: (E)

21. Puisque le prix est réduit de 10 % à toutes les 15 minutes, il est multiplié par 90 %, ou par 0,9 à toutes les 15 minutes.
À 9 h 15, le prix est de 9 $.
À 9 h 30, le prix est de $0{,}9 \times 9{,}00$ $, soit de 8,10 $.
À 9 h 45, le prix est de $0{,}9 \times 8{,}10$ $, soit de 7,29 $. Le prix est passé à moins de 8 $ à 9 h 45.
Émilie achète donc le tapis à 9 h 45.

Réponse: (A)

22. *Solution 1*
On suppose qu'il y a 20 oranges. (On choisit 20, car le rapport du nombre de pommes au nombre d'oranges est de 1 : 4 et le rapport du nombre d'oranges au nombre de citrons est de 5 : 2. On veut donc un nombre d'oranges qui est divisible par 4 et par 5.)
Puisque le rapport du nombre de pommes au nombre d'oranges est de 1 : 4, on peut former 1 groupe de pommes et 4 groupes d'oranges. Puisqu'il y a 20 oranges, il y a 5 oranges par groupe. Il y a donc 1 groupe de 5 pommes.
Puisque le rapport du nombre d'oranges au nombre de citrons est de 5 : 2, on peut former 5 groupes d'oranges et 2 groupes de citrons. Puisqu'il y a 20 oranges, il y a 4 oranges par groupe. Il y a donc 2 groupes de 4 citrons, soit 8 citrons.

Le rapport du nombre de pommes au nombre de citrons est donc de 5 : 8.

Solution 2
Soit x le nombre de pommes.
Puisque le rapport du nombre de pommes au nombre d'oranges est de 1 : 4, le nombre d'oranges est égal à $4x$.
Puisque le rapport du nombre d'oranges au nombre de citrons est de 5 : 2, le nombre de citrons est égal à $\frac{2}{5} \times 4x$, c'est-à-dire à $\frac{8}{5}x$.
Le rapport du nombre de pommes au nombre de citrons est donc égal à $x : \frac{8}{5}x$, c'est-à-dire à $1 : \frac{8}{5}$, ou 5 : 8.

Réponse: (C)

23. *Solution 1*
Puisque 4 □ peuvent équilibrer 2 ○, alors 1 □ peut équilibrer $\frac{1}{2}$ ○.
De même, 1 △ peut équilibrer $1\frac{1}{2}$ ○.
1 △, 1 ○ et 1 □ peuvent donc équilibrer $\frac{1}{2}$ ○ + 1 ○ + $1\frac{1}{2}$ ○, ou 3 ○.
On convertit chacun des choix de réponse en nombre équivalent de ○ :
(**A**) : $1\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 3$
(**B**) : $3 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 1\frac{1}{2} = 3$
(**C**) : $2 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 3$
(**D**) : $2 \times \left(1\frac{1}{2}\right) + 1 = 4$
(**E**) : $1 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 3$
Donc, l'ensemble de 2 △ et 1 ○ ne peut être mis en équilibre avec 1 △, 1 ○ et 1 □ .

Solution 2
Puisque 4 □ peuvent équilibrer 2 ○, alors 1 ○ peut équilibrer 2 □.
Donc, 3 ○ peuvent équilibrer 6 □. Or, puisque 3 ○ peuvent équilibrer 2 △, alors 6 □ peuvent équilibrer 2 △. On peut donc conclure que 1 △ peut équilibrer 3 □.
On peut donc exprimer chaque groupe en fonction de □.
(**A**) : 1 △, 1 ○ et 1 □ peuvent équilibrer 3 □ + 2 □ + 1 □, soit 6 □.
(**B**) : 3 □ et 1 △ peuvent équilibrer 3 □ + 3 □, soit 6 □.
(**C**) : 2 □ et 2 ○ peuvent équilibrer 2 □ + 4 □, soit 6 □.
(**D**) : 2 △ et 1 ○ peuvent équilibrer 6 □ + 2 □, soit 8 □.
(**E**) : 1 ○ et 4 □ peuvent équilibrer 2 □ + 4 □ soit 6 □.
Donc, 2 △ et 1 ○ ne peuvent être mis en équilibre avec 1 △, 1 ○ et 1 □.

Solution 3
On attribue une masse à chaque forme.
Puisque 3 ○ peuvent équilibrer 2 △, on suppose que 1 ○ pèse 2k et que 1 △ pèse 3 kg.
Puisque 4 □ peuvent équilibrer 2 ○ qui pèsent 4 kg, alors 1 □ pèse 1 kg.
On évalue la masse de chaque choix.
(**A**) : 1 △, 1 ○ et 1 □ ont une masse de $(3 + 2 + 1)$ kg, c'est-à-dire 6 kg.
(**B**) : 3 □ et 1 △ ont une masse de $(3 + 3)$ kg, c'est-à-dire 6 kg.
(**C**) : 2 □ et 2 ○ ont une masse de $(2 + 4)$ kg, c'est-à-dire 6 kg.
(**D**) : 2 △ et 1 ○ ont une masse de $(6 + 2)$ kg, c'est-à-dire 8 kg.
(**E**) : 1 ○ et 4 □ ont une masse de $(2 + 4)$ kg, c'est-à-dire 6 kg.
Donc, 2 △ et 1 ○ ne peuvent être mis en équilibre avec 1 △, 1 ○ et 1 □.

Réponse: (D)

24. Puisque Alphonse et Blandine se croisent toujours aux mêmes trois endroits sur la piste et que chacun court à une vitesse constante, les trois endroits doivent être également éloignés l'un de l'autre sur la piste. Les points de rencontre séparent donc la piste en trois arcs de même longueur. On suppose que Blandine est plus rapide qu'Alphonse. On considère un point de rencontre et on imagine les deux coureurs qui se rencontrent au point suivant. Puisque Blandine est plus rapide et que les points de rencontre séparent la piste en trois longueurs égales, Blandine doit parcourir $\frac{2}{3}$ de la piste pendant qu'Alphonse en parcourt $\frac{1}{3}$ dans le sens opposé.
Puisque Blandine parcourt deux fois plus de terrain qu'Alphonse dans le même temps, elle court deux fois plus vite que lui. Le rapport de leur vitesse est de 2 : 1.

Réponse: (D)

25. *Solution 1*
On cherche des combinaisons de 48 pièces de monnaie pour une valeur totale de 100 cents.
Puisque la valeur totale est un multiple de 5 cents, et que la valeur des pièces de 5 cents, des pièces de 10 cents et des pièces de 25 cents est toujours un multiple de 5 cents, le nombre de pièces de 1 cent doit toujours être un multiple de 5.

Le nombre de pièces de 1 cent peut donc être égal à 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 ou 45.
Puisqu'il ya a 48 pièces de monnaie en tout, il est impossible d'avoir moins de 35 pièces de 1 cent. (Par exemple, s'il y avait 30 pièces de 1 cent, il y aurait 18 autres pièces valant chacune au moins 5 cents, pour un total de 90 cents et les 48 pièces auraient une valeur de plus de 100 cents.)

Il est impossible d'avoir 3 ou 4 pièces de 25 cents, autrement les 44 ou 45 autres pièces, qui auraient une valeur d'au moins 44 cents, porteraient la valeur totale des pièces à plus de 100 cents. Il suffit donc de considérer 0, 1 ou 2 pièces de 25 cents.

<u>1$^{\text{er}}$ cas</u> : 2 pièces de 25 cents
On a donc 46 autres pièces qui ont une valeur de 50 cents.
On doit donc avoir 45 pièces de 1 cent et 1 pièce de 5 cents.

<u>2$^{\text{e}}$ cas</u> : 1 pièce de 25 cents
On a donc 47 autres pièces qui ont une valeur de 75 cents.
On doit donc avoir 40 pièces de 1 cent et 4 pièces de 5 cents.

<u>3$^{\text{e}}$ cas</u> : 0 pièce de 25 cents
On a donc 48 pièces qui ont une valeur de 100 cents.
Si on a 35 pièces de 1 cent, il faut aussi 13 pièces de 5 cents.
Si on a 40 pièces de 1 cent, il faut aussi 4 pièces de 10 cents et 4 pièces de 5 cents.
On ne peut avoir 45 pièces de 1 cent, car il faudrait 3 pièces de 10 cents ou de 5 cents qui valent 55 cents.

Il y a donc 4 combinaisons différentes de pièces de monnaie de manière que 48 pièces aient une valeur de 1,00 $.

Solution 2
On cherche des combinaisons de 48 pièces de monnaie pour une valeur totale de 100 cents.
Puisque la valeur totale est un multiple de 5 cents, et que la valeur des pièces de 5 cents, des pièces de 10 cents et des pièces de 25 cents est toujours un multiple de 5 cents, le nombre de

pièces de 1 cent doit toujours être un multiple de 5.

Peut-il y avoir 5 pièces de 1 cent ? Si c'est oui, les 43 autres pièces de monnaie valent un total de 95 cents. Or, chacune de ces autres pièces vaut au moins 5 cents, pour une valeur totale d'au moins 43×5 cents, c'est-à-dire 215 cents, ce qui est impossible. Il ne peut donc pas y avoir 5 pièces de 1 cent. Peut-il y avoir 10 pièces de 1 cent ? Si c'est oui, les 38 autres pièces de monnaie valent un total de 90 cents. Or, chacune de ces autres pièces vaut au moins 5 cents, pour une valeur totale d'au moins 38×5 cents, c'est-à-dire 190 cents, ce qui est impossible. Il ne peut donc pas y avoir 10 pièces de 1 cent.

On continue de cette manière pour démontrer qu'il ne peut y avoir 15, 20, 25 ou 30 pièces de 1 cent.

S'il y a 35 pièces de 1 cent, alors les 13 autres pièces ont une valeur totale de 65 cents. Puisque chacune des autres pièces vaut au moins 5 cents, on doit avoir 13 pièces de 5 cents. On a donc une combinaison de 35 pièces de 1 cent et 13 pièces de 5 cents.

S'il y a 40 pièces de 1 cent, les 8 autres pièces ont une valeur totale de 60 cents.
On considère les nombres possibles de pièces de 25 cents.
S'il n'y a aucune pièce de 25 cents, on doit avoir 8 pièces de 5 cents ou de 10 cents qui ont une valeur totale de 60 cents. Si les 8 pièces étaient des pièces de 5 cents, elles auraient une valeur de 40 cents, ce qui nous laisserait 20 cents de court. En changeant 4 pièces pour des pièces de 10 cents, on augmenterait la valeur de 20 cents. On a donc une combinaison acceptable, soit 40 pièces de 1 cent, 4 pièces de 5 cents et 4 pièces de 10 cents.
S'il y a 1 pièce de 25 cents, on doit avoir 7 pièces de 5 cents ou de 10 cents qui ont une valeur de 35 cents. Il faut donc avoir 7 pièces de 5 cents. On a donc une combinaison acceptable, soit 40 pièces de 1 cent, 1 pièce de 25 cents et 7 pièces de 5 cents.
S'il y a 2 pièces de 25 cents, on doit avoir 6 pièces de 5 cents ou de 10 cents qui ont une valeur de 10 cents, ce qui est impossible.
On ne peut avoir plus de 2 pièces de 25 cents, car la valeur totale des pièces de 1 cent et de 25 cents égalerait au moins 115 cents.

S'il y a 45 pièces de 1 cent, les 3 autres pièces ont une valeur totale de 55 cents. Il doit y avoir au moins deux pièces de 25 cents, sinon on aurait au plus 25 cents + 10 cents + 10 cents, c'est-à-dire 45 cents. La dernière pièce doit donc valoir 5 cents. On a donc une combinaison acceptable, soit 45 pièces de 1 cent, 2 pièces de 25 cents et 1 pièce de 5 cents.

Il y a donc 4 combinaisons différentes de pièces de monnaie de manière que 48 pièces aient une valeur de 1,00 $.

Réponse: (B)

8e année

1. On utilise un dénominateur commun : $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$ est égal à $\frac{2}{8}+\frac{3}{8}$, soit $\frac{5}{8}$.

Réponse: (B)

2. On a : $(-3)(-4)(-1) = (12)(-1) = -12$.

Réponse: (A)

3. Puisque $V = A_{base} \times h$, alors : $V = (4 \times 2) \times 8 = 64 \text{ cm}^3$

Réponse: (C)

4. La moyenne est égale à $\dfrac{6+8+9+11+16}{5}$, c'est-à-dire à $\dfrac{50}{5}$, ou 10.

Réponse: (C)

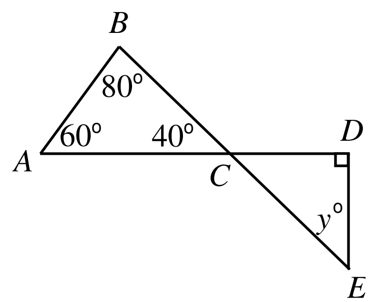
5. 10 % de 10 est égal à un dixième de 10, soit 1.
20 % de 20 est égal à 0,20 × 20 ou $\frac{1}{5} \times 20$, soit 4.
Donc, 10 % de 10, multiplié par 20 % de 2, est égal à 1 × 4, soit 4.

Réponse: (E)

6. On sait que $8210 = 8{,}21 \times 1000$. On doit donc avoir $10^{\square} = 1000$. Le nombre qui va dans la case est donc égal à 3.

Réponse: (C)

7. Puisque la somme de la mesure des angles du triangle ABC est égale à 180°, alors $\angle ACB = 40°$. Puisque les angles ACB et DCE sont opposés par le sommet, alors $\angle DCE = 40°$.



Puisque la somme de la mesure des angles du triangle CDE est égale à 180°, alors $y° = 50°$. Donc $y = 50$.

Réponse: (D)

8. *Solution 1*
Il y a 10 entiers, soit de 30 à 39, dont le chiffre des dizaines est égal à 3.
Il y a 6 entiers, soit 3, 13, 23, 33, 43 et 53, dont le chiffre des unités est égal à 3.
Or, un des entiers, soit 33, fait partie des deux groupes.
Donc, le nombre d'entiers qui ont au moins un chiffre 3 est égal à $10 + 6 - 1$, soit 15.

Solution 2
On écrit les entiers en ordre croissant : 3, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 43 et 53. Il y en a 15.

Réponse: (D)

9. Puisque la moyenne mensuelle de pluie était de 41,5 mm en 2003, elle était de 41,5 mm + 2 mm soit 43,5 mm en 2004. La quantité de pluie en 2004 était donc de $12 \times 43{,}5$ mm, soit 522 mm.

Réponse: (B)

10. Puisque Daniel se promène à une vitesse constante, il a parcouru, en 30 minutes, $\frac{3}{4}$ de la distance parcourue en 40 minutes, soit $\frac{3}{4} \times 24$ km, ou 18 km.

Réponse: (D)

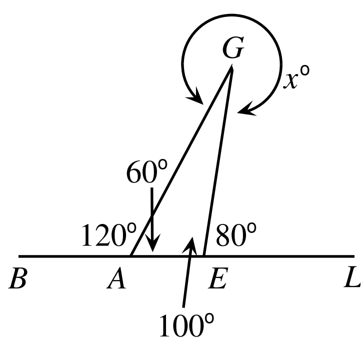
11. Le triangle a une base AB de longueur 25 cm et une hauteur correspondante AC de longueur 20 cm. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(25)(20)$ cm^2, ou 250 cm^2.

Réponse: (E)

12. Pour obtenir la plus grande somme possible, tout en incluant 10 et 12, il faut que 10 et 12 soient les plus petits des cinq nombres. Les cinq nombres sont donc 10, 12, 14, 16 et 18. Ils ont une somme de 70.

Réponse: (E)

13. Puisque les angles BAG et GAE sont supplémentaires, alors $\angle GAE = 60°$. Puisque les angles LEG et GEA sont supplémentaires, alors $\angle GEA = 100°$.



Puisque la somme de la mesure des angles du triangle GAE est égale à 180°, alors $\angle AGE = 20°$. L'angle rentrant de sommet G mesure donc $360° - 20°$, soit 340°. Donc $x = 340$.

Réponse: (A)

14. *Solution 1*
Puisque les cinq numérateurs sont égaux, la plus grande valeur correspond à l'expression dont le dénominateur est le *plus petit*.
Or, chaque dénominateur a la forme $2 + \ldots$ ou $2 - \ldots$ Le plus petit est celui dont on soustrait la plus grande quantité de 2. L'expression qui a la plus grande valeur est donc $\dfrac{4}{2-\frac{1}{2}}$.

Solution 2
On évalue chaque expression.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{2-\frac{1}{4}} &= \frac{4}{\frac{7}{4}} = \frac{16}{7} \approx 2{,}29 \\
\frac{4}{2+\frac{1}{4}} &= \frac{4}{\frac{9}{4}} = \frac{16}{9} \approx 1{,}78 \\
\frac{4}{2-\frac{1}{3}} &= \frac{4}{\frac{5}{3}} = \frac{12}{5} = 2{,}4 \\
\frac{4}{2+\frac{1}{3}} &= \frac{4}{\frac{7}{3}} = \frac{12}{7} \approx 1{,}71 \\
\frac{4}{2-\frac{1}{2}} &= \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67
\end{aligned}$$

L'expression qui a la plus grande valeur est $\frac{4}{2-\frac{1}{2}}$.

RÉPONSE: (E)

15. On utilise $x = 1$ avec chaque équation et on obtient $y = 1{,}5$ dans chaque cas.
On utilise $x = 2$ avec chaque équation.
(**A**) : $y = x + 0{,}5 = 2 + 0{,}5 = 2{,}5$.
(**B**) : $y = 1{,}5x = 1{,}5(2) = 3$.
(**C**) : $y = 0{,}5x + 1 = 0{,}5(2) + 1 = 2$.
(**D**) : $y = 2x - 0{,}5 = 2(2) - 0{,}5 = 3{,}5$.
(**E**) : $y = x^2 + 0{,}5 = 2^2 + 0{,}5 = 4{,}5$.
Seule la deuxième équation donne la même valeur de y que la table, soit $y = 3$.
Si $x = 3$, cette équation donne $y = 1{,}5(3)$, soit $y = 4{,}5$.
Si $x = 4$, cette équation donne $y = 1{,}5(4)$, soit $y = 6$.
La deuxième équation donne les mêmes valeurs de y que la table pour les valeurs correspondantes de x. Elle représente donc la même relation que la table.

RÉPONSE: (B)

16. Si l'étudiante achète 40 billets individuellement, cela lui coûte $40 \times 1{,}50$ \$, soit 60,00 \$.
Si elle les achète en groupes ce cinq, il lui faut $40 \div 5$ groupes, soit 8 groupes, ce qui lui coûte $8 \times 5{,}75$ \$, c'est-à-dire 46,00 \$.
Si elle les achète en groupes de cinq, elle épargne 60,00 \$ $-$ 46,00 \$, soit 14,00 \$.

RÉPONSE: (C)

17. *Solution 1*
On accorde des valeurs particulières à a et à b. Cela nous permet d'éliminer des choix.
On choisit $a = 2$, qui est un nombre pair, et $b = 1$, qui est un nombre impair, et on évalue chaque expression.
$ab = 2 \times 1 = 2$, $a + 2b = 2 + 2(1) = 4$, $2a - 2b = 2(2) - 2(1) = 2$, $a + b + 1 = 2 + 1 + 1 = 4$, et $a - b = 2 - 1 = 1$.
L'expression $a - b$ est la seule qui représente un entier impair.

Solution 2
Puisque a est pair, alors ab est pair, car le produit d'un entier et d'un entier pair est pair.
Puisque a est pair et que $2b$ est pair (c'est le produit d'un entier et d'un entier pair), alors $a+2b$ est pair.
Puisque le produit de 2 et d'un entier est pair, alors $2a$ et $2b$ sont pairs et leur différence, $2a-2b$, est paire.
Puisque a est pair et que b est impair, alors $a+b$ est impair et $a+b+1$ est pair.
Puisque a est pair et que b est impair, alors $a-b$ est impair.
Donc, seule l'expression $a-b$ a une valeur impaire.

Réponse: (E)

18. *Solution 1*
Puisque $100 = 2^2 \times 5^2$, alors la factorisation première de N doit admettre au moins deux facteurs 2 et au moins deux facteurs 5 pour être divisible par 100. Or, selon $N = 2^5 \times 3^2 \times 7 \times \square$, N admet déjà cinq facteurs 2. La case doit donc contenir deux facteurs 5.
Le seul choix de réponse qui contient deux facteurs 5 dans sa factorisation première est 75.
En effet, $75 = 3 \times 5 \times 5$.
On peut vérifier : $2^5 \times 3^2 \times 7 \times 75 = 151\,200$.

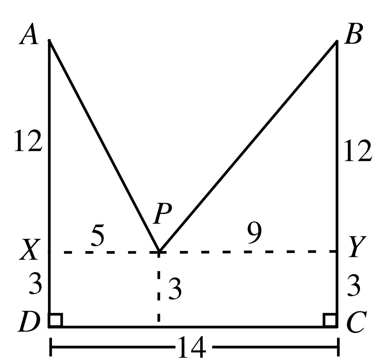
Solution 2
Si on multiplie les facteurs de l'expression $N = 2^5 \times 3^2 \times 7 \times \square$, on obtient $N = 2016 \times \square$.
On évalue N pour chacun des cinq choix :
$2016 \times 5 = 10\,080$, ce qui n'est pas divisible par 100.
$2016 \times 20 = 40\,320$, ce qui n'est pas divisible par 100.
$2016 \times 75 = 151\,200$, ce qui est divisible par 100.
$2016 \times 36 = 72\,576$, ce qui n'est pas divisible par 100.
$2016 \times 120 = 241\,920$, ce qui n'est pas divisible par 100.
Le seul choix acceptable est 75.

Réponse: (C)

19. Dans la figure, B représente à peu près 0,4 et C représente à peu près 0,6. $B \times C$ vaut donc à peu près 0,24. Or, A représente à peu près 0,2. Donc A représente le mieux la valeur de $B \times C$.

Réponse: (A)

20. Les points A, B, C, D et P sont définis comme dans la figure. Au point P, on trace un segment XY parallèle au segment DC, ses extrémités X et Y étant sur les côtés respectifs AD et BC. On a donc $AX = BY = 12$. De plus, $PY = 9$.



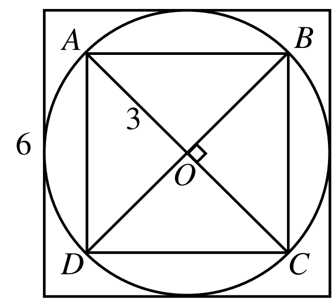
Pour calculer la longueur de la corde, on doit calculer AP et BP, soit la longueur de l'hypoténuse de deux triangles rectangles.
On a donc :

$$\begin{aligned} AP^2 &= 12^2 + 5^2 \\ AP^2 &= 169 \\ AP &= 13 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} BP^2 &= 9^2 + 12^2 \\ BP^2 &= 225 \\ BP &= 15 \end{aligned}$$

La corde a une longueur de 13 m + 15 m, c'est-à-dire de 28 m.

Réponse: (A)

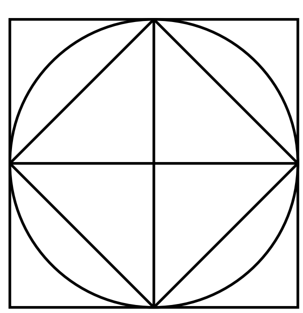
21. *Solution 1*
Puisque le grand carré a une aire de 36, ses côtés ont une longueur de 6.
Le cercle doit donc avoir un diamètre de 6 et un rayon de 3.
On nomme les sommets du petit carré comme dans la figure et on trace les diagonales AC et BD.
Puisque $ABCD$ est un carré, ses diagonales sont perpendiculaires.



Elles se coupent au point O qui, par symétrie, doit être le centre du cercle.
Or, le carré $ABCD$ est divisé en quatre petits triangles rectangles isocèles par les diagonales.

Chacun de ces triangles a une aire égale à $\frac{1}{2}(3)(3)$, c'est-à-dire à $\frac{9}{2}$. L'aire du carré est donc égale à $4 \times \frac{9}{2}$, c'est-à-dire à 18.

Solution 2
On fait subir au petit carré une rotation de 45°, de manière que ses sommets touchent au grand carré. On trace ensuite les diagonales du petit carré. Par symétrie, ces diagonales divisent le grand carré en quatre carrés indentiques ayant la même aire. De plus, les côtés du petit carré sont des diagonales de ces quatre carrés. Ces côtés divisent donc les quatre carrés en triangles congrus.



Le grand carré est formé de 8 triangles congrus, tandis que le petit carré est formé de 4 triangles congrus. Le petit carré occupe donc la moitié de l'espace du grand carré. Son aire est donc égale à la moitié de l'aire du grand carré. Le petit carré a donc une aire de 18.

Réponse: (E)

22. *Solution 1*
Puisque 50 étudiants ont participé au sondage et que 8 étudiants ne pratiquent ni le hockey, ni le base-ball, alors 42 étudiants pratiquent au moins un des sports.
Puisque 33 étudiants pratiquent le hockey, que 24 étudiants pratiquent le base-ball et que $33 + 24 = 57$, alors il doit y avoir 15 étudiants qui ont été comptés deux fois, c'est-à-dire qui pratiquent les deux sports.

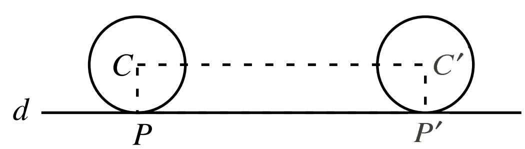
Solution 2
Soit x le nombre d'étudiants qui pratiquent les deux sports.
Le nombre d'étudiants qui pratiquent seulement le hockey est donc égal à $33 - x$ et le nombre d'étudiants qui pratiquent seulement le base-ball est égal à $24 - x$.
On peut partager les étudiants qui ont participé au sondage en quatre groupes, soit ceux qui ne pratiquent aucun sport, ceux qui pratiquent seulement le hockey, ceux qui pratiquent seulement le base-ball et ceux qui pratiquent les deux sports. On a donc :

$$\begin{aligned} 8 + (33 - x) + (24 - x) + x &= 50 \\ 65 - 2x + x &= 50 \\ 65 - x &= 50 \\ 65 - 50 &= x \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Donc, 15 étudiants pratiquent les deux sports.

Réponse: (D)

23. On considère d'abord un point P où la roue touche la droite d. Lorsque la roue fait une révolution complète, le point P bouge jusqu'à P'.



La distance PP' est égale à la circonférence du cercle, soit $\pi \times 2$ m, ou 2π m.
On complète le rectangle $CC'P'P$ et on constate que la distance CC' est égale à la distance PP', soit 2π m.

Réponse: (C)

24. Soit x, y et z les trois entiers positifs.
D'après les renseignements, $(x + y) \times z = 14$ et $(x \times y) + z = 14$.
D'après la première équation, z doit être un diviseur de 14. Il doit donc égaler 1, 2, 7 ou 14.

Si $z = 1$, les équations deviennent $x + y = 14$ et $xy = 13$. D'après cette dermière équation, on doit avoir $x = 1$ et $y = 13$ ou $x = 13$ et $y = 1$. Ces deux solutions vérifient aussi l'équation $x + y = 14$.

Si $z = 2$, les équations deviennent $x + y = 7$ et $xy = 12$. Parmi les solutions de cette dernière équation, deux seules vérifient aussi l'équation $x + y = 7$. On doit avoir $x = 3$ et $y = 4$ ou $x = 4$ et $y = 3$.

Si $z = 7$, les équations deviennent $x + y = 2$ et $xy = 7$. Il n'y a aucune valeur de x et de y qui vérifie ces deux équations. En effect, la première équation n'admet qu'une solution, soit $x = 1$ et $y = 1$, et cette solution ne vérifie pas l'equation $xy = 7$.

Si $z = 14$, les équations deviennent $x + y = 1$ et $xy = 0$. Il n'y a aucune valeur de x et de y qui vérifie ces deux équations. En effet, selon la dernière équation, x ou y doit égaler 0. Or, selon l'énoncé, les entiers doivent être positifs.
Le premier nombre, soit x, peut donc égaler 1, 13, 3 ou 4. Il peut avoir 4 valeurs différentes.

Réponse: (B)

25. Soit n le nombre de pièces de monnaie dans la bourse.
Puisque la valeur moyenne des pièces est de 17 cents, la valeur totale des pièces est égale à $n \times 17$ cents, soit $17n$ cents.
Lorsqu'on enlève une pièce de 1 cent, il reste $n - 1$ pièces. Puisque la valeur moyenne des pièces est alors de 18 cents, la valeur totale de ces pièces est égale à $18(n - 1)$ cents.
Puisqu'on a enlevé une pièce de 1 cent, cette valeur, soit $18(n - 1)$ cents, est 1 cent de moins que $17n$ cents.
On a donc :

$$\begin{aligned} 17n - 1 &= 18(n-1) \\ 17n - 1 &= 18n - 18 \\ n &= 17 \end{aligned}$$

Il y avait donc 17 pièces de monnaie dans la bourse, pour une valeur totale de 289 cents.

Puisque la valeur totale de chaque pièce de monnaie, à l'exception des pièces de 1 cent, doit être un multiple de 5 cents, il doit y avoir au moins 4 pièces de 1 cent.
Si on enlève 4 pièces de 1 cent, il reste 13 pièces qui ont une valeur totale de 285 cents. Ces 13 pièces peuvent être des pièces de 1 cent, de 5 cents, de 10 cents ou de 25 cents.

Combien peut-il y avoir de pièces de 25 cents dans cette collection de 13 pièces ?
Il ne peut pas y en avoir 12, car 12×25 cents $= 300$ cents, ce qui dépasse 285 cents.
S'il y en a 11, pour une valeur de 275 cents, les deux autres pièces doivent avoir une valeur totale de 10 cents. Elles doivent donc être des pièces de 5 cents.
S'il y en a 10, pour une valeur de 250 cents, les trois autres pièces doivent avoir une valeur totale de 35 cents, ce qui est impossible, car elles ne peuvent avoir une valeur totale de plus de 30 cents.
De même, il ne peut pas y avoir moins de 10 pièces de 25 cents.

Dans la bourse, il devait donc y avoir 11 pièces de 25 cents, 2 pièces de 5 cents et 4 pièces de 1 cent.

Réponse: (A)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2004 Solutions

Concours Gauss

(7e et 8e années – Sec. I et II au Québec)

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

Great West Life and London Life

Sybase Inc. (Waterloo)

*i*Anywhere Solutions

Comité exécutif	Barry Ferguson (Directeur), Peter Crippin, Ian VanderBurgh
Directeur des Operations	Barry Ferguson, University of Waterloo
Ordinatique	Steve Breen, University of Waterloo Matthew Oliver, University of Waterloo
Compilateurs du rapport du Concours Gauss	Lloyd Auckland, University of Waterloo Barry Ferguson, University of Waterloo Kim Schnarr, University of Waterloo
Documentation	Linda Schmidt, University of Waterloo
Publications	Linda Schmidt, University of Waterloo
Version française	André Ladouceur, (retired), Ottawa Gérard Proulx, Collège catholique Franco-Ouest, Ottawa
Adjoints à la technique	Joanne Kursikowski, Kim Schnarr
Comité de validation	Ed Anderson, University of Waterloo, Waterloo John Barsby, St. John's-Ravenscourt School, Winnipeg Jean Collins, (retired), Thornhill Tom Griffiths (retired), London Frank Rachich (retired), Woodstock

Comité Gauss

Solutions Gauss 2004

Mark Bredin (Chair)
St. John's-Ravenscourt School
Winnipeg, Manitoba

Richard Auckland
New Sarum Public School
St. Thomas, Ontario

Sandy Emms Jones
(Assoc. Chair)
Forest Heights C.I.
Kitchener, Ontario

Kevin Grady
Cobden Dist. Public School
Cobden, Ontario

Joanne Halpern
Toronto, Ontario

David Matthews
University of Waterloo
Waterloo, Ontario

John Grant McLoughlin
University of New Brunswick
Fredericton, New Brunswick

Paul Ottaway
Halifax, Nova Scotia

Patricia Tinholt
Valley Park Middle School
Don Mills, Ontario

Sue Trew
Holy Name of Mary S.S.
Mississauga, Ontario

Partie A

1. On simplifie : $\frac{10+20+30+40}{10} = \frac{100}{10}$
$= 10$

Réponse : (C)

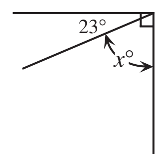
2. On utilise un dénominateur commun : $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} - \frac{1}{8}$
$= \frac{3}{8}$

Réponse : (A)

3. Sept mille vingt-deux est égal à $7000 + 22$ ou 7022.

Réponse : (D)

4. D'après la figure, on a $23^\circ + x^\circ = 90^\circ$. Donc $x^\circ = 67^\circ$ ou $x = 67$.



Réponse : (C)

5. Puisque Sabine avait 7 ans il y a cinq ans, elle a 12 ans aujourd'hui. Dans deux ans, elle aura 14 ans.

Réponse : (B)

6. Sylvain obtient 5 points récompense par tranche de 25 \$ qu'il dépense. Puisque $200 \div 25 = 8$, il y a 8 tranches de 25 \$. Il obtient donc 5×8 ou 40 points récompense.

Réponse : (C)

7. *Solution 1*

Les fractions simplifiées sont $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{6}$ et $\frac{4}{5}$. Il leur manque respectivement $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{5}$ pour compléter une unité. La plus petite de ces fractions est $\frac{1}{9}$. La plus grande des fractions données est donc $\frac{8}{9}$, puisqu'il lui manque le moins pour compléter une unité.

Solution 2

On utilise une calculatrice pour obtenir $\frac{8}{9} = 0{,}888...$, $\frac{7}{8} = 0{,}875$, $\frac{66}{77} = 0{,}857...$, $\frac{55}{66} = 0{,}833...$ et $\frac{4}{5} = 0{,}8$. La plus grande fraction est donc $\frac{8}{9}$.

Réponse : (A)

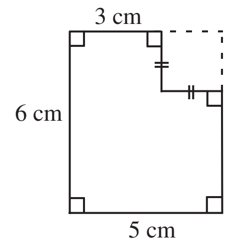
8. Il y a 6 boules dans la boîte. Cinq des boules ne sont pas grises. La probabilité de choisir une boule qui n'est pas grise est donc égale à $\frac{5}{6}$.

Réponse : (E)

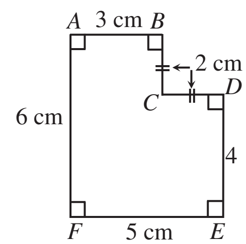
9. D'après la 2e colonne, on a $19+15+11=45$. La somme des nombres dans chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est donc égale à 45. Dans la 1re ligne, on a $14+19=33$. Le 3e nombre de cette ligne est donc 12. Dans une des diagonales, on a $x+15+12=45$, d'où $x=18$.

RÉPONSE : (E)

10. *Solution 1*
Si on complétait la figure pour former un rectangle, le rectangle et la figure initiale auraient le même périmètre. Le périmètre est donc égal à $2\times 5+2\times 6$ ou 22 cm.



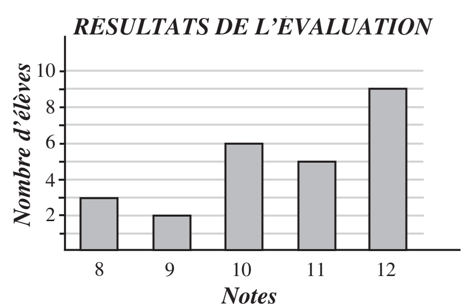
Solution 2
Puisque la figure a une largeur de 5 cm, alors $AB+CD=5$ cm, d'où $CD=BC=2$ cm.
Puisque la figure a une hauteur de 6 cm, alors $BC+DE=6$ cm, d'où $DE=4$ cm.
Le périmètre est égal à $3+2+2+4+5+6$ ou 22 cm.



RÉPONSE : (E)

Partie B

11. On écrit les 25 résultats en ordre croissant 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10,10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12. Le résultat du milieu est le 13e, soit 11. La note médiane est 11.



RÉPONSE : (D)

12. Le changement d'élévation entre les deux lacs est égal à $174{,}28-75{,}00$ ou 99,28 m. Puisque le navire met 8 heures pour effectuer ce changement, son changement d'élévation moyen par heure est égal à $\dfrac{99{,}28 \text{ m}}{8 \text{ h}}$ ou 12,41 m/h.

RÉPONSE : (A)

13. On construit un tableau donnant les entiers dont la somme est 11, ainsi que leur produit.

Premier entier	Deuxième entier	Produit
1	10	10
2	9	18
3	8	24
4	7	28
5	6	30

Le plus grand produit possible est égal à 30.

RÉPONSE : (E)

14. On a $3^2 = 9$ et $3^3 = 27$. Les entiers pairs situés entre 9 et 27 sont 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 et 26. Il y en a neuf.

RÉPONSE : (A)

15. Si $P = 1000$ et $Q = 0{,}01$, alors :

$$P + Q = 1000 + 0{,}01$$
$$= 1000{,}01$$
$$P \times Q = 1000 \times 0{,}01$$
$$= 10$$
$$\frac{P}{Q} = \frac{1000}{0{,}01}$$
$$= 100\ 000$$
$$\frac{Q}{P} = \frac{0{,}01}{1000}$$
$$= 0{,}000\ 01$$
$$P - Q = 1000 - 0{,}01$$
$$= 999{,}99$$

L'expression $\frac{P}{Q}$ donne le plus grand résultat.

RÉPONSE : (C)

16. Le volume de la boîte est égal à $40 \times 60 \times 80$ ou 192 000 cm^3.
Le volume de chaque bloc est égal à $20 \times 30 \times 40$ ou 24 000 cm^3.

Le nombre maximum de blocs que l'on peut placer dans la boîte est égal à $\frac{192\ 000}{24\ 000}$ ou 8.

Or il est possible de placer 8 blocs dans la boîte. Voyez-vous comment?

RÉPONSE : (D)

17. Le rapport du volume de farine au volume de shortening est de 5 : 1.

Puisque Katie utilise $\frac{2}{3}$ de tasse de shortening, elle doit utiliser $5 \times \frac{2}{3}$ tasses de farine pour conserver le même rapport. Cela donne $\frac{10}{3}$ ou $3\frac{1}{3}$ tasses de farine.

RÉPONSE : (B)

18. Le prisme est formé de 12 petits cubes. On peut voir 10 de ces 12 cubes. Un des deux cubes cachés est blanc et l'autre est noir. Chaque morceau de bois est formé de quatre cubes. Le quatrième cube blanc doit donc être situé à l'arrière, au milieu de la rangée du bas. Le quatrième cube noir est donc situé en bas, à l'arrière, dans la position la plus à gauche. On voit que le cube noir en haut, à l'arrière gauche, est collé à chacun des trois autres cubes noirs. Le morceau noir a donc la forme de la pièce (A). (Seule la pièce (A) a un cube qui est collé à chacun des trois autres cubes qui la forment.)

RÉPONSE : (A)

19. On a $8 = 2^3$, $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$. Puisque le nombre est divisible par 8, par 12 et par 18, il doit être divisible par 2^3 et par 3^2, c'est-à-dire par $2^3 \times 3^2$ ou 72. On cherche un nombre de deux chiffres qui est divisible par 72. Ce nombre doit être 72, car tout autre multiple aurait plus de deux chiffres. Ce nombre est situé entre 60 et 79.

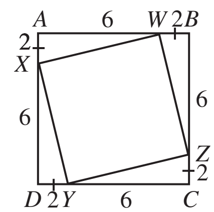
RÉPONSE : (D)

20. *Solution 1*

Puisque le carré *ABCD* a une aire de 64, ses côtés ont une longueur de 8.
Puisque $AX = BW = CZ = DY = 2$, alors $AW = BZ = CY = DX = 6$.
Chacun des triangles *XAW*, *WBZ*, *ZCY* et *YDX* est rectangle avec des cathètes (les côtés qui forment l'angle droit) de longueurs 2 et 6. .

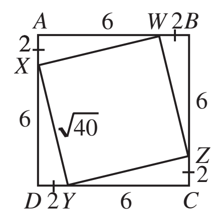
Chacun de ces triangles a une aire de $\frac{1}{2}(2)(6)$ ou 6.

L'aire du carré *WXYZ* est égale à l'aire du carré *ABCD* moins l'aire des quatre triangles, soit $64 - 4(6)$ ou 40.



Solution 2

Puisque le carré *ABCD* a une aire de 64, ses côtés ont une longueur de 8.
Puisque $AX = BW = CZ = DY = 2$, alors $AW = BZ = CY = DX = 6$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle *AXW*, on a $XW^2 = 2^2 + 6^2$ ou $XW^2 = 40$. Or l'aire du carré *WXYZ* est égale à XW^2. Elle est donc égale à 40.



RÉPONSE : (D)

Partie C

21. Dans la figure, la dimension horizontale sera appelée la longueur et la dimension verticale sera appelée la largeur.

Puisque la salle de séjour est carrée et qu'elle a une aire de 16 m^2, elle a une largeur de 4 m et une longueur de 4 m.

Puisque la buanderie est carrée et qu'elle a une aire de 4 m^2, elle a une largeur de 2 m et une longueur de 2 m.

Puisque la salle à manger a la même largeur que la salle de séjour, soit 4 m, et une aire de 24 m^2, elle a une longueur de 6 m.
Le rez-de-chaussée a donc une longueur de 10 m. Puisque la buanderie a une longueur de 2 m, la cuisine a donc une longueur de 8 m. Puisque la cuisine a la même largeur que la buanderie, soit 2 m, la cuisine a une largeur de 2 m. Elle a donc une aire de 16 m^2.

RÉPONSE : (B)

22. On peut voir, en comparant les deux énoncés, que trois petits verres de jus correspondent à deux grands verres de jus. (Entre les deux énoncés, le nombre de petits verres a diminué de 3 et le nombre de grands verres a augmenté de 2.)
Dans le premier énoncé, on peut donc remplacer les 9 petits verres par 6 grands verres, ce qui veut dire qu'avec un pot rempli à pleine capacité, on peut remplir un total de $6+4$ ou 10 grands verres.
RÉPONSE : (C)

23. Magalie passe 40 minutes, soit $\frac{2}{3}$ d'une heure, sur les rues de la ville à une vitesse moyenne de 45 km/h. La distance parcourue sur ces rues est donc égale à $\frac{2}{3}$ de 45 km, soit 30 km.
La distance parcourue sur la route est donc égale à $59 \text{ km} - 30 \text{ km}$ ou 29 km.
Puisqu'elle parcourt 29 km en 20 minutes, elle parcourt 3×29 km ou 87 km en 60 minutes.
Sa vitesse sur la route est donc de 87 km/h.
RÉPONSE : (C)

24. On se penche sur le nombre possible de médailles d'argent, en commençant par 8 médailles.
Peut-elle avoir remporté 8 médailles d'argent? Cela lui donnerait 24 points en 8 épreuves. Or elle a obtenu 27 points en 8 épreuves. Ce cas est impossible.
Peut-elle avoir remporté 7 médailles d'argent? Cela lui donnerait 21 points en 7 épreuves. Cela veut dire qu'elle a remporté 6 points dans sa 8e épreuve. Or il est impossible de remporter plus de 5 points par épreuve. Ce cas est impossible.
Peut-elle avoir remporté 6 médailles d'argent? Celui donnerait 18 points en 6 épreuves. Cela veut dire qu'elle a remporté 9 points dans les 2 autres épreuves, ce qui est impossible en remportant des médailles d'or ou de bronze ($5+5=10$, $5+1=6$ et $1+1=2$). Ce cas est impossible.
Peut-elle avoir remporté 5 médailles d'argent? Celui donnerait 15 points en 5 épreuves. Cela veut dire qu'elle a remporté 12 points dans les 3 autres épreuves, ce qui est impossible en remportant des médailles d'or ou de bronze ($5+5+5=15$, $5+5+1=11$, $5+1+1=7$, $1+1+1=3$). Ce cas est impossible.
Peut-elle avoir remporté 4 médailles d'argent? Celui donnerait 12 points en 4 épreuves. Cela veut dire qu'elle a remporté 15 points dans les 4 autres épreuves. Cette situation est possible. Elle peut avoir remporté 3 médailles d'or et aucune médaille de bronze. (Puisqu'il y a six candidats et trois médailles, certains candidats ne gagnent aucune médaille.)
La candidate a donc pu remporter un maximum de 4 médailles d'argent.
RÉPONSE : (D)

25. *Solution 1*
On considère d'abord un quadrillage de 2 colonnes et 10 rangées. Il y a 10 positions horizontales pour le domino, soit une position par rangée. Il y a 18 positions verticales, soit 9 par colonne. Il y a donc un total de 28 positions en tout.
Si on ajoute une colonne, combien de nouvelles positions sont ajoutées? On ajoute 9 positions verticales. On ajoute aussi 10 positions horizontales, soit une par rangée. Chacune occupe une case de la 3^{e} colonne et une case de la 2^{e} colonne. On a donc ajouté 19 nouvelles positions.
Combien de fois faut-il ajouter 19 à 28 pour obtenir 2004? En d'autres mots si on divise $2004-28$, ou 1976, par 19, quel est le quotient? On a $1976 \div 19 = 104$. Il faut donc ajouter 104 colonnes aux deux premières pour un total de 106 colonnes.

Solution 2
Soit n le nombre de colonnes.
Dans chaque colonne, il y a 9 positions verticales pour le domino. (Il peut recouvrir les cases 1 et 2, les cases 2 et 3, les cases 3 et 4, ainsi de suite jusqu'aux cases 9 et 10.)
Puisqu'il y a n colonnes, il y a un total de $9n$ positions verticales.
Dans chaque rangée, il y a $n-1$ positions horizontales pour le domino. (Il peut recouvrir les cases 1 et 2, les cases 2 et 3, les cases 3 et 4, ainsi de suite jusqu'aux cases $n-1$ et n).
Puisqu'il y a 10 rangées, il y a un total de $10(n-1)$ positions horizontales.
Le nombre total de positions est donc égal à $9n+10(n-1)$ ou $19n-10$.
On veut que ce nombre soit égal à 2004. On a donc $19n-10=2004$, d'où $19n=2014$ ou $n=106$.
Il y a 106 colonnes.

RÉPONSE : (B)

Partie A

1. 25 % de 2004 est égal à $\frac{1}{4}$ de 2004, soit 501.

RÉPONSE : (B)

2. On utilise un dénominateur commun : $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}=\frac{4}{8}+\frac{6}{8}-\frac{5}{8}$

$$=\frac{5}{8}$$

RÉPONSE : (C)

3. On a : $800\,670 = 800\,000 + 600 + 70$

$$= 8\times10^5 + 6\times10^2 + 7\times10^1$$

Donc $x=5$, $y=2$ et $z=1$, d'où $x+y+z=8$.

RÉPONSE : (B)

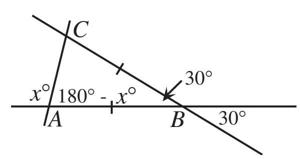
4. On écrit le membre de droite sous forme de fraction : $604+\frac{\square}{13}=\frac{7852}{13}+\frac{\square}{13}$

$$=\frac{7852+\square}{13}$$

On a donc $7863 = 7852 + \square$, d'où $\square = 11$.

RÉPONSE : (A)

5. Puisque les angles *ABC* et *XBY* sont opposés par le sommet, alors $\angle ABC = \angle XBY = 30^\circ$.



Dans le triangle isocèle *ABC*, la somme des mesures des deux autres angles est égale à 150°.

Puisque le triangle est isocèle, $\angle BAC = \angle BCA = 75^\circ$.

Donc $x^\circ = 180^\circ - 75^\circ$, d'où $x = 105$.

RÉPONSE : (D)

6. Puisque chaque petit triangle équilatéral a un périmètre de 6 cm, ses côtés ont une longueur de 2 cm. Chaque côté du triangle *ABC* est formé de trois petits côtés. Le triangle *ABC* a donc des côtés de 6 cm et un périmètre de 18 cm.

RÉPONSE : (A)

7. Si $x = -4$ et $y = 4$, alors :

$$\frac{x}{y} = \frac{-4}{4}$$
$$= -1$$
$$y - 1 = 4 - 1$$
$$= 3$$
$$x - 1 = -4 - 1$$
$$= -5$$
$$-xy = -(-4)(4)$$
$$= 16$$
$$x + y = -4 + 4$$
$$= 0$$

L'expression $-xy$ a la plus grande valeur.

RÉPONSE : (D)

8. Lorsqu'on lance deux pièces de monnaie en même temps, il y a quatre résultats possibles, soit FACE et FACE, FACE et PILE, PILE et FACE, PILE et PILE. Ils sont équiprobables. Si on veut que les deux pièces tombent FACE, il y a un résultat favorable sur quatre. La probabilité est égale à $\frac{1}{4}$.

RÉPONSE : (E)

9. La surface de l'eau est à une élévation de +180 m, tandis que le point le plus bas sur le fond du lac est à une élévation de –220 m. La profondeur du lac à cet endroit est égale à $180 - (-220)$ ou 400 m.

RÉPONSE : (D)

10. On construit un tableau donnant les entiers dont la somme est 11, ainsi que leur produit.

Premier entier	Deuxième entier	Produit
1	10	10
2	9	18
3	8	24
4	7	28
5	6	30

Le plus grand produit possible est égal à 30.

RÉPONSE : (E)

Partie B

11. Puisque Sarah marche à une vitesse constante de 5 km/h, elle parcourt 1 km en 12 minutes. Elle parcourt donc 0,5 km en 6 minutes. Elle met donc 18 minutes pour parcourir 1,5 km.

RÉPONSE : (C)

12. On a $\sqrt{36} = 6$ et $5^2 = 25$. Les cinq nombres, dans l'ordre donné, sont 6; 35,2; 35,19 et 25.
Si on les places en ordre croissant, on obtient 6, 25, 35,19 et 35,2 ou $\sqrt{36}$, 5^2, 35,19 et 35,2.

RÉPONSE : (D)

13. On numérote les arbres de 1 à 13, en commençant près de la maison et en finissant près de l'école. En se rendant à l'école, Trina fait une marque sur les arbres 1, 3, 5, 7, 9, 11 et 13. En revenant à la maison, elle fait une marque sur les arbres 13, 10, 7, 4 et 1. Les arbres 2, 6, 8 et 12 n'ont pas reçu une marque de craie.

RÉPONSE : (B)

14. Le prisme est formé de 12 petits cubes. On peut voir 10 de ces 12 cubes. Un des deux cubes cachés est blanc et l'autre est noir. Chaque morceau de bois est formé de quatre cubes. Le quatrième cube blanc doit donc être situé à l'arrière, au milieu de la rangée du bas. Le quatrième cube noir est donc situé en bas, à l'arrière, dans la position la plus à gauche. On voit que le cube noir en haut, à l'arrière gauche, est collé à chacun des trois autres cubes noirs. Le morceau noir a donc la forme de la pièce (A). (Seule la pièce (A) a un cube qui est collé à chacun des trois autres cubes qui la forment.)

RÉPONSE : (A)

15. Le solide ombré est un prisme à base rectangulaire, de dimensions 4 sur 6 sur 5, dont on a enlevé un petit prisme de dimensions 4 sur 2 sur 1. Le grand prisme a un volume de 120 et le petit prisme a un volume de 8. Le solide ombré a donc un volume de 112.

RÉPONSE : (B)

16. On a $8 = 2^3$, $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$. Puisque le nombre est divisible par 8, par 12 et par 18, il doit être divisible par 2^3 et par 3^2, c'est-à-dire par $2^3 \times 3^2$ ou 72. On cherche un nombre de deux chiffres qui est divisible par 72. Ce nombre doit être 72, car tout autre multiple aurait plus de deux chiffres. Ce nombre est situé entre 60 et 79.

RÉPONSE : (D)

17. On sait que $2^3 = 8$. Puisque $2^a = 8$, alors $a = 3$. L'équation $a = 3c$ devient donc $3 = 3c$. Donc $c = 1$.

RÉPONSE : (C)

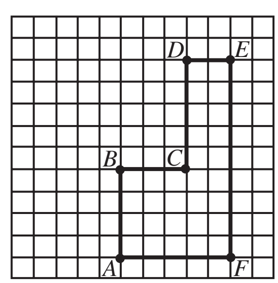
18. Puisque l'étendue reste la même, on ne peut enlever la première ou la dernière note, car elles ne paraissent qu'une fois chacune. On n'enlève donc pas le 6 ou le 10.
Puisque le mode reste le même, on ne peut enlever la note la plus fréquente, soit le 8.
On doit donc enlever un 7 ou un 9. Pour augmenter la moyenne, on doit enlever la note la plus basse des deux, soit le 7. (On aurait pu calculer la moyenne initiale, soit 7,875. Si on enlève un 7, la moyenne devient 8. Si on enlève le 9, la moyenne devient 7,714.)

RÉPONSE : (B)

19. Puisque le mot LAC a une valeur de 8 et que le mot CAS a une valeur de 12, la lettre S vaut 4 de plus que la lettre L. Le mot BAS vaut donc 4 de plus que le mot BAL. Le mot BAS a donc une valeur de 10.

RÉPONSE : (A)

20. AE est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant des cathètes de longueurs 5 et 9.
On a donc $AE^2 = 5^2 + 9^2$, d'où $AE = \sqrt{106}$ ou $AE \approx 10,30$.
CF est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant des cathètes de longueurs 2 et 4.
On a donc $CF^2 = 2^2 + 4^2$, d'où $CF = \sqrt{20}$ ou $CF \approx 4,47$.
AC est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant des cathètes de longueurs 3 et 4.



On a donc $AC^2 = 3^2 + 4^2$, d'où $AC = 5$.
FD est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant des cathètes de longueurs 2 et 9.
On a donc $FD^2 = 2^2 + 9^2$, d'où $FD = \sqrt{85}$ ou $FD \approx 9,22$.
CE est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant des cathètes de longueurs 2 et 5.
On a donc $CE^2 = 2^2 + 5^2$, d'où $CE = \sqrt{29}$ ou $CE \approx 5,39$.
On a $AE \approx 10,30$, $CD + CF \approx 9,47$, $AC + CF \approx 9,47$, $FD \approx 9,22$ et $AC + CE \approx 10,39$.
L'expression $AC + CE$ a la plus grande valeur.

Réponse : (E)

Partie C

21. L'échelle est égale au rapport de la distance sur la carte à la distance réelle. Le rapport est donc égal à 21 cm : 1050 km. L'échelle est égale à
21 cm : 1 050 000 m, c'est-à-dire à 21 cm : 105 000 000 cm ou 1 : 5 000 000.

Réponse : (E)

22. *Solution 1*

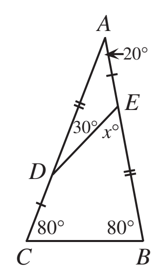
Lorsqu'on cesse de verser, on a déversé $\frac{1}{4}$ du contenu de la bouteille dans le verre. Cette quantité d'eau correspond à $\frac{3}{4}$ de la capacité du verre. La capacité de la bouteille est donc 3 fois celle du verre. Puisque la bouteille a une capacité de 1,5 L, le verre a une capacité de 0,5 L.

Solution 2

Lorsqu'on cesse de verser, on a déversé $\frac{1}{4}$ de 1,5 L, soit 0,375 L d'eau dans le verre. Cette quantité d'eau correspond à $\frac{3}{4}$ de la capacité du verre. Donc $\frac{1}{4}$ de la capacité du verre correspond à 0,125 L. La capacité du verre est égale à $4 \times 0,125$ L ou 0,5 L.

Réponse : (A)

23. D'après la figure, on a $BE = AD$ et $AE = CD$.
Donc $AD + CD = BE + AE$, d'où $AC = AB$.
Le triangle ABC est donc isocèle.
Donc $\angle ACB = \angle ABC = 80^\circ$ et
$\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB$, d'où $\angle BAC = 20^\circ$.
Dans le triangle AED, on a $\angle AED = 180^\circ - \angle ADE - \angle EAD$ ou
$\angle AED = 180^\circ - 30^\circ - 20^\circ$, d'où $\angle AED = 130^\circ$.
Puisque $x^\circ = 180^\circ - \angle AED$, on a donc $x^\circ = 50^\circ$ ou $x = 50$.



Réponse : (C)

24. Puisque x est le nombre ABC, alors $x = 100A + 10B + C$.
Puisque y est le nombre CBA, alors $y = 100C + 10B + A$.
Puisque $x - y = 495$, alors :

$$\begin{aligned} (100A + 10B + C) - (100C + 10B + A) &= 495 \\ 99A - 99C &= 495 \\ 99(A - C) &= 495 \\ A - C &= 5 \end{aligned}$$

Il n'y a donc aucune restriction par rapport à B. B peut donc prendre n'importe quelle des 10 valeurs de 0 à 9. Pour chacune de ces valeurs, A et C peuvent prendre les valeurs respectives 6 et 1, 7 et 2, 8 et 3 ou 9 et 4. (Par exemple, $873 - 378 = 495$.)
Il y a donc 40 valeurs possibles de x.

Réponse : (B)

25. On considère que le grand bloc est formé de n étages ayant chacun 11 rangées et 10 colonnes. Chaque étage contient donc 110 cellules mesurant 1 sur 1 sur 1.

On considère d'abord les positions du petit bloc, mesurant 2 sur1 sur 1, pour lesquelles le bloc est couché en position horizontale, occupant deux cellules adjacentes sur le même étage. Sur chaque étage, il y a 9 positions possibles par rangée (occupant les cellules 1 et 2, ou 2 et 3, ou 3 et 4, ainsi de suite jusqu'à 9 et 10). Sur chaque étage, il y a aussi 10 positions possibles par colonne (occupant les cellules 1 et 2, ou 2 et 3, ou 3 et 4, ainsi de suite jusqu'à 10 et 11). Sur chaque étage, il y a donc un total de $11 \times 9 + 10 \times 10$ ou 199 positions possibles pour le petit bloc. Puisqu'il y a n étages, il y a $199n$ positions horizontales pour le petit bloc.

On considère maintenant les positions du petit bloc pour lesquelles le bloc est à la verticale, occupant une cellule sur un étage et une cellule sur un étage adjacent. Puisque chaque étage contient 110 cellules, il y a donc 110 positions possibles pour le petit bloc par paire d'étages adjacents. Or il y a $n - 1$ paires d'étages adjacents. Il y a donc $110(n - 1)$ positions verticales pour le petit bloc.

En tout, il y a 2362 positions différentes pour le petit bloc. Donc :

$$\begin{aligned} 199n + 110(n - 1) &= 2362 \\ 309n - 110 &= 2362 \\ 309n &= 2472 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

Réponse : (B)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2003 Solutions

Concours Gauss

(7^e^ et 8^e^ années – Sec. I et II au Québec)

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

Great West Life and London Life

Sybase Inc. (Waterloo)

*i*Anywhere Solutions

Avec l'appui de :

Financière Manuvie

Comité exécutif	Barry Ferguson (Directeur), Peter Crippin, Ruth Malinowski, Ian VanderBurgh
Ordinatique	Steve Breen, University of Waterloo Don Cowan, University of Waterloo Matthew Oliver, University of Waterloo
Compilateurs du rapport du Concours Gauss	Lloyd Auckland, University of Waterloo Barry Ferguson, University of Waterloo
Documentation	Bonnie Findlay, University of Waterloo
Publications	Bonnie Findlay, University of Waterloo
Version française	André Ladouceur, Collège catholique Samuel-Genest, Ottawa Robert Laliberté, École secondaire publique Louis-Riel Gérard Proulx, Collège catholique Franco-Ouest, Ottawa Rodrigue St-Jean, École secondaire Embrun, Embrun
Adjoints à la technique	Joanne Kursikowski, Linda Schmidt, Kim Schnarr
Comité de validation	Ed Anderson, University of Waterloo, Waterloo John Barsby, St. John's-Ravenscourt School, Winnipeg Jean Collins, (retired), Thornhill Tom Griffiths (retired), London Frank Rachich (retired), Woodstock Larry Rice, University of Waterloo, Waterloo Ron Scoins, University of Waterloo, Waterloo

Comité Gauss

Mark Bredin (Assoc. Chair)
St. John's-Ravenscourt School
Winnipeg, Manitoba

Richard Auckland
New Sarum Public School
St. Thomas, Ontario

Sandy Emms Jones
Forest Heights C.I.
Kitchener, Ontario

Kevin Grady
Cobden Dist. Public School
Cobden, Ontario

Joanne Halpern
Toronto, Ontario

David Matthews
University of Waterloo
Waterloo, Ontario

John Grant McLoughlin
Memorial University of Newfoundland
St. John's, Newfoundland

Bob McRoberts (Chair)
Dr. G.W. Williams S.S.
Aurora, ON

Paul Ottaway
Halifax, Nova Scotia

Patricia Tinholt
Valley Park Middle School
Don Mills, Ontario

Sue Trew
Holy Name of Mary S.S.
Mississauga, Ontario

Partie A

1. On obtient $3{,}26 \times 1{,}5 = 4{,}89$. RÉPONSE : (B)

2. Selon la priorité des opérations, on a : $\begin{aligned}(9-2)-(4-1) &= 7-3\\ &= 4\end{aligned}$ RÉPONSE : (C)

3. On obtient $30 + 80\,000 + 700 + 60 = 80\,790$. RÉPONSE : (D)

4. $\dfrac{1+2+3}{4+5+6} = \dfrac{6}{15}$, ou $\dfrac{2}{5}$ RÉPONSE : (C)

5. On a posé la question à 90 personnes.
Selon le diagramme, 25 personnes ont choisi le chat, 10 ont choisi le poisson, 15 ont choisi un oiseau et 5 ont répondu « autre ». Cela fait $25+10+15+5$, ou 55 personnes.
Il reste donc $90-55$, ou 35 personnes qui ont choisi le chien. RÉPONSE : (E)

6. Puisque Thomas utilise 4 mL de gel par jour et qu'un tube de gel contient 128 mL de gel, il lui faudra $\dfrac{128}{4}$, ou 32 jours pour vider le tube. RÉPONSE : (A)

7. *Solution 1*

Si on annule les 3 dans le membre de gauche, l'égalité $\dfrac{3\times 6\times 9}{3} = \dfrac{\square}{2}$ devient $6\times 9 = \dfrac{\square}{2}$.

L'expression dans la case doit donc être égale à $2\times 6\times 9$, car $6\times 9 = \dfrac{2\times 6\times 9}{2}$.

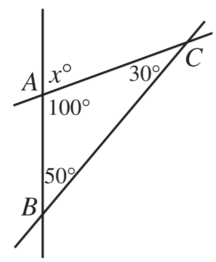
Solution 2

On évalue le membre de gauche, $\dfrac{3\times 6\times 9}{3}$, qui est égal à 54.
Le nombre dans la case doit donc être égal à 54×2, ou 108, pour que l'égalité soit vraie.
On évalue les expressions des cinq choix de réponses pour obtenir :
(A) 48 (B) 72 (C) 108 (D) 64 (E) 432
L'expression qu'on peut placer dans la case est donc $2\times 6\times 9$. RÉPONSE : (C)

8. Si on tourne les mots SOLDE GÉANT, comme si on les regardait de l'autre côté de la vitrine, on obtient TNAƎG ƎDLOS.
Les seules lettres qui sont pareilles, lorsqu'on les regarde d'un côté ou de l'autre de la vitrine, sont O, A et T. Réponse : (A)

9. Au départ, Paul est à une distance de 1000 m de la maison et il se rend à un point situé à 800 m de la maison. Il parcourt donc une distance de 200 m. Le graphique indique qu'il revient sur ses pas, puisqu'il se rend à un point situé à 1000 m de la maison. Ce faisant, il parcourt de nouveau une distance de 200 m. Il se rend ensuite à la maison, en parcourant une distance de 1000 m. Paul parcourt donc une distance totale de $200+200+1000$, ou 1400 m. Réponse : (E)

10. Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, alors $\angle BAC = 180^\circ - 30^\circ - 50^\circ$, ou $\angle BAC = 100^\circ$.
Puisqu'une droite forme un angle plat au point A, alors $x^\circ + 100^\circ = 180^\circ$, d'où $x = 80$.



Réponse : (A)

Partie B

11. Puisque $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ est égal à $\frac{1}{3}$, on enlève $\frac{1}{3}$ des 12 carrés, soit 4 carrés.
Il restera donc 8 carrés. Réponse : (D)

12. *Solution 1*
Puisque le périmètre du champ est 3 fois sa longueur et que le périmètre mesure 240 m, le champ a une longueur de 80 m.
Pour calculer le périmètre, il faut additionner deux fois la longueur et deux fois la largeur. La longueur contribue donc 160 m au périmètre, ce qui laisse 80 m pour deux fois la largeur. Le champ a donc une largeur de 40 m.

Solution 2
Soit P le périmètre du champ, L sa longueur et l sa largeur.
On sait que $P = 3L$ et que $P = 240$. Donc $L = \frac{1}{3}(240)$, ou $L = 80$.
Puisque $P = 240$ et que $P = 2L + 2l$, alors $240 = 2(80) + 2l$, d'où $l = 40$.
Réponse : (B)

13. Si Louis court à $\frac{1}{2}$ de sa vitesse habituelle, il court à 5 km/h et il mettra 6 h pour compléter la course de 30 km.

Si Éliane court à $1\frac{1}{2}$ fois sa vitesse habituelle, elle court à 15 km/h et elle mettra 2 h pour compléter la course de 30 km.

Louis met donc 4 h de plus qu'Éliane pour compléter la course.

Réponse : (D)

14. *Solution 1*

Puisqu'il y a deux fois plus de disques rouges que de disques verts et deux fois moins de disques bleus que de disques verts, alors il y a quatre fois plus de disques rouges que de disques bleus.

Pour chaque deux disques verts, il y a donc quatre disques rouges et un disque bleu. On peut donc imaginer que les disques sont en groupes de sept.

Puisqu'il y a 14 disques en tout, il y a deux groupes de sept. Il y a donc huit disques rouges, quatre disques verts et deux disques bleus.

Solution 2

Soit v le nombre de disques verts.

Le nombre de disques rouges est égal à $2v$ et le nombre de disques bleus est égal à $\frac{1}{2}v$.

On a donc :

$$\begin{aligned} 2v + v + \tfrac{1}{2}v &= 14 \\ 4v + 2v + v &= 28 \\ 7v &= 28 \\ v &= 4 \end{aligned}$$

Il y a donc quatre disques verts.

Réponse : (B)

15. Il y a 180 comprimés en tout dans la bouteille.

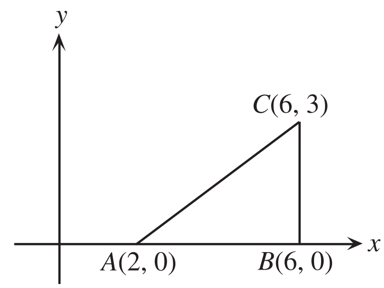
Parmi les 60 comprimés de forme étoilée, il y a des quantités égales qui goûtent la fraise, le bleuet ou l'orange. Il y a donc 20 comprimés de forme étoilée qui goûtent le bleuet.

Puisqu'il y a une chance égale de choisir n'importe quel comprimé, la probabilité de choisir un comprimé de forme étoilée au goût de bleuet est égale à :

$$\frac{\text{Nombre de comprimés étoilés au bleuet}}{\text{Nombre total de comprimés}} = \frac{20}{180}, \text{ ou } \frac{1}{9}.$$

Réponse : (A)

16. On commence par esquisser le triangle.
Puisque le point C est directement au-dessus du point B, l'angle ABC est droit. Le triangle ABC a donc une base AB de longueur 4 et une hauteur BC de longueur 3.
L'aire du triangle est égale à $A = \dfrac{b \times h}{2}$. Elle est donc égale à $A = \dfrac{4 \times 3}{2}$, ou 6 unités carrées.

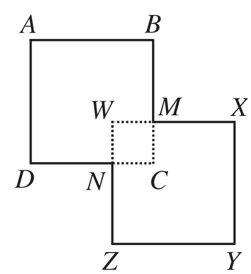


Réponse : (C)

17. Puisque la facture était de 74,16 \$ et qu'il y avait un coût initial de 45 \$, le coût associé à la distance parcourue est égal à 74,16 \$ − 45 \$, ou 29,16 \$. Puisque le taux associé à la distance est égal à 0,12 \$ le kilomètre, le nombre de kilomètres parcourus est égal à $\dfrac{29{,}16}{0{,}12}$, ou 243. Réponse : (C)

18. *Solution 1*
Comme on le voit dans le diagramme, le périmètre de la figure ombrée est égal à la somme des périmètres des deux grands carrés, moins le périmètre du petit carré.
Puisque les grands carrés ont des côtés de 5 cm, ils ont chacun un périmètre de 20 cm.
Puisque le petit carré a une aire de 4 cm^2, il a des côtés de 2 cm et un périmètre de 8 cm.
Le périmètre de la figure ombrée est donc égal à $20 + 20 - 8$, ou 32 cm.

Solution 2
On nomme les sommets et on calcule la longueur de chaque côté.
Puisque les grands carrés ont des côtés de 5 cm, alors $AB = AD = YX = YZ = 5$.
Le petit carré a une aire de 4 cm^2. Ses côtés mesurent donc 2 cm.
Donc $WM = MC = CN = NW = 2$. Donc BM, DN, MX et NZ ont chacun une longueur de 3 cm (la différence entre les côtés de 5 cm et ceux de 2 cm).
Le périmètre de la figure ombrée est égal à $4 \times 5 + 4 \times 3$, ou 32 cm.

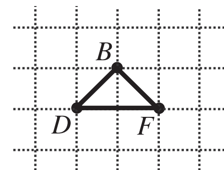


Réponse : (B)

19. L'examen d'Abel comportait 80 questions. Puisqu'il a obtenu une note de 80 %, il a répondu correctement à 80 % des 80 questions, c'est-à-dire à $\dfrac{80}{100} \times 80$, ou 64 questions.
Abel a réussi 70 % des 30 questions portant sur l'algèbre, c'est-à-dire à $\dfrac{70}{100} \times 30$, ou 21 questions.
Il a donc réussi $64 - 21$, ou 43 questions portant sur la géométrie.

Réponse : (A)

20. On écrit d'abord tous les triangles qui ont une base sur *DEF* (c'est-à-dire avec un côté *DE*, *DF* ou *EF*) : *DAE*, *DBE*, *DCE*, *DAF*, *DBF*, *DCF*, *EAF*, *EBF*, *ECF*
Or les triangles *DAE*, *DBE*, *DAF*, *DCF*, *EBF* et *ECF* sont évidemment rectangles, tandis que les triangles *DCE* et *EAF* ne le sont pas, car ils ont chacun un angle de 135°.
Qu'en est-il du triangle *DBF*?
Le triangle *DBF* est rectangle, car $\angle DBE = \angle EBF = 45^\circ$, d'où $\angle DBF = 90^\circ$.
Dans la liste ci-dessus, il y a deux triangles non rectangles.



Si on construit tous les triangles qui ont une base sur *ABC*, on trouvera aussi deux triangles non rectangles. (On peut le vérifier en faisant subir une réflexion aux triangles de la première liste, par rapport à un axe de réflexion horizontal, à mi-chemin entre *DEF* et *ABC*.)
On remarque qu'il est impossible de construire un triangle qui n'a pas un côté sur *ABC* ou sur *DEF*, puisque les seuls autres côtés sont *AD*, *AE*, *AF*, *BD*, *BE*, *BF*, *CD*, *CE* et *CF* et il est impossible de former un triangle avec n'importe quels trois de ces côtés, chaque côté ayant une extrémité à *A*, *B* ou *C* et l'autre extrémité à *D*, *E* ou *F*.
On peut former quatre triangles qui ne sont pas rectangles. RÉPONSE : (E)

Partie C

21. Puisque dix personnes attendent pour subir une intervention et que les interventions sont prévues à intervalles de 15 minutes, la première commencera à 8 h et la dixième commencera après neuf intervalles de 15 minutes.
Or neuf intervalles de 15 minutes correspondent à 135 minutes, ou 2 heures et 15 minutes.
La dixième intervention commencera donc à 10 h 15 et se terminera à 11 h.
RÉPONSE : (D)

22. *Solution 1*
Puisque Line a gagné 95 % des 20 parties qu'elle a jouées, elle a gagné $\frac{95}{100} \times 20$, ou 19 parties. On peut aussi dire qu'elle a gagné $\frac{19}{20}$ des parties jouées. Or 96 %, exprimé sous forme fractionnaire, est égal à $\frac{96}{100}$, ou $\frac{24}{25}$. Si on compare les rapports $\frac{19}{20}$ et $\frac{24}{25}$, on voit que Line doit gagner les 5 parties suivantes $\left(\frac{19+5}{20+5} = \frac{24}{25}\right)$ pour qu'elle ait gagné 24 des 25 parties jouées, ou 96 % des parties jouées.

Solution 2

Puisque Line a gagné 95 % des 20 parties qu'elle a jouées, elle a gagné $\frac{95}{100} \times 20$, ou 19 parties.

Soit x le nombre de parties consécutives qu'elle doit gagner pour obtenir un pourcentage de parties gagnées égal à 96 %. Le rapport du nombre de parties gagnées au nombre de parties jouées, après ces x parties, est égal à : $\frac{\text{Nombre de parties gagnées}}{\text{Nombre de parties jouées}} = \frac{19+x}{20+x}$.

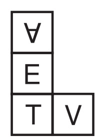
On a donc $\frac{19+x}{20+x} = \frac{96}{100}$, ou $\frac{19+x}{20+x} = \frac{24}{25}$.

Par observation ou par tâtonnements, on obtient $x = 5$.

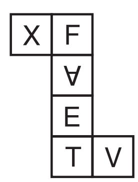
Line doit donc gagner les cinq parties suivantes. RÉPONSE : (D)

23. On déplie le cube, c'est-à-dire qu'on fait son développement.
La première position du cube donne le développement suivant :

La troisième position du cube nous permet d'ajouter le A au-dessus du E.



La deuxième position du cube nous permet d'ajouter le F au-dessus du A et le X à la gauche du F.
On obtient le développement suivant :



Si on replie ce cube, en plaçant le A en avant, le F au-dessus et le E en dessous, il y aura un V renversé sur la face à droite et la lettre sur la face ombrée est donc un V. RÉPONSE : (E)

24. Pour mieux comprendre la régularité, on la récrit, à droite, en montrant comment les nombres ont été obtenus :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 2 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 2 & & \\ & 1 & & 4 & & 5 & & 2 & \\ 1 & & 5 & & 9 & & 7 & & 2 \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \vdots & & & & \ddots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 2 & & & \\ & & 1 & & 1+2 & & 2 & & \\ & 1 & & 1+3 & & 3+2 & & 2 & \\ 1 & & 1+4 & & 4+5 & & 5+2 & & 2 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \vdots & & & \ddots & \end{array}$$

En examinant la régularité à droite, on s'aperçoit que chaque nombre d'un ligne paraît *deux fois* dans la ligne suivante. (Chaque nombre à l'extrémité d'une ligne, soit 1 ou 2, paraît seul et paraît une fois dans une addition dans la ligne suivante. Les autres nombres d'une ligne paraissent deux fois dans des additions de la ligne suivante.)

Donc la somme des nombres d'une ligne doit être égale à deux fois la somme des nombres de la ligne précédente.
On peut le vérifier :

Somme des nombres de la 1re ligne :	3
Somme des nombres de la 2e ligne :	6
Somme des nombres de la 3e ligne :	12
Somme des nombres de la 4e ligne :	24

Pour obtenir la somme des nombres de la 13e ligne, on doit donc calculer la somme des nombres de la 1re ligne et la multiplier par 2 douze fois. Cela donnera 3×2^{12}, c'est-à-dire 3×4096, ou $12\,288$.

RÉPONSE : (D)

25. Dans la solution qui suit, on examine chaque possibilité. On peut aussi obtenir une solution plus rapidement par tâtonnements.

On écrit la multiplication en remplaçant les cases par des lettres :

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ & \times & C \\ \hline D & E & F \end{array}$$

On veut ensuite remplacer les lettres *A*, *B*, *C*, *D*, *E* et *F* par les chiffres de 1 à 6.

C peut-il être égal à 1?

Si *C* est égal à 1, il faut que *B* et *F* représentent le même chiffre, ce qui est interdit, car chaque chiffre doit être utilisé une seule fois. Donc *C* n'est pas égal à 1.

C peut-il être égal à 5?

Si *C* est égal à 5 et si *B* est impair, *F* doit lui aussi être égal à 5, ce qui est interdit. Si *C* est égal à 5 et si *B* est pair, alors *F* doit être égal à 0, ce qui est interdit. Donc *C* n'est pas égal à 5.

C peut-il être égal à 6?

Si *C* est égal à 6, on examine les valeurs possibles de *B* et les valeurs correspondantes de *F* :

B	*F*	
1	6	Interdit car il y a deux 6.
2	2	Interdit car il y a deux 2.
3	8	Interdit car il ne peut y avoir un 8.
4	4	Interdit car il y a deux 4.
5	0	Interdit car il ne peut y avoir un 0.

Puisque tous ces résultats sont interdits, *C* n'est pas égal à 6.

C peut-il être égal à 4?

Si *C* est égal à 4, on utilise un tableau semblable au précédent pour démontrer que *B* doit être égal à 3 et que *F* doit être égal à 2. On y reviendra plus loin.

C peut-il être égal à 3?

Si C est égal à 3, on utilise un tableau semblable au précédent pour démontrer que B doit être égal à 2 ou à 4 et que F doit alors être égal à 6 ou à 2. On y reviendra.

C peut-il être égal à 2?

Si C est égal à 2, on utilise un tableau semblable au précédent pour démontrer que B doit être égal à 3 et que F doit alors être égal à 6. Dans ce cas, on a :

$$\begin{array}{ccc} & A & 3 \\ & \times & 2 \\ \hline D & E & 6 \end{array}$$

Puisque le produit $DE6$ est formé de trois chiffres et que A doit égaler 1, 4 ou 5, il faut que A soit égal à 5. On obtient alors le produit $53 \times 2 = 106$ qui est interdit, car il ne peut y avoir un 0.
On revient au cas où C est peut-être égal à 4. On a vu que B doit alors égaler 3 et que F doit égaler 2. A doit alors égaler 1, 5, ou 6, et chaque possibilité aboutit à une résultat interdit.

On conclut que C doit être égal à 3, puisque c'est le seul cas qui reste. Il faut tout de même vérifier que la multiplication est possible.
En utilisant le même argument que ci-haut, on obtient $54 \times 3 = 162$. Donc $C = 3$. Réponse : (B)

Partie A

1. On obtient :

$$1{,}000 + 0{,}101 + 0{,}011 + 0{,}001 = 1{,}113$$

Réponse : (B)

2. On peut faire des additions d'abord, ensuite les soustractions, puis les dernières additions :

$$\begin{aligned}&1+2+3-4+5+6+7-8+9+10+11-12\\&=6-4+18-8+30-12\\&=2+10+18\\&=30\end{aligned}$$

Réponse : (A)

3. Chacune des 25 œuvres de charité reçoit un vingt-cinquième du total, soit $3109\ \$ \div 25$, ou 124,36 $.

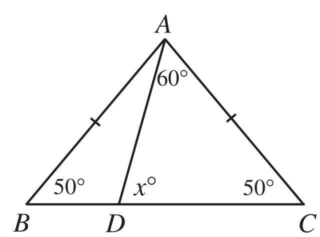
Réponse : (E)

4. Le carré de la racine carrée de 17 est $\left(\sqrt{17}\right)^2$, ce qui est égal à 17. Mettre au carré est l'opération réciproque de prendre la racine carrée.

Réponse : (C)

5. Puisque le triangle ABC est isocèle, $\angle ACB = \angle ABC = 50^\circ$.
Puisque la somme des mesures des angles du triangle ACD est égale à 180°, alors :

$$\begin{aligned}x^\circ + 60^\circ + 50^\circ &= 180^\circ\\ x &= 70\end{aligned}$$



Réponse : (A)

6. *Solution 1*
On peut défaire les opérations en soustrayant d'abord 13, puis en divisant par 2, ce qui donne $(89-13)\div 2$, ou 38.

Solution 2
Soit x le nombre. On a $2x+13=89$. Donc $2x=76$, d'où $x=38$.

Réponse : (D)

7. L'étendue de température est égale à la différence entre le maximum et le minimum. On calcule l'étendue dans le tableau suivant.

Jour	Étendue ($^\circ$C)
Lundi	$5-(-3)=8$
Mardi	$0-(-10)=10$
Mercredi	$-2-(-11)=9$
Jeudi	$-8-(-13)=5$
Vendredi	$-7-(-9)=2$

La plus grande étendue a été obtenue mardi. RÉPONSE : (B)

8. On écrit d'abord les nombres sous forme décimale pour mieux les comparer.

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &= 2{,}236... \\ 2{,}1 &= 2{,}1 \\ \tfrac{7}{3} &= 2{,}333... \\ 2{,}0\overline{5} &= 2{,}055... \\ 2\tfrac{1}{5} &= 2{,}2 \end{aligned}$$

On les place en ordre, du plus petit au plus grand : $2{,}0\overline{5}$, $2{,}1$, $2\frac{1}{5}$, $\sqrt{5}$, $\frac{7}{3}$.

Le nombre du milieu est $2\frac{1}{5}$. RÉPONSE : (E)

9. Puisque un tiers des 30 élèves de la classe sont des filles, il y a 10 filles dans la classe. Il y a donc 20 garçons dans la classe. Trois quarts des 20 garçons jouent au basket-ball. Il y a donc 15 garçons qui jouent au basket-ball. RÉPONSE : (E)

10. On récrit l'addition en colonne, tout en écrivant trois décimales pour chaque nombre :

$$\begin{array}{r} 15{,}200 \\ 1{,}520 \\ 0{,}15\square \\ +\ \square{,}128 \\ \hline 20{,}000 \end{array}$$

Puisque la somme des chiffres de la dernière colonne se termine en 0, la case dans cette colonne doit contenir un 2. On obtient alors :

$$\begin{array}{r} 15,200 \\ 1,520 \\ 0,152 \\ +\ \square,128 \\ \hline 20,000 \end{array}$$

On additionne les chiffres des trois colonnes à droite de la virgule. La somme des chiffres de la colonne des dixièmes nous donne une retenue de 1 pour la colonne des unités. Puisque la somme de la retenue et des chiffres de la colonne des unités se termine en 0, la case doit contenir un 3. La somme des chiffres dans les deux cases est donc égale à 5. (On vérifie que $15{,}2 + 1{,}52 + 0{,}152 + 3{,}128 = 20$.) RÉPONSE : (A)

Partie B

11. D'après le diagramme, il y a 10, 14, 7, 9 et 13 filles dans les cinq classes. La moyenne du nombre de filles par classe est égale à $\frac{10+14+7+9+13}{5}$, c'est-à-dire à $\frac{53}{5}$, ou 10,6.

RÉPONSE : (E)

12. L'aire de la photo initiale est égale à 20×25, ou 500 cm2. L'aire de la grande photo est égale à 25×30, ou 750 cm2. L'augmentation de l'aire est égale à $750 - 500$, ou 250 cm2.
On a $\frac{\text{augmentation de l'aire}}{\text{aire initiale}} = \frac{250}{500}$, ou $\frac{\text{augmentation de l'aire}}{\text{aire initiale}} = \frac{1}{2}$.
Ce rapport est égal à 50 %. RÉPONSE : (B)

13. Les mesures des angles sont dans un rapport de 2 : 3 : 4. Cela signifie que la mesure du premier angle se divise en 2 groupes, celle du deuxième angle en 3 groupes et celle du troisième angle en 4 groupes pour un total de 9 groupes. Or la somme de ces mesures est égale à 180°. Chaque groupe contient donc 20°. Le plus grand angle mesure donc $4 \times 20°$, ou 80°. On peut présenter cet argument sous forme algébrique, ou x représente le nombre de degrés de chaque groupe :
Puisque les mesures des angles sont dans un rapport de 2 : 3 : 4, soit $2x$, $3x$ et $4x$ les mesures respectives des angles en degrés. Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, alors :

$$\begin{aligned} 2x + 3x + 4x &= 180 \\ 9x &= 180 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Le plus grand angle mesure donc $4 \times 20°$, ou 80°. RÉPONSE : (C)

14. *Solution 1*

Puisque Josée a inscrit une note plus haute pour son meilleur résultat, cela ne change pas l'ordre des résultats lorsqu'elle les écrit en ordre croissant.
La note minimum n'est donc pas changée. De plus, la médiane (la note du milieu) n'est pas changée.
L'étendue et la moyenne sont-elles changées?
L'étendue est la différence entre la note la plus haute et la note la plus basse. En écrivant une note plus élevée pour son meilleur résultat, l'étendue devient plus grande.
Pour calculer la moyenne, on additionne les résultats et on divise la somme par 7. En écrivant une note plus élevée, la somme est changée et la moyenne aussi.
Donc deux des nombres sont changés, soit l'étendue et la moyenne.

Solution 2

Supposons que Josée a eu pour résultats 80, 81, 82, 83, 84, 85 et 86, mais qu'elle a écrit 100 au lieu de 86.
Avec ses vrais résultats, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, on obtient :

Moyenne	$\dfrac{80+81+82+83+84+85+86}{7}=83$
Médiane	83
Note minimum	80
Étendue	$86-80=6$

Avec les résultats 80, 81, 82, 83, 84, 85, 100, on obtient :

Moyenne	$\dfrac{80+81+82+83+84+85+100}{7}=85$
Médiane	83
Note minimum	80
Étendue	$100-80=20$

Donc deux des nombres sont changés, soit l'étendue et la moyenne. RÉPONSE : (C)

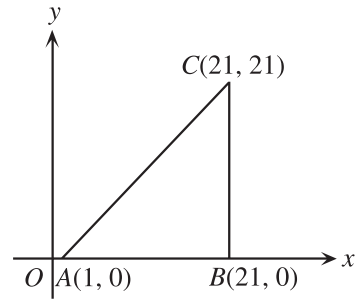
15. L'aire de la base du prisme est égale à 10×2, ou 20 m2. La hauteur du prisme (c'est-à-dire la profondeur de la fosse) est égale à 50 cm, ou 0,5 m. Le volume est donc égal à $20\times 0{,}5$, ou 10 m3.
Puisque la fosse est à moitié pleine au départ, il faut donc ajouter 5 m3 de sable pour la remplir.
RÉPONSE : (B)

16. On évalue cette « fraction continue » étape par étape :

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)}=\frac{3}{5}$$

RÉPONSE : (A)

17. Le périmètre du triangle est la somme des longueurs des côtés. Pour faciliter le travail, on fait une esquisse de la situation. Puisque le côté AB est sur l'axe des x et que le côté BC est parallèle à l'axe des y, le triangle est rectangle et on peut utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la longueur de l'hypoténuse AC.
Or $AB = 20$ et $BC = 21$. Donc :



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 20^2 + 21^2$$
$$AC^2 = 400 + 441$$
$$AC^2 = 841$$
$$AC = 29$$

Le périmètre est égal à $20 + 21 + 29$, ou 70. RÉPONSE : (A)

18. *Solution 1*

Si $-3x^2 < -14$, alors $3x^2 > 14$, d'où $x^2 > \frac{14}{3}$, ou $x^2 > 4\frac{2}{3}$.
Les seuls nombres de l'ensemble qui vérifient cette inéquation sont –5, –4, –3 et 3.

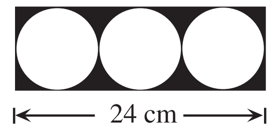
Solution 2

Pour chaque nombre x de l'ensemble, on calcule la valeur de $-3x^2$:

x	$-3x^2$
–5	–75
–4	–48
–3	–27
–2	–12
–1	–3
0	0
1	–3
2	–12
3	–27

Les nombres –5, –4, –3 et 3 vérifient l'inéquation. RÉPONSE : (D)

19. Puisque les cercles se touchent et qu'ils touchent aux extrémités du rectangle, la longueur du rectangle, soit 24 cm, est égale à trois fois le diamètre du cercle.
Chaque cercle a donc un diamètre de 8 cm et un rayon de 4 cm, tandis que le rectangle a une hauteur de 8 cm.
On a donc :



Aire de la région ombrée
= Aire du rectangle − Aire des trois cercles
$= (24 \times 8) - 3\left[\pi(4)^2\right]$
$= 192 - 48\pi$
$\approx 192 - 150{,}80$ (en utilisant $\pi \approx 3{,}14$)
$= 41{,}20$

L'aire de la région ombrée, arrondie au centimètre carré près, est égale à 41 cm^2.

Réponse : (A)

20. Le problème est difficile à cause des deux lettres identiques. On peut surmonter cette difficulté en collant temporairement une étiquette T par dessus un des S, ce qui fait que les lettres sont maintenant G, A, U, S et T. On veut maintenant calculer la probabilité pour que Luc choisisse le S et le T lorsqu'il choisit deux tuiles au hasard.
Supposons que Luc choisit les tuiles une à la fois. Pour son premier choix, il peut choisir n'importe quelle des 5 tuiles, ce qui fait 5 choix. Pour chacun de ces choix, il peut choisir n'importe quelle des 4 tuiles qui restent, ce qui fait 4 choix. Il y a donc 20 choix possibles pour les deux tuiles. (On peut écrire les 20 choix au long pour s'assurer que le nombre total de choix est égal à 5×4 et non pas à $5 + 4$.)
Dans deux des 20 choix, on retrouve les lettres *S* et *T*. Or dans ces deux choix, on a vraiment choisi les deux S. La probabilité de choisir les deux S est donc égale à $\frac{2}{20}$, ou $\frac{1}{10}$.

Réponse : (D)

Partie C

21. Examinons d'abord quelques exemples de quatre entiers positifs consécutifs dont la somme est un multiple de 5. Cela nous permettra peut-être de conclure que quelques-uns des énoncés ne sont pas toujours vrais.
On considère 1, 2, 3 et 4, dont la somme est 10. On peut éliminer le choix (A), car la somme ne se termine pas par un 5. On peut aussi éliminer le choix (B), car le plus grand des nombres ne se termine pas par un 9.
On considère maintenant 6, 7, 8 et 9, dont la somme est 30, et que l'on peut découvrir par tâtonnements. On peut éliminer le choix (C), car le plus petit des nombres n'est pas impair. On peut aussi éliminer le choix (E), car aucun de ces nombres ne se termine par un 3.
Le seul choix qui reste est (D).

Pourquoi l'énoncé (D) est-il toujours vrai? Il est plutôt difficile de s'en convaincre. On devra faire appel à l'algèbre.
Si n est le plus petit des entiers, les trois autres sont $n+1$, $n+2$ et $n+3$. Leur somme est donc $n+n+1+n+2+n+3$, ou $4n+6$.
Or cette expression donne toujours des valeurs paires. Pour qu'elle donne un multiple de 5, l'expression $4n+6$ doit égaler un nombre qui se termine par 0. Pour cela, il faut que $4n$ égale un nombre qui se termine par 4. Quels sont les chiffres des unités possibles pour n? Les seules possibilités sont 1 et 6 ($4\times1=4$ et $4\times6=2\underline{4}$). Dans le premier cas, les quatre nombres se termineraient par 1, 2, 3 et 4 et dans le deuxième cas, les quatre nombres se termineraient par 6, 7, 8 et 9. Aucun de ces nombres n'est un multiple de 5. RÉPONSE : (D)

22. *Solution 1*
Si Carmina remplace les pièces de cinq cents par des pièces de dix cents et vice versa, elle gagne 1,80 $. Puisqu'on gagne 5 cents lorsqu'on remplace une pièce de cinq cents par une pièce de dix cents et que l'on perd 5 cents dans le cas contraire, elle a gagné $\frac{180}{5}$, ou 36 fois plus souvent qu'elle n'a perdu. Elle devait donc avoir 36 pièces de plus de cinq cents que de pièces de dix cents.
Ces 36 pièces de cinq cents supplémentaires valent 1,80 $. En plus de ces 36 pièces de cinq cents, elle a un nombre égal de pièces de cinq cents et de dix cents. Ensemble, une pièce de cinq cents et une pièce de dix cents valent 15 cents. Elle doit avoir $\frac{180}{15}$, ou 12 ensembles de pièces de cinq cents et de dix cents, c'est-à-dire 12 pièces de cinq cents et 12 pièces de dix cents.
En tout, Carmina a donc 48 pièces de cinq cents et 12 pièces de dix cents, pour un total de 60 pièces.

Solution 2
Supposons que Carmina a c pièces de cinq cents et d pièces de dix cents.
La valeur de ces pièces est égale à 360 cents, ce qui donne $5c+10d=360$.
Si elle échange les pièces de cinq cents pour des pièces de dix cents et vice versa, la valeur de ces pièces sera égale à 540 cents, ce qui donne $10c+5d=540$.
Si on additionne ces équations, membre par membre, on obtient :

$$\begin{aligned} 5c+10d+10c+5d &= 360+540 \\ 15c+15d &= 900 \\ c+d &= 60 \end{aligned}$$

Il y a donc 60 pièces en tout. (On remarque qu'il n'a pas été nécessaire de calculer le nombre de pièces de chaque sorte!)

Solution 3
Supposons que Carmina a c pièces de cinq cents et d pièces de dix cents.
La valeur de ces pièces est égale à 360 cents, ce qui donne $5c+10d=360$, ou $c+2d=72$, d'où $c=72-2d$.

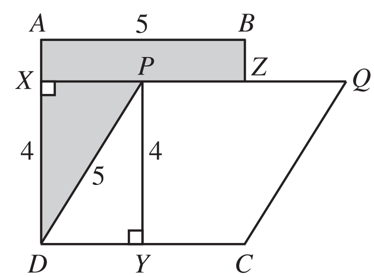
Après l'échange, on a :

$$\begin{aligned} 5d+10c &= 540 \\ 5d+10(72-2d) &= 540 \\ 5d+720-20d &= 540 \\ 180 &= 15d \\ d &= 12 \end{aligned}$$

Puisque $d=12$, alors $c=72-2(12)$, ou $c=48$.
Il y a donc 60 pièces en tout. Réponse : (D)

23. Supposons que les 12 plantes de tomates portent respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12 tomates. Il y aurait alors 78 tomates. Or on sait qu'il y a vraiment 186 tomates. Il y a donc 108 tomates de plus qu'il faut distribuer. Pour que les nombres demeurent consécutifs, il faut distribuer les 108 tomates également aux 12 plantes. Chacune doit donc en recevoir 9 de plus.
Les plantes ont donc 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 et 21 tomates respectivement.
La dernière plante porte donc 21 tomates. (On peut vérifier que $10+11+...+21=168$.)
Réponse : (D)

24. Puisque *ABCD* est un carré avec une aire de 25 cm^2, ses côtés ont une longueur de 5 cm. Puisque *PQCD* est un losange, il est aussi un parallélogramme. Son aire est donc égale au produit de sa base et de sa hauteur.
On prolonge QP jusqu'au point *X* sur *AD*. Au point *P*, on abaisse une perpendiculaire jusqu'au point *Y* sur *DC*.



L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du rectangle *ABZX* plus l'aire du triangle *PXD*.

Puisque le losange *PQCD* a une aire de 20 cm^2 et une base de 5 cm, sa hauteur *PY* doit mesurer 4 cm. On ajoute donc au diagramme les renseignements $DX=4$, $DP=5$ (puisque *PQCD* est un losange), $AX=1$ et $AB=5$.

Le rectangle *ABZX* a une base de 5 cm et une hauteur de 1 cm. Il a donc une aire de 5 cm^2.
Le triangle *PXD* est rectangle en *X*. Puisque $DP=5$ et $DX=4$, alors $PX=3$ selon le théorème de Pythagore. L'aire du triangle *PXD* est égale à $\frac{3\times 4}{2}$, ou 6 cm2.

L'aire de la région ombrée est donc égale à 11 cm^2. Réponse : (C)

25. Puisqu'une des diagonales est remplie, on connaît le produit des nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale, soit $6\times 12\times 24$, ou 1728.
La première rangée et la première colonne ont chacune deux cases occupées. La troisième case doit donc contenir un nombre égal à 1728, divisé par le produit des nombres des deux autres cases.

On a donc :

N	$\frac{1728}{24N}$	24
$\frac{1728}{6N}$	12	
6		$\frac{1728}{12N}$

On simplifie pour obtenir :

N	$\frac{72}{N}$	24
$\frac{288}{N}$	12	
6		$\frac{144}{N}$

On remplit les deux autres cases en procédant de la même façon :

N	$\frac{72}{N}$	24
$\frac{288}{N}$	12	$\frac{1}{2}N$
6	$2N$	$\frac{144}{N}$

Puisque chaque case doit contenir un entier strictement positif, alors les nombres N, $2N$, $\frac{1}{2}N$, $\frac{72}{N}$, $\frac{144}{N}$ et $\frac{288}{N}$ sont des entiers strictement positifs.

On examine ces expressions une à une.

Si N est un entier, $2N$ est aussi un entier.

Si $\frac{1}{2}N$ est un entier, alors N doit être un entier pair.

Si $\frac{72}{N}$ est un entier, alors N doit être un diviseur de 72.

Si $\frac{144}{N}$ est un entier, alors N doit être un diviseur de 144. Or puisque N doit être un diviseur de 72 et que $144 = 2 \times 72$, alors N sera de ce fait un diviseur de 144.

De même, si N est un diviseur de 72, il sera de ce fait un diviseur de 288 et $\frac{288}{N}$ sera un entier.

Pour résumer, N doit être un diviseur pair de 72.

Les diviseurs positifs de 72 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72.

Neuf d'entre eux sont pairs. Il y a donc 9 valeurs possibles pour N. RÉPONSE : (C)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2002 Solutions

Concours Gauss

(7e et 8e années – Sec. I et II)

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Comité exécutif	Barry Ferguson (Directeur), Peter Crippin, Ruth Malinowski, Ian VanderBurgh
Le directeur d'operation	Barry Ferguson, University of Waterloo
Ordinatique	Steve Breen, University of Waterloo Don Cowan, University of Waterloo
Compilateurs du rapport du Concours Gauss	Lloyd Auckland, University of Waterloo Barry Ferguson, University of Waterloo
Documentation	Bonnie Findlay, University of Waterloo
Publications	Bonnie Findlay, University of Waterloo
Version française	André Ladouceur, Collège catholique Samuel-Genest, Ottawa Robert Laliberté, École secondaire publique Louis-Riel Gérard Proulx, Collège catholique Franco-Ouest, Ottawa Rodrigue St-Jean, École secondaire Embrun, Embrun
Adjoints à la technique	Joanne Kursikowski, Linda Schmidt, Kim Schanrr
Comité de validation	Ed Anderson, University of Waterloo, Waterloo John Barsby, St. John's-Ravenscourt School, Winnipeg Jean Collins, (retraité), Thornhill Ron Scoins, University of Waterloo, Waterloo

Comité Gauss

Solutions Gauss 2002

Bob McRoberts (Chair)
Dr. G.W. Williams S.S.
Aurora, Ontario

Richard Auckland
Southwood Public School
St. Thomas, Ontario

Mark Bredin (Assoc. Chair)
St. John's-Ravenscourt School
Winnipeg, Manitoba

Sandy Emms Jones
Forest Heights C.I.
Kitchener, Ontario

Joanne Halpern
Toronto, Ontario

David Matthews
University of Waterloo
Waterloo, Ontario

John Grant McLoughlin
Memorial University of Newfoundland
St. John's, Newfoundland

Patricia Tinholt
Valley Park Middle School
Don Mills, Ontario

Sue Trew
Holy Name of Mary S.S.
Mississauga, Ontario

Partie A

1. Si on place les nombres 8, 3, 5, 0 et 1 en ordre, du plus petit au plus grand, le nombre au milieu est :
(**A**) 5 (**B**) 8 (**C**) 3 (**D**) 0 (**E**) 1

Solution
Si on place les nombres en ordre, du plus petit au plus grand, on obtient 0, 1, 3, 5, 8. Le nombre au milieu est 3.
RÉPONSE : (C)

2. La valeur de $0{,}9 + 0{,}99$ est :
(**A**) 0,999 (**B**) 1,89 (**C**) 1,08 (**D**) 1,98 (**E**) 0,89

Solution
On additionne :

$$\begin{array}{r} 0{,}9 \\ +\ 0{,}99 \\ \hline 1{,}89 \end{array}$$

RÉPONSE : (B)

3. $\dfrac{2+1}{7+6}$ est égal à :
(**A**) $\frac{3}{13}$ (**B**) $\frac{21}{76}$ (**C**) $\frac{1}{21}$ (**D**) $\frac{2}{13}$ (**E**) $\frac{1}{14}$

Solution
On a $\dfrac{2+1}{7+6} = \dfrac{3}{13}$.
RÉPONSE : (A)

4. 20 % de 20 est égal à :
(**A**) 400 (**B**) 100 (**C**) 5 (**D**) 2 (**E**) 4

Solution
20 % de 20 est égal à 0,2 ¥ 20, ou 4.
D'une autre façon, on sait que 20 % de 20 est égal à $\frac{1}{5}$ de 20, ou 4.
RÉPONSE : (E)

5. Trina gagne 5 $ l'heure à garder des enfants. Cette semaine, elle a gardé pendant 7 heures. Si elle avait 20 $ en banque au début de la semaine et si elle dépose tout ce qu'elle a gagné dans son compte sans retirer d'argent, quelle somme aura-t-elle en banque?
(**A**) 35 $ (**B**) 20 $ (**C**) 45 $ (**D**) 55 $ (**E**) 65 $

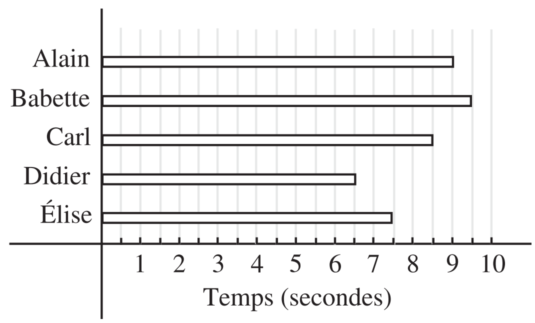
Solution

Puisque Trina gagne 5 $ l'heure pendant 7 heures, elle gagne 7 ¥ 5 $, ou 35 $ en tout. Comme elle avait déjà 20 $ en banque et qu'elle y ajoute 35 $, elle aura 20 $ + 35 $, ou 55 $ en banque.

RÉPONSE : (D)

6. Cinq rats ont participé à une course de 25 mètres. Le diagramme indique le temps que chaque rat a mis pour compléter la course. Quel rat a gagné la course?

(**A**) Alain (**B**) Babette (**C**) Carl
(**D**) Didier (**E**) Élise



Solution

Le rat qui a mis le moins de temps à compléter la course a gagné. Il s'agit donc de Didier.

RÉPONSE : (D)

7. La moyenne des nombres 12, 14, 16 et 18 est égale à :

(**A**) 30 (**B**) 60 (**C**) 17 (**D**) 13 (**E**) 15

Solution

La moyenne des nombres est égale à $\frac{12+14+16+18}{4}$, c'est-à-dire à $\frac{60}{4}$, ou 15.

RÉPONSE : (E)

8. Si $P=1$ et $Q=2$, laquelle des expressions suivantes ne représente **pas** un nombre entier?

(**A**) $P+Q$ (**B**) $P ¥ Q$ (**C**) $\frac{P}{Q}$ (**D**) $\frac{Q}{P}$ (**E**) P^Q

Solution

On évalue les diverses expressions :

(A) $P+Q=3$ **(B)** $P ¥ Q=2$ **(C)** $\frac{P}{Q}=\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{Q}{P}=\frac{2}{1}=2$ **(E)** $P^Q=1^2=1$

RÉPONSE : (C)

9. Quatre amis partagent les $\frac{3}{4}$ d'une pizza qu'il reste après une fête. Si chaque ami reçoit la même quantité, quelle fraction d'une pizza complète chacun reçoit-il?

(**A**) $\frac{3}{8}$ (**B**) $\frac{3}{16}$ (**C**) $\frac{1}{12}$ (**D**) $\frac{1}{16}$ (**E**) $\frac{1}{8}$

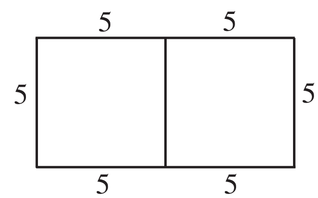
Solution

Si quatre amis partagent $\frac{3}{4}$ d'une pizza, chacun reçoit $\frac{1}{4}$ de $\frac{3}{4}$ de la pizza, c'est-à-dire $\frac{1}{4} ¥ \frac{3}{4}$, ou $\frac{3}{16}$ de la pizza.

RÉPONSE : (B)

10. On place côte à côte deux carrés, ayant chacun une aire de 25 cm^2, de manière à former un rectangle. Quel est le périmètre de ce rectangle?
(**A**) 30 cm (**B**) 25 cm (**C**) 50 cm (**D**) 20 cm (**E**) 15 cm

Solution
On place les deux carrés côte à côte pour obtenir le rectangle ci-contre. Ce rectangle a un périmètre de 30 cm.



Réponse : (A)

Partie B

11. Ginette a couru une distance de 50 mètres, ce qui correspond à 25 % de la course. Quelle est la longueur de la course, en mètres?
(**A**) 100 (**B**) 1250 (**C**) 200 (**D**) 12,5 (**E**) 400

Solution
Puisque 50 mètres correspondent à 25 %, ou $\frac{1}{4}$ de la course, la longueur de la course est égale à $4 ¥ 50$, ou 200 mètres. Réponse : (C)

12. Qaddama a 6 ans de plus que Gilles. Gilles a 3 ans de moins que Denis. Si Qaddama est âgée de 19 ans, quel est l'âge de Denis?
(**A**) 17 ans (**B**) 16 ans (**C**) 10 ans (**D**) 18 ans (**E**) 15 ans

Solution
Puisque Qaddama est âgée de 19 ans et qu'elle a 6 ans de plus que Gilles, Gilles a 13 ans. Puisque Gilles a 3 ans de moins que Denis, Denis a 16 ans. Réponse : (B)

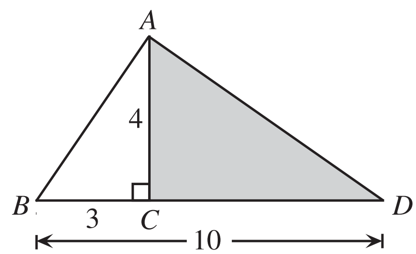
13. Un nombre palindrome est un nombre entier strictement positif qui peut être lu de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, 2002 est un palindrome. Quel est le plus petit nombre que l'on peut ajouter à 2002 pour obtenir un plus grand palindrome?
(**A**) 11 (**B**) 110 (**C**) 108 (**D**) 18 (**E**) 1001

Solution
On peut résoudre le problème de façon efficace en cherchant le premier palindrome après 2002. Ce palindrome doit avoir la forme $2aa2$ et puisque a doit être supérieur à 0, le palindrome suivant doit être 2112. Le plus petit nombre que l'on peut ajouter à 2002 est donc $2112 - 2002$, ou 110.
Réponse : (B)

14. On attribue aux six premières lettres de l'alphabet les valeurs suivantes : A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, E = 5 et F = 6. La valeur d'un mot est égale à la somme des valeurs de ses lettres. Par exemple, la valeur du mot ABBE est $1+2+2+5$, ou 10. Lequel des mots suivants a la plus grande valeur?
(**A**) ABBE (**B**) FACE (**C**) FADE (**D**) DECA (**E**) CAFE

Solution
Les mots ont les valeurs suivantes :
ABBE : $1+2+2+5=10$ FACE : $6+1+3+5=15$ FADE : $6+1+4+5=16$
DECA : $4+5+3+1=13$ CAFE : $3+1+6+5=15$
FADE a la plus grande valeur. RÉPONSE : (C)

15. Dans le diagramme, on a $AC=4$, $BC=3$ et $BD=10$. L'aire du triangle ombré est égale à :
(**A**) 14 (**B**) 20 (**C**) 28
(**D**) 25 (**E**) 12



Solution
Puisque $BD=10$ et $BC=3$, alors $CD=7$. L'aire du triangle ombré est égale à $\frac{1}{2}(7)(4)$, ou 14.
RÉPONSE : (A)

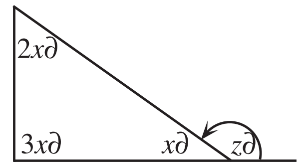
16. Dans les égalités suivantes, les lettres a, b et c représentent des nombres différents.

$$1^3=1$$
$$a^3=1+7$$
$$3^3=1+7+b$$
$$4^3=1+7+c$$

La valeur numérique de $a+b+c$ est :
(**A**) 58 (**B**) 110 (**C**) 75 (**D**) 77 (**E**) 79

Solution
Puisque $a^3=1+7$, alors $a^3=8$, d'où $a=2$.
Puisque $3^3=27$, la troisième égalité devient $27=8+b$, d'où $b=19$.
Puisque $4^3=64$, la quatrième égalité devient $64=8+c$, d'où $c=56$.
Donc $a+b+c=2+19+56$, ou 77. RÉPONSE : (D)

17. Dans le diagramme, la valeur de z est :
(**A**) 150 (**B**) 180 (**C**) 60
(**D**) 90 (**E**) 120



Solution

Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle égale 180∂, alors :

$$2x∂ + 3x∂ + x∂ = 180∂$$
$$6x∂ = 180∂$$
$$x = 30$$

Puisque les angles qui mesurent $x∂$ et $z∂$ forment un angle plat et que $x∂ = 30∂$, alors $z∂ = 150∂$.

RÉPONSE : (A)

18. Un nombre parfait est un entier qui est égal à la somme de tous ses diviseurs positifs qui sont plus petits que lui. Par exemple, 28 est un nombre parfait car $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Lequel des nombres suivants est un nombre parfait?
(**A**) 10 (**B**) 13 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

Solution

On vérifie chaque choix.

	Nombre	Diviseurs positifs	Somme des diviseurs qui sont plus petits
(A)	10	1, 2, 5, 10	$1 + 2 + 5 = 8$
(B)	13	1, 13	1
(C)	6	1, 2, 3, 6	$1 + 2 + 3 = 6$
(D)	8	1, 2, 4, 8	$1 + 2 + 4 = 7$
(E)	9	1, 3, 9	$1 + 3 = 4$

Le seul nombre parfait est 6. (Les deux nombres parfaits suivants, après 6 et 28, sont 496 et 8128.)

RÉPONSE : (C)

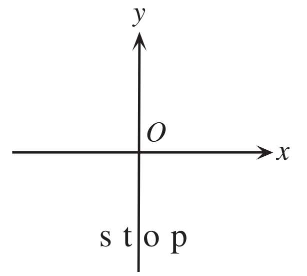
19. Sabine a écrit le numéro de téléphone de Davina dans son cahier de mathématiques. Plus tard, en corrigeant ses devoirs, elle a accidentellement effacé les deux derniers chiffres du numéro de téléphone. Il ne lui restait plus que 893-44_ _. Sabine tente alors de téléphoner à Davina en composant les numéros qui commencent par 893-44. Quel est le plus petit nombre d'appels qu'elle doit faire pour être certaine de rejoindre la maison de Davina?
(**A**) 100 (**B**) 90 (**C**) 10 (**D**) 1000 (**E**) 20

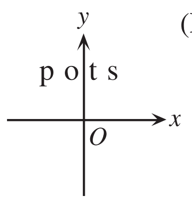
Solution

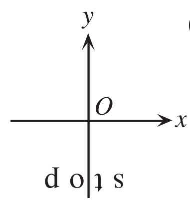
Le numéro de téléphone de Davina pourrait être n'importe quel numéro de 893-4400 à 893-4499. Il y a 100 tels numéros. Pour être certaine de rejoindre la maison de Davina, le plus petit nombre d'appels que Sabine doit faire est 100. On peut aussi s'y prendre d'une autre façon. Le numéro de Davina est de la forme 8 9 3 - 4 4 $\underline{a}$ $\underline{b}$ et il y a 10 possibilités pour le chiffre a. Pour chacune de ces possibilités, il y a 10 possibilités pour le chiffre b. Le nombre total de possibilités est donc égal à 10¥10, ou 100.

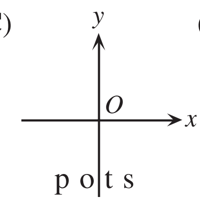
RÉPONSE : (A)

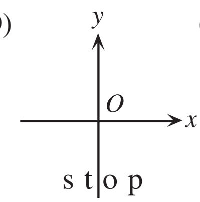
20. On place le mot « stop » dans la position illustrée dans le diagramme ci-contre. On lui fait subir une rotation de centre à l'origine O et de 180∂ dans le sens des aiguilles d'une montre, suivie d'une réflexion par rapport à l'axe des x. Lequel des diagrammes suivants représente l'image finale?

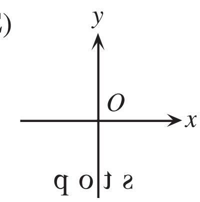


(**A**)


(**B**)


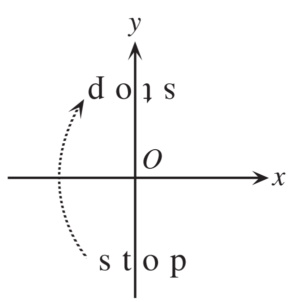
(**C**)


(**D**)


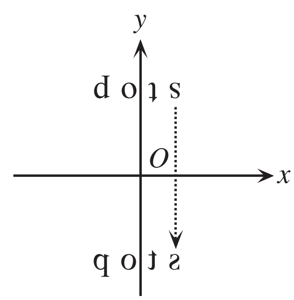
(**E**)


Solution

Le premier diagramme illustre l'image par une rotation de 180°. Le deuxième diagramme illustre l'image de cette image par la réflexion.



Rotation de 180°



Réflexion par rapport à l'axe des x

RÉPONSE : (E)

Partie C

21. Cinq personnes participent à une réunion dans une salle. À la fin de la réunion, chaque personne serre la main de chaque autre personne dans la salle, une fois chacune. Combien y a-t-il eu de serrements de mains?

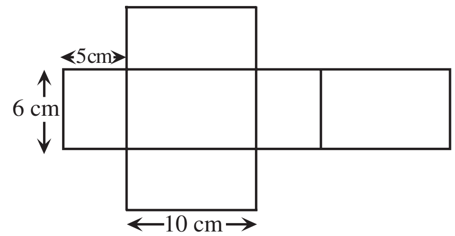
(**A**) 5 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 15 (**E**) 25

Solution

Chacune des cinq personnes serre la main de quatre autres personnes, ce qui fait 20 serrements de mains. Or on a compté chaque serrement de mains deux fois (p. ex., on a compté A qui serre la main de B et B qui serre la main de A). Il faut donc diviser le nombre par 2, ce qui donne 10 serrements de mains en tout. RÉPONSE : (B)

22. On peut plier la figure ci-contre le long des lignes pour former un prisme à base rectangulaire. L'aire totale de la surface du prisme, en centimètres carrés, est égale à :

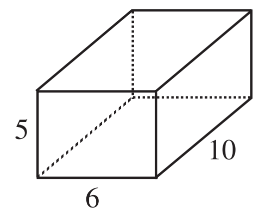
(**A**) 312 (**B**) 300 (**C**) 280
(**D**) 84 (**E**) 600



Solution

L'aire totale de la surface est égale à $2(5\times 6+5\times 10+6\times 10)$, ou 280 cm^2.

On peut aussi construire le prisme illustré ci-contre. Toutes les faces sont des rectangles. Deux rectangles ont une aire de 30 cm^2, deux rectangles ont une aire de 50 cm^2 et deux rectangles ont une aire de 60 cm^2. L'aire totale est égale à 280 cm^2.



RÉPONSE : (C)

23. Marc tient un sac qui contient 3 billes noires, 6 billes jaunes, 2 billes mauves et 6 billes rouges. Il ajoute ensuite un nombre de billes blanches aux autres billes du sac et il fait savoir à Suzanne que si elle choisit au hasard une bille dans le sac, la probabilité de choisir une bille jaune ou noire est égale à $\frac{3}{7}$. Le nombre de billes blanches que Marc a ajoutées à son sac est égal à :

(**A**) 5 (**B**) 2 (**C**) 6 (**D**) 4 (**E**) 3

Solution

Puisque la probabilité de choisir une bille jaune ou noire est égale à $\frac{3}{7}$, le nombre de billes dans le sac doit être un multiple de 7. Donc il y a peut-être 7, 14, 21, 28, … billes dans le sac. Puisqu'il y a 9 billes qui sont jaunes ou noires et que $\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$, il y a 21 billes dans le sac. Puisqu'il y avait 17 billes dans le sac au départ, Marc a ajouté 4 billes blanches à son sac.

On pourrait aussi représenter le nombre de billes blanches que Marc a ajoutées par l'inconnue b. On aurait alors l'équation :

$$\frac{\text{Nombre de billes jaunes ou noires}}{\text{Nombre total de billes}}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{9}{17+b}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{9}{17+b}=\frac{9}{21}\quad\text{(on a choisi le même numérateur 9)}$$

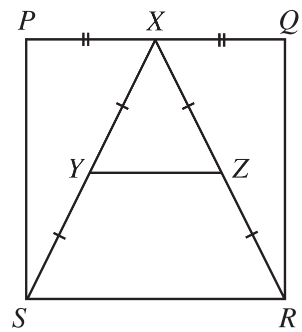
On a donc $17+b=21$, d'où $b=4$.

Le nombre de billes blanches ajoutées est égal à 4.

RÉPONSE : (D)

24. *PQRS* est un carré avec des côtés de longueur 8. *X* est le milieu du côté *PQ*, tandis que *Y* et *Z* sont les milieux respectifs de *XS* et de *XR*. L'aire du trapèze *YZRS* est égale à :

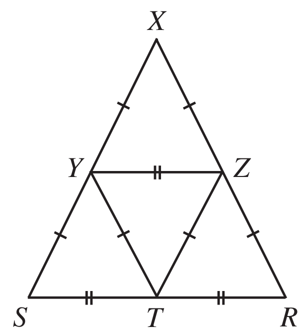
(**A**) 24 (**B**) 16 (**C**) 20
(**D**) 28 (**E**) 32



Solution

Le triangle *XSR* a une aire égale à $\frac{1}{2}(8)(8)$, ou 32. On choisit le milieu *T* du côté *SR* et on trace les segments *TY* et *TZ* pour obtenir le diagramme ci-contre.

Le triangle *XSR* est donc formé de 4 triangles identiques et l'aire de chacun est donc égale à $\frac{1}{4}(32)$, ou 8. Puisque le trapèze *YZRS* est formé de trois de ces triangles, son aire est égale à 3×8, ou 24.



Réponse : (A)

25. Le produit des chiffres de l'entier 226 est égal à 24. Il en est de même pour l'entier 318. Combien y a-t-il d'entiers positifs de trois chiffres dont le produit des chiffres est égal à 24?

(**A**) 4 (**B**) 18 (**C**) 24 (**D**) 12 (**E**) 21

Solution

On détermine les façons de multiplier trois nombres d'un chiffre pour obtenir 24.

i) $24 = 1 \times 4 \times 6$

ii) $24 = 1 \times 3 \times 8$

iii) $24 = 2 \times 3 \times 4$

iv) $24 = 2 \times 2 \times 6$

Dans le cas i), on peut former 6 nombres avec ces chiffres, soit 146, 164, 416, 461, 614 et 641.
Il en est de même dans les cas ii) et iii).
Dans le cas iv), on peut former 3 nombres avec ces chiffres, soit 226, 262 et 622.
En tout, il y a $6 + 6 + 6 + 3$, ou 21 nombres possibles. Réponse : (E)

* * * * *

Partie A

1. La valeur de $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ est :

(**A**) 1 (**B**) $\frac{1}{8}$ (**C**) $\frac{1}{6}$ (**D**) $\frac{2}{6}$ (**E**) $\frac{3}{4}$

Solution

On sait que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. On peut aussi utiliser un dénominateur commun : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$, ou $\frac{3}{4}$.

RÉPONSE : (E)

2. L'expression $6\times1000+5\times100+6\times1$ est équivalente au nombre :

(**A**) 656 (**B**) 6506 (**C**) 6056 (**D**) 60 506 (**E**) 6560

Solution

$$\begin{aligned}6\times1000+5\times100+6\times1&=6000+500+6\\&=6506\end{aligned}$$

RÉPONSE : (B)

3. La valeur de $3^2-(4\times2)$ est :

(**A**) 4 (**B**) 17 (**C**) 1 (**D**) –2 (**E**) 0

Solution

On calcule en tenant compte de l'ordre des opérations :

$$\begin{aligned}3^2-(4\times2)&=9-(4\times2)\\&=9-8\\&=1\end{aligned}$$

RÉPONSE : (C)

4. On divise un nombre entier par 7 et on obtient un reste de 4. Le nombre entier pourrait être :

(**A**) 14 (**B**) 15 (**C**) 16 (**D**) 17 (**E**) 18

Solution

On remarque, parmi les choix de réponses, que 14 est un multiple de 7. Donc le nombre 18, qui est 4 de plus que 14, donnera un reste de 4 si on le divise par 7.

RÉPONSE : (E)

5. Laquelle des expressions suivantes est égale à un nombre impair?

(**A**) $3(5)+1$ (**B**) $2(3+5)$ (**C**) $3(3+5)$ (**D**) $3+5+1$ (**E**) $\frac{3+5}{2}$

Solution

On évalue les diverses expressions :

(**A**) $3(5)+1=16$ (**B**) $2(3+5)=16$ (**C**) $3(3+5)=24$ (**D**) $3+5+1=9$ (**E**) $\frac{3+5}{2}=4$

Seul le choix **(D)** donne un nombre impair.

RÉPONSE : (D)

6. Qaddama a 6 ans de plus que Gilles. Gilles a 3 ans de moins que Denis. Si Qaddama est âgée de 19 ans, quel est l'âge de Denis?
(**A**) 17 ans (**B**) 16 ans (**C**) 10 ans (**D**) 18 ans (**E**) 15 ans

Solution
Puisque Qaddama est âgée de 19 ans et qu'elle a 6 ans de plus que Gilles, Gilles a 13 ans. Puisque Gilles a 3 ans de moins que Denis, Denis a 16 ans. RÉPONSE : (B)

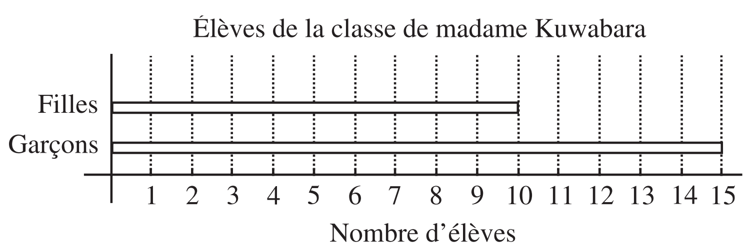
7. Une boîte de forme rectangulaire a un volume de 144 cm^3. Si la boîte a une longueur de 12 cm et une largeur de 6 cm, quelle est sa hauteur?
(**A**) 126 cm (**B**) 72 cm (**C**) 4 cm (**D**) 8 cm (**E**) 2 cm

Solution
La base de la boîte a une aire de $(12 \times 6) \text{ cm}^2$, ou 72 cm^2. Puisque le volume est égal à (l'aire de la base) $\times$ (la hauteur) et que $72 \times 2 = 144$, la boîte a une hauteur de 2 cm.
RÉPONSE : (E)

8. Dans un pot, le rapport du nombre de biscuits à l'avoine au nombre de biscuits au chocolat est égal à 5:2. S'il y a 20 biscuits à l'avoine dans le pot, le nombre de biscuits au chocolat est égal à :
(**A**) 28 (**B**) 50 (**C**) 8 (**D**) 12 (**E**) 18

Solution
Le rapport $5:2$ indique qu'il y a 5 groupes de biscuits à l'avoine pour 2 groupes de biscuits au chocolat. Puisqu'il y a 20 biscuits à l'avoine, il y a 4 biscuits par groupe. Il y a donc 8 biscuits au chocolat.
De façon algébrique, on peut représenter le nombre de biscuits au chocolat par x. On a donc $5:2 = 20:x$, ou $\frac{5}{2} = \frac{20}{x}$. On peut comparer les fractions en choisissant le même numérateur.
Puisque $\frac{5}{2} = \frac{20}{8}$, l'équation devient $\frac{20}{8} = \frac{20}{x}$. Donc $x = 8$. RÉPONSE : (C)

9. Le diagramme ci-dessous indique le nombre de garçons et de filles dans la classe de madame Kuwabara. Le pourcentage des élèves de la classe qui sont des filles est égal à :
(**A**) 40 % (**B**) 15 % (**C**) 25 % (**D**) 10 % (**E**) 60 %



Solution

D'après le diagramme, il y a 10 filles et 15 garçons, c'est-à-dire 25 élèves dans la classe. Le rapport du nombre de filles au nombre d'élèves est égal à $\frac{10}{25}$, ou $\frac{40}{100}$. Le pourcentage des élèves de la classe qui sont des filles est égal à 40 %. On peut aussi calculer $\frac{10}{25} \times 100\,\%$ pour obtenir 40 %.

RÉPONSE : (A)

10. Lequel des énoncés suivants **n'est pas** vrai?
(**A**) Un quadrilatère a quatre côtés.
(**B**) Les mesures des angles d'un triangle ont une somme de $180°$.
(**C**) Un rectangle a quatre angles de $90°$.
(**D**) Un triangle peut avoir deux angles de $90°$.
(**E**) Un rectangle est un quadrilatère.

Solution
Un quadrilatère a quatre côtés par définition.
Les mesures des angles d'un triangle ont une somme de $180°$.
Un rectangle a quatre angles de $90°$.
Un rectangle est un quadrilatère puisqu'il a quatre côtés.
Un triangle ne peut avoir deux angles de 90°, puisque la somme des mesures des angles est égale à 180° et que le troisième angle ne peut mesurer 0°.

RÉPONSE : (D)

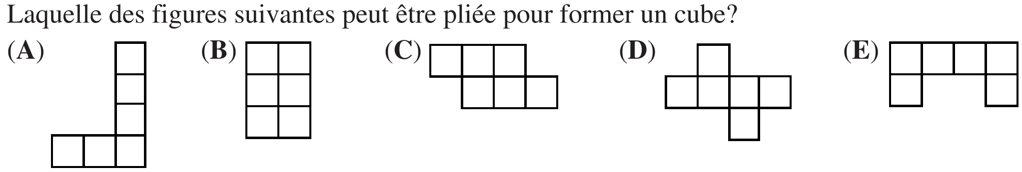
Partie B

11. Un nombre palindrome est un nombre entier strictement positif qui peut être lu de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, 2002 est un palindrome. Quel est le plus petit nombre que l'on peut ajouter à 2002 pour obtenir un plus grand palindrome?
(**A**) 11 (**B**) 110 (**C**) 108 (**D**) 18 (**E**) 1001

Solution
On peut résoudre le problème de façon efficace en cherchant le premier palindrome après 2002. Ce palindrome doit avoir la forme $2aa2$ et puisque a doit être supérieur à 0, le palindrome suivant doit être 2112. Le plus petit nombre que l'on peut ajouter à 2002 est donc $2112 - 2002$, ou 110.

RÉPONSE : (B)

12. Laquelle des figures suivantes peut être pliée pour former un cube?



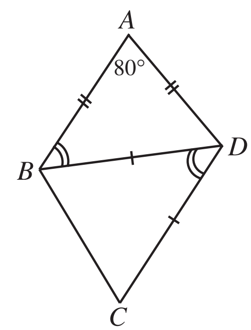
Solution
Seule la figure (**D**) peut être pliée pour former cube. On peut vérifier en découpant les figures et en essayant de les plier.

RÉPONSE : (D)

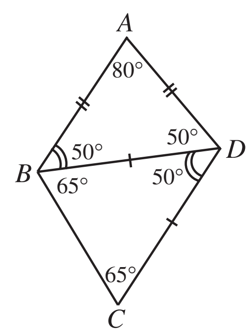
13. Si $a+b=12$, $b+c=16$ et $c=7$, quelle est la valeur de a?
(**A**) 1 (**B**) 5 (**C**) 9 (**D**) 7 (**E**) 3

Solution
Puisque $c=7$ et que $b+c=16$, alors $b+7=16$, d'où $b=9$.
Puisque $b=9$ et que $a+b=12$, alors $a+9=12$, d'où $a=3$. RÉPONSE : (E)

14. Dans le diagramme, $\angle ABD = \angle BDC$ et $\angle DAB = 80°$.
De plus, $AB = AD$ et $DB = DC$.
La mesure de l'angle BCD est égale à :
(**A**) 65° (**B**) 50° (**C**) 80°
(**D**) 60° (**E**) 70°



Solution
Puisque le triangle ABD est isocèle, $\angle ABD = \angle ADB$.
Puisque la somme des mesures des angles de ce triangle est égale à 180 et que $\angle A = 80°$, alors $\angle ABD = 50°$ et $\angle ADB = 50°$. Donc $\angle BDC = 50°$.
Puisque le triangle BDC est isocèle, on utilise le même argument pour démontrer que $\angle BCD = 65^\circ$.



RÉPONSE : (A)

15. Un nombre parfait est un entier qui est égal à la somme de tous ses diviseurs positifs qui sont plus petits que lui. Par exemple, 28 est un nombre parfait car $28 = 1+2+4+7+14$. Lequel des nombres suivants est un nombre parfait?
(**A**) 10 (**B**) 13 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

Solution
On vérifie chaque choix.

	Nombre	Diviseurs positifs	Somme des diviseurs qui sont plus petits
(A)	10	1, 2, 5, 10	$1+2+5=8$
(B)	13	1, 13	1
(C)	6	1, 2, 3, 6	$1+2+3=6$
(D)	8	1, 2, 4, 8	$1+2+4=7$
(E)	9	1, 3, 9	$1+3=4$

Le seul nombre parfait est 6. (Les deux nombres parfaits suivants, après 6 et 28, sont 496 et 8128.)
RÉPONSE : (C)

16. On lance trois pièces de monnaie. Quelle est la probabilité pour qu'elles tombent FACE toutes les trois?

(**A**) $\frac{1}{8}$ (**B**) $\frac{1}{6}$ (**C**) $\frac{1}{4}$ (**D**) $\frac{1}{3}$ (**E**) $\frac{1}{2}$

Solution

On peut utiliser un arbre pour obtenir tous les résultats possibles :

PPP	PPF	PFP	PFF
FPP	FPF	FFP	FFF

Il y a donc 8 résultats possibles et ils ont tous la même probabilité. Un seul de ces résultats est favorable. La probabilité pour que les pièces tombent FACE toutes les trois est égale à $\frac{1}{8}$.

D'autre part, on sait que si on lance une pièce de monnaie, la probabilité pour qu'elle tombe FACE est égale à $\frac{1}{2}$. Donc la probabilité pour que les pièces de monnaie tombent FACE toutes les trois est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{8}$. RÉPONSE : (A)

17. Si P est un entier strictement négatif, laquelle des expressions suivantes est positive?

(**A**) P^2 (**B**) $\frac{1}{P}$ (**C**) $2P$ (**D**) $P-1$ (**E**) P^3

Solution

On peut évaluer chaque expression en utilisant $P = -1$.

(**A**) $P^2 = 1$ (**B**) $\frac{1}{P} = -1$ (**C**) $2P = -2$ (**D**) $P-1 = -2$ (**E**) $P^3 = -1$

La seule réponse positive est (**A**). De fait, l'expression P^2 est toujours positive ou nulle, peu importe la valeur de P. RÉPONSE : (A)

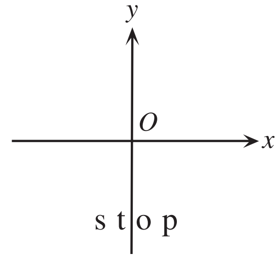
18. Lorsqu'on développe le nombre 1000^{10}, le nombre de zéros qu'il faut écrire est :

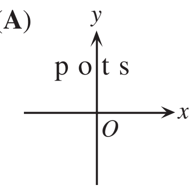
(**A**) 13 (**B**) 30 (**C**) 4 (**D**) 10 (**E**) 1000

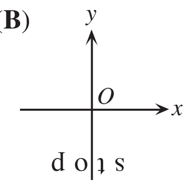
Solution

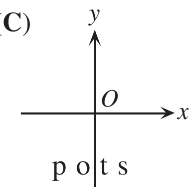
Chaque facteur 1000 fournit trois zéros. Or 1000 paraît 10 fois comme facteur.
Il faut donc écrire 30 zéros. RÉPONSE : (B)

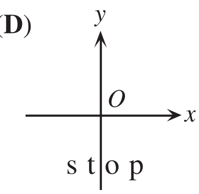
19. On place le mot « stop » dans la position illustrée dans le diagramme ci-contre. On lui fait subir une rotation de centre à l'origine O et de 180° dans le sens des aiguilles d'une montre, suivie d'une réflexion par rapport à l'axe des x. Lequel des diagrammes suivants représente l'image finale?

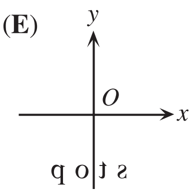


(**A**)


(**B**)


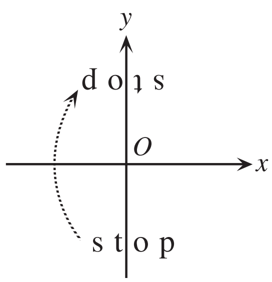
(**C**)


(**D**)


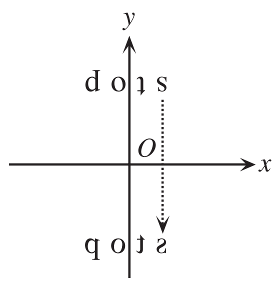
(**E**)


Solution

Le premier diagramme illustre l'image par une rotation de 180°. Le deuxième diagramme illustre l'image de cette image par la réflexion.



Rotation de 180°



Réflexion par rapport à l'axe des x

RÉPONSE : (E)

20. Lorsqu'on développe le nombre 7^{62}, le chiffre des unités (c.-à-d. le dernier chiffre) est égal à :
(**A**) 7 (**B**) 1 (**C**) 3 (**D**) 9 (**E**) 5

Solution

On développe les premières puissances de 7 pour chercher une régularité.

$7^1 = 7,\ 7^2 = 49,\ 7^3 = 343,\ 7^4 = 2401,\ 7^5 = 16\,807,\ \ldots$

On voit que le chiffre des unités des puissances obéit à la régularité 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7, …
(De fait, le chiffre des unités du produit dépend seulement du chiffre des unités des nombres multipliés.)

Le motif 7, 9, 3, 1 se répète à tous les quatre résultats. Puisque 60 est un multiple de 4, le chiffre des unités de 7^{60} est 1. Donc celui de 7^{61} est 7 et celui de 7^{62} est 9.

RÉPONSE : (D)

Partie C

21. Les longueurs des côtés d'un rectangle, en centimètres, sont des entiers. Le rectangle a une aire de 36 cm^2. Quel est le plus grand périmètre que ce rectangle pourrait avoir?

(**A**) 72 cm (**B**) 80 cm (**C**) 26 cm (**D**) 74 cm (**E**) 48 cm

Solution

Puisque les longueurs des côtés du rectangle sont des entiers et que l'aire est égale à 36 cm^2, on considère les possibilités :

Longueurs des côtés	Périmètre
1, 36	$2(1+36)=74$
2, 18	$2(2+18)=40$
3, 12	$2(3+12)=30$
4, 9	$2(4+9)=26$
6, 6	$2(6+6)=24$

Le plus grand périmètre est 74 cm.

Réponse : (D)

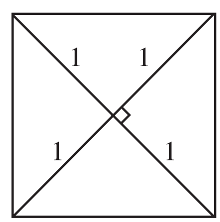
22. Si chaque diagonale d'un carré a une longueur de 2, alors le carré a une aire de :

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution

On trace le carré et ses diagonales.

On obtient 4 triangles rectangles ayant chacun une aire de $\frac{1}{2}$, car chaque triangle est la moitié d'un carré dont les côtés mesurent 1. Le carré a donc une aire de $4\times\frac{1}{2}$, ou 2.



Réponse : (B)

23. Une carte est dessinée à l'échelle de 1:10 000. Sur cette carte, la forêt Gauss occupe un rectangle de dimensions 10 cm sur 100 cm. Quelle est l'aire réelle de la forêt Gauss, en kilomètres carrés?

(**A**) 100 (**B**) 1 000 000 (**C**) 1000 (**D**) 1 (**E**) 10

Solution

Chaque côté du rectangle formé par la forêt mesure 10 000 fois la longueur du côté correspondant sur la carte. Un côté mesure donc :

$$10\ 000\times 10\text{ cm}=100\ 000\text{ cm}=1000\text{ m}=1\text{ km}$$

L'autre côté mesure :

$$10\ 000\times 100\text{ cm}=1\ 000\ 000\text{ cm}=10\ 000\text{ m}=10\text{ km}$$

L'aire réelle de la forêt Gauss est donc égale à $(1\times 10)\text{ km}^2$, ou 10 km^2.

Réponse : (E)

24. Il y a 6 notes sur le bulletin de Véronique.
La moyenne des 6 notes est 74.
Le mode des 6 notes est 76.
La médiane des 6 notes est 76.
La note la plus basse est 50.
La note la plus haute est 94.
Une seule note paraît deux fois et aucune note ne paraît plus de deux fois.
Si toutes les notes sont des entiers, le nombre de possibilités pour la deuxième note la plus basse est :
(**A**) 17 (**B**) 16 (**C**) 25 (**D**) 18 (**E**) 24

Solution

Puisqu'une seule note paraît deux fois et qu'aucune ne paraît plus de deux fois, le mode de 76 nous dit que 76 paraît deux fois. On connaît donc quatre des notes, soit 50, 76, 76 et 94.
Puisqu'il y a 6 notes en tout (un nombre pair de notes) et que la médiane est 76, les deux notes de 76 doivent paraître au milieu lorsqu'on place les notes en ordre croissant. La 3e note et la 4e note doivent donc être 76.
Soit M la deuxième note la plus basse et soit N la deuxième note la plus élevée.
En ordre, les notes sont donc 50, M, 76, 76, N, 94. De plus, M doit être plus grande que 50 et plus petite que 76. De même, N doit être plus grande que 76 et plus petite que 94.
D'après les restrictions précédentes, M peut égaler n'importe quel entier de 51 à 75, tandis que N peut égaler n'importe quel entier de 77 à 93.
Puisque la moyenne est égale à 74, on a :

$$\frac{50+M+76+76+N+94}{6}=74$$
$$M+N+296=444$$
$$M+N=148 \qquad (*)$$

Puisque M, jusqu'ici, peut prendre n'importe quelle des 25 valeurs de 51 à 75, on vérifie les 25 solutions possibles de l'équation (*) :
$51+97=148$, $52+96=148$, $53+95=148$, $54+94=148$, $55+93=148$, $\ldots$, $71+77=148$, $72+76=148$, $73+75=148$, $74+74=148$, $75+73=148$
Or les valeurs de N peuvent être un entier de 77 à 93. On doit donc éliminer les 4 premières et les 4 dernières solutions. M peut donc prendre n'importe quelle valeur de 55 à 71, soit 17 valeurs.
Il y a donc 17 possibilités pour la deuxième note la plus basse. RÉPONSE : (A)

25. Émilie a créé un jeu en employant une rangée de carreaux du plancher qu'elle a numérotés 1, 2, 3, 4, … Elle se place sur le carreau numéro 2 et se met à bondir le long de la rangée, en atterrissant à tous les deux carreaux, pour s'arrêter sur l'avant dernier carreau. En partant de ce carreau, elle bondit de nouveau vers l'avant de la rangée, en atterrissant à tous les trois carreaux et en s'arrêtant sur le carreau numéro 1. Elle se retourne et bondit de nouveau le long de la rangée, en atterrissant à tous les cinq carreaux et en s'arrêtant de nouveau sur l'avant-dernier carreau. Le nombre de carreaux qu'il pourrait y avoir dans la rangée est égal à :
(**A**) 39 (**B**) 40 (**C**) 47 (**D**) 49 (**E**) 53

Solution

Puisqu'Émilie commence sur le carreau numéro 2 et qu'elle atterrit à tous les deux carreaux, elle ne touche que les carreaux ayant un numéro pair. Puisqu'elle s'arrête sur l'avant-dernier carreau, il y a un nombre impair de carreaux. Cela élimine le choix (B), 40.

Ensuite elle atterrit à tous les trois carreaux pour s'arrêter sur le carreau numéro 1. Elle a donc touché les carreaux numéros 1, 4, 7, … (soit les carreaux dont le numéro est 1 de plus qu'un multiple de 3). L'avant-dernier carreau a donc un numéro qui est 1 de plus qu'un multiple de 3. Le nombre total de carreaux est donc 2 de plus qu'un multiple de 3. Cela élimine les choix 39 et 49.

La troisième fois, elle part du carreau numéro 1 et atterrit à tous les 5 carreaux. Les carreaux qu'elle touche ont un numéro qui est 1 de plus qu'un multiple de 5. Puisqu'elle s'arrête sur l'avant-dernier carreau, le nombre de carreaux doit être 2 de plus qu'un multiple de 5. Cela élimine le choix 53.

Le choix 47 est le seul qui vérifie toutes les conditions.

(Pour vérifier la réponse, on suggère de refaire les bonds d'Émilie, sachant qu'il y a 47 carreaux.)

Réponse : (C)

✿✿✿✿✿✿✿✿✿✿

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2001 Solutions

Concours Gauss

(7e et 8e années – Sec. I et II)

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche

Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Comité exécutif	Ron Scoins, (Directeur), Peter Crippin, Barry Ferguson, Ruth Malinowski
Le directeur d'operation	Barry Ferguson, Université de Waterloo
Ordinatique	Steve Breen, Université de Waterloo Don Cowan, Université de Waterloo
Compilateurs du rapport du Concours Gauss	Lloyd Auckland, Université de Waterloo Barry Ferguson, Université de Waterloo
Documentation	Bonnie Findlay, Université de Waterloo
Publications	Bonnie Findlay, Université de Waterloo
Version française	André Ladouceur, Collège catholique Samuel-Genest, Ottawa Robert Laliberté, École secondaire publique Louis-Riel Gérard Proulx, Collège catholique Franco-Ouest, Ottawa Rodrigue St-Jean, École secondaire Embrun, Embrun
Adjoints à la technique	Joanne Kursikowski, Terri McCartney, Linda Schmidt, Kelly Clark, Michael Green
Comité de validation	John Barsby, St. John's-Ravenscourt School, Winnipeg Jean Collins, (retraité), Thornhill Ron Scoins, Université de Waterloo, Waterloo

Comité Gauss

Solutions Gauss 2001

Bob McRoberts (Chair)
Dr. G.W. Williams S.S.
Aurora, Ontario

Richard Auckland
Locke's School
St. Thomas, Ontario

Mark Bredin (Assoc. Chair)
St. John's-Ravenscourt School
Winnipeg, Manitoba

Sandy Emms Jones
Forest Heights C.I.
Kitchener, Ontario

Joanne Halpern
Toronto, Ontario

Marianne Kuwabara
Elizabeth Ziegler Public School
Waterloo, Ontario

David Matthews
University of Waterloo
Waterloo, Ontario

John Grant McLoughlin
Memorial University of Newfoundland
St. John's, Newfoundland

Patricia Tinholt
Valley Park Middle School
Don Mills, Ontario

Sue Trew
Holy Name of Mary S.S.
Mississauga, Ontario

Partie A

1. Le plus grand nombre de l'ensemble $\{0,01;\ 0,2;\ 0,03;\ 0,02;\ 0,1\}$ est :

(A) 0,01 **(B)** 0,2 **(C)** 0,03 **(D)** 0,02 **(E)** 0,1

Solution

Il est plus facile de comparer les nombres si on les écrit avec deux décimales, c'est-à-dire en centièmes : 0,01; 0,20; 0,03; 0,02 et 0,10. Le plus grand est 0,2. RÉPONSE : (B)

2. En 1998, la population du Canada était de 30,3 millions. Lequel des nombres suivants est le même que 30,3 millions?

(A) 30 300 000 **(B)** 303 000 000 **(C)** 30 300 **(D)** 303 000 **(E)** 30 300 000 000

Solution

Le nombre 30,3 millions peut être obtenu en multipliant 30,3 par 1 000 000. On obtient alors 30 300 000. RÉPONSE : (A)

3. La valeur de $0,001+1,01+0,11$ est :

(A) 1,111 **(B)** 1,101 **(C)** 1,013 **(D)** 0,113 **(E)** 1,121

Solution

La somme des nombres 0,001, 1,01 et 0,11 est égale à 1,121. Il est plus facile de l'obtenir en additionnant en colonne :

$$\begin{array}{r} 0,001 \\ 1,01 \\ +0,11 \\ \hline 1,121 \end{array}$$

RÉPONSE : (E)

4. Lorsque le nombre 16 est doublé et que l'on prend la moitié de la réponse, on obtient :

(A) 2^1 **(B)** 2^2 **(C)** 2^3 **(D)** 2^4 **(E)** 2^8

Solution

Lorsque le nombre 16 est doublé, on obtient 32.

Lorsqu'on prend la moitié de la réponse, on obtient 16, le nombre initial. Puisque $16=2^4$, la réponse est 2^4. RÉPONSE : (D)

5. La valeur de $3\times4^2-(8\div2)$ est :

(A) 44 **(B)** 12 **(C)** 20 **(D)** 8 **(E)** 140

Solution

On a : $3 \times 4^2 - (8 \div 2)$

$= 48 - 4$

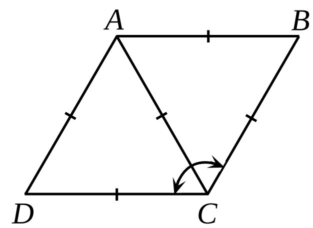
$= 44$

RÉPONSE : (A)

6. Le diagramme présente un losange $ABCD$. La mesure de l'angle BCD est égale à :

(A) 60° **(B)** 90° **(C)** 120°

(D) 45° **(E)** 160°



Solution

Puisque le triangle ADC est équilatéral, chacun de ses trois angles mesure 60°. De même, chacun des angles du triangle ABC mesure 60°. Puisque $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA$ et que $\angle BCA = \angle DCA = 60°$, alors $\angle BCD = 120°$. RÉPONSE : (C)

7. On affiche 40 entiers consécutifs sur une droite numérique. Si le plus petit de ces entiers est –11, quel est le plus grand?

(A) 29 **(B)** 30 **(C)** 28 **(D)** 51 **(E)** 50

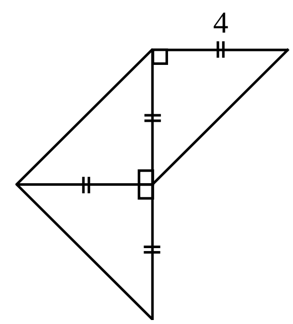
Solution

De –11 à 0, il y a 12 entiers affichés. Il y a donc 28 autres entiers affichés, soit de 1 à 28. Le plus grand de ces entiers est 28. RÉPONSE : (C)

8. L'aire de la figure au complet est égale à :

(A) 16 **(B)** 32 **(C)** 20

(D) 24 **(E)** 64

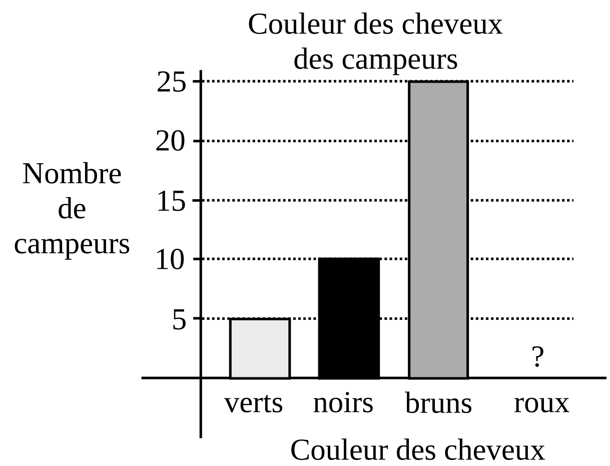


Solution

Chacun des petits triangles a une base de 4 et une hauteur de 4. Leur aire est égale à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8. L'aire de la figure au complet est égale à 3×8, ou 24. RÉPONSE : (D)

9. Le diagramme en bâtons illustre la couleur des cheveux des campeurs au Camp d'été Gauss. Le bâton qui indique le nombre de campeurs ayant des cheveux roux a été effacé accidentellement. Si 50 % des campeurs ont les cheveux bruns, combien de campeurs ont les cheveux roux?

(**A**) 5 (**B**) 10 (**C**) 25
(**D**) 50 (**E**) 60



Solution
D'après le diagramme, 25 campeurs ont les cheveux bruns, ce qui représente 50 % des campeurs. En tout, il y a donc 2×25, ou 50 campeurs. Il y a un total de 15 campeurs qui ont les cheveux verts ou noirs. Il y a donc $50-(25+15)$, ou 10 campeurs qui ont les cheveux roux. RÉPONSE : (B)

10. Henri a compté un total de 20 points dans les trois premières joutes de son équipe de basket-ball. Il a compté $\frac{1}{2}$ de ces points dans la première joute et $\frac{1}{10}$ de ces points dans la deuxième joute. Combien de points a-t-il comptés dans la troisième joute?

(**A**) 2 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 8

Solution
Henri a compté $\frac{1}{2}$ de 20, ou 10 points dans sa première joute. Dans sa deuxième joute, il a compté $\frac{1}{10}$ de 20, ou 2 points. Dans la troisième joute, il a compté $20-(2+10)$, ou 8 points.

RÉPONSE : (E)

Partie B

11. On prend un cube en bois pour en faire un dé juste et on indique les nombres 1, 1, 1, 2, 3 et 3 sur ses faces. Si on jette le dé une fois, quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair?

(**A**) $\frac{5}{6}$ (**B**) $\frac{4}{6}$ (**C**) $\frac{3}{6}$ (**D**) $\frac{2}{6}$ (**E**) $\frac{1}{6}$

Solution
Puisque le dé est juste, les six résultats possibles, 1, 1, 1, 2, 3 et 3, ont la même probabilité. Puisque cinq des résultats sont des nombres impairs, la probabilité d'obtenir un nombre impair est égale à $\frac{5}{6}$.

RÉPONSE : (A)

12. Dans une foire, le rapport du nombre de gros chiens au nombre de petits chiens est égal à 3:17. Il y a 80 chiens en tout à cette foire. Combien de gros chiens y a-t-il?

(**A**) 12 (**B**) 68 (**C**) 20 (**D**) 24 (**E**) 6

Solution
Puisque le rapport du nombre de gros chiens au nombre de petits chiens est égal à 3:17, il y a 3 gros chiens dans chaque groupe de 20 chiens. Puisqu'il y a 80 chiens en tout à cette foire, il y a 4 groupes de 20 chiens. Il y a donc 3×4, ou 12 gros chiens. RÉPONSE : (A)

13. Le produit de deux nombres naturels est égal à 24. La plus petite somme possible de ces deux nombres est égale à :
(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 14 (**E**) 25

Solution
Puisque le produit de deux nombres naturels est égal à 24, il ne peut s'agir que de 1×24, 2×12, 3×8 ou 4×6. La plus petite somme possible de deux de ces nombres est $4+6$, ou 10.
RÉPONSE : (B)

14. Dans le carré illustré, si on multiplie les nombres de chaque colonne, de chaque rangée ou de chaque diagonale, on obtient toujours le même résultat. La somme des deux nombres manquants est égale à :
(**A**) 28 (**B**) 15 (**C**) 30
(**D**) 38 (**E**) 72

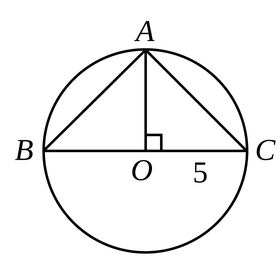
12	1	18
9	6	4
		3

Solution
Les nombres de chaque colonne, de chaque rangée ou de chaque diagonale ont un produit de $(12)(1)(18)$, ou 216. On cherche donc deux nombres tels que $(12)(9)(\quad) = 216$ et $(1)(6)(\quad) = 216$. Les deux nombres sont 2 et 36 et leur somme est égale à 38. RÉPONSE : (D)

15. Un nombre premier est appelé *superpremier* si, lorsqu'on le double et que l'on soustrait 1 du résultat, on obtient un autre nombre premier. Le nombre de nombres superpremiers inférieurs à 15 est égal à :
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Solution
Les nombres premiers inférieurs à 15 sont 2, 3, 5, 7, 11 et 13. Si on double chacun de ces nombres et que l'on soustrait 1 du résultat, on obtient 3, 5, 9, 13, 21 et 25. Trois des résultats sont des nombres premiers. Il y a donc trois nombres superpremiers inférieurs à 15. RÉPONSE : (B)

16. Dans le diagramme, BC est un diamètre du cercle de centre O et de rayon 5. Si A est sur le cercle et si AO est perpendiculaire à BC, l'aire du triangle ABC est égale à :
(**A**) 6,25 (**B**) 12,5 (**C**) 25
(**D**) 37,5 (**E**) 50



Solution
Puisque O est le centre du cercle et que le rayon est 5, alors $OB = AC = OC = 5$. Le triangle ABC a donc une base de 10 et une hauteur de 5. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(10)(5)$, ou 25. RÉPONSE : (C)

17. Une pancarte rectangulaire mesure 9 m sur 16 m. Au milieu de la pancarte, on veut peindre une annonce de forme carrée. La bordure qui entoure l'annonce doit avoir une largeur d'au moins 1,5 m. L'aire de la plus grande annonce de forme carrée que l'on puisse peindre sur la pancarte est égale à :
(**A**) 78 m^2 (**B**) 144 m^2 (**C**) 36 m^2 (**D**) 9 m^2 (**E**) 56,25 m^2

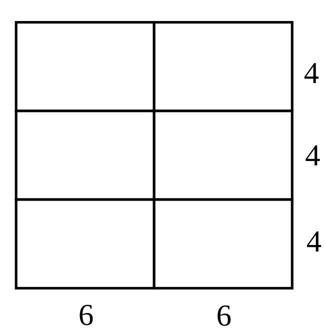
Solution
Le rectangle a une largeur de 9 m. Puisque la bordure doit avoir une largeur d'au moins 1,5 m, le carré aura une largeur maximale de $9 - 1{,}5 - 1{,}5$, ou 6 m. L'aire de ce carré est égale à 6×6, ou 36 m^2.
RÉPONSE : (C)

18. Avant de partir pour la France, Félix a changé 924,00 $ en francs. Chaque franc valait 30 cents. S'il est revenu de son voyage avec 21 francs, combien de francs a-t-il dépensés?
(**A**) 3080 (**B**) 3101 (**C**) 256,2 (**D**) 3059 (**E**) 298,2

Solution
Puisque chaque franc vaut 0,30 $, Félix a pu acheter $\frac{924}{0{,}30}$, ou 3080 francs. S'il est revenu avec 21 francs, il a dépensé $3080 - 21$, ou 3059 francs. RÉPONSE : (D)

19. On utilise des tuiles de forme rectangulaire, mesurant chacune 6 sur 4, pour recouvrir un carré sans que les tuiles ne débordent l'une sur l'autre. Le nombre minimal de tuiles qu'il faut pour recouvrir un espace de forme carrée est égal à :
(**A**) 8 (**B**) 24 (**C**) 4 (**D**) 12 (**E**) 6

Solution
Puisque les rectangles mesurent 6×4, les longueurs de leurs côtés sont dans un rapport de 3:2. Il faut donc placer deux colonnes de trois tuiles comme dans le diagramme. Il faut donc 6 tuiles.



RÉPONSE : (E)

20. Anne, Berthe et Carl ont 10 bonbons à partager entre eux. Anne reçoit au moins 3 bonbons, tandis que Berthe et Carl en reçoivent au moins 2 chacun. Si Carl en reçoit 3 au plus, le nombre de bonbons que Berthe pourrait recevoir est :

(**A**) 2 (**B**) 2 ou 3 (**C**) 3 ou 4 (**D**) 2, 3 ou 5 (**E**) 2, 3, 4 ou 5

Solution

Si Anne reçoit 3 bonbons et si Carl en reçoit 2, Berthe en recevrait 5. Si Anne ou Carl reçoit plus de bonbons, Berthe pourrait en recevoir 4, 3 ou 2. RÉPONSE : (E)

Partie C

21. Naoki a écrit neuf tests, chacun sur 100 points. Sur les neuf tests, il a obtenu une moyenne de 68 %. Si on omet la note la plus basse, quelle est la plus grande moyenne possible qu'il pourrait obtenir sur ses autres tests?

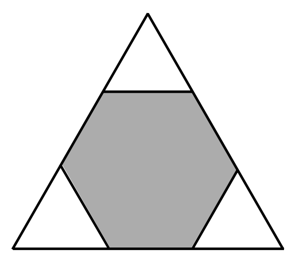
(**A**) 76,5 % (**B**) 70 % (**C**) 60,4 % (**D**) 77 % (**E**) 76 %

Solution

Puisqu'il a obtenu une moyenne de 68 % sur neuf tests, Naoki a obtenu un total de 9×68, ou 612 points. S'il a obtenu une note de 0 sur un de ces tests et que cette note est omise, il aurait un total de 612 points sur huit tests. Sa nouvelle moyenne serait égale à $\frac{612}{8}$, ou 76,5 %.

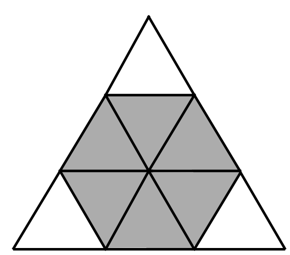
RÉPONSE : (A)

22. Un hexagone régulier est inscrit dans un triangle équilatéral comme dans le diagramme. Si l'hexagone a une aire de 12 unités carrées, quelle est l'aire du triangle en unités carrées?



(**A**) 20 (**B**) 16 (**C**) 15
(**D**) 18 (**E**) 24

Solution



On peut diviser l'hexagone en 6 triangles équilatéraux identiques. De plus, les triangles blancs sont équilatéraux et ils partagent un côté avec les triangles ombrés. Le grand triangle est donc formé de 9 petits triangles équilatéraux identiques.

Puisque l'hexagone a une aire de 12 unités carrées, chaque petit triangle a une aire de 2 unités carrées. L'aire du grand triangle est donc égale à 9×2, ou 18 unités carrées. RÉPONSE : (D)

23. Catrina peut parcourir 100 m en 10 secondes. Sedra peut parcourir 400 m en 44 secondes. Elles participent tous les deux à une course de 1 km, tout en maintenant ces vitesses respectives. Quelle est l'avance de la première, au mètre près, lorsqu'il franchit la ligne d'arrivée?

(**A**) 100 m (**B**) 110 m (**C**) 95 m (**D**) 90 m (**E**) 91 m

Solution

Catrina parcourt 100 m en 10 secondes. Sedra parcourt 400 m en 44 secondes, ou 100 m en 11 secondes. Sedra est donc la plus lente. Catrina mettra 10×10, ou 100 secondes pour parcourir 1000 m. Sedra parcourt $\frac{400}{44}$, ou 9,091 m par seconde. Pendant les 100 secondes que dure la course, elle aura parcouru $100 \times 9,091$, ou 909,1 m. Catrina aura donc une avance de 90,9 m sur Sedra lorsqu'elle terminera la course.

RÉPONSE : (E)

24. Enzo a deux aquariums. Dans le premier, le rapport du nombre de guppys au nombre de poissons rouges est de 2:3. Dans le deuxième aquarium, le rapport est de 3:5. Si Enzo a 20 guppys en tout, le plus petit nombre de poissons rouges qu'il pourrait avoir est égal à :

(**A**) 29 (**B**) 30 (**C**) 31 (**D**) 32 (**E**) 33

Solution 1

Les tableaux suivants indiquent les nombres possibles de poissons dans les deux aquariums.

1er aquarium	
Nombre de guppys	Nombre de poissons rouges
2	3
4	6
6	9
8	12
10	15
12	18
14	21
16	24
18	27

2^{e} aquarium	
Nombre de guppys	Nombre de poissons rouges
3	5
6	10
9	15
12	20
15	25
18	30

Les lignes relient les trois résultats qui donnent un nombre total de 20 guppys, c'est-à-dire $2+18$, $8+12$ et $14+6$. Les nombres correspondants de poissons rouges sont 33, 32 et 31. Le plus petit nombre de poissons rouges est 31.

Solution 2

Dans le premier aquarium, le rapport du nombre de guppys au nombre de poissons rouges est de 2:3. On considère donc que dans cet aquarium, le nombre de guppys est égal à $2a$ et que le nombre de poissons rouges est égal à $3a$. De même, on considère que le nombre de guppys dans le deuxième aquarium est égal à $3b$ et que le nombre de poissons rouges est égal à $5b$.

$2a+3b$	a	b	$3a+5b$
20	1	6	33
20	4	4	32
20	7	2	31

En tout, il y a 20 guppys, ce qui nous donne l'équation $2a+3b=20$. On considère les diverses valeurs possibles de a et de b, tout en calculant la valeur correspondante de $3a+5b$, le nombre total de poissons rouges. On voit, d'après le tableau, que le plus petit nombre possible de poissons rouges est 31.

RÉPONSE : (C)

25. Il est possible de former un triangle dont les côtés ont des longueurs de 4, 5 et 8. Il est impossible de former un triangle dont les côtés ont des longueurs de 4, 5 et 9. Ron a huit bâtons dont les longueurs sont des entiers. Il constate qu'il est impossible de former un triangle avec n'importe quels trois bâtons. La longueur la plus courte possible du plus grand des huit bâtons est égale à :

(**A**) 20 (**B**) 21 (**C**) 22 (**D**) 23 (**E**) 24

Solution

Les trois plus petites longueurs possibles qui ne permettent pas à Ron de former un triangle sont 1, 1 et 2. On obtient la plus petite longueur possible suivante si on additionne les deux dernières longueurs. On a alors des bâtons de longueurs 1, 1, 2, 3. On continue à obtenir la plus petite longueur possible suivante si on additionne toujours les deux dernières longueurs. On obtient les longueurs 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Il s'agit des 8 premiers termes de la suite célèbre de Fibonacci. La longueur la plus courte possible du plus grand des huit bâtons est 21.

RÉPONSE : (B)

✿✿✿✿✿✿✿✿✿

Partie A

1. En 1998, la population du Canada était de 30,3 millions. Lequel des nombres suivants est le même que 30,3 millions?

(**A**) 30 300 000 (**B**) 303 000 000 (**C**) 30 300 (**D**) 303 000 (**E**) 30 300 000 000

Solution

Le nombre 30,3 millions peut être obtenu en multipliant 30,3 par $1\,000\,000$. On obtient alors $30\,300\,000$.

RÉPONSE : (A)

2. Quel nombre doit-on placer dans la case pour que $\frac{6+\square}{20}=\frac{1}{2}$?

(**A**) 10 (**B**) 4 (**C**) -5 (**D**) 34 (**E**) 14

Solution

La fraction $\frac{1}{2}$ peut être exprimée sous la forme $\frac{10}{20}$, avec dénominateur 20.

L'équation devient $\frac{6+\square}{20}=\frac{10}{20}$. Les numérateurs doivent donc être égaux, ce qui donne $6+\square=10$. Le nombre dans la case doit être 4.

RÉPONSE : (B)

3. La valeur de $3\times 4^2-(8\div 2)$ est :

(**A**) 44 (**B**) 12 (**C**) 20 (**D**) 8 (**E**) 140

Solution

On a : $3\times 4^2-(8\div 2)$

$= 48-4$

$= 44$

RÉPONSE : (A)

4. Lorsqu'on divise un certain nombre par 7, on obtient un quotient de 12 et un reste de 5. Le nombre est :

(**A**) 47 (**B**) 79 (**C**) 67 (**D**) 119 (**E**) 89

Solution

Puisque le quotient est 12 et que le reste est 5, le nombre est $(7\times 12)+5$, ou 89.

RÉPONSE : (E)

5. Si $2x-5=15$, la valeur de x est :

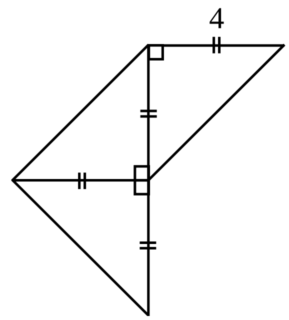
(**A**) 5 (**B**) -5 (**C**) 10 (**D**) 0 (**E**) -10

Solution

Puisque $2x-5=15$, alors $2x=20$, d'où $x=10$.

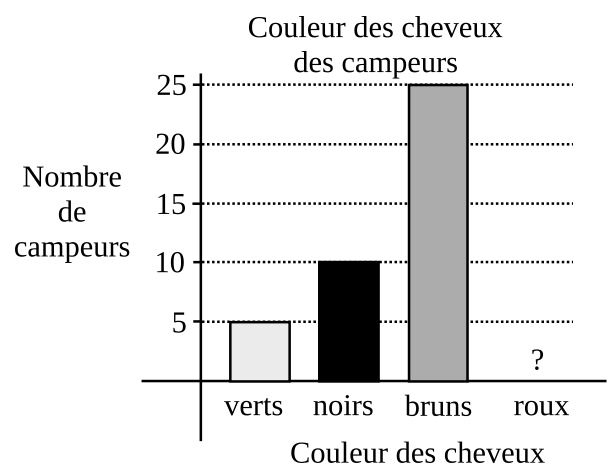
RÉPONSE : (C)

6. L'aire de la figure au complet est égale à :
(**A**) 16 (**B**) 32 (**C**) 20
(**D**) 24 (**E**) 64



Solution
Chacun des petits triangles a une base de 4 et une hauteur de 4. Leur aire est égale à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8. L'aire de la figure au complet est égale à 3×8, ou 24.
RÉPONSE : (D)

7. Le diagramme en bâtons illustre la couleur des cheveux des campeurs au Camp d'été Gauss. Le bâton qui indique le nombre de campeurs ayant des cheveux roux a été effacé accidentellement. Si 50 % des campeurs ont les cheveux bruns, combien de campeurs ont les cheveux roux?
(**A**) 5 (**B**) 10 (**C**) 25
(**D**) 50 (**E**) 60



Solution
D'après le diagramme, 25 campeurs ont les cheveux bruns, ce qui représente 50 % des campeurs. En tout, il y a donc 2×25, ou 50 campeurs. Il y a un total de 15 campeurs qui ont les cheveux verts ou noirs. Il y a donc $50-(25+15)$, ou 10 campeurs qui ont les cheveux roux.
RÉPONSE : (B)

8. On prend un cube en bois pour en faire un dé juste et on indique les nombres 1, 1, 1, 2, 3 et 3 sur ses faces. Si on jette le dé une fois, quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair?
(**A**) $\frac{5}{6}$ (**B**) $\frac{4}{6}$ (**C**) $\frac{3}{6}$ (**D**) $\frac{2}{6}$ (**E**) $\frac{1}{6}$

Solution
Puisque le dé est juste, les six résultats possibles, 1, 1, 1, 2, 3 et 3, ont la même probabilité. Puisque cinq des résultats sont des nombres impairs, la probabilité d'obtenir un nombre impair est égale à $\frac{5}{6}$.
RÉPONSE : (A)

9. Dans le carré illustré, si on multiplie les nombres de chaque colonne, de chaque rangée ou de chaque diagonale, on obtient toujours le même résultat. La somme des deux nombres manquants est égale à :

12	1	18
9	6	4
		3

(**A**) 28 (**B**) 15 (**C**) 30
(**D**) 38 (**E**) 72

Solution
Les nombres de chaque colonne, de chaque rangée ou de chaque diagonale ont un produit de $(12)(1)(18)$, ou 216. On cherche donc deux nombres tels que $(12)(9)(\quad)=216$ et $(1)(6)(\quad)=216$. Les deux nombres sont 2 et 36 et leur somme est égale à 38. RÉPONSE : (D)

10. Roxanne peut tondre $\frac{2}{5}$ d'une pelouse en 18 minutes. Si elle a commencé à tondre la pelouse à 10 h et si elle a tondu à cette même vitesse, à quelle heure a-t-elle terminé?
(**A**) 10 h 08 (**B**) 11 h 30 (**C**) 10 h 40 (**D**) 10 h 25 (**E**) 10 h 45

Solution
Puisque Roxanne peut tondre $\frac{2}{5}$ de la pelouse en 18 minutes, elle peut tondre $\frac{1}{5}$ de la pelouse en 9 minutes. Elle met donc 5×9, ou 45 minutes pour tondre la pelouse au complet. Si elle commence à 10 h, elle termine donc à 10 h 45. RÉPONSE : (E)

Partie B

11. Dans une classe de 25 élèves, chaque élève a au plus un animal domestique. Trois cinquièmes des élèves ont un chat, 20 % ont un chien, trois ont un éléphant et les autres n'ont aucun animal. Combien d'élèves n'ont aucun animal domestique?
(**A**) 5 (**B**) 4 (**C**) 3 (**D**) 2 (**E**) 1

Solution
Trois cinquièmes des élèves représentent $\frac{3}{5}\times 25$, ou 15 élèves. Donc 15 élèves ont un chat. Vingt pour cent de 25 équivaut à $\frac{20}{100}\times 25$, ou 5 élèves. Donc 5 élèves ont un chien. Donc $15+5+3$, ou 23 élèves ont un animal domestique. Deux élèves n'ont aucun animal domestique. RÉPONSE : (D)

12. Un nombre premier est appelé *superpremier* si, lorsqu'on le double et que l'on soustrait 1 du résultat, on obtient un autre nombre premier. Le nombre de nombres superpremiers inférieurs à 15 est égal à :
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Solution
Les nombres premiers inférieurs à 15 sont 2, 3, 5, 7, 11 et 13. Si on double chacun de ces nombres et que l'on soustrait 1 du résultat, on obtient 3, 5, 9, 13, 21 et 25. Trois des résultats sont des nombres premiers. Il y a donc trois nombres superpremiers inférieurs à 15. RÉPONSE : (B)

13. Laura gagne 10 $ l'heure et elle travaille 8 heures par jour pendant 10 jours. Elle dépense 25 % de son salaire pour se nourrir et se vêtir et elle paie ensuite son loyer de 350 $. Quelle somme lui restera-t-il?

(**A**) 275 $ (**B**) 200 $ (**C**) 350 $ (**D**) 250 $ (**E**) 300 $

Solution

En 10 jours, Laura travaille 8×10, ou 80 heures. Pendant ces 10 jours, elle gagne donc 80×10 \$, ou 800 $. Puisque 25 % = $\frac{1}{4}$, elle dépense $\frac{1}{4}$ de 800 $, ou 200 $ pour se nourrir et se vêtir. Il lui reste alors 600 $. Après avoir payé son loyer de 350 $, il lui reste $600\ \$ - 350\ \$$, ou 250 $. RÉPONSE : (D)

14. Une pancarte rectangulaire mesure 9 m sur 16 m. Au milieu de la pancarte, on veut peindre une annonce de forme carrée. La bordure qui entoure l'annonce doit avoir une largeur d'au moins 1,5 m. L'aire de la plus grande annonce de forme carrée que l'on puisse peindre sur la pancarte est égale à :

(**A**) 78 m^2 (**B**) 144 m^2 (**C**) 36 m^2 (**D**) 9 m^2 (**E**) 56.25 m^2

Solution

Le rectangle a une largeur de 9 m. Puisque la bordure doit avoir une largeur d'au moins 1,5 m, le carré aura une largeur maximale de $9 - 1{,}5 - 1{,}5$, ou 6 m. L'aire de ce carré est égale à 6×6, ou $36\ m^2$.

RÉPONSE : (C)

15. Un cube a une aire totale de 24 cm^2. Le volume de ce cube est égal à :

(**A**) 4 cm^3 (**B**) 24 cm^3 (**C**) 8 cm^3 (**D**) 27 cm^3 (**E**) 64 cm^3

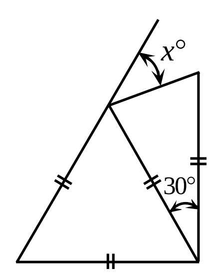
Solution

Un cube est composé de six faces. L'aire de chaque face est égale à $\frac{1}{6}$ de 24 cm^2, ou 4 cm^2. Les arêtes du cube doivent donc avoir une longueur de 2 cm. Le volume du cube est donc égal à $2 \times 2 \times 2\ cm^3$, ou $8\ cm^3$.

RÉPONSE : (C)

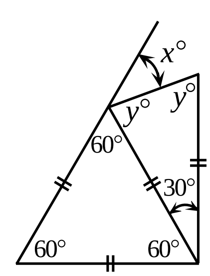
16. Dans le diagramme, la valeur de x est :

(**A**) 30 (**B**) 40 (**C**) 60
(**D**) 50 (**E**) 45



Solution

Chaque angle du triangle équilatéral mesure 60°. Le deuxième triangle est isocèle. Les deux angles à sa base sont donc congrus. Disons qu'ils mesurent $y°$ chacun. Puisque le troisième angle mesure 30°, les deux angles à la base mesurent 150° en tout car la somme des mesures des angles du triangle égale 180°. Donc $2y° = 150°$, d'où $y° = 75°$.



Les angles dont les mesures sont $x°$, $y°$ et 60°, en haut à gauche, forment un angle plat. Donc :

$$x° + y° + 60° = 180°$$
$$x° + 75° + 60° = 180°$$

Donc $x = 45$. RÉPONSE : (E)

17. L'âge de Daniel est un neuvième de l'âge de son père. Dans un an, l'âge de son père sera sept fois l'âge de Daniel. La différence entre leur âge est égale à :

(**A**) 24 (**B**) 25 (**C**) 26 (**D**) 27 (**E**) 28

Solution

Soit d l'âge de Daniel. L'âge de son père est donc $9d$.

Dans un an, l'âge de Daniel sera $d+1$ et l'âge de son père sera $9d+1$.

Donc : $9d+1 = 7(d+1)$

$$9d+1 = 7d+7$$
$$2d = 6$$
$$d = 3$$

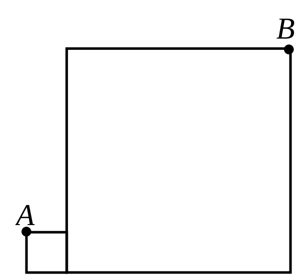
Daniel a donc 3 ans et son père a 27 ans. La différence entre leur âge est égale à 24.

RÉPONSE : (A)

18. Dans le diagramme, le petit carré a des côtés de longueur 1, tandis que le grand carré a des côtés de longueur 7. La longueur AB est égale à :

(**A**) 14 (**B**) $\sqrt{113}$ (**C**) 10

(**D**) $\sqrt{85}$ (**E**) $\sqrt{72}$

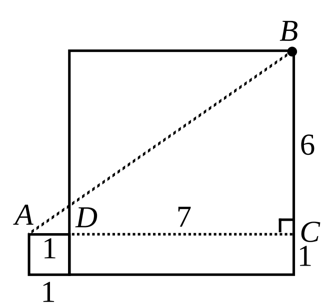


Solution

D'après le diagramme, $AC = 8$ et $BC = 6$.

Le triangle ABC est rectangle.

D'après le théorème de Pythagore :



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$AB^2 = 8^2 + 6^2$$
$$AB^2 = 64 + 36$$
$$AB^2 = 100$$
$$AB = 10$$

RÉPONSE : (C)

19. Anne, Berthe et Carl ont 10 bonbons à partager entre eux. Anne reçoit au moins 3 bonbons, tandis que Berthe et Carl en reçoivent au moins 2 chacun. Si Carl en reçoit 3 au plus, le nombre de bonbons que Berthe pourrait recevoir est :

(**A**) 2 (**B**) 2 ou 3 (**C**) 3 ou 4 (**D**) 2, 3 ou 5 (**E**) 2, 3, 4 ou 5

Solution

Si Anne reçoit 3 bonbons et si Carl en reçoit 2, Berthe en recevrait 5. Si Anne ou Carl reçoit plus de bonbons, Berthe pourrait en recevoir 4, 3 ou 2. RÉPONSE : (E)

20. Quel nombre doit-on placer dans la case pour que $10^4 \times 100^{\square} = 1000^6$?

(**A**) 7 (**B**) 5 (**C**) 2 (**D**) $\frac{3}{2}$ (**E**) 10

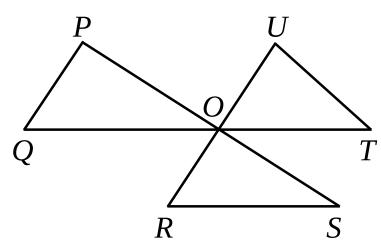
Solution

Puisque 1000 comporte 3 zéros, 1000^6 comporte 18 zéros. Le membre de gauche de l'équation comporte donc 18 zéros. Puisque le nombre 10^4 comporte 4 zéros, le nombre $100^{\square}$ comporte 14 zéros. Puisque 100 comporte 2 zéros, on doit placer le nombre 7 dans la case. RÉPONSE : (A)

Partie C

21. Les segments PS, QT et RU se coupent en un même point O. On joint ensuite P et Q, R et S, de même que T et U de manière à former des triangles. La valeur de $\angle P + \angle Q + \angle R + \angle S + \angle T + \angle U$ est :

(**A**) 450° (**B**) 270° (**C**) 360°
(**D**) 540° (**E**) 720°



Solution

Puisque les angles POQ, POU et TOU forment un angle plat, $\angle POQ + \angle POU + \angle TOU = 180°$.
Puisque les angles POU et ROS sont opposés par le sommet, $\angle POU = \angle ROS$.
Donc $\angle POQ + \angle ROS + \angle TOU = 180°$.
La somme des mesures des angles de chaque triangle est égale à 180°.
Donc $(\angle P + \angle Q + \angle POQ) + (\angle R + \angle S + \angle ROS) + (\angle T + \angle U + \angle TOU) = 3 \times 180°$.
Les angles POQ, ROS et TOU contribuent 180° à cette somme.
La somme des mesures des autres angles est donc égale à $2 \times 180°$.
Donc $\angle P + \angle Q + \angle R + \angle S + \angle T + \angle U = 360°$. RÉPONSE : (C)

22. Soixante-quatre cubes blancs de dimensions $1 \times 1 \times 1$ sont utilisés pour former un cube de dimensions $4 \times 4 \times 4$. Ce grand cube est ensuite peint en rouge sur chacune de ses six faces. On défait ensuite le grand cube en 64 petits cubes. On attribue ensuite à chaque petit cube un nombre de points comme l'indique le tableau.

Nombre exact de faces rouges	Nombre de points
3	3
2	2
1	1
0	-7

Le nombre total de points pour l'ensemble des cubes est égal à :

(**A**) 40 (**B**) 41 (**C**) 42 (**D**) 43 (**E**) 44

Solution

Le grand cube est formé de 64 petits cubes. Tous les petits cubes qui forment l'extérieur du grand cube sont peints sur une, deux ou trois faces. Si on les enlève, il reste un cube de dimensions $2 \times 2 \times 2$, formé de 8 cubes non peints.

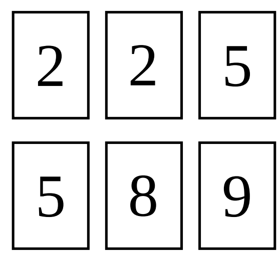
Selon le barème de points, on attribue 1 point par face rouge. Puisque chaque face du grand cube est formée de 16 petites faces rouges, il y aura 6×16, ou 96 petites faces rouges pour un total de 96 points.

Pour chacun des 8 cubes non peints, on enlève 7 points, pour un total de 56 points.

Le nombre total de points pour l'ensemble des cubes est égal à $96 - 56$, ou 40.

RÉPONSE : (A)

23. On écrit les nombres 2, 2, 5, 5, 8 et 9 sur des cartes comme dans le diagramme. On choisit n'importe quel nombre de cartes et on additionne les nombres sur ces cartes. On remarque qu'il est impossible d'obtenir une somme de 1 ou de 30. Combien des nombres entiers de 1 à 31 ne peuvent pas être obtenus comme somme?



(**A**) 4 (**B**) 22 (**C**) 8

(**D**) 10 (**E**) 6

Solution

On remarque d'abord que la somme des nombres sur les 6 cartes est égale à 31.

On remarque aussi que si on choisit certaines cartes pour obtenir une somme *S*, alors les autres cartes donneront une somme de $31 - S$.

Il suffit donc de chercher à obtenir des sommes de 1 à 15. Les autres sommes, de 16 à 31, seraient obtenues par les cartes non choisies. Par exemple, si on choisit les cartes 2 et 2, qui ont une somme de 4, il reste les cartes 5, 5, 8 et 9, qui ont une somme de 27.

On voit assez facilement qu'il est possible d'obtenir des sommes de 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 et 15, mais qu'il est impossible d'obtenir des sommes de 1, 3 ou 6. Il sera donc impossible d'obtenir des sommes de $31 - 1$, $31 - 3$ ou $31 - 6$.

Il y a donc 6 nombres entiers de 1 à 31 qui ne peuvent pas être obtenus comme somme.

RÉPONSE : (E)

24. Il est possible de former un triangle dont les côtés ont des longueurs de 4, 5 et 8. Il est impossible de former un triangle dont les côtés ont des longueurs de 4, 5 et 9. Ron a huit bâtons dont les longueurs sont des entiers. Il constate qu'il est impossible de former un triangle avec n'importe quels trois bâtons. La longueur la plus courte possible du plus grand des huit bâtons est égale à :
(**A**) 20 (**B**) 21 (**C**) 22 (**D**) 23 (**E**) 24

Solution
Les trois plus petites longueurs possibles qui ne permettent pas à Ron de former un triangle sont 1, 1 et 2. On obtient la plus petite longueur possible suivante si on additionne les deux dernières longueurs. On a alors des bâtons de longueurs 1, 1, 2, 3. On continue à obtenir la plus petite longueur possible suivante si on additionne toujours les deux dernières longueurs. On obtient les longueurs 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Il s'agit des 8 premiers termes de la suite célèbre de Fibonacci. La longueur la plus courte possible du plus grand des huit bâtons est 21. RÉPONSE : (B)

25. Antoine et Marie s'entraînent pour une course en montant et en descendant une pente de ski, longue de 700 m, au pas de course. La vitesse de chacun, en descendant, est le double de sa vitesse en montant. Marie arrive la première au sommet et se met immédiatement à redescendre. Elle croise Antoine à 70 m du sommet. Lorsque Marie arrive au pied de la pente, à quelle distance Antoine est-il derrière elle?
(**A**) 140 m (**B**) 250 m (**C**) 280 m (**D**) 300 m (**E**) 320 m

Solution
Marie monte la pente de 700 m à une certaine vitesse et la redescend deux fois plus vite. C'est l'équivalent, en temps, de monter une pente de $(700+350)$ m, ou 1050 m.
Lorsque Marie et Antoine se rencontrent, Marie a parcouru 700 m en montant et 70 m en descendant, ce qui est l'équivalent, en temps, de $(700+35)$ m, ou 735 m en montant. Pendant ce temps, Antoine a parcouru $(700-70)$ m, ou 630 m.

Le rapport de leurs vitesses (distances parcourues dans un même temps) est égal à $\frac{735}{630}=\frac{7(105)}{6(105)}=\frac{7}{6}$.

C'est-à-dire que Marie parcourt 7 m pour chaque 6 m que parcourt Antoine.
Pendant la course au complet, Marie monte l'équivalent d'une pente de 1050 m. Pendant ce temps, Antoine parcourt donc l'équivalent de $\left(\frac{6}{7}\times 1050\right)$ m, ou 900 m en montant, c'est-à-dire 700 m + 200 m en montant. Cela correspond à 700 m en montant et 400 m en descendant. Il est donc à 300 m du pied de la pente, c'est-à-dire à 30 m derrière Marie, lorsque la course est terminée.

RÉPONSE : (D)

✿✿✿✿✿✿✿✿✿✿

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2000 Solutions

Concours Gauss

(7e et 8e années – Sec. I et II)

CONCOURS GAUSS 7e

Partie A

1. La valeur de $987+113-1000$ est :

(**A**) 90 (**B**) 10 (**C**) 110 (**D**) 2000 (**E**) 100

Solution

$987+113=1100$
$1100-1000=100$

RÉPONSE : (E)

2. L'expression $\frac{9}{10}+\frac{8}{100}$ est égale à :

(**A**) 1,098 (**B**) 0,98 (**C**) 0,098 (**D**) 0,0908 (**E**) 9,8

Solution

Puisque $\frac{9}{10}=0,9$ et $\frac{8}{100}=0,08$, l'expression est égale à $0,9+0,08=0,98$.

RÉPONSE : (B)

3. L'entier le plus près de la valeur de $7\times\frac{3}{4}$ est :

(**A**) 21 (**B**) 9 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 1

Solution

$7\times\frac{3}{4}=\frac{21}{4}$ ou $5\frac{1}{4}$. L'entier le plus près de $5\frac{1}{4}$ est 5.

RÉPONSE : (D)

4. L'expression $5^2-4^2+3^2$ est égale à :

(**A**) 20 (**B**) 18 (**C**) 21 (**D**) 10 (**E**) 16

Solution

$$\begin{aligned} 5^2-4^2+3^2 &= 25-16+9 \\ &= 18 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (B)

5. Lorsqu'on divise un nombre par 7, le quotient est 4 et le reste est 6. Quel est le nombre?

(**A**) 17 (**B**) 168 (**C**) 34 (**D**) 31 (**E**) 46

Solution

Le nombre est $4\times7+6$, ou 34. On peut vérifier que si l'on divise 34 par 7, le quotient est 4 et le reste est 6.

RÉPONSE : (C)

6. Dans l'addition illustrée, on peut placer un chiffre dans chacune des deux cases. Il peut s'agir de deux chiffres différents ou identiques. Quelle est la somme de ces deux chiffres?

$$\begin{array}{r} 8\ 6\ 3 \\ \square\ 9\ 1 \\ 7\ \square\ 8 \\ \hline 2\ 1\ 8\ 2 \end{array}$$

(**A**) 9 (**B**) 11 (**C**) 13
(**D**) 3 (**E**) 7

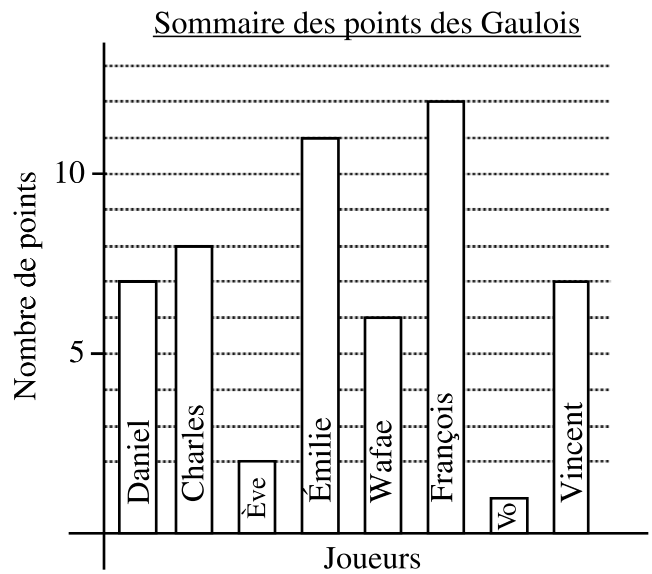
Solution

On additionne la colonne des unités pour obtenir $3+1+8=12$. On a donc 1 dizaine qui s'ajoute à la colonne des dizaines, puisque $12=1\times10+2$. On additionne les dizaines pour obtenir $1+6+9+\mathbf{o}=18$. La case contient donc un 2 et on a donc 1 centaine qui s'ajoute à la colonne des centaines. On additionne les centaines pour obtenir $1+8+\mathbf{o}+7=21$. La case contient donc un 5. Les deux chiffres dans les cases sont 2 et 5 et leur somme est 7.

RÉPONSE : (E)

7. Le graphique représente le sommaire des points comptés par l'équipe des Gaulois dans leur dernière partie de basket-ball intra-muros. Le nombre total de points comptés par l'équipe est égal à :

(**A**) 54 (**B**) 8 (**C**) 12
(**D**) 58 (**E**) 46



Solution

Voici les points comptés par chacun : Daniel, 7; Charles, 8; Ève, 2; Émilie, 11; Wafae, 6; François, 12; Vo, 1; Vincent, 7.

Le nombre total de points est égal à $7+8+2+11+6+12+1+7$, ou 54.

RÉPONSE : (A)

8. Si $\frac{1}{2}$ du nombre représenté par x est 32, quelle est la valeur de $2x$?

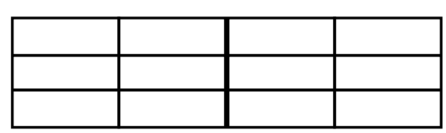
(**A**) 128 (**B**) 64 (**C**) 32 (**D**) 256 (**E**) 16

Solution

Si $\frac{1}{2}$ du nombre représenté par x est 32, alors le nombre x est 2×32, ou 64. Donc $2x$ est égal à 2×64, ou 128.

RÉPONSE : (A)

9. Dans le diagramme, les 12 petits rectangles ont tous les mêmes dimensions. Vous devez noircir quelques-uns des rectangles au complet jusqu'à ce que $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ du diagramme soit noirci. Le nombre de rectangles qu'il faut noircir est :



(**A**) 9 (**B**) 3 (**C**) 4
(**D**) 6 (**E**) 8

Solution

Puisque $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$, ou $\frac{1}{2}$, le nombre de rectangles qu'il faut noircir est $\frac{1}{2}$ de 12, ou 6.

RÉPONSE : (D)

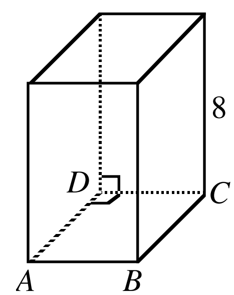
10. La somme de trois entiers consécutifs est égale à 90. Quel est le plus grand de ces entiers?
(**A**) 28 (**B**) 29 (**C**) 31 (**D**) 32 (**E**) 21

Solution

Puisque les trois entiers sont consécutifs, le nombre du milieu est égal à la moyenne des trois nombres, soit $\frac{90}{3}$, ou 30. Les entiers sont 29, 30 et 31. Le plus grand est 31. RÉPONSE : (C)

Partie B

11. Le diagramme illustre un prisme droit dont la base *ABCD* est carrée. Si le prisme a une hauteur de 8 unités et un volume de 288 unités cubes, quelle est la longueur d'un côté de la base?
(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 36
(**D**) 10 (**E**) 12



Solution

Puisque le prisme a un volume de 288 unités cubes et puisque le volume est égal au produit (aire de la base) $\times$ (hauteur), alors l'aire de la base est égale à $\frac{288}{8}$, ou 36 unités carrées. Puisque la base est carrée, son aire est obtenue en multipliant 6×6. Les côtés de la base ont une longueur de 6 unités. RÉPONSE : (A)

12. Une recette exige 25 mL de beurre et 125 mL de sucre. Si on utilise 1000 mL de sucre, combien de beurre faut-il utiliser?
(**A**) 100 mL (**B**) 500 mL (**C**) 200 mL (**D**) 3 litres (**E**) 400 mL

Solution

Si on utilise 1000 mL de sucre, c'est huit fois la quantité exigée par la recette. Il faut donc utiliser huit fois la quantité de beurre, soit 8×25, ou 200 mL. RÉPONSE : (C)

13. Carl a vu son salaire réduit de 10 %. Plus tard, lors d'une promotion, son salaire a augmenté de 10 %. Au départ, son salaire était de 20 000 \$. Quel est son salaire actuel?
(**A**) 16 200 \$ (**B**) 19 800 \$ (**C**) 20 000 \$ (**D**) 20 500 \$ (**E**) 24 000 \$

Solution

Puisque Carl a vu son salaire réduit de 10 %, son salaire réduit était égal à $(0,90) \times (20\,000)$, ou 18 000 \$. Lors de la promotion, son salaire a augmenté de 10 %. Son salaire actuel est donc égal à $(1,10) \times (18\,000)$, ou 19 800 \$. RÉPONSE : (B)

14. Un rectangle a une aire de 12 mètres carrés. Les longueurs de ses côtés, en mètres, sont des nombres entiers. Le plus grand périmètre possible, en mètres, est égal à :

(**A**) 14 (**B**) 16 (**C**) 12 (**D**) 24 (**E**) 26

Solution

Puisque le rectangle a une aire de 12 mètres carrés et puisque les longueurs des côtés sont des entiers, voici les seules possibilités. Le périmètre est donné pour chaque cas.

largeur	longueur	périmètre
1	12	26
2	6	16
3	4	14

Le plus grand périmètre possible est égal à 26 m. RÉPONSE : (E)

15. Dans ce carré magique, les nombres dans chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale ont une somme de 12. Quelle est la somme des nombres dans les quatre coins?

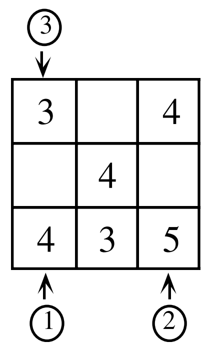
		4
	4	
	3	

(**A**) 14 (**B**) 15 (**C**) 16
(**D**) 17 (**E**) 12

Solution

Le diagramme indique les nombres des quatre coins, ainsi que l'ordre dans lequel on les obtient. Leur somme est égale à 16.

(Il est possible de trouver ces nombres en procédant d'une autre façon. Par exemple, on peut commencer en complétant la colonne du milieu.)



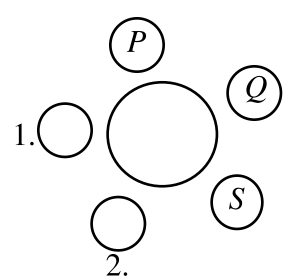
RÉPONSE : (C)

16. Paul, Quan, Rachel, Sylvie et Tony sont assis autour d'une table. Quan est assis entre Paul et Sylvie. Tony n'est pas à côté de Sylvie. Qui sont assis aux côtés de Tony?

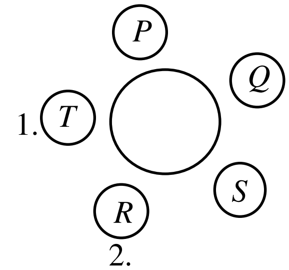
(**A**) Paul et Rachel (**B**) Quan et Rachel (**C**) Paul et Quan
(**D**) Sylvie et Quan (**E**) Impossible de conclure

Solution

Puisque Quan est assis entre Paul et Sylvie, les trois sont assis comme dans le diagramme ci-contre.



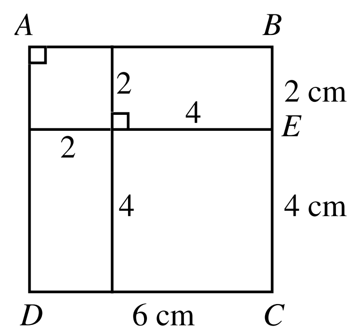
Puisque Tony n’est pas assis à côté de Sylvie, il doit être assis à l’endroit numéro 1 et Rachel doit être assise à l’endroit numéro 2.



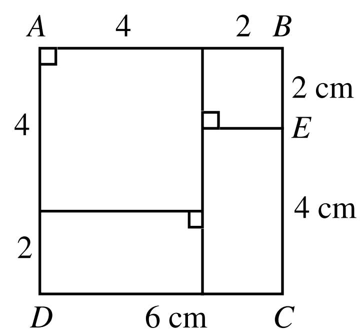
Selon le diagramme, Tony est assis entre Paul et Rachel. RÉPONSE : (A)

17. Le carré *ABCD* est formé de deux rectangles identiques et de deux carrés dont les aires égalent 4 cm^2 et 16 cm^2. Quelle est l’aire du carré *ABCD*, en centimètres carrés?
(**A**) 64 (**B**) 49 (**C**) 25 (**D**) 36 (**E**) 20

Solution
Le diagramme indique une façon de dessiner le carré *ABCD*. Le petit carré a des côtés de 2 cm et le grand carré a des côtés de 4 cm. Le carré *ABCD* a alors des côtés de 6 cm et une aire de 36 cm^2.



On peut aussi dessiner le carré *ABCD* comme dans le diagramme ci-contre.



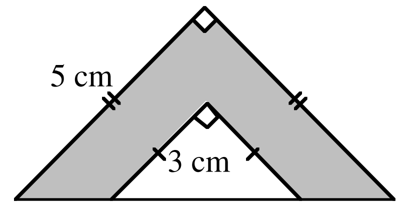
RÉPONSE : (D)

18. Le mois d’avril 2000 compte cinq dimanches. Trois de ces dimanches tombent des jours du mois qui sont des nombres pairs. Le huitième jour de ce mois est un :
(**A**) samedi (**B**) dimanche (**C**) lundi (**D**) mardi (**E**) vendredi

Solution
Puisque trois des dimanches tombent un jour pair et que deux d’entre eux tombent un jour impair, le premier dimanche du mois doit tomber un jour pair. Il est impossible que le premier dimanche soit le 4 avril, car le cinquième dimanche serait alors le 32^e jour du mois. Le premier dimanche est donc le 2 avril. Les autres dimanches sont les 9, 16, 23 et 30 avril. Le 8 avril est un samedi.

RÉPONSE : (A)

19. Le diagramme est formé de deux triangles rectangles isocèles dont les longueurs de certains côtés sont indiquées. Quelle est l'aire de la partie ombrée?



(**A**) 4,5 cm^2 (**B**) 8 cm^2 (**C**) 12,5 cm^2
(**D**) 16 cm^2 (**E**) 17 cm^2

Solution
L'aire du grand triangle est égale à $\frac{1}{2}(5)(5)$, ou 12,5 cm^2.

L'aire du petit triangle est égale à $\frac{1}{2}(3)(3)$, ou 4,5 cm^2.

L'aire de la partie ombrée est égale à : $12{,}5 - 4{,}5$
$= 8\ \text{cm}^2$ RÉPONSE : (B)

20. Un boucher malhonnête annonçait une viande à 3,79 $/kg, alors qu'il la vendait 4,00 $/kg. Il a vendu 1800 kg de cette viande avant d'être dénoncé. Il a payé une amende de 500 $. Quel est son gain total ou sa perte totale en comparaison avec ce qu'il aurait fait s'il n'avait pas triché?
(**A**) perte de 478 $ (**B**) perte de 122 $ (**C**) ni gain, ni perte
(**D**) gain de 122 $ (**E**) gain de 478 $

Solution
Le boucher a gagné 0,21 $ pour chaque kilogramme de viande vendue, pour un total de $0{,}21 \times 1800$, ou 378,00 $.
Après avoir payé l'amende, il subit une perte de 500 $ – 378 $, ou 122 $. RÉPONSE : (B)

Partie C

21. Dans un concours de lancers de basket-ball, chaque personne doit lancer dix ballons numérotés de 1 à 10. Le nombre de points gagnés pour un lancer réussi correspond au numéro inscrit sur le ballon. Si un joueur rate exactement deux lancers, lequel des pointages suivants n'est pas possible?
(**A**) 52 (**B**) 44 (**C**) 41 (**D**) 38 (**E**) 35

Solution
Si tous les lancers sont réussis, le pointage est égal à 55.
Si on rate les ballons numéros 1 et 2, on obtient 52 points.
Si on rate les ballons numéros 9 et 10, on obtient 36 points.
Il est donc impossible d'obtenir moins de 36 points en ratant deux ballons. Il est donc impossible d'obtenir 35 points.
(Il est possible d'obtenir n'importe quel total de 36 à 52 points.) RÉPONSE : (E)

22. Samuel marche en ligne droite vers un poteau de 8 m au sommet duquel il y a une lampe. Lorsqu'il arrive à 12 m du poteau, son ombre a une longueur de 4 m. Quelle est la longueur de son ombre lorsqu'il est à 8 m du poteau?

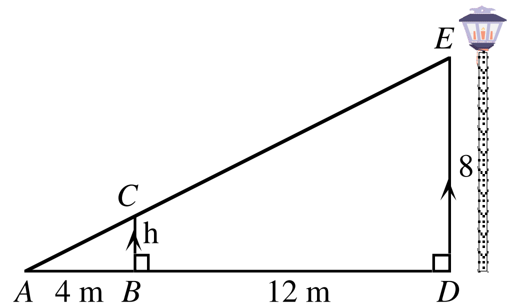
(**A**) $1\frac{1}{2}$ m (**B**) 2 m (**C**) $2\frac{1}{2}$ m (**D**) $2\frac{2}{3}$ m (**E**) 3 m

Solution

Le diagramme indique la position de Samuel lorsqu'il est à 12 m du poteau.

Puisque les triangles ABC et ADE sont semblables, les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles.

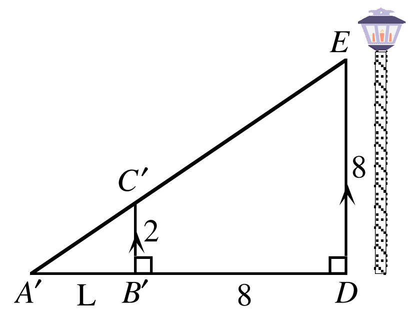
On a donc $\frac{h}{4} = \frac{8}{16}$, d'où $h = 2$.



Le diagramme ci-contre indique la position de Samuel lorsqu'il est à 8 m du poteau. La longueur de son ombre est représentée par L.

Puisque les deux triangles sont semblables, on a $\frac{L}{2} = \frac{L+8}{8}$.

Cette équation devient $\frac{4L}{8} = \frac{L+8}{8}$ si on choisit un dénominateur commun.



Donc : $4L = L + 8$

$3L = 8$

$L = 2\frac{2}{3}$ m

RÉPONSE : (D)

23. Un ensemble de carrés, placés en ordre du plus petit au plus grand, a une aire totale de 35 km^2. Le plus petit carré a des côtés de 500 m. La longueur des côtés des carrés suivants augmente de 500 m à chaque fois. Quel est le nombre total de carrés?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Solution

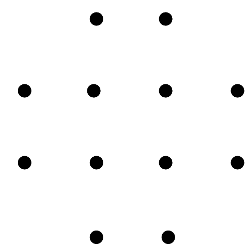
On complète le tableau suivant, une rangée à la fois, jusqu'à ce que l'on obtienne 35 km^2 dans la dernière colonne.

Numéro du carré	Longueur du carré (km)	Aire du carré (km^2)	Somme cumulée des aires (km^2)
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	1	1	$1\frac{1}{4}$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$
4	2	4	$7\frac{1}{2}$
5	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$	$13\frac{3}{4}$
6	3	9	$22\frac{3}{4}$

7	$\frac{7}{2}$	$\frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$	35

Il y a sept carrés. RÉPONSE : (C)

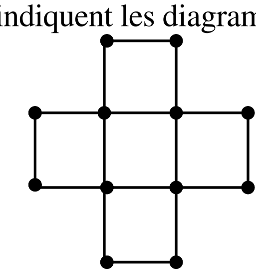
24. Le diagramme illustre douze points inscrits sur une grille rectangulaire. Combien de carrés peut-on former en joignant quatre de ces points?



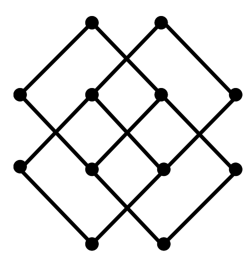
(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 9
(**D**) 11 (**E**) 13

Solution
On peut former 11 carrés en tout, comme l'indiquent les diagrammes suivants.

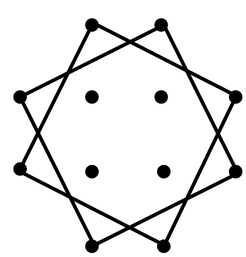
5 petits carrés :



4 carrés de grandeur moyenne :

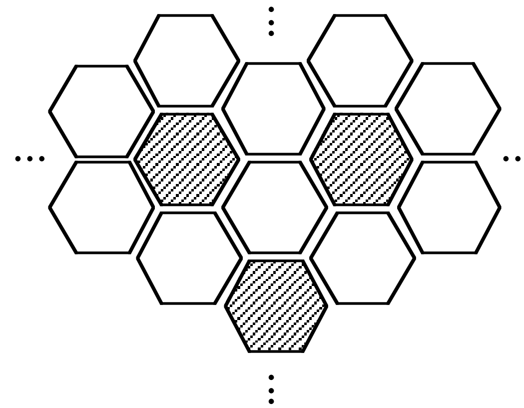


2 grands carrés :



RÉPONSE : (D)

25. Le diagramme illustre une partie d'une surface carrée qui a été carrelée d'hexagones réguliers. Les hexagones sont blancs ou bleus. Chaque hexagone bleu est entouré de 6 hexagones blancs, tandis que chaque hexagone blanc est entouré de 3 hexagones bleus et 3 hexagones blancs. Si on ignore les hexagones incomplets, la meilleure approximation du rapport du nombre d'hexagones bleus au nombre d'hexagones blancs contenus dans la surface carrée est :



(**A**) 1:6 (**B**) 2:3 (**C**) 3:10
(**D**) 1:4 (**E**) 1:2

Solution

On considère d'abord une configuration de sept hexagones, formée d'un hexagone bleu entouré de six hexagones blancs. Il semble alors qu'il y a six fois plus d'hexagones blancs que d'hexagones bleus. Or chaque hexagone blanc est adjacent à trois hexagones bleus. Chaque hexagone blanc fait donc partie de trois configurations différentes de sept hexagones. Le nombre d'hexagones blancs est donc égal à six fois le nombre d'hexagones bleus, divisé par trois, c'est-à-dire deux fois le nombre d'hexagones bleus. Le rapport du nombre d'hexagones bleus au nombre d'hexagones blancs est donc égal à 1:2. RÉPONSE : (E)

Concours Gauss 8e

Partie A

1. La valeur de $2^5 + 5$ est :

   (**A**) 20 (**B**) 37 (**C**) 11 (**D**) 13 (**E**) 21

   Solution

   $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 5 = 37$ RÉPONSE : (B)

2. On place un nombre dans la case pour que l'égalité soit vraie : $8 + \frac{7}{\square} + \frac{3}{1000} = 8,073$

   Quel nombre a-t-on placé?

   (**A**) 1000 (**B**) 100 (**C**) 1 (**D**) 10 (**E**) 70

   Solution

   Puisque $8,073 = 8 + \frac{0}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{100}$, le nombre est 100. RÉPONSE : (B)

3. La valeur de $\frac{5+4-3}{5+4+3}$ est :

   (**A**) -1 (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) 2 (**D**) $\frac{1}{2}$ (**E**) $-\frac{1}{2}$

   Solution

   $\frac{5+4-3}{5+4+3} = \frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$ RÉPONSE : (D)

4. Dans l'addition illustrée, on peut placer un chiffre dans chacune des deux cases. Il peut s'agir de deux chiffres différents ou identiques. Quelle est la somme de ces deux chiffres?

   $$\begin{array}{r} 8\,6\,3 \\ \square\,9\,1 \\ 7\,\square\,8 \\ \hline 2\,1\,8\,2 \end{array}$$

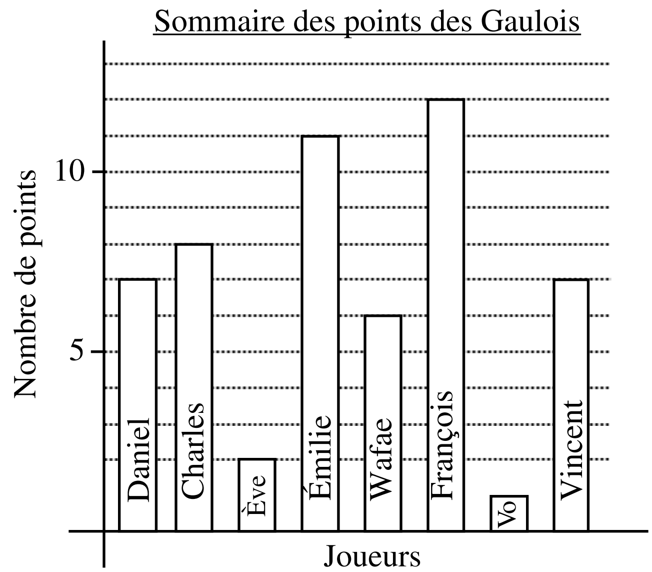
   (**A**) 9 (**B**) 11 (**C**) 13
   (**D**) 3 (**E**) 7

   Solution

   On additionne la colonne des unités pour obtenir $3 + 1 + 8 = 12$. On a donc 1 dizaine qui s'ajoute à la colonne des dizaines, puisque $12 = 1 \times 10 + 2$. On additionne les dizaines pour obtenir $1 + 6 + 9 + \mathbf{o} = 18$. La case contient donc un 2 et on a donc 1 centaine qui s'ajoute à la colonne des centaines. On additionne les centaines pour obtenir $1 + 8 + \mathbf{o} + 7 = 21$. La case contient donc un 5. Les deux chiffres dans les cases sont 2 et 5 et leur somme est 7. RÉPONSE : (E)

5. Le graphique représente le sommaire des points comptés par l'équipe des Gaulois dans leur dernière partie de basket-ball intra-muros. Le nombre total de points comptés par l'équipe est égal à :

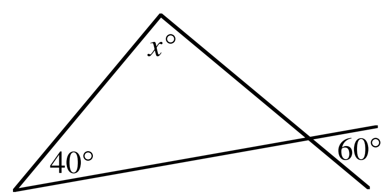
(**A**) 54 (**B**) 8 (**C**) 12
(**D**) 58 (**E**) 46



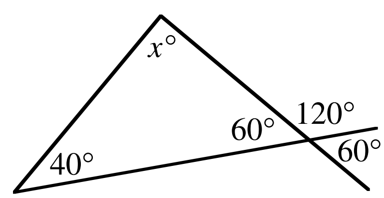
Solution
Voici les points comptés par chacun : Daniel, 7; Charles, 8; Ève, 2; Émilie, 11; Wafae, 6; François, 12; Vo, 1; Vincent, 7.
Le nombre total de points est égal à $7+8+2+11+6+12+1+7$, ou 54. RÉPONSE : (A)

6. Quelle est la valeur de x dans le diagramme?

(**A**) 20 (**B**) 80 (**C**) 100
(**D**) 120 (**E**) 60



Solution
Le supplément de l'angle de $60°$ mesure $120°$ et l'angle opposé par le sommet mesure $60°$, comme l'indique le diagramme.
Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à $180°$, on a $x° + 40° + 60° = 180°$, d'où $x = 80$.



RÉPONSE : (B)

7. La bourse de Toronto a enregistré les changements suivants pendant la semaine.

Lundi	-150
Mardi	$+106$
Mercredi	-47
Jeudi	$+182$
Vendredi	-210

Quel est le changement net pour la semaine?

(**A**) baisse de 119 (**B**) hausse de 119 (**C**) hausse de 91
(**D**) baisse de 91 (**E**) hausse de 695

Solution
$-150+106-47+182-210=-119$
Le changement net pour la semaine est donc une baisse de 119 points. RÉPONSE : (A)

8. Si $x * y = x + y^2$, alors $2 * 3$ est égal à :
(**A**) 8 (**B**) 25 (**C**) 11 (**D**) 13 (**E**) 7

Solution
$2 * 3^2 = 2 + 3^2$ ou 11 RÉPONSE : (C)

9. Combien des cinq énoncés suivants sont justes?
i) (20 % de 40) = 8 ii) $2^3 = 8$ iii) $7 - 3 \times 2 = 8$ iv) $3^2 - 1^2 = 8$ v) $2(6-4)^2 = 8$
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution
i) Vrai : (20 % de 40) est égal à $\frac{1}{5}$ de 40, ou 8.
ii) Vrai : 2^3 est égal à $2 \times 2 \times 2$, ou 8.
iii) Faux : $7 - 3 \times 2$ est égal à $7 - 6$, ou 1.
iv) Vrai : $3^2 - 1^2$ est égal à $9 - 1$, ou 8.
v) Vrai : $2(6-4)^2$ est égal à $2(2)^2$, ou 8.
Quatre des énoncés sont justes. RÉPONSE : (D)

10. Carl a vu son salaire réduit de 10 %. Plus tard, lors d'une promotion, son salaire a augmenté de 10 %. Au départ, son salaire était de 20 000 \$. Quel est son salaire actuel?
(**A**) 16 200 \$ (**B**) 19 800 \$ (**C**) 20 000 \$ (**D**) 20 500 \$ (**E**) 24 000 \$

Solution
Puisque Carl a vu son salaire réduit de 10 %, son salaire réduit était égal à $(0{,}90)\times(20\,000)$, ou 18 000 \$. Lors de la promotion, son salaire a augmenté de 10 %. Son salaire actuel est donc égal à $(1{,}10)\times(18\,000)$, ou 19 800 \$. RÉPONSE : (B)

Partie B

11. On veut recouvrir de pierres de patio un jardin de forme rectangulaire mesurant 15 m sur 2 m. Si chaque pierre de patio mesure 0,5 m sur 0,5 m, combien en faudra-t-il pour recouvrir le jardin?
(**A**) 240 (**B**) 180 (**C**) 120 (**D**) 60 (**E**) 30

Solution
Le jardin a une aire de 30 m^2.
Chaque pierre de patio a une aire de $(0{,}5)\times(0{,}5)$, ou 0,25 m^2.
Il faut donc 4 pierres pour recouvrir chaque mètre carré.
Il faudra donc 4×30, ou 120 pierres pour recouvrir le jardin. RÉPONSE : (C)

12. On additionne les nombres premiers entre 10 et 20 pour obtenir le nombre Q. Quel est le plus grand diviseur premier du nombre Q?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 11

Solution

Les nombres premiers entre 10 et 20 sont 11, 13, 17 et 19.

Donc $Q = 11 + 13 + 17 + 19$, ou 60.

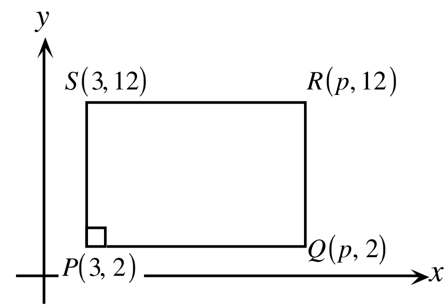
En factorisation première, $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

Le plus grand diviseur premier du nombre Q est donc 5. RÉPONSE : (C)

13. Les coordonnées des sommets du rectangle $PQRS$ sont indiquées dans le diagramme. Le rectangle $PQRS$ a une aire de 120. La valeur de p est :

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 13

(**D**) 14 (**E**) 15



Solution 1

On voit que le rectangle a une hauteur égale à $12 - 2$, ou 10 unités.

Puisque le rectangle a une aire de 120, il doit avoir une base de 12 unités, car $12 \times 10 = 120$.

Donc p est égal à $3 + 12$, ou 15.

Solution 2

La hauteur du rectangle est égale à 10 unités et la base est égale à $(p - 2)$ unités.

Donc $10(p - 3) = 120$.

$$p - 3 = 12$$
$$p = 15$$

RÉPONSE : (E)

14. Un ensemble de cinq entiers strictement positifs différents a une moyenne de 11. Quel est le plus grand nombre possible dans cet ensemble?

(**A**) 45 (**B**) 40 (**C**) 35 (**D**) 44 (**E**) 46

Solution

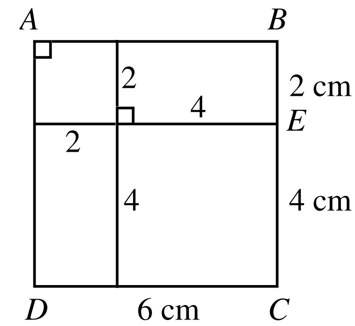
Puisque la moyenne des cinq entiers est égale à 11, leur somme est égale à 5×11, ou 55. Les quatre plus petits entiers possibles sont 1, 2, 3 et 4. Le plus grand nombre possible est donc égal à $55 - (1 + 2 + 3 + 4)$, ou 45. RÉPONSE : (A)

15. Le carré $ABCD$ est formé de deux rectangles identiques et de deux carrés dont les aires égalent 4 cm^2 et 16 cm^2. Quelle est l'aire du carré $ABCD$, en centimètres carrés?

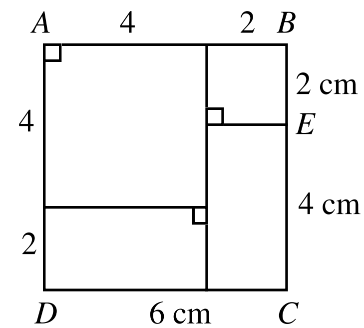
(**A**) 64 (**B**) 49 (**C**) 25 (**D**) 36 (**E**) 20

Solution

Le diagramme indique une façon de dessiner le carré $ABCD$. Le petit carré a des côtés de 2 cm et le grand carré a des côtés de 4 cm. Le carré $ABCD$ a alors des côtés de 6 cm et une aire de 36 cm^2.



On peut aussi dessiner le carré $ABCD$ comme dans le diagramme ci-contre.



RÉPONSE : (D)

16. Trois dixièmes de la surface de notre planète sont recouverts de terre, le reste étant recouvert d'eau. Quatre-vingt-dix-sept pour cent de l'eau est salée, le reste est de l'eau douce. Quel pourcentage de la surface de la Terre est recouverte d'eau douce?

(**A**) 20,1 % (**B**) 79,9 % (**C**) 32,1 % (**D**) 2,1 % (**E**) 9,6 %

Solution

Puisque trois dixièmes de la surface de la planète sont recouverts de terre, les sept dixièmes, ou 70 %, sont recouverts d'eau. Puisque 97 % de l'eau est salée, 3 % de l'eau est douce. Donc 3 % de 70 % de la Terre est recouverte d'eau douce. Ceci représente : $(0{,}03)\times(0{,}7)=0{,}021$ de la surface de la Terre, ou 2,1 % de la surface. RÉPONSE : (D)

17. Un certain mois, trois des dimanches tombent un jour du mois qui est un nombre pair. Le dixième jour de ce mois est un :

(**A**) samedi (**B**) dimanche (**C**) lundi (**D**) mardi (**E**) mercredi

Solution

Puisqu'il y a cinq dimanches ce mois-là, un des trois premiers jours du mois doit être un dimanche. Puisque le premier dimanche doit tomber un jour pair, ça doit être le 2^e jour du mois. Le 9^e jour du mois doit donc être un dimanche. Le 10^e jour du mois est donc un lundi.

RÉPONSE : (C)

18. Julie parcourt 60 km en direction sud, 40 km en direction ouest, 20 km en direction nord et 10 km en direction est. Quelle est la distance entre son point de départ et son point d'arrivée?

(**A**) 30 km (**B**) 50 km (**C**) 40 km (**D**) 70 km (**E**) 35 km

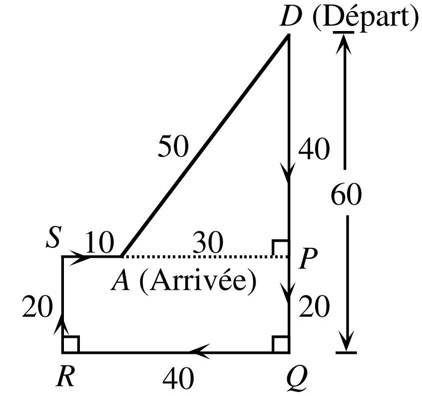
Solution

D'après le diagramme, on voit que le point d'arrivée A est situé à 40 km au sud et 30 km à l'ouest du point de départ D.

D'après le théorème de Pythagore, $AD^2 = 30^2 + 40^2$.

$$AD^2 = 2500$$
$$AD = 50$$

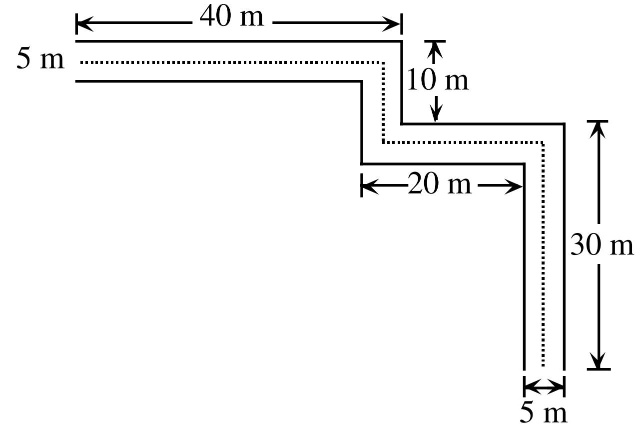
Il y a une distance de 50 km entre son point de départ et son point d'arrivée.



RÉPONSE : (B)

19. Un sentier pour vélos a une largeur de 5 m. Une ligne jaune est peinte au milieu du sentier. Si les côtés du sentier ont des longueurs de 40 m, 10 m, 20 m et 30 m, comme dans le diagramme, quelle est la longueur de la ligne jaune?

(**A**) 100 m (**B**) 97,5 m (**C**) 95 m
(**D**) 92,5 m (**E**) 90 m



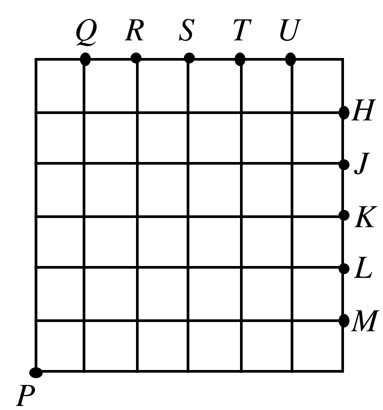
Solution

Puisque le sentier a une largeur de 5 m, la ligne du milieu est située à 2,5 m de sa bordure.

La longueur de la ligne jaune est égale à : $37,5 + 10 + 20 + 27,5 = 95$ m. RÉPONSE : (C)

20. Le diagramme illustre un quadrillage 6 sur 6. À partir du point P, on trace deux lignes droites de manière à diviser le quadrillage en trois régions d'aires égales. Ces droites passeront par les points respectifs :

(**A**) M et Q (**B**) L et R (**C**) K et S
(**D**) H et U (**E**) J et T



Solution

Soit les points A et B indiqués dans le diagramme.

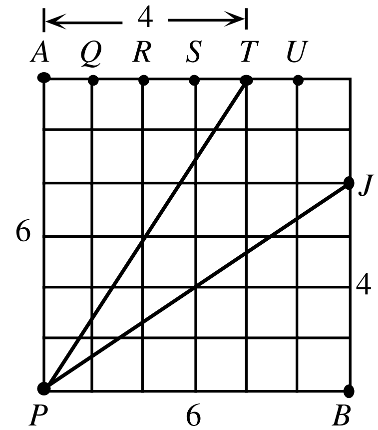
Le carré a une aire de 36.

Puisqu'il doit être divisé en trois régions d'aires égales, chacune des régions doit avoir une aire de 12.

Si on trace une ligne de P à un des points Q, R, S, T ou U, on obtient un triangle rectangle ayant une hauteur AP de 6 unités. Sa base doit mesurer 4 pour que l'aire égale 12 car $\frac{4\times6}{2}=12$. On doit donc choisir le point T.

De la même manière, on choisit le point J.

Les deux points sont donc T et J.



RÉPONSE : (E)

Partie C

21. Samuel marche en ligne droite vers un poteau de 8 m au sommet duquel il y a une lampe. Lorsqu'il arrive à 12 m du poteau, son ombre a une longueur de 4 m. Quelle est la longueur de son ombre lorsqu'il est à 8 m du poteau?

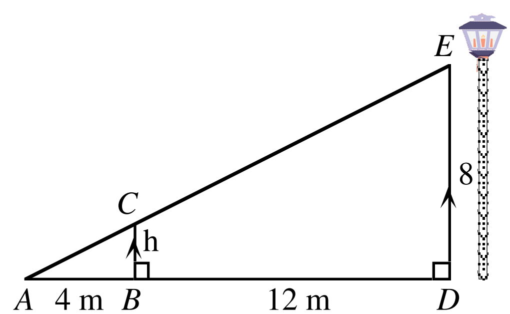
(**A**) $1\frac{1}{2}$ m (**B**) 2 m (**C**) $2\frac{1}{2}$ m (**D**) $2\frac{2}{3}$ m (**E**) 3 m

Solution

Le diagramme indique la position de Samuel lorsqu'il est à 12 m du poteau.

Puisque les triangles ABC et ADE sont semblables, les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles.

On a donc $\frac{h}{4}=\frac{8}{16}$, d'où $h=2$.



Le diagramme ci-contre indique la position de Samuel lorsqu'il est à 8 m du poteau. La longueur de son ombre est représentée par L.

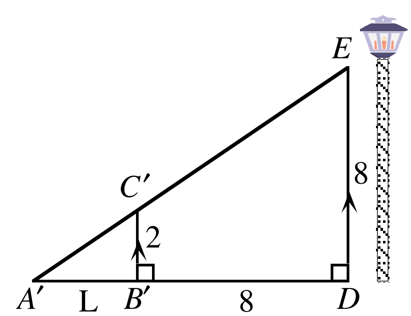
Puisque les deux triangles sont semblables, on a $\frac{L}{2}=\frac{L+8}{8}$.

Cette équation devient $\frac{4L}{8}=\frac{L+8}{8}$ si on choisit un dénominateur commun.

Donc : $4L=L+8$

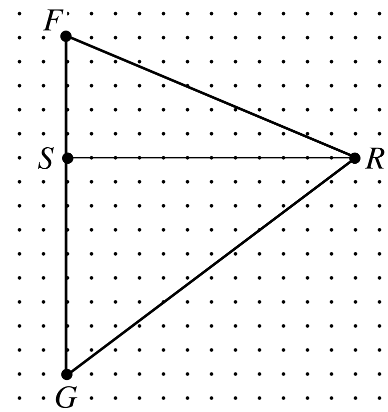
$3L=8$

$L=2\frac{2}{3}$ m



RÉPONSE : (D)

22. Le diagramme indique les maisons de Francine (F), Sylvie (S), Robert (R) et Guy (G), ainsi que des segments de droites qui les joignent. Francine considère quatre parcours pour visiter ses amis :



i) $F \to R \to S \to G$ ii) $F \to S \to G \to R$
iii) $F \to R \to G \to S$ iv) $F \to S \to R \to G$

Si $FS = 5$ km, $SG = 9$ km et $SR = 12$ km, la différence entre la longueur du parcours le plus long et celle du parcours le plus court, en km, est égale à :

(**A**) 8 (**B**) 13 (**C**) 15
(**D**) 2 (**E**) 0

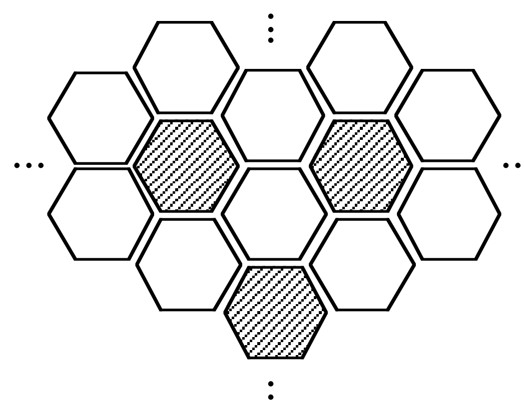
Solution
Puisque $FS = 5$ et $SR = 12$, d'après le théorème de Pythagore, on a $FR^2 = 5^2 + 12^2$, d'où $FR = 13$.
Puisque $SG = 9$ et $SR = 12$, d'après le théorème de Pythagore, on a $GR^2 = 9^2 + 12^2$, d'où $GR = 15$.
Donc :

i) $FR + RS + SG = 13 + 12 + 9$, ou 34 km
ii) $FS + SG + GR = 5 + 9 + 15$, ou 29 km
iii) $FR + RG + GS = 13 + 15 + 9$, ou 37 km
iv) $FS + SR + RG = 5 + 12 + 15$, ou 32 km

La différence entre la longueur du parcours le plus long et celle du parcours le plus court est égale à 8 km.

RÉPONSE : (A)

23. Le diagramme illustre une partie d'une surface carrée qui a été carrelée d'hexagones réguliers. Les hexagones sont blancs ou bleus. Chaque hexagone bleu est entouré de 6 hexagones blancs, tandis que chaque hexagone blanc est entouré de 3 hexagones bleus et 3 hexagones blancs. Si on ignore les hexagones incomplets, la meilleure approximation du rapport du nombre d'hexagones bleus au nombre d'hexagones blancs contenus dans la surface carrée est :

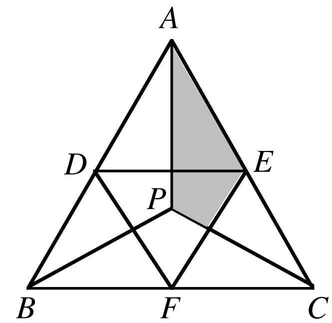


(**A**) 1:6 (**B**) 2:3 (**C**) 3:10
(**D**) 1:4 (**E**) 1:2

Solution
On considère d'abord une configuration de sept hexagones, formée d'un hexagone bleu entouré de six hexagones blancs. Il semble alors qu'il y a six fois plus d'hexagones blancs que d'hexagones bleus. Or chaque hexagone blanc est adjacent à trois hexagones bleus. Chaque hexagone blanc fait donc partie de trois configurations différentes de sept hexagones. Le nombre d'hexagones blancs est donc égal à six fois le nombre d'hexagones bleus, divisé par trois, c'est-à-dire deux fois le nombre d'hexagones bleus. Le rapport du nombre d'hexagones bleus au nombre d'hexagones blancs est donc égal à 1:2.

RÉPONSE : (E)

24. Dans le triangle équilatéral ABC, on a tracé des segments du point P aux sommets A, B et C de manière à former trois triangles identiques. Les points D, E et F sont les milieux des côtés du triangle ABC. On les joint comme dans le diagramme. Quelle fraction du triangle ABC est ombrée?

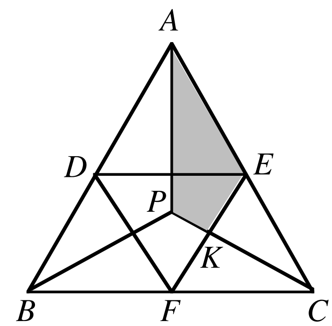


(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{5}{24}$ **(C)** $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{2}{9}$ **(E)** $\frac{2}{7}$

Solution 1

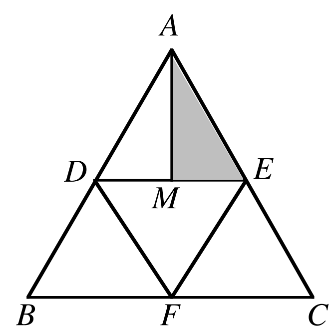
Par symétrie, le segment CP divise le triangle ECF en deux triangles de même aire. L'aire du triangle EKC égale $\frac{1}{2}$ de l'aire du triangle ECF. Puisque l'aire du triangle ECF égale $\frac{1}{4}$ de l'aire du triangle ABC, alors l'aire du triangle EKC égale $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ de l'aire du triangle ABC, c.-à-d. $\frac{1}{8}$ de l'aire du triangle ABC.



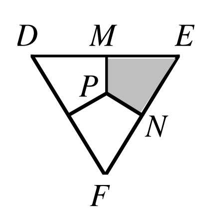
Par symétrie, l'aire du triangle APC égale $\frac{1}{3}$ de l'aire du triangle ABC. Puisque l'aire de la section ombrée est égale à l'aire du triangle APC moins celle du triangle EKC, elle est égale à $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)$, ou $\frac{5}{24}$ de l'aire du triangle ABC

Solution 2

Puisque D, E et F sont les milieux des côtés du triangle ABC, en les joignant, on forme quatre triangles identiques. Puisque l'aire du triangle AME est la moitié de l'aire du triangle ADE, elle est égale à $\frac{1}{8}$ de l'aire du triangle ABC.



Le triangle DEF est divisé en trois quadrilatères identiques, dont le quadrilatère $MENP$. Puisque l'aire du triangle DEF égale un quart de l'aire du triangle ABC, l'aire du quadrilatère $MENP$ est égale à $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$, c.-à-d. $\frac{1}{12}$ de l'aire du triangle ABC.



L'aire de la partie ombrée est donc égale à $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$, ou $\frac{5}{24}$ de l'aire du triangle ABC.

RÉPONSE : (B)

25. Dans un bocal, il y a entre une douzaine et trois douzaines de biscuits aux pépites de chocolat. Tous les biscuits, sauf un, contiennent le même nombre de pépites. L'autre a une pépite de plus que les autres. Les biscuits contiennent un total de 1000 pépites de chocolat. Quelle est la somme du nombre de biscuits dans le bocal et du nombre de pépites dans le biscuit qui en a un de plus que les autres?

(**A**) 65 (**B**) 64 (**C**) 63 (**D**) 66 (**E**) 67

Solution

Si on enlève temporairement la pépite de trop du biscuit spécial, on a entre 12 et 36 biscuits qui contiennent un nombre égal de pépites de chocolat, pour un total de 999 pépites.

Or $999 = 9 \times 111$
$\qquad = (3 \times 3) \times (3 \times 37)$.

Cette factorisation première nous permet de voir que les factorisations en paires de 999 sont 1×999, 3×333, 9×111 et 27×37.

Le seul diviseur de 999 qui est situé entre 12 et 36 est 27. Il y a donc 27 biscuits contenant chacun 37 pépites de chocolat.

Le biscuit spécial contenait donc 38 pépites de chocolat.

La somme demandée est donc $27 + 38$, ou 65. RÉPONSE : (A)

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1999 Solutions

Concours Gauss

(7e et 8e années – Sec. I et II)

CONCOURS GAUSS 7e

Partie A

1. $1999 - 999 + 99$ est égal à :
   (**A**) 901 (**B**) 1099 (**C**) 1000 (**D**) 199 (**E**) 99

   Solution
   $1999 - 999 + 99$
   $= 1000 + 99$
   $= 1099$ RÉPONSE : (B)

2. L'entier 287 est divisible par :
   (**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 6

   Solution 1
   Puisque le nombre 287 est impair, il n'est pas divisible par 4 ou par 6.
   Puisque 287 ne se termine pas par un 5 ou un 0, il n'est pas divisible par 5.
   Puisque la somme des chiffres de 287 est 17 et que cette somme n'est pas divisible par 3, alors 287 n'est pas divisible par 3.
   Il ne reste plus que le 7. On peut vérifier que 287 est divisible par 7.

   Solution 2
   On peut vérifier, de façon manuelle ou à l'aide d'une calculatrice, que $\frac{287}{3} = 95{,}66\ldots$; $\frac{287}{4} = 71{,}75$; $\frac{287}{5} = 57{,}4$; $\frac{287}{7} = 41$; $\frac{287}{6} = 47{,}833\ldots$ RÉPONSE : (D)

3. Susanne veut verser 35,5 kg de sucre dans des petits sacs. Si chaque sac peut contenir 0,5 kg, de combien de sacs aura-t-elle besoin?
   (**A**) 36 (**B**) 18 (**C**) 53 (**D**) 70 (**E**) 71

   Solution
   Le nombre de sacs est égal à : $\frac{35{,}5}{0{,}5} = 71$ RÉPONSE : (E)

4. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ est égal à :
   (**A**) $\frac{15}{8}$ (**B**) $1\frac{3}{14}$ (**C**) $\frac{11}{8}$ (**D**) $1\frac{3}{4}$ (**E**) $\frac{7}{8}$

   Solution
   $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
   $= \frac{8}{8} + \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8}$

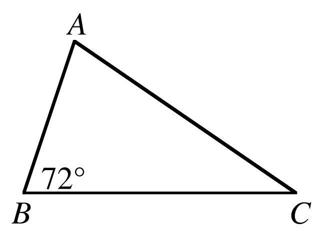
$= \frac{15}{8}$ RÉPONSE : (A)

5. Laquelle des expressions suivantes donne un nombre impair?
(**A**) 6^2 (**B**) $23-17$ (**C**) 9×24 (**D**) $96\div 8$ (**E**) 9×41

Solution 1
On évalue chaque expression directement.
(**A**) $6^2=36$ (**B**) $23-17=6$ (**C**) $9\times 24=216$ (**D**) $96\div 8=12$ (**E**) $9\times 41=369$

Solution 2
On pense aux propriétés des nombres pairs et des nombres impairs.
(**A**) (pair) × (pair) = pair
(**B**) (impair) – (impair) = pair
(**C**) (impair) × (pair) = pair
(**D**) (pair) ÷ (pair) = pair ou impair (Il faut évaluer.)
(**E**) (impair) × (impair) = impair RÉPONSE : (E)

6. Dans le triangle ABC, $\angle B = 72°$. Quelle est la somme des mesures des deux autres angles, en degrés?
(**A**) 144 (**B**) 72 (**C**) 108
(**D**) 110 (**E**) 288



Solution
Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, alors :
$\angle A + \angle C = 180° - 72°$
$= 108°$ RÉPONSE : (C)

7. Si on place les nombres $\frac{4}{5}$, 81 % et 0,801 en ordre, du plus petit au plus grand, le bon ordre est :
(**A**) $\frac{4}{5}$; 81 %; 0,801 (**B**) 81 %; 0,801; $\frac{4}{5}$ (**C**) 0,801; $\frac{4}{5}$; 81 %
(**D**) 81 %; $\frac{4}{5}$; 0,801 (**E**) $\frac{4}{5}$; 0,801; 81 %

Solution
On écrit les nombres sous forme décimale pour mieux les comparer.
On a $\frac{4}{5} = 0{,}800$; 81 % = 0,810; 0,801.
Du plus petit au plus grand, on a $\frac{4}{5}$; 0,801; 81 %. RÉPONSE : (E)

8. La moyenne des nombres 10, 4, 8, 7 et 6 est égale à :
(**A**) 33 (**B**)13 (**C**) 35 (**D**) 10 (**E**) 7

Solution

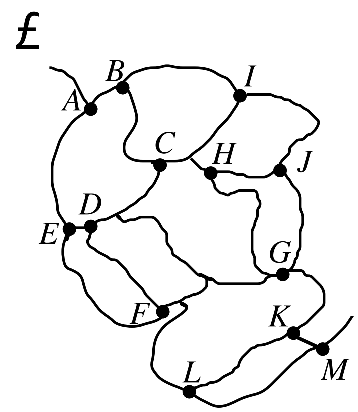
La moyenne est égale à : $\frac{10+4+8+7+6}{5}$

$= \frac{35}{5}$

$= 7$

RÉPONSE : (E)

9. Le diagramme est une carte indiquant des sentiers dans une forêt. André se propose de visiter les sites, de A à M, en ordre alphabétique. Il ne doit jamais revenir sur ses pas et il doit toujours procéder directement d'un site au suivant. Quel est le nombre maximal de sites qu'il peut visiter avant de briser l'ordre alphabétique?



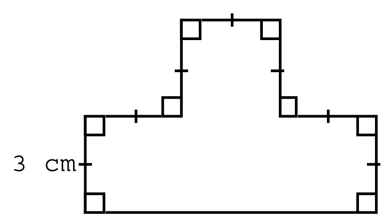
(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8
(**D**) 10 (**E**) 13

Solution

En traçant à l'aide d'un crayon, on peut visiter les sites de A à J en ordre alphabétique, sans revenir sur ses pas. On constate alors qu'il est impossible de se rendre au site K sans passer par G ou sans retracer ses pas.

Puisque J est la dixième lettre de l'alphabet, André peut visiter un maximum de 10 sites avant de briser l'ordre alphabétique. RÉPONSE : (D)

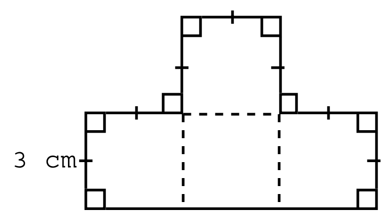
10. Dans le diagramme, les segments se rencontrent en formant des angles de 90°. Si les petits segments mesurent 3 cm, quelle est l'aire de la figure, en centimètres carrés?



(**A**) 30 (**B**) 36 (**C**) 40
(**D**) 45 (**E**) 54

Solution

Les quatre carrés sont identiques. Ils ont chacun une aire égale à : $3 \times 3 = 9$ cm^2. L'aire de la figure est égale à : $4 \times 9 = 36$ cm^2.



RÉPONSE : (B)

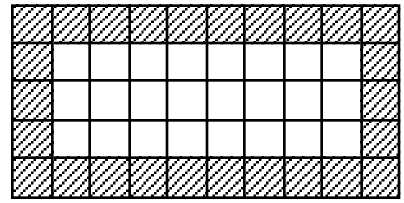
Partie B

11. On a recouvert de tuiles carrées le parquet d'une salle rectangulaire. La salle mesure 10 tuiles de long et 5 tuiles de large. Le nombre de tuiles qui touchent aux murs de la salle est :

(**A**) 26 (**B**) 30 (**C**) 34 (**D**) 46 (**E**) 50

Solution

On trace un quadrillage mesurant 10×5, ce qui permet de compter les tuiles qui touchent aux murs de la salle. On voit qu'il y a 26 tuiles qui touchent aux murs de la salle. On peut aussi compter $2 \times 10 + 2 \times 5 - 4 = 26$. On a soustrait 4 parce que les quatre tuiles des coins ont été comptées deux fois. Si la salle avait mesuré L tuiles de long et l tuiles de large, le nombre de tuiles qui touchent aux murs de la salle serait égal à $2L + 2l - 4$.



RÉPONSE : (A)

12. Cinq élèves, France, Gaëlle, Henri, Isabelle et Jean, sont assis dans cet ordre autour d'une table de forme circulaire. Pour décider qui sera premier à un jeu, ils décident de faire un compte à rebours. Henri dit '34', puis Isabelle dit '33'. Les cinq élèves continuent ainsi le compte à rebours, dans l'ordre où ils sont assis. Qui est celui ou celle qui dira '1'?

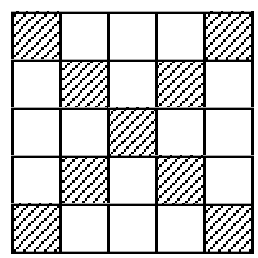
(**A**) France (**B**) Gaëlle (**C**) Henri (**D**) Isabelle (**E**) Jean

Solution

Puisqu'il y a cinq personnes autour de la table, chacun dira un nombre à tous les cinq nombres.
Henri dira '34', '29', '24', '19', '14', '9', '4'. Isabelle dira '33', '28', '23', '18', '13', '8', '3'.
Jean dira '32', '27', '22', '17', '12', '7', '2'. France dira '31', '26', '21', '16', '11', '6', '1'.
Gaëlle dira '30', '25', '20', '15', '10', '5'.
Pour les mathématiciennes et les mathématiciens, il s'agit d'un problème portant sur l'arithmétique modulo 5. RÉPONSE : (A)

13. Dans le diagramme, le pourcentage des petits carrés qui sont ombrés est égal à :

(**A**) 9 (**B**) 33 (**C**) 36
(**D**) 56,25 (**E**) 64



Solution

Il y a 9 petits carrés ombrés, sur un total de 25 petits carrés.
Le rapport est donc égal à $\frac{9}{25}$, ce qui correspond à 36 %. RÉPONSE : (C)

14. Lequel des nombres suivants est un nombre impair, contenant le chiffre 5, divisible par 3 et situé entre les nombres 12^2 et 13^2?

(**A**) 105 (**B**) 147 (**C**) 156 (**D**) 165 (**E**) 175

Solution

Puisque $12^2 = 144$ et $13^2 = 169$, on rejette les choix 105 et 175.
On rejette aussi le choix 156 qui est un nombre pair. Il reste 147 et 165. Puisque 147 ne contient pas le chiffre 5, ce choix est rejetté. Il ne reste plus que 156. On peut vérifier qu'il satisfait à toutes les

conditions. RÉPONSE : (C)

15. Dans une boîte, il y a 36 cubes roses, 18 cubes bleus, 9 cubes verts, 6 cubes rouges et 3 cubes mauves, tous de format identique. Si on choisit un cube au hasard, quelle est la probabilité de choisir un cube vert?

(**A**) $\frac{1}{9}$ (**B**) $\frac{1}{8}$ (**C**) $\frac{1}{5}$ (**D**) $\frac{1}{4}$ (**E**) $\frac{9}{70}$

Solution

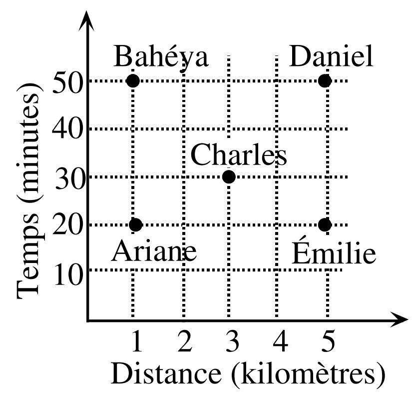
En tout, il y a 72 cubes de format indentique.

Puisqu'il y a 9 cubes verts, la probabilité de choisir un cube vert est égale à : $\frac{9}{72} = \frac{1}{8}$

RÉPONSE : (B)

16. Le graphique représente le temps que cinq personnes ont mis pour parcourir diverses distances. En moyenne, quelle personne était la plus rapide?

(**A**) Ariane (**B**) Bahéya (**C**) Charles
(**D**) Daniel (**E**) Émilie



Solution

Le tableau suivant indique les données du graphique, ainsi que leur vitesse moyenne.

On rappelle que vitesse moyenne $= \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$.

	Distance (km)	Temps (minutes)	Vitesse (km/min)
Ariane	1	20	$\frac{1}{20} = 0{,}05$
Bahéya	1	50	$\frac{1}{50} = 0{,}02$
Charles	3	30	$\frac{3}{30} = 0{,}10$
Daniel	5	50	$\frac{5}{50} = 0{,}10$
Émilie	5	20	$\frac{5}{20} = 0{,}25$

Émilie est la plus rapide. RÉPONSE : (E)

17. Une suite de type Fibonacci est une suite de nombres dans laquelle chaque nombre, à partir du troisième, est la somme des deux nombres précédents. Si le premier nombre d'une telle suite est 2 et le troisième est 9, quel est le huitième nombre de la suite?

(**A**) 34 (**B**) 36 (**C**) 107 (**D**) 152 (**E**) 245

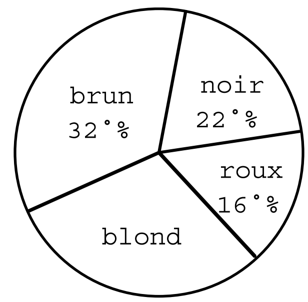
Solution

Puisque le premier nombre est 2 et le troisième est 9, le deuxième doit être 7.
La suite est donc : 2, 7, 9, 16, 25, 41, 66, 107. Le huitième nombre est 107.

RÉPONSE : (C)

18. Le diagramme circulaire indique les résultats d'un sondage, mené auprès de 600 personnes, portant sur la couleur des cheveux. Combien de ces personnes ont les cheveux blonds?

(**A**) 30 (**B**) 160 (**C**) 180
(**D**) 200 (**E**) 420



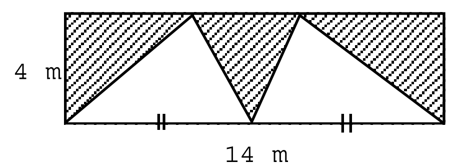
Couleur des cheve

Solution

D'après le diagramme, 30 % des 600 personnes ont les cheveux blonds.
Or 30 % de 600 est égal à $0{,}30 \times 600$ ou $\frac{30}{100} \times 600$, c.-à-d. à 180.
Il y a donc 180 des 600 personnes qui ont les cheveux blonds. RÉPONSE : (C)

19. Quelle est l'aire de la partie ombrée du rectangle, en mètres carrés?

(**A**) 14 (**B**) 28 (**C**) 33,6
(**D**) 56 (**E**) 42



Solution

Les deux triangles non ombrés ont chacun une base de 7 m et une hauteur de 4 m. Chacun a donc une aire égale à : $\frac{7 \times 4}{2} = 14$ m^2. Les deux triangles ont donc une aire totale de 28 m^2.
La partie ombrée est égale à : $56 - 28 = 28$ m^2 RÉPONSE : (B)

20. On place les neuf premiers entiers impairs positifs dans le carré magique, de manière que la somme des nombres dans chaque rangée, chaque colonne et chaque diagonale soit la même. Quelle est la valeur de $A + E$?

(**A**) 32 (**B**) 28 (**C**) 26
(**D**) 24 (**E**) 16

A	1	B
5	C	13
D	E	3

Solution

La somme des neuf premiers entiers impairs positifs est égale à :

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 81$$

Puisque la somme des nombres dans chaque colonne est la même, cette somme est égale à : $\frac{81}{3} = 27$.
Il en est de même pour les rangées. Puisque $B + 13 + 3 = 27$, alors $B = 11$.

Dans la première rangée, $A+1+11=27$. Donc $A=15$.
Dans la première colonne, $15+5+D=27$. Donc $D=7$.
Dans la troisième rangée, $7+E+3=27$. Donc $E=17$.
Donc : $A+E=15+17$
$=32$ RÉPONSE : (A)

Partie C

21. On joue un jeu sur le tableau illustré. À chaque tour, on doit se déplacer de trois positions dans n'importe quelle direction (à droite, à gauche, vers le haut ou vers le bas), puis de deux positions dans une direction perpendiculaire à la première. Si on est en position S, laquelle des positions P, Q, R, T ou W ne peut jamais être obtenue de la manière décrite, peu importe le nombre de tours que l'on joue?

		P		
	Q		R	
		T		
S				W

(**A**) P (**B**) Q (**C**) R (**D**) T (**E**) W

Solution
En partant de S, on peut atteindre la position R. En partant de S, on peut aussi atteindre la position P. On peut ensuite atteindre l'une après l'autre les positions W et Q. Pour arriver à la position T, il faudrait être placé à l'extérieur du tableau pour se déplacer de trois positions, puis de deux positions.
RÉPONSE : (D)

22. On colle ensemble 42 cubes, mesurant chacun 1 cm de large, pour former un prisme droit à base rectangulaire. Si la base du prisme a un périmètre de 18 cm, quelle est la hauteur du prisme, en centimètres?
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) $\frac{7}{3}$ (**D**) 3 (**E**) 4

Solution 1
Puisque le prisme a un volume de 42 cm^3, on peut l'obtenir en multipliant $42\times1\times1$, $6\times7\times1$, $21\times2\times1$, $2\times3\times7$ ou $14\times3\times1$.
Pour avoir un périmètre de 18 cm, il faut que la longueur et la largeur aient une somme de 9 cm. Parmi les possibilités ci-dessus, seule $2\times3\times7$ permet une telle somme.
On a donc une longueur de 7 cm et une largeur de 2 cm.
La hauteur est donc égale à 3 cm.

Solution 2
Puisque le prisme a un périmètre de 18 cm, le tableau suivant donne les seules possibilités quant à la longueur L et à la largeur l.

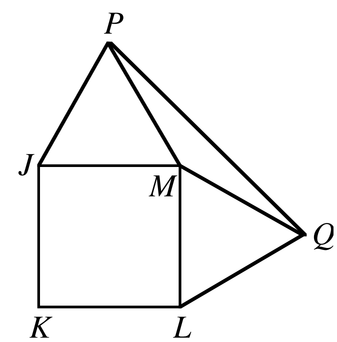
longueur (L)	largeur (l)
8	1
7	2
6	3
5	4

Puisque le prisme a un volume de 42 cm^3, ces possibilités donnent les équations suivantes, h étant la

hauteur du prisme : $8 \times 1 \times h = 42$, $7 \times 2 \times h = 42$, $6 \times 3 \times h = 42$ et $5 \times 4 \times h = 42$.
La seule valeur entière possible de h est $h = 3$, avec $L = 7$ et $l = 2$.
La hauteur est donc égale à 3 cm. RÉPONSE : (D)

23. Le diagramme illustre un carré $JKLM$. Les points P et Q sont situés à l'extérieur du carré, de manière que les triangles JMP et MLQ soient équilatéraux. La mesure de l'angle PQM, en degrés, est égale à :

(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 25
(**D**) 30 (**E**) 150



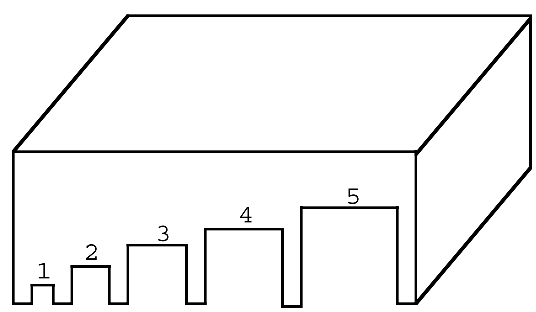
Solution
Puisque les triangles JMP et MLQ sont équilatéraux, alors $\angle PMJ = 60°$ et $\angle QML = 60°$.

$$\text{Donc : } \angle PMQ = 360° - 90° - 60° - 60° = 150°$$

Puisque les côtés JM, ML, MP et MQ sont congrus, le triangle PQM est isocèle.
Donc $\angle MPQ = \angle MQP$ et puisque $\angle PMQ = 150°$, chacun mesure 15°.

RÉPONSE : (B)

24. On a découpé une face d'une boîte, le long d'un bord, pour former cinq trous de grandeurs croissantes. La boîte est utilisée pour un jeu de billes. Le nombre au-dessus d'un trou indique le nombre de points comptés lorsqu'une bille roule dans le trou. On a des petites, des moyennes et des grosses billes. Les petites peuvent passer dans n'importe quel trou, tandis que les moyennes peuvent passer dans les trous numéros 3, 4 et 5. Les grosses billes peuvent seulement passer dans le trou numéro 5. Supposons que vous pouvez choisir jusqu'à 10 billes de chaque grandeur et que vous réussissez à faire pénétrer chaque bille dans un trou. Quel est le nombre maximal de billes qu'il faudrait faire rouler pour obtenir 23 points?



(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 14
(**D**) 15 (**E**) 16

Solution
Puisqu'on cherche le nombre ***maximal*** de billes, on en veut beaucoup. On commence donc par utiliser les 10 petites billes que l'on fait rouler dans le trou numéro 1 pour un total de 10 points. Il reste alors 13 points à obtenir. On peut continuer avec trois billes moyennes que l'on fait rouler dans les trous respectifs numéros 5, 5 et 3. On a alors utilisé 13 billes en tout.

Pour obtenir les 13 derniers points, on peut aussi utiliser quatre billes moyennes que l'on fait rouler dans les trous respectifs numéros 3, 3, 3 et 4. On a alors utilisé 14 billes en tout.
Voici une autre façon de s'y prendre. On choisit 10 petites billes et on en fait rouler neuf dans le trou numéro 1 et une dans le trou numéro 2, pour un total de 11 points. On choisit alors quatre billes moyennes que l'on fait rouler dans le trou numéro 3, pour un total global de 23 points. On a alors utilisé 14 billes. RÉPONSE : (C)

25. Dans une ligue de balle molle, chaque équipe a rencontré chaque autre équipe 4 fois. Voici les points obtenus par les équipes de la ligue : Lions, 22; Tigres, 19; Cougars, 14; Panthères, 12. Si chaque équipe a reçu trois points pour une victoire, un point pour un match nul et aucun point pour une défaite, combien y a-t-il eu de matchs nuls?
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 10

Solution
Lorsque chaque équipe rencontre chaque autre équipe une seule fois, le nombre de parties est égal à :
$3+2+1=6$
Puisque chaque équipe rencontre chaque autre équipe quatre fois, le nombre de parties est égal à :
$4\times 6=24$
Puisqu'on accorde trois points par victoire, si chaque partie avait une équipe gagnante, le nombre total de points accordés serait égal à : $3\times 24=72$
Si on additionne le nombre de points des équipes, on obtient : $22+19+14+12=67$
À chaque match nul, chacune des deux équipes reçoit un point. On accorde donc un total de deux points au lieu des trois points pour une victoire. Chaque point qu'il manque pour faire 72 correspond donc à un match nul.
Le nombre de matchs nuls est donc égal à : $72-67=5$ RÉPONSE : (C)

CONCOURS GAUSS 8e

Partie A

1. $10^3 + 10^2 + 10$ est égal à :
(**A**) 1110 (**B**) 101 010 (**C**) 111 (**D**) 100 010 010 (**E**) 11 010

Solution
$10^3 + 10^2 + 10$
$= 1000 + 100 + 10$
$= 1110$ RÉPONSE : (A)

2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ est égal à :
(**A**) $\frac{2}{5}$ (**B**) $\frac{1}{6}$ (**C**) $\frac{1}{5}$ (**D**) $\frac{3}{2}$ (**E**) $\frac{5}{6}$

Solution
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$
$= \frac{5}{6}$ RÉPONSE : (E)

3. Laquelle des expressions suivantes donne un nombre impair?
(**A**) 6^2 (**B**) $23 - 17$ (**C**) 9×24 (**D**) 9×41 (**E**) $96 \div 8$

Solution 1
On évalue chaque expression.
(**A**) $6^2 = 36$ (**B**) $23 - 17 = 6$ (**C**) $9 \times 24 = 216$ (**D**) $9 \times 41 = 369$ (**E**) $96 \div 8 = 12$

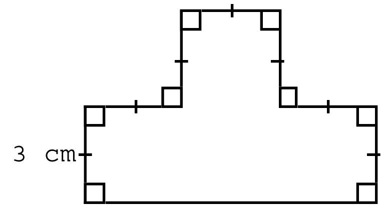
Solution 2
On pense aux propriétés des nombres pairs et des nombres impairs.
(**A**) (pair) × (pair) = pair
(**B**) (impair) – (impair) = pair
(**C**) (impair) × (pair) = pair
(**D**) (impair) × (impair) = impair
(**E**) (pair) ÷ (pair) = pair ou impair (Il faut évaluer.) RÉPONSE : (D)

4. Lorsqu'on divise 82 460 par 8, quel reste obtient-on?
(**A**) 0 (**B**) 5 (**C**) 4 (**D**) 7 (**E**) 2

Solution
Lorsqu'on divise par 8, le reste est déterminé par les trois derniers chiffres. Il suffit donc de vérifier le reste lorsqu'on divise 460 par 8.

Puisque $460 = 8 \times 57 + 4$, le reste est 4. RÉPONSE : (C)

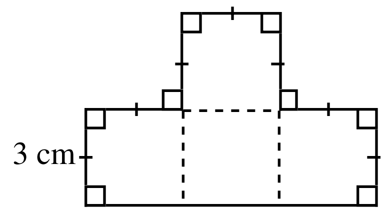
5. Dans le diagramme, les segments se rencontrent pour former des angles de $90°$. Si les petits segments mesurent 3 cm, quelle est l'aire de la figure, en centimètres carrés?



(**A**) 30 (**B**) 36 (**C**) 40
(**D**) 45 (**E**) 54

Solution

Les quatre carrés sont identiques.
Ils ont chacun une aire de : $3 \times 3 = 9$ cm^2
L'aire de la figure est égale à : $4 \times 9 = 36$ cm^2



RÉPONSE : (B)

6. La moyenne des nombres -5, -2, 0, 4 et 8 est égale à :

(**A**) 1 (**B**) 0 (**C**) $\frac{19}{5}$ (**D**) $\frac{5}{4}$ (**E**) $\frac{9}{4}$

Solution

La moyenne est égale à : $\dfrac{(-5)+(-2)+0+4+8}{5} = 1$ RÉPONSE : (A)

7. Si on augmentait le taux d'une taxe de 7 % à 7,5 %, alors la taxe imposée sur un item de 1000 $ augmenterait de :

(**A**) 75,00 $ (**B**) 5,00 $ (**C**) 0,5 $ (**D**) 0,05 $ (**E**) 7,50 $

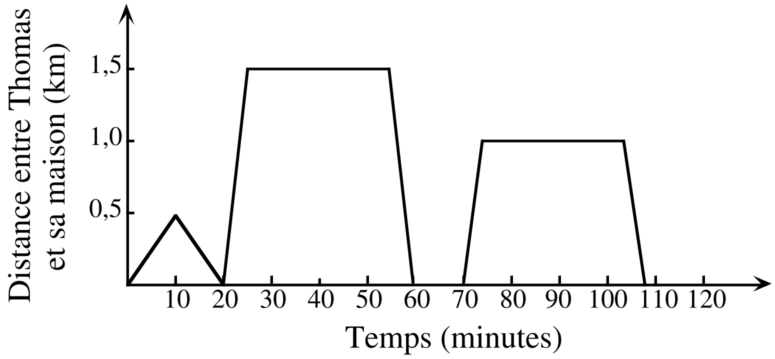
Solution

Si le taux augmente de 0,5 %, cela correspond à une augmentation de taxe de 0,50 $ sur chaque tranche de 100 $.
La taxe imposée sur un item de 1000 $ augmenterait donc de : $10 \times 0{,}50 = 5{,}00$ $.

RÉPONSE : (B)

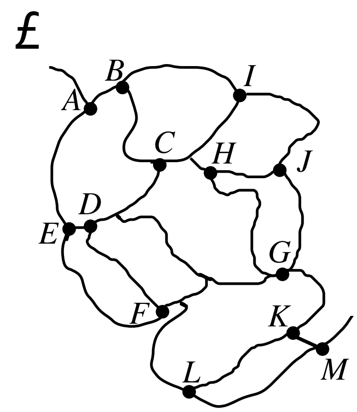
8. Thomas a passé une partie de la matinée à rendre visite à des amis et à jouer avec eux. Le graphique illustre ses allées et venues. Il s'est rendu à la maison de chaque ami et il est resté jouer si l'ami y était. Le nombre de maisons où il est resté jouer est :

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5



Solution
Le graphique indique trois allées et venues. La première partie, en forme de triangle, indique qu'il s'est rendu à une maison, à 0,5 km de sa maison, et qu'il est revenu immédiatement.
Dans les deux autres cas, la ligne horizontale indique qu'il est resté.
Dans chacun de ces deux cas, il est demeuré une trentaine de minutes. RÉPONSE : (B)

9. Le diagramme est une carte indiquant des sentiers dans une forêt. André se propose de visiter les sites, de A à M, en ordre alphabétique. Il ne doit jamais revenir sur ses pas et il doit toujours procéder directement d'un site au suivant. Quel est le nombre maximal de sites qu'il peut visiter avant de briser l'ordre alphabétique?
(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8
(**D**) 10 (**E**) 13



Solution
En traçant à l'aide d'un crayon, on peut visiter les sites de A à J en ordre alphabétique, sans revenir sur ses pas. On constate alors qu'il est impossible de se rendre au site K sans passer par G ou sans retracer ses pas.
Puisque J est la dixième lettre de l'alphabet, André peut visiter un maximum de 10 sites avant de briser l'ordre alphabétique. RÉPONSE : (D)

10. Un jardin de forme rectangulaire a une aire de 28 m^2. Il a une longueur de 7 m. Son périmètre, en mètres, est égal à :
(**A**) 22 (**B**) 11 (**C**) 24 (**D**) 36 (**E**) 48

Solution
Puisque le jardin a une aire de 28 m^2 et une longueur de 7 m, sa largeur est égale à 4 m.
Son périmètre est égal à : $2(4+7)=22$ m RÉPONSE : (A)

Partie B

11. Lequel des nombres suivants est un nombre impair, contenant le chiffre 5, divisible par 3 et situé entre les nombres 12^2 et 13^2?

(**A**) 105 (**B**) 147 (**C**) 156 (**D**) 165 (**E**) 175

Solution

Puisque $12^2 = 144$ et $13^2 = 169$, on rejette les choix 105 et 175.

On rejette aussi le choix 156 qui est un nombre pair. Il reste 147 et 165. Puisque 147 ne contient pas le chiffre 5, ce choix est rejetté. Il ne reste plus que 165. On peut vérifier qu'il satisfait à toutes les conditions. RÉPONSE : (D)

12. Si $\dfrac{n+1999}{2} = -1$, alors la valeur de n est :

(**A**) -2001 (**B**) -2000 (**C**) -1999 (**D**) -1997 (**E**) 1999

Solution

Par logique, ou en multipliant chaque membre de l'équation par 2, on obtient $n+1999=-2$, d'où $n=-2001$. RÉPONSE : (A)

13. L'expression $n!$ représente le produit des entiers positifs de 1 à n. Par exemple, $5! = 1\times2\times3\times4\times5$. La valeur de $6!-4!$ est :

(**A**) 2 (**B**) 18 (**C**) 30 (**D**) 716 (**E**) 696

Solution

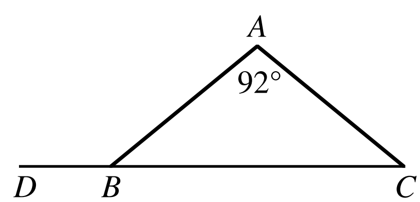
Puisqu'on a $6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1$, alors $6! = 720$.

De même, $4! = 24$. Donc : $6! - 4! = 720 - 24$

$= 696$ RÉPONSE : (E)

14. Le triangle ABC est isocèle et $\angle A = 92°$. On a prolongé CB jusqu'au point D. Quelle est la mesure de $\angle ABD$?

(**A**) 88° (**B**) 44° (**C**) 92°
(**D**) 136° (**E**) 158°



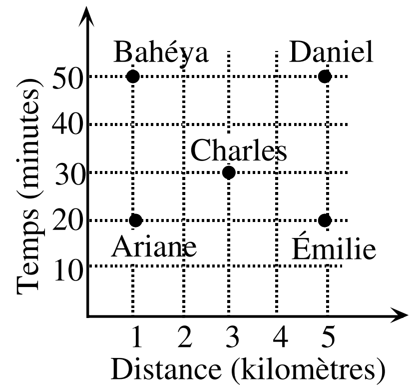
Solution

Puisque $\angle A = 92°$ et que le triangle est isocèle, les angles ABC et ACB sont congrus.

Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, alors $\angle ABC = 44°$ et $\angle ACB = 44°$.

Donc $\angle ABD = 180° - 44°$, d'où $\angle ABD = 136°$. RÉPONSE : (D)

15. Le graphique représente le temps que cinq personnes ont mis pour parcourir diverses distances. En moyenne, quelle personne était la plus rapide?



(**A**) Ariane (**B**) Bahéya (**C**) Charles
(**D**) Daniel (**E**) Émilie

Solution

Le tableau suivant indique les données du graphique, ainsi que leur vitesse moyenne.

On rappelle que vitesse moyenne $= \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$.

	Distance (km)	Temps (minutes)	Vitesse (km/min)
Ariane	1	20	$\frac{1}{20} = 0,05$
Bahéya	1	50	$\frac{1}{50} = 0,02$
Charles	3	30	$\frac{3}{30} = 0,10$
Daniel	5	50	$\frac{5}{50} = 0,10$
Émilie	5	20	$\frac{5}{20} = 0,25$

Émilie est la plus rapide. RÉPONSE : (E)

16. Dans un ensemble de cinq nombres, deux des nombres ont une moyenne de 12 et les trois autres nombres ont une moyenne de 7. La moyenne des cinq nombres est :

(**A**) $8\frac{1}{3}$ (**B**) $8\frac{1}{2}$ (**C**) 9 (**D**) $8\frac{3}{4}$ (**E**) $9\frac{1}{2}$

Solution

Puisque deux des nombres ont une moyenne de 12, leur somme est égale à 24.

Puisque les trois autres nombres ont une moyenne de 7, leur somme est égale à 21.

La somme des cinq nombres est donc égale à : $24 + 21 = 45$

La moyenne des cinq nombres est égale à : $\frac{45}{5} = 9$ RÉPONSE : (C)

17. Dans la soustraction $\begin{array}{r} 1957 \\ \underline{a9} \\ 18b8 \end{array}$, la somme des chiffres a et b est égale à :

(**A**) 15 (**B**) 14 (**C**) 10 (**D**) 5 (**E**) 4

Solution 1

On soustrait pour obtenir :

$$\begin{array}{cccc} 1 & \overset{8}{\cancel{9}} & \overset{14}{\cancel{5}} & 17 \\ & & a & 9 \\ \hline 1 & 8 & b & 8 \end{array}$$

D'après ce calcul, on a $14 - a = b$ ou $a + b = 14$.

Solution 2

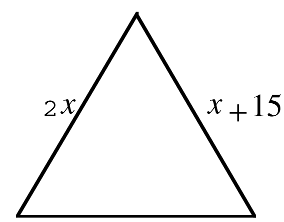
On procède par tâtonnement en attribuant des valeurs à a et à b.

Par exemple, on peut supposer que $a + b = 15$ et que $a = 8$, $b = 7$. On fait la soustraction pour constater que ce choix n'est pas approprié.

Parmi les choix (**A**), (**B**) et (**C**), le seul pour lequel la soustraction fonctionne est $a + b = 14$.

On peut aussi observer que les choix $a + b = 4$ et $a + b = 5$ donnent des valeurs de a et de b qui sont trop petites pour la soustraction. RÉPONSE : (B)

18. Le triangle équilatéral illustré a un côté qui mesure $2x$ et un autre qui mesure $x + 15$. Le périmètre du triangle est égal à :



(**A**) 15 (**B**) 30 (**C**) 90

(**D**) 45 (**E**) 60

Solution

Puisque le triangle est équilatéral, alors $2x = x + 15$, d'où $x = 15$.

Chaque côté a donc une longueur de 30 et le périmètre est donc égal à 90. RÉPONSE : (C)

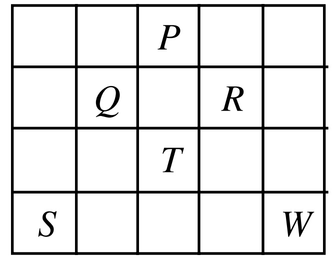
19. Lors d'une enquête sur la circulation, on a examiné 50 voitures en mouvement. On a remarqué que 20 % d'entre elles contenaient plus d'une personne. Parmi les voitures qui ne contenaient qu'une personne, 60 % avaient une femme au volant. Combien des voitures qui ne contenaient qu'une personne avaient un homme au volant?

(**A**) 10 (**B**) 16 (**C**) 20 (**D**) 30 (**E**) 40

Solution

Puisque 80 % des 50 voitures contiennent une seule personne et que $0{,}80 \times 50 = 40$, cela représente 40 voitures. Puisque 40 % de ces 40 voitures avaient un homme au volant et que $0{,}40 \times 40 = 16$, cela représente 16 voitures. RÉPONSE : (B)

20. On joue un jeu sur le tableau illustré. À chaque tour, on doit se déplacer de trois positions dans n'importe quelle direction (à droite, à gauche, vers le haut ou vers le bas), puis de deux positions dans une direction perpendiculaire à la première. Si on est en position S, laquelle des positions P, Q, R, T ou W ne peut jamais être obtenue de la manière décrite, peu importe le nombre de tours que l'on joue?



(**A**) P (**B**) Q (**C**) R
(**D**) T (**E**) W

Solution
En partant de S, on peut atteindre la position R. En partant de S, on peut aussi atteindre la position P. On peut ensuite atteindre l'une après l'autre les positions W et Q. Pour arriver à la position T, il faudrait être placé à l'extérieur du tableau pour se déplacer de trois positions, puis de deux positions.

RÉPONSE : (D)

Partie C

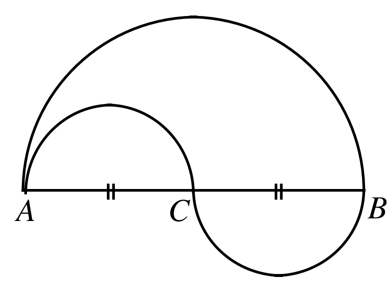
21. La somme de sept entiers consécutifs strictement positifs est toujours :
(**A**) impaire (**B**) un multiple de 7 (**C**) paire
(**D**) un multiple de 4 (**E**) un multiple de 3

Solution
On constate d'abord que :

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+5+6+7 &= 28 \\ 2+3+4+5+6+7+8 &= 35 \\ 3+4+5+6+7+8+9 &= 42 \\ &\vdots \end{aligned}$$

La somme de sept entiers consécutifs strictement positifs peut donc égaler 28, 35, 42, 49, …
Chacun de ces nombres est un multiple de 7. RÉPONSE : (B)

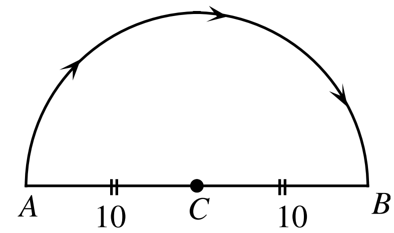
22. Dans le diagramme, on a $AC = CB = 10$ m, AC et CB étant les diamètres des deux petits demi-cercles. Le grand demi-cercle a pour diamètre AB. On peut emprunter plusieurs trajets pour se rendre du point A au point B. Un de ces trajets consiste à parcourir le grand demi-cercle de A à B. Un autre trajet consiste à parcourir le petit demi-cercle de A à C, puis le petit demi-cercle de C à B. La différence entre les longueurs de ces trajets est égale à :



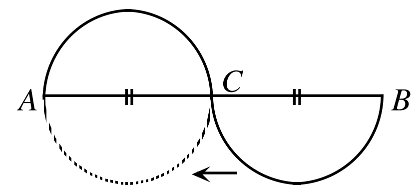
(**A**) 12π (**B**) 6π (**C**) 3π
(**D**) 2π (**E**) 0

Solution
On considère chacun des deux trajets.

Trajet 1
La distance parcourue est égale à la moitié de la circonférence d'un cercle de rayon 10.
Cette distance est égale à : $\frac{1}{2}[2\pi(10)] = 10\pi$ (à peu près 31,42 m)



Trajet 2
La distance parcourue est égale à la circonférence d'un cercle de rayon 5.
Cette distance est égale à : $2\pi(5) = 10\pi$ (à peu près 31,42 m)



Puisque ces distances sont égales, la différence entre les longueurs de ces trajets est égale à : $10\pi - 10\pi = 0$

RÉPONSE : (E)

23. Carinne écrit tous les entiers de 1 à 1000 dont la somme des chiffres est égale à 4. La fraction de ces nombres qui sont premiers est écrite sous la forme réduite $\frac{a}{b}$. Alors $a + b$ est égal à :

(**A**) 5 (**B**) 4 (**C**) 15 (**D**) 26 (**E**) 19

Solution
Les entiers de 1 à 1000 dont la somme des chiffres est égale à 4 sont : 13, 22, 31, 40, 103, 112, 121, 130, 202, 211, 220, 301, 310, 400.
Les nombres encerclés sont premiers. On peut éliminer tous les nombres pairs et vérifier les autres pour le constater.
Il y a donc 4 des 15 nombres qui sont premiers. Donc $a = 4$ et $b = 15$. Donc $a + b = 19$.

RÉPONSE : (E)

24. Le tableau indique les frais de service de l'institution bancaire de Raymonde. Lors de ses 25 premières opérations, elle fait trois fois plus de débits automatiques que de chèques. De plus, elle a fait autant de chèques que de retraits. Après la vingt-cinquième opération, elle ne fera qu'une sorte d'opération. Quel est le plus petit nombre d'opérations qu'elle doit faire pour que les frais de service dépassent les frais forfaitaires qui sont de 15,95 $?

	Frais de service par op ration
Ch que	0,50 $
D bit automatique	0,60 $
Retrait	0,45 $
Frais forfaitaires : 15,95 $	

(**A**) 29 (**B**) 30 (**C**) 27 (**D**) 28 (**E**) 31

Solution

Soit d le nombre de débits automatiques, c le nombre de chèques et r le nombre de retraits pendant les 25 premières opérations de Raymonde. On a $d:c:r = 3:1:1$.

Par tâtonnement, on voit qu'il y a eu 15 débits automatiques, 5 chèques et 5 retraits.

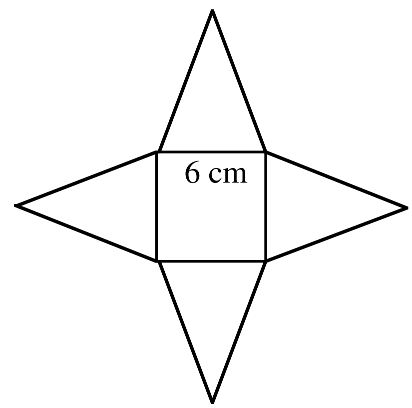
Les frais de service s'élèvent donc à : $15 \times 0,60 + 5 \times 0,50 + 5 \times 0,45 = 13,75$ \$.

Pour dépasser les frais forfaitaires de 15,95 \$, il faudrait que les frais de services augmentent de plus de 2,20 \$. Pour minimiser le nombre d'opérations, il faudrait que Raymonde fasse quatre débits automatiques.

Le nombre total d'opérations serait alors égal à : $25 + 4 = 29$ RÉPONSE : (A)

25. La figure est formée d'un carré ayant des côtés de 6 cm et de quatre triangles isocèles. On peut replier les triangles de manière à former une pyramide à base carrée. Si la pyramide a une hauteur de 4 cm, l'aire totale du carré et des quatre triangles est égale à :

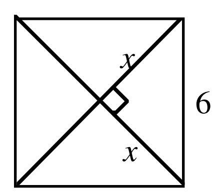
(**A**) 84 cm^2 (**B**) 98 cm^2 (**C**) 96 cm^2
(**D**) 108 cm^2 (**E**) 90 cm^2



Solution

Le diagramme représente la base de la pyramide.

On calcule la valeur de x au moyen du théorème de Pythagore.



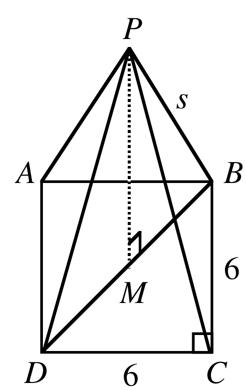
$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 6^2 \\ 2x^2 &= 36 \\ x^2 &= 18 \\ x &= \sqrt{18} \end{aligned}$$

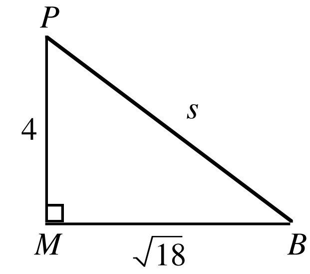
***Remarque* :** Nous utilisons ici la valeur exacte $\sqrt{18}$ qui facilite les calculs qui suivront. Il est tout à fait correct d'utiliser une valeur approximative telle que 4,24.

Ce diagramme illustre la pyramide au complet.

On a abaissé une perpendiculaire du sommet P jusqu'au point M sur la base de la pyramide.

Puisque la base est carrée, M est le milieu de la diagonale DB.

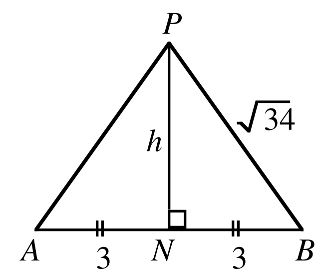




Ce diagramme illustre le triangle rectangle PMB.
D'après le théorème de Pythagore :

$$s^2 = 4^2 + \left(\sqrt{18}\right)^2$$
$$s^2 = 16 + 18$$
$$s^2 = 34$$
$$s = \sqrt{34}$$

Le diagramme suivant représente une face latérale de la pyramide. On abaisse une perpendiculaire du point P au point N sur la base AB. Puisque le triangle est isocèle, N est le milieu de la base. On fait encore appel au théorème de Pythagore.



$$h^2 + 3^2 = \left(\sqrt{34}\right)^2$$
$$h^2 + 9 = 34$$
$$h^2 = 25$$
$$h = 5$$

Chaque triangle de la pyramide a donc une aire égale à : $\dfrac{6 \times 5}{2} = 15$

La base de la pyramide a une aire égale à : $6 \times 6 = 36$

L'aire totale du carré et des quatre triangles est égale à : $36 + 4 \times 15 = 96$

RÉPONSE : (C)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

35e Anniversaire 1963 – 1998

1998 Solutions

Concours Gauss

(7e année – Sec. I)

Partie A

1. La valeur de $\frac{1998 - 998}{1000}$ est :
(**A**) 1 (**B**) 1000 (**C**) 0,1 (**D**) 10 (**E**) 0,001

Solution

$\frac{1998 - 998}{1000} = \frac{1000}{1000} = 1$ RÉPONSE : (A)

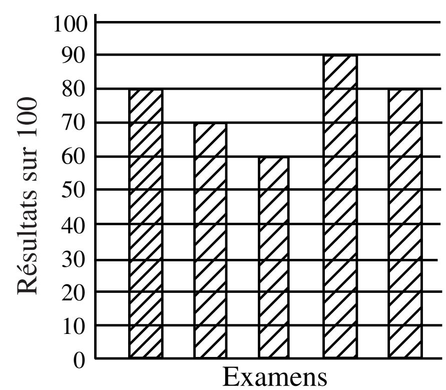
2. Si on triple le nombre 4567, le chiffre des unités du nombre obtenu est :
(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 3 (**E**) 1

Solution
On veut tripler le nombre 4567.
Pour déterminer le chiffre des unités du nombre obtenu, il suffit de tripler le 7. On choisit alors le chiffre des unités du nombre 21.
Le chiffre est 1. RÉPONSE : (E)

3. Si $S = 6 \times 10\,000 + 5 \times 1000 + 4 \times 10 + 3 \times 1$, lequel des nombres suivants est égal à S?
(**A**) 6543 (**B**) 65 043 (**C**) 65 431 (**D**) 65 403 (**E**) 60 541

Solution
$S = 60\,000 + 5000 + 40 + 3$
$= 65\,043$ RÉPONSE : (B)

4. Jeanne écrit cinq examens. Ses résultats sont représentés sur le diagramme. Quelle est la moyenne de ses cinq résultats?
(**A**) 74 (**B**) 76 (**C**) 70
(**D**) 64 (**E**) 79



Solution

Sa moyenne est égale à $\frac{80 + 70 + 60 + 90 + 80}{5} = \frac{380}{5} = 76$. RÉPONSE : (B)

5. Une machine produit 150 items dans une minute. Combien d'items produit-elle en 10 secondes?
(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 20 (**D**) 25 (**E**) 30

Solution

Puisque 10 secondes représentent un sixième d'une minute, la machine produit $\frac{1}{6}\times 150$ ou 25 items en 10 secondes.

RÉPONSE : (D)

6. Dans cette multiplication, la somme des chiffres dans les quatre cases est égale à :

(**A**) 13 (**B**) 12 (**C**) 27
(**D**) 9 (**E**) 22

$$\begin{array}{r} 879 \\ \times\ 492 \\ \hline \square 758 \\ 7\square 11 \\ 35\square 6 \\ \hline 43\square 468 \end{array}$$

Solution

On multiplie au long :

$$\begin{array}{r} 879 \\ \times\ 492 \\ \hline 1758 \\ 7911 \\ 3516 \\ \hline 432468 \end{array}$$

La somme est égale à $1+9+1+2$ ou 13.

RÉPONSE : (A)

7. Un champ rectangulaire a une longueur de 80 m et une largeur de 60 m. Pour clôturer le champ, on place des poteaux aux quatre coins et un poteau à tous les 10 m le long des quatre côtés. Combien faut-il de poteaux pour clôturer le champ?

(**A**) 24 (**B**) 26 (**C**) 28 (**D**) 30 (**E**) 32

Solution

Il y a un poteau à chaque coin. De plus, il y a 7 autres poteaux sur chaque longueur et 5 autres poteaux sur chaque largeur.
Il y a donc un total de $4+7+7+5+5$ ou 28 poteaux.

RÉPONSE : (C)

8. Mardi, la température maximale était de 4 °C plus chaude que celle de lundi. Mercredi, la température maximale était de 6 °C plus froide que celle de lundi. Mardi, la température maximale était égale à 22 °C. Quelle était la température maximale de mercredi?

(**A**) 20 °C (**B**) 24 °C (**C**) 12 °C (**D**) 32 °C (**E**) 16 °C

Solution

Puisque la température maximale était de 22 °C mardi, elle était de 18 °C lundi.
La température maximale de mercredi était de 12 °C, puisqu'elle était de 6 °C plus froide que celle de lundi.

RÉPONSE : (C)

9. Deux nombres ont une somme de 32. Si un des nombres est -36, quel est l'autre nombre?

(**A**) 68 (**B**) -4 (**C**) 4 (**D**) 72 (**E**) -68

Solution

$68+(-36)=32$ RÉPONSE : (A)

10. Au parc, Brigitte et Danielle font une course en descendant une glissoire d'eau. Danielle a gagné par 0,25 seconde. Si Brigitte a mis 7,80 secondes pour descendre, combien de temps Danielle a-t-elle mis pour sa descente?

(**A**) 7,80 secondes (**B**) 8,05 secondes (**C**) 7,55 secondes
(**D**) 7,15 secondes (**E**) 7,50 secondes

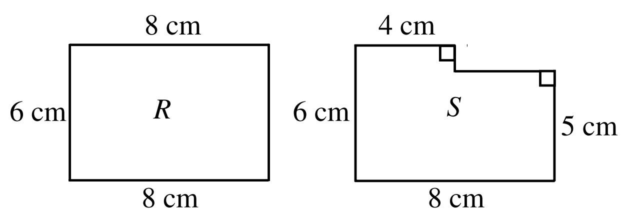
Solution

Puisque Danielle a mis 0,25 seconde de moins que Brigitte, elle a mis $7,80-0,25$ ou 7,55 secondes.

RÉPONSE : (C)

Partie B

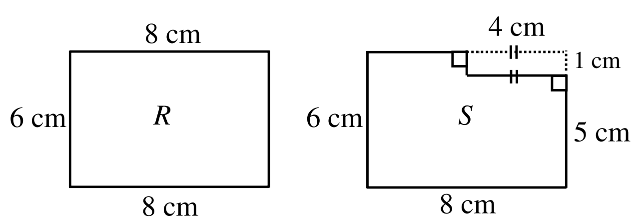
11. Eric a découpé le rectangle *R* d'une feuille de papier. Il a ensuite découpé la figure *S* du rectangle *R*. Les coupes sont parallèles aux côtés du rectangle initial. Lorsqu'on passe du rectangle *R* à la figure *S* :



(**A**) l'aire et le périmètre diminuent tous les deux;
(**B**) l'aire diminue et le périmètre augmente;
(**C**) l'aire et le périmètre augmentent tous les deux;
(**D**) l'aire augmente et le périmètre diminue;
(**E**) l'aire diminue et le périmètre demeure inchangé.

Solution

Puisque la figure *S* a été découpée du rectangle *R*, alors l'aire de *S* doit être plus petite.
Si on compare les périmètres, on constate que le périmètre de la figure *S* est identique à celui du rectangle *R*.
La comparaison est plus facile à voir si on complète la figure *S* comme dans le diagramme ci-dessous. Les périmètres de *R* et de *S* sont égaux.



RÉPONSE : (E)

12. Sophie peut planter dix arbres à toutes les trois minutes. Si elle continue à ce même rythme, combien de temps mettra-t-elle pour planter 2500 arbres?

(**A**) $1\frac{1}{4}$ h (**B**) 3 h (**C**) 5 h (**D**) 10 h (**E**) $12\frac{1}{2}$ h

Solution 1

Puisque Sophie peut planter dix arbres à toutes les trois minutes, elle met $\frac{3}{10}$ de minute pour planter un arbre.

Pour planter 2500 arbres, elle met $\frac{3}{10} \times 2500 = 750$ minutes ou $\frac{750}{60} = 12\frac{1}{2}$ heures.

Solution 2

Puisque Sophie peut planter dix arbres à toutes les trois minutes, elle peut planter 200 arbres par heure.

Pour planter 2500 arbres, elle devra mettre $\frac{2500}{200} = 12\frac{1}{2}$ heures. RÉPONSE : (E)

13. Un groupe de figures △●□▲○ forme une régularité qui est répétée dans l'ordre suivant,

△,●,□,▲,○,△,●,□,▲,○, ..., pour former une suite.

La 214e figure de la suite est :

(**A**) △ (**B**) ● (**C**) □ (**D**) ▲ (**E**) ○

Solution

Puisque la régularité est répétée à toutes les cinq figures, elle recommence après la 210e figure.

La 214e figure de la suite est donc la quatrième figure du groupe, soit ▲ . RÉPONSE : (D)

14. Un cube a un volume de $125\ \text{cm}^3$. Quelle est l'aire d'une des faces du cube?

(**A**) $20\ \text{cm}^2$ (**B**) $25\ \text{cm}^2$ (**C**) $41\frac{2}{3}\ \text{cm}^2$ (**D**) $5\ \text{cm}^2$ (**E**) $75\ \text{cm}^2$

Solution

Puisque le cube a un volume de $125\ \text{cm}^3$, il doit avoit une largeur, une longueur et une hauteur de 5 cm.

Une des faces du cube doit donc avoir une aire de 5×5 ou $25\ \text{cm}^2$. RÉPONSE : (B)

15. Le diagramme illustre un carré magique. La somme des nombres dans n'importe quelle ligne, n'importe quelle colonne et n'importe quelle diagonale est toujours la même. Quelle est la valeur de n?

8		
9		5
4	n	

(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 7

(**D**) 10 (**E**) 11

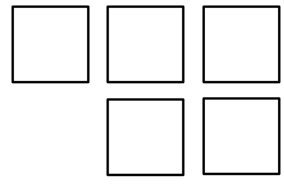
Solution

La somme « magique » est égale à $8+9+4$ ou 21. La case du centre contient donc un 7.

Puisque la case du centre est un 7, alors la case inférieure droite contient un 6, ce qui donne $4+n+6=21$.

Donc $n=11$. RÉPONSE : (E)

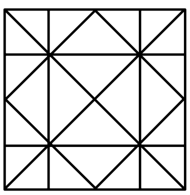
16. On place chacun des chiffres 3, 5, 6, 7 et 8 dans une des cases du diagramme. Si on soustrait le nombre de deux chiffres du nombre de trois chiffres, quelle est la plus petite différence possible?

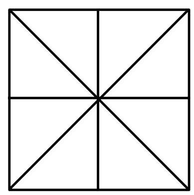


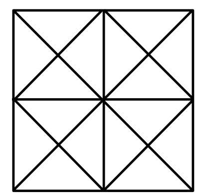
(**A**) 269 (**B**) 278 (**C**) 484
(**D**) 271 (**E**) 261

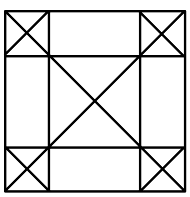
Solution
On obtient la plus petite différence possible lorsque le nombre de trois chiffres est le plus petit possible et que le nombre de deux chiffres est le plus grand possible. Les deux nombres sont alors 356 et 87. La plus petite différence possible est $356 - 87 = 269$. RÉPONSE : (A)

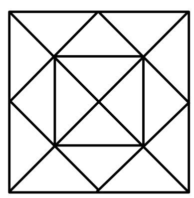
17. Claire prend un morceau de papier de forme carrée et le plie en deux parties égales, quatre fois de suite, sans déplier, de manière à former un triangle rectangle isocèle à chaque fois. Lorsqu'elle déplie le morceau de papier à la fin, les plis du papier ressemblent à :

(**A**)


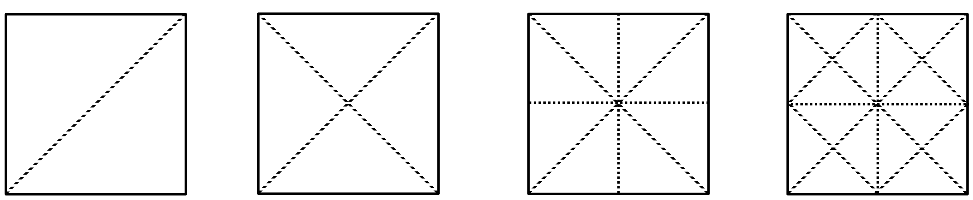
(**B**)


(**C**)


(**D**)


(**E**)


Solution



1er pli 2e pli 3e pli 4e pli

RÉPONSE : (C)

18. On déplace les lettres du mot « GAUSS » et les chiffres de « 1998 » en boucles séparées et on les numérote comme suit :
1. AUSSG 9981
2. USSGA 9819
3. SSGAU 8199
etc.

Si cette régularité continue de la sorte, quel sera le numéro qui paraîtra devant GAUSS 1998?
(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 9 (**D**) 16 (**E**) 20

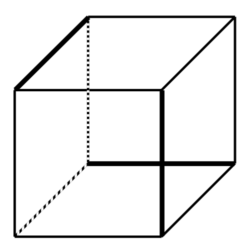
Solution
Puisque le mot « GAUSS » est composé de cinq lettres, il paraîtra aux numéros 5, 10, 15, 20, ... De même, « 1998 » étant composé de quatre chiffres, il paraîtra aux numéros 4, 8, 12, 16, 20, 24, ...
En examinant ces deux listes de nombres, on constate que GAUSS 1998 paraîtra au numéro 20 qui est le PPCM de 4 et de 5. RÉPONSE : (E)

19. Carlo et Marie jouent un à jeu à deux dans lequel le gagnant ou la gagnante gagne deux points, tandis que le perdant ou la perdante perd un point. Si Carlo a gagné exactement 3 parties et si Marie a un pointage final de 5, combien de parties ont-ils jouées?
(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 11

Solution
Puisque Carlo a gagné 3 parties, alors Marie a perdu 3 points. En supposant que ce soient les trois dernières parties que Carlo a gagnées, Marie devait donc avoir 8 points avant de perdre, de manière à finir avec 5 points.
Puisque Marie avait 8 points avant de perdre, elle a gagné 4 parties.
Puisque Marie a gagné 4 parties et que Carlo en a gagné 3, ils ont joué un total de 7 parties.
RÉPONSE : (A)

20. On a colorié en rouge ou en vert chacune des 12 arêtes d'un cube. Chaque face du cube contient au moins une arête rouge. Quel est le plus petit nombre possible d'arêtes rouges?
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Solution
Dans le diagramme, les arêtes foncées représentent les arêtes rouges et chaque face a ainsi une arête rouge. Le plus petit nombre possible d'arêtes rouges est donc 3.



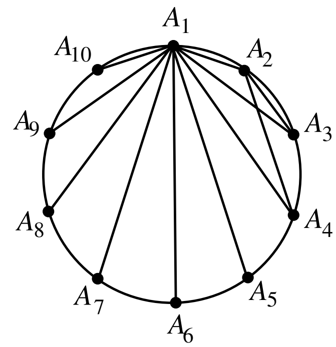
RÉPONSE : (B)

Partie C

21. On inscrit 10 points à égales distances sur un cercle. Combien peut-on former de cordes en joignant n'importe quels deux de ces points? (Une corde est un segment de droite qui joint deux points situés sur un cercle.)
(**A**) 9 (**B**) 45 (**C**) 17 (**D**) 66 (**E**) 55

Solution

On nomme les points $A_1,\ A_2, ..., A_{10}$.
On choisit A_1 et on le joint à chacun des neuf autres points, ce qui nous donne 9 cordes.
De même, on peut joindre A_2 à chacun des 8 autres points.
On continue de cette façon jusqu'à ce que l'on joigne A_9 à A_{10}, ce qui donnera $9+8+7+6+5+4+3+2+1$ ou 45 cordes.



RÉPONSE : (B)

22. À chaque fois que l'on utilise un savon de toilette, son volume diminue de 10 %. Combien de fois faut-il utiliser un savon pour qu'il reste moins de la moitié du volume initial?
(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Solution

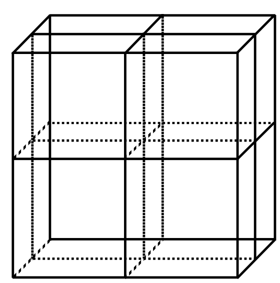
Nombre de fois que le savon est utilisé	Volume qu'il reste (en %)
1	0,9 ou 90 %
2	$(0{,}9)^2$ ou 81 %
3	$(0{,}9)^3$ ou 72,9 %
4	$(0{,}9)^4$ ou 65,61 %
5	$(0{,}9)^5$ ou 59,1 %
6	$(0{,}9)^6$ ou 53,1 %
7	$(0{,}9)^7$ ou 47,8 %

Si on utilise le savon 7 fois, il restera moins de $\frac{1}{2}$ du volume initial.

Remarque : On cherche un entier x tel que $(0{,}9)^x < 0{,}5$. On peut obtenir cette valeur de x à l'aide de la touche $\boxed{y^x}$ sur la calculatrice. On pose $y = 0{,}9$ et on procède par tâtonnement pour trouver la valeur de x.

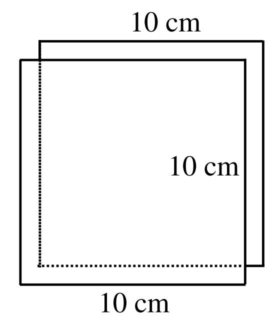
RÉPONSE : (C)

23. Un cube mesure $10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$. On le coupe trois fois. Comme on peut le voir dans le diagramme, chaque coupe est parallèle à l'une des faces du cube. On obtient alors 8 solides. Quelle est l'augmentation dans l'aire totale de la surface?
(**A**) 300 cm^2 (**B**) 800 cm^2 (**C**) 1200 cm^2
(**D**) 600 cm^2 (**E**) 0 cm^2



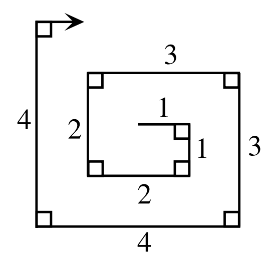
Solution

Chaque coupe augmente la surface de deux carrés mesurant $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. L'aire est donc augmentée de 200 cm^2. Avec les trois coupes, l'aire est augmentée de $3 \times 200 \text{ cm}^2$ ou 600 cm^2.



RÉPONSE : (D)

24. Sur une grande feuille de papier, Daniel trace une « spirale rectangulaire », comme dans le diagramme. Les segments successifs ont des longueurs, en centimètres, de 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ... Lorsqu'il a tracé une longueur totale de 3000 cm, son stylo n'a plus d'encre. Quelle est la longueur du plus grand segment que Daniel a tracé?



(**A**) 38 (**B**) 39 (**C**) 54
(**D**) 55 (**E**) 30

Solution

La somme des entiers de 1 à n est donnée par la formule $\frac{(n)(n+1)}{2}$.

On a donc $1+2+3+...+n=\frac{(n)(n+1)}{2}$.

(Par exemple, $1+2+3+...+10=\frac{(10)(11)}{2}=55$.)

L'égalité est conservée si on double chaque côté.

On a alors $2(1+2+...+n)=n(n+1)$.

Donc $(1+1)+(2+2)+(3+3)+...+(n+n)=n(n+1)$.

Dans notre problème, on cherche la plus grande valeur pour laquelle $(1+1)+(2+2)+(3+3)+...+(n+n)\le 3000$, ou si on utilise la formule, pour laquelle $(n)(n+1)\le 3000$.

On peut obtenir un estimé en prenant $\sqrt{3000} \doteq 54,7$.

On vérifie avec $n=54$: On obtient $(54)(55)=2970<3000$, ce qui est acceptable.

On vérifie avec $n=55$: On obtient $55(56)=3080>3000$, ce qui n'est pas acceptable.

On a donc $(1+1)+(2+2)+(3+3)+...+(54+54)=2970$.

On vérifie aussi $(1+1)+(2+2)+(3+3)+...+(54+54)+55=3025$, ce qui n'est pas acceptable.

Le plus long segment que Daniel a tracé avait une longueur de 54 cm. RÉPONSE : (C)

25. On considère des nombres naturels, p et q, dont le dernier chiffre n'est pas un zéro, mais dont le produit est une puissance de 10 (c'est-à-dire 10, 100, 1000, 10 000, ...). Si $p > q$, le dernier chiffre du nombre $p - q$ ne peut pas être un :

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

Solution

Puisque le dernier chiffre des nombres p et q n'est pas un zéro et puisque leur produit est une puissance de 10, alors p doit être de la forme 5^n et q doit être de la forme 2^n.

En effet, puisque $10 = 2 \times 5$, alors $10^n = (2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$.

Les puissances de 2 sont 2, 4, 8, 16, 32, ... et les puissances correspondantes de 5 sont 5, 25, 125, 625, 3125, ...

On les soustrait et on examine le dernier chiffre de $p - q$:

p	q	dernier chiffre de $p - q$
5	2	3
25	4	1
125	8	7
625	16	9
3125	32	3
15 625	64	1
⋮	⋮	7
		9
		⋮

Cette régularité se répète en groupes de 4.

Le dernier chiffre de $p - q$ ne peut donc pas être un 5. RÉPONSE : (C)

35e Anniversaire
1963 – 1998

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1998 Solutions

Concours Gauss

(8e année – Sec. II)

Partie A

1. Si on triple le nombre 4567, le chiffre des unités du nombre obtenu est :
(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 3 (**E**) 1

Solution
On veut tripler le nombre 4567.
Pour déterminer le chiffre des unités du nombre obtenu, il suffit de tripler le 7. On choisit alors le chiffre des unités du nombre 21.
Le chiffre est 1. RÉPONSE : (E)

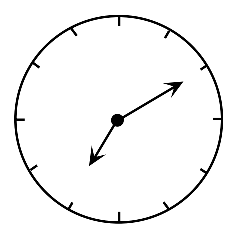
2. Le plus petit nombre de l'ensemble $\{0, -17, 4, 3, -2\}$ est :
(**A**) -17 (**B**) 4 (**C**) -2 (**D**) 0 (**E**) 3

Solution
On voit que le plus petit nombre est -17. RÉPONSE : (A)

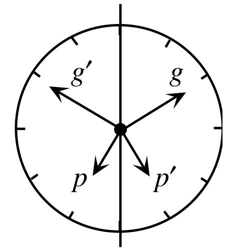
3. La moyenne des nombres -5, -2, 0, 4 et 8 est égale à :
(**A**) $\frac{5}{4}$ (**B**) 0 (**C**) $\frac{19}{5}$ (**D**) 1 (**E**) $\frac{9}{4}$

Solution
La somme des entiers est égale à 5.
Leur moyenne est donc égale à $\frac{5}{5}$ ou 1. RÉPONSE : (D)

4. Émilie est assise sur une chaise dans une salle. Il y a une horloge derrière elle. Devant elle, il y a un miroir dans lequel elle peut voir l'image de l'horloge. Le diagramme illustre ce qu'elle voit. Quelle heure est-il en réalité?
(**A**) 4 h 10 (**B**) 7 h 10 (**C**) 5 h 10
(**D**) 6 h 50 (**E**) 4 h 50



Solution
On trace une droite de réflexion à la verticale.
La grande aiguille (g) est réfléchie sur g' qui pointe vers le 10. La petite aiguille (p) est réfléchie sur p' qui pointe tout près du 5.
Il est donc 4 h 50.



RÉPONSE : (E)

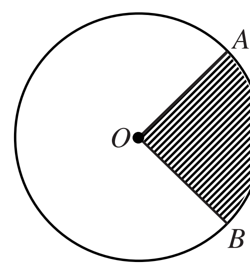
5. Si on double le nombre $1{,}2 \times 10^6$, on obtient :
(**A**) $2{,}4 \times 10^6$ (**B**) $2{,}4 \times 10^{12}$ (**C**) $2{,}4 \times 10^3$ (**D**) $1{,}2 \times 10^{12}$ (**E**) $0{,}6 \times 10^{12}$

Solution
Lorsqu'on double le nombre $1{,}2 \times 10^6$, seul le $1{,}2$ est doublé, car le reste de l'expression indique la position décimale.
Le nombre obtenu est $2{,}4 \times 10^6$. RÉPONSE : (A)

6. Mardi, la température maximale était de 4 °C plus chaude que celle de lundi. Mercredi, la température maximale était de 6 °C plus froide que celle de lundi. Mardi, la température maximale était égale à 22 °C. Quelle était la température maximale de mercredi?
(**A**) 20 °C (**B**) 24 °C (**C**) 12 °C (**D**) 32 °C (**E**) 16 °C

Solution
Puisque la température maximale était de 22 °C mardi, elle était de 18 °C lundi.
La température maximale de mercredi était de 12 °C, puisqu'elle était de 6 °C plus froide que celle de lundi. RÉPONSE : (C)

7. L'aire du secteur ombré représente 20 % de l'aire du cercle de centre O. Quelle est la mesure de l'angle AOB ?
(**A**) 36° (**B**) 72° (**C**) 90°
(**D**) 80° (**E**) 70°



Solution
Puisque l'aire du secteur ombré représente 20 % de l'aire du cercle, alors l'angle AOB mesure 20 % de 360° ou 72°. RÉPONSE : (B)

8. Un groupe de figures △●□▲○ forme une régularité qui est répétée dans l'ordre suivant,
△,●,□,▲,○, △,●,□,▲,○, …, pour former une suite.
La 214e figure de la suite est :
(**A**) △ (**B**) ● (**C**) □ (**D**) ▲ (**E**) ○

Solution
Puisque la régularité est répétée à toutes les cinq figures, elle recommence après la 210e figure.
La 214e figure de la suite est donc la quatrième figure du groupe, soit ▲. RÉPONSE : (D)

9. Lorsqu'un pot est à moitié plein, il contient juste assez d'eau pour remplir trois verres identiques. À quelle fraction le pot doit-il être rempli pour qu'il contienne juste assez d'eau pour remplir quatre verres pareils aux précédents?

(**A**) $\frac{2}{3}$ (**B**) $\frac{7}{12}$ (**C**) $\frac{4}{7}$ (**D**) $\frac{6}{7}$ (**E**) $\frac{3}{4}$

Solution

Trois verres d'eau correspondent à $\frac{1}{2}$ pot. Chaque verre correspond donc à $\frac{1}{6}$ d'un pot.

Quatre verres correspondent donc à $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ d'un pot. RÉPONSE : (A)

10. Une employée de la banque remplit un guichet automatique en déposant des liasses de billets de 5 $, de 10 $ et de 20 $. Chaque liasse compte 100 billets et la machine peut contenir 10 liasses de chaque sorte de billets. Quelle somme d'argent le guichet peut-il contenir?

(**A**) 30 000 $ (**B**) 25 000 $ (**C**) 35 000 $ (**D**) 40 000 $ (**E**) 45 000 $

Solution

Chaque liasse compte 100 billets. Les liasses de billets de 5 $, de 10 $ et de 20 $ ont donc des valeurs respectives de 500 $, 1000 $ et 2000 $.

Puisqu'il y a 10 liasses de chaque sorte, leur valeur totale est égale à $10(500\ \$ + 1000\ \$ + 2000\ \$)$ ou 35 000 $. RÉPONSE : (C)

Partie B

11. Un ascenseur peut contenir un poids maximal de 1500 kilogrammes. Les personnes dans l'ascenseur ont un poids moyen de 80 kilogrammes. Le poids total de ces personnes dépasse de 100 kilogrammes la limite permise. Combien y a-t-il de personnes dans l'ascenseur?

(**A**) 14 (**B**) 17 (**C**) 16 (**D**) 20 (**E**) 13

Solution

Puisque le poids total des personnes dépasse de 100 kilogrammes la limite permise, leur poids total est de 1600 kilogrammes.

Puisque leur poids moyen est de 80 kilogrammes, il doit y avoir $\frac{1600}{80}$ ou 20 personnes dans l'ascenseur.

RÉPONSE : (D)

12. Dans le carré 4×4 illustré ci-contre, chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale doit contenir chacun des nombres 1, 2, 3 et 4. Quelle est la valeur de $K + N$?

(**A**) 4 (**B**) 3 (**C**) 5

(**D**) 6 (**E**) 7

1	F	G	H
T	2	J	K
L	M	3	N
P	Q	1	R

Solution

Puisque R est sur une diagonale qui contient déjà 1, 2 et 3, alors $R = 4$.

La façon la plus facile de procéder est de regarder les cases P et Q.

D'après la 4e ligne, Q doit être un 2 ou un 3, mais la 2e colonne contient déjà un 2. Donc $Q = 3$ et $P = 2$.

1			
	2		
		3	
2	3	1	4

Ne peut être un 2.

À partir de là, il suffit de remplir les autres cases en suivant la règle indiquée, c'est-à-dire que chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale doit contenir chacun des nombres 1, 2, 3 et 4.

On obtient alors le résultat ci-contre.

1	4	2	3
3	2	4	1
4	1	3	2
2	3	1	4

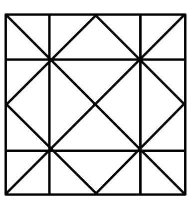
On remarque que $K + N = 3$.

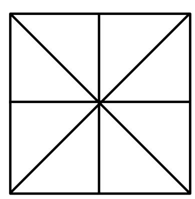
Remarque 1 : Il n'est pas nécessaire de remplir toutes les cases, mais ça nous permet de vérifier l'exactitude du travail.

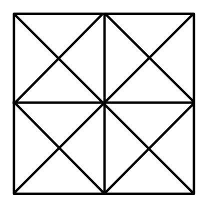
Remarque 2 : On aurait pu commencer en examinant H, K et N, mais cette approche aurait exigé plus de travail.

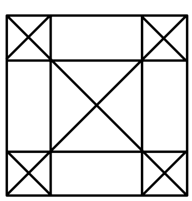
RÉPONSE : (B)

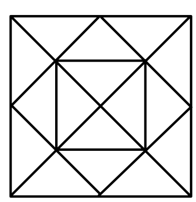
13. Claire prend un morceau de papier de forme carrée et le plie en deux parties égales, quatre fois de suite, sans déplier, de manière à former un triangle rectangle isocèle à chaque fois. Lorsqu'elle déplie le morceau de papier à la fin, les plis du papier ressemblent à :

(**A**) 

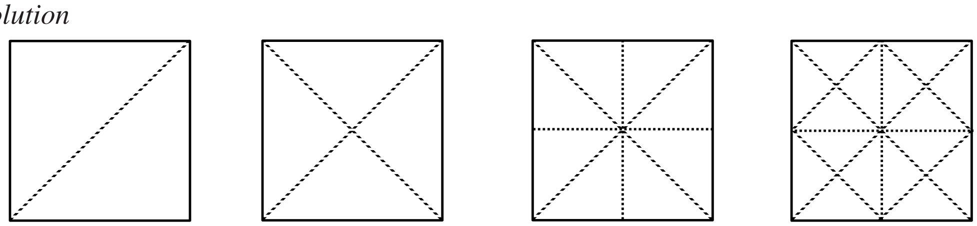
(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

Solution



1er pli 2e pli 3e pli 4e pli

RÉPONSE : (C)

14. Stéphane avait un rendez-vous à 10 h à une distance de 60 km de chez lui. Il a fait le voyage à une vitesse moyenne de 80 km/h, mais il est arrivé 20 minutes en retard. À quelle heure est-il parti de chez lui?
(**A**) 9 h 35 (**B**) 9 h 15 (**C**) 8 h 40 (**D**) 9 h (**E**) 9 h 20

Solution
Puisque Stéphane a parcouru une distance de 60 km à une vitesse moyenne de 80 km/h, il a fait le trajet en 45 minutes.
Puisqu'il est arrivé 20 minutes en retard, il est arrivé à 10 h 20.
Il est donc parti à 9 h 35. RÉPONSE : (A)

15. Michelle choisit trois chiffres *différents* de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et elle forme un nombre en plaçant les chiffres dans les cases de $\square\frac{\square}{\square}$. Dans ce nombre fractionnaire, la fraction doit être inférieure à 1. (Par exemple, $4\frac{2}{3}$). Quelle est la différence entre le plus grand nombre fractionnaire et le plus petit nombre fractionnaire qu'il est possible de former?
(**A**) $4\frac{3}{5}$ (**B**) $4\frac{9}{20}$ (**C**) $4\frac{3}{10}$ (**D**) $4\frac{4}{15}$ (**E**) $4\frac{7}{20}$

Solution
Le plus grand nombre que Michelle peut former est $5\frac{3}{4}$, tandis que le plus petit est $1\frac{2}{5}$.
La différence est égale à $5\frac{3}{4}-1\frac{2}{5}$ ou $4\frac{7}{20}$. RÉPONSE : (E)

16. Supposons que x^* signifie $\frac{1}{x}$, l'inverse de x. Par exemple, $5^* = \frac{1}{5}$. Combien des énoncés suivants sont vrais?

i) $2^* + 4^* = 6^*$ ii) $3^* \times 5^* = 15^*$ iii) $7^* - 3^* = 4^*$ iv) $12^* \div 3^* = 4^*$

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

Solution
i) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\neq\frac{1}{6}$, L'énoncé n'est pas vrai

ii) $\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$, L'énoncé est vrai

iii) $\frac{1}{7}-\frac{1}{3}=\frac{3}{21}-\frac{7}{21}=-\frac{4}{21}\neq\frac{1}{4}$, L'énoncé n'est pas vrai

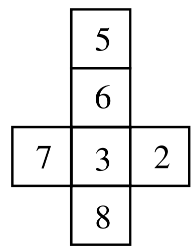
iv) $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{12}\times\frac{3}{1}=\frac{1}{4}$, L'énoncé est vrai

Deux des énoncés sont vrais. RÉPONSE : (C)

17. Au carnaval, un des jeux consiste à lancer trois anneaux sur n'importe quelles trois chevilles en bois. Un anneau sur la cheville A vaut *un* point, un anneau sur la cheville B vaut *trois* points et un anneau sur la cheville C vaut *cinq* points. Lorsqu'on réussit à lancer les trois anneaux sur des chevilles, combien de totaux différents peut-on obtenir? (Il est possible d'avoir plus d'un anneau sur une même cheville.)
(**A**) 12 (**B**) 7 (**C**) 10 (**D**) 13 (**E**) 6

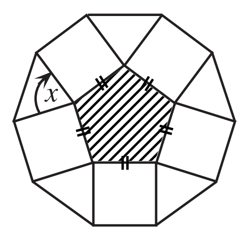
Solution
Le total le plus bas est 3 et le total le plus élevé est 15.
Puisque la somme de trois nombres impairs est impaire, il est impossible d'obtenir un total pair. On peut vérifier qu'il est possible d'obtenir 3, 5, 7, 9, 11, 13 et 15 comme total.
Il y a 7 totaux possibles. RÉPONSE : (B)

18. On plie la figure illustrée pour former un cube. Trois faces se rencontrent à chaque sommet. Si, à chaque sommet, on multiplie les nombres qui paraissent sur les trois faces, quel est le plus grand produit que l'on puisse obtenir?
(**A**) 144 (**B**) 168 (**C**) 240
(**D**) 280 (**E**) 336



Solution
Les deux plus grands produits que l'on puisse obtenir en multipliant trois des nombres indiqués sont $8\times7\times6=336$ et $8\times7\times5=280$. Lorsque la figure est pliée pour former un cube, le 6 et le 8 sont sur des faces opposées. Il est donc impossible d'obtenir le produit $8\times7\times6$ ou 336. Cependant, le 5, le 7 et le 8 sont sur des faces qui se rencontrent à un sommet. Le plus grand produit est donc $5\times7\times8$ ou 280. RÉPONSE : (D)

19. Un pentagone régulier a des côtés de même longueur et des angles égaux. Le diagramme illustre un pentagone régulier hachuré, entouré de carrés et de triangles. Quelle est la mesure de l'angle x?
(**A**) 75° (**B**) 108° (**C**) 90°
(**D**) 60° (**E**) 72°



Solution
Puisqu'on peut diviser un pentagone en trois triangles, la somme des angles d'un pentagone est égale à $3\times180°$ ou $540°$. Puisque les angles d'un pentagone régulier sont égaux, chacun mesure $540°\div5$ ou $108°$. Les quatre angles au sommet du pentagone ont une somme égale à $360°$.
Donc $x+90°+90°+108°=360°$.
Donc $x=72°$. RÉPONSE : (E)

20. On prend trois cartes d'un jeu de cartes et on les place en ligne. Le trèfle est à la droite du coeur et du carreau. Le 5 est à la gauche du coeur. Le 8 est à la droite du 4. De gauche à droite, les cartes sont :
(**A**) Le 4 de coeur, le 5 de carreau et le 8 de trèfle.
(**B**) Le 5 de carreau, le 4 de coeur et le 8 de trèfle.
(**C**) Le 8 de trèfle, le 4 de coeur et le 5 de carreau.
(**D**) Le 4 de carreau, le 5 de trèfle et le 8 de coeur.
(**E**) Le 5 de coeur, le 4 de carreau et le 8 de trèfle.

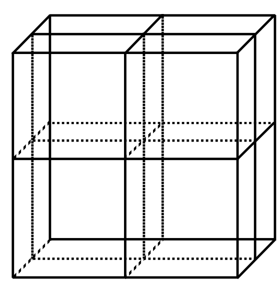
Solution
Puisque le trèfle est à la droite du coeur et du carreau, l'ordre est carreau, coeur, trèfle ou bien coeur, carreau, trèfle.
Puisque le 5 est à la gauche du coeur, il doit s'agir du 5 de carreau.
On a donc, dans l'ordre, le 5 de carreau, coeur, trèfle. Puisque le 8 est à la droite du 4, le cœur est un 4 et le trèfle est un 8. RÉPONSE : (B)

Partie C

21. On peut écrire le nombre 315 comme produit de deux nombres impairs, chacun supérieur à 1. De combien de façons peut-on le faire?
(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

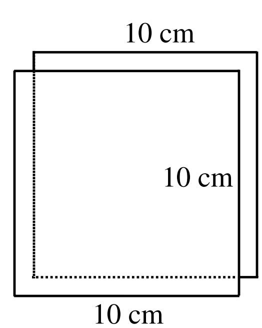
Solution
On écrit 315 en factorisation première, c'est-à-dire comme un produit de facteurs premiers, pour obtenir $315 = 3\times3\times5\times7$.
À partir de ces facteurs, on peut seulement former les multiplications suivantes pour donner 315 : 3×105, 5×63, 7×45, 9×35, 15×21.
Il y a donc 5 façons de le faire. RÉPONSE : (E)

22. Un cube mesure $10\text{ cm}\times10\text{ cm}\times10\text{ cm}$. On le coupe trois fois. Comme on peut le voir dans le diagramme, chaque coupe est parallèle à l'une des faces du cube. On obtient alors 8 solides Quelle est l'augmentation dans l'aire totale de la surface?



(**A**) 300 cm^2 (**B**) 800 cm^2 (**C**) 1200 cm^2
(**D**) 600 cm^2 (**E**) 0 cm^2

Solution
Chaque coupe augmente la surface de deux carrés mesurant $10\text{ cm}\times10\text{ cm}$. L'aire est donc augmentée de 200 cm^2.
Avec les trois coupes, l'aire est augmentée de $3\times200\text{ cm}^2$ ou 600 cm^2.



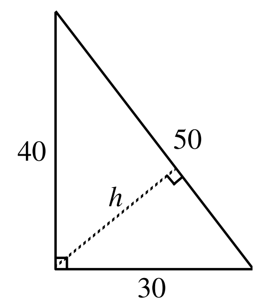
RÉPONSE : (D)

23. Si les côtés d'un triangle ont des longueurs respectives de 30, 40 et 50, quelle est la longueur de la hauteur la plus courte?

(**A**) 20 (**B**) 24 (**C**) 25 (**D**) 30 (**E**) 40

Solution

Puisque $30^2 + 40^2 = 50^2$, il s'agit d'un triangle rectangle ayant une hypoténuse de longueur 50. Deux des hauteurs ont donc pour longueurs respectives 30 et 40.



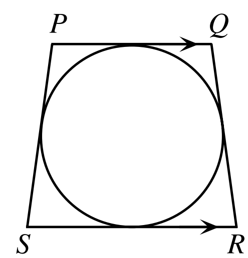
L'aire du triangle est égale à $\frac{30 \times 40}{2}$ ou 600 unités carrées.

On abaisse une perpendiculaire de l'angle droit à l'hypoténuse. Si sa longueur est égale à h, on obtient l'expression suivante pour l'aire du triangle : $\frac{1}{2}(h)(50) = 25h$

Donc $25h = 600$, d'où $h = 24$.

La hauteur la plus courte a donc une longueur de 24. RÉPONSE : (B)

24. Un cercle est inscrit dans le trapèze $PQRS$.
Si $PS = QR = 25$ cm, $PQ = 18$ cm et $SR = 32$ cm, quelle est la longueur du diamètre du cercle?



(**A**) 14 (**B**) 25 (**C**) 24

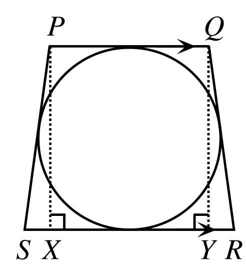
(**D**) $\sqrt{544}$ (**E**) $\sqrt{674}$

Solution

On abaisse les perpendiculaires PX et QY.

Par symétrie, on a $XY = PQ = 18$. De plus, $SX = YR$.

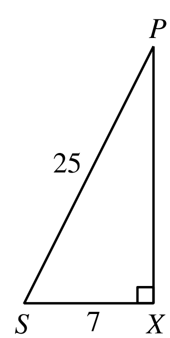
Donc $SX = YR = \frac{32-18}{2} = 7$.



On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle PXS.

$$(PX)^2 + 7^2 = 25^2$$
$$(PX)^2 = 576$$
$$PX = 24$$

Le diamètre du cercle a donc une longueur de 24 cm.



RÉPONSE : (C)

25. André, Brigitte et Carla doivent se partager une somme d'argent. André reçoit d'abord1 $ plus un tiers de la somme qu'il reste. Brigitte reçoit ensuite 6 $ plus un tiers de la somme qu'il reste. Carla reçoit enfin le reste, soit 40 $. Combien Brigitte a-t-elle reçu?

(**A**) 26 $ (**B**) 28 $ (**C**) 30 $ (**D**) 32 $ (**E**) 34 $

Solution

Après qu'André a reçu sa part, Brigitte a reçu 6 $ plus un tiers de la somme qu'il restait. Carla a donc reçu deux tiers de cette somme, soit 40 $. Il restait donc 60 $. Un tiers de cette somme est égal à 20 $. Brigitte a donc reçu 26 $.

RÉPONSE : (A)