Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2024

le jeudi 4 avril 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 5 avril 2024
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2024 University of Waterloo

1. (a) *Solution 1*

La longueur du jardin agrandi est de $(5 + 2 \times 2)$ m $= 9$ m et la largeur est de 4 m.
Donc, l'aire totale du jardin agrandi est égale à 9 m $\times$ 4 m $= 36$ m^2.

Solution 2

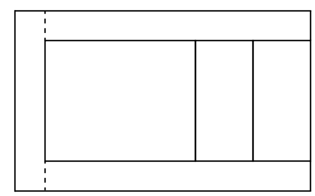
Le jardin initial avait une longueur de 5 m et une largeur de 4 m est avait donc une aire de 5 m $\times$ 4 m $= 20$ m^2.
Chaque parcelle supplémentaire de 2 m par 4 m a une aire de 2 m $\times$ 4 m $= 8$ m^2. Donc, l'aire totale du jardin agrandi est égale à $(20 + 2 \times 8)$ m^2 $= 36$ m^2.

(b) *Solution 1*

L'ensemble formé par le jardin et le chemin a une longueur de 9 m + 1 m $= 10$ m et une largeur de $(4 + 2 \times 1)$ m $= 6$ m.
Donc, l'aire totale du jardin et du chemin est égale à 10 m $\times$ 6 m $= 60$ m^2.

Solution 2

Considérons la division du chemin en trois rectangles, comme dans la figure ci-contre.



Chacun des rectangles au-dessus et en dessous du jardin mesure 9 m $\times$ 1 m et a donc une aire de 9 m $\times$ 1 m $= 9$ m^2.
La section restante du chemin a une hauteur de $(4 + 2 \times 1)$ m $= 6$ m et une largeur de 1 m et a donc une aire de 6 m $\times$ 1 m $= 6$ m^2.

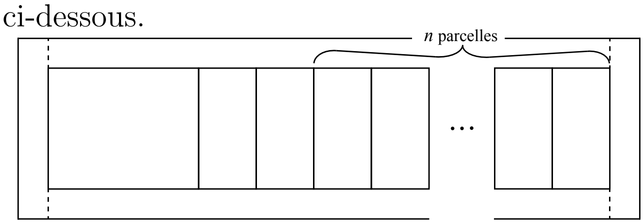
L'aire du jardin agrandi est égale à 36 m^2. Donc, l'aire totale du jardin et du chemin est égale à $(36 + 2 \times 9 + 6)$ m^2 $= 60$ m^2.

(c) *Solution 1*

Chaque nouvelle parcelle a une longueur de 2 m. Donc, si l'on ajoute n parcelles supplémentaires, la longueur du jardin de 9 m augmente de $2n$ m.
Donc, l'ensemble formé par le jardin et le chemin a une longueur de $(9 + 2n + 2 \times 1)$ m $= (2n + 11)$ m et une largeur de $(4 + 2 \times 1)$ m $= 6$ m.
Donc, en m^2, l'aire totale du jardin et du chemin est égale à $6 \times (2n + 11)$.
On résout $6 \times (2n + 11) = 150$ pour obtenir $2n + 11 = \frac{150}{6} = 25$, d'où $2n = 14$ ou $n = 7$.

Solution 2

Considérons la division de la superficie totale du jardin et du chemin en trois rectangles, comme dans la figure ci-dessous.



Chacun des rectangles à gauche et à droite du jardin a une hauteur de $(4 + 2 \times 1)$ m $= 6$ m et une largeur de 1 m. Donc, chacun de ces rectangles a une aire de 6 m $\times$ 1 m $= 6$ m^2.
Le rectangle restant, soit l'ensemble formé par le jardin et les sections restantes du chemin, a également une hauteur de 6 m.
Chaque nouvelle parcelle a une longueur de 2 m. Donc, si l'on ajoute n parcelles supplémentaires, la longueur du jardin de 9 m augmente de $2n$ m.
Donc, ce rectangle restant a une longueur de $(2n + 9)$ m.
En m^2, l'aire totale du jardin et du chemin est égale à $2 \times 6 + 6 \times (2n + 9)$, soit $12 + 6 \times (2n + 9)$.
On résout $12 + 6 \times (2n + 9) = 150$ pour obtenir $6 \times (2n + 9) = 138$, soit $2n + 9 = \frac{138}{6} = 23$, d'où $2n = 14$ ou $n = 7$.

2. (a) En commençant par le point $(5, 11)$ et en appliquant R puis T, on obtient les coordonnées $(11, -3)$:

$$(5{,}11) \xrightarrow{R} (11, -5) \xrightarrow{T} (11, -3)$$

(b) *Solution 1*

Lorsqu'un point subit une rotation de $90°$ autour de l'origine 4 fois, le résultat est une rotation de $4 \times 90° = 360°$, soit une rotation complète autour de l'origine.
Donc, en commençant par le point $(-3, 7)$, lorsque R est appliqué 4 fois, le point revient à sa position initiale. Donc, les coordonnées résultantes sont $(-3, 7)$.
Lorsque R est appliqué une cinquième fois, on obtient les coordonnées $(7, 3)$.

Solution 2

En commençant par le point $(-3, 7)$ et en appliquant R 5 fois, on obtient les coordonnées $(7, 3)$:

$$(-3, 7) \xrightarrow{R} (7, 3) \xrightarrow{R} (3, -7) \xrightarrow{R} (-7, -3) \xrightarrow{R} (-3, 7) \xrightarrow{R} (7, 3)$$

(c) En commençant par le point $(9, 1)$, et en appliquant la séquence R, R, T, on obtient les coordonnées $(-9, 1)$:

$$(9, 1) \xrightarrow{R} (1, -9) \xrightarrow{R} (-9, -1) \xrightarrow{T} (-9, 1)$$

En continuant avec le point $(-9, 1)$ et en appliquant la séquence R, R, T à nouveau, on obtient les coordonnées $(9, 1)$:

$$(-9, 1) \xrightarrow{R} (1, 9) \xrightarrow{R} (9, -1) \xrightarrow{T} (9, 1)$$

En commençant par le point $(9, 1)$, et en appliquant la séquence R, R, T deux fois, on obtient les coordonnées $(9, 1)$ (c'est-à-dire que le point retourne à sa position initiale).
Ceci se produira chaque fois que la séquence R, R, T est appliquée un nombre pair de fois.
Donc, après avoir appliqué R, R, T 10 fois, on obtient les coordonnées $(9, 1)$.
En commençant par le point $(9, 1)$ et en appliquant la séquence R, R, T une onzième fois, on obtient les coordonnées $(-9, 1)$.

3. (a) Parmi les 7 boules dans le sac, il y a 3 boules à numéro pair, soit les boules 2, 4 et 6. Donc, la probabilité pour que la première boule retirée soit un nombre pair est égale à $\frac{3}{7}$.

(b) Il y a 7 choix possibles pour la première boule. Lorsqu'une boule est retirée du sac, elle n'est ni remplacée par une autre boule, ni remise dans le sac. Cela signifie qu'il reste 6 choix pour la deuxième boule. On peut donc retirer les deux premières boules de $7 \times 6 = 42$ façons.
La somme des numéros sur les deux premières boules retirées est égale à 5 lorsque les numéros sont 1 et 4, dans un ordre quelconque, ou 2 et 3, dans un ordre quelconque.
Donc, il y a 4 façons possibles pour que les deux premières boules retirées aient une somme de 5 : 1 et 4, 4 et 1, 2 et 3, 3 et 2.
La probabilité pour que les numéros sur les deux premières boules retirées aient une somme de 5 est égale à $\frac{4}{42} = \frac{2}{21}$.

(c) Soit p la probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit supérieure ou égale à 6.
Donc, soit $\overline{p}$ la probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées ne soit *pas* supérieure ou égale à 6.
C'est-à-dire que $\overline{p}$ est égal à la probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit inférieure à 6. Donc, $p = 1 - \overline{p}$.

Si la somme des numéros sur les deux premières boules retirées est inférieure à 6, alors cette somme est soit 5, soit 4, soit 3 (puisque deux boules différentes sont retirées, la somme minimale possible est égale à $1 + 2 = 3$).
D'après la partie (b), il y a exactement 4 façons pour que les deux premières boules retirées aient une somme de 5.
Il y a exactement 2 façons pour que les deux premières boules retirées aient une somme de 4 : 1 et 3 ou 3 et 1 (2 et 2 n'est pas possible car il n'y a qu'un seul 2).
Il y a exactement 2 façons pour que les deux premières boules retirées aient une somme de 3 : 1 et 2 ou 2 et 1.
Donc, sur les $7 \times 6 = 42$ façons dont les deux premières boules peuvent être retirées, $4 + 2 + 2 = 8$ façons donnent une somme inférieure à 6. Donc, $\overline{p} = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$.
Enfin, la probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit supérieure ou égale à 6 est $p = 1 - \overline{p} = 1 - \frac{4}{21} = \frac{17}{21}$.

Remarquons qu'on aurait pu choisir de déterminer p directement. C'est-à-dire que l'on aurait pu déterminer la probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ou 13 puis additionner chacune de ces probabilités pour déterminer p.
On a choisit de déterminer $\overline{p}$ car cela impliquait seulement de prendre en compte les cas où les numéros sur les deux premières boules retirées avait une somme de 3, 4 ou 5, ce qui représentait moins de travail que de déterminer p directement.

(d) La probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit supérieure ou égale à 7 est $q = \frac{3}{4}$.
Comme dans la partie (c), soit $\overline{q}$ la probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules soit inférieure à 7. Donc, $q = 1 - \overline{q}$ ou $\frac{3}{4} = 1 - \overline{q}$, soit $\overline{q} = \frac{1}{4}$.
Il y a 8 choix possibles pour la première boule (puisqu'une huitième boule a été ajoutée au sac) et 7 choix pour la deuxième boule. Donc, on peut retirer les deux premières boules de $8 \times 7 = 56$ façons.
Puisque $\overline{q} = \frac{1}{4} = \frac{14}{56}$, il y a donc 14 façons pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit inférieure à 7.
Sans utiliser la nouvelle boule dorée, la somme des numéros sur les deux premières boules retirées peut être inférieure à 7 de 12 façons.
Celles-ci sont : $1 + 5$, $1 + 4$, $1 + 3$, $1 + 2$, $2 + 4$, $2 + 3$ et leurs inverses.
Donc, la nouvelle boule dorée qui porte l'entier k ($1 \leq k \leq 7$) doit fournir 2 façons supplémentaires de produire une somme inférieure à 7.
Si $k = 5$, alors on peut apparier la boule dorée avec la boule qui porte le numéro 1 (ces boules étant retirées du sac dans n'importe quel ordre) pour obtenir 2 façons supplémentaires de produire une somme inférieure à 7.
De plus, si $k = 5$, on ne peut apparier la boule dorée avec une autre boule pour obtenir une somme inférieure à 7. Donc, la bonne valeur de k est 5.
(On vous encourage à vérifier par vous-même que pour $k = 6$ ou 7, il n'existe pas de façons supplémentaires d'obtenir une somme inférieure à 7 et que pour $k = 1, 2, 3$ ou 4, il y a plus de 2 façons supplémentaires d'obtenir une somme inférieure à 7.)

4. (a) Soit $[r, c]$ le nombre dans la rangée r et la colonne c. Donc, à titre d'exemple, $[2, 1] = 1$.
On détermine d'abord les nombres dans la colonne 2.
Les voisins de $[1, 1]$ sont $[2, 1]$ et $[1, 2]$. Donc, $[1, 1] = [2, 1] \times [1, 2]$ ou $-1 = 1 \times [1, 2]$, d'où $[1, 2] = -1$.
Les voisins de $[2,1]$ sont $[1, 1]$, $[3, 1]$ et $[2, 2]$. Donc, $[2, 1] = [1, 1] \times [3, 1] \times [2, 2]$ ou $1 = (-1) \times (-1) \times [2, 2]$, d'où $[2,2] = 1$.
Les voisins de $[3, 1]$ sont $[2, 1]$ et $[3, 2]$. Donc, $[3, 1] = [2, 1] \times [3, 2]$ ou $-1 = 1 \times [3,2]$, d'où $[3,2] = -1$.
Remarquons qu'il n'y avait pas véritablement de choix quant aux nombres de la colonne 2. En effet, les propriétés des nombres dans la colonne 1 sont uniquement satisfaites lorsque $[1, 2] = -1$, $[2, 2] = 1$ et $[3, 2] = -1$.
En procédant ainsi, les nombres de la colonne 3 sont $[1, 3] = 1$, $[2, 3] = 1$ et $[3,3] = 1$.
Remarquons à nouveau que les propriétés des nombres dans la colonne 2 sont uniquement satisfaites par ces nombres de la colonne 3.
Si l'on s'arrête ici, est-ce que la grille 3×3 ci-contre est une grille Griffin ?

−1	−1	1
1	1	1
−1	−1	1

Les voisins de $[1, 3] = 1$ sont $[1, 2] = -1$ et $[2, 3] = 1$. Cependant, $1 \neq (-1) \times 1$. Il n'est donc pas possible de construire une grille Griffin 3×3 avec la première colonne donnée.
On remplit ensuite les colonnes 4 et 5, comme dans la figure ci-dessous. On choisit les nombres de la colonne 5 de manière que les nombres de la colonne 4 satisfont les propriétés d'une grille Griffin.
Il faut vérifier que les nombres de la colonne 5 satisfont également les propriétés d'une grille Griffin. Étant donné que chaque case dans la colonne 5 contient un -1 ou un 1 et que le nombre dans chaque case est égal au produit des nombres dans toutes les cases voisines, alors la grille 3×5 ci-dessous est effectivement une grille Griffin.

−1	−1	1	−1	−1
1	1	1	1	1
−1	−1	1	−1	−1

(b) Dans la première colonne d'une grille 3×5, il y a deux possibilités pour le nombre dans chaque cellule. Donc, il y a $2 \times 2 \times 2 = 8$ premières colonnes possibles.
Comme on l'a démontré dans la partie (a), le restant de la grille est déterminé par les trois nombres de la première colonne. Donc, il y a au maximum 8 grilles Griffin 3×5 différentes.
Considérons les deux grilles dont les premières colonnes sont $(1, -1, -1)$ et $(-1, -1, 1)$.
Puisque chacune de ces colonnes est un reflet vertical de l'autre, leurs grilles 3×5 complétées seront des reflets verticaux l'une de l'autre.
C'est-à-dire que la grille 3×5 dont la première colonne est $(-1, -1, 1)$ est une grille Griffin uniquement lorsque la grille 3×5 dont la première colonne est $(1, -1, -1)$ est une grille Griffin. On peut donc considérer ces deux types de grilles comme un seul cas.
De même, les grilles dont les premières colonnes sont $(1, 1, -1)$ et $(-1, 1, 1)$ sont également des reflets verticaux l'une de l'autre et on peut donc considérer ces deux types de grilles comme un seul cas.

Toutes les cases d'une grille dont la première colonne est $(1, 1, 1)$ contiennent des 1, formant ainsi une grille Griffin 3×5.
Donc, il nous reste à considérer les 5 grilles dont les premières colonnes sont :

$$A(-1, -1, -1), B(1, -1, 1), C(-1, 1, -1), D(1, -1, -1) \text{ et } E(1, 1, -1)$$

On remplit chacune des 5 grilles ci-dessous en remplaçant 1 par + et -1 par $-$.

A

−	+	+	+	−
−	−	+	−	−
−	+	+	+	−

B

+	−	+	−	+
−	−	+	−	−
+	−	+	−	+

C

−	−	+	−	−
+	+	+	+	+
−	−	+	−	−

D

+	−	−	+	−
−	+	+	+	−
−	+	−	−	+

E

+	+	−	−	−
+	−	+	−	+
−	−	−	+	+

Comme on l'a démontré dans la partie (a), on choisit les nombres de la colonne 5 de manière que les nombres de la colonne 4 satisfont les propriétés d'une grille Griffin.
On doit vérifier si les nombres de la colonne 5 satisfont également les propriétés d'une grille Griffin.
Puisque les cases dans les cinquième colonnes des grilles ci-dessus contiennent soit un -1, soit un 1 et que le nombre dans chaque case est égal au produit des nombres dans toutes les cases voisines, alors chacune des grilles 3×5 ci-dessus est effectivement une grille Griffin.
Donc, chacune des 8 premières colonnes possibles produit une grille Griffin 3×5. Donc, il y a au total 8 grilles Griffin de cette taille.

Remarquons que la grille dont la première colonne est $F(-1, -1, 1)$ produit une grille Griffin 3×5 qui est un reflet vertical de la grille dont la première colonne est D.
De même, la grille dont la première colonne est $G(-1, 1, 1)$ produit une grille Griffin 3×5 qui est un reflet vertical de la grille dont la première colonne est E.
Ces deux grilles Griffin, ainsi que la grille dont la première colonne est $H(1, 1, 1)$, sont présentées ci-dessous.

F

−	+	−	−	+
−	+	+	+	−
+	−	−	+	−

G

−	−	−	+	+
+	−	+	−	+
+	+	−	−	−

H

+	+	+	+	+
+	+	+	+	+
+	+	+	+	+

(c) En continuant notre analyse à partir de la partie (b), si l'on ajoute une colonne supplémentaire à chaque grille 3×5, on constate que toutes les grilles présentent la même sixième colonne, soit $(1, 1, 1)$.
Cela signifie que pour chaque grille 3×7, la septième colonne correspondra à la cinquième colonne.
Voyez-vous pourquoi ? (Par exemple, dans la partie (b), examinez les deuxième, troisième et quatrième colonnes de la grille dont la première colonne est C.)
Comme on l'a démontré dans la partie (b), la grille dont la première colonne est F est un reflet vertical de la grille dont la première colonne est D. Donc, leurs grilles $3 \times n$ complétées seront des reflets verticaux l'une de l'autre.
C'est-à-dire que la grille $3 \times n$ dont la première colonne est D est une grille Griffin uniquement lorsque la grille $3 \times n$ dont la première colonne est F est une grille Griffin. On peut donc considérer ces deux types de grilles comme un seul cas. Le même constat s'applique également aux grilles dont les premières colonnes sont E et G.

Toutes les cases d'une grille dont la première colonne est $(1, 1, 1)$ contiennent des 1, formant ainsi une grille Griffin $3 \times n$ pour toutes les valeurs de $n \geq 2$.
Dans les figures ci-dessous, on voit les 7 premières colonnes des grilles dont les premières colonnes sont A, B, C, D, E.

A

−	+	+	+	−	+	−
−	−	+	−	−	+	−
−	+	+	+	−	+	−

B

+	−	+	−	+	+	+
−	−	+	−	−	+	−
+	−	+	−	+	+	+

C

−	−	+	−	−	+	−
+	+	+	+	+	+	+
−	−	+	−	−	+	−

D

+	−	−	+	−	+	−
−	+	+	+	−	+	−
−	+	−	−	+	+	+

E

+	+	−	−	−	+	−
+	−	+	−	+	+	+
−	−	−	+	+	+	+

On désigne chacune des grilles ci-dessus par la lettre de sa première colonne : A, B, C, D et E.
Étant donné une première colonne et un entier $n \geq 2$, il existe soit aucune grille Griffin $3 \times n$ ayant cette première colonne, soit exactement une seule.
Pour chaque première colonne possible, on va compter le nombre de n $(2 \leq n \leq 2024)$ pour lesquels il existe une grille Griffin $3 \times n$.
Remarquons que la septième colonne de chacune des grilles A, B et C correspond à la première colonne de la grille.
De plus, puisque la sixième colonne de chaque grille est $(1, 1, 1)$, alors la huitième colonne correspondra à la deuxième colonne, la neuvième à la troisième et, de façon générale, la colonne $n + 6$ correspondra à la colonne n.
Chacune des grilles A, B et C se répète toutes les 6 colonnes. Par conséquent, si une grille $3 \times n$ $(n \geq 2)$ est une grille Griffin, alors une grille $3 \times (n + 6)$ est également une grille Griffin.
Cela signifie que pour déterminer pour quelles valeurs de n une grille $3 \times n$ constitue une grille Griffin, il suffit de considérer $2 \leq n \leq 7$ (on ne considère pas $n = 1$ et puisque la régularité se répète toutes les 6 colonnes, on vérifie $n = 7$). Ensuite, on utilise le fait que la régularité se répète pour déterminer le nombre de grilles Griffin pour toutes les valeurs de n telles que $2 \leq n \leq 2024$.

Dans les grilles D et E, la septième colonne est un reflet vertical de la première colonne.
De plus, puisque la sixième colonne de chaque grille est $(1, 1, 1)$, alors la huitième colonne est un reflet vertical de la deuxième colonne et, de façon générale, la colonne $n + 6$ est un reflet vertical de la colonne n.
Cela signifie que dans chacune des grilles D et E, chaque groupe de 6 colonnes à partir de la septième colonne est un reflet vertical du groupe précédent de 6 colonnes.
Cela indique que si la grille D ou E (et donc F ou G) est une grille Griffin $3 \times n$, alors la grille $3 \times (n + 6)$ est également une grille Griffin.
Pourquoi est-ce le cas ? Pour déterminer si une grille $3 \times k$ est une grille Griffin, on vérifie que chaque nombre dans la colonne k correspond au produit de ses voisins, à savoir les nombres de la colonne k et de la colonne précédente $k - 1$.
Le fait de refléter ces deux colonnes verticalement ne change pas le produit des cellules voisines. Donc, soit les grilles $3 \times n$ et $3 \times (n + 6)$ sont toutes deux des grilles Griffin, soit elles ne le sont pas.

Ensuite, on doit déterminer les valeurs de n $(2 \leq n \leq 7)$ pour lesquelles les grilles A, B, C, D et E sont des grilles Griffin.

Dans les figures ci-dessous, on place un “Y” sous la colonne n si la grille $3 \times n$ est une grille Griffin, dans le cas contraire on ne place pas de “Y”.

A

−	+	+	+	−	+	−
−	−	+	−	−	+	−
−	+	+	+	−	+	−
	Y			Y		

B

+	−	+	−	+	+	+
−	−	+	−	−	+	−
+	−	+	−	+	+	+
	Y			Y		

C

−	−	+	−	−	+	−
+	+	+	+	+	+	+
−	−	+	−	−	+	−
	Y			Y		

D

+	−	−	+	−	+	−
−	+	+	+	−	+	−
−	+	−	−	+	+	+
				Y		

E

+	+	−	−	−	+	−
+	−	+	−	+	+	+
−	−	−	+	+	+	+
				Y		

Donc, les grilles A, B et C sont des grilles Griffin $3 \times n$ lorsque $n = 2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots$ et ainsi de suite, tandis que les grilles D et E sont des grilles Griffin $3 \times n$ lorsque $n = 5, 11, 17, 23, \ldots$ et ainsi de suite.
Puisque $2024 = 6 \times 337 + 2$, la régularité de 6 colonnes se répète 337 fois dans chacune des grilles.
Dans chaque groupe de 6, il y a 2 valeurs de n pour lesquelles les grilles A, B et C sont des grilles Griffin. Donc, pour chacun de ces types de grilles, il y a $2 \times 337 = 674$ grilles Griffin pour $2 \leq n \leq 2022$.
Cependant, la grille 3×2024 est également une grille Griffin dans chaque cas. Il y a donc 675 grilles Griffin pour chacune des grilles A, B et C.
Dans chaque groupe de 6, il y a 1 valeur de n pour laquelle les grilles D, E, F, et G sont des grilles Griffin. Donc, pour chacun de ces types de grilles, il y a 337 grilles Griffin.
Enfin, la grille H (la grille dont toutes les cases contiennent des 1) est une grille Griffin pour toutes les valeurs de n. Donc, il y a 2023 grilles Griffin dans ce cas.

Donc, la somme des nombres de grilles Griffin $3 \times n$ avec $2 \leq n \leq 2024$ est égale à

$$S = (3 \times 675) + (4 \times 337) + 2023 = 5396$$

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2023

le mercredi 5 avril 2023
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 6 avril 2023
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2023 University of Waterloo

1. (a) Une grille composée de 12 rangées et de 15 colonnes contient $12 \times 15 = 180$ pièces.

(b) *Solution 1*

Remarquons d'abord que les pièces centrales de chaque grille forment un rectangle.

Dans une grille qui comprend 6 rangées, la 1re rangée et la 6e rangée sont chacune composées entièrement de pièces de bord. Cette grille a donc $6 - 2 = 4$ rangées qui contiennent des pièces centrales.

Dans chacune de ces 4 rangées, la 1re colonne et la 4e colonne sont chacune composées entièrement de pièces de bord. La grille a donc $4 - 2 = 2$ colonnes qui contiennent des pièces centrales.

Donc, une grille composée de 6 rangées et de 4 colonnes contient une grille rectangulaire composée entièrement de pièces centrales. Cette grille rectangulaire est composée de 4 rangées et de 2 colonnes et contient donc $4 \times 2 = 8$ pièces centrales.

Solution 2

Une grille composée de 6 rangées et de 4 colonnes contient $6 \times 4 = 24$ pièces.

On va d'abord déterminer le nombre de pièces de bord, puis on va soustraire ce nombre de 24 pour déterminer le nombre de pièces centrales.

La première colonne de la grille contient 6 pièces de bord (puisqu'il y a 6 rangées) et la quatrième colonne de la grille contient également 6 pièces de bord.

La première rangée de la grille contient 4 pièces de bord (puisqu'il y a 4 colonnes).

Or, les première et dernière pièces de bord de cette rangée (soit le coin supérieur gauche et le coin supérieur droit de la grille) ont déjà été comptabilisées lorsque l'on a compté les pièces de bord dans les première et dernière colonnes. Il y a donc $4 - 2 = 2$ pièces de bord additionnelles dans la première rangée.

De même, il y a 2 pièces de bord additionnelles dans la sixième rangée.

Donc, la grille contient $6 + 6 + 2 + 2 = 16$ pièces de bord et contient donc $24 - 16 = 8$ pièces centrales.

(c) Puisque 14 a deux paires de facteurs possibles, soit 1 et 14 ou 2 et 7, alors la grille rectangulaire formée de pièces centrales sera composée soit de 1 rangée et de 14 colonnes (ou vice versa), soit de 2 rangées et de 7 colonnes (ou vice versa).

Si la grille rectangulaire formée de pièces centrales a 1 rangée, alors le casse-tête aura $1 + 2 = 3$ rangées puisqu'il y aura forcément une rangée de pièces de bord au-dessus et au-dessous de la rangée de pièces centrales.

De même, si la grille rectangulaire formée de pièces centrales a 14 colonnes, alors le casse-tête aura $14 + 2 = 16$ colonnes puisqu'il y aura forcément une colonne de pièces de bord à la fois à droite et à gauche des pièces centrales.

Dans ce cas, le casse-tête sera composé de 3 rangées et de 16 colonnes (ou vice versa) et contiendra donc $3 \times 16 = 48$ pièces.

Un casse-tête qui contient 48 pièces, dont 14 sont des pièces centrales, comprend donc $48 - 14 = 34$ pièces de bord.

Si la grille rectangulaire formée de pièces centrales a 2 rangées, alors le casse-tête aura $2 + 2 = 4$ rangées, comme dans le cas ci-dessus.

De même, si la grille rectangulaire formée de pièces centrales a 7 colonnes, alors le casse-tête aura $7 + 2 = 9$ colonnes.

Dans ce cas, le casse-tête sera composé de 4 rangées et de 9 colonnes (ou vice versa) et contiendra donc $4 \times 9 = 36$ pièces.

Un casse-tête qui contient 36 pièces, dont 14 sont des pièces centrales, comprend donc $36 - 14 = 22$ pièces de bord. Donc, les valeurs de s et t sont 34 et 22.

(d) Une grille composée de 5 rangées et de c colonnes contient $5c$ pièces.
Une grille composée de 5 rangées et de c colonnes contient une grille rectangulaire formée de pièces centrales. Celle-ci est composée de $5-2=3$ rangées et de $c-2$ colonnes et contient donc $3(c-2)$ pièces centrales.
Puisque le nombre de pièces de bord est égal au nombre de pièces centrales, alors le nombre total de pièces est le double du nombre de pièces centrales.
Donc, $5c = 2 \times 3(c-2)$ ou $5c = 6(c-2)$, d'où on a donc $5c = 6c - 12$ ou $c = 12$.

2. (a) Si le premier terme est 7, alors le deuxième terme est $7+3=10$ (puisque 7 est impair, on ajoute 3).
Si le deuxième terme est 10, alors le troisième terme est $10+4=14$ (puisque 10 est pair, on ajoute 4).
De même, le quatrième terme est $14+4=18$ et le cinquième terme est $18+4=22$.
Si le premier terme d'une suite Ing est 7, alors le cinquième terme de la suite sera 22.

(b) Si un terme, soit x, est impair, alors le terme suivant sera $x+3$. Ce terme est pair puisque la somme de deux entiers impairs est un entier pair.
Si un terme, soit x, est pair, alors le terme suivant sera $x+4$. Ce terme est pair puisque la somme de deux entiers pairs est un entier pair.
Donc, dans une suite Ing, chaque terme après le premier est un entier pair.
Donc, si le cinquième terme est 62, le quatrième terme ne peut égaler $62-3=59$ (puisque 59 est impair) et doit donc égaler $62-4=58$.
De même, le troisième terme est $58-4=54$ et le deuxième terme est $54-4=50$.
Si le premier terme est un entier pair, alors le premier terme doit égaler $50-4=46$. Cependant, si le premier terme est un entier impair, alors le premier terme doit égaler $50-3=47$.
Donc, si le cinquième terme d'une suite Ing est 62, alors le premier terme peut être 46 (les termes de la suite étant 46, 50, 54, 58, 62) ou 47 (les termes de la suite étant 47, 50, 54, 58, 62).

(c) Si le premier terme d'une suite Ing est 49, alors le deuxième terme est $49+3=52$. On voit donc que chaque terme, après le deuxième, est obtenu en ajoutant 4 au terme précédent.
Cela signifie que pour chaque entier strictement positif k, il existe un terme de la forme $52+4k$ dans la suite.
Puisque $52+4k = 4(13+k)$, alors chacun des termes restants de la suite est un multiple de 4.
Donc, les multiples de 4 qui sont à la fois supérieurs à 318 et inférieurs à 300 sont $320 = 4 \times 80$, $324 = 4 \times 81$ et $328 = 4 \times 82$.

(d) Si le nombre 18 parait quelque part dans une suite Ing après le premier terme, alors le terme qui précède 18 est soit $18-3=15$, soit $18-4=14$.
Chacune de ces valeurs est une valeur possible de n (le premier terme de la suite).
Comme on l'a démontré dans la partie (b), chaque terme après le premier est un entier pair. Donc, si le nombre 15 parait dans une suite Ing, il peut uniquement paraitre comme premier terme de la suite.
Puisque 14 est pair, ce nombre peut être le premier terme de la suite mais peut également être un terme qui parait après le premier terme.
Si le nombre 14 parait quelque part après le premier terme, alors le terme qui le précède est soit $14-3=11$, soit $14-4=10$.
Chacune de ces valeurs est une valeur possible de n.
Si le nombre 11 parait dans une suite Ing, il peut uniquement paraitre comme premier terme de la suite (puisque 11 est impair).

Puisque 10 est pair, ce nombre peut être le premier terme de la suite mais peut également être un terme qui parait après le premier terme.
Si le nombre 10 parait quelque part après le premier terme, alors le terme qui le précède est soit $10 - 3 = 7$, soit $10 - 4 = 6$.
Chacune de ces valeurs est une valeur possible de n.
Si le nombre 7 parait dans une suite Ing, il peut uniquement paraitre comme premier terme de la suite.
Puisque 6 est pair, ce nombre peut être le premier terme de la suite mais peut également être un terme qui parait après le premier terme.
Si le nombre 6 parait quelque part après le premier terme, alors le terme qui le précède est soit $6 - 3 = 3$, soit $6 - 4 = 2$.
Chacune de ces valeurs est une valeur possible de n.
Si le nombre 3 parait dans une suite Ing, il peut uniquement paraitre comme premier terme de la suite.
Si le nombre 2 parait dans une suite Ing, alors 2 doit également être le premier terme de la suite puisque $2 - 3 = -1$ et $2 - 4 = -2$ ne sont pas des entiers strictement positifs.
Donc, si le nombre 18 parait quelque part dans une suite Ing après le premier terme, les valeurs possibles du premier terme n sont 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14 et 15.

3. (a) La droite d'équation $x = a$ coupe la droite d'équation $y = x$ au point (a, a).
Donc, la hauteur du triangle et la longueur de sa base sont toutes deux égales à a. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2} \times a \times a$.
On a donc $\frac{1}{2}a^2 = 32$, d'où on a $a^2 = 64$ ou $a = 8$ (puisque $a > 0$).

(b) *Solution 1*
La droite d'équation $x = 10$ coupe la droite d'équation $y = 2x$ au point $(10, 20)$.
La droite d'équation $x = 4$ coupe la droite d'équation $y = 2x$ au point $(4, 8)$.
Donc, le trapèze a des côtés parallèles de longueurs 20 et 8. De plus, la distance entre les côtés parallèles est égale à $10 - 4 = 6$.
L'aire du trapèze est égale à $\frac{6}{2}(20 + 8) = 3(28)$, ce qui est égal à 84.

Solution 2
Si T, B et A sont respectivement l'aire du trapèze, l'aire du petit triangle non ombré et l'aire du triangle initial, alors $T = A - B$.
La droite d'équation $x = 4$ coupe la droite d'équation $y = 2x$ au point $(4, 8)$.
Donc, la hauteur du petit triangle non ombré est égale à 8 et la longueur de sa base est égale à 4. On a donc $B = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$.
La droite d'équation $x = 10$ coupe la droite d'équation $y = 2x$ au point $(10, 20)$.
Donc, la hauteur du triangle initial est égale à 20 et la longueur de sa base est égale à 10.
On a donc $A = \frac{1}{2} \times 10 \times 20 = 100$.
Donc, l'aire du trapèze ombré est égale à $T = A - B$ ou $T = 100 - 16$, soit 84.

(c) *Solution 1*
On détermine d'abord l'aire du trapèze.
La droite d'équation $x = 21$ coupe la droite d'équation $y = 3x$ au point $(21, 63)$.
La droite d'équation $x = c$ coupe la droite d'équation $y = 3x$ au point $(c, 3c)$.
Donc, le trapèze a des côtés parallèles de longueurs 63 et $3c$. De plus, la distance entre les côtés parallèles est égale à $21 - c$ (puisque $0 < c < 21$).

L'aire du trapèze est égale à $\dfrac{21-c}{2}(63+3c)$.

Ensuite, on détermine l'aire du petit triangle.
Si la longueur de sa base est égale à c, alors sa hauteur est égale à $3c$. L'aire du petit triangle est donc égale à $\dfrac{1}{2} \times c \times 3c = \dfrac{1}{2} \times 3c^2$.

L'aire du trapèze est égale à 8 fois l'aire du petit triangle.
On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{21-c}{2}(63+3c) &= 8 \times \frac{1}{2} \times 3c^2 \\
(21-c)(63+3c) &= 8 \times 3c^2 \\
(21-c)(21+c) &= 8 \times c^2 \\
441 - c^2 &= 8c^2 \\
441 &= 9c^2 \\
c^2 &= 49
\end{aligned}$$

d'où $c = 7$ (puisque $c > 0$).

Solution 2
Si T, B et A sont respectivement l'aire du trapèze, l'aire du petit triangle et l'aire du triangle initial, alors $T = A - B$.
L'aire du trapèze est égale à 8 fois l'aire du petit triangle, soit $T = 8B$.
Lorsqu'on reporte $T = 8B$ dans l'équation $T = A - B$, on obtient $8B = A - B$ ou $9B = A$.

La droite d'équation $x = 21$ coupe la droite d'équation $y = 3x$ au point $(21, 63)$.
Donc, $A = \dfrac{1}{2} \times 21 \times 63 = \dfrac{1323}{2}$.
La droite d'équation $x = c$ coupe la droite d'équation $y = 3x$ au point $(c, 3c)$.
Donc, $B = \dfrac{1}{2} \times c \times 3c = \dfrac{3c^2}{2}$.

Lorsqu'on reporte $B = \dfrac{3c^2}{2}$ dans l'équation $9B = A$, on obtient

$$\begin{aligned}
9 \times \frac{3c^2}{2} &= \frac{1323}{2} \\
27c^2 &= 1323 \\
c^2 &= 49
\end{aligned}$$

d'où $c = 7$ (puisque $c > 0$).

(d) *Solution 1*
Comme on l'a démontré dans les parties (b) et (c), la droite verticale d'équation $x = p$ coupe le triangle initial en un trapèze et un petit triangle.
On détermine d'abord l'aire du trapèze.
La droite d'équation $x = 1$ coupe la droite d'équation $y = 4x$ au point $(1, 4)$.
La droite d'équation $x = p$ coupe la droite d'équation $y = 4x$ au point $(p, 4p)$.
Donc, le trapèze a des côtés parallèles de longueurs 4 et $4p$. De plus, la distance entre les côtés parallèles est égale à $1 - p$ (puisque $0 < p < 1$).

L'aire du trapèze est égale à $\dfrac{1-p}{2}(4+4p)$.

Ensuite, on détermine l'aire du petit triangle.
Si la longueur de sa base est égale à p, alors sa hauteur est égale à $4p$. L'aire du petit triangle est donc égale à $\frac{1}{2} \times p \times 4p = \frac{1}{2} \times 4p^2$.

La droite d'équation $x = p$ coupe le triangle initial en deux parties de même aire. Donc, l'aire du trapèze est égale à l'aire du petit triangle.
On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{1-p}{2}(4+4p) &= \frac{1}{2} \times 4p^2 \\
(1-p)(4+4p) &= 4p^2 \\
(1-p)(1+p) &= p^2 \\
1-p^2 &= p^2 \\
1 &= 2p^2 \\
p^2 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

d'où $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (puisque $p > 0$).

Ahmed répète le processus en traçant une deuxième droite verticale d'équation $x = q$ telle que $0 < q < p$.
On veut déterminer la valeur de q en fonction de p afin de pouvoir utiliser cette relation pour déterminer la position de la 12^e^ droite verticale (sans avoir à répéter ces calculs 12 fois).

Autrement dit, on cherche à répéter le processus ci-dessus sans substituer $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ afin de pouvoir déterminer la valeur de q en fonction de p.

La droite verticale d'équation $x = q$ coupe le triangle borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = 4x$ et $x = p$ en un nouveau trapèze et un nouveau petit triangle.
On détermine d'abord l'aire du trapèze.
La droite d'équation $x = p$ coupe la droite d'équation $y = 4x$ au point $(p, 4p)$.
La droite d'équation $x = q$ coupe la droite d'équation $y = 4x$ au point $(q, 4q)$.
Donc, le trapèze a des côtés parallèles de longueurs $4p$ et $4q$. De plus, la distance entre les côtés parallèles est égale à $p - q$ (puisque $0 < q < p$).

L'aire du trapèze est égale à $\frac{p-q}{2}(4p + 4q)$.

Ensuite, on détermine l'aire du nouveau petit triangle.
Si la longueur de sa base est égale à q, alors sa hauteur est égale à $4q$. L'aire du nouveau petit triangle est donc égale à $\frac{1}{2} \times q \times 4q = \frac{1}{2} \times 4q^2$.

La droite d'équation $x = q$ coupe le triangle précédent en deux parties de même aire. Donc, l'aire du trapèze est égale à l'aire du nouveau petit triangle.

On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{p-q}{2}(4p+4q) &= \frac{1}{2}\times 4q^2\\
(p-q)(4p+4q) &= 4q^2\\
(p-q)(p+q) &= q^2\\
p^2-q^2 &= q^2\\
p^2 &= 2q^2\\
q^2 &= \frac{1}{2}\times p^2
\end{aligned}$$

d'où $q=\frac{1}{\sqrt{2}}\times p$ (puisque $q>0$).

On voit donc que si Ahmed trace une droite verticale d'équation $x=n$ (avec $n>0$ et n étant inférieur à l'abscisse à l'origine de la droite verticale tracée précédemment), alors la droite verticale suivante qu'il tracera aura pour équation $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\times n$ (puisque le processus se répète).
Puisque la droite verticale initiale a pour équation $x=1$, alors la 12^{e} droite qu'il trace a pour équation $x=1\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{12}$ ou $x=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^6$ ou $x=\left(\frac{1}{2}\right)^6$. Donc, $k=\frac{1}{64}$.

Solution 2
Comme on l'a démontré dans les parties (b) et (c), la droite verticale d'équation $x=p$ coupe le triangle initial en un trapèze et un petit triangle.
La droite d'équation $x=1$ coupe la droite d'équation $y=4x$ au point $(1,4)$. Donc, l'aire du triangle initial est égale à $\frac{1}{2}\times 1\times 4=2$.
La droite d'équation $x=p$ coupe la droite d'équation $y=4x$ au point $(p,4p)$. Donc, l'aire du petit triangle est égale à $\frac{1}{2}\times p\times 4p=2p^2$.
L'aire du petit triangle est égale à la moitié de l'aire du triangle initial. Donc, $2p^2=1$ ou $p^2=\frac{1}{2}$, d'où $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (puisque $p>0$).
Ahmed répète le processus en traçant une deuxième droite verticale d'équation $x=q$ telle que $0<q<p$.
On veut déterminer la valeur de q en fonction de p afin de pouvoir utiliser cette relation pour déterminer la position de la 12^{e} droite verticale (sans avoir à répéter ces calculs 12 fois).

Autrement dit, on cherche à répéter le processus ci-dessus sans substituer $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$ afin de pouvoir déterminer la valeur de q en fonction de p.

La droite verticale d'équation $x=q$ coupe le triangle borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y=4x$ et $x=p$ en un nouveau trapèze et un nouveau petit triangle.
Comme on l'a démontré précédemment, l'aire du triangle borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y=4x$ et $x=p$ est égale à $2p^2$.
La droite d'équation $x=q$ coupe la droite d'équation $y=4x$ au point $(q,4q)$. Donc, l'aire du nouveau petit triangle est égale à $\frac{1}{2}\times q\times 4q=2q^2$.

L'aire du nouveau petit triangle est égale à la moitié de l'aire du triangle précédent. Donc,

$2q^2 = \frac{2p^2}{2}$ ou $q^2 = \frac{1}{2} \times p^2$, d'où $q = \frac{1}{\sqrt{2}} \times p$ (puisque $q > 0$).
On voit donc que si Ahmed trace une droite verticale d'équation $x = n$ (avec $n > 0$ et n étant inférieur à l'abscisse à l'origine de la droite verticale tracée précédemment), alors la droite verticale suivante qu'il tracera aura pour équation $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \times n$ (puisque le processus se répète).
Puisque la droite verticale initiale a pour équation $x = 1$, alors la 12$^{\text{e}}$ droite qu'il trace a pour équation $x = 1 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{12}$ ou $x = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^6$ ou $x = \left(\frac{1}{2}\right)^6$. Donc, $k = \frac{1}{64}$.

Solution 3
Ahmed trace la 12$^{\text{e}}$ droite verticale à $x = k$.
La droite d'équation $x = k$ coupe la droite d'équation $y = 4x$ au point $(k, 4k)$. Donc, l'aire du nouveau triangle à gauche de cette droite est égale à $\frac{1}{2} \times k \times 4k = 2k^2$.
Puisque l'aire de chaque nouveau triangle est la moitié de l'aire du triangle précédent, alors le triangle d'aire $2k^2$ a une aire qui est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$ de l'aire du triangle initial.
La droite d'équation $x = 1$ coupe la droite d'équation $y = 4x$ au point $(1, 4)$. Donc, l'aire du triangle initial est égale à $\frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2$.
On a donc

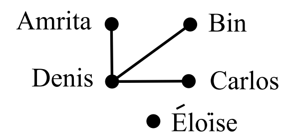
$$\begin{aligned} 2k^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \times 2 \\ k^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \\ k &= \left(\frac{1}{2}\right)^{6} \end{aligned}$$

d'où $k = \frac{1}{64}$.

4. (a) *Solution 1*
Amrita a serré la main d'exactement 1 personne, Bin et Carlos ont serré la main d'exactement 2 personnes chacun et Denis a serré la main d'exactement 3 personnes. Donc, à première vue, $1 + 2 + 2 + 3 = 8$ poignées de main ont été données. Or, chacune de ces poignées de main a été comptée deux fois.
C'est-à-dire que lorsque la personne X serre la main de la personne Y, la personne Y serre la main de la personne X et donc cette poignée de main est comptée deux fois.
De façon générale, si S et N représentent respectivement la somme du nombre de mains que chaque personne a serrées et le nombre de poignées de main qui ont été données, alors $N = S \div 2$.
Donc, en tout, $8 \div 2 = 4$ poignées de main ont été données.

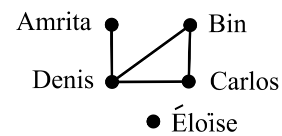
Solution 2
Denis a serré la main d'exactement 3 personnes et Éloïse n'a serré la main de personne.
Donc, Denis a dû serrer la main d'Amrita, de Bin et de Carlos (et Amrita, Bin et Carlos ont chacun serré la main de Denis).

Si l'on représente une poignée de main par un segment de droite qui relie 2 personnes, alors on voit dans la figure ci-contre les poignées de main que l'on a compté jusqu'à maintenant.



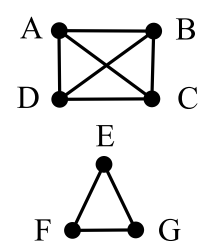
D'après la figure, Amrita a pris part à 1 poignée de main, Denis a pris part à 3 poignées de main et Éloïse a pris part à 0 poignée de main. Donc, toutes les poignées de main auxquelles Amrita, Denis et Éloïse ont pris part ont été comptabilisées.

Bin et Carlos ont serré la main d'exactement 2 personnes chacun. Donc, en ce qui concerne leurs secondes poignées de main, celles-ci ont dû se produire entre eux deux (car ces poignées de main ne peuvent avoir eu lieu avec Amrita, Denis ou Éloïse).
Dans la figure ci-contre, on voit les poignées de main qui ont été données. Il y avait en tout 4 poignées de main qui ont été données.



(b) Comme dans la partie (a) de la Solution 1, si 9 personnes ont serré la main d'exactement 3 personnes chacune, alors $S = 9 \times 3 = 27$, d'où le nombre total de poignées de main qui ont été données est égal à $N = 27 \div 2 = 13{,}5$.
Sachant que le nombre total de poignées de main qui ont été données doit être un entier, alors il n'est pas possible que chacune des 9 personnes ait serré la main d'exactement 3 autres personnes.

(c) Supposons que les lettres A, B, C, D, E, F et G représentent les 7 personnes.
Si A, B, C et D ont chacun serré la main des trois autres personnes, si E, F et G ont chacun serré la main des deux autres personnes et si aucune autre poignée de main n'a été donnée, alors 9 poignées de main ont été données en tout, comme on le voit dans la figure ci-contre.



On va démontrer que cet ensemble de 9 poignées de main remplit les conditions données, qu'un nombre inférieur de poignées de main ne peut remplir ces conditions et donc que $m = 9$.

D'abord, on va expliquer pourquoi l'ensemble des 9 poignées de main illustrées dans la figure satisfait la condition selon laquelle au moins une poignée de main a été donnée dans chaque groupe de 3 personnes.
Soit A, B, C, D les membres du Groupe 1 et E, F, G les membres du Groupe 2.
Dans tout groupe de 3 personnes choisies parmi les 7 personnes, soit les 3 personnes appartiennent au Groupe 1, soit les 3 personnes appartiennent au Groupe 2, soit 1 personne appartient à l'un des deux groupes et 2 personnes appartiennent à l'autre groupe.
C'est-à-dire qu'au moins 2 des 3 personnes choisies doivent appartenir soit au Groupe 1, soit au Groupe 2.
Puisqu'une poignée de main est donnée entre chaque paire de personnes du Groupe 1 et entre chaque paire de personnes du Groupe 2, et que chaque groupe de 3 personnes doit contenir au moins 2 personnes du même groupe, alors au moins une poignée de main a été donnée dans chaque groupe de 3 personnes.

Ensuite, on va expliquer pourquoi un nombre inférieur de poignées de main ne peut remplir

ces conditions.
On définit S et N de la même manière que dans la partie (a) de la Solution 1.
Supposons que $N \leq 8$.
Puisque chaque poignée de main se produit entre 2 personnes et que $N \leq 8$, alors S est au plus $8 \times 2 = 16$.
Si chacune des 7 personnes a serré 3 mains ou plus, alors S serait supérieur ou égal à $7 \times 3 = 21$.
Puisque S est au plus 16, alors au moins une des 7 personnes a serré la main de 2 personnes ou moins.
Supposons que ce soit E qui ait serré la main de 2 personnes ou moins. (Il se peut que ce ne soit pas E mais, quel que soit le cas, le raisonnement est identique.)
Alors au moins 4 personnes n'ont pas serré la main de E.
Supposons que A, B, C, D n'aient pas serré la main de E. (Encore une fois, le raisonnement est le même peu importe l'identité des quatre personnes.)
Dans ce cas, chaque paire de personnes du groupe A, B, C, D doit s'être serré la main, sinon la paire qui ne s'est pas serré la main forme, avec E, un groupe de 3 personnes dans lequel aucune poignée de main n'a été donnée.
Puisque chaque paire de personnes du groupe A, B, C, D s'est serré la main, 6 poignées de main ont été données dans ce groupe (A et B, A et C, A et D, B et C, B et D, C et D).
Puisque N est au plus 8, alors E, F et G participent au plus à $8 - 6 = 2$ poignées de main au total.
C'est-à-dire que E, F, G peuvent participer à 0, 1 ou 2 poignées de main, ce qui donne 3 cas à considérer.

<u>1er cas : Aucune paire de personnes dans le groupe E, F, G ne s'est serré la main</u>
Si aucune paire de personnes dans le groupe E, F, G ne s'est serré la main, alors il s'agit d'un groupe de 3 personnes dans lequel aucune poignée de main n'a été donnée.

<u>2e cas : Exactement une paire de personnes dans le groupe E, F, G s'est serrée la main</u>
Dans ce cas, il y a au plus une poignée de main qui est donnée entre l'une des personnes E, F, G, et l'une des personnes A, B, C, D.
Supposons que E et F se soient serré la main (l'argument est valable pour n'importe quelle paire de personnes que l'on peut choisir parmi E, F, G).
Il y a au moins une personne dans le groupe A, B, C, D qui n'a pas serré la main de F et qui n'a pas serré la main de G. Il s'agit donc d'un groupe de 3 personnes dans lequel aucune poignée de main n'a été donnée.

<u>3e cas : Exactement deux paires de personnes dans le groupe E, F, G se sont serrées la main.</u>
Supposons que E et F se soient serré la main et que E et G se soient serré la main (l'argument est valable peu importe les paires que l'on choisit parmi E, F, G).
Dans ce cas, F, G et l'une des personnes parmi A, B, C, D constituent un groupe de 3 personnes dans lequel aucune poignée de main n'a été donnée.

Donc, il n'est pas possible d'avoir 8 ou moins poignées de main qui ont été données. Donc, $m = 9$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2022

le mardi 12 avril 2022
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 13 avril 2022
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2022 University of Waterloo

1. (a) Le rapport de la contribution d'Alice à celle de Bello est de 3 : 8.
Cela signifie que pour chaque 3 \$ + 8 \$ = 11 \$ contribués, Bello en contribue 8 \$. Donc, Bello a contribué $\dfrac{8}{11}$ des coûts de démarrage de la nouvelle entreprise.
Si les coûts de démarrage de la nouvelle entreprise s'élevaient à 9240 \$, alors Bello a contribué $\dfrac{8}{11} \times 9240\ \$ = 6720\ \$$ aux coûts de démarrage.

(b) Dans la première année d'activité, Alice et Bello se sont partagés tous les profits réalisés par leur entreprise selon le même rapport que leurs contributions aux coûts de démarrage ; soit 3 : 8.
Cela signifie que pour chaque 3 \$+8 \$ = 11 \$ de profits réalisés pendant la première année, la part revenant à Alice était de 3 \$.
Soit P \$ le profit total réalisé par l'entreprise pendant cette première année.
Étant donné que la part du profit revenant à Alice était de 1881 \$, alors $\dfrac{3}{11} \times P = 1881$ ou $P = \dfrac{1881 \times 11}{3}$, d'où $P = \dfrac{20\,691}{3} = 6897$.
Donc, l'entreprise a réalisé un profit total de 6897 \$ pendant cette première année.

(c) Dans la deuxième année d'activité, Alice et Bello ont décidé de partager tous les profits réalisés par leur entreprise cette année-là selon un rapport de $3 : (8 + x)$.
Cela signifie que pour chaque $3\ \$ + (8 + x)\ \$ = (11 + x)\ \$$ de profits réalisés pendant la deuxième année, la part revenant à Bello était de $(8 + x)$ \$.
Étant donné que la part du profit revenant à Bello était de 5440 \$ et que l'entreprise a réalisé un profit total de 6400 \$ cette année-là, alors $\dfrac{(8+x)}{(11+x)} \times 6400 = 5440$.
On résout l'équation pour obtenir

$$\begin{aligned}
\frac{(8+x)}{(11+x)} \times 6400 &= 5440 \\
6400(8+x) &= 5440(11+x) \\
20(8+x) &= 17(11+x) \quad \text{(on divise les deux membres par 320)} \\
160 + 20x &= 187 + 17x \\
3x &= 27
\end{aligned}$$

Donc, $x = 9$.

2. (a) La droite D_1 a pour équation $y = \frac{3}{2}x + k$ et pour pente $\frac{3}{2}$.
Puisque D_2 et D_1 sont perpendiculaires, alors la pente de D_2 est égale à $-\frac{2}{3}$.

(b) Puisque D_1 a pour équation $y = \frac{3}{2}x + k$, son ordonnée à l'origine est k.
La droite D_2 a la même ordonnée à l'origine que D_1 (soit $P(0, k)$).
Donc, D_2 a pour pente $-\frac{2}{3}$, une ordonnée à l'origine de k et a donc pour équation $y = -\frac{2}{3}x + k$.
Puisque D_2 coupe l'axe des ordonnées à Q, alors l'abscisse du point Q est égale à l'abscisse à l'origine de D_2.
Pour obtenir l'abscisse à l'origine de cette droite, on pose $y = 0$ pour obtenir $0 = -\frac{2}{3}x + k$ ou $\frac{2}{3}x = k$, d'où $x = \frac{3k}{2}$.
L'abscisse du point Q, exprimée en fonction de k, est égale à $\frac{3k}{2}$.

(c) D'après la partie (b), les coordonnées de P sont $(0, k)$ et les coordonnées de Q sont $\left(\frac{3k}{2}, 0\right)$.

Pour représenter l'aire du triangle PQR à l'aide d'une expression, il faut d'abord déterminer les coordonnées du point R.

D_3 est parallèle à D_1 et a donc une pente de $\frac{3}{2}$ et a pour équation $y = \frac{3}{2}x + b$, b étant l'ordonnée à l'origine.

La droite D_3 passe par le point $Q\left(\frac{3k}{2}, 0\right)$. Donc, $0 = \frac{3}{2}\left(\frac{3k}{2}\right) + b$ ou $b = -\frac{9k}{4}$.

Donc, D_3 a pour ordonnée à l'origine $-\frac{9k}{4}$ et donc R a pour coordonnées $\left(0, -\frac{9k}{4}\right)$.

Soit $O(0,0)$ l'origine. Donc, l'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2} \times PR \times OQ$, puisque la hauteur OQ est perpendiculaire à la base PR.
Puisque $PR = k - \left(-\frac{9k}{4}\right) = \frac{13k}{4}$ et $OQ = \frac{3k}{2}$, alors l'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{13k}{4} \times \frac{3k}{2} = \frac{39k^2}{16}$.
L'aire du triangle PQR est égale à 351, donc $\frac{39k^2}{16} = 351$ ou $k^2 = \frac{351 \times 16}{39}$, d'où $k^2 = 144$ ou $k = 12$ (puisque $k > 0$).

3. (a) Remarquons d'abord qu'un nombre est un carré parfait si l'exposant de chaque facteur premier dans sa factorisation première est pair. Inversement, la factorisation première de tout carré parfait contient des facteurs premiers ayant des exposants pairs.
La factorisation première du nombre 84 est $2^2 \times 3 \times 7$.
Pour que le produit $84 \times k = 2^2 \times 3 \times 7 \times k$ soit un carré parfait, k doit au moins comprendre les facteurs premiers 3 et 7 (puisque chacun a un exposant impair), d'où k doit donc admettre 21 comme diviseur.
Si $k = 3 \times 7$, alors $84 \times k$ est un carré parfait car

$$84 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2 = (2 \times 3 \times 7) \times (2 \times 3 \times 7).$$

Donc, la plus petite valeur de l'entier strictement positif k pour laquelle $84 \times k$ est un carré parfait est $k = 3 \times 7 = 21$.

(b) La factorisation première de 572 est $2^2 \times 11 \times 13$. Donc, ℓ doit au moins comprendre les facteurs premiers 11 et 13 (puisque chacun a un exposant impair).
Puisque $572 \times \ell$ est un carré parfait, alors tout facteur de ℓ, y compris 11 et 13, doit être un carré parfait.
Autrement dit, ℓ est un nombre de la forme $11 \times 13 \times n^2$, n étant un entier strictement positif, car

$$572 \times \ell = 572 \times 11 \times 13 \times n^2 = (2 \times 11 \times 13 \times n) \times (2 \times 11 \times 13 \times n).$$

Puisque $\ell = 11 \times 13 \times n^2 = 143n^2$ et $\ell < 6000$, alors $143n^2 < 6000$, d'où $n^2 < \frac{6000}{143} \approx 41{,}96$.
La plus grande valeur de l'entier strictement positif n qui vérifie $n^2 \leq 41$ est $n = 6$.
Donc, la plus grande valeur possible de ℓ est $11 \times 13 \times 6^2 = 5148$.

(c) La factorisation première du nombre 525 000 est $2^3 \times 3 \times 5^5 \times 7$. Donc, si $525\,000 \times m$ est un carré parfait, alors m doit au moins comprendre les facteurs premiers $2, 3, 5$ et 7 (puisque chacun a un exposant impair).
Si m comprend les facteurs premiers 2, 3, 5 et 7, alors m est supérieur ou égal à $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$.
Donc, si m est un entier strictement positif inférieur à 200, alors $525\,000 \times m$ ne peut être un carré parfait.

(d) Supposons que les trois puissances de 10 que l'on choisit de cette liste sont $10^a, 10^b$ et 10^c, a, b, c étant des entiers impairs strictement positifs de 1 à 99 tels que $a < b < c$.
Puisque $a < b$ et $a < c$, alors la somme de ces trois puissances, $S = 10^a + 10^b + 10^c$, peut

être facorisée pour que $S = 10^a(1 + 10^{b-a} + 10^{c-a})$.
Puisque $b - a$ est un entier strictement positif, alors 10^{b-a} est un entier pair strictement positif.
De même, 10^{c-a} est un entier pair strictement positif, d'où $1 + 10^{b-a} + 10^{c-a}$ est donc un entier impair strictement positif.
Donc, pour des entiers impairs strictement positifs a, b, c et d,

$$S = 10^a(1 + 10^{b-a} + 10^{c-a}) = 10^a \times d = (2 \times 5)^a \times d = 2^a \times 5^a \times d$$

Puisque d est un entier impair, alors 2 n'est pas un facteur premier de d. Donc, le facteur premier 2 parait un nombre impair de fois dans la factorisation première de S (puisque a est impair).
Donc, la somme de chaque choix de trois puissances de 10 différentes de cette liste n'est pas un carré parfait.

4. (a) *Solution 1*
Pour chaque chaine Bauman de longueur 5 dont la première lettre et la dernière lettre sont toutes deux A, les deuxième et quatrième lettres ne sont pas A.
Pour de telles chaines Bauman, soit la troisième lettre est A, soit elle n'est pas A.

1^er cas : La troisième lettre est A.
Dans ce cas, la chaine est de la forme $A\_\_A\_\_A$.
Il y a 4 choix pour la deuxième lettre (B, C, D ou E) et 4 choix pour la quatrième lettre.
Il y a donc $4 \times 4 = 16$ chaines Bauman de cette forme.

2^e cas : La troisième lettre n'est pas A.
Dans ce cas, la chaine est de la forme $A\_\_x\_\_A$. Il y a 4 choix pour la troisième lettre x, soit B, C, D ou E.
La deuxième lettre doit être différente de la troisième et ne doit pas être A, il y a donc 3 choix possibles pour la deuxième lettre.
De même, il y a 3 choix possibles pour la quatrième lettre, il y a donc $4 \times 3 \times 3 = 36$ telles chaines Bauman.

En tout, il y a $16 + 36 = 52$ chaines Bauman de longueur 5 dont la première lettre et la dernière lettre sont toutes deux A.

Solution 2
Pour chaque chaine Bauman de longueur 5 dont la première lettre et la dernière lettre sont toutes deux A, soit les deuxième et quatrième lettres sont pareilles, soit elles sont différentes.

1^er cas : Les deuxième et quatrième lettres sont pareilles.
Dans ce cas, la chaine est de la forme $Ax\_\_xA$.
Il y a 4 choix pour la deuxième lettre (B, C, D ou E) et 1 choix pour la quatrième lettre puisqu'elle est pareille à la deuxième.
La troisième lettre doit être différente de la deuxième et de la quatrième (qui sont les mêmes) et il y a donc 4 choix pour la troisième lettre.
Donc, il y a $4 \times 1 \times 4 = 16$ chaines Bauman de cette forme.

2^e cas : Les deuxième et quatrième lettres sont différentes.
Dans ce cas, la chaine est de la forme $Ax\_\_yA$, x et y représentant des lettres différentes.
Il y a 4 choix pour la deuxième lettre (B, C, D ou E) et 3 choix pour la quatrième lettre (cette lettre est différente de la deuxième lettre et n'est pas A).

La troisième lettre doit être différente de la deuxième et de la quatrième (qui sont différentes) et il y a donc 3 choix pour la troisième lettre.
Donc, il y a $4 \times 3 \times 3 = 36$ chaines Bauman de cette forme.

En tout, il y a $16 + 36 = 52$ chaines Bauman de longueur 5 dont la première lettre et la dernière lettre sont toutes deux A.

(b) *Solution 1*
On peut déterminer de manière indirecte le nombre de chaines Bauman de longueur 6 qui contiennent plus d'un B.
C'est-à-dire qu'on peut soustraire le nombre de chaines Bauman qui contiennent 0 B et le nombre de chaines Bauman qui contiennent exactement 1 B du nombre total de chaines Bauman de longueur 6.

Pour une chaine Bauman de longueur 6 (ayant aucune restriction), il y a 5 choix pour la première lettre et 4 choix pour chacune des lettres restantes. Il y a donc un total de $5 \times 4^5 = 5120$ chaines Bauman de cette forme.

Pour une chaine Bauman de longueur 6 qui contient 0 B, il y a 4 choix pour la première lettre et 3 choix pour chacune des lettres restantes. Il y a donc un total de $4 \times 3^5 = 972$ chaines Bauman de cette forme.

Ensuite, on compte le nombre de chaines Bauman qui contiennent exactement 1 B.
Si la première lettre de la chaine est un B, alors il y a 4 choix pour la deuxième lettre et 3 choix pour chacune des quatre lettres restantes.
De même, si la dernière lettre est un B, alors il y a 4 choix pour la lettre adjacente au B et 3 choix pour chacune des quatre lettres restantes.
Donc, il y a $1 \times 4 \times 3^4 = 324$ chaines qui commencent par un B et 324 chaines qui se terminent par un B.
Si la deuxième lettre de la chaine est un B, alors il y a 4 choix pour la première lettre, 4 choix pour la troisième lettre et 3 choix pour chacune des quatrième, cinquième et sixième lettres.
Il y a donc $4 \times 1 \times 4 \times 3^3 = 432$ chaines Bauman de cette forme.
De même, si la troisième, quatrième ou cinquième lettre de la chaine est un B, alors il y a 432 chaines Bauman de cette forme.

En tout, il y a $5120 - 972 - 2 \times 324 - 4 \times 432 = 1772$ chaines Bauman de longueur 6 qui contiennent plus d'un seul B.

Solution 2
Une chaine Bauman de longueur 6 ne peut pas contenir plus de 3 B (avant de continuer, essayez de voir pourquoi).
On peut déterminer de manière directe le nombre de chaines Bauman de longueur 6 qui contiennent plus d'un B.
C'est-à-dire qu'on peut compter le nombre de chaines qui contiennent exactement 3 B et le nombre de chaines qui contiennent exactement 2 B.
Donc, il y a deux cas à considérer.
<u>1^er^ cas</u> : La chaine Bauman contient exactement 3 B
Dans ce cas, la chaine peut être de l'une des formes suivantes :

$$B\_B\_B\_\,, \qquad B\_B\_\_B, \qquad B\_\_B\_B, \qquad \_\_B\_B\_B.$$

On compte d'abord le nombre de chaines de la forme $B\_B\_B\_$.
Il y a 4 choix pour la deuxième lettre (A, C, D ou E), 4 choix pour la quatrième lettre et

4 choix pour la sixième lettre. Il y a donc $4^3 = 64$ chaines Bauman de cette forme.
De même, il y a $4^3 = 64$ chaines de la forme $\_B\_B\_B$.
Remarquons que $B\_B\_B\_$ et $\_B\_B\_B$ ont des formes identiques lorsque l'une est lue de gauche à droite et l'autre de droite à gauche.
Soient de tels couples de formes des formes *symétriques* et remarquons que, sous les mêmes restrictions, les formes symétriques ont un nombre égal de chaines Bauman.

Pour les chaines de la forme $B\_B\_\_B$, il y a 4 choix pour la deuxième lettre, 4 choix pour la quatrième lettre et 3 choix pour la cinquième lettre (puisque la cinquième lettre doit être différente de B et différente de la quatrième lettre, qui n'est pas B). On a donc $4^2 \times 3 = 48$ chaines Bauman de cette forme.
Puisque $B\_\_B\_B$ est symétrique à $B\_B\_\_B$, alors il y a également $4^2 \times 3 = 48$ chaines de cette forme.
Donc, il y a $2 \times 64 + 2 \times 48 = 224$ chaines Bauman qui contiennent exactement 3 B.

2^e^ cas : La chaine Bauman contient exactement 2 B
Dans ce cas, la chaine peut paraitre de dix formes possibles.
Huit d'entre elles paraissent sous l'une des formes dans les quatre couples symétriques suivants

$$B\_B\_\_\_ \text{ et } \_\_\_B\_B, \qquad B\_\_B\_\_ \text{ et } \_\_B\_\_B,$$

$$B\_\_\_B\_ \text{ et } \_B\_\_\_B, \qquad \_B\_B\_\_ \text{ et } \_\_B\_B\_$$

et les deux dernières formes (qui ne sont pas un couple symétrique) sont

$$B\_\_\_\_B \text{ et}$$

$$\_B\_\_B\_.$$

On compte d'abord le nombre de chaines de la forme $B\_B\_\_\_$.
Il y a 4 choix pour la deuxième lettre (A, C, D ou E), 4 choix pour la quatrième lettre, 3 choix pour chacune des cinquième et sixième lettres. Il y a donc $4^2 \times 3^2 = 144$ chaines Bauman de cette forme.
De même, il y a $4^2 \times 3^2 = 144$ chaines pour chacune des cinq formes suivantes,
$\_\_\_B\_B, B\_\_B\_\_$, $\_\_B\_\_B$, $B\_\_\_B\_$, and $\_B\_\_\_B$.

Pour les chaines de la forme $\_B\_B\_\_$, il y a 4 choix pour la première lettre, 4 choix pour la troisième lettre, 4 choix pour la cinquième lettre et 3 choix pour la sixième lettre. Il y a donc $4^3 \times 3 = 192$ chaines Bauman de cette forme.
Puisque $\_\_B\_B\_$ et $\_B\_B\_\_$ sont symétriques, alors il y a également $4^3 \times 3 = 192$ chaines de cette forme.

Enfin, il y a $4 \times 3^3 = 108$ chaines de la forme $B\_\_\_\_B$ et $4^3 \times 3 = 192$ chaines de la forme $\_B\_\_B\_$.
Donc, il y a $6 \times 144 + 2 \times 192 + 108 + 192 = 1548$ chaines Bauman qui contiennent exactement 2 B.

En tout, il y a $224 + 1548 = 1772$ chaines Bauman de longueur 6 qui contiennent plus d'un seul B.

(c) *Solution 1*
Considérons toutes les chaines Bauman de longueur n qui commencent par C.
Il y a 4 choix pour chacune des $n - 1$ lettres restantes. Il y a donc 4^{n-1} chaines Bauman

de cette forme.
Chacune de ces chaines se termine par D ou ne se termine pas par D.
Soit d_n les chaines qui se terminent par D et soit $|d_n|$ le nombre de chaines de ce type.
De même, soit x_n les chaines qui ne se terminent pas par D et soit $|x_n|$ le nombre de chaines de ce type.
Par exemple, d_1 représente les chaines Bauman de longueur 1 qui commencent par C et se terminent par D. Puisqu'il n'existe aucune chaine de ce type, alors $|d_1| = 0$.
De même, x_1 représente les chaines Bauman de longueur 1 qui commencent par C et ne se terminent pas par D, d'où on a donc $|x_1| = 1$ (la chaine est C).
On peut vérifier que $4^{n-1} = |d_n| + |x_n|$ lorsque $n = 1$ puisque $4^{1-1} = |d_1| + |x_1| = 0 + 1$.
De plus, on sait que $|d_2| = 1$ (la chaine est CD) et $|x_2| = 3$ (les chaines sont CA, CB, CE) et on peut encore une fois vérifier que $4^{2-1} = 1 + 3$.

Considérons ensuite les chaines Bauman de longueur n qui commencent par C et ne se terminent pas par D, soit x_n.
Chacune de ces chaines pourrait se voir ajouter un D à son extrémité pour former une chaine Bauman de longueur $n + 1$ qui commence par C et se termine par D, soit d_{n+1}.
Puisque l'ajout d'un D à la fin de chaque chaine x_n donne toutes les chaines possibles d_{n+1}, alors $|d_{n+1}| = |x_n|$.
D'après notre travail précédent, on peut vérifier que $|d_2| = |x_1| = 1$.

De plus, $|x_{n+1}| = 4|d_n| + 3|x_n|$. Pourquoi est-ce vrai ?
Toute chaine Bauman de longueur $n + 1$ qui commence par C et ne se termine pas par D, soit x_{n+1}, est soit une chaine d_n à laquelle on a ajouté un A, un B, un C ou un E à sa fin, soit une chaine x_n à laquelle on a ajouté un choix de 3 lettres à sa fin (la lettre ajoutée ne peut pas être D et elle ne peut pas être la dernière lettre de x_n, ce qui laisse 3 possibilités).
Le nombre de chaines d_n auxquelles on a ajouté A, B, C ou E à leur fin est égal à $4|d_n|$.
Le nombre de chaines x_n auxquelles on a ajouté un choix de 3 lettres à leur fin est égal à $3|x_n|$.
Donc, on peut conclure que $|x_{n+1}| = 4|d_n| + 3|x_n|$.
D'après notre travail précédent, on peut vérifier que $|x_2| = 4|d_1| + 3|x_1| = 4(0) + 3(1) = 3$.

On utilise ces deux formules $|d_{n+1}| = |x_n|$ et $|x_{n+1}| = 4|d_n| + 3|x_n|$, qui sont équivalentes à $|d_n| = |x_{n-1}|$ et $|x_n| = 4|d_{n-1}| + 3|x_{n-1}|$, pour construire le tableau ci-dessous.

n	$\lvert d_n\rvert = \lvert x_{n-1}\rvert$	$\lvert x_n\rvert = 4\lvert d_{n-1}\rvert + 3\lvert x_{n-1}\rvert$
1	$\lvert d_1\rvert = 0$	$\lvert x_1\rvert = 1$
2	$\lvert d_2\rvert = 1$	$\lvert x_2\rvert = 3$
3	$\lvert d_3\rvert = \lvert x_2\rvert = 3$	$\lvert x_3\rvert = 4\lvert d_2\rvert + 3\lvert x_2\rvert = 4(1) + 3(3) = 13$
4	$\lvert d_4\rvert = \lvert x_3\rvert = 13$	$\lvert x_4\rvert = 4\lvert d_3\rvert + 3\lvert x_3\rvert = 4(3) + 3(13) = 51$
5	$\lvert d_5\rvert = 51$	$\lvert x_5\rvert = 4(13) + 3(51) = 205$
6	$\lvert d_6\rvert = 205$	$\lvert x_6\rvert = 4(51) + 3(205) = 819$
7	$\lvert d_7\rvert = 819$	$\lvert x_7\rvert = 4(205) + 3(819) = 3277$
8	$\lvert d_8\rvert = 3277$	$\lvert x_8\rvert = 4(819) + 3(3277) = 13\,107$
9	$\lvert d_9\rvert = 13\,107$	$\lvert x_9\rvert = 4(3277) + 3(13\,107) = 52\,429$
10	$\lvert d_{10}\rvert = 52\,429$	non nécessaire

Donc, il y a 52 429 chaines Bauman de longueur 10 dont la première lettre est C et la dernière lettre est D.

Solution 2
Soit S_n l'ensemble des chaines Bauman de longueur n dont la première lettre est C et la dernière lettre est D.
De plus, soit $|S_n|$ le nombre de chaines de cette forme.
Par exemple, $S_2 = \{CD\}$ d'où $|S_2| = 1$, et $S_3 = \{CAD, CBD, CED\}$ d'où $|S_3| = 3$.
Chaque chaine dans S_{10} est de la forme $C\_\_\_\_\_\_\_\_\_D$ ou CT_8D, T_8 étant une chaine Bauman de longueur 8 qui ne commence pas par C et ne se termine pas par D.
Donc, $|S_{10}| = |T_8|$. Le nombre de telles chaines, $|T_8|$, est égal au

nombre total de chaines Bauman de longueur 8
$-$ nombre de chaines Bauman de longueur 8 qui commencent par C
$-$ nombre de chaines Bauman de longueur 8 qui se terminent par D
$+$ nombre de chaines Bauman de longueur 8 qui commencent par C et se terminent par D

Remarquons que les chaines commençant par C comprennent celles qui se terminent par D, ainsi que d'autres.
De même, les chaines qui se terminent par D comprennent celles qui commencent par C, ainsi que d'autres.

Puisqu'on a soustrait du total le nombre de chaines qui commencent par C et se terminent par D deux fois, il faut ajouter ce nombre une fois.

Pour une chaine Bauman de longueur 8, il y a 5 choix pour la première lettre et 4 choix pour chacune des 7 lettres restantes.
Donc, il y a 5×4^7 chaines Bauman de longueur 8 en tout.
Pour une chaine Bauman de longueur 8 qui commence par C, il y a 1 choix pour la première lettre et 4 choix pour chacune des 7 lettres restantes.
Donc, il y a en tout 1×4^7 chaines Bauman de longueur 8 qui commencent par C.
De plus, il y a en tout 1×4^7 chaines Bauman de longueur 8 qui se terminent par D.
Le nombre de chaines Bauman de longueur 8 qui commencent par C et se terminent par D est égal à $|S_8|$.
Donc, on a

$$|S_{10}| = |T_8| = 5 \times 4^7 - 1 \times 4^7 - 1 \times 4^7 + |S_8| = 3 \times 4^7 + |S_8|$$

et donc le nombre de chaines Bauman de longueur 10 qui commencent par C et se terminent par D dépend du nombre de chaines Bauman de longueur 8 qui commencent par C et se terminent par D.
À ce point-ci, on pourrait répéter le processus ci-dessus pour déterminer $|S_8|$, cependant, par souci d'efficacité, il faudrait plutôt généraliser le travail ci-dessus pour déterminer une formule pour $|S_n|$.

Pour les entiers $n \geq 3$, chaque chaine dans S_n est de la forme $CT_{n-2}D$, T_{n-2} étant une chaine Bauman de longueur $n-2$ qui ne commence pas par C et ne se termine pas par D.
Le nombre de telles chaines, $|T_{n-2}|$, est égal au

  nombre total de chaines Bauman de longueur $n-2$
$-$ nombre de chaines Bauman de longueur $n-2$ qui commencent par C
$-$ nombre de chaines Bauman de longueur $n-2$ qui se terminent par D
$+$ nombre de chaines Bauman de longueur $n-2$ qui commencent par C et se terminent par D

Pour une chaine Bauman de longueur $n-2$, il y a 5 choix pour la première lettre et 4 choix pour chacune des $n-3$ lettres restantes.
Donc, il y a $5 \times 4^{n-3}$ chaines Bauman de longueur $n-2$ en tout.
Pour une chaine Bauman de longueur $n-2$ qui commence par C, il y a 1 choix pour la première lettre et 4 choix pour chacune des $n-3$ lettres restantes.
Donc, il y a en tout $1 \times 4^{n-3}$ chaines Bauman de longueur $n-2$ qui commencent par C.
De plus, il y a en tout $1 \times 4^{n-3}$ chaines Bauman de longueur $n-2$ qui se terminent par D.
Le nombre de chaines Bauman de longueur $n-2$ qui commencent par C et se terminent par D est égal à $|S_{n-2}|$.
Donc, on a

$$|S_n| = |T_{n-2}| = 5\times4^{n-3} - 1\times4^{n-3} - 1\times4^{n-3} + |S_{n-2}| = 3\times4^{n-3} + |S_{n-2}|, \text{ pour les entiers } n \geq 3.$$

À l'aide de cette formule récursive et le fait que $|S_2| = 1$, on obtient

$$\begin{array}{lllllll}
|S_4| & = & 3 \times 4^{4-3} + |S_{4-2}| & = & 3 \times 4 + |S_2| & = & 13 \\
|S_6| & = & 3 \times 4^{6-3} + |S_{6-2}| & = & 3 \times 4^3 + |S_4| & = & 205 \\
|S_8| & = & 3 \times 4^{8-3} + |S_{8-2}| & = & 3 \times 4^5 + |S_6| & = & 3277 \\
|S_{10}| & = & 3 \times 4^{10-3} + |S_{10-2}| & = & 3 \times 4^7 + |S_8| & = & 52\,429
\end{array}$$

Donc, il y a 52 429 chaines Bauman de longueur 10 dont la première lettre est C et la dernière lettre est D.

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2021

Avril 2021

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

Avril 2021

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2021 University of Waterloo

1. (a) Lorsque $a = 5$ et $b = 1$, alors on a $5\triangle 1 = 5(2 \times 1 + 4) = 5(6) = 30$.

   (b) Si $k\triangle 2 = 24$, alors $k(2 \times 2 + 4) = 24$ ou $8k = 24$, d'où $k = 3$.

   (c) On isole p dans l'équation donnée pour obtenir

$$\begin{aligned} p\triangle 3 &= 3\triangle p \\ p(2 \times 3 + 4) &= 3(2p + 4) \\ p(10) &= 6p + 12 \\ 10p - 6p &= 12 \\ 4p &= 12 \\ p &= 3 \end{aligned}$$

   Donc, $p = 3$ est la seule valeur de p telle que $p\triangle 3 = 3\triangle p$.

   (d) On simplifie l'équation donnée pour obtenir

$$\begin{aligned} m\triangle(m + 1) &= 0 \\ m(2(m + 1) + 4) &= 0 \\ m(2m + 2 + 4) &= 0 \\ m(2m + 6) &= 0 \end{aligned}$$

   Donc, $m = 0$ ou $2m + 6 = 0$, d'où $m = -3$.
   Donc, $m = 0$ et $m = -3$ sont les seules valeurs de m telles que $m\triangle(m + 1) = 0$.
   (On peut reporter chacune de ces valeurs de m dans l'équation pour vérifier : $0\triangle 1 = 0(2 \times 1 + 4) = 0(6) = 0$ et $(-3)\triangle(-2) = -3(2 \times (-2) + 4) = -3(0) = 0$.)

2. (a) L'équipe P a disputé 27 matchs. L'équipe a remporté 10 matchs et a subi 14 défaites.
   Donc, l'équipe P a fait match nul $27 - 10 - 14 = 3$ fois.

   (b) L'équipe Q a remporté 2 victoires de plus que l'équipe P, soit $10 + 2 = 12$ victoires.
   L'équipe Q a subi 4 défaites de moins que l'équipe P, elle a donc subi $14 - 4 = 10$ défaites.
   Puisque l'équipe Q a disputé 27 matchs, alors elle a fait match nul $27 - 12 - 10 = 5$ fois.
   À la fin de la saison, l'équipe Q avait un total de $(2 \times 12) + (0 \times 10) + (1 \times 5)$ ou 29 points.

   (c) *Solution 1*
   Supposons que l'équipe R termine la saison ayant fait match nul 6 fois.
   Puisque 6 matchs nuls rapportent 6 points à leur total de points, alors l'équipe R a gagné les $25 - 6 = 19$ points restants grâce à des victoires.
   Or, puisque chaque victoire rapporte 2 points au total, alors il est impossible de gagner un nombre impair de points à partir de victoires.
   Donc, l'équipe R n'aurait pas pu terminer la saison avec exactement 6 matchs nuls.

   Solution 2
   Supposons que l'équipe R termine la saison ayant remporté w victoires.
   Si l'équipe R avait terminé la saison ayant fait match nul 6 fois, alors ils auraient terminé la saison avec un total de $(2 \times w) + (1 \times 6)$ ou $2w + 6 = 2(w + 3)$ points (il ne gagnent pas de points pour des défaites).
   Puisque w est un entier, alors $w + 3$ est un entier, d'où $2(w + 3)$ est donc un entier pair.
   Or, cela est impossible car l'équipe R a terminé la saison avec 25 points, ce qui est un nombre impair de points.
   Donc, l'équipe R n'aurait pas pu terminer la saison avec exactement 6 matchs nuls.

(d) *Solution 1*

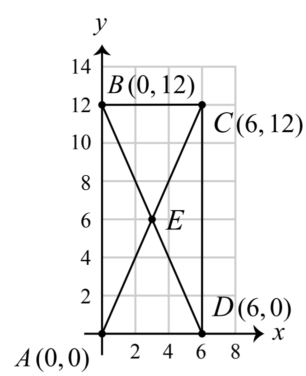
Soit d le nombre de défaites qu'a subi l'équipe S pendant la saison.
L'équipe S avait 4 victoires de plus que de défaites et a donc terminé la saison avec $d + 4$ victoires.
Puisque l'équipe S a disputé 27 matchs, alors ils ont fait match nul $27-d-(d+4) = 23-2d$ fois.
Donc, l'équipe S a terminé la saison avec un total de $(2\times(d+4))+(0\times d)+(1\times(23-2d))$ ou $2d + 8 + 23 - 2d = 31$ points.

Solution 2

Chacune des 4 équipes a disputé 27 matchs. Puisque tout match est disputé par deux équipes, alors il y eut $\frac{4\times 27}{2} = 54$ matchs en tout.
Peu importe le résultat d'un match, chacun des 54 matchs a attribué 2 points en tout aux équipes concernées (soit 2 points à l'équipe gagnante et 0 à l'équipe perdante, soit 1 point à chacune des deux équipes si elles ont fait match nul).
Donc, les 4 équipes ont gagné $2 \times 54 = 108$ points en tout.
D'après le tableau, l'équipe P a terminé la saison avec un total de 23 points tandis que l'équipe R a terminé la saison avec un total de 25 points. De plus, comme on l'a déterminé dans la partie (b), l'équipe Q a terminé la saison avec un total de 29 points.
Donc, l'équipe S a dû terminer la saison avec un total de $108 - 23 - 25 - 29 = 31$ points.

3. (a) *Solution 1*

On trace d'abord le rectangle et on nomme les sommets comme dans la figure ci-contre.



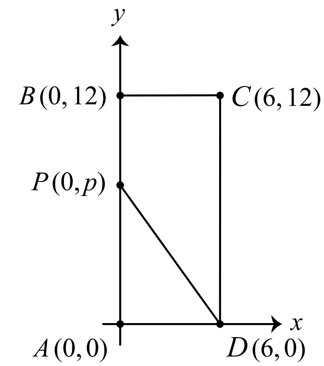
Les diagonales d'un rectangle se coupent au centre du rectangle. Autrement dit, E est le milieu de AC. Donc, l'abscisse de E est égale à la moyenne des abscisses de A et C, soit $\frac{0+6}{2} = 3$.
L'ordonnée de E est égale à la moyenne des ordonnées de A et C, soit $\frac{0+12}{2} = 6$. Donc, E a pour coordonnées $(3, 6)$.
Supposons que $AD = 6$ est la base du triangle ADE. Donc, la hauteur du triangle est égale à la distance entre E et l'axe des abscisses. Le triangle ADE a donc une hauteur de 6.
Donc, le triangle ADE a une aire de $\frac{1}{2}(6)(6) = 18$.

Solution 2

Les diagonales d'un rectangle coupent le rectangle en 4 triangles de même aire. (Avant de continuer, essayez de voir pourquoi cela est vrai.)
Donc, l'aire du triangle ADE est égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire du rectangle $ABCD$, soit $\frac{1}{4}(6)(12) = 18$.

(b) *Solution 1*

On trace le rectangle et le point P et on nomme les sommets comme dans la figure ci-contre.



L'aire du rectangle $ABCD$ est égale à l'aire du trapèze $BCDP$ plus l'aire du triangle PAD.

Puisque l'aire du trapèze $BCDP$ est le double de l'aire du triangle PAD, alors l'aire du triangle PAD est égale à $\frac{1}{3}$ de l'aire de $ABCD$ (tandis que l'aire du trapèze $BCDP$ est égale à $\frac{2}{3}$ de l'aire de $ABCD$).

L'aire du rectangle $ABCD$ est égale à $6 \times 12 = 72$. Donc, l'aire du triangle PAD est égale à $\frac{1}{3} \times 72 = 24$.

L'aire du triangle PAD est égale à $\frac{1}{2}(AD)(AP) = \frac{1}{2}(6)(p) = 3p$.
Donc, $3p = 24$ ou $p = 8$.

Solution 2

Le point P a pour coordonnées $(0, p)$. Donc, $AP = p$ et $BP = 12 - p$.

L'aire du triangle PAD est égale à $\frac{1}{2}(AD)(AP) = \frac{1}{2}(6)(p) = 3p$.

L'aire du trapèze $BCDP$ est égale à $\frac{1}{2}(BC)(BP + CD) = \frac{1}{2}(6)(12 - p + 12) = 3(24 - p)$.

Puisque l'aire du trapèze $BCDP$ est le double de l'aire du triangle PAD, alors $3(24 - p) = 2(3p)$, d'où $24 - p = 2p$ ou $3p = 24$, soit $p = 8$.

(c) L'aire du rectangle $ABCD$ est égale à $6 \times 12 = 72$.

Les deux trapèzes ont des aires dont la somme est égale à l'aire du rectangle $ABCD$.

Puisque les aires des deux trapèzes sont dans un rapport de 5 : 3, alors les aires des deux trapèzes sont $\frac{5}{8} \times 72 = 45$ et $\frac{3}{8} \times 72 = 27$.

(On peut vérifier que $45 : 27 = 5 : 3$ et $45 + 27 = 72$.)

Soit d la droite passant par U, V et W.

Supposons d'abord que d ne passe par aucun des sommets de $ABCD$. Dans ce cas, d coupe soit des côtés opposés de $ABCD$, soit des côtés adjacents de $ABCD$.

Si d coupe des côtés opposés de $ABCD$, alors d coupe $ABCD$ en deux trapèzes, comme souhaité.

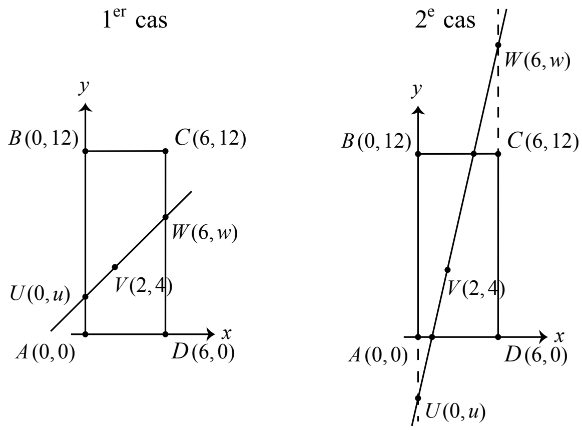
Si d coupe des côtés adjacents de $ABCD$, alors d coupe $ABCD$ en un triangle et un pentagone. Or, cela n'est pas possible.

Supposons que d passe par au moins un sommet de $ABCD$.

Dans ce cas, d coupe $ABCD$ en deux figures dont au moins une est un triangle. Cela n'est également pas possible.

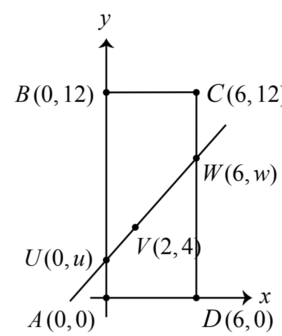
Donc, d coupe des côtés opposés de $ABCD$ et ne passe pas par A, B, C ou D.

Autrement dit, la droite d peut couper des côtés opposés de $ABCD$ de deux manières différentes, comme dans les figures ci-dessous.



Pour chaque cas, puisque la droite d passe par U, V et W en ligne droite, alors la pente de UV est égale à la pente de VW.
Donc,

$$\begin{aligned}\frac{4-u}{2-0} &= \frac{w-4}{6-2}\\ 4(4-u) &= 2(w-4)\\ 2(4-u) &= w-4\\ 8-2u &= w-4\\ w &= 12-2u\end{aligned}$$



1er cas : La droite d coupe les côtés AB et CD.
C'est-à-dire que U est situé entre A et B tandis que W est situé entre C et D.

Dans ce cas, $0 < u < 12$, $0 < w < 12$, $AU = u$ et $DW = w$.
L'aire du trapèze $ADWU$ est

$$\tfrac{1}{2}(AD)(DW + AU) = \tfrac{1}{2}(6)(w+u) = 3(w+u).$$

Puisque $w = 12-2u$, l'aire du trapèze $ADWU$ devient $3(12-u)$.
Considérons chacune des deux possibilités suivantes : l'aire du trapèze $ADWU$ est égale à 27 ou l'aire du trapèze est égale à 45.

Si l'aire du trapèze $ADWU$ est égale à 27, alors

$$\begin{aligned}3(12-u) &= 27\\ 12-u &= 9\\ u &= 3\end{aligned}$$

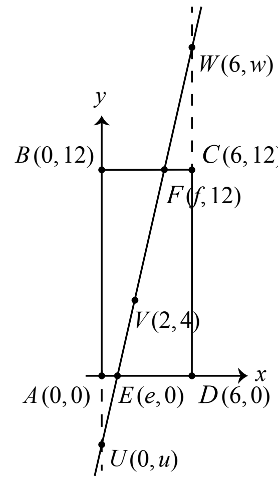
Lorsqu'on reporte $u = 3$ dans l'équation $w = 12-2u$, on obtient $w = 12-6 = 6$.
Les conditions du 1er cas (que $0 < u < 12$ et que $0 < w < 12$) sont remplies. Donc, les aires des deux trapèzes sont dans un rapport de 5 : 3 pour le couple de points $U(0,3)$ et $W(6,6)$.

Si l'aire du trapèze $ADWU$ est égale à 45, alors

$$\begin{aligned}3(12-u) &= 45\\ 12-u &= 15\\ u &= -3\end{aligned}$$

Dans ce cas, la condition $0 < u < 12$ n'est pas remplie. Donc, il n'y a aucun couple de points U et W pour lesquels les aires des deux trapèzes sont dans un rapport de 5 : 3.

2e cas : La droite d coupe les côtés AD et BC.
C'est-à-dire que U est situé sur le prolongement de AB et à l'extérieur de ce dernier tandis que W est situé sur le prolongement de CD et à l'extérieur de ce dernier.



On trace le rectangle et on nomme les points (y compris les points $E(e,0)$ et $F(f,12)$; soit les points où d coupe respectivement les côtés AD et BC) comme dans la figure ci-contre.
Dans ce cas, $u < 0$ et $w > 12$ (comme on le voit dans la figure ci-contre), ou $u > 12$ et $w < 0$ (lorsque U est situé au-dessus de B et lorsque W est situé en dessous de D). Remarquons que ce qui suit est vrai pour chacun de ces deux cas et qu'on n'a donc pas besoin de les considérer séparément.
Dans ce cas, il faut que $0 < e < 6$ et que $0 < f < 6$ pour que $BF = f$ et $AE = e$.
L'aire du trapèze $BFEA$ est donc

$$\tfrac{1}{2}(AB)(BF + AE) = \tfrac{1}{2}(12)(f + e) = 6(f + e).$$

De plus, puisque la droite d passe par E, V et F en ligne droite, alors la pente de EV est égale à la pente de FV.
Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{4-0}{2-e} &= \frac{12-4}{f-2}\\
\frac{4}{2-e} &= \frac{8}{f-2}\\
4(f-2) &= 8(2-e)\\
f-2 &= 2(2-e)\\
f &= 6-2e
\end{aligned}$$

Puisque $f = 6 - 2e$, l'aire du trapèze $BFEA$ devient $6(6 - e)$.
Considérons chacune des deux possibilités suivantes : l'aire du trapèze $BFEA$ est égale à 27 ou l'aire du trapèze est égale à 45.

Si l'aire du trapèze $BFEA$ est égale à 27, alors

$$\begin{aligned}
6(6-e) &= 27\\
6-e &= \tfrac{9}{2}\\
e &= \tfrac{3}{2}
\end{aligned}$$

Lorsqu'on reporte $e = \frac{3}{2}$ dans l'équation $f = 6 - 2e$, on obtient $f = 3$. Les conditions du 2e cas (que $0 < e < 6$ et que $0 < f < 6$) sont remplies.
Donc, on a $E(\frac{3}{2}, 0)$ et $F(3, 12)$. Ces points nous permettront de déterminer U et W.
La pente de FV est égale à $\dfrac{12-4}{3-2} = 8$, d'où le pente de WV est également égale à 8. On a donc $\dfrac{w-4}{4} = 8$, d'où $w = 36$.

De même, la pente de VU est également égale à 8. On a donc $\dfrac{4-u}{2} = 8$, d'où $u = -12$.

Remarquons que $w = 36$ et $u = -12$ remplissent les conditions $w > 12$ et $u < 0$. Donc, les aires des deux trapèzes sont dans un rapport de 5 : 3 pour le couple de points $U(0, -12)$ et $W(6{,}36)$.

Si l'aire du trapèze $BFEA$ est égale à 45, alors

$$\begin{aligned} 6(6-e) &= 45 \\ 6-e &= \tfrac{15}{2} \\ e &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Dans ce cas, la condition $0 < e < 6$ n'est pas remplie. Donc, il n'y a aucun couple de points E et F, et donc aucun couple des points U et W, pour lesquels les aires des deux trapèzes sont dans un rapport de 5 : 3.

Donc, il y a deux couples de points U et W pour lesquels les aires des deux trapèzes sont dans un rapport de 5 : 3. Ces couples sont $U(0, 3)$, $W(6, 6)$ et $U(0, -12)$, $W(6, 36)$.

4. (a) Lorsque $x = 6$, alors $\dfrac{5}{x} + \dfrac{14}{y} = 2$ devient $\dfrac{5}{6} + \dfrac{14}{y} = 2$, d'où $\dfrac{14}{y} = 2 - \dfrac{5}{6}$ ou $\dfrac{14}{y} = \dfrac{7}{6}$, soit $y = 12$.

(b) *Solution 1*
Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{4}{x} + \frac{5}{y} &= 1 \\ \frac{4}{x}(xy) + \frac{5}{y}(xy) &= 1(xy) \qquad (\text{car } xy \neq 0) \\ 4y + 5x &= xy \\ xy - 5x - 4y &= 0 \\ x(y-5) - 4y &= 0 \\ x(y-5) - 4y + 20 &= 20 \\ x(y-5) - 4(y-5) &= 20 \\ (x-4)(y-5) &= 20 \end{aligned}$$

Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, alors $x - 4$ et $y - 5$ sont des entiers qui forment un couple de facteurs de 20.
Puisque $y > 0$, alors $y - 5 > -5$.
Les diviseurs de 20 supérieurs à -5 sont : $-4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 10$ et 20.
Si $y - 5$ est égal à -4, alors $x - 4 = -5$ (puisque $(-5)(-4) = 20$), d'où $x = -1$.
Cela n'est pas possible car x doit être un entier strictement positif.
De même, $y - 5$ ne peut égaler -2 ou -1 (car on obtiendrait $x < 0$ à partir de chacun).
Donc, $y - 5$ est un diviseur positif de 20.
Pour chacun des couples de facteurs positifs de 20, on détermine les valeurs correspondantes de x et y dans le tableau ci-dessous.

Couple de facteurs	$x-4$	$y-5$	x	y
1 et 20	1	20	5	25
20 et 1	20	1	24	6
2 et 10	2	10	6	15
10 et 2	10	2	14	7
4 et 5	4	5	8	10
5 et 4	5	4	9	9

Donc, les couples d'entiers strictement positifs (x, y) qui vérifient l'équation donnée sont $(5, 25)$, $(24, 6)$, $(6, 15)$, $(14, 7)$, $(8, 10)$ et $(9, 9)$.

Solution 2

Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x}+\frac{5}{y} &= 1 \\
\frac{4}{x}(xy)+\frac{5}{y}(xy) &= 1(xy) \qquad (\text{car } xy \neq 0) \\
4y+5x &= xy \\
xy-5x &= 4y \\
x(y-5) &= 4y \\
x &= \frac{4y}{y-5} \quad (y \neq 5) \\
x &= \frac{4y-20+20}{y-5} \\
x &= \frac{4(y-5)+20}{y-5} \\
x &= 4+\frac{20}{y-5}
\end{aligned}$$

Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, alors $y-5$ est un diviseur de 20.
Puisque $y > 0$, alors $y - 5 > -5$.
Les diviseurs de 20 supérieurs à -5 sont : $-4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 10$ et 20.
Si $y-5$ est égal à -4, alors $x = 4+\frac{20}{-4} = -1$. Cela n'est pas possible car x doit être un entier strictement positif.
De même, $y-5$ ne peut égaler -2 ou -1 (car on obtiendrait $x < 0$ à partir de chacun).
Donc, $y-5$ est un diviseur positif de 20.
Pour chacun des diviseurs positifs de 20, on détermine les valeurs correspondantes de y et x dans le tableau ci-dessous.

$y-5$	1	2	4	5	10	20
y	6	7	9	10	15	25
x	24	14	9	8	6	5

Donc, les couples d'entiers strictement positifs (x, y) qui vérifient l'équation donnée sont $(24, 6), (14, 7), (9, 9), (8, 10), (6, 15)$ et $(5, 25)$.

(c) *Solution 1*

Puisque $x \geq 1$ et $y \geq 1$, alors $\dfrac{16}{x} + \dfrac{25}{y} \leq 16 + 25 = 41$. Donc, $5 \leq p \leq 41$. C'est-à-dire que les nombres premiers possibles p proviennent de la liste $5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$ et 41.

Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{16}{x} + \frac{25}{y} &= p \\
\frac{16}{x}(xy) + \frac{25}{y}(xy) &= p(xy) \qquad (\text{car } xy \neq 0) \\
16y + 25x &= pxy \\
pxy - 25x - 16y &= 0 \\
p^2xy - 25px - 16py &= 0 \qquad (\text{car } p > 0) \\
px(py - 25) - 16py &= 0 \\
px(py - 25) - 16py + 400 &= 400 \\
px(py - 25) - 16(py - 25) &= 400 \\
(px - 16)(py - 25) &= 400
\end{aligned}$$

Puisque p, x et y sont des entiers strictement positifs, alors px et py sont des entiers strictement positifs. Donc, $px - 16$ et $py - 25$ sont des entiers qui forment un couple de facteurs de 400.

Puisque $p \geq 5$ et $x \geq 1$, alors $px \geq 5$. Donc, $px - 16 \geq 5 - 16$ ou $px - 16 \geq -11$.

Les diviseurs de 400 qui sont à la fois supérieurs ou égaux à -11 et inférieurs à 0 sont : $-1, -2, -4, -5, -8$ et -10.

Si $px - 16 = -1$, alors $py - 25 = -400$.

Dans ce cas, on obtient $py = -375$, ce qui n'est pas possible car p et y sont tous deux positifs.

On peut montrer de la même manière que $px - 16$ ne peut égaler $-2, -4, -5, -8$ et -10 (car on obtiendrait $py < 0$ à partir de chacun). Donc, $px - 16$ est un diviseur positif de 400. Donc, $py - 25$ l'est aussi.

Pour chacun des couples de facteurs positifs de 400, on détermine les valeurs correspondantes possibles de p dans le tableau ci-dessous.

Rappelons qu'on ne doit considérer que les valeurs possibles de p telles que $5 \leq p \leq 41$.

$px-16$	$py-25$	px	py	Nouveau facteur premier commun de px et py
1	400	17	$425 = 17 \times 25$	17
2	200	18	225	
4	100	$20 = 5 \times 4$	$125 = 5 \times 25$	5
5	80	$21 = 7 \times 3$	$105 = 7 \times 15$	7
8	50	24	75	
10	40	$26 = 13 \times 2$	$65 = 13 \times 5$	13
16	25	32	50	
20	20	36	45	
25	16	41	41	41
40	10	56	35	
50	8	$66 = 11 \times 6$	$33 = 11 \times 3$	11
80	5	96	30	
100	4	$116 = 29 \times 4$	29	29
200	2	216	27	
400	1	416	26	

Les valeurs de p pour lesquelles il y a au moins un couple d'entiers strictement positifs (x, y) qui vérifient l'équation donnée sont $5, 7, 11, 13, 17, 29$ et 41.
Par exemple, on peut vérifier que lorsque $(x, y) = (6, 3)$, alors on a

$$\frac{16}{x} + \frac{25}{y} = \frac{16}{6} + \frac{25}{3} = \frac{16}{6} + \frac{50}{6} = \frac{66}{6} = 11$$

comme dans le tableau ci-dessus.

Solution 2

Puisque $x \geq 1$ et $y \geq 1$, alors $\frac{16}{x} + \frac{25}{y} \leq 16 + 25 = 41$. Donc, $5 \leq p \leq 41$. C'est à dire que les nombres premiers possibles p proviennent de la liste 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 et 41.

Lorsque x est un diviseur positif de 16, alors $\frac{16}{x}$ est un entier strictement positif.

Plus précisément, lorsque $x = 1, 2, 4, 8, 16$, les valeurs de $\frac{16}{x}$ sont respectivement $16, 8, 4, 2, 1$.

De même, lorsque y est un diviseur positif de 25, alors $\frac{25}{y}$ est un entier strictement positif.

Plus précisément, lorsque $y = 1, 5, 25$, les valeurs de $\frac{25}{y}$ sont respectivement $25, 5, 1$.

À l'aide de cette observation, on peut déterminer quelques valeurs de p pour lesquelles il y a au moins un couple d'entiers strictement positifs (x, y) qui vérifient l'équation.

On inscrit ces résultats dans le tableau ci-dessous.

p	x	y	$\dfrac{16}{x}+\dfrac{25}{y}$
5	4	25	$\dfrac{16}{4}+\dfrac{25}{25}=4+1$
7	8	5	$\dfrac{16}{8}+\dfrac{25}{5}=2+5$
13	2	5	$\dfrac{16}{2}+\dfrac{25}{5}=8+5$
17	1	25	$\dfrac{16}{1}+\dfrac{25}{25}=16+1$
29	4	1	$\dfrac{16}{4}+\dfrac{25}{1}=4+25$
41	1	1	$\dfrac{16}{1}+\dfrac{25}{1}=16+25$

De notre liste précédente de valeurs possibles de p, il ne nous reste plus que 11, 19, 23, 31 et 37 à considérer.
Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{16}{x}+\frac{25}{y} &= p \\
\frac{16}{x}(xy)+\frac{25}{y}(xy) &= p(xy) \qquad (\text{car } xy \neq 0) \\
16y+25x &= pxy \\
pxy-25x &= 16y \\
x(py-25) &= 16y \\
x &= \frac{16y}{py-25} \qquad (p \geq 11 \text{ et donc aucun multiple de } p \text{ ne peut égaler } 25)
\end{aligned}$$

Puisque $x>0$, $16y>0$ et $x=\dfrac{16y}{py-25}$, alors $py-25>0$, d'où $py>25$.
De plus, x est un entier, donc $x \geq 1$, d'où $\dfrac{16y}{py-25} \geq 1$.
On simplifie pour obtenir $16y \geq py-25$ ou $py-16y \leq 25$, d'où $y \leq \dfrac{25}{p-16}$ lorsque $p>16$.
À l'aide de cette inéquation, on peut déterminer les restrictions sur y avec chacune des valeurs possibles restantes de p qui sont supérieures à 16, soit $37, 31, 23$ et 19.
Par exemple, si $p=37$, alors $y \leq \dfrac{25}{37-16}$ ou $y \leq \dfrac{25}{21}$, alors $y=1$. Or, lorsque $p=37$ et $y=1$, on obtient $x=\dfrac{16(1)}{37(1)-25}=\dfrac{16}{12}$, ce qui n'est pas un entier. Donc, $p \neq 37$.

On inscrit nos résultats pour $p = 31, 23, 19$ dans le tableau ci-dessous. Remarquons que lorsque $y = 1$ et $p = 23$ ou $p = 19$, alors on a $py < 25$ (on a montré précédemment que $py > 25$). On n'a donc pas besoin de considérer ces deux cas.

p	$y \leq \frac{25}{p-16}$	Valeurs entières possibles de y	Valeurs correspondantes de $x = \frac{16y}{py-25}$
31	$y \leq \frac{25}{31-16} = \frac{25}{15}$	$y = 1$	$x = \frac{16}{6}$
23	$y \leq \frac{25}{23-16} = \frac{25}{7}$	$y = 2{,}3$	$x = \frac{32}{21}, \frac{48}{44}$
19	$y \leq \frac{25}{19-16} = \frac{25}{3}$	$y = 2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7{,}8$	$x = \frac{32}{13}, \frac{48}{32}, \frac{64}{51}, \frac{80}{70}, \frac{96}{89}, \frac{112}{108}, \frac{128}{127}$

Puisqu'il n'y a pas de valeurs entières de x, alors $p \neq 19{,}23{,}31{,}37$.
La dernière valeur à vérifier est $p = 11$.
Comme on l'a remarqué précédemment, $py > 25$, donc lorsque $p = 11$, on obtient $y > \frac{25}{11}$ ou $y \geq 3$ (puisque y est entier). En essayant $y = 3$, on obtient $x = \dfrac{16(3)}{11(3) - 25} = \dfrac{48}{8} = 6$.
Donc, lorsque $p = 11$, $(x, y) = (6{,}3)$ est un couple d'entiers strictement positifs qui vérifient l'équation.
Donc, les valeurs de p pour lesquelles il y a au moins un couple d'entiers strictement positifs (x, y) qui vérifient l'équation sont $5, 7, 11, 13, 17, 29$ et 41.

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2020

le mercredi 15 avril 2020

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 avril 2020

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2020 University of Waterloo

1. (a) Après la première rangée, le nombre de lettres dans chaque rangée est le double du nombre de lettres dans la rangée précédente.
Puisque la Rangée 4 contient 8 lettres, alors la Rangée 5 contient $2 \times 8 = 16$ lettres et la Rangée 6 contient $2 \times 16 = 32$ lettres.

Par ailleurs, on peut aussi prolonger la régularité en y ajoutant les deux prochaines rangées :

Rangée 1	A
Rangée 2	BB
Rangée 3	$AAAA$
Rangée 4	$BBBBBBBB$
Rangée 5	$AAAAAAAAAAAAAAAA$
Rangée 6	$BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB$

(b) Si la régularité est composée de 6 rangées, il y a $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$ lettres en tout.

(c) *Solution 1*
Comme on l'a indiqué dans la partie (b), si la régularité contient 63 lettres au total, la régularité sera donc composée de 6 rangées.
On compte donc le nombre de lettres A, soit $1 + 4 + 16 = 21$, et le nombre de lettres B, soit $2 + 8 + 32 = 42$.

Solution 2
On remarque que le nombre de lettres B dans la Rangée 2 est le double du nombre de lettres A dans la Rangée 1. De plus, le nombre de lettres B dans la Rangée 4 est le double du nombre de lettres A dans la Rangée 3.
De surcroît, de rangée en rangée, on alterne entre les lettres A et B et le nombre de lettres dans chaque rangée est le double du nombre de lettres dans la rangée précédente. Cette régularité se poursuit à travers la suite de rangées.
Donc, si la suite contient un nombre pair de rangées, le nombre total de lettres B sera le double du nombre total de lettres A. Dans ce cas, $\frac{1}{3}$ des lettres de la régularité seront des A et $\frac{2}{3}$ des lettres de la régularité seront des B.
Sachant qu'une régularité composée de 6 rangées contient 63 lettres en tout, la régularité contient donc $\frac{1}{3} \times 63 = 21$ lettres A et $\frac{2}{3} \times 63 = 2 \times 21 = 42$ lettres B.

(d) *Solution 1*
On détermine d'abord le nombre de rangées d'une régularité contenant 4095 lettres.
À cette fin, on peut compter le nombre de lettres A et B dans chaque rangée tout en calculant le total cumulé des lettres dans la régularité après chaque rangée.

Numéro de la rangée	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de lettres A	1	0	4	0	16	0	64	0	256	0	1024	0
Nombre de lettres B	0	2	0	8	0	32	0	128	0	512	0	2048
Total cumulé	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095

Si la régularité contient 12 rangées complètes, il y a 4095 lettres en tout dont $1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 = 1365$ sont des A et $2 + 8 + 32 + 128 + 512 + 2048 = 2730$ sont des B.
Donc, si la régularité contient 4095 lettres au total, il y a une différence de $2730 - 1365 = 1365$ entre le nombre de lettres A et le nombre de lettres B.

Solution 2
On détermine d'abord le nombre de rangées d'une régularité contenant 4095 lettres.
Puisque $4095 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 + 2048$ et qu'on

additionne 12 termes dans le membre de droite de l'équation, alors une régularité contenant 4095 lettres contient exactement 12 rangées complètes.

Puisque 12 est un nombre pair de rangées, on peut utiliser le résultat dans la Solution 2 de la partie (c) afin de déterminer que la régularité contient $\frac{1}{3} \times 4095 = 1365$ lettres A et $\frac{2}{3} \times 4095 = 2 \times 1365 = 2730$ lettres B.

Donc, si la régularité contient 4095 lettres, il y a une différence de $2730 - 1365 = 1365$ entre le nombre de lettres A et le nombre de lettres B.

(Par ailleurs, sachant que $\frac{2}{3}$ des lettres sont des B et que $\frac{1}{3}$ des lettres sont des A, alors la différence entre le nombre de lettres A et le nombre de lettres B est égale à $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ du nombre total de lettres, soit $\frac{1}{3} \times 4095 = 1365$.)

2. (a) Étant donné que l'aire totale d'un prisme droit à base rectangulaire est obtenue par la formule $A = 2L\ell + 2Lh + 2\ell h$, alors un prisme droit à base rectangulaire dont la longueur, la largeur et la hauteur sont, respectivement, 2 cm, 5 cm et 9 cm a une aire totale de $2(2)(5) + 2(2)(9) + 2(5)(9) = 20 + 36 + 90 = 146$ cm^2.

(b) Le volume d'un prisme droit à base rectangulaire est obtenu par la formule $V = L\ell h$.
Si le prisme droit a une base carrée, alors $L = \ell$, d'où $V = L^2h$.
On pose $V = 160$ cm^3 et $h = 10$ cm dans l'équation. On a donc $160 = L^2(10)$ ou $L^2 = 16$, d'où $L = 4$ cm (puisque $L > 0$).
Donc, un prisme droit à base carrée dont la hauteur et le volume sont, respectivement, 10 cm et 160 cm^3 a une base dont les côtés ont une longueur de 4 cm.

(c) Si le prisme droit a une base carrée, alors $L = \ell$.
Puisque la base a une aire de 36 cm^2, alors $36 = L \cdot \ell = L^2$, d'où $L = \ell = \sqrt{36} = 6$ cm (puisque $L > 0$).
Puisque le prisme a une aire totale de 240 cm^2, alors on a $240 = 2(6)(6) + 2(6)h + 2(6)h$ ou $240 = 72 + 24h$, d'où $h = \dfrac{240 - 72}{24} = 7$ cm.
Donc, le volume du prisme est égal à $L\ell h = (6)(6)(7) = 252$ cm^3.

(d) Selon les dimensions du prisme représentées en fonction de k, on peut représenter le volume du prisme par la formule $x = k(2k)(3k)$ ou $x = 6k^3$. De même, on peut représenter l'aire totale du prisme par la formule $x = 2(k)(2k) + 2(k)(3k) + 2(2k)(3k)$ ou $x = 4k^2 + 6k^2 + 12k^2 = 22k^2$.
On reporte $x = 6k^3$ dans $x = 22k^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} 6k^3 &= 22k^2 \\ 6k^3 - 22k^2 &= 0 \\ 2k^2(3k - 11) &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $k > 0$, alors $3k - 11 = 0$, d'où $k = \dfrac{11}{3}$.

3. (a) Le produit original est $2 \times 8 = 16$.
Si on ajoute 1 à 2 et à 8, on obtient 3 et 9 et un nouveau produit de $3 \times 9 = 27$.
Le chiffre des unités du nouveau produit est 1 de plus que le chiffre des unités du produit original ($7 - 6 = 1$).
Le chiffre des dizaines du nouveau produit est 1 de plus que le chiffre des dizaines du produit original ($2 - 1 = 1$).
Puisque l'entier strictement positif $d = 1$ remplit les conditions nécessaires, $(2, 8)$ est un SuperCouple.

(b) Le produit original est $3 \times 6 = 18$.
Si on ajoute 1 à 3 et à 6, on obtient 4 et 7 et un nouveau produit de $4 \times 7 = 28$.

Le chiffre des unités du nouveau produit n'est pas égal à 1 de plus que le chiffre des unités du produit original $(8 - 8 \neq 1)$, donc $d = 1$ ne remplit pas les conditions nécessaires pour que $(3, 6)$ soit un SuperCouple.
Si on ajoute 2 à 3 et à 6, on obtient 5 et 8 et un nouveau produit de $5 \times 8 = 40$.
Le chiffre des unités du nouveau produit n'est pas égal à 2 de plus que le chiffre des unités du produit original $(0 - 8 \neq 2)$, donc $d = 2$ ne remplit pas les conditions nécessaires pour que $(3, 6)$ soit un SuperCouple.
Si on ajoute 3 à 3 et à 6, on obtient 6 et 9 et un nouveau produit de $6 \times 9 = 54$.
Le chiffre des unités du nouveau produit n'est pas égal à 3 de plus que le chiffre des unités du produit original $(4 - 8 \neq 3)$, donc $d = 3$ ne remplit pas les conditions nécessaires pour que $(3, 6)$ soit un SuperCouple.
Si on ajoute 4 à 3 et à 6, on obtient 7 et 10 et un nouveau produit de $7 \times 10 = 70$.
Le chiffre des unités du nouveau produit n'est pas égal à 4 de plus que le chiffre des unités du produit original $(0 - 8 \neq 4)$, donc $d = 4$ ne remplit pas les conditions nécessaires pour que $(3, 6)$ soit un SuperCouple.
Si on ajoute 5 à 3 et à 6, on obtient 8 et 11 et un nouveau produit de $8 \times 11 = 88$.
Le chiffre des unités du nouveau produit n'est pas égal à 5 de plus que le chiffre des unités du produit original $(8 - 8 \neq 5)$, donc $d = 5$ ne remplit pas les conditions nécessaires pour que $(3, 6)$ soit un SuperCouple.
Si on ajoute 6 à 3 et à 6, on obtient 9 et 12 et un nouveau produit de $9 \times 12 = 108$.
Puisque ce nouveau produit n'est pas un entier de deux chiffres, alors $d = 6$ ne remplit pas les conditions nécessaires pour que $(3, 6)$ soit un SuperCouple.
Toutes les valeurs entières de $d > 6$ ont comme résultats des produits supérieurs à 108. Donc, $(3, 6)$ n'est pas un SuperCouple.

(c) *Solution 1*
On a démontré dans la partie (b) que $(3, 6)$ n'est pas un SuperCouple.
Si $x = 1$, alors le produit $1 \times 6 = 6$ n'est pas un entier de deux chiffres. Donc, $(1, 6)$ n'est pas un SuperCouple.
Pour chacune des valeurs restantes, $x = 2, 4, 5, 6$, on essaiera différentes valeurs de d (comme on l'a fait dans la partie (b)), afin de déterminer si $(x, 6)$ est un SuperCouple.
On résume ce travail dans le tableau suivant :

$(x, 6)$	Produit original $6x$	d	Nouveau Produit	SuperCouple ?
$(2, 6)$	12	3	$(2 + 3) \times (6 + 3) = 45$	Oui, puisque $4 - 1 = 5 - 2 = 3$
$(4, 6)$	24	1	$(4 + 1) \times (6 + 1) = 35$	Oui, puisque $3 - 2 = 5 - 4 = 1$
$(5, 6)$	30			Non, aucune valeur de d ne remplit les conditions nécessaires.
$(6, 6)$	36			Non, aucune valeur de d ne remplit les conditions nécessaires.

Donc, les entiers strictement positifs $x \leq 6$ pour lesquels $(x, 6)$ est un SuperCouple sont $x = 2$ et $x = 4$.

Solution 2
Si $(x, 6)$ est un SuperCouple, alors le produit original $6x$ est un entier de deux chiffres que l'on peut exprimer sous la forme $10m + n$, m et n étant des entiers qui vérifient respectivement $1 \leq m \leq 9$ et $0 \leq n \leq 9$.
C'est-à-dire que $6x = 10m + n$. Donc m est le chiffre des dizaines du produit original $6x$

et n est le chiffre des unités.
De plus, si $(x, 6)$ est un SuperCouple, alors il existe un entier strictement positif d tel que :

- le produit $(x + d)(6 + d)$ est un entier de deux chiffres,
- le chiffre des unités du produit $(x+d)(6+d)$ est égal à la somme de d et du chiffre des unités (n) du produit $6x$ et
- le chiffre des dizaines du produit $(x + d)(6 + d)$ est égal à la somme de d et du chiffre des dizaines (m) du produit $6x$.

D'après le deuxième tiret, le produit $(x + d)(6 + d)$ a $n + d$ comme chiffre des unités.
D'après le troisième tiret, le produit $(x + d)(6 + d)$ a $m + d$ comme chiffre des dizaines.
Puisque le produit $(x+d)(6+d)$ a $m+d$ comme chiffre des dizaines et $n+d$ comme chiffre des unités, on a $(x + d)(6 + d) = 10(m + d) + (n + d)$.
On développe les deux membres de l'équation et on reporte $6x = 10m+n$ dans le membre de droite de l'équation :

$$\begin{aligned}
(x + d)(6 + d) &= 10(m + d) + (n + d) \\
6x + xd + 6d + d^2 &= 10m + 10d + n + d \\
6x + xd + 6d + d^2 &= 10m + n + 11d \\
6x + xd + 6d + d^2 &= 6x + 11d \quad \text{(puisque } 6x = 10m + n\text{)} \\
xd + 6d + d^2 &= 11d \\
xd + d^2 &= 5d
\end{aligned}$$

Puisque $d > 0$, on peut diviser chacun des membres de l'équation par d pour obtenir $x + d = 5$.
Si $(x, 6)$ est un SuperCouple, alors $x + d = 5$.
Or, quoique la condition $x + d = 5$ est nécessaire pour que $(x, 6)$ soit un SuperCouple, cette condition ne garantit pas que $(x, 6)$ le sera.
On a vu un tel exemple dans la partie (b) lorsqu'on a démontré que $(3, 6)$ n'était pas un SuperCouple.
Si $x = 3$ et $x + d = 5$, alors $d = 2$.
Or, $3 \times 6 = 18$ et $(3 + 2) \times (6 + 2) = 40$ et puisque $4 - 1 \neq 2$, alors la condition $x + d = 5$ ($x = 3$ et $d = 2$) n'a pas produit un SuperCouple.
Comme on l'a vu dans la Solution 1, $(1, 6)$ n'est pas un SuperCouple puisque $1 \times 6 = 6$ n'est pas un entier de deux chiffres. Il nous reste donc à vérifier $x = 2$, 4, 5, 6.
Si $x = 2$, alors $d = 5 - 2 = 3$, d'où $(2, 6)$ peut être un SuperCouple avec $d = 3$.
Si $x = 4$, alors $d = 5 - 4 = 1$, d'où $(4, 6)$ peut être un SuperCouple avec $d = 1$.
Si $x = 5$, alors $d = 5 - 5 = 0$. Or, $d > 0$. Donc, $(5, 6)$ n'est pas un SuperCouple.
Si $x = 6$, alors $d = 5 - 6 = -1$. Or, $d > 0$. Donc $(6, 6)$ n'est pas un SuperCouple.
On peut vérifier que $(2, 6)$ et $(4, 6)$ sont des SuperCouples (voir la Solution 1).
Les entiers strictement positifs $x \leq 6$ pour lesquels $(x, 6)$ est un SuperCouple sont $x = 2$ et $x = 4$.

(d) Comme dans la Solution 2 de la partie (c), on procède de manière algébrique pour déterminer la condition nécessaire pour que (a, b) soit un SuperCouple mais qui ne garantit pas que (a, b) le sera.
Afin d'obtenir un décompte précis du nombre de SuperCouples, il faut démontrer qu'une valeur spécifique de d satisfait à chacun des critères donnés.

Si (a, b) est un SuperCouple, a et b étant des entiers qui vérifient $a \leq b$, alors le produit original ab est un entier de deux chiffres que l'on peut exprimer sous la forme $10h + k$, h

et k étant des entiers qui vérifient respectivement $1 \leq h \leq 9$ et $0 \leq k \leq 9$.
C'est-à-dire que $ab = 10h + k$. Donc h est le chiffre des dizaines du produit original ab et k est le chiffre des unités.
De plus, si (a, b) est un SuperCouple, alors il existe un entier strictement positif d tel que :

- le produit $(a + d)(b + d)$ est un entier de deux chiffres,
- le chiffre des unités du produit $(a+d)(b+d)$ est égal à la somme de d et du chiffre des unités (k) du produit ab et
- le chiffre des dizaines du produit $(a + d)(b + d)$ est égal à la somme de d et du chiffre des dizaines (h) du produit ab.

D'après le deuxième tiret, le produit $(a + d)(b + d)$ a $k + d$ comme chiffre des unités.
D'après le troisième tiret, le produit $(a + d)(b + d)$ a $h + d$ comme chiffre des dizaines.
Puisque le produit $(a+d)(b+d)$ a $h+d$ comme chiffre des dizaines et $k+d$ comme chiffre des unités, on a $(a + d)(b + d) = 10(h + d) + (k + d)$.
On développe les deux membres de l'équation et on reporte $ab = 10h + k$ dans le membre de droite de l'équation :

$$\begin{aligned}
(a + d)(b + d) &= 10(h + d) + (k + d) \\
ab + ad + bd + d^2 &= 10h + 10d + k + d \\
ab + ad + bd + d^2 &= 10h + k + 11d \\
ab + ad + bd + d^2 &= ab + 11d \\
ad + bd + d^2 &= 11d
\end{aligned}$$

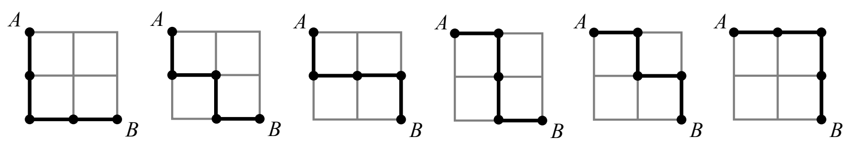
Puisque $d > 0$, on peut diviser chacun des membres de l'équation finale par d pour obtenir $a + b + d = 11$.
Si (a, b) est un SuperCouple, alors $a + b + d = 11$.
Comme avant, quoique la condition $a + b + d = 11$ est nécessaire pour que (a, b) soit un SuperCouple, cette condition ne garantit pas que (a, b) le sera.
Lorsque $a = 1$, il n'y a aucune valeur b telle que ab soit un entier de deux chiffres.
Donc, il n'y a pas de SuperCouples (a, b) avec $a = 1$.
Lorsque $a \geq 6$, alors $a + b > 11$ (puisque $a \leq b$).
Si $a + b > 11$ et $a + b + d = 11$, alors $d < 0$, ce qui n'est pas possible.
Donc, il n'y a pas de SuperCouples (a, b) avec $a \geq 6$.
Dans le tableau ci-dessous, on détermine tous les SuperCouples (a, b) avec $a \leq b$ en utilisant la définition d'un SuperCouple et la condition $a + b + d = 11$.
On peut exclure la vérification de certains couples en se souvenant que :
— $ab \geq 10$, d'où on peut donc exclure des couples tels que $(1, 8)$ et $(2, 4)$
— $a + b < 11$, d'où on peut donc exclure des couples tels que $(2, 9)$ et $(3, 9)$
— $(3, 6)$ n'est pas un SuperCouple, ce qu'on a démontré précédemment

(a,b)	d	ab	$(a+d)(b+d)$	Vérification
$(2,5)$	4	10	$(2+4)\times(5+4)=54$	$5-1=4-0=4$
$(2,6)$	3	12	$(2+3)\times(6+3)=45$	$4-1=5-2=3$
$(2,7)$	2	14	$(2+2)\times(7+2)=36$	$3-1=6-4=2$
$(2,8)$	1	16	$(2+1)\times(8+1)=27$	$2-1=7-6=1$
$(3,4)$	4	12	$(3+4)\times(4+4)=56$	$5-1=6-2=4$
$(3,5)$	3	15	$(3+3)\times(5+3)=48$	$4-1=8-5=3$
$(3,7)$	1	21	$(3+1)\times(7+1)=32$	$3-2=2-1=1$
$(4,4)$	3	16	$(4+3)\times(4+3)=49$	$4-1=9-6=3$
$(4,5)$	2	20	$(4+2)\times(5+2)=42$	$4-2=2-0=2$
$(4,6)$	1	24	$(4+1)\times(6+1)=35$	$3-2=5-4=1$
$(5,5)$	1	25	$(5+1)\times(5+1)=36$	$3-2=6-5=1$

Voici donc les seules possibilités qui satisfont aux critères donnés. Il existe donc 11 SuperCouples (a,b) pour lesquels $a \leq b$.

4. Dans la solution qui suit, un chemin de A à B sera représenté comme une suite de déplacements (soit vers le bas (D), vers le haut (U), vers la droite (R) et vers la gauche (L)) d'un coupement à un autre, commençant à A et se terminant à B.

(a) Chaque chemin dans une grille 2×2 contient un minimum de 2 déplacements vers le bas et 2 déplacements vers la droite (puisque B est situé à 2 arêtes vers le bas et 2 arêtes vers la droite par rapport à A).
Donc, on peut représenter chaque chemin par une suite d'au moins 4 déplacements contenant au moins deux D et deux R.
On détermine d'abord le nombre de chemins de longueur 4 dans une grille 2×2.



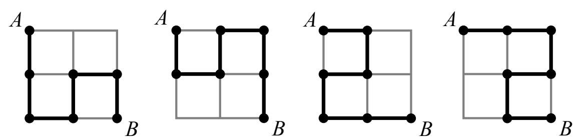
Dans la figure ci-dessus, on voit qu'il y a 6 tels chemins. Ces 6 chemins sont représentés, respectivement, par les suites de déplacements suivantes : $DDRR$, $DRDR$, $DRRD$, $RDDR$, $RDRD$, $RRDD$.
On remarque que ces chemins sont les seules permutations possibles d'exactement deux D et deux R.

Un chemin dans une grille 2×2 peut-il avoir une longueur de 5 ?
Si un chemin contenait un déplacement vers le haut en plus des 2 déplacements vers le bas et 2 déplacements vers la droite requis, alors ce déplacement devrait être « défait » par un déplacement dans la direction opposée, soit un déplacement vers le bas.
C'est-à-dire que le résultat net de chaque chemin devra être de deux D et deux R car chaque U devra être jumelé à un D. De même, chaque L devra être jumelé à un R.
Pour résumer, chaque chemin dans une grille 2×2 doit contenir deux D, deux R, et tout déplacement supplémentaire doit se produire par couples de déplacements opposés, soit U/D ou L/R.
Donc, puisque chaque chemin dans une grille 2×2 contient 4 déplacements (deux D et deux R) et une possibilité de déplacements supplémentaires qui ne se produisent qu'en couples, alors chaque chemin doit être d'une longueur paire.
Donc, un chemin ne peut pas avoir une longueur de 5.

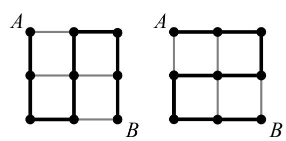
On détermine ensuite le nombre de chemins de longueur 6.
Chacun de ces chemins contient deux D, deux R, et soit un couple U/D soit un couple

L/R.
Combien y a-t-il de permutations de trois R, un L et deux D telles qu'on obtient un chemin de A à B ?
Considérons d'abord le nombre de permutations de trois R et un L (les déplacements horizontaux).
Le L ne peut paraitre devant le premier R ni après le dernier R puisque chacune de ces suites ($LRRR$ et $RRRL$) sortirait de la grille 2×2.
Donc, il y a 2 permutations possibles de ces 4 lettres, soit $RLRR$ et $RRLR$.
On compte ensuite le nombre de positions possibles des deux D dans chacune des suites ci-dessus.
Puisqu'un chemin ne passe pas par un coupement plus d'une seule fois, alors le L ne peut être suivi d'un R et vice-versa (RL ou LR signifient qu'un chemin parcourrait une même arête deux fois dans les deux sens).
Pour cette raison, un D doit être placé de chaque côté du L.
Donc, il y a 2 permutations possibles de trois R, un L et deux D telles qu'on obtient un chemin de A to B, soit $RDLDRR$ et $RRDLDR$.
Un argument semblable peut être avancé pour les permutations de trois D, un U et deux R. Il y a donc 4 chemins de longueur 6 reliant A et B.

Ces 4 chemins, soit $DDRURD$, $DRURDD$, $RDLDRR$ et $RRDLDR$ sont représentés respectivement dans la figure ci-dessous.



Enfin, on détermine le nombre de chemins de longueur 8.



Dans la figure ci-dessus, on voit ces deux tels chemins que l'on représente, respectivement, par les suites de déplacements suivantes : $DDRUURDD$ et $RRDLLDRR$.
Pouvez-vous justifier pourquoi ces chemins sont les seuls chemins de longueur 8 ?

Est-il possible d'avoir un chemin de longueur 10 ou plus ?
La première arête d'un chemin est en contact avec deux coupements et chaque arête supplémentaire du chemin entre en contact avec un nouveau coupement.
Donc, un chemin de longueur 8 passe par $2 + 7 = 9$ coupements (comme on le voit dans les deux grilles ci-dessus) et un chemin de longueur 10 (ou plus) passerait par au moins $2 + 9 = 11$ coupements.
Or, un chemin ne peut passer par un coupement plus d'une seule fois et puisqu'une grille 2×2 ne contient que $3 \times 3 = 9$ coupements, il n'est pas possible d'avoir un chemin de longueur 10 ou plus.

Dans une grille 2×2, il y a $6 + 4 + 2 = 12$ chemins de longueurs quelconques qui relient A et B.

(b) En suivant le raisonnement de la partie (a), un chemin reliant A et B dans une grille 10×10 contient un minimum de 10 déplacements vers le bas et 10 déplacements vers la droite (puisque B est situé à 10 arêtes vers le bas et 10 arêtes vers la droite par rapport à

A).

De plus, tout déplacement supplémentaire doit se produire par couples de déplacements opposés (soit U et D ou L et R), d'où chaque chemin dans une grille 10×10 contient donc 20 déplacements (dix D et dix R) et une possibilité de déplacements supplémentaires qui ne se produisent qu'en couples. Donc, chaque chemin doit être d'une longueur paire.

(c) *Solution 1*

Un chemin reliant A et B dans une grille 4×4 contient un minimum de 4 déplacements vers le bas (quatre D) et 4 déplacements vers la droite (quatre R).

Donc, chaque chemin de longueur 10 contient ces 8 déplacements et exactement un seul couple supplémentaire de déplacements opposés, soit un déplacement vers la gauche jumelé à un déplacement vers la droite, soit un déplacement vers le haut jumelé à un déplacement vers le bas.

C'est-à-dire que chaque chemin contient soit 4 déplacements verticaux (U/D) et 6 déplacements horizontaux (L/R), soit 4 déplacements horizontaux et 6 déplacements verticaux.

Par symétrie, on obtient de chacun de ces deux cas un nombre égal de chemins reliant A et B. On comptera donc le nombre de chemins pour l'un des cas que l'on doublera par la suite afin de déterminer le nombre total de chemins.

Supposons qu'un chemin reliant A et B contient 4 déplacements verticaux et 6 déplacements horizontaux.

Chacun des 4 déplacements verticaux doit être vers le bas.

Cinq des six déplacements horizontaux doivent être vers la droite tandis qu'un seul doit être vers la gauche (quatre déplacements vers la droite et un couple de déplacements opposés gauche/droite).

Donc, chaque chemin contient une suite de 10 lettres (quatre D, cinq R et un L). On peut donc déterminer le nombre de chemins en comptant le nombre de permutations de ces 10 lettres qui correspondent à un chemin qui relie A et B.

Considérons d'abord le nombre de permutations de cinq 5 R et un 1 L (les déplacements horizontaux).

Puisque L ne peut paraitre devant le premier R ni après le dernier R, il y a donc 4 permutations possibles de ces 6 lettres, soit $RLRRRR$, $RRLRRR$, $RRRLRR$ et $RRRRLR$.

On compte ensuite le nombre de positions possibles des quatre D dans chacune des suites ci-dessus.

Puisqu'un chemin ne passe pas par un coupement plus d'une seule fois, alors le L ne peut être suivi d'un R et vice-versa (RL ou LR signifient qu'un chemin parcourrait une même arête deux fois dans les deux sens).

Pour cette raison, un D doit être placé de chaque côté du L, d'où on obtient donc les quatre suites $RDLDRRRR$, $RRDLDRRR$, $RRRDLDRR$ et $RRRRDLDR$.

Dans chacune de ces suites, il nous reste encore deux D à placer.

On peut placer les deux D dans chacune des 4 suites ci-dessus de deux manières : soit les deux D sont placés adjacents l'un à l'autre, soit ils sont placés de manière à ne pas être adjacents.

De combien de manières peut-on placer les deux D s'ils sont adjacents ?

On peut placer les deux D soit devant le premier R ou après le dernier R (donc à 2 endroits), soit entre n'importe quel couple de R adjacents (il y a trois tels couples dans chaque suite), soit entre le R et le D (donc à 1 endroit), soit entre le D et le R (donc à 1 endroit).

Remarquez qu'en plaçant les deux D entre le D et le L (ou entre le L et le D), on obtient la même suite que si l'on plaçait les deux D entre le R et le D (ou entre le D et le R).

Donc, on peut placer deux D adjacents de $2 + 3 + 1 + 1 = 7$ manières dans chacune des 4

suites $RDLDRRRR$, $RRDLDRRR$, $RRRDLDRR$ et $RRRRDLDR$.
De combien de manières peut-on placer les deux D s'ils ne sont pas adjacents ?
Un des D doit être placé dans l'un des 7 emplacements indiqués précédemment (pour la même raison) tandis que le second D peut être placé dans l'un des 6 emplacements restants (de manière qu'il ne soit pas adjacent au premier D).
Puisque ces deux D sont identiques, on n'obtient pas une différente suite si on échange leurs positions dans la suite, il faut donc diviser par 2.

Donc, on peut placer deux D non adjacents de $\frac{7 \times 6}{2} = 21$ manières dans chacune des 4 suites.
En tout, on peut placer deux D de $7 + 21 = 28$ manières dans chacune des 4 suites. Il y a donc $28 \times 4 = 112$ permutations de quatre D, cinq R et un L.
Dans une grille 4×4, il y a donc 112 chemins composés de 4 déplacements verticaux et 6 déplacements horizontaux qui relient A et B.
Un argument semblable peut être avancé pour les permutations de quatre R, cinq D et un U. Il y a donc 112 chemins additionnels composés de 4 déplacements horizontaux et 6 déplacements verticaux.
En tout, il y a $112 \times 2 = 224$ chemins de longueur 10 qui relient A et B dans une grille 4×4.

Solution 2
Un chemin reliant A et B dans une grille 4×4 contient un minimum de 4 déplacements vers le bas (quatre D) et 4 déplacements vers la droite (quatre R).
Donc, chaque chemin de longueur 10 contient ces 8 déplacements et exactement un seul couple supplémentaire de déplacements opposés, soit un déplacement vers la gauche jumelé à un déplacement vers la droite, soit un déplacement vers le haut jumelé à un déplacement vers le bas.
C'est-à-dire que chaque chemin contient soit 4 déplacements verticaux (U/D) et 6 déplacements horizontaux (L/R), soit 4 déplacements horizontaux et 6 déplacements verticaux.
Par symétrie, on obtient de chacun de ces deux cas un nombre égal de chemins reliant A et B. On comptera donc le nombre de chemins pour l'un des cas que l'on doublera par la suite afin de déterminer le nombre total de chemins.

Supposons qu'un chemin reliant A et B contient 4 déplacements verticaux et 6 déplacements horizontaux.
Chacun des 4 déplacements verticaux doit être vers le bas.
Cinq des six déplacements horizontaux doivent être vers la droite tandis qu'un seul doit être vers la gauche (quatre déplacements vers la droite et un couple de déplacements opposés gauche/droite).
Donc, chaque chemin contient une suite de 10 lettres (quatre D, cinq R et un L). On peut donc déterminer le nombre de chemins en comptant le nombre de permutations de ces 10 lettres qui correspondent à un chemin qui relie A et B.
Puisqu'un chemin ne passe pas par un coupement plus d'une seule fois, alors le L ne peut être suivi d'un R et vice-versa (RL ou LR signifient qu'un chemin parcourrait une même arête deux fois dans les deux sens).
De plus, L ne peut être ni le premier ni le dernier déplacement.
Ainsi, L ne peut avoir un R de chaque côté et ne peut être la première ou la dernière lettre.
Donc, l'arrangement DLD doit paraitre dans chaque suite.
Combien y a-t-il de permutations de cinq R, deux D et un DLD ?
Puisqu'on considère que DLD est une seule lettre, alors on a 8 lettres d'où on aurait donc

8! permutations possibles si les 8 lettres étaient distinctes les unes des autres.
Or, puisqu'on a cinq R identiques, chacune des 5! permutations des cinq R parmi les 8 lettres a comme résultat la même suite de déplacements. Il faut donc diviser 8! par 5!.
De même, puisque les deux D sont identiques et qu'on n'obtient pas une différente suite si on échange leurs positions dans la suite, alors il faudra également diviser par 2.
On a donc $\dfrac{8!}{(5!)(2)} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2} = 168$ permutations de cinq R, deux D et un DLD.
Est-ce que chacun de ces 168 chemins est possible ?
Puisqu'un chemin ne peut passer par un coupement plus d'une seule fois, une suite contenant l'arrangement DLD répond bel et bien à ce critère.
De plus, on ne peut avoir une suite qui nous mène à l'extérieur de la grille.
Puisque chaque suite contient exactement quatre D et aucun U, il n'est pas possible que le chemin quitte la grille par le haut ou par le bas.
Cependant, puisque chaque suite de déplacements contient cinq R, le chemin quitterait la grille 4×4 par le côté droit si les cinq R paraissaient tous avant le DLD (c'est-à-dire avant un déplacement vers la gauche).
De même, le chemin quitterait la grille 4×4 par le côté gauche si le DLD paraissait avant qu'un R ne paraisse dans la suite.
Puisque les 168 permutations contiennent les cas que l'on vient d'énoncer, certaines de ces permutations ne sont donc pas possibles.
Il faut donc soustraire de 168 le nombre de telles permutations qui résultent en des chemins qui quittent la grille.
Un chemin peut quitter la grille de deux manières : soit les cinq R paraissent tous avant le DLD dans la suite, soit les cinq R paraissent tous après le DLD (le L parait donc avant le premier R).
Par symétrie, on obtient de chacun de ces deux cas un nombre égal de chemins reliant A et B. On comptera donc le nombre de chemins pour l'un des cas que l'on doublera par la suite afin de déterminer le nombre total de chemins.
Dans combien des 168 suites les cinq R paraissent-ils avant DLD ?
On peut compter ces chemins en considérant les trois cas suivants.

<u>1^{er} cas : les cinq R et les deux D paraissent tous avant DLD</u>

Le nombre de tels chemins est égal au nombre de permutations de cinq R et deux D, soit $\dfrac{7!}{(5!)(2)} = \dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$.

<u>2^e cas : les cinq R et l'un des D paraissent avant DLD (l'autre D parait après DLD)</u>

Le nombre de tels chemins est égal au nombre de permutations de cinq R et un D (puisque l'autre D doit paraitre après DLD et a donc une position spécifiée), soit $\dfrac{6!}{5!} = 6$.

<u>3^e cas : les cinq R paraissent avant DLD tandis que les deux D paraissent après DLD</u>

Il n'y a qu'un tel chemin dans ce cas.

En tout, on a donc $21 + 6 + 1 = 28$ suites dans lesquelles les cinq R paraissent avant DLD et 28 suites dans lesquelles les cinq R paraissent après DLD, soit un total de 56 chemins qui quittent la grille.
Dans une grille 4×4, il y a donc $168 - 56 = 112$ chemins composés de 4 déplacements verticaux et 6 déplacements horizontaux qui relient A et B.
Puisqu'il y a également 112 chemins composés de 4 déplacements horizontaux et 6 déplacements verticaux, alors il y a $112 \times 2 = 224$ chemins en tout de longueur 10 qui relient A et B

dans une grille 4×4.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2019

le mercredi 10 avril 2019
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 11 avril 2019
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2019 University of Waterloo

1. (a) Le total de la commande, selon les prix indiqués dans le menu (donc taxe de vente non comprise), est de 7,50 \$ + 5,00 \$ + 3,00 \$ = 15,50 \$.
Une taxe de vente de 10 % du montant de 15,50 \$ est égale à 15,50 \$ × 0,10 = 1,55 \$.
Donc la facture totale de la commande, incluant la taxe de vente, est égale à 15,50 \$ + 1,55 \$ = 17,05 \$.
Par ailleurs, on aurait pu ajouter la taxe de vente de 10 % directement à la commande en multipliant
15,50 \$ × 1,10 = 17,05 \$.

(b) Un burrito qui coûte 6,00 \$ selon le menu coûtera 6,00 \$ × 1,10 = 6,60 \$ après la taxe de vente de 10 %.
À ce prix, 7 burritos coûteront 6,60 \$ × 7 = 46,20 \$ tandis que 8 burritos coûteront 6,60 \$ × 8 = 52,80 \$.
Puisque Jackson n'a que 50,00 \$ à dépenser, il ne pourra s'acheter que 7 burritos.

(c) Pour s'acheter deux hotdogs lundi, Chase a dépensé 5,00 \$ + 4,50 \$ = 9,50 \$, taxe de vente de 10% non comprise.
Taxe de vente comprise, Chase a donc dépensé 9,50 \$ × 1,10 = 10,45 \$ ce jour-là.

Pour s'acheter deux hotdogs mardi, Chase a dépensé 5,00 \$ + 5,00 \$ = 10,00 \$, taxe de vente de 5% non comprise.
Taxe de vente comprise, Chase a donc dépensé 10,00 \$ × 1,05 = 10,50 \$ ce jour-là.

Ainsi, Chase a dépensé moins d'argent lundi.

2. (a) L'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $y = -2x + 12$ est égale à 12. Donc $OA = 12$.
On pose $y = 0$ dans l'équation de la droite afin de déterminer l'abscisse à l'origine de cette droite. On obtient donc $0 = -2x+12$ ou $2x = 12$ d'où $x = 6$.
L'abscisse à l'origine est ainsi égale à 6. Donc $OB = 6$. Le triangle AOB a donc une aire de $\frac{1}{2}(OB)(OA)$ ou $\frac{1}{2}(6)(12)$ ou 36.

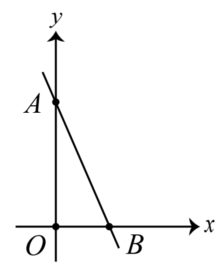


Figure 1

(b) *Solution 1*
On commence en déterminant l'équation de la droite qui passe par O et C.
Cette droite est perpendiculaire à la droite d'équation $y = -2x + 12$, donc sa pente est égale à l'opposé de l'inverse de -2, soit $\frac{1}{2}$.
Puisque cette droite passe par l'origine et qu'elle a une ordonnée à l'origine de 0, son équation est donc $y = \frac{1}{2}x$.

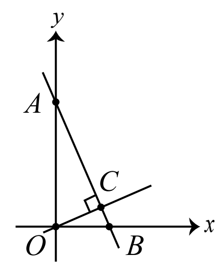


Figure 2

Les droites $y = \frac{1}{2}x$ et $y = -2x + 12$ se coupent en C.
On reporte l'équation de la première droite dans celle de la deuxième. On obtient donc $\frac{1}{2}x = -2x + 12$ ou $\frac{5}{2}x = 12$ d'où $x = \frac{24}{5}$.
On reporte $x = \frac{24}{5}$ dans l'équation $y = \frac{1}{2}x$ afin d'obtenir $y = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{5}\right) = \frac{12}{5}$. Les coordonnées du point C sont donc $\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

Solution 2

Comme dans la Solution 1, on remarque avant tout que l'équation de la droite qui passe par O et C a une pente de $\frac{1}{2}$.

Le point C est situé sur la droite d'équation $y = -2x + 12$. Donc si a est l'abscisse du point C, $-2a + 12$ en sera son ordonnée.

La droite qui passe par $O(0, 0)$ et $C(a, -2a + 12)$ a une pente de $\frac{-2a+12}{a}$. Cette dernière doit être égale à $\frac{1}{2}$.

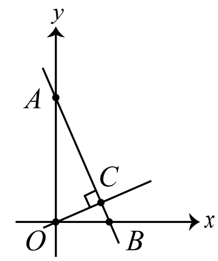


Figure 2

On résout afin d'obtenir $\frac{-2a+12}{a} = \frac{1}{2}$ ou $2(-2a + 12) = a$ ou $24 = 5a$, d'où $a = \frac{24}{5}$.

Lorsque $a = \frac{24}{5}$, on obtient $-2a+12 = -2\left(\frac{24}{5}\right)+12 = -\frac{48}{5}+12 = \frac{12}{5}$. Les coordonnées du point C sont donc $\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

(c) À partir de la partie (b) de la Solution 1, l'équation de la droite qui passe par O et C est $y = \frac{1}{2}x$. Le point D est situé sur cette droite. Donc si n est l'abscisse du point D, $\frac{1}{2}n$ en sera son ordonnée. Les coordonnées du point D sont donc $\left(n, \frac{1}{2}n\right)$.

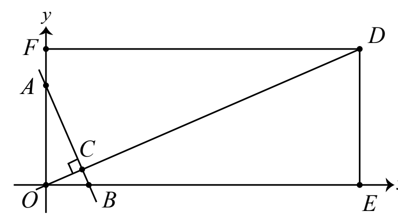


Figure 3

Le point E a la même abscisse que le point D car il est situé en-dessous de ce dernier. C'est-à-dire, les coordonnées du point E sont $(n, 0)$ d'où $OE = n$.

De même, F est situé sur la même droite horizontale que D et a donc la même ordonnée que le point D.

C'est-à-dire, les coordonnées du point F sont $\left(0, \frac{1}{2}n\right)$ d'où $OF = \frac{1}{2}n$.

L'aire de $DEOF$ est égale à 1352. Donc $(OE)(OF) = 1352$ ou $n\left(\frac{1}{2}n\right) = 1352$ ou $n^2 = 2704$, d'où $n = \sqrt{2704} = 52$ (car $n > 0$) et $\frac{1}{2}n = 26$.

Si l'aire de $DEOF$ est égale à 1352, les coordonnées du point D sont donc $(52, 26)$.

3. (a) Autrement dit, cette question cherche à déterminer le plus grand nombre de facteurs 2 dans $9\,!$.

En exprimant $9\,!$ sous la forme d'un produit de ses facteurs premiers, on obtient

$$9! = 9(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1) = (3^2)(2^3)(7)(2 \cdot 3)(5)(2^2)(3)(2)(1)$$

que l'on peut exprimer sous la forme $9! = 7(5)(3^4)(2^7)$. Donc 7 est le plus grand entier positif m qui admettrait 2^m comme diviseur de $9\,!$.

(b) Afin que $n!$ soit divisible par 7^2, il doit contenir au moins deux facteurs 7.

Les multiples de 7 sont les seuls entiers qui ont 7 comme facteur.

Les plus petits multiples positifs de 7 sont 7 et 14, dont chacun ne contribue qu'un seul facteur 7 à la factorisation première de $14\,!$. Donc si $n \leq 13$, alors il est impossible que $n!$ ait deux facteurs 7.

Donc, 14 est la plus petite valeur de n pour laquelle $n!$ est divisible par 7^2.

(c) Un entier positif égal à $n!$ est divisible par 7^7 mais non par 7^8 lorsqu'on retrouve uniquement sept facteurs 7 dans sa factorisation première (cette dernière peut aussi contenir d'autres facteurs premiers).
Les multiples de 7 sont les seuls entiers qui ont 7 comme facteur.
Les six premiers multiples positifs de 7 ($7, 14$,$21, 28, 35, 42$) ont chacun un seul facteur 7 et donc contribuent chacun un seul 7 à la factorisation première de $42\,!$.
C'est-à-dire, $42\,!$ est divisible par 7^6 mais non par 7^7, donc $n > 42$.
La prochaine valeur de $n > 42$ qui est un multiple de 7 (et qui contient donc plus qu'un seul facteur 7 dans sa factorisation première) est 49.
Par contre, 49 contribue deux facteurs 7 supplémentaires à la factorisation première de $49\,!$ (puisque $49 = 7^2$), donc $49\,!$ est divisible par $7^{6+2} = 7^8$.
Pour chaque entier positif $n \geq 49$, $n!$ est divisible par 7^8 (et peut-être même par une puissance plus élevée de 7).
Pour chaque entier positif $n < 49$, la plus grande puissance de 7 par laquelle on peut diviser $n!$ est 7^6.
Donc, il n'y a aucun entier positif n pour lequel $n!$ est divisible par 7^7 mais n'est pas divisible par 7^8.

(d) Les multiples de 13 sont les seuls entiers qui ont 13 comme facteur.
Puisque $n!$ a deux facteurs 13, alors n doit être au moins 26 (un facteur du 13 et un deuxième du 26).
Puisque 29 est un nombre premier qui ne paraît pas dans la factorisation première de $n!$, alors $n \leq 28$.
On remarque que pour chacune des valeurs possibles $n = 26, 27$ et 28, $n!$ a deux facteurs 11, deux facteurs 13 et un seul facteur de chacun des facteurs suivants : 17, 19 et 23.
Dans le tableau ci-dessous, on détermine le nombre de facteurs $2, 3, 5$ et 7 dans $26!$.

Nombres qui contiennent des facteurs 2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
Nombre de facteurs 2 dans chacun	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1

Nombres qui contiennent des facteurs 3	3	6	9	12	15	18	21	24					
Nombre de facteurs 3 dans chacun	1	1	2	1	1	2	1	1					

Nombres qui contiennent des facteurs 5	5	10	15	20	25								
Nombre de facteurs 5 dans chacun	1	1	1	1	2								

Nombres qui contiennent des facteurs 7	7	14	21										
Nombre de facteurs 7 dans chacun	1	1	1										

On se rappelle que $n! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$ et $a + b + c + d = 45$.
Puisque $n!$ a a facteurs 2, alors à partir du tableau ci-dessus, $a = 23$ lorsque $n = 26$.
De même, $26!$ a $b = 10$, $c = 6$ et $d = 3$, d'où $a + b + c + d = 23 + 10 + 6 + 3 = 42$, donc $n \neq 26$.
On détermine ensuite les valeurs de a, b, c, d pour $27!$.
Puisque $27!$ contient non seulement les facteurs premiers de $26!$ mais aussi ceux de $27 = 3^3$,

alors $a + b + c + d = 23 + (10 + 3) + 6 + 3 = 45$, comme il fallait montrer.
Finalement, on détermine les valeurs de a, b, c, d pour $28!$.
Puisque $28!$ contient non seulement les facteurs premiers de $27!$ mais aussi ceux de $28 = 2^2 \cdot 7$, alors $a + b + c + d = (23 + 2) + 13 + 6 + (3 + 1) = 48$, d'où $n \neq 28$.
Ainsi, $n = 27$ est le seul entier positif pour lequel $n! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$ et $a + b + c + d = 45$.

4. (a) Afin qu'un entier positif soit divisible par 10, son chiffre des unités doit être 0.
Afin qu'un entier positif ait un équilibre des chiffres, chaque chiffre d doit y paraître un nombre maximal de d fois.
Dans le cas où $d = 0$, cela signifie qu'un entier positif qui fait preuve d'un équilibre des chiffres aurait un maximum de 0 zéros.
Cela signifie qu'il y a 0 zéros.
Un multiple de 10 ne peut pas avoir un équilibre des chiffres car il contient au moins un 0 comme chiffre (le chiffre des unités).

(b) Chaque entier positif à quatre chiffres peut être exprimé sous l'une des formes suivantes : x, x, x, x ou x, x, x, y ou x, x, y, y ou x, x, y, z ou x, y, z, w, où w, x, y et z sont des chiffres différents.
Dans cette partie, nous excluons la possibilité qu'un chiffre puisse être égal à 0.

Un entier positif de la forme w, x, y, z aura toujours un équilibre des chiffres car aucun des chiffres ne paraît plus d'une seule fois.

Un entier positif de la forme x, x, x, x n'a pas un équilibre des chiffres si $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$. Il y a 3 tels entiers.

Un entier positif de la forme x, x, x, y n'a pas un équilibre des chiffres si $x = 1$ ou $x = 2$ (où y serait tout chiffre autre que 0 et x).
Il y a deux choix pour x, 8 choix pour y (tout chiffre autre que 0 et x) et 4 emplacements possibles pour le chiffre y (milliers, centaines, dizaines ou unités), après quoi les chiffres x sont placés sans autre choix.
Donc, dans ce cas, il y a $2 \times 8 \times 4 = 64$ entiers qui n'ont pas un équilibre des chiffres.

Un entier positif de la forme x, x, y, y n'a pas un équilibre des chiffres si soit $x = 1$ soit $y = 1$. Supposons que $x = 1$ et que $y \neq 1$.
Il y a 8 choix pour y et 6 choix d'emplacements pour x. (Si l'entier a les chiffres $abcd$, alors x pourrait représenter les positions a, b ou a, c ou a, d ou b, c ou b, d ou c, d.)
Donc, dans ce cas, il y a $8 \times 6 = 48$ entiers qui n'ont pas un équilibre des chiffres.

Un entier positif de la forme x, x, y, z n'a pas un équilibre des chiffres si $x = 1$. Dans ce cas, on suppose que $y \neq 1$ que $z \neq 1$ et que $y \neq z$.
Il y a 6 choix d'emplacements pour les deux x. (Si l'entier a les chiffres $abcd$, alors x pourrait représenter les positions a, b ou a, c ou a, d ou b, c ou b, d ou c, d.)
Il y a donc 8 choix pour le chiffre le plus à gauche (tout chiffre autre que 0 et 1) et 7 choix pour le chiffre restant (tout chiffre autre que 0, 1 et y).
Dans ce cas, il y a donc $6 \times 8 \times 7 = 336$ entiers qui n'ont pas un équilibre des chiffres.

Au total, il y a $336+48+64+3 = 451$ entiers à 4 chiffres, dont aucun n'est 0, qui n'auraient pas un équilibre des chiffres.

(c) Supposons que n et m sont des entiers à k chiffres qui ont un équilibre des chiffres et qui vérifient $m + n = 10^k$ où k est aussi grand que possible. Tout d'abord, on va déduire que $k \leq 21$. Après cela, on va expliquer comment créer des entiers à k chiffres qui font preuve d'un équilibre des chiffres et dont la somme est égale à 10^k pour tout entier k où $1 \leq k \leq 21$. Cela démontrera ainsi que la réponse au problème est 21.

On pose $n = n_k n_{k-1} n_{k-2} \cdots n_2 n_1$ et $m = m_k m_{k-1} m_{k-2} \cdots m_2 m_1$ de manière que n_k, n_{k-1}, $\ldots$, n_1 et $m_k, m_{k-1}, \ldots, m_1$ soient respectivement les chiffres de n et de m. On avait énoncé dans la partie (a) qu'un nombre qui a un équilibre des chiffres ne peut pas avoir un 0 comme chiffre. Donc, tous les chiffres de m et n sont des chiffres de 1 à 9.

À partir de $m + n = 10^k$, on remarque que $m_1 + n_1$ doit terminer en 0 et est donc un multiple de 10. Puisque $1 \leq m_1 \leq 9$ et $1 \leq n_1 \leq 9$, on sait donc que $2 \leq m_1 + n_1 \leq 18$. Le seul multiple de 10 dans cet intervalle est 10 lui-même, donc $m_1 + n_1 = 10$. Cela signifie qu'il y a une retenue dans l'addition :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & 1 & \\
 & n_k & n_{k-1} & \cdots & n_4 & n_3 & n_2 & n_1 \\
+ & m_k & m_{k-1} & \cdots & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 \\
\hline
 & & & & & & & 0
\end{array}$$

Dans le chiffre des dizaines, il faut que $n_2 + m_2 + 1$ soit un multiple de 10. Comme dans la situation ci-dessus, $1 \leq n_2 \leq 9$ et $1 \leq m_2 \leq 9$, donc $2 \leq n_2 + m_2 \leq 18$, qui signifie $3 \leq n_2 + m_2 + 1 \leq 19$. Le seul multiple de 10 dans cet intervalle est 10 lui-même, cela signifie que $n_2 + m_2 + 1 = 10$ ou $n_2 + m_2 = 9$.

On continue l'addition :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & 1 & 1 & \\
 & n_k & n_{k-1} & \cdots & n_4 & n_3 & n_2 & n_1 \\
+ & m_k & m_{k-1} & \cdots & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 \\
\hline
 & & & & & & 0 & 0
\end{array}$$

À l'aide du même raisonnement, on sait que $n_3 + m_3 = 9$, que $n_4 + m_4 = 9$ et ainsi de suite.

Pour l'instant, on ne va pas se soucier du chiffre des unités n. On va plutôt porter notre attention sur les chifres allant de n_k à n_2. On va les désigner comme les "premiers $k - 1$ chiffres" de n. De même, on va désigner les chiffres allant de m_k à m_2 comme les premiers $k - 1$ chiffres de m.

Puisque n et m ont tous les deux un équilibre des chiffres, pas plus d'un des premiers $k-1$ chiffres de n ou de m ne peut être égal à 1.

De même, au plus deux des premiers $k - 1$ chiffres de m et de n sont des 2, au plus trois des premiers $k - 1$ chiffres sont des 3 et au plus quatre des premiers $k - 1$ chiffres sont des 4.

Supposons que $n_r = 5$ pour un $r > 1$ quelconque. Donc on doit avoir $m_r = 4$ car $n_r + m_r = 9$. Puisqu'au plus quatre des premiers $k - 1$ chiffres de m peuvent être des 4, cela signifie qu'au plus quatre des premiers $k - 1$ chiffres de n sont des 5.

Si $n_r = 6$ pour un $r > 1$ quelconque, alors $m_r = 3$ car $n_r + m_r = 9$. Puisque m a un équilibre des chiffre, cela signifie qu'au plus trois des premiers $k - 1$ chiffres de n sont des 6.

De même, au plus deux des premiers $k - 1$ chiffres de n sont des 7 et pas plus d'un des premiers $k - 1$ chiffres de n ne peut être égal à 8.

Si $n_r = 9$ pour un $r > 1$ quelconque, alors $m_r = 0$. Mais puisque m a un équilibre des chiffres, aucun de ses chiffres n'est un 0. Donc, aucun des premiers $k - 1$ chiffres de n ne peut être égal à 9.

Le tableau suivant résume le nombre maximal de fois que peut paraître chaque chiffre dans les premiers $k-1$ chiffres de n :

chiffre	le nombre maximal de fois que peut paraître le chiffre dans n
1	1
2	2
3	3
4	4
5	4
6	3
7	2
8	1
9	0

Puisque tous les chiffres de n doivent être des chiffres de 1 à 9, cela signifie que $k-1$ n'est pas plus grand que

$$1+2+3+4+4+3+2+1+0=20$$

Ce qui signifie que $k-1 \leq 20$, donc $k \leq 21$. Ceci établit que si n et m ont tous les deux un équilibre des chiffres, chacun aura k chiffres et, ensembles, ils vérifieront $m+n=10^k$ où $k \leq 21$. On va maintenant expliquer comment créer des entiers à k chiffres qui font preuve d'un équilibre des chiffres et qui remplissent la condition que $1 \leq k \leq 21$.

Afin de créer des entiers, n et m, à 21 chiffres qui font preuve d'un équilibre des chiffres et dont la somme est égale à $m+n=10^{21}$, on doit utiliser le nombre maximal de chaque chiffre dans les 20 premiers chiffres.

Si les chiffres des unités sont $n_1=m_1=5$, cela vérifie $n_1+m_1=10$, et m et n auront chacun que quatre chiffres 5 dans les 20 premiers chiffres. Donc m et n ont un équilibre des chiffres si leurs chiffres des unités sont des 5. Lorsque $k=21$, pouvez-vous voir pourquoi les chiffres des unités de m et de n doivent être des 5 ?

On peut obtenir le résultat souhaité à l'aide de $n_1=m_1=5$. Par exemple :

$$n=877666555544443332215 \quad \text{et} \quad m=122333444455556667785$$

Chacun de ces entiers a 21 chiffres et a un équilibre des chiffres. Leur somme est aussi égale à 10^{21}.

Afin de créer des couples d'entiers, m et n, à k chiffres qui ont un équilibre des chiffres et dont la somme est égale à 10^k (k étant inférieur à 21), on peut tout simplement enlever des chiffres un par un des extrémités gauches de n et de m. Par exemple,

$$n=77666555544443332215 \quad \text{et} \quad m=22333444455556667785$$

est un couple d'entiers à vingt chiffres qui ont un équilibre des chiffres et dont la somme est égale à 10^{20}.

Le couple

$$n=44443332215 \quad \text{et} \quad m=55556667785$$

est un couple d'entiers à onze chiffres qui ont un équilibre des chiffres et dont la somme est égale à 10^{11}.

Le couple $n=5$ et $m=5$ est un couple d'entiers à un chiffre qui ont un équilibre des chiffres et dont la somme est égale à $10=10^1$.

Il existe donc des entiers positifs m et n qui ont un équilibre des chiffres, où m et n ont chacun k chiffres (k étant les entiers de 1 à 21) et qui vérifient $m + n = 10^k$.

Il y a donc 21 valeurs possibles de k.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2018

le jeudi 12 avril 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2018
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2018 University of Waterloo

1. (a) On a $\dfrac{12x^2}{3x} = 4x$ $(x \neq 0)$.

   (b) Puisque $\dfrac{12x^2}{3x} = 4x$, la valeur de l'expression $\dfrac{12x^2}{3x}$ est la même que celle de l'expression $4x$ pour toutes les valeurs de x $(x \neq 0)$.
   Lorsque $x = 5$, cette valeur est égale à $4(5)$, ou 20.

   (c) On simplifie l'expression : $\dfrac{8mn}{3m^2} = \dfrac{8n}{3m}$ $(m \neq 0)$.
   La valeur de l'expression $\dfrac{8mn}{3m^2}$ est la même que celle de l'expression $\dfrac{8n}{3m}$ pour toutes les valeurs de m et de n $(m \neq 0)$.
   On reporte $n = 2m$ dans l'expression $\dfrac{8n}{3m}$. On obtient $\dfrac{8(2m)}{3m} = \dfrac{16m}{3m} = \dfrac{16}{3}$.
   Lorsque $n = 2m$ et que $m \neq 0$, l'expression $\dfrac{8mn}{3m^2}$ a une valeur de $\dfrac{16}{3}$.

   (d) On simplifie l'expression : $\dfrac{8p^2q}{5pq^2} = \dfrac{8p}{5q}$ $(p \neq 0)$, $(q \neq 0)$
   Lorsque $q = 6$, l'expression est égale à $\dfrac{8p}{5q} = \dfrac{8p}{5(6)} = \dfrac{8p}{30} = \dfrac{4p}{15}$.
   Donc lorsque $q = 6$ (et $p \neq 0$) l'expression $\dfrac{8p^2q}{5pq^2}$ est équivalente à l'expression $\dfrac{4p}{15}$.
   L'inéquation $3 \leq \dfrac{8p^2q}{5pq^2} \leq 4$ est donc équivalente à l'inéquation $3 \leq \dfrac{4p}{15} \leq 4$.
   L'inéquation $3 \leq \dfrac{4p}{15} \leq 4$ devient $45 \leq 4p \leq 60$, ou $\dfrac{45}{4} \leq p \leq \dfrac{60}{4}$, ou $11{,}25 \leq p \leq 15$.
   Puisque p est un entier positif, alors $p = 12, 13, 14, 15$.

   Remarque : Dans les parties (b), (c) et (d), on a choisi de simplifier l'expression avant de procéder par substitution. On aurait pu procéder par substitution avant de simplifier.

2. (a) Le triangle ABC est rectangle en B.
   D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Donc $AC^2 = 8^2 + 15^2$, d'où $AC = \sqrt{64 + 225}$ (puisque $AC > 0$), ou $AC = 17$.

   (b) Dans la figure 2, EF est un diamètre. Sa longueur est donc le double de celle du rayon. Il a donc une longueur de 26.
   D'après la deuxième propriété des cercles, $\angle EDF = 90°$.
   D'après le théorème de Pythagore, $DF^2 = EF^2 - DE^2$. Donc $DF^2 = 26^2 - 24^2$, d'où $DF = \sqrt{676 - 576}$ (puisque $DF > 0$), ou $DF = \sqrt{100}$, ou $DF = 10$.

   (c) Puisque SQ est un diamètre, alors $\angle SPQ = \angle SRQ = 90°$.
   Puisque $SP = PQ$, le triangle SPQ est isocèle.
   Donc $\angle PQS = \angle PSQ = \dfrac{180° - 90°}{2} = 45°$.
   Puisque $\angle RQP = 80°$ et que $\angle RQO = \angle RQP - \angle PQS$, alors $\angle RQO = 80° - 45°$, ou $\angle RQO = 35°$.
   Dans le triangle ROQ, $OR = OQ$ (ce sont des rayons). Donc $\angle QRO = \angle RQO = 35°$ et $\angle ROQ = 180° - 2 \times 35°$, ou $\angle ROQ = 110°$.
   Dans le triangle SRQ, on a $\angle RSQ = 180° - \angle SRQ - \angle RQS$.
   Donc $\angle RSQ = 180° - 90° - 35°$, ou $\angle RSQ = 55°$.

3. (a) Le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est égal à $\pi r^2 h$.
Le cylindre A a un rayon de 12 et une hauteur de 25. Son volume est égal à $\pi(12)^2(25)$, ou 3600π.
Avant d'abaisser le cylindre B dans le cylindre A, l'eau dans le cylindre A était à une profondeur de 19. Le volume initial de l'eau dans le cylindre A était donc de $\pi(12)^2(19)$, ou 2736π.
La hauteur du cylindre B (30) est supérieure à celle du cylindre A. Il est donc impossible pour l'eau de verser du cylindre A dans le cylindre B.
Lorsqu'on abaisse le cylindre B jusqu'au fond du cylindre A, la partie du cylindre B qui est à l'intérieur du cylindre A a un rayon de 9 et une hauteur de 25 (la hauteur du cylindre A). Donc, le volume occupé par le cylindre B à l'intérieur du cylindre A est égal à $\pi(9)^2(25)$, ou 2025π.
Puisque l'eau ne peut pas se déverser dans le cylindre B, l'espace disponible pour l'eau dans le cylindre A (et à l'extérieur du cylindre B) est égal à la différence entre le volume du cylindre A et le volume de la partie du cylindre B à l'intérieur du cylindre A, c'est-à-dire à $3600\pi - 2025\pi$, ou 1575π.
Le volume initial de l'eau dans le cylindre A était de 2736π. Lorsque le cylindre B est abaissé jusqu'au fond du cylindre A, l'espace disponible pour l'eau dans le cylindre A est de 1575π.
Donc, le volume d'eau qui se déverse du cylindre A sur le sol est égal à $2736\pi - 1575\pi$, ou 1161π.

(b) Lorsque le cylindre B est abaissé dans le cylindre A, de l'eau se déverse du cylindre A sur le sol lorsque :

(i) le volume de l'eau dans le cylindre A dépasse le volume de l'espace à l'intérieur du cylindre A, mais à l'extérieur du cylindre B et

(ii) le haut du cylindre B est plus haut que celui du cylindre A.
(Voir la figure 1 qui accompagne la question.)

Lorsque le cylindre B est abaissé dans le cylindre A, de l'eau se déverse du cylindre A dans le cylindre B lorsque :

(i) le haut du cylindre B est plus bas que celui du cylindre A et

(ii) le volume de l'eau dans le cylindre A (et à l'extérieur du cylindre B) dépasse le volume de l'espace à l'intérieur du cylindre qui est au-dessous du haut du cylindre B et à l'extérieur du cylindre B et

(iii) le cylindre B n'est pas rempli d'eau.
(Voir la figure 2 qui accompagne la question.)

Dans la figure 3 ci-contre, on a abaissé le cylindre B jusqu'à ce que le haut du cylindre B soit au même niveau que celui du cylindre A.
À ce point, le volume de l'espace à l'intérieur du cylindre A et à l'extérieur du cylindre B est égal à $\pi(12)^2(25) - \pi(9)^2(20)$, ou $3600\pi - 1620\pi$, ou 1980π.
Le volume initial d'eau dans le cylindre A était de 2736π. À ce point, le volume de l'eau qui s'est déversée du cylindre A sur le sol est donc égal à $2736\pi - 1980\pi$, ou 756π.

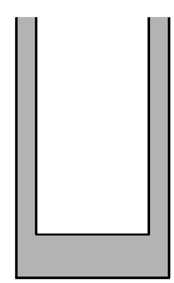


Figure 3

(Puisque le haut du cylindre B n'est pas au-dessous du haut du cylindre A, aucune eau ne s'est encore déversée du cylindre A dans le cylindre B.)
À mesure que le cylindre B est abaissé plus bas, à partir de ce point, de l'eau sera déversée dans le cylindre B. Combien d'eau sera déversée dans le cylindre B ?

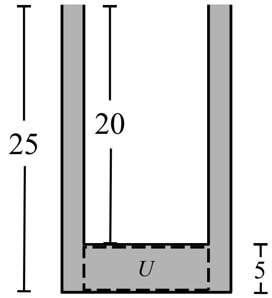


Figure 4

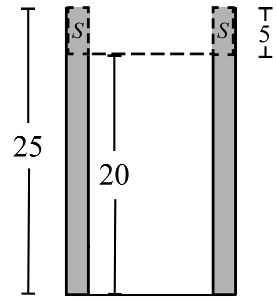


Figure 5

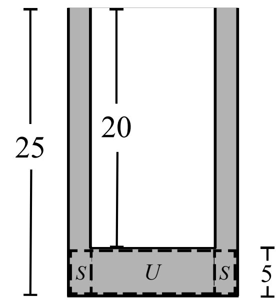


Figure 6

Dans la figure 4, l'eau qui est située sous le cylindre B (indiquée par U) sera déplacée par le cylindre B lorsqu'il sera abaissé jusqu'au fond du cylindre A.
Cette eau sera déversée dans le cylindre B (puisque le haut du cylindre B sera plus bas que le haut du cylindre A).
La partie U a la forme d'un cylindre de rayon 9 (celui du cylindre B) et de hauteur 5 $(25 - 20 = 5)$.
La partie U a donc un volume égal à $\pi(9)^2(5)$, ou 405π.
De plus, l'eau dans la partie S, dans la figure 5, sera aussi déversée dans le cylindre B à mesure que le cylindre B est abaissé jusqu'au fond du cylindre A.
La partie S a la forme d'un anneau cylindrique à l'intérieur du cylindre A et à l'extérieur du cylindre B, avec une hauteur de 5 $(25 - 20 = 5)$. Cette partie S a donc un volume égal à $\pi(12)^2(5) - \pi(9)^2(5)$, ou 315π.
Le volume de l'eau qui est déversée du cylindre A dans le cylindre B est égal à $405\pi + 315\pi$, ou 720π.
La profondeur p de l'eau dans le cylindre B, lorsqu'il se trouve au fond du cylindre A, est obtenue au moyen de l'équation $\pi(9)^2(p) = 720\pi$, d'où $p = \dfrac{720\pi}{81\pi}$, ou $p = \dfrac{80}{9}$.

Remarque : On aurait pu déterminer le volume de l'eau qui est déversée dans le cylindre B en remarquant que le volume de la partie S (dans la figure 5), est égal au volume de l'eau qui entoure la section U (voir la figure 6).
Puisque la section U et la section S ont la même hauteur de 5, leur volume total est celui d'un cylindre de rayon 12 et hauteur 5. Ce volume est égal à $\pi(12)^2(5)$, ou 720π, comme dans le premier calcul.

(c) *Solution 1*

On détermine d'abord les valeurs de h pour lesquelles une certaine quantité d'eau est déversée du cylindre A lorsque le cylindre B est abaissé jusqu'au fond du cylindre A.
On considère qu'on abaisse le cylindre B dans le cylindre A jusqu'à ce que le niveau de l'eau atteigne le haut du cylindre A, comme dans la figure 7 (on sait que cela arrive pour certaines valeurs de h, puisque ça s'est produit dans la partie (a)).
Soit y la hauteur entre les fonds des cylindres. La distance entre le haut du cylindre A et le fond du cylindre B est donc égale à $25 - y$.

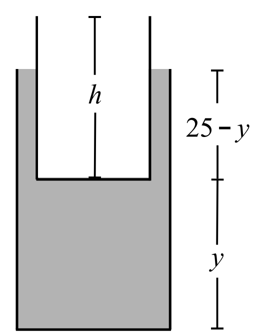


Figure 7

Le volume V_e de l'eau est égal au volume de la partie du cylindre A située plus bas que le fond du cylindre B, soit $\pi(12)^2(y)$, plus le volume à l'intérieur du cylindre A et à l'extérieur du cylindre B entre le haut du cylindre A et le fond du cylindre B, ou $\pi(12)^2(25 - y) - \pi(9)^2(25 - y)$, ou $\pi(12^2 - 9^2)(25 - y)$.
Donc, $V_e = \pi(12)^2(y) + \pi(12^2 - 9^2)(25 - y)$, ou $V_e = 144\pi y + 63\pi(25 - y)$, ou $V_e = 81\pi y + 1575\pi$.

D'après la partie (a), le volume initial de l'eau est égal à 2736π.
On a donc $81\pi y + 1575\pi = 2736\pi$, ou $81\pi y = 1161\pi$, d'où $y = \frac{43}{3}$.
Donc lorsque $h > 25 - y$, c'est-à-dire lorsque $h > 25 - \frac{43}{3}$, ou $h > \frac{32}{3}$, l'eau sera déversée du cylindre A sur le sol.
Qu'arrive-t-il lorsque $h \leq \frac{32}{3}$?
Lorsque $h \leq \frac{32}{3}$, le cylindre B peut être abaissé jusqu'à ce que son haut soit au même niveau que le haut du cylindre A sans que de l'eau ne soit déversée du cylindre sur le sol.
Dans ce cas, lorsque $h \leq \frac{32}{3}$, on a $y \geq 25 - \frac{32}{3}$, ou $y \geq \frac{43}{3}$, et ainsi $y > h$.
C'est-à-dire que lorsque le cylindre B est abaissé jusqu'à ce que son haut soit au même niveau que le haut du cylindre A, le volume d'eau qui se trouve directement en dessous du cylindre B est supérieur au volume du cylindre B et le cylindre B sera donc complètement rempli d'eau lorsqu'il sera rendu au fond du cylindre A.
Dans cette question, le cylindre B ne doit pas être plein. Il faut donc que $h > \frac{32}{3}$ et de l'eau sera déversée du cylindre A au sol avant que le haut du cylindre B n'atteigne le niveau du haut du cylindre A.

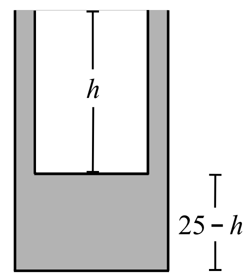


Figure 8

Ensuite, on restreint davantage les valeurs de h de manière que lorsque le cylindre B atteint le fond du cylindre A, il y aura de l'eau dans le cylindre B sans qu'il soit plein.
On abaisse le cylindre B jusqu'à ce que les hauts des deux cylindres soient au même niveau (on aura donc $h \leq 25$).
Or, de l'eau a déjà été déversée du cylindre A.
Lorsque le cylindre B est abaissé plus bas que ce point (il faut alors que $h < 25$), de l'eau sera déversée du cylindre A dans le cylindre B (et non pas sur le sol).
Dans la partie (b), on a vu que lorsque le cylindre B est abaissé jusqu'au fond du cylindre A, le volume de l'eau qui est déversée du cylindre A dans le cylindre B est égal au volume de l'eau dans le cylindre A située au-dessous du cylindre B (comme dans la figure 8).
Elle forme un cylindre de rayon 12 et de hauteur $25 - h$ et elle a donc un volume égal à $\pi(12)^2(25 - h)$.
On suppose que l'eau qui a été déversée dans le cylindre B occupe une profondeur d dans ce cylindre.
Une fois que le cylindre B a été abaissé jusqu'au fond du cylindre A, le volume d'eau dans le cylindre B, soit $\pi(9)^2(d)$, doit être égal à $\pi(12)^2(25 - h)$.
On a donc $81\pi d = 144\pi(25 - h)$, ou $d = \dfrac{3600 - 144h}{81}$, ou $d = \dfrac{400 - 16h}{9}$.
La profondeur de l'eau dans le cylindre B doit être inférieure à la hauteur du cylindre B (le cylindre B ne peut pas être plein). On a donc $d < h$, ou $\dfrac{400 - 16h}{9} < h$, ou $400 - 16h < 9h$, ou $400 < 25h$, ou $16 < h$.
On a vu, ci-haut, que l'eau ne peut être déversée dans le cylindre B à moins que la hauteur du cylindre B soit inférieure à celle du cylindre A. On a donc $h < 25$.
Lorsque le cylindre est abaissé jusqu'au fond du cylindre A, il y a de l'eau dans le cylindre B, sans qu'il soit plein, lorsque $16 < h < 25$.

Solution 2
Soit V_A le volume du cylindre A, V_B le volume du cylindre B et V_E le volume initial de l'eau.
Comme dans la solution 1, on a $V_A = 3600\pi$, $V_B = 81\pi h$ et $V_E = 2736\pi$.

Si $V_E + V_B > V_A$, l'eau est déversée du cylindre A sur le sol.
Cela se produit lorsque $2736\pi + 81\pi h > 3600\pi$, ou $81\pi h > 864\pi$, ou $h > \frac{32}{3}$.
Si $\frac{32}{3} < h < 25$, l'eau est déversée sur le sol, puis dans le cylindre B. (Si $h \leq \frac{32}{3}$, B sera alors rempli d'eau, puisqu'aucune quantité d'eau n'est déversée sur le sol et la hauteur de B est inférieure à la profondeur initiale de l'eau.)
Supposons que $\frac{32}{3} < h < 25$.
Le volume de l'eau qui est déversée du cylindre A sur le sol sera égal à :

$$V_{\text{eau au sol}} = V_E + V_B - V_A = 81\pi h - 864\pi$$

Lorsque les hauts des cylindres sont au même niveau (figure 9), aucune quantité d'eau n'a été déversée dans le cylindre B. Le volume de l'eau dans le cylindre A est alors égal au volume initial de l'eau moins le volume de l'eau déversée sur le sol.

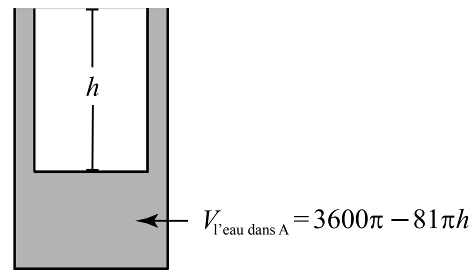


Figure 9

Donc :

$$V_{\text{eau dans A}} = 2736\pi - V_{\text{eau au sol}} = 2736\pi - (81\pi h - 864\pi) = 3600\pi - 81\pi h$$

À partir de ce point, toute l'eau reste dans le cylindre B ou dans le cylindre A.
Lorsque le cylindre B arrive au fond du cylindre A (figure 10), le volume de l'eau à l'extérieur du cylindre B (mais à l'intérieur du cylindre A), est le volume de la partie du cylindre A située plus bas que le haut du cylindre B moins le volume du cylindre B.

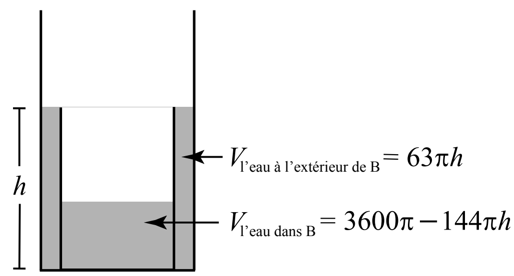


Figure 10

Donc :

$$V_{\text{eau hors de B}} = \pi(12^2)h - \pi(9^2)h = 63\pi h$$

De plus, le volume d'eau dans le cylindre A, soit $3600\pi - 81\pi h$, doit être égal au volume d'eau à l'extérieur de B plus le volume d'eau dans le cylindre B.
Donc :

$$\begin{aligned} V_{\text{eau dans A}} &= V_{\text{eau hors de B}} + V_{\text{eau dans B}} \\ V_{\text{eau dans B}} &= V_{\text{eau dans A}} - V_{\text{eau hors de B}} \\ &= 3600\pi - 81\pi h - 63\pi h \\ &= 3600\pi - 144\pi h \end{aligned}$$

Le volume de l'eau dans le cylindre B doit être inférieur au volume du cylindre B.
Donc $3600\pi - 144\pi h < 81\pi h$, ou $3600\pi < 225\pi h$, ou $16 < h$.
Lorsque le cylindre est abaissé jusqu'au fond du cylindre A, il y a de l'eau dans le cylindre B, sans qu'il soit plein, lorsque $16 < h < 25$.

4. (a) On peut exprimer 45 comme somme de un ou de plusieurs entiers consécutifs strictement positifs comme suit :

45, 22+23, 14+15+16, 7+8+9+10+11, 5+6+7+8+9+10, et 1+2+3+4+5+6+7+8+9

Il n'y a aucune autre façon de le faire.
Donc $C(45) = 6$.

(b) La somme des entiers de 1 à n est égale à $\frac{1}{2}n(n+1)$.
La somme des entiers de 4 à n ($n \geq 4$) est égale à la somme des entiers de 1 à n moins celle des entiers de 1 à 3. Cette dernière est égale à 6 ($1+2+3=6$).
Donc :

$$\begin{aligned} m &= 4+5+6+\cdots+n \\ &= \tfrac{1}{2}n(n+1)-6 \\ &= \tfrac{1}{2}(n(n+1)-12) \\ &= \tfrac{1}{2}(n^2+n-12) \\ &= \tfrac{1}{2}(n-3)(n+4). \end{aligned}$$

Puisque $m = \frac{1}{2}(n+a)(n+b)$ $(a < b)$, alors $a = -3$ et $b = 4$.

(c) Si $m = (a+1)+(a+2)+\cdots+n$, ($a \geq 0$ et $n \geq a+1$), alors m est égal à la somme des entiers de 1 à n moins la somme des entiers de 1 à a.
Donc $m = \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}a(a+1)$.
On transforme pour obtenir :

$$\begin{aligned} m &= \tfrac{1}{2}n(n+1) - \tfrac{1}{2}a(a+1) \\ &= \tfrac{1}{2}(n^2+n-a^2-a) \\ &= \tfrac{1}{2}(n^2-a^2+n-a) \\ &= \tfrac{1}{2}((n-a)(n+a)+n-a) \\ &= \tfrac{1}{2}(n-a)(n+a+1) \end{aligned}$$

Chaque couple d'entiers (a,n) ($a \geq 0$ et $n \geq a+1$) pour lequel $m = \frac{1}{2}(n-a)(n+a+1)$ donne une somme unique d'un ou plusieurs entiers de $a+1$ à n dont la somme est égale à m.
On doit déterminer le nombre de tels couples (a,n), sachant que $m = 2 \times 3^4 \times 5^6$.
Puisque $m = \frac{1}{2}(n-a)(n+a+1)$, alors $2m = (n-a)(n+a+1)$.
Donc, $2m$ peut être exprimé comme produit de deux entiers strictement positifs, $n+a+1$ et $n-a$.
La différence de ces deux entiers est égale à $(n+a+1)-(n-a)$, ou $2a+1$, qui est un entier impair pour tous entiers a ($a \geq 0$).
Puisque la différence de $n+a+1$ et $n-a$ est impaire, un de ces deux entiers doit être pair et l'autre doit être impair (on dit qu'ils sont de *parités* différentes).
Donc, l'évaluation de $C(m)$ semble équivalente au problème de compter le nombre de couples de facteurs de $2m$ ($n+a+1$ et $n-a$) qui ont une parité différente.
On a montré que chaque couple d'entiers (a,n) ($a \geq 0$ et $n \geq a+1$) pour lequel $m = \frac{1}{2}(n-a)(n+a+1)$ nous donne un couple d'entiers de parités différentes.
On doit démontrer que la proposition réciproque est vraie, c'est-à-dire que chaque couple de facteurs de parités différentes donne un couple unique (a,n).
Supposons que $2m = d \cdot e$, d étant un entier positif impair et e étant un entier pair strictement positif.

On montre que ces deux entiers donneront un couple (a, n).
Si $d > e$, soit $d = n + a + 1$ et $e = n - a$ (puisque $n + a + 1 > n - a$).
On additionne les équations $n+a+1 = d$ et $n-a = e$, membre par membre, pour obtenir $2n + 1 = d + e$, ou $n = \frac{1}{2}(d + e - 1)$.
On soustrait les deux mêmes équations, membre par membre, pour obtenir $2a+1 = d-e$, ou $a = \frac{1}{2}(d - e - 1)$.
Puisque d et e sont de parités différentes, alors $d+e$ et $d-e$ sont impairs. Donc $d+e-1$ et $d - e - 1$ sont pairs.
Donc, $n = \frac{1}{2}(d + e - 1)$ et $a = \frac{1}{2}(d - e - 1)$ sont des entiers et $n > a$.
(En supposant que $d < e$, un argument semblable montre qu'il existe des entiers a et n $(n > a)$.)
En d'autres mots, chaque couple de facteurs (d, e) de parités différentes donne un couple unique (a, n) $(n > a)$.
Ceci confirme que l'évaluation de $C(m)$ est équivalente au problème de compter le nombre de couples de facteurs de $2m$ de parités différentes.

Avant d'évaluer $C(2 \times 3^4 \times 5^6)$, on utilise ce résultat à la partie (a) pour confirmer que $C(45) = 6$ et pour démontrer que pour chaque facteur impair de 2×45, il existe une liste unique correspondante d'entiers consécutifs strictement positifs avec une somme de 45.

Puisque $m = 45 = 3^2 \times 5$, alors $2m = 2 \times 3^2 \times 5$. Les facteurs impairs de $2 \times 3^2 \times 5$ doivent être de la forme $3^i \times 5^j$ $(0 \leq i \leq 2$ et $0 \leq j \leq 1)$, car les nombres impairs doivent n'avoir que des diviseurs impairs.
Puisqu'il y a 3 choix pour i (0, 1 ou 2) et 2 choix pour j (0 ou1), il y a 6 facteurs impairs $(3 \times 2 = 6)$ de $2 \times 3^2 \times 5$ (ce sont $1, 3, 5, 9, 15$ et 45).
On démontre ensuite que chacun de ces facteurs impairs correspond à un couple unique (a, n) tel que :

(i) $(n - a)(n + a + 1) = 2 \times 45$ et

(ii) $n + a - 1$ et $n - a$ sont de parités différentes et

(iii) $(a + 1) + (a + 2) + \cdots + n = 45$.

Les facteurs impairs $1, 3, 5, 9, 15$ et 45 donnent les couples $(1, 90), (3, 30), (5, 18), (9, 10), (15, 6)$ et $(45, 2)$ (on remarque que les deux nombres de chaque couple sont bien de parités différentes).
On remarque aussi que puisque $a \geq 0$, alors $n + a + 1 > n - a$. Ainsi, par exemple avec le couple (5,18), on a $n - a = 5$ et $n + a + 1 = 18$.
L'addition de ces deux équations, membre par membre, donne $2n + 1 = 23$, d'où $n = 11$ et $a = 6$.
Ce couple $(6, 11)$ donne la somme $7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 45$.
On résume ces résultats dans le tableau suivant en utilisant les autres couples.

Couple	$a - n$	$a + n + 1$	n	a	$(a + 1) + (a + 2) + \cdots + n$
$(1, 90)$	1	90	45	44	45
$(3, 30)$	3	30	16	13	$14 + 15 + 16 = 45$
$(5, 18)$	5	18	11	6	$7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 45$
$(9, 10)$	9	10	9	0	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$
$(15, 6)$	6	15	10	4	$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$
$(45, 2)$	2	45	23	21	$22 + 23 = 45$

En comparant le tableau et la réponse de la partie (a), on voit bien que pour chaque facteur impair de 2×45, il existe une liste unique d'entiers consécutifs strictement positifs ayant une somme de 45.

On évalue maintenant $C(2 \times 3^4 \times 5^6)$, c'est-à-dire qu'on compte le nombre de facteurs impairs de $2^2 \times 3^4 \times 5^6$.
Les facteurs impairs de $2^2 \times 3^4 \times 5^6$ sont de la forme $3^i \times 5^j$ ($0 \leq i \leq 4$ et $0 \leq j \leq 6$).
Puisqu'il y a 5 choix pour i et 7 choix pour j, il y a 35 facteurs impairs ($5 \times 7 = 35$) de $2^2 \times 3^4 \times 5^6$. Donc $C(2 \times 3^4 \times 5^6) = 35$.

(d) On cherche le plus petit entier strictement positif k pour lequel $C(k) = 215 = 5 \times 43$ (5 et 43 sont des nombres premiers).
Si $k = 2^a$, a étant un entier non négatif, alors $C(k) = 1$ et k doit donc avoir des facteurs premiers impairs $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Pourquoi ?
Ainsi $k = 2^a \cdot p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdots p_n^{q_n}$ p_i ($1 \leq i \leq n$) étant des nombres premiers distincts et q_j ($1 \leq j \leq n$) des entiers positifs.
D'après la partie (c), on sait que $C(k) = (q_1 + 1)(q_2 + 1) \cdots (q_n + 1)$.
Puisque $C(k) = 5 \times 43 = (q_1+1)(q_2+1) \cdots (q_n+1)$, posons $n = 2$ et $q_1+1 = 5$, c'est-à-dire $q_1 = 4$ et $q_2 + 1 = 43$, ou $q_2 = 42$.
Pour que k soit un minimum, posons $a = 0$ et on choisit le plus petit des facteurs premiers impairs $p_1 = 5$ et $p_2 = 3$ ($p_1 = 3$ et $p_2 = 5$ donnent $k = 3^4 \times 5^{42}$, ce qui est une valeur beaucoup plus grande de k).
Le plus petit entier strictement positif k for pour lequel $C(k) = 215$ est $k = 5^4 \times 3^{42}$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2017

le mercredi 12 avril 2017
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 13 avril 2017
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2017 University of Waterloo

1. (a) Dans la boite E, 6 des 30 tasses sont mauves.
Dans la boite E, le rapport du nombre de tasses mauves au nombre total de tasses est égal à $\frac{6}{30} = \frac{2}{10} = \frac{20}{100}$.
Donc, 20 % des tasses dans la boite E sont mauves.

(b) Lundi, 30 % des 90 tasses de Daniel étaient mauves. Donc, 30 % × 90 tasses, ou $\frac{30}{100} \times 90$ tasses, ou 27 tasses étaient mauves.
Daniel avait 9 tasses mauves dans la boite D et 6 tasses mauves dans la boite E.
Il avait donc 12 tasses mauves dans la boite F ($27 - 9 - 6 = 12$).

(c) Daniel avait 90 tasses en tout, dont 27 tasses mauves.
Mardi, Aviva a ajouté 9 tasses mauves, ce qui a donné 36 tasses mauves ($27 + 9 = 36$) en tout et un total de 99 tasses ($90 + 9 = 99$).
Basile a apporté des tasses jaunes qu'il a ajoutés aux 99 tasses.
Soit j le nombre de tasses jaunes que Basile a apportées.
Il y a donc un total de $99 + j$ tasses, dont 36 tasses mauves (puisque Basile n'a apporté que des tasses jaunes).
Puisqu'il y a encore 30 % des tasses qui sont mauves, alors $\frac{30}{100}$ de $99 + j$ doit être égal à 36.
Donc $\frac{30}{100} \times (99 + j) = 36$, ou $30(99 + j) = 3600$, d'où $99 + j = 120$, ou $j = 21$.
Donc, Basile a apporté 21 tasses.

2. (a) Abdi arrive à 5 h 02. Il paie donc 5,02 \$.
Caleb arrive à 5 h 10. Il paie donc 5,10 \$.
En tout, ils paient 5,02 \$ + 5,10 \$, ou 10,12 \$.

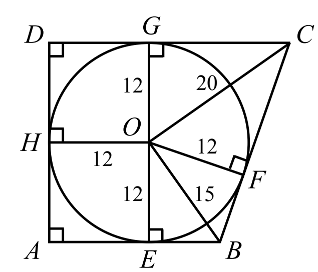
(b) Si Daniel et Émilie étaient arrivés en même temps, ils auraient payé le même prix, soit 12,34 \$ ÷ 2, ou 6,17 \$.
Ils seraient donc arrivés tous les deux à 6 h 17.
Si Daniel était arrivé 5 minutes plus tôt, à 6 h 12, et Émilie était arrivée 5 minutes plus tard, à 6 h 22, alors Daniel serait arrivé 10 minutes avant Émilie et ils auraient payé un total de 12,34 \$.
Donc, Daniel est arrivé à 6 h 12 et Émilie est arrivée à 6 h 22. (On peut vérifier que ces heures d'arrivée ont une différence de 10 minutes et que le prix total est de 6,12 \$ + 6,22 \$, ou 12,34 \$.)

(c) Pour minimiser le prix que Karla a payé, on maximise le prix qu'Isaac et Jacob ont payé. Or, Isaac et Jacob sont arrivés ensemble et Karla est arrivée plus tard. Cela laisse entendre que Karla a payé plus qu'Isaac ou Jacob. Si Isaac et Jacob payaient chacun $\frac{1}{3}$ de l'addition totale, Karla paierait le dernier tiers, ce qui indiquerait qu'elle est arrivée en même temps qu'eux. Si Isaac et Jacob payaient chacun plus de $\frac{1}{3}$ de l'addition totale, Karla en paierait moins d'un tiers, ce qui indiquerait qu'elle est arrivée avant eux.
On doit donc conclure qu'Isaac et Jacob doivent payer aussi près de $\frac{1}{3}$ de l'addition, sans le dépasser. Or, $18{,}55 \div 3 = 6{,}18333\ldots$ Donc, Isaac et Jacob doivent chacun payer 6,18 \$ et Karla doit payer 6,19 \$ (18,55 \$ − 6,18 \$ − 6,18 \$ = 6,19 \$).
On peut vérifier que si Isaac et Jacob payaient même un cent de plus, Karla paierait moins que chacun d'eux, ce qui signifie qu'elle serait arrivée avant eux :
18,55 \$ − 6,19 \$ − 6,19 \$ = 6,17 \$.

(d) Si Lara arrivait plus tôt que 5 h 39, elle paierait moins de 5,39 \$, ce qui indique que Fabien paierait plus de 6,59 \$ (car 11,98 \$ − 5,39 \$ = 6,59).
Ceci indique que Fabien arriverait après la période de tarification spéciale et ceci contredit l'énoncé. Donc, Lara arrive à 5 h 39 ou après.
Si Lara arrive à partir de 5 h 39 et pas plus tard que 5 h 59, elle paie la somme qui correspond à son heure d'arrivée (de 5,39 \$ à 5,59 \$) .
Fabien paierait alors une somme allant de 6,39 \$ à 11,98 \$ (car 11,98 \$ − 5,59 \$ = 6,39 \$ et 11,98 \$ − 5,39 \$ = 6,59 \$).
Chaque somme de 6,39 \$ à 6,59 \$ à une heure d'arrivée possible pour Fabien, de 6 h 39 à 6 h 59, pendant la période de tarification spéciale.
Donc, chaque heure d'arrivée possible de Lara, de 5 h 39 à 5 h 59, correspond à une heure d'arrivée possible de Fabien, de 6 h 39 à 6 h 59.
Chacune de ces heures est située durant la période de tarification spéciale et les deux heures correspondantes donnent toujours un prix total de 11,98 \$.
Pour s'en convaincre, disons que Lara arrive x minutes après 5 h 39 (x étant un entier et $0 \leq x \leq 20$), alors Fabian arriverait x minutes avant 6 h 59 et le prix total serait de 5,39 \$ + x ¢ + 6,59 \$ − x ¢ , ou 11,98 \$.
Puisque l'heure d'arrivée de Lara et celle de Fabien peuvent être changées l'une pour l'autre pour donner le même prix total, 11,98 \$, Lara pourrait aussi arriver à partir de 6 h 39 jusqu'à 6 h 59.
Il reste à considérer les heures de 6 h 00 à 6 h 38.
Si Lara arrivait dans cet intervalle de temps, le prix varierait de 6,00 \$ à 6,38 \$ et celui de Fabien varierait de 5,60 \$ à 5,98 \$ (car 11,98 \$ − 6,38 \$ = 5,60 \$ et 11,98 \$ − 6,00 \$ = 5,98 \$).
Puisqu'il n'y a aucune heure qui corresponde à un prix dans cet intervalle, il est impossible que Lara soit arrivée à partir de 6 h 39 jusqu'à 6 h 59.

3. (a) Puisque $\angle OPQ = 90°$, le triangle OPQ est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, $OQ^2 = OP^2 + PQ^2$, d'où $OQ^2 = 18^2 + 24^2$, ou $OQ^2 = 900$. Donc $OQ = 30$ (puisque $OQ > 0$).
Le segment de droite OS est un rayon du cercle. Il a donc une longueur de 18.
Donc $SQ = OQ - OS$, d'où $SQ = 30 - 18$, ou $SQ = 12$.

(b) Les côtés AB, BC, CD et DA du quadrilatère sont tangents au cercle aux points respectifs E, F, G et H.

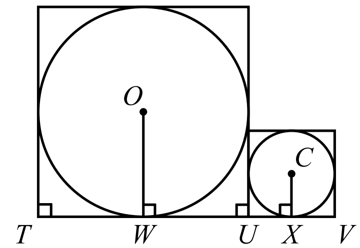


Les rayons OE, OF, OG et OH sont donc perpendiculaires aux côtés correspondants.
Dans le quadrilatère $DHOG$, $\angle OGD = \angle GDH = \angle DHO = 90°$. Donc $\angle GOH = 90°$.
Puisque $OH = OG = 12$ (ce sont des rayons du cercle), alors $DHOG$ est un carré avec des côtés de longueur 12.
De même, $HAEO$ est aussi un carré avec des côtés de longueur 12.
Puisque $\angle OGC = 90°$, le triangle OGC est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, $GC^2 = OC^2 - OG^2$, d'où $GC^2 = 20^2 - 12^2$, ou $GC^2 = 256$. Donc $GC = 16$ (puisque $GC > 0$).
De la même manière, on peut montrer que $FC = 16$.
Puisque $\angle OEB = 90°$, le triangle OEB est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, $EB^2 = OB^2 - OE^2$, d'où $EB^2 = 15^2 - 12^2$, ou $EB^2 = 81$.
Donc $EB = 9$ (puisque $EB > 0$). De la même manière, on peut montrer que $FB = 9$.
Le périmètre de $ABCD$ est égal à $GD + DH + HA + AE + EB + BF + FC + CG$, ou

$4 \times 12 + 2 \times 9 + 2 \times 16$, ou 98.

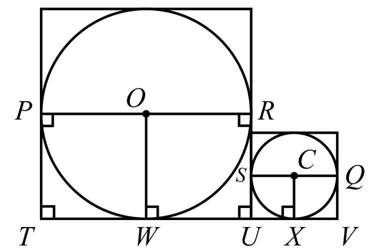
(c) Dans la figure 1 :
Puisque les cercles sont inscrits dans les carrés, TU est tangent au grand cercle au point W et UV est tangent au petit cercle au point X.
Le rayon OW est perpendiculaire à TU et le rayon CX est perpendiculaire à UV.

Figure 1



Dans la figure 2 :
Le diamètre du grand cercle est égal à la longueur d'un côté du grand carré.
Pour le voir, on nomme P et R les points de contact du cercle avec les côtés verticaux du carré.
On trace PO et RO.
Le rayon OP est perpendiculaire à PT et le rayon OR est perpendiculaire à RU.

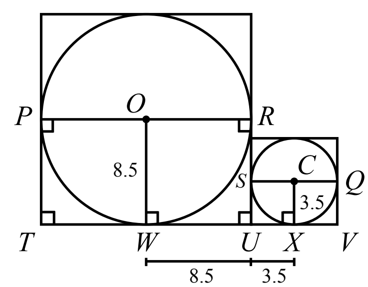
Figure 2



Dans le quadrilatère $PTWO$, $\angle OPT = \angle PTW = \angle TWO = 90°$. Donc $\angle POW = 90°$.
De même, dans le quadrilatère $RUWO$, $\angle ROW = 90°$.
Donc, $\angle POW + \angle ROW = 180°$ et le segment PR passe donc au point O. Il est donc un diamètre du grand cercle.
Dans le quadrilatère $PTUR$, les quatre angles mesurent $90°$. $PTUR$ est donc un rectangle.
De même, si S et Q sont les points de contact du petit cercle avec les côtés verticaux du petit carré, alors SQ est un diamètre du petit cercle et $SUVQ$ est un rectangle.

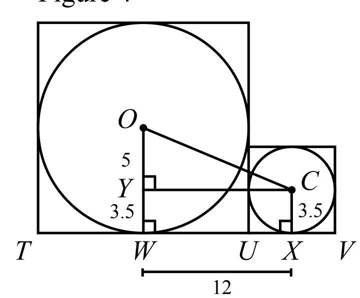
Dans la figure 3 :
Puisque le grand carré a une aire de 289, ses côtés ont une longueur de $\sqrt{289}$, ou 17.
Le diamètre du grand cercle a la même longueur que ces côtés. Donc $PR = TU = 17$.
Puisque O est le milieu de PR et que OW est perpendiculaire à TU, alors W est le milieu de TU.
Donc $WU = OR = OW = 17 \div 2 = 8{,}5$.
Puisque le petit carré a une aire de 49, ses côtés ont une longueur de 7.
De même, X est le milieu de UV, donc $UX = SC = CX = 7 \div 2 = 3{,}5$.

Figure 3



Dans la figure 4 :
Au point C, on construit un segment parallèle à XW, qui joint OW en Y.
Dans le quadrilatère $YWXC$, CY est parallèle à XW, YW est parallèle à XW et CX est perpendiculaire à XW.
Donc $YWXC$ est un rectangle. Donc, $CX = YW = 3{,}5$ et $CY = XW = XU + WU = 3{,}5 + 8{,}5 = 12$.
Puisque $\angle OYC = 90°$, le triangle OYC est rectangle. De plus, $CY = 12$ et $OY = OW - YW = 8{,}5 - 3{,}5 = 5$.

Figure 4



D'après le théorème de Pythagore, $OC^2 = CY^2 + OY^2$, d'où $OC^2 = 12^2 + 5^2$, ou $OC^2 = 144 + 25$, ou $OC^2 = 169$.
Donc $OC = \sqrt{169}$, ou $OC = 13$ (puisque $OC > 0$).

4. (a) L'aire totale du rectangle Koeller avec $m = 14$ et $n = 10$ est égale à $m \times n$, c'est-à-dire à 14×10, ou 140.
Le rectangle ombré à l'intérieur a pour dimensions $(m-2)$ sur $(n-2)$, puisqu'il y a des carrés blancs tout autour et chaque dimension du grand rectangle est diminuée de 2.
L'aire du rectangle ombré qui correspond au rectangle Koeller 14×10 est donc égale à $(14-2) \times (10-2)$, ou 12×8, ou 96.
L'aire de la partie non ombrée est égale à la différence entre l'aire totale et celle de la partie ombrée. Elle est donc égale à $mn - (m-2)(n-2)$, ou $mn - (mn - 2m - 2n + 4)$, ou $2m + 2n - 4$, soit $2 \times 14 + 2 \times 10 - 4$, ou 44.
Le rapport r de l'aire de la partie ombrée à l'aire de la partie non ombrée est égal à $\frac{96}{44}$, ou $\frac{24}{11}$ (ou 24 : 11).

(b) On a vu, dans la partie (a), que pour un rectangle Koeller m sur n, l'aire de la partie ombrée est égale à $(m-2)(n-2)$ et l'aire de la partie non ombrée est égale à $2m+2n-4$.
Donc, $r = \frac{(m-2)(n-2)}{2m+2n-4}$. Lorsque $n = 4$, $r = \frac{2(m-2)}{2m+4} = \frac{2(m-2)}{2(m+2)} = \frac{m-2}{m+2}$.
On récrit $\frac{m-2}{m+2}$ comme suit : $\frac{m+2-4}{m+2} = \frac{m+2}{m+2} - \frac{4}{m+2} = 1 - \frac{4}{m+2}$.
On cherche toutes les valeurs entières et strictement positives de u pour lesquelles $r = 1 - \frac{4}{m+2} = \frac{u}{77}$, m étant un entier quelconque et $m \geq 3$.
On récrit cette équation :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{4}{m+2} &= \frac{u}{77} \\ 1 - \frac{u}{77} &= \frac{4}{m+2} \\ \frac{77-u}{77} &= \frac{4}{m+2} \\ (m+2)(77-u) &= 4 \times 77 \end{aligned}$$

Puisque u et m sont des entiers, $(m+2)(77-u)$ est le produit de deux entiers.
Étant donné deux entiers strictement positifs a et b tels que $ab = 4 \times 77 = 2^2 \times 7 \times 11$, il y a six possibilités (a, b) où $a < b$.
Ce sont : $(1, 308), (2, 154), (4, 77), (7, 44), (11, 28)$ et $(14, 22)$.
Puisque $m \geq 3$, alors $m + 2 \geq 5$. Donc, $m + 2$ ne peut être égal à $1, 2$ ou 4.
Par contre, $m+2$ peut être égal à n'importe quel des 9 autres diviseurs, soit $7, 11, 14, 22, 28, 44, 77, 154$ ou 308.
On utilise le tableau suivant pour déterminer les valeurs possibles de u sachant que $(m+2)(77-u) = 2^2 \times 7 \times 11$ et $m + 2 \geq 5$.

$m+2$	7	11	14	22	28	44	77	154	308
$77-u$	44	28	22	14	11	7	4	2	1
u	33	49	55	63	66	70	73	75	76

Les valeurs entières de u pour lesquelles il existe un rectangle Koeller avec $n = 4$ et $r = \frac{u}{77}$ sont $u = 33, 49, 55, 63, 66, 70, 73, 75, 76$.
(Par exemple, pour le rectangle Koeller 5 sur 4, on a $r = \frac{m-2}{m+2} = \frac{3}{7} = \frac{33}{77}$, d'où $u = 33$.)

(c) Comme dans la partie (b), $r = \dfrac{(m-2)(n-2)}{2m+2n-4}$.

Lorsque $n = 10$, $r = \dfrac{8(m-2)}{2m+16} = \dfrac{4(m-2)}{m+8}$.

On récrit cette équation :

$$\begin{aligned}
r &= \frac{4(m-2)}{m+8}\\
\frac{r}{4} &= \frac{m-2}{m+8}\\
\frac{r}{4} &= \frac{m+8-10}{m+8}\\
\frac{r}{4} &= \frac{m+8}{m+8} - \frac{10}{m+8}\\
\frac{r}{4} &= 1 - \frac{10}{m+8}\\
\frac{10}{m+8} &= 1 - \frac{r}{4}\\
\frac{10}{m+8} &= 1 - \frac{u}{4p^2} \quad (\text{puisque } r = \frac{u}{p^2})\\
\frac{10}{m+8} &= \frac{4p^2-u}{4p^2}\\
40p^2 &= (m+8)(4p^2-u)
\end{aligned}$$

Puisque p, u et m sont des entiers, $(m+8)(4p^2-u)$ est le produit de deux entiers.

On doit déterminer tous les nombres premiers p pour lesquels il existe exactement 17 valeurs entières positives de u pour des rectangles Koeller qui vérifient l'équation $40p^2 = (m+8)(4p^2-u)$.

Pour $p = 2, 3, 5, 7$ et pour $p \geq 11$, on procède comme suit :

- On détermine la valeur de $40p^2$.
- On compte le nombre de diviseurs de $40p^2$.
- On élimine les valeurs possibles de $m+8$, éliminant ainsi les valeurs possibles de $4p^2-u$.
- On compte le nombre de valeurs de u en comptant le nombre de valeurs de $4p^2-u$.

Lorsque $p = 2$, alors $40p^2 = 40 \times 2^2 = 2^5 \times 5$. Donc $2^5 \times 5 = (m+8)(16-u)$.

Chaque diviseur de $2^5 \times 5$ peut s'écrire sous forme $2^i \times 5^j$, i et j étant des entiers et $0 \leq i \leq 5$, $0 \leq j \leq 1$.

Il y a donc 6 valeurs possibles de i (chacun des entiers de 0 à 5) et 2 valeurs possibles de j (0 ou 1). Il y a donc 6×2 diviseurs, ou 12 diviseurs de $2^5 \times 5$.

Puisque $2^5 \times 5 = (m+8)(16-u)$, il existe au plus 12 valeurs entières de $16-u$ (les 12 diviseurs de $2^5 \times 5$) et il existe donc au plus 12 valeurs entières de u.

Donc lorsque $p = 2$, il ne peut y avoir exactement 17 valeurs entières positives de u.

Lorsque $p = 5$, alors $40p^2 = 40 \times 5^2 = 2^3 \times 5^3$. Donc $2^3 \times 5^3 = (m+8)(100-u)$.

Chaque diviseur de $2^3 \times 5^3$ peut s'écrire sous forme $2^i \times 5^j$, i et j étant des entiers et $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 3$.

Il y a donc 4 valeurs possibles de i et 4 valeurs possibles de j. Il y a donc 4×4 diviseurs, ou 16 diviseurs de $2^3 \times 5^3$.

Puisque $2^3 \times 5^3 = (m+8)(100-u)$, il existe au plus 16 valeurs entières de $100-u$, et il existe donc au plus 16 valeurs entières de u.

Donc lorsque $p = 5$, il ne peut y avoir exactement 17 valeurs entières positives de u.

Lorsque $p = 3$, alors $40p^2 = 40 \times 3^2 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Donc $2^3 \times 3^2 \times 5 = (m + 8)(36 - u)$.
Chaque diviseur de $2^3 \times 3^2 \times 5$ peut s'écrire sous forme $2^i \times 3^j \times 5^k$, i, j et k étant des entiers et $0 \le i \le 3$, $0 \le j \le 2$, $0 \le k \le 1$.
Il y a donc $4 \times 3 \times 2$ diviseurs, ou 24 diviseurs de $2^3 \times 3^2 \times 5$.
Puisque $m \ge 3$, alors $m + 8 \ge 11$. Les diviseurs de $2^3 \times 3^2 \times 5$ que $m + 8$ ne peut avoir pour valeur sont donc $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$ et 10.
Puisqu'il y a 9 diviseurs que $m + 8$ ne peut avoir pour valeur, il y a 9 diviseurs que $36 - u$ ne peut avoir pour valeur. (On peut déterminer ces diviseurs en divisant $2^3 \times 3^2 \times 5$ par chacun des 9 diviseurs $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$ et 10.)
Il y a donc 15 valeurs entières de $36 - u$ $(24 - 9 = 15)$ et il y a donc 15 valeurs entières de u lorsque $p = 3$.
Donc lorsque $p = 3$, il ne peut y avoir exactement 17 valeurs entières positives de u.

Lorsque $p = 7$, alors $40p^2 = 40 \times 7^2 = 2^3 \times 5 \times 7^2$. Donc $2^3 \times 5 \times 7^2 = (m + 8)(196 - u)$.
Chaque diviseur de $2^3 \times 5 \times 7^2$ peut s'écrire sous forme $2^i \times 5^j \times 7^k$, i, j et k étant des entiers et $0 \le i \le 3$, $0 \le j \le 1$, $0 \le k \le 2$.
Il y a donc $4 \times 2 \times 3$ diviseurs, ou 24 diviseurs de $2^3 \times 5 \times 7^2$.
Puisque $m + 8 \ge 11$, les diviseurs de $2^3 \times 5 \times 7^2$ que $m + 8$ ne peut avoir pour valeur sont $1, 2, 4, 5, 7, 8$ et 10.
Puisqu'il y a 7 diviseurs que $m+8$ ne peut avoir pour valeur, il y a 7 diviseurs que $196-u$ ne peut avoir pour valeur. (On peut déterminer ces diviseurs en divisant $2^3 \times 5 \times 7^2$ par chacun des 7 diviseurs $1, 2, 4, 5, 7, 8$ et 10. On remarque que chacun des diviseurs que $196 - u$ peut avoir pour diviseur est inférieur à 196, ce qui indique que u prend des valeurs positives.)
Il y a donc 17 valeurs de $196 - u$ $(24 - 7 = 17)$ et donc 17 valeurs entières de u lorsque $p = 7$.

Pour tous les autres nombres premiers p $(p \ge 11)$, on a $40p^2 = 2^3 \times 5 \times p^2$, d'où $2^3 \times 5 \times p^2 = (m + 8)(4p^2 - u)$.
Puisque $p \ne 2$ et $p \ne 5$, chaque diviseur de $2^3 \times 5 \times p^2$ peut être écrit sous forme $2^i \times 5^j \times p^k$, i, j et k étant des entiers et $0 \le i \le 3$, $0 \le j \le 1$, $0 \le k \le 2$.
Il y a donc $4 \times 2 \times 3$ diviseurs, ou 24 diviseurs de $2^3 \times 5 \times p^2$.
Puisque $m + 8 \ge 11$ et $p \ge 11$, les diviseurs de $2^3 \times 5 \times p^2$ que $m + 8$ ne peut avoir pour valeur sont $1, 2, 4, 5, 8$ et 10.
Puisqu'il y a 6 diviseurs que $m + 8$ ne peut avoir pour valeur, il y a 6 diviseurs que $4p^2 - u$ ne peut avoir pour valeur. (On peut déterminer ces diviseurs en divisant $2^3 \times 5 \times p^2$ par chacun des 6 diviseurs $1, 2, 4, 5, 8$ et 10. On remarque que chacun des diviseurs que $4p^2 - u$ peut avoir pour diviseur est inférieur à $4p^2$, ce qui indique que u prend des valeurs positives.)
Il y a donc 18 valeurs entières de $4p^2 - u$ $(24 - 6 = 18)$ et il y a donc 18 valeurs entières de u pour tous nombres premiers p $(p \ge 11)$.

Donc, $p = 7$ est le seul nombre premier pour lequel il existe exactement 17 valeurs entières strictement positives de u pour des rectangles Koeller avec $n = 10$ et $r = \frac{u}{p^2}$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2016

le mercredi 13 avril 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 avril 2016
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2016 University of Waterloo

1. (a) Le premier seau contient 7 disques rouges.
Chaque seau après le premier contient 3 disques rouges de plus que le seau précédent.
Le deuxième seau contient donc 10 disques rouges, le troisième seau contient 13 disques rouges et le quatrième seau contient 16 disques rouges.

(b) *Solution 1*
Soit s le numéro du seau après le seau initial. Les seaux sont donc numérotés 0, 1, 2, 3, ...
Puisque le seau 0 contient 17 disques verts et que chaque seau par la suite contient 1 disque vert de plus que le seau précédent, le seau s contient $17 + s$ disques verts.
Puisque le seau 0 contient 7 disques rouges et que chaque seau par la suite contient 3 disques rouges de plus que le seau précédent, le seau s contient $7 + 3s$ disques rouges.
Un seau contient un même nombre de disques verts et de disques rouges lorsque $17 + s = 7 + 3s$, c'est-à-dire lorsque $10 = 2s$, ou $s = 5$.
Il s'agit donc du 6^e^ seau.

Solution 2
On utilise un tableau pour tenir compte du nombre de disques de chaque couleur. On sait que le seau initial contient 17 disques verts et 7 disques rouges et que chaque seau contient 1 disque vert de plus et 3 disques rouges de plus que le seau précédent.

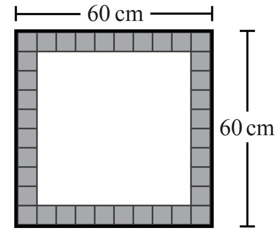
Seau	Nombre de disques verts	Nombre de disques rouges
1^er^	17	7
2^e^	18	10
3^e^	19	13
4^e^	20	16
5^e^	21	19
6^e^	22	22

Donc, le 6^e^ seau contient un nombre égal de disques verts et de disques rouges.
(On remarque qu'il ne peut y avoir égalité plus d'une fois, car le nombre de disques rouges augmente plus vite que le nombre de disques verts.)

Solution 3
Le seau initial contient 17 disques verts et 7 disques rouges. Il y a donc 10 disques verts de plus que de disques rouges. Dans chaque seau suivant, il y a 1 disque vert de plus et 3 disques rouges de plus, c'est-à-dire que la différence diminue de 2 à chaque fois.
Puisqu'il y a une différence de 10 au départ et que $10 \div 2 = 5$, il faut avancer de 5 seaux, après le seau initial, pour qu'il y ait une différence de 0, c'est-à-dire un nombre égal de disques verts et de disques rouges.
Donc, le 6^e^ seau contient un nombre égal de disques verts et de disques rouges.

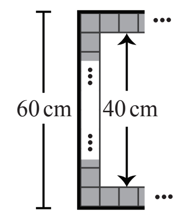
(c) Comme dans la partie (b), si les seaux sont numérotés 0, 1, 2, 3, ..., le seau s contient $17 + s$ disques verts et $7 + 3s$ disques rouges.
Si, dans le seau s, le nombre de disques rouges est le double du nombre de disques verts, alors $7 + 3s = 2(17 + s)$, ou $7 + 3s = 34 + 2s$, ou $s = 27$.
Il s'agit donc du seau 27, c'est-à-dire du 28^e^ seau. Dans ce seau, il y a $(17 + 27)$ disques verts et $(7 + 3(27))$ disques rouges, c'est-à-dire 44 disques verts et 88 disques rouges. (On voit que 88 est bien le double de 44.)
En tout, il y a $(44 + 88)$ disques, ou 132 disques dans le seau.

2. (a) Une assiette qui est carrelée avec 36 carrés ombrés a 10 carrés ombrés sur chaque côté, comme dans la figure ci-contre.



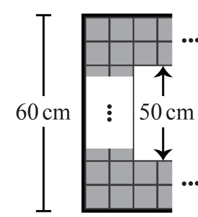
On voit que chaque côté a 10 carrés, mais que si on compte 4×10, chaque carré de coin est compté deux fois et qu'il faut donc soustraire 4.
Si on ne connait pas le nombre de carrés par côté, on peut le nommer c. On peut donc placer c carrés le long du côté supérieur, c carrés le long du côté inférieur, puis $c-2$ carrés le long du côté gauche et du côté droit. (Dans ces deux derniers cas, les carrés des coins sont déjà placés.)
Il y a donc $2c + 2(c-2)$ carrés en tout, ou $4c - 4$ carrés.
Pour avoir 36 carrés en tout, il faut que $4c - 4 = 36$, ou $4c = 40$, ou $c = 10$.
Chaque assiette a des côtés de 60 cm et il y a 10 carrés ombrés le long de chaque côté d'assiette. Donc, chaque carré a des côtés de longueur $60\,\text{cm} \div 10$, ou 6 cm.

(b) Puisque l'assiette est un carré et qu'il y a un nombre égal de carrés ombrés le long de chaque côté de sa bordure, alors la figure non ombrée à l'intérieur est un carré.



Puisque ce carré a une aire de $1600\,\text{cm}^2$, il a des côtés de 40 cm ($\sqrt{1600} = 40$) comme l'indique la figure ci-contre.
On considère le côté gauche de l'assiette.
Puisque l'assiette a des côtés de 60 cm et que le carré intérieur a des côtés de 40 cm, il y a une différence de 20 cm qui est répartie sur 2 longueurs des côtés des petits carrés ombrés. Donc, chaque carré ombré a des côtés de longueur $20\,\text{cm} \div 2$, ou 10 cm.

(c) On procède comme dans la partie (b) pour conclure que la figure non ombrée est un carré avec une aire de $2500\,\text{cm}^2$. Il a donc des côtés de longueur 50 cm ($\sqrt{2500} = 50$), comme l'indique la figure ci-contre.



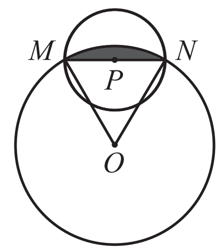
Puisque l'assiette a des côtés de 60 cm et le carré intérieur a des côtés de 50 cm, il y a une différence de 10 cm qui est répartie sur 4 longueurs des côtés des petits carrés ombrés (2 petits carrés ombrés en haut et 2 en bas).
Donc, chaque carré ombré a des côtés de longueur $10\,\text{cm} \div 4$, ou 2,5 cm.
Puisque l'assiette a des côtés de 60 cm et que les petits carrés ombrés ont des côtés de 2,5 cm, on peut placer $60 \div 2{,}5$ carrés ombrés, ou 24 carrés ombrés le long d'un côté de l'assiette.
Le long du côté supérieur de l'assiette, il y aura 2 rangées de 24 carrés ombrés. Il y aura aussi 2 rangées de 24 carrés ombrés le long du côté inférieur de l'assiette.
De chaque côté latéral de l'assiette, il y aura 2 colonnes de 20 carrés ombrés ($24 - 4 = 20$).
Le nombre total de carrés ombrés est donc égal à $4 \times 24 + 4 \times 20$, ou 176.

3. (a) Le triangle ABC est équilatéral et ses côtés ont une longueur de 6.
Puisque D est le milieu de BC, alors $BD = DC = 3$.
Le triangle ADC est rectangle en D. D'après le théorème de Pythagore, on a $AD^2 = AC^2 - DC^2$.
Donc $h^2 = 6^2 - 3^2$, ou $h^2 = 36 - 9$, ou $h^2 = 27$. Donc $h = \sqrt{27}$, ou $h = \sqrt{9 \times 3}$, ou $h = \sqrt{9} \times \sqrt{3}$, ou $h = 3\sqrt{3}$, car $h > 0$.

(b) La région ombrée est la région entre le cercle et l'hexagone. Son aire est donc égale à l'aire du disque moins celle de l'hexagone.
On déterminera d'abord l'aire de l'hexagone.

Chaque sommet de l'hexagone $EFGHIJ$ est situé sur le cercle.
Le cercle a pour centre O et un rayon de 6. Donc $OE = OF = OG = OH = OI = OJ = 6$.
L'hexagone étant régulier, ses côtés sont égaux et les six angles au centre sont égaux. Ils mesurent donc 60° chacun. On a donc six triangles équilatéraux isométriques. (Par exemple, le triangle OGH est un de ces six triangles équilatéraux.)
De plus, chaque triangle est isométrique au triangle ABC de la partie (a). Chacun a donc une hauteur $h = 3\sqrt{3}$.
Chaque triangle a donc une aire égale à $\frac{1}{2}(6)(3\sqrt{3})$, ou $9\sqrt{3}$.
L'hexagone $EFGHIJ$ a donc une aire égale à $6 \times 9\sqrt{3}$, ou $54\sqrt{3}$.
Le cercle a une aire égale à $\pi(6)^2$, ou 36π.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $36\pi - 54\sqrt{3}$.

(c) Soit A l'aire de la région ombrée dont on cherche la valeur en fonction de r. Soit S l'aire de la région ombrée dans la figure ci-contre.



On détermine A en soustrayant S de l'aire du demi-disque de centre P.
On détermine d'abord S.
On considère le cercle de centre O. La région d'aire S est à l'intérieur du secteur MON de ce cercle et à l'extérieur du triangle MON.
Donc, on obtient S en soustrayant l'aire du triangle MON de l'aire du secteur MON.
Dans le triangle MON, $MN = ON = OM = r$ (puisque ON et OM sont des rayons). Le triangle est donc équilatéral. On joint O et P.
Puisque $ON = OM$ et que P est le milieu de MN, alors OP est la bauteur du triangle MON par rapport à la base MN.
Le triangle OPN étant rectangle, alors selon le théorème de Pythagore, on a $OP^2 = ON^2 - PN^2$.
Puisque $PN = \frac{1}{2}(MN)$, ou $PN = \frac{1}{2}r$, alors $OP^2 = r^2 - (\frac{1}{2}r)^2 = r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{3}{4}r^2$.
Donc $OP = \sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$.
L'aire du triangle MON est donc égale à $\frac{1}{2}(MN)(OP)$, ou $\frac{1}{2}(r)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$, ou $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$.
On détermine ensuite l'aire du secteur MON.
Puisque le triangle MON est équilatéral, alors $\angle MON = 60°$.
L'aire du secteur MON est donc égale à $\frac{60°}{360°}$, ou $\frac{1}{6}$ de l'aire du disque de centre O et de rayon r. Elle est donc égale à $\frac{1}{6}\pi r^2$.
Donc $S = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$.
Le demi-disque de centre P et de rayon $PN = \frac{1}{2}r$ a une aire égale à $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2$, ou $\frac{1}{8}\pi r^2$.
Donc $A = \frac{1}{8}\pi r^2 - S$, ou $A = \frac{1}{8}\pi r^2 - \left(\frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right)$, ou $A = \left(\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$.
On simplifie davantage pour obtenir $A = \frac{6\sqrt{3}-\pi}{24}r^2$.

4. (a) En factorisation première, on a $126 = 2^1 3^2 7^1$.
Étant donné $126 = 2^1 3^2 7^1$ comme entrée, le processus de Barbeau donne comme sortie

$$126\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{7}\right) = 126\left(\frac{21+28+6}{42}\right) = 3(55) = 165\,.$$

(b) Étant donné p^2q comme entrée, le processus de Barbeau donne comme sortie $p^2q\left(\frac{2}{p} + \frac{1}{q}\right)$, ou $2pq + p^2$.
On sait que cette sortie est égale à 135.

Puisque $135 = 3^3 5$, on a $2pq + p^2 = 3^3 5$, ou $p(2q + p) = 3^3 5$.
Puisque p est un nombre premier qui est un diviseur de $3^3 5$, alors $p = 3$ ou $p = 5$.
Si $p = 3$, on a $3(2q + 3) = 3^3 5$, ou $2q + 3 = 45$, d'où $q = 21$.
Puisque q doit être un nombre premier, ce résultat doit être rejeté et on conclut que $p \neq 3$.
Si $p = 5$, on a $5(2q + 5) = 3^3 5$, ou $2q + 5 = 27$, d'où $q = 11$.
Le seul couple (p, q) de nombres premiers distincts qui satisfait aux conditions est $(5, 11)$.

(c) *Solution 1*
Étant donné $2^a 3^b 5^c$ comme entrée, le processus de Barbeau donne comme sortie

$$2^a 3^b 5^c \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{5}\right) = 2^a 3^b 5^c \left(\frac{15a + 10b + 6c}{30}\right).$$

On sait que cette sortie est égale à $4 \times 2^a 3^b 5^c$.
On a donc $\dfrac{15a + 10b + 6c}{30} = 4$, ou $15a + 10b + 6c = 120$.
Puisque a, b et c sont des entiers strictement positifs et que $15 \times 8 = 120$, $10 \times 12 = 120$, et $6 \times 20 = 120$, alors $1 \leq a \leq 7, 1 \leq b \leq 11$ et $1 \leq c \leq 19$.
De plus, puisque $10b, 6c$ et 120 sont divisibles par 2, et que $15a = 120 - 10b - 6c$, alors $15a$ est divisible par 2.
Donc, a est divisible par 2. Puisque $1 \leq a \leq 7$, alors a est égal à $2, 4$ ou 6.
De même, puisque $15a, 6c$ et 120 sont divisibles par 3, alors $10b$ est divisible par 3.
Donc, b est divisible par 3. Puisque $1 \leq b \leq 11$, alors b est égal à $3, 6$ ou 9.
De même, puisque $15a, 10b$ et 120 sont divisibles par 5, alors $6c$ est divisible par 5.
Donc, c est divisible par 5. Puisque $1 \leq c \leq 19$, alors c est égal à 5,10 ou 15.
Puisque $a \geq 2, b \geq 3$ et $c \geq 5$, alors $15a \geq 15 \times 2, 10b \geq 10 \times 3$, et $6c \geq 6 \times 5$.
Donc, chacun des termes $15a$, $10b$ et $6c$ est supérieur ou égal à 30 et ainsi, chaque terme est inférieur ou égal à $120 - 2(30)$, ou 60 (p.ex., $15a = 120 - 10b - 6c \leq 120 - 30 - 30 = 60$).
Puisque $15a \leq 60$, alors a est égal à 2 ou 4 ; puisque $10b \leq 60$, alors b est égal à 3 ou 6 ; puisque $6c \leq 60$, alors c est égal à 5 ou 10.
Si $a = 2$ et $b = 3$, alors $6c = 120 - 15(2) - 10(3)$, ou $6c = 60$, d'où $c = 10$.
Si $a = 2$ et $b = 6$, alors $6c = 120 - 15(2) - 10(6)$, ou $6c = 30$, d'où $c = 5$.
Si $a = 4$ et $b = 3$, alors $6c = 120 - 15(4) - 10(3)$, ou $6c = 30$, d'où $c = 5$.
Si $a = 4$ et $b = 6$, alors $6c = 120 - 15(4) - 10(6)$, ou $6c = 0$, ce qui est impossible.
Les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs qui satisfont aux conditions sont $(2, 3, 10)$, $(2, 6, 5)$, et $(4, 3, 5)$.

Solution 2
Étant donné $2^a 3^b 5^c$ comme entrée, le processus de Barbeau donne comme sortie

$$2^a 3^b 5^c \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{5}\right) = 2^a 3^b 5^c \left(\frac{15a + 10b + 6c}{30}\right).$$

On sait que cette sortie est égale à $4 \times 2^a 3^b 5^c$.
On a donc $\dfrac{15a + 10b + 6c}{30} = 4$, ou $15a + 10b + 6c = 120$.
Puisque $10b$, $6c$ et 120 sont divisibles par 2 et que $15a = 120 - 10b - 6c$, alors $15a$ est divisible par 2. Donc, a est divisible par 2. On pose $a = 2A$, A étant un entier strictement positif quelconque.
Puisque $15a$, $6c$ et 120 sont divisibles par 3 et que $10b = 120 - 15a - 6c$, alors $10b$ est divisible par 3. Donc, b est divisible par 3. On pose $b = 3B$, B étant un entier strictement

positif quelconque.
Puisque $15a$, $10b$ et 120 sont divisibles par 5 et que $6c = 120 - 15a - 10b$, alors $6c$ est divisible par 5. Donc, c est divisible par 5. On pose $c = 5C$, C étant un entier strictement positif quelconque.
L'équation $15a + 10b + 6c = 120$ devient donc $30A + 30B + 30C = 120$, ou $A + B + C = 4$.
Puisque A, B et C sont des entiers strictement positifs avec une somme de 4, les valeurs possibles de (A, B, C) sont $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ et $(1, 1, 2)$ (chaque membre de l'addition étant égal à au moins 1, il reste un surplus de 1 qui peut aller à A, à B ou à C).
Puisque $(a, b, c) = (2A, 3B, 5C)$, les triplets (a, b, c) possibles sont $(4, 3, 5)$, $(2, 6, 5)$ et $(2, 3, 10)$.

(d) On procèdera par étapes.

1re étape : On démontre que chaque exposant dans la factorisation première doit être un multiple de son nombre premier

On montrera que puisque la sortie est un multiple de l'entrée, chaque exposant dans la factorisation première doit être un multiple de son nombre premier.
Il s'agit d'une généralisation de ce qui a été vu dans la solution 2 de la partie (c).
Supposons que $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_k^{a_k}$, $p_1, p_2, \dots, p_k$ étant des nombres premiers distincts et $a_1, a_2, \dots, a_k$ étant des entiers non négatifs.
Selon la définition du processus de Barbeau, la sortie est $n\left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \frac{a_3}{p_3} + \cdots + \frac{a_k}{p_k}\right)$.
On permet à chaque $a_1, a_2, \dots, a_k$ d'être nul, ce qui n'influence pas la valeur de la sortie.
Dans ce cas, la sortie est égale à $3n$.
On a donc $n\left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \frac{a_3}{p_3} + \cdots + \frac{a_k}{p_k}\right) = 3n$, ou $\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \frac{a_3}{p_3} + \cdots + \frac{a_k}{p_k} = 3$.
Donc $\frac{a_1}{p_1} = 3 - \frac{a_2}{p_2} - \frac{a_3}{p_3} - \cdots - \frac{a_k}{p_k}$.
On multiplie chaque membre de l'équation par $p_2 p_3 \cdots p_k$ pour obtenir :

$$\frac{a_1 p_2 p_3 \cdots p_k}{p_1} = 3p_2 p_3 \cdots p_k - a_2 p_3 \cdots p_k - a_3 p_2 p_4 \cdots p_k - \cdots - a_k p_2 p_3 \cdots p_{k-1}$$

Puisque chaque terme du membre de droite est un entier, $\frac{a_1 p_2 p_3 \cdots p_k}{p_1}$ doit être un entier.
Puisque les nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont distincts, a_1 doit être un multiple de p_1.
De la même manière, a_2 est un multiple de p_2, a_3 est un multiple de p_3 et ainsi de suite.

2e étape : On démontre que n n'admet aucun facteur premier supérieur à 7

Supposons que n admet un facteur premier supérieur à 7.
Il admet donc un facteur premier p_i supérieur ou égal à 11.
Le facteur $p_i^{a_i}$ dans la factorisation première de n est donc supérieur ou égal à 11^{11}, puisque $p_i \geq 11$ et a_i est un multiple de p_i qui est lui-même supérieur ou égal à 11.
Donc $n \geq 11^{11}$.
Or, selon l'énoncé, n est inférieur à 10^{10}. L'hypothèse est donc infirmée.
Donc, n n'admet aucun facteur premier supérieur à 7.

3e étape : On traite de l'algèbre

Selon les étapes 1 et 2, n doit être de la forme $n = 2^a 3^b 5^c 7^d$, a, b, c et d étant des entiers non négatifs qui sont des multiples respectifs de 2, 3, 5 et 7.
Comme dans la partie (c) de la solution 2, on pose $a = 2A$, $b = 3B$, $c = 5C$ et $d = 7D$, A, B, C et D étant des entiers non négatifs.
L'équation $\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \frac{a_3}{p_3} + \cdots + \frac{a_k}{p_k} = 3$ devient $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{5} + \frac{d}{7} = 3$, ou $A + B + C + D = 3$.

On cherche les solutions entières non négatives de $A + B + C + D = 3$ pour lesquelles $n = 2^{2A}3^{3B}5^{5C}7^{7D} < 10^{10}$.

4^{e} étape : On traite destrictions sur A, B, C et D

Puisque $A+B+C+D = 3$ et que A, B, C et D sont non négatifs, alors chacun de A, B, C et D est inférieur ou égal à 3.
Si $D = 2$ ou $D = 3$, alors n est divisible par 7^{14} ou par 7^{21}. Puisque chacun est supérieur à 10^{10}, alors cette hypothèse est rejetée. Donc $D \leq 1$.
Si $C = 3$, alors n est divisible par 5^{15}, qui est supérieur à 10^{10}. Cette hypothèse est donc rejetée. Donc $C \leq 2$.

5^{e} étape : On détermine les valeurs de n

Puisque $A+B+C+D = 3$ et que A, B, C et D sont non négatifs, alors A, B, C, D pourraient être (i) $3, 0, 0, 0$ dans un ordre quelconque ou (ii) $2, 1, 0, 0$ dans un ordre quelconque ou (iii) $1, 1, 1, 0$, dans un ordre quelconque.
(Si une valeur est 3, les autres doivent être 0. Si une valeur est 2, il doit y avoir une valeur de 1 et deux valeurs de 0. S'il n'y a aucune valeur de 2, il doit y avoir trois valeurs de 1 et une valeur de 0.)
En tenant compte de $C \leq 2$ et de $D \leq 1$, voici les possibilités :

Catégorie	A	B	C	D	n	Inférieur à 10^{10} ?
(i)	3	0	0	0	2^6	Oui
(i)	0	3	0	0	3^9	Oui
(ii)	2	1	0	0	$2^4 3^3$	Oui
(ii)	2	0	1	0	$2^4 5^5$	Oui
(ii)	2	0	0	1	$2^4 7^7$	Oui
(ii)	1	2	0	0	$2^2 3^6$	Oui
(ii)	0	2	1	0	$3^6 5^5$	Oui
(ii)	0	2	0	1	$3^6 7^7$	Oui
(ii)	1	0	2	0	$2^2 5^{10}$	Oui
(ii)	0	1	2	0	$3^3 5^{10}$	Oui
(ii)	0	0	2	1	$5^{10} 7^7$	Non
(iii)	1	1	1	0	$2^2 3^3 5^5$	Oui
(iii)	1	1	0	1	$2^2 3^3 7^7$	Oui
(iii)	1	0	1	1	$2^2 5^5 7^7$	Non
(iii)	0	1	1	1	$3^3 5^5 7^7$	Non

Dans chaque cas, on peut utiliser une calculatrice pour déterminer si la valeur de n est inférieure à 10^{10}. (Dans quels cas peut-on le déterminer par raisonnement ?)

Les valeurs possibles de n sont :

$$2^6, 3^9, 2^4 3^3, 2^4 5^5, 2^4 7^7, 2^2 3^6, 3^6 5^5, 3^6 7^7, 2^2 5^{10}, 3^3 5^{10}, 2^2 3^3 5^5, 2^2 3^3 7^7$$

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2015

le jeudi 16 avril 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 17 avril 2015
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2015 University of Waterloo

1. (a) L'abscisse à l'origine d'une droite est l'abscisse du point de la droite qui a une ordonnée de 0. On reporte $y = 0$ dans l'équation de la droite 1. On obtient $0 = 2x + 6$, d'où $2x = -6$, ou $x = -3$.
La droite 1 a une abscisse à l'origine de -3. (Le point P a pour coordonnées $(-3, 0)$.)

(b) *Solution 1*
Soit b l'ordonnée à l'origine de la droite 2. Puisque cette droite a une pente de -3, elle a pour équation $y = -3x + b$.
Puisque cette droite passe au point $Q(3, 12)$, les coordonnées de Q vérifient l'équation. On reporte $x = 3$ et $y = 12$ dans l'équation pour obtenir $12 = -3(3) + b$, ou $12 = -9 + b$, ou $b = 21$.
La droite 2 a pour équation $y = -3x + 21$.

Solution 2
La droite de pente m et qui passe au point (x_1, y_1) a pour équation $y - y_1 = m(x - x_1)$.
Puisque la droite 2 a pour pente $m = -3$ et qu'elle passe au point $Q(3, 12)$, elle a pour équation $y - 12 = -3(x - 3)$.

(c) Puisque le point R est sur l'axe des abscisses, il a une ordonnée égale à 0. Pour déterminer son abscisse, on reporte $y = 0$ dans l'équation de la droite 2.
On obtient $0 = -3x + 21$, d'où $3x = 21$, ou $x = 7$.
Le point R a pour coordonnées $(7, 0)$.
On considère la base PR du triangle PQR. La hauteur correspondante est la distance de Q à PR mesurée à la verticale.
Cette distance est égale à l'ordonnée du point Q, soit 12.
Le point P a une abscisse de -3 et le point R a une abscisse de 7. (Les deux points ont une ordonnée de 0.)
Donc, PR a une longueur de $7 - (-3)$, ou 10.
L'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2} \times 10 \times 12$, ou 60.

2. (a) À l'école A, 330 élèves ont reçu un tour et 420 élèves n'en ont pas reçu. Il y a donc $(330 + 420)$ élèves à cette école, ou 750 élèves.
Puisque $\frac{330}{750} = 0{,}44 = 44\,\%$, $44\,\%$ des élèves de l'école A ont reçu un tour.

(b) *Solution 1*
À l'école B, $30\,\%$ de 240 élèves ont reçu un tour, soit $\frac{30}{100} \times 240$ élèves, ou $\frac{7200}{100}$ élèves, ou 72 élèves.
Si $50\,\%$ des 240 élèves recevaient un tour, cela ferait $\frac{1}{2}$ des 240 élèves, soit 120 élèves.
Il y aurait donc $(120 - 72)$ élèves de plus, soit 48 élèves de plus qui recevraient un tour si $50\,\%$ des élèves recevaient un tour.

Solution 2
La différence entre $50\,\%$ des élèves qui reçoivent un tour et $30\,\%$ des élèves qui reçoivent un tour est équivalente à $20\,\%$ des élèves.
Donc, $20\,\%$ de 240 élèves correspond à $\frac{20}{100} \times 240$ élèves, ou $\frac{4800}{100}$ élèves, ou 48 élèves.
Donc, 48 élèves de plus auraient dû recevoir un tour pour que $50\,\%$ des élèves aient reçu un tour.

(c) *Solution 1*
À l'école C, $45\,\%$ des 200 élèves ont reçu un tour. Cela correspond à $\frac{45}{100} \times 200$ élèves, ou $\frac{9000}{100}$ élèves, ou 90 élèves.
À l'école D, $x\,\%$ de 300 élèves ont reçu un tour. Cela correspond à $\frac{x}{100} \times 300$ élèves, ou $\frac{300x}{100}$

élèves, ou $3x$ élèves.

Le nombre total d'élèves dans ces deux écoles est de $200 + 300$, ou 500.

En tout, $90 + 3x$ élèves dans ces deux écoles ont reçu un tour.

Puisque 57,6 % des élèves des deux écoles réunies ont reçu un tour, alors $\frac{90+3x}{500} = \frac{57{,}6}{100}$.

On multiplie chaque membre de l'équation par 500 pour obtenir $90 + 3x = 57{,}6 \times 5$, ou $90 + 3x = 288$, ou $3x = 198$, ou $x = 66$.

Solution 2

À l'école C, 45 % des 200 élèves ont reçu un tour. Cela correspond à $\frac{45}{100} \times 200$ élèves, ou $\frac{9000}{100}$ élèves, ou 90 élèves.

Le nombre total d'élèves dans ces deux écoles est de $200 + 300$, ou 500.

Or, 57,6 % des élèves des deux écoles réunies ont reçu un tour. Cela correspond à $\frac{57{,}6}{100} \times 500$ élèves, ou $\frac{28800}{100}$ élèves, ou 288 élèves.

Des 288 élèves qui ont reçu un tour, 90 provenaient de l'école C. Les 198 autres élèves provenaient donc de l'école D.

Donc, 198 des 300 élèves de école D ont reçu un tour. Puisque $\frac{198}{300} = 0{,}66 = 66\,\%$, alors 66 % des élèves de l'école D ont reçu un tour.

Donc, x a une valeur de 66.

(d) À l'école E, $n\,\%$ des 200 élèves ont reçu un tour. Cela correspond à $\frac{n}{100} \times 200$ élèves, ou $\frac{200n}{100}$ élèves, ou $2n$ élèves.

À l'école F, $2n\,\%$ des 250 élèves ont reçu un tour. Cela correspond à $\frac{2n}{100} \times 250$ élèves, ou $\frac{500n}{100}$ élèves, ou $5n$ élèves.

Le nombre total d'élèves dans ces deux écoles est de $(200 + 250)$ élèves, ou 450 élèves.

Le nombre total d'élèves qui ont reçu un tour, dans ces deux écoles, est de $(2n+5n)$ élèves, ou $7n$ élèves.

Entre 55 % et 60 % des 450 élèves des deux écoles ont reçu un tour.

Puisque 55 % de 450 est égal à 247,5 et que 60 % de 450 est égal à 270, alors $7n > 247{,}5$ et $7n < 270$.

On résout $7n > 247{,}5$ et on arrondit au centième près pour obtenir $n > 35{,}35$. On résout $7n < 270$ et on arrondit au centième près pour obtenir $n < 38{,}57$.

Puisque n est un entier et que $n > 35{,}35$ et $n < 38{,}57$, les valeurs de n sont 36, 37 et 38.

3. (a) Puisque 5 est un entier impair, alors n doit être un entier impair pour que $n + 5$ soit un entier pair. (Si n était un entier pair, alors $n + 5$ serait la somme d'un entier pair et d'un entier impair, ce qui est un entier impair.)

(b) On sait que le produit d'un entier pair et de n'importe quels autres entiers, pairs ou impairs, est nécessairement pair.

Soit $N = cd(c + d)$.

Si c ou d est un entier pair (ou si c et d sont des entiers pairs tous les deux), alors N est le produit d'un entier pair et d'autres entiers. Le produit est donc un entier pair.

Si c et d sont des entiers impairs, alors la somme $c + d$ est un entier pair.

Dans ce cas, N est aussi le produit d'un entier pair et d'autres entiers. Ce produit est donc un entier pair.

Il n'y a aucun autre cas possible. Donc si c et d sont des entiers, $cd(c + d)$ est toujours un entier pair.

(c) Puisque e et f sont des entiers strictement positifs tels que $ef = 300$, on cherche d'abord les paires d'entiers positifs qui ont un produit de 300.

On les écrit sous forme de couples (x, y) de manière que $x < y$:

$$(1, 300), (2, 150), (3, 100), (4, 75), (5, 60), (6, 50), (10, 30), (12, 25), (15, 20)$$

Il faut aussi que $e + f$ soit impair, ce qui indique qu'un seul des entiers e et f doit être impair.
Il reste les couples :

$$(1, 300), (3, 100), (4, 75), (5, 60), (12, 25), (15,20)$$

Il existe donc 6 couples (e, f) qui satisfont aux trois conditions.

(d) Puisque m et n sont des entiers strictement positifs, alors $2n > 1$, d'où $2n + m > m + 1$.
Soit $a = m + 1$ et $b = 2n + m$, ou $a = 2n + m$ et $b = m + 1$. On veut donc résoudre l'équation $ab = 9000$.
On cherche d'abord tous les couples (a, b) d'entiers positifs qui ont un produit de 9000.
On considère d'abord la parité (selon que les facteurs sont pairs ou impairs) des facteurs a et b.

Puisque 2 est pair, alors $2n$ est pair pour tout entier strictement positif n.
Si m est pair, alors $2n + m$ est pair, puisque la somme de deux entiers pairs est paire.
Si m est pair, alors $m + 1$ est impair, puisque 1 de plus qu'un nombre pair est impair.
On peut donc conclure que si m est pair, alors a est impair et b est pair, ou a est pair et b est impair.
On dit que les facteurs a et b sont de *parité différente* puisque l'un est pair et l'autre est impair.

Si m est impair, alors $2n + m$ est impair (la somme d'un entier pair et d'un entier impair est impaire). De plus, si m est impair, alors $m + 1$ est pair.
On peut donc conclure que si m est impair, alors a est pair et b est impair, ou a est impair et b pair. On a ainsi démontré que a et b sont de parité différente pour tout entier strictement positif m.

On cherche donc tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs de parité différente qui ont un produit de 9000.
On écrit 9000 en factorisation première : $9000 = 2^3 \times 3^2 \times 5^3$. On a donc $ab = 2^3 \times 3^2 \times 5^3$.
Un des facteurs a et b est impair, ce qui indique qu'un des facteurs n'admet pas un diviseur 2 et que l'autre facteur doit nécessairement avoir 2^3 pour diviseur.
On a donc $a = 2^3r = 8r$ et $b = s$, ou bien $a = r$ et $b = 8s$, r et s étant des entiers strictement positifs quelconques.
Dans les deux cas, on a $ab = 8rs = 9000$, d'où $rs = \frac{9000}{8}$, ou $rs = 1125$, ou $rs = 3^2 5^3$.
On détermine maintenant tous les couples (r, s) d'entiers strictement positifs qui ont un produit de 1125.
On obtient $(r, s) = (1, 1125)$,(3,375), $(5, 225), (9, 125), (15, 75), (25, 45)$.
On a donc $(a, b) = (8r, s) = (8, 1125), (24, 375), (40, 225), (72, 125), (120, 75), (200, 45)$, ou $(a, b) = (r, 8s) = (1, 9000), (3, 3000), (5, 1800), (9, 1000), (15, 600), (25, 360)$.
Puisque $2n + m > m + 1 > 1$, le couple $(1, 9000)$ est rejeté.
Il reste donc 11 couples (a, b) tels que $ab = 9000$, a et b étant des entiers strictement positifs de parité différente.
Chacun de ces 11 couples (a, b) donne un couple (m, n).
En effet, soit $m + 1$ le plus petit de a et b et soit $2n + m$ le plus grand des deux (puisque $2n + m > m + 1$).

Par exemple si $(a, b) = (8, 1125)$, alors $m + 1 = 8$, d'où $m = 7$. L'équation $2n + m = 1125$ devient ainsi $2n + 7 = 1125$, d'où $n = 559$.
Le couple $(a, b) = (8, 1125)$ correspond ainsi au couple $(m, n) = (7, 559)$ tel que $(m + 1)(2n + m) = 9000$.
Chacun des couples (a, b) donne un couple (m, n) tel que $(m + 1)(2n + m) = 9000$.
Le tableau suivant donne chaque couple (m, n) qui correspond à chaque couple (a, b).
(Ce travail n'est pas nécessaire, puisqu'on demandait le nombre de couples).

(a, b)	$m + 1$	$2n + m$	(m,n)
$(8, 1125)$	8	1125	$(7, 559)$
$(24, 375)$	24	375	$(23, 176)$
$(40, 225)$	40	225	$(39, 93)$
$(72, 125)$	72	125	$(71, 27)$
$(120, 75)$	75	120	$(74, 23)$
$(200, 45)$	45	200	$(44, 78)$

(a, b)	$m + 1$	$2n + m$	(m,n)
$(3, 3000)$	3	3000	$(2, 1499)$
$(5, 1800)$	5	1800	$(4, 898)$
$(9, 1000)$	9	1000	$(8, 496)$
$(15, 600)$	15	600	$(14, 293)$
$(25, 360)$	25	360	$(24, 168)$

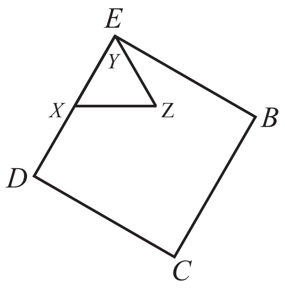
Il y a 11 couples (m, n) d'entiers strictement positifs pour lesquels $(m+1)(2n+m) = 9000$.

4. (a) Puisque EXD est un segment de droite, alors $\angle YXE + \angle YXZ = 180°$.
Puisque le triangle XYZ est équilatéral, alors $\angle YXZ = 60°$.
Donc $\angle YXE = 180° - 60°$, ou $\angle YXE = 120°$.

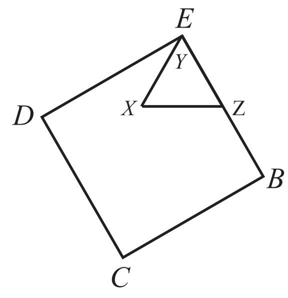
(b) On utilise un tableau pour suivre la position du carré à mesure qu'il tourne autour du triangle :

Après la manoeuvre	Sommets coïncidents	2e sommet du triangle XYZ sur le côté du carré	Centre de rotation de la manoeuvre suivante (X, Y ou Z)	Angle de rotation de la manoeuvre suivante
(Au départ)	D et Z	X sur DE	X	120°
1	E et Y	X sur DE	Y	30°
2	E et Y	Z sur EB	Z	120°
3	B et X	Z sur EB	X	30°
4	B et X	Y sur BC	Y	120°
5	C et Z	Y sur BC	Z	30°
6	C et Z	X sur CD	X	120°
7	D et Y	X sur CD	Y	30°
8	D et Y	Z sur DE	Z	120°

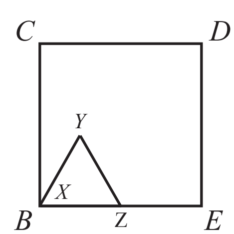
Le tableau a été rempli à partir des figures suivantes :



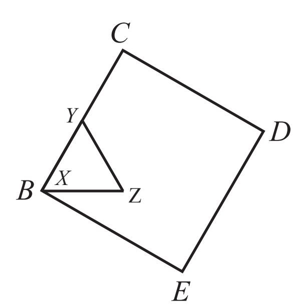
Fin de la première manoeuvre



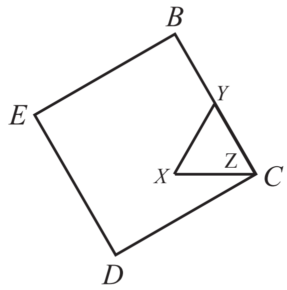
Fin de la deuxième manoeuvre



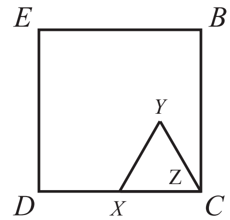
Fin de la troisième manoeuvre



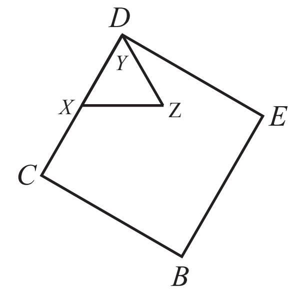
Fin de la quatrième manoeuvre



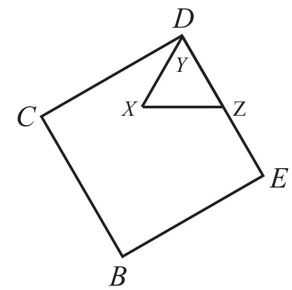
Fin de la cinquième manoeuvre



Fin de la sixième manoeuvre



Fin de la septième manoeuvre



Fin de la huitième manoeuvre

Chaque angle de rotation mesure $180^\circ - 60^\circ$ ou $90^\circ - 60^\circ$, c'est-à-dire 120° ou 30°.
Donc, le sommet D coïncide de nouveau avec un sommet du triangle après 7 manoeuvres. (On a continué le tableau jusqu'à la 8^{e} manoeuvre pour aider dans la résolution de la partie (c).)

(c) Après 0 manoeuvre, le sommet D du carré est au point Z, le point X est sur le côté DE et la rotation suivante est une rotation de 120° de centre X.
Après 8 manoeuvres, le sommet D du carré est au point Y, le point Z est sur le côté DE et la rotation suivante est une rotation de 120° de centre Z.
Après 8 manoeuvres, la position du carré est celle obtenue après une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre autour de deux côtés du triangle. Par rapport au triangle, cette position est semblable à la position initiale : D est sur un sommet du triangle et DE longe un côté du triangle. (D'après la partie (b), ce n'est qu'après 8 manoeuvres (après la position initiale) que le sommet D coïncide de nouveau avec un sommet du triangle et que DE longe un côté du triangle.)
Dans cette nouvelle position, le carré commence 8 autres manoeuvres qui le placeront, à la fin, dans une position semblable. Cette position est celle obtenue après une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre autour de deux côtés du triangle.
Après 16 manoeuvres, le sommet D du carré est situé au point X et le côté DE longe le côté XY du triangle. La rotation suivante sera une rotation de 120° de centre Y.
De même, après 24 manoeuvres, le sommet D du carré est situé au point Z et le point X est sur DE. Le carré est donc en position initiale, car la rotation suivante serait une rotation de 120° de centre X.
On cherche donc la longueur du chemin emprunté par le point E pendant ces 24 manoeuvres.
Cette distance est 3 fois la distance parcourue par E pendant les 8 premières manoeuvres. En effet, la position relative du carré par rapport au triangle (D est situé sur un sommet du triangle et DE longe un côté du triangle) est la même que celle au départ. Donc, cette position relative sera la même après 8 manoeuvres, après 16 manoeuvres et après 24 manoeuvres.

Puisque $EBCD$ a des côtés de longueur 2, alors $ED = EB = 2$.
Il y a une distance de 1 entre E et le milieu de ED et une distance de 1 entre E et le milieu de EB.
Puisque $EBCD$ a des côtés de longueur 2, alors $EC = 2\sqrt{2}$.
La distance entre E et le milieu de DC et entre E et le milieu de BC est égale à $\sqrt{2^2 + 1^2}$, ou $\sqrt{5}$, d'après le théorème de Pythagore.
On écrit dans un tableau les rotations subies par E pendant chacune des 8 premières

manoeuvres :

Numéro de la manoeuvre	Centre de la rotation	Distance entre E et le centre de la rotation	Angle de la rotation subie par le carré
1	X	1	120°
2	Y	0	30°
3	Z	1	120°
4	X	2	30°
5	Y	$\sqrt{5}$	120°
6	Z	$2\sqrt{2}$	30°
7	X	$\sqrt{5}$	120°
8	Y	2	30°

Durant chaque rotation, chaque point du carré (sauf le centre de la rotation) subit une rotation de même angle et de même centre que la rotation subie par le point E.
Pour chaque rotation, la distance parcourue par E est une fraction de la circonférence d'un cercle tracé par E s'il subissait une rotation de 360°. Cette fraction est égale à $\frac{120^\circ}{360^\circ}$ ou $\frac{30^\circ}{360^\circ}$, selon le cas.
La distance parcourue par E pendant les 8 premières manoeuvres est donc égale à

$$\frac{120^\circ}{360^\circ}2\pi(1)+\frac{30^\circ}{360^\circ}2\pi(0)+\frac{120^\circ}{360^\circ}2\pi(1)+\frac{30^\circ}{360^\circ}2\pi(2)+$$

$$\frac{120^\circ}{360^\circ}2\pi(\sqrt{5})+\frac{30^\circ}{360^\circ}2\pi(2\sqrt{2})+\frac{120^\circ}{360^\circ}2\pi(\sqrt{5})+\frac{30^\circ}{360^\circ}2\pi(2),$$

soit

$$\tfrac{2}{3}\pi+0+\tfrac{2}{3}\pi+\tfrac{1}{3}\pi+\tfrac{2}{3}\sqrt{5}\pi+\tfrac{1}{3}\sqrt{2}\pi+\tfrac{2}{3}\sqrt{5}\pi+\tfrac{1}{3}\pi,$$

ou

$$2\pi+\tfrac{4}{3}\sqrt{5}\pi+\tfrac{1}{3}\sqrt{2}\pi.$$

Lorsque le carré retourne à sa position initiale pour la première fois, le point E a parcouru 3 fois cette distance, soit $6\pi+4\sqrt{5}\pi+\sqrt{2}\pi$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2014

le mercredi 16 avril 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 17 avril 2014
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2014 University of Waterloo

1. (a) Les trois angles du diagramme circulaire mesurent respectivement $(2x)^\circ$, $(3x)^\circ$ et 90°.
Puisque les trois angles forment un angle plein, alors $(2x)^\circ + (3x)^\circ + 90^\circ = 360^\circ$, d'où $5x = 270$, ou $x = 54$.

   (b) Le rapport du nombre de médailles de bronze au nombre de médailles d'argent au nombre de médailles d'or est égal au rapport des mesures des angles correspondants, soit au rapport de $(2x)^\circ$ à $(3x)^\circ$ à 90°.
Puisque $x = 54$, ce rapport est égal à $2(54) : 3(54) : 90$, ou $108 : 162 : 90$.
Si on divise chaque terme par 18, on obtient le rapport irréductible $6 : 9 : 5$.

   (c) Puisque le rapport du nombre de médailles de bronze au nombre de médailles d'argent au nombre de médailles d'or est de $6 : 9 : 5$, soit $6x$, $9x$ et $5x$ les nombres respectifs de médailles.
Puisqu'il y a 80 médailles dans la vitrine, alors $6x + 9x + 5x = 80$, ou $20x = 80$, ou $x = 4$.
Il y a donc 24 médailles de bronze $(6 \times 4 = 24)$, 36 médailles d'argent $(9 \times 4 = 36)$ et 20 médailles d'or $(5 \times 4 = 20)$ dans la vitrine.

   (d) Au départ, il y a 24 médailles de bronze, 36 médailles d'argent et 20 médailles d'or.
Ces nombres sont dans le rapport de $6 : 9 : 5$.
Trois nombres dans ce rapport peuvent être représentés par $6x$, $9x$ et $5x$, respectivement.
Par exemple :

si $x = 1$, il s'agit des nombres 6, 9 et 5 ;

si $x = 2$, il s'agit des nombres 12, 18 et 10 et on a $12 : 18 : 10 = 6 : 9 : 5$;

si $x = 3$, il s'agit des nombres 18, 27 et 15 et on a $18 : 27 : 15 = 6 : 9 : 5$;

si $x = 4$, il s'agit des nombres 24, 36 et 20 (les nombres de médailles au départ) et on a $24 : 36 : 20 = 6 : 9 : 5$.

Le rapport suivant est obtenu avec $x = 5$, soit $30 : 45 : 25$. Lorsque $x > 5$, on obtient des nombres plus grands.
Donc, le plus petit nombre de médailles de chaque sorte qu'il peut y avoir dans la vitrine après l'ajout des médailles de la boite, tout en conservant le même rapport, est 30 médailles de bronze, 45 médailles d'argent et 25 médailles d'or pour un total de 100 médailles.

2. (a) *Solution 1*
Chacun des 200 passagers qui ont une valise doit payer 20 \$.
Chacun des 45 passagers qui ont deux valises doit payer 20 \$ pour la première valise et 7 \$ pour la deuxième valise pour un total de 27 \$.
Le total des frais additionnels pour les valises est de $(200 \times 20\,\$) + (45 \times 27\,\$)$, ou 5215 \$.

   Solution 2
Chacun des 245 passagers avait au moins une valise.
Chacune de ces valises a couté 20 \$.
Chacun des 45 passagers qui avaient une deuxième valise doit payer 7 \$.
Le total des frais additionnels pour les valises est de $(245 \times 20\,\$) + (45 \times 7\,\$)$, ou 5215 \$.

(b) *Solution 1*

Puisque chacun des 245 passagers avait au moins une valise, les frais additionnels pour la première valise sont de 245×20 \$, ou 4900 \$.

Puisque le total des frais additionnels est de 5173 \$, les autres valises ont couté 5173 \$ − 4900 \$, ou 273 \$.

Puisque chaque passager avait une ou deux valises, les frais de 273 \$ proviennent des passagers qui avaient une deuxième valise.

Or, chacune de ces valises coutait 7 \$.

Le nombre de passagers qui avaient deux valises est donc égal à $\frac{273}{7}$, ou 39.

Solution 2

Soit n le nombre de passagers qui avaient une valise.

Puisqu'il y avait 245 passagers à bord et que chaque passager avait une ou deux valises, alors $(245 - n)$ passagers avaient deux valises.

Chacun des n passagers qui avaient une valise a payé 20 \$.

Chacun des $(245-n)$ passagers qui avaient deux valises a payé 20 \$ pour la première valise et 27 \$ pour la deuxième, pour un total de 27 \$.

Puisque le total des frais additionnels est de 5173 \$, alors $(n \times 20) + ((245-n) \times 27) = 5173$.

Donc $20n + 6615 - 27n = 5173$, d'où $1442 = 7n$, ou $n = 206$.

Or $245 - 206 = 39$. Donc, 39 passagers avaient deux valises.

Solution 3

Chacun des 245 passagers avait au moins une valise.

Chacune des premières valises a couté 20 \$.

Soit m le nombre de passagers qui avaient deux valises.

Chacun de ces m passagers a payé 7 \$ pour cette deuxième valise.

Les frais additionnels sont donc de $(245 \times 20\,\$) + (m \times 7\,\$)$. Donc $4900 + 7m = 5173$, d'où $7m = 273$, ou $m = 39$.

Donc, 39 passagers avaient deux valises.

(c) On sait qu'il y a au plus 245 passagers. On suppose que chaque passager avait au plus deux valises.

Puisque deux valises coutent 27 \$, les frais additionnels ne peuvent dépasser 245×27 \$, ou 6615 \$.

Puisque le total des frais additionnels était de 6825 \$ (ce qui est supérieur à 6615 \$) il doit y avoir au moins un passsager qui avait trois valises.

(Il est possible d'obtenir un total de 6825 \$ en frais additionnels si 215 passagers ont 2 valises chacun et 30 passagers ont 3 sacs chacun.

En effet, le total serait de $(215 \times 27\,\$) + (30 \times 34\,\$)$, ou 6825 \$.)

(d) On sait qu'il y a au plus 245 passagers. On suppose que chaque passager avait au plus deux valises.

Soit a le nombre de passagers qui avaient exactement une valise et b le nombre de passagers qui avaient exactement deux valises.

Il est possible que certains passagers n'avaient aucune valise. Or, ceux-ci n'ont pas contribué aux frais additionnels de 142 \$.

Chacun des a passagers qui avaient une valise a payé 20 \$ et chacun des b passagers qui avaient deux valise a payé 27 \$.

Puisque le total des frais additionnels était de 142 \$, alors $20a + 27b = 142$.

On isole a pour obtenir $a = \frac{142 - 27b}{20}$. Puisque a et b sont des entiers non négatifs, on attribue à b des valeurs entières par essais systématiques pour découvrir des valeurs entières correspondantes de a. Or, $27b$ est inférieur ou égal à 142. Puisque $27(5) = 135$ et $27(6) = 162$, alors b est inférieur ou égal à 5 ($27b$ est supérieur à 162 lorsque b est supérieur à 6).

Valeurs de b	Valeurs de a
0	$a = \frac{142-27(0)}{20} = 7{,}1$
1	$a = \frac{142-27(1)}{20} = 5{,}75$
2	$a = \frac{142-27(2)}{20} = 4{,}4$
3	$a = \frac{142-27(3)}{20} = 3{,}05$
4	$a = \frac{142-27(4)}{20} = 1{,}7$
5	$a = \frac{142-27(5)}{20} = 0{,}35$

Aucune des valeurs de a est un entier.
L'équation $20a + 27b = 142$ n'admet donc aucune solution dans laquelle a et b sont des entiers non négatifs.
Il est donc impossible que des passagers qui avaient une ou deux valises aient contribué des frais additionnels de 142 \$.
Il doit donc y avoir au moins un passager qui avait au moins trois valises.
(Il est possible d'obtenir un total de 142 \$ en frais additionnels si 4 passagers ont 2 sacs et 1 passager a 3 sacs. On aurait alors $(4 \times 27\,\$) + (1 \times 34\,\$) = 142\,\$$.)

3. (a) *Solution 1*
Eva peut choisir les cartes 1 et 7 dont le couple $(1, 7)$ a une somme de 8.
Pour garder une somme de 8, on peut augmenter le 1 de 1 et diminuer le 8 de 1. On obtient les cartes 2 et 6 dont le couple $(2, 6)$ a une somme de 8.
On répète ce procédé pour obtenir les cartes 3 et 5 dont le couple $(3, 5)$ a une somme de 5.
Les trois couples qui ont une somme de 8 sont $(1, 7)$, $(2, 6)$ et $(3, 5)$.
(Si on tente de répéter le procédé une autre fois, on obtient 4 et 4, mais il n'y a qu'une seule carte 4 dans le jeu d'Eva.)

Solution 2
Soit a le plus petit numéro et b le plus grand. On veut que $a + b = 8$, ou $b = 8 - a$.
Puisque $a < b$, alors $a < 8 - a$, d'où $2a < 8$, ou $a < 4$.
Puisque $a \geq 1$, les seules valeurs possibles de a sont 1, 2 et 3.
Les trois couples qui ont une somme de 8 sont $(1, 7)$, $(2, 6)$ et $(3, 5)$.

(b) *Solution 1*
Comme dans la partie (a), on essaie d'utiliser la plus petite carte, soit 1, pour former un couple qui a une somme de 13.
Or, le plus grand numéro que l'on peut choisir est un 10 et on obtient $1 + 10 = 11$, ce qui est inférieur à 13.

Si on recommence avec la carte 2, la plus grande somme qui l'on peut obtenir est de $2+10$, ou 12, ce qui est inférieur à 13.
On peut apparier la carte 3 avec la carte 10 pour une somme de 13.
Comme dans la partie (a), on augmente le petit nombre de 1 et on diminue le grand nombre de 1 pour conserver une somme de 13.
On obtient ainsi les couples $(4, 9)$, $(5, 8)$ et $(6, 7)$.
Si on répète le procédé, on obtient les mêmes paires dans l'ordre inverse, soit 7 et 6, 8 et 5, 9 et 4.
Donc, Simon peut choisir quatre paires de cartes pour obtenir des couples qui ont une somme de 13, soit 3 et 10, 4 et 9, 5 et 8, 6 et 7.

Solution 2
Soit a le plus petit numéro et b le plus grand. On veut que $a + b = 13$, ou $b = 13 - a$.
Puisque $a < b$, alors $a < 13 - a$, d'où $2a < 13$, ou $a < 6{,}5$.
Puisque $b \leq 10$, alors $13 - a \leq 10$, ou $3 \leq a$.
Puisque $3 \leq a < 6{,}5$, les seules valeurs possibles de a sont 3, 4, 5 et 6.
Donc, Simon peut choisir quatre paires de cartes pour une somme de 13, soit 3 et 10, 4 et 9, 5 et 8, 6 et 7.

(c) Si $k \leq 50$, la plus grande somme de deux cartes est de $49 + 50$, ou 99.
Pour obtenir une somme de 100, on doit donc avoir $k > 50$.
Si $k = 51$, la paire 49 et 51 donne le couple $(49, 51)$ qui a une somme de 100. Or, c'est la seule paire dont le couple a une somme de 100.
Si $k = 52$, on peut former exactement deux couples qui ont une somme de 100, soit $(48, 52)$ et $(49, 51)$.
Chaque fois que la valeur de k est augmentée de 1, on obtient un couple de plus ayant une somme de 100, car on peut augmenter le grand nombre de 1 (jusqu'à la nouvelle valeur de k) et diminuer le petit nombre de 1.
Si $k = 51 + 9$, ou $k = 60$, on obtient les dix couples suivants qui ont une somme de 100 :
$(49, 51)$, $(48, 52)$, $(47, 53)$, $(46, 54)$, $(45, 55)$, $(44, 56)$, $(43, 57)$, $(42, 58)$, $(41, 59)$ et $(40, 60)$.
Si la valeur de k est augmentée de nouveau jusqu'à $k = 61$, on obtient un onzième couple, soit $(39, 61)$.
Donc, $k = 60$ et Daniel a 60 cartes numérotées de 1 à 60.

(d) On démontrera que les valeurs possibles de S sont 67, 68, 84 et 85.

On suppose que S est impair, c'est-à-dire qu'il existe un entier k ($k \geq 0$) tel que $S = 2k+1$.
Les couples d'entiers strictement positifs (a, b) ($a < b$) tels que $a + b = S$ sont :

$$(1, 2k), (2, 2k - 1), (3, 2k - 2), \ldots, (k - 1, k + 2), (k, k + 1)$$

(Puisque $a < b$, alors les valeurs de a sont inférieures à la moitié de S (c.-à-d. $k + \frac{1}{2}$) et a peut donc prendre des valeurs de 1 à k.)
Ces couples satisfont à toutes les conditions à l'exception peut-être de $a \leq 75$ et $b \leq 75$.
Puisque $a < b$, il suffit de déterminer si $b \leq 75$.
Si $2k \leq 75$, alors chaque couple est acceptable et il y a k tels couples.
Pour qu'il y ait 33 couples, on doit avoir $k = 33$, d'où $S = 2(33) + 1$, ou $S = 67$.
Si $2k > 75$, alors certains couples ne sont pas acceptables, puisque b peut prendre des valeurs trop grandes.
À partir de la gauche, la première valeur acceptable de b est $b = 75$, d'où $a = S - 75$, d'où $a = (2k + 1) - 75$, ou $a = 2k - 74$.
Les couples acceptables sont donc :

$$(2k - 74, 75), (2k - 73, 74), \ldots, (k - 1, k + 2), (k, k + 1)$$

Il y a $k-(2k-75)$, ou $75-k$ couples acceptables.
Pour qu'il y ait 33 couples, on doit avoir $k=42$, d'où $S=2(42)+1$, ou $S=85$.
Pour résumer le cas où S est impair ($S=2k+1$), il y a k couples acceptables lorsque $2k\leq 75$ et $75-k$ couples acceptables lorsque $2k>75$, les valeurs possibles de S étant 67 et 85.

On suppose que S est pair, c'est-à-dire qu'il existe un entier k ($k\geq 1$) tel que $S=2k$.
Les couples d'entiers strictement positifs (a,b) ($a<b$) tels que $a+b=S$ sont :

$$(1,2k-1),(2,2k-2),(3,2k-3),\ \ldots,(k-2,k+2),(k-1,k+1)$$

(Puisque $a<b$, alors les valeurs de a sont inférieures à la moitié de S (c.-à-d. k) et a peut donc prendre des valeurs de 1 à $k-1$.)
Si $2k-1\leq 75$, alors chaque couple est acceptable et il y a $k-1$ tels couples.
Pour qu'il y ait 33 couples, on doit avoir $k=34$, d'où $S=2(34)$, ou $S=68$.
Si $2k-1>75$, alors certains couples ne sont pas acceptables, puisque b peut prendre des valeurs trop grandes.
À partir de la gauche, la première valeur acceptable de b est $b=75$, d'où $a=S-75$, ou $a=2k-75$.
Les couples acceptables sont donc :

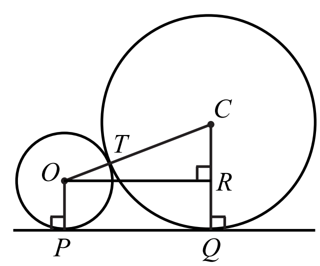
$$(2k-75,75),(2k-74,74),\ \ldots,(k-2,k+2),(k-1,k+1)$$

Il y a $(k-1)-(2k-76)$, ou $75-k$ couples acceptables.
Pour qu'il y ait 33 couples, on doit avoir $k=42$, d'où $S=2(42)$, ou $S=84$.
Pour résumer le cas où S est pair ($S=2k$), il y a $k-1$ couples acceptables lorsque $2k-1\leq 75$ et $75-k$ couples acceptables lorsque $2k-1>75$, les valeurs de S étant 68 et 84.

Donc en tout, les valeurs possibles de S sont 67, 68, 84 et 85.

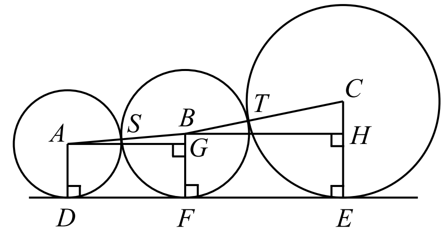
Lorsque $S=67$, les 33 couples sont : $(1,66),(2,65),(3,64),\ldots,(31,36),(32,35),(33,34)$.
Lorsque $S=68$, les 33 couples sont : $(1,67),(2,66),(3,65),\ \ldots,(31,37),(32,36),(33,35)$.
Lorsque $S=84$, les 33 couples sont : $(9,75),(10,74),(11,73),\ \ldots,(39,45),(40,44),(41,43)$.
Lorsque $S=85$, les 33 couples sont : $(10,75),(11,74),(12,73),\ \ldots,(40,45),(41,44),(42,43)$.

4. (a) Comme il est suggéré dans l'énoncé, on construit un segment parallèle à PQ à partir du point O, jusqu'au point R sur CQ.
OP et CQ sont perpendiculaires à PQ. Puisque OR est parallèle à PQ, alors OR est perpendiculaire à OP et à CQ.
Donc, $ORQP$ est un rectangle (il a 4 angles droits).
Puisque le petit cercle a un rayon de 2, alors $OP=OT=2$ (les deux segments sont des rayons).
Puisque le grand cercle a un rayon de 5, alors $CQ=CT=5$ (les deux segments sont des rayons).



Puisque O,T et C sont alignés et que $OT=2$ et $CT=5$, alors $OC=OT+CT$, d'où $OC=2+5$, ou $OC=7$.
Dans le rectangle $ORQP$, on a $RQ=OP=2$.
Donc $CR=CQ-RQ$, d'où $CR=5-2$, ou $CR=3$.
Dans le triangle rectangle OCR, on a $OC^2=CR^2+OR^2$ d'après le théorème de Pythagore.
Donc $OR^2=OC^2-CR^2$, d'où $OR^2=7^2-3^2$, ou $OR^2=40$. Donc $OR=\sqrt{40}$, ou $OR=2\sqrt{10}$ (puisque $OR>0$).
Puisque $ORQP$ est un rectangle, alors $PQ=OR=2\sqrt{10}$.

(b) *Solution 1*



Soit A, B et C les centres des cercles, comme dans la figure ci-contre.
Soit F le point de contact du deuxième cercle et de la droite horizontale.
Comme dans la partie (a), on construit des segments AG et BH parallèles à DE et des segments AD, BF et CE perpendiculaires à DE.
On nomme S et T les points de contact entre les cercles.
Les points A, S et B sont alignés, de même que les points B, T et C.
Soit r le rayon du cercle au milieu. Donc $BF = BS = BT = r$.
Puisque le petit cercle a un rayon de 4, alors $AS = AD = 4$.
Puisque le grand cercle a un rayon de 9, alors $CT = CE = 9$.
Soit $DF = y$. Puisque $FE = DE - DF$, alors $FE = 24 - y$.
Comme dans la partie (a), $GF = AD = 4$ et $DF = AG = y$ (car $AGFD$ est un rectangle).
De même, $HE = BF = r$ et $BH = FE = 24 - y$ (car $BHEF$ est un rectangle).
Dans le triangle rectangle ABG, on a $AB = AS + BS$ et $BG = BF - GF$, d'où $AB = 4 + r$ et $BG = r - 4$.
D'après le théorème de Pythagore, on a $AB^2 = AG^2 + BG^2$, ou $(4 + r)^2 = y^2 + (r - 4)^2$.
(Dans la figure, on suppose que $r > 4$. Si $r < 4$, le point G serait placé sur AD de manière que $AG = AD - GD$, ou $AG = 4 - r$. On aurait alors $AB^2 = AG^2 + BG^2$, ou $(4 + r)^2 = (4 - r)^2 + y^2$. Puisque $(4 - r)^2 = (r - 4)^2$, l'équation obtenue par le théorème de Pythagore ne dépend pas de quel cercle a le plus grand rayon.)
Dans le triangle rectangle BCH, on a $BC = BT + CT$ et $CH = CE - HE$, d'où $BC = r + 9$ et $CH = 9 - r$.
D'après le théorème de Pythagore, on a $BC^2 = BH^2 + CH^2$, ou $(r + 9)^2 = (24 - y)^2 + (9 - r)^2$.
(Dans la figure, on suppose que $r < 9$. Si $r > 9$, alors le point H serait placé sur BF de manière que $BH = BF - HF$, ou $BH = r - 9$. On aurait alors $BC^2 = BH^2 + CH^2$, ou $(r + 9)^2 = (9 - r)^2 + (24 - y)^2$. Puisque $(9 - r)^2 = (r - 9)^2$, l'équation obtenue par le théorème de Pythagore ne dépend pas de quel cercle a le plus grand rayon.)

On résout le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} (4 + r)^2 &= y^2 + (r - 4)^2 && (1) \\ (r + 9)^2 &= (24 - y)^2 + (9 - r)^2 && (2) \end{aligned}$$

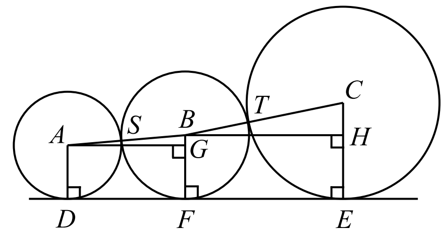
L'équation (1) devient $y^2 = (4 + r)^2 - (r - 4)^2$.
On développe et on simplifie le membre de droite pour obtenir $y^2 = 16 + 8r + r^2 - r^2 + 8r - 16$, ou $y^2 = 16r$.
L'équation (2) devient $(24 - y)^2 = (r + 9)^2 - (9 - r)^2$.
Au lieu de développer le membre de droite, on peut le traiter comme une différence de carrés et le factoriser pour obtenir $(24 - y)^2 = (r + 9 + 9 - r)(r + 9 - 9 + r)$, d'où $(24 - y)^2 = (18)(2r)$, ou $(24 - y)^2 = 36r$.
Le système d'équations devient :

$$\begin{aligned} y^2 &= 16r && (3) \\ (24 - y)^2 &= 36r && (4) \end{aligned}$$

Puisque $y^2 = 16r = \frac{4}{9}(36r) = \frac{4}{9}(24 - y)^2$, alors $y = \pm\frac{2}{3}(24 - y)$.
On résout ces deux équations, soit $y = \frac{2}{3}(24 - y)$ et $y = -\frac{2}{3}(24 - y)$, pour obtenir $y = \frac{48}{5}$ ou $y = -48$.

Puisque $y > 0$, alors $y = \frac{48}{5}$.
On reporte $y = \frac{48}{5}$ dans l'équation (3) pour obtenir $16r = \left(\frac{48}{5}\right)^2$, d'où $r = \frac{48^2}{5^2} \times \frac{1}{16}$, ou $r = \frac{144}{25}$.
Le troisième cercle a donc un rayon de $\frac{144}{25}$.

Solution 2
Soit A, B et C les centres des cercles, comme dans la figure ci-contre.
Soit F le point de contact du deuxième cercle et de la droite horizontale.
Comme dans la partie (a), on construit des segments AG et BH parallèles à DE et des segments AD, BF et CE perpendiculaires à DE.
On nomme S et T les points de contact entre les cercles.



On considère le cas plus général : Soit r_1 le rayon du cercle de centre A, r_2 le rayon du cercle de centre B et r_3 le rayon du cercle de centre C. (Comme dans la Solution 1, on peut supposer que $r_1 < r_2 < r_3$.)
On a alors $AD = AS$, $BS = BF = BT$ et $CT = CE$, d'où $AD = r_1$, $BS = r_2$ et $CT = r_3$.
Comme dans la partie (a), on a $GF = AD = r_1$ et $DF = AG$ (puisque $AGFD$ est un rectangle).
De même, $HE = BF = r_2$ et $BH = FE$ (puisque $BHEF$ est un rectangle).
Dans le triangle rectangle ABG, on a $AB = r_1 + r_2$ et $BG = BF - GF$, ou $BG = r_2 - r_1$.
D'après le théorème de Pythagore, on a $AG^2 = AB^2 - BG^2$, ou $AG^2 = (r_1+r_2)^2 - (r_2-r_1)^2$.
On développe et on simplifie le membre de droite pour obtenir :

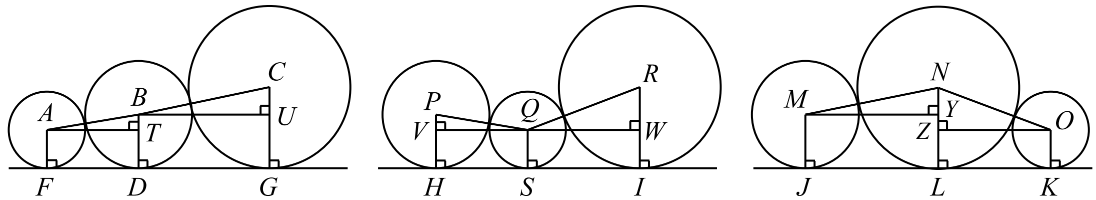
$$\begin{aligned} AG^2 &= r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - r_2^2 + 2r_1r_2 - r_1^2 \\ &= 4r_1r_2 \\ AG &= 2\sqrt{r_1r_2} \quad \text{puisque } AG > 0 \end{aligned}$$

De même, dans le triangle rectangle BCH, on a $BC = r_2 + r_3$ et $CH = CE - HE$, ou $CH = r_3 - r_2$.
D'après le théorème de Pythagore, on a $BH^2 = BC^2 - CH^2$, ou $BH^2 = (r_2+r_3)^2 - (r_3-r_2)^2$.
On considère le membre de droite comme une différence de carrés et on le factorise :

$$\begin{aligned} BH^2 &= (r_2 + r_3 + r_3 - r_2)(r_2 + r_3 - r_3 + r_2) \\ &= (2r_3)(2r_2) \\ &= 4r_2r_3 \\ BH &= 2\sqrt{r_2r_3} \quad \text{puisque } BH > 0 \end{aligned}$$

Donc $DE = DF + FE = AG + BH$, d'où $DE = 2\sqrt{r_1r_2} + 2\sqrt{r_2r_3}$.
On reporte $DE = 24$, $r_1 = 4$ et $r_3 = 9$ dans cette équation pour obtenir
$24 = 2\sqrt{4r_2} + 2\sqrt{9r_2}$.
On simplifie pour obtenir $12 = \sqrt{4r_2} + \sqrt{9r_2}$, ou $12 = 2\sqrt{r_2} + 3\sqrt{r_2}$, ou $12 = 5\sqrt{r_2}$, ou $\sqrt{r_2} = \frac{12}{5}$.
Donc $r_2 = \frac{12^2}{5^2}$, ou $r_2 = \frac{144}{25}$.
Le troisième cercle a un rayon de $\frac{144}{25}$.

(c) On construit des segments de droites comme dans la partie (b) et on nomme des points comme dans la figure.



Comme dans la Solution 2 de la partie (b), on peut démontrer que :

$$\begin{aligned} FG = FD + DG = AT + BU &= 2\sqrt{r_1r_2} + 2\sqrt{r_2r_3} \\ HI = HS + SI = VQ + QW &= 2\sqrt{r_1r_2} + 2\sqrt{r_1r_3} \\ JK = JL + LK = MY + ZO &= 2\sqrt{r_2r_3} + 2\sqrt{r_1r_3} \end{aligned}$$

(On peut démontrer chacun de ces résultats de façon algébrique, comme dans la partie (b), ou on peut constater que les cercles de centres P et Q ont les mêmes rayons que les cercles respectifs de centres B et A, d'où $PQ = AB$ ou, ce qui est plus utile, $VQ = AT$.)

Puisque $r_2 < r_3$, alors $r_1r_2 < r_1r_3$. Donc $2\sqrt{r_1r_2} < 2\sqrt{r_1r_3}$.
Puisque $r_1 < r_2$, alors $r_1r_3 < r_2r_3$. Donc $2\sqrt{r_1r_3} < 2\sqrt{r_2r_3}$.
Soit $x = \sqrt{r_1r_2}, y = \sqrt{r_1r_3}$ et $z = \sqrt{r_2r_3}$.
On a donc $x < y < z$.
Puisque $y < z$, alors $x + y < x + z$, d'où $HI < FG$.
Puisque $x < y$, alors $x + z < y + z$, d'où $FG < JK$.
Puisque les segments FG, HI et JK, dans un ordre quelconque, ont pour longueurs 18, 20 et 22 et puisque $HI < FG < JK$, alors $HI = 18$, $FG = 20$ et $JK = 22$.
Les trois équations deviennent

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 18 & & & x + y &= 9 & (1) \\ 2x + 2z &= 20 & &\text{ou} & x + z &= 10 & (2) \\ 2z + 2y &= 22 & & & z + y &= 11 & (3) \end{aligned}$$

On additionne les équations (1), (2) et (3), membre par membre, pour obtenir
$2(x + y + z) = 30$, ou $x + y + z = 15 \quad (4)$.
On soustrait l'équation (1) de l'équation (4), membre par membre, pour obtenir
$z = (x + y + z) - (x + y)$, ou $z = 15 - 9$, ou $z = 6$.
De même, on soustrait tour à tour l'équation (2) et l'équation (3) de l'équation (4), membre par membre, pour obtenir $y = 5$ et $x = 4$.
Puisque $z = 6$, alors $\sqrt{r_2r_3} = 6$, ou $r_2r_3 = 6^2$.
Puisque $y = 5$, alors $\sqrt{r_1r_3} = 5$, ou $r_1r_3 = 5^2$.
Puisque $x = 4$, alors $\sqrt{r_1r_2} = 4$, ou $r_1r_2 = 4^2$.
On multiplie ces trois équations, membre par membre, pour obtenir $r_1^2r_2^2r_3^2 = 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2$, ou $(r_1r_2r_3)^2 = (4 \cdot 5 \cdot 6)^2$, ou $r_1r_2r_3 = 4 \cdot 5 \cdot 6$ (puisque $r_1,r_2,r_3 > 0$), ou $r_1r_2r_3 = 120$.
On divise cette équation par $r_2r_3 = 6^2$, membre par membre, pour obtenir $r_1 = \frac{r_1r_2r_3}{r_2r_3}$, ou $r_1 = \frac{120}{6^2}$, ou $r_1 = \frac{10}{3}$.
De même, on obtient $r_2 = \frac{r_1r_2r_3}{r_1r_3}$ et $r_3 = \frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2}$, ou $r_2 = \frac{120}{5^2}$ et $r_3 = \frac{120}{4^2}$, ou $r_2 = \frac{24}{5}$ et $r_3 = \frac{15}{2}$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2013

le jeudi 18 avril 2013
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 19 avril 2013
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2013 University of Waterloo

1. (a) La droite qui passe aux points $(2, 0)$ et $(0, 4)$ a une pente de $\frac{4-0}{0-2}$, ou $\frac{4}{-2}$, ou -2.

   Puisque la droite passe au point $(0, 4)$, elle a une ordonnée à l'origine de 4.
   La droite a donc pour équation $y = -2x + 4$.

   (b) L'équation de la partie (a), $y = -2x + 4$, peut s'écrire sous la forme $2x + y = 4$.

   On divise chaque membre de l'équation par 4 pour obtenir $\frac{2x+y}{4} = \frac{4}{4}$, ou $\frac{2x}{4} + \frac{y}{4} = 1$.
   L'équation est donc $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$.

   (c) Pour obtenir l'abscisse à l'origine, on pose $y = 0$.
   L'équation $\frac{x}{3} + \frac{y}{10} = 1$ devient $\frac{x}{3} + \frac{0}{10} = 1$, ou $\frac{x}{3} = 1$, d'où $x = 3$.
   La droite a une abscisse à l'origine de 3.
   Pour obtenir l'ordonnée à l'origine, on pose $x = 0$.
   L'équation $\frac{x}{3} + \frac{y}{10} = 1$ devient $\frac{0}{3} + \frac{y}{10} = 1$, ou $\frac{y}{10} = 1$, d'où $y = 10$.
   La droite a une ordonnée à l'origine de 10.
   (On remarque que les coordonnées à l'origine de la droite sont les dénominateurs des fractions dans l'équation.)

   (d) *Solution 1*
   La droite qui passe aux points $(8, 0)$ et $(2, 3)$ a une pente de $\frac{3-0}{2-8}$, ou $\frac{3}{-6}$, ou $-\frac{1}{2}$.
   Son équation est donc de la forme $y = -\frac{1}{2}x + b$.
   Puisque le point $(8, 0)$ est sur la droite, ses coordonnées vérifient l'équation. On a donc $0 = -\frac{1}{2}(8) + b$, ou $0 = -4 + b$, ou $b = 4$.
   La droite a donc pour équation $y = -\frac{1}{2}x + 4$.
   On peut écrire l'équation sous la forme $\frac{1}{2}x + y = 4$.
   On divise chaque membre de l'équation par 4 pour obtenir $\frac{\frac{1}{2}x+y}{4} = \frac{4}{4}$, ou $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$.

   Solution 2
   On utilise les parties précédentes de la question pour reconnaitre qu'une équation de la forme $\frac{x}{e} + \frac{y}{f} = 1$ a pour abscisse à l'origine e et pour ordonnée à l'origine f.
   Puisque la droite passe au point $(8, 0)$, elle a une abscisse à l'origine de 8. Donc $e = 8$.
   L'équation devient donc $\frac{x}{8} + \frac{y}{f} = 1$. Puisque la droite passe au point $(2, 3)$, les coordonnées du point vérifient l'équation. On a donc $\frac{2}{8} + \frac{3}{f} = 1$, ou $\frac{3}{f} = 1 - \frac{1}{4}$, ou $\frac{3}{f} = \frac{3}{4}$, d'où $f = 4$.
   La droite a donc pour équation $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$.

2. (a) *Solution 1*

Une chandelle rouge de 100 cm met 600 minutes pour bruler au complet.

Elle brule donc au taux de $\frac{100 \text{ cm}}{600 \text{ min}}$, ou $\frac{1}{6}$ cm/min.

Après 180 minutes, la longueur de la chandelle rouge aura diminué de $\frac{1}{6}$ cm/min $\times$ 180 min, ou 30 cm.

Solution 2

Une chandelle rouge de 100 cm met 600 minutes pour bruler au complet.

La fraction de la chandelle rouge qui brule en 180 minutes est égale à $\frac{180}{600}$, ou $\frac{3}{10}$.

Puisque la chandelle avait une longueur initiale de 100 cm et que $\frac{3}{10}$ de 100 cm est égal à 30 cm, la chandelle rouge aura diminué de 30 cm en 180 minutes.

(b) La chandelle verte a une longueur initiale de 100 cm. Pour atteindre une longueur de 80 cm, elle doit perdre 20 cm en longueur, car $100 - 80 = 20$.

Or, 20 cm représente $\frac{20}{100}$, ou $\frac{1}{5}$ de la longueur initiale. Pour perdre 20 cm, la chandelle mettra donc $\frac{1}{5}$ du temps qu'elle mettrait à bruler au complet.

Puisque la chandelle verte met 480 minutes pour bruler au complet, elle mettra $\frac{1}{5}$ de 480 minutes, ou 96 minutes, pour atteindre une longueur de 80 cm.

(c) Puisque la chandelle rouge met 600 minutes pour bruler au complet, 60 minutes représentent $\frac{60}{600}$, ou $\frac{1}{10}$ de ce temps.

En 60 minutes, la longueur de la chandelle rouge diminuera de $\frac{1}{10}$ de 100 cm, ou 10 cm.

Après 60 minutes, la chandelle rouge aura donc une longueur de 90 cm.

Puisque la chandelle verte met 480 minutes pour bruler au complet, 60 minutes représentent $\frac{60}{480}$, ou $\frac{1}{8}$ de ce temps.

En 60 minutes, la longueur de la chandelle verte diminuera de $\frac{1}{8}$ de 100 cm, ou 12,5 cm.

Après 60 minutes, la chandelle verte aura donc une longueur de 87,5 cm.

Puisque $90 - 87{,}5 = 2{,}5$, la chandelle rouge aura 2,5 cm de plus que la chandelle verte après 60 minutes.

(d) *Solution 1*

D'après la partie (c), en 60 minutes, la longueur de la chandelle verte diminue de 2,5 cm de plus que celle de la chandelle rouge. Cela se poursuit à toutes les 60 minutes, car les chandelles brulent à des vitesses constantes.

Une différence en longueur de 2,5 cm à toutes les 60 minutes correspond au taux de $\frac{2{,}5}{60}$ cm/min., ou $\frac{5}{120}$ cm/min., ou $\frac{1}{24}$ cm/min.

Donc à toutes les 24 minutes, la chandelle verte perd 1 cm de plus en longueur que la chandelle rouge.

Donc, la chandelle rouge sera 7 cm plus longue que la chandelle verte après 7×24 minutes, ou 168 minutes.

Solution 2
La chandelle rouge brule au taux de 100 cm toutes les 600 minutes, ou $\frac{1}{6}$ cm/min.
La chandelle verte brule au taux de 100 cm toutes les 480 minutes, ou $\frac{5}{24}$ cm/min.
Donc, t minutes après avoir été allumée, la chandelle rouge aura perdu $\frac{1}{6}t$ cm en longueur.
Donc, t minutes après avoir été allumée, la chandelle verte aura perdu $\frac{5}{24}t$ cm en longueur.
Puisque les deux chandelles ont une longueur initiale de 100 cm, la chandelle rouge sera 7 m plus longue que la chandelle verte lorsque $(100 - \frac{1}{6}t) - (100 - \frac{5}{24}t) = 7$.
On simplifie pour obtenir $\frac{5}{24}t - \frac{1}{6}t = 7$. On multiplie chaque membre par 24 pour obtenir $5t - 4t = 7 \times 24$, d'où $t = 168$.
Donc, la chandelle rouge sera 7 m plus longue que la chandelle verte après 168 minutes.

3. (a) *Solution 1*
Le dernier nombre de la 7$^{\text{e}}$ rangée est égal à 7×8, ou 56.
Puisque la 7$^{\text{e}}$ rangée contient 7 nombres pairs consécutifs, on les écrit en ordre décroissant à partir de 56 : 56, 54, 52, 50, 48, 46, 44
Dans le tableau, les nombres paraitront dans l'ordre suivant : 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56

Solution 2
Le dernier nombre de la 6$^{\text{e}}$ rangée est égal à 6×7, ou 42.
Le nombre pair suivant, soit 44, est donc le premier nombre de la 7$^{\text{e}}$ rangée.
Puisque la 7$^{\text{e}}$ rangée contient 7 nombres pairs consécutifs, on les écrit à partir de 44.
Les nombres de la 7$^{\text{e}}$ rangée sont donc 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56.

(b) Le dernier nombre de la 100$^{\text{e}}$ rangée est égal à 100×101, ou 10 100.
Le dernier nombre de la 99$^{\text{e}}$ rangée est égal à 99×100, ou 9900.
Le nombre pair suivant, soit 9902, est donc le premier nombre de la 100$^{\text{e}}$ rangée.
Le premier nombre de la 100$^{\text{e}}$ rangée est donc 9900 et le dernier nombre de cette rangée est 10 100.

(c) Le dernier nombre de la rangée r est égal à $r(r+1)$. Donc $D = r(r+1)$.
Le 1$^{\text{er}}$ nombre de la rangée $(r+2)$ est 2 de plus que le dernier nombre de la rangée $(r+1)$.
Or, le dernier nombre de la rangée $(r+1)$ est $(r+1)(r+2)$. Donc $P = (r+1)(r+2)+2$.
On veut que $P + D$ ait une valeur d'au moins 2013.
On a donc $P + D = (r+1)(r+2) + 2 + r(r+1) \geq 2013$.
Pour déterminer la plus petite valeur possible de r pour laquelle $P + D \geq 2013$, on résout l'inéquation suivante :

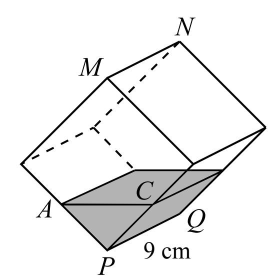
$$\begin{array}{rcl}
(r+1)(r+2) + 2 + r(r+1) & \geq & 2013 \\
r^2 + 3r + 2 + 2 + r^2 + r & \geq & 2013 \\
2r^2 + 4r + 4 & \geq & 2013 \\
r^2 + 2r + 2 & \geq & 1006{,}5 \\
r^2 + 2r + 1 & \geq & 1006{,}5 - 1 \\
(r+1)^2 & \geq & 1005{,}5 \\
\therefore\ r + 1 \geq +\sqrt{1005{,}5} & \text{ou} & r + 1 \leq -\sqrt{1005{,}5}
\end{array}$$

Puisque r est positif, on a $r + 1 \geq \sqrt{1005{,}5}$, d'où $r \geq +\sqrt{1005{,}5} - 1$, ou $r \approx 30{,}7096$.
Donc, 31 est la plus petite valeur possible de r pour laquelle $P + D$ a une valeur d'au moins 2013.
Vérification : Puisque D est le dernier nombre de la rangée r, ou 31, alors $D = 31 \times 32$,

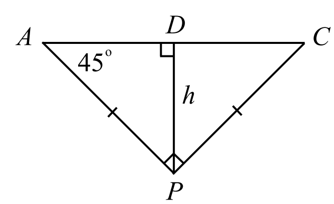
ou $D = 992$. Puisque P est le premier nombre de la rangée $r + 2$, ou 33, alors P est 2 de plus que le dernier nombre de la rangée 32. Donc $P = (32 \times 33) + 2$, ou $P = 1058$.
Donc $P + D = 1058 + 992 = 2050 \geq 2013$, tel que requis.
On doit aussi vérifier que 31 est la plus petite valeur de r pour laquelle $P + D \geq 2013$.
Puisque les nombres sont écrits en ordre croissant, il suffit de montrer que si $r = 30$, alors $P + D < 2013$.
Lorsque $r = 30$, $P + D = ((31 \times 32) + 2) + (30 \times 31) = 994 + 930 = 1924 < 2013$.

4. (a) L'eau a la forme d'un prisme à base carrée. La base de ce prisme est la même que la base du cube. Elle a une aire de 9×9 cm^2, ou 81 cm^2.
Puisque l'eau a une profondeur de 1 cm, l'eau a un volume de 1×81 cm^3, ou 81 cm^3.

(b) Si on fait subir au cube une rotation de 45° par rapport à l'axe de rotation PQ, l'arête MN sera directement au-dessus de l'arête PQ.
Dans cette position, l'eau a la forme d'un prisme à base triangulaire, comme dans la figure ci-contre.
La base est un triangle rectangle isocèle. Il est rectangle, car les deux faces du cube qui le forment sont perpendiculaires. Il est isocèle à cause de la symétrie causée par le fait que MN est directement au-dessus de PQ. (On pourrait dire qu'à cause de la symétrie, on a $AP = CP$.)

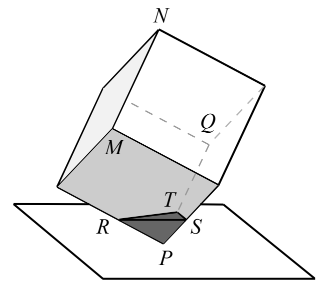


Comme on le voit dans la figure ci-contre, la profondeur de l'eau, h cm, est égale à la hauteur PD du triangle APC.
Dans le triangle APD, on a $\angle DAP = 45°$ (puisque le triangle APC est rectangle et isocèle). Donc $\angle APD = 180° - 90° - 45°$, ou $\angle APD = 45°$.
Le triangle APD est donc rectangle et isocèle et $AD = DP = h$ cm.

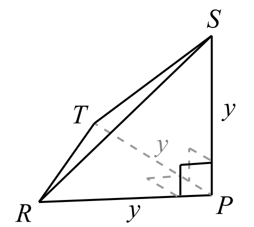


Le volume de l'eau est égal au produit de l'aire de la base APC du prisme et de la hauteur PQ du prisme, qui est de 9 cm.
Puisque $AD = DP = h$ cm et que les triangles ADP et CDP sont isométriques, alors $AC = 2AD = 2h$ cm.
L'aire du triangle APC, en cm^2, est égale à $\frac{1}{2}AC \times DP$, ou $\frac{1}{2}(2h) \times h$, ou h^2.
Le volume de l'eau est donc égal à $(h^2 \times 9)$ cm^3, ou $9h^2$ cm^3.
D'après la partie (a), ce volume est égal à 81 cm^3.
Puisque le volume de l'eau n'a pas changé, on a donc $9h^2 = 81$, d'où $h^2 = 9$, ou $h = 3$ (puisque $h > 0$).
La profondeur de l'eau dans le cube est donc de 3 cm.

(c) Dans cette position, l'eau a la forme d'un tétraèdre. Par symétrie, l'eau remonte également le long des arêtes, de manière que $PR = PS = PT$.
Trois des faces du tétraèdre, soit les triangles PRS, PST, et PTR, sont des triangles rectangles, puisque les arêtes du cube à un sommet sont perpendiculaires entre elles ($\angle RPS = \angle SPT = \angle TPR = 90°$).
Le tétraèdre a donc trois faces qui sont des triangles rectangles isocèles isométriques, soit les triangles PRS, PST et PTR.

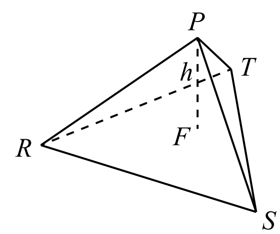


Puisque ces triangles sont isométriques, les côtés RS, ST et TR ont tous la même longueur. Donc, la quatrième face du tétraèdre, le triangle RST, est équilatéral.
Dans la figure ci-contre, le tétraèdre est placé de manière que sa base soit le triangle PRT. Puisque PS est perpendiculaire à la base (PS est perpendiculaire à PR et à PT), sa longueur est la hauteur du tétraèdre.
Le tétraèdre est une pyramide à base triangulaire. Son volume est donc égal à $\frac{1}{3}|\triangle PRT| \times PS$ ($|\triangle PRT|$ étant l'aire du triangle PRT).

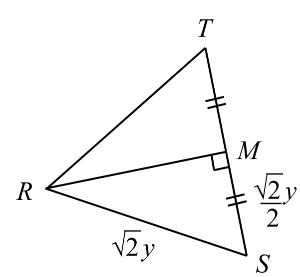


Soit $PR = PS = PT = y$ cm, comme dans la figure. (On rappelle que ces trois segments sont isométriques à cause de la symétrie.)
Dans le triangle PRT, PR est perpendiculaire à PT. Donc $|\triangle PRT| = \frac{1}{2}PR \times PT$, d'où $|\triangle PRT| = \frac{1}{2}y^2$ cm^2.
Le volume du tétraèdre est donc égal à $\frac{1}{3}|\triangle PRT| \times PS$, ou $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}y^2 \times y$ cm^3, ou $\frac{1}{6}y^3$ cm^3.
D'après la partie (a), ce volume est égal à 81 cm^3. Puisque le volume d'eau n'a pas changé, on a $\frac{1}{6}y^3 = 81$, ou $y^3 = 486$, d'où $y = \sqrt[3]{486}$.

Dans la figure ci-contre, le tétraèdre est placé de manière que l'on puisse visualiser la hauteur $PF = h$, ce qui correspond à la profondeur de l'eau que l'on doit déterminer.
Puisque le sommet opposé N est directement au-dessus du sommet P, le segment PN est perpendiculaire à la base.
Soit F le point d'intersection de PN et de la base.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle PRS : $RS^2 = PR^2 + PS^2$, d'où $RS^2 = y^2 + y^2$, ou $RS^2 = 2y^2$.
Puisque $RS > 0$, alors $RS = \sqrt{2}y$ cm. Donc $RS = ST = TR = \sqrt{2}y$ cm.
(On aurait pu utiliser le fait que le triangle PRS est un triangle remarquable $45°-45°-90°$, d'où $PR : PS : RS = 1 : 1 : \sqrt{2}$.)
Puisque le tétraèdre est une pyramide à base triangulaire, son volume est égal à $\frac{1}{3}|\triangle RST| \times h$.
Pour déterminer l'aire du triangle RST, on trace une hauteur RM, comme dans la figure suivante. Le point M est le milieu de TS. Donc $MS = \frac{\sqrt{2}}{2}y$ cm.
D'après le théorème de Pythagore, $RS^2 = RM^2 + MS^2$, ou $RM^2 = (\sqrt{2}y)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2$.
Donc $RM^2 = 2y^2 - \frac{1}{2}y^2$, ou $RM^2 = \frac{3}{2}y^2$. Puisque $RM > 0$, alors $RM = \sqrt{\frac{3}{2}}y$ cm.
(On aurait pu utiliser le fait que le triangle RMS est un triangle remarquable $30° - 60° - 90°$, d'où $MS : SR : RM = 1 : 2 : \sqrt{3}$.)



L'aire du triangle RST est donc égale à $\frac{1}{2}\times TS\times RM$, ou $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}y\times\sqrt{\frac{3}{2}}y$ cm^2, ou $\frac{\sqrt{3}}{2}y^2$ cm^2.
Le volume du tétraèdre (celui de l'eau) est donc égal à $\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y^2\right)h$ cm^3, ou $\frac{\sqrt{3}}{6}y^2h$ cm^3.
On reporte $y=\sqrt[3]{486}$ dans cette expression $\frac{\sqrt{3}}{6}y^2h$ du volume du tétraèdre qui devient $\frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt[3]{486})^2h$. D'après la partie (a), ce volume est égal à 81 cm^3. Puisque le volume d'eau n'a pas changé, on a $\frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt[3]{486})^2h=81$, ou $h=\dfrac{6\times 81}{\sqrt{3}(\sqrt[3]{486})^2}$ cm, ou $h=\dfrac{486}{\sqrt{3}\times 486^{\frac{2}{3}}}$ cm, ou $h=\dfrac{486^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}$ cm, ou $h\approx 4{,}539$ cm.
Au centième de centimètre près, la profondeur de l'eau dans le cube est de 4,54 cm.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2012

le jeudi 12 avril 2012
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2012
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2012 University of Waterloo

1. (a) Le triangle ACP est rectangle en P. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = 15^2 + 20^2$, ou $AC^2 = 625$, d'où $AC = 25$, puisque $AC > 0$.
La distance de A à C est de 25.

(b) Le triangle ABQ est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, $39^2 = BA^2 + 15^2$, ou $BA^2 = 1521 - 225$, ou $BA^2 = 1296$. Donc $BA = \sqrt{1296}$, ou $BA = 36$, puisque $BA > 0$.
La distance de B à A est de 36.

(c) Le triangle ABC est rectangle en C.
D'après le théorème de Pythagore, $BA^2 = BC^2 + AC^2$, ou $1296 = BC^2 + 625$, d'où $BC^2 = 671$. Donc $BC = \sqrt{671}$, puisque $BC > 0$, ou $BC \approx 25{,}904$.
Donc, la boule de Budan est à une distance de 25,904 du cochonnet.
Dans la partie (a), on a déterminé que la boule d'Adam est à une distance de 25 du cochonnet.
Donc, la boule d'Adam est le plus près du cochonnet.

2. (a) On obtient la moyenne de deux nombres en divisant leur somme par 2.
Donc, les moyennes des nombres, choisis deux à deux, sont :

$$\frac{25+5}{2} = \frac{30}{2} = 15, \quad \frac{5+29}{2} = \frac{34}{2} = 17 \text{ et } \frac{25+29}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

(b) La moyenne de 2 et de 6 est égale à $\frac{2+6}{2}$, ou 4.
Puisque 6 est supérieur à 2, la moyenne de 6 et de n est supérieure à la moyenne de 2 et de n. Donc, la moyenne de 6 et de n est 13 et la moyenne de 2 et de n est 11.
Donc $\frac{6+n}{2} = 13$, d'où $6 + n = 26$, ou $n = 20$.
On peut vérifier que la moyenne de 2 et de 20 est bien 11.

(c) Lorsqu'on additionne chaque nombre à la moyenne des deux autres nombres, on obtient :

$$2 + \frac{a+b}{2}, \; a + \frac{2+b}{2}, \; b + \frac{2+a}{2}$$

Pour déterminer les expressions qui correspondent aux résultats 14, 17 et 21, on doit placer les trois expressions en ordre croissant.
Puisque $2 < a < b$, alors $2 + (2 + a + b) < a + (2 + a + b) < b + (2 + a + b)$.
Donc $4 + a + b < 2a + 2 + b < 2b + 2 + a$.
On divise chaque membre par 2 pour obtenir $\frac{4+a+b}{2} < \frac{2a+2+b}{2} < \frac{2b+2+a}{2}$, ou
$\frac{4}{2} + \frac{a+b}{2} < \frac{2a}{2} + \frac{2+b}{2} < \frac{2b}{2} + \frac{2+a}{2}$, ou $2 + \frac{a+b}{2} < a + \frac{2+b}{2} < b + \frac{2+a}{2}$.
Ces trois expressions, dans l'ordre, correspondent donc à 14, 17 et 21.
Donc $2 + \frac{a+b}{2} = 14$ et $b + \frac{2+a}{2} = 21$.
On résout le système suivant de deux équations à deux inconnues :

$$2 + \frac{a+b}{2} = 14 \qquad (1)$$

$$b + \frac{2+a}{2} = 21 \qquad (2)$$

On multiplie chaque membre de chaque équation par 2 pour obtenir :

$$4 + a + b = 28 \qquad (3)$$

$$2b + 2 + a = 42 \qquad (4)$$

On simplifie pour obtenir :

$$\begin{aligned} a+b &= 24 && (5)\\ a+2b &= 40 && (6) \end{aligned}$$

On soustrait l'équation (5) de l'équation (6), membre par membre, pour obtenir $b = 16$.
On reporte $b = 16$ dans l'équation (5) pour obtenir $a + 16 = 24$, d'où $a = 8$.
(On reporte $a = 8$ et $b = 16$ dans la troisième expression $a + \dfrac{2+b}{2}$ pour vérifier que l'on obtient 17.)

3. (a) Puisque la droite a pour pente $m = -3$, elle a une équation de la forme $y = -3x + b$, b étant son ordonnée à l'origine. Puisque la droite passe au point $(2, 6)$, les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la droite. On reporte $x = 2$ et $y = 6$ dans l'équation pour obtenir $6 = -3(2) + b$, d'où $b = 12$.
L'équation de la droite est donc $y = -3x + 12$ et la droite a donc une ordonnée à l'origine de 12.
Pour déterminer l'abscisse à l'origine, on pose $y = 0$.
Donc $0 = -3x + 12$, ou $3x = 12$, ou $x = 4$. La droite a donc une abscisse à l'origine de 4.

(b) Puisque la pente a pour pente m, elle a une équation de la forme $y = mx + b$, b étant son ordonnée à l'origine.
Puisque la droite passe au point $(2, 6)$, les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la droite. On reporte $x = 2$ et $y = 6$ dans l'équation pour obtenir $6 = 2m + b$. Donc $b = 6 - 2m$.
La droite a donc pour ordonnée à l'origine $6 - 2m$ et son équation est $y = mx + (6 - 2m)$.
Pour déterminer l'abscisse à l'origine, on pose $x = 0$.
Donc $0 = mx + (6 - 2m)$, ou $mx = 2m - 6$, ou $x = \dfrac{2m-6}{m}$.
Donc, la droite a pour abscisse à l'origine $2 - \dfrac{6}{m}$. (Il faut que $m \neq 0$, autrement la droite serait horizontale et n'aurait aucune abscisse à l'origine.)

(c) D'après la partie (b), la droite a pour abscisse à l'origine $2 - \dfrac{6}{m}$ et pour ordonnée à l'origine $6 - 2m$. (Il faut que $m \neq 0$, autrement la droite serait horizontale et n'aurait aucune abscisse à l'origine.)
Puisque la droite coupe la partie positive de l'axe des abscisses en P, l'abscisse à l'origine $2 - \dfrac{6}{m}$ correspond à l'abscisse de P.
Puisque la droite coupe la partie positive de l'axe des ordonnées en Q, l'ordonnée à l'origine $6 - 2m$ correspond à l'ordonnée de Q. Donc $OP = 2 - \dfrac{6}{m}$ et $OQ = 6 - 2m$.
L'aire du triangle POQ est égale à $\dfrac{1}{2}(OP)(OQ)$, ou $\dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{6}{m}\right)(6 - 2m)$.
Puisque le triangle a une aire de 25, alors $\dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{6}{m}\right)(6 - 2m) = 25$. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(2 - \frac{6}{m}\right)(6 - 2m) &= 25\\ \left(2 - \frac{6}{m}\right)(6 - 2m) &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2m-6)(6-2m) &= 50m\\ 12m-4m^2-36+12m &= 50m\\ 4m^2+26m+36 &= 0\\ 2m^2+13m+18 &= 0\\ (2m+9)(m+2) &= 0\end{aligned}$$

Donc $m = -\frac{9}{2}$ ou $m = -2$.
Puisque P et Q doivent être situés sur la partie positive des axes, on doit vérifier que $2 - \frac{6}{m} > 0$ et $6 - 2m > 0$.
Lorsque $m = -\frac{9}{2}$, on a $2-\frac{6}{m} = 2+\frac{6}{\frac{9}{2}}$, ce qui est supérieur à 0. On a aussi $6-2m = 6+2(\frac{9}{2})$, ce qui est supérieur à 0.
Lorsque $m = -2$, on a $2-\frac{6}{m} = 2+\frac{6}{2}$, ce qui est supérieur à 0. On a aussi $6-2m = 6+2(2)$, ce qui est supérieur à 0.
Donc, les deux valeurs de m qui répondent aux conditions du problème sont $m = -\frac{9}{2}$ et $m = -2$.

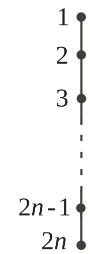
Remarque : Si on élimine la condition que P et Q doivent être situés sur la partie *positive* des axes, il y a deux autres valeurs de m pour lesquelles le triangle POQ admet une aire de 25. Quelles sont-elles ?

4. (a) Soit P le point de rencontre qui minimisera la distance totale que les élèves devront parcourir. Soit A, B, C, D et E les positions initiales de Abe, Bo, Carla, Denise et Ernie.

Si P était situé à l'ouest (à la gauche) de A, il faudrait que chaque élève marche plus loin jusqu'à P que si P était situé au point A.
De même, si P était situé à l'est (à la droite) de E, il faudrait que chaque élève marche plus loin jusqu'à P que si P était situé au point E.
Donc, P doit être situé sur la rue est-ouest, entre A et E inclusivement.
Pour minimiser la distance totale parcourue par les élèves, il faut minimiser $AP + BP + CP + DP + EP$.
Or, quelle que soit la position de P, de A à E, on a $AP + EP = 14$, puisque les segments AP et PE forment la rue au complet de A à E.
Donc, il reste à minimiser $BP + CP + DP$.
Si P était situé à l'ouest (à la gauche) de B (toujours sans dépasser A), il faudrait que Bo, Carla et Denise marchent plus loin jusqu'à P que si P était situé au point B.
De même, si P était situé à l'est (à la droite) de D, il faudrait que Bo, Carla et Denise marchent plus loin jusqu'à P que si P était situé au point D.
Donc, P doit être situé sur la rue est-ouest, entre B et D inclusivement.
Or, quelle que soit la position de P, de B à D, on a $BP + DP = 6$.
Il reste donc à minimiser CP, ce qu'on réussit à faire en plaçant P au point C, ce qui donne $CP = 0$.

La distance minimale que les élèves doivent parcourir est donc de 14+6, ou 20. On l'obtient lorsque les élèves se réunissent au point C, soit la position initiale de Carla.

(b) Soit $2n$ le nombre d'élèves (puisque ce nombre est pair).
Soit P le point de rencontre qui minimisera la distance totale que les élèves devront parcourir.
On nomme par un nombre de 1 à $2n$ les élèves et leur carrefour initial, en ordre du nord au sud.



Comme dans la partie (a), si P était situé au nord de l'élève 1, il faudrait que chaque élève marche plus loin jusqu'à P que si P était situé au carrefour 1.
De même, si P était situé au sud de l'élève $2n$, il faudrait que chaque élève marche plus loin jusqu'à P que si P était situé au carrefour $2n$.
Donc, P doit être situé sur la rue nord-sud à un endroit entre le carrefour 1 et le carrefour $2n$ inclusivement.
Or, quelle que soit la position de P, entre ces deux carrefours, la distance totale parcourue par l'élève 1 et l'élève $2n$ est constante (elle est égale à la distance entre le carrefour 1 et le carrefour $2n$).
Donc pour minimiser la distance parcourue par tous les élèves, il faut minimiser la distance parcourue par les élèves $2, 3, 4, \ldots, (2n-1)$.

De même, on peut conclure que P doit être situé entre l'élève 2 et l'élève $(2n-1)$ inclusivement et que le cas échéant, quelle que soit sa position, la distance totale parcourue par l'élève 2 et l'élève $(2n-1)$ est constante (elle est égale à la distance entre le carrefour 2 et le carrefour $(2n-1)$).
Donc pour minimiser la distance parcourue par tous les élèves, il faut minimiser la distance parcourue par les élèves $3, 4, 5, \ldots, (2n-2)$.

On continue de la même manière, en concluant que P doit être situé entre le carrefour 3 et le carrefour $(2n-2)$ inclusivement, puis entre le carrefour 4 et le carrefour $(2n-3)$ inclusivement, entre le carrefour 5 et le carrefour $(2n-4)$ inclusivement, et ainsi de suite.
Éventuellement, on conclut que le point P doit être situé entre les deux carrefours du milieu, soit entre le carrefour n et le carrefour $(n+1)$ inclusivement. (À noter qu'il y a $(n-1)$ carrefours au nord du carrefour n et $(n-1)$ carrefours au sud du carrefour $(n+1)$).
Quelle que soit la position de P entre les deux carrefours du milieu inclusivement, la distance totale parcourue par l'élève n et l'élève $(n+1)$ est constante (elle est égale à la distance entre le carrefour n et le carrefour $(n+1)$).
Donc, pour minimiser la distance totale que les élèves devront parcourir, il faut que les élèves se rencontrent à n'importe quel endroit entre le carrefour n et le carrefour $(n+1)$ inclusivement.

(c) Puisque les élèves peuvent seulement se déplacer le long des rues, la distance totale qu'ils parcourent est égale à la somme des distances parcourues en direction est-ouest et des distances parcourues en direction nord-sud.
À noter que si un élève doit se déplacer 5 km vers l'est et 4 km vers le nord, il peut emprunter plusieurs parcours pour le faire. Or quel que soit le parcours, la distance totale parcourue sera de 9 km, soit 5 km vers l'est et 4 km vers le nord.
Il faut donc retenir que la distance parcourue en direction est-ouest est indépendante de celle parcourue en direction nord-sud. On peut donc minimiser les distances en direction est-ouest et les distances en direction nord-sud indépendamment les unes des autres. À noter que cela est vrai si les distances sont minimisées dans les deux directions à partir d'un même point, ce qui est le cas.
Cela nous permet de traiter le problème en deux parties.

Dans la partie 1, on déterminera l'endroit (une abscisse) qui minimisera la distance que les élèves doivent parcourir horizontalement.
Dans la partie 2, on déterminera l'endroit (une ordonnée) qui minimisera la distance que les élèves doivent parcourir verticalement.
On combinera ensuite ces résultats pour déterminer l'endroit qui minimisera les deux directions.

Partie 1
Puisqu'on cherche à minimiser la distance totale parcourue horizontalement par les 100 élèves, il suffit de considérer leurs positions de départ est-ouest, c'est-à-dire leurs abscisses.
Les 50 premiers élèves ont pour abscisses respectives $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots, 2^{49}, 2^{50}$.
Les élèves numérotés de 51 à 100 ont pour abscisses respectives $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 49, 50$.
Pour déterminer l'endroit qui minimisera la distance parcourue horizontalement, on procède comme dans la partie (b). On place les abscisses en ordre croissant et on détermine les deux abscisses au milieu.
Puisqu'il y a 100 abscisses, on cherche la 50e et la 51e.
Dans la liste $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots, 2^{49}, 2^{50}$, il y a 5 nombres inférieurs à 45.
Ces 5 nombres, soit $2, 4, 8, 16$ et 32, de même que les 44 nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 44$ de la deuxième liste, forment les 49 premiers nombres de l'ensemble ordonné.
Le 50e nombre est donc 45 et le 51e nombre est 46.
Ces abscisses minimisent la distance totale parcourue horizontalement par les 100 élèves.

Partie 2
Puisqu'on cherche à minimiser la distance totale parcourue verticalement par les 100 élèves, il suffit de considérer leurs positions de départ nord-sud, c'est-à-dire leurs ordonnées.
Les 50 premiers élèves ont pour ordonnées respectives $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 49, 50$. Les élèves numérotés de 51 à 100 ont pour ordonnées respectives, $2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 98, 100$.
Pour déterminer l'endroit qui minimisera la distance parcourue verticalement, on procède comme dans la partie (b)). On place les ordonnées en ordre croissant et on détermine les deux ordonnées au milieu.
Puisqu'il y a 100 ordonnées, on cherche la 50e et la 51e.
Il y a 49 nombres qui sont inférieurs ou égaux à 33 (il y en a 33 dans la première liste et 16 dans la deuxième).
Donc, les 50e et 51e nombres égalent chacun 34 (puisque le nombre 34 parait dans chaque liste).
Puisque les 50e et 51e nombres égalent chacun 34, il n'y a qu'une position verticale qui minimisera la distance totale parcourue par les 100 élèves verticalement.

La distance totale parcourue horizontalement est minimisée lorsque $x = 45$ ou $x = 46$ et la distance totale parcourue verticalement est minimisée lorsque $y = 34$.
Donc, les élèves peuvent se rencontrer aux carrefours $(45, 34)$ ou $(46, 34)$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Concours Galois 2011

le mercredi 13 avril 2011

Solutions

©2011 Le Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

1. (a) Selon la règle de Jacques, le 2$^{\text{e}}$ terme de la suite de Fabien est $\dfrac{1}{1-2}$, ou $\dfrac{1}{-1}$, ou -1.

   (b) Puisque le 2$^{\text{e}}$ terme est -1, le 3$^{\text{e}}$ terme est $\dfrac{1}{1-(-1)}$, ou $\dfrac{1}{1+1}$, ou $\dfrac{1}{2}$.

   Puisque le 3$^{\text{e}}$ terme est $\frac{1}{2}$, le 4$^{\text{e}}$ terme est $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}$, ou $\dfrac{1}{\frac{1}{2}}$, ou 2.

   Puisque le 4$^{\text{e}}$ terme est 2, le 5$^{\text{e}}$ terme est $\dfrac{1}{1-2}$, ou $\dfrac{1}{-1}$, ou -1.

   (c) Puisque le 4$^{\text{e}}$ terme est 2, comme le 1$^{\text{er}}$ terme, et que chaque terme ne dépend que du terme précédent, les nombres se répètent à tous les trois termes dans la suite.
   La suite est donc $2, -1, \frac{1}{2}, 2, -1, \frac{1}{2}, 2, \ldots$
   Puisque les termes $2, -1, \frac{1}{2}$ se répètent à tous les trois termes, il faut connaître le nombre de groupes de trois termes qu'il y a dans les 2011 termes.
   Puisque $2011 = 670 \times 3 + 1$, les termes $2, -1, \frac{1}{2}$ se répètent 670 fois (ce qui donne 2010 termes), et le 2011$^{\text{e}}$ terme est un 2.
   Il y a donc 671 termes qui égalent 2 dans la suite de Fabien.

   (d) Le cycle de trois termes, dans la partie (c), a une somme de $2 + (-1) + \frac{1}{2}$, ou $\frac{3}{2}$.
   Or, ce cycle est répété 670 fois. La somme des 2010 premiers termes est donc égale à $670 \times \frac{3}{2}$, ou 1005.
   Puisque le 2011$^{\text{e}}$ terme est 2, la somme des termes de la suite de Fabien est égale à $1005+2$, ou 1007.

2. (a) Dans le tableau suivant, on considère toutes les façons pour les jetons de tomber.

Jeton 5	Jeton 7	Jeton 10	Somme
0	0	0	0
5	0	0	5
0	7	0	7
0	0	10	10
5	7	0	12
5	0	10	15
0	7	10	17
5	7	10	22

   Les autres sommes possibles sont 0, 5, 7, 10, 12, 15 et 22.

   (b) *Solution 1*
   Puisque les trois sommes sont différentes les unes des autres, il doit y avoir une pièce différente, à chaque lancer, qui indique un 0.
   Donc à la fin des trois lancers, chaque pièce a indiqué 0 une fois et son autre nombre deux fois.
   Donc le total des trois sommes, $60 + 110 + 130$, ou 300, représente deux fois la somme des nombres non nuls des trois jetons.
   Donc les trois nombres non nuls ont une somme de 150 ($300 \div 2 = 150$).
   Or, la somme maximale que l'on peut obtenir en lançant les trois jetons correspond à la somme des trois nombres non nuls. Elle est donc égale à 150.

Solution 2
Soit a, b et c les trois nombres non nuls.
Puisque les trois sommes sont différentes les unes des autres, il doit y avoir une pièce différente, à chaque lancer, qui indique un 0. On peut donc supposer que $a + b = 60$, $a + c = 110$ et $b + c = 130$.
On additionne les trois équations, membre par membre, pour obtenir $2a + 2b + 2c = 300$, d'où $2(a + b + c) = 300$, ou $a + b + c = 150$.
Cette dernière équation indique que la somme des trois nombres non nuls est égale à 150.
Or, la somme maximale que l'on peut obtenir en lançant les trois jetons correspond à la somme des trois nombres non nuls. Elle est donc égale à 150.

(c) On considère toutes les possibilités par rapport aux deux premiers jetons, ce qui fixe alors les valeurs possibles du troisième jeton, puisque la somme des résultats est de 170. On utilise un tableau :

Jeton 25	Jeton 50	3^{e} jeton
0	0	$170 - 0 = 170$
25	0	$170 - 25 = 145$
0	50	$170 - 50 = 120$
25	50	$170 - 75 = 95$

Les nombres possibles, en plus du zéro, qui pourraient paraître sur le troisième jeton sont 170, 145, 120 et 95.

3. (a) Puisque $\angle ABP = 90°$, le triangle ABP est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, $BP^2 = AP^2 - AB^2$, d'où $BP^2 = 20^2 - 16^2$, ou $BP^2 = 144$. Puisque $BP > 0$, alors $BP = 12$.
Puisque $\angle QTP = 90°$, le triangle QTP est rectangle. De plus, $PT = 12$, car $PT = BP$.
D'après le théorème de Pythagore, $QT^2 = QP^2 - PT^2$, d'où $QT^2 = 15^2 - 12^2$, ou $QT^2 = 81$.
Puisque $QT > 0$, alors $QT = 9$.

(b) Dans les triangles PQT et DQS, $\angle PTQ = \angle DSQ = 90°$.
De plus, les angles PQT et DQS sont congrus, puisqu'ils sont opposés par le sommet.
Puisque $\angle PTQ = \angle DSQ$, que $\angle PQT = \angle DQS$ et que les mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors les troisièmes angles de ces triangles, soit QPT et QDS, sont congrus.
Puisque les angles des triangles PQT et DQS sont congrus deux à deux, les triangles sont semblables.

(c) Puisque $ABCD$ est un rectangle et que TS est perpendiculaire à BC, alors $ABTS$ est un rectangle.
On a donc $TS = BA = 16$ et $QS = TS - QT$, d'où $QS = 16 - 9$, ou $QS = 7$.
Comme on l'a vu dans la partie (b), les triangles PQT et DQS sont semblables.
Donc dans ces triangles, les rapports des longueurs de côtés correspondants sont égaux.
Donc $\dfrac{SD}{TP} = \dfrac{QS}{QT}$, ou $\dfrac{SD}{12} = \dfrac{7}{9}$, d'où $SD = 12 \times \dfrac{7}{9}$, ou $SD = \dfrac{28}{3}$.

(d) *Solution 1*
Les triangles QAS et RAD ont un angle commun en A.
Puisque $ABCD$ et $ABTS$ sont des rectangles, alors $\angle RDA = \angle QSA = 90°$.
Puisque $\angle QAS = \angle RAD$, que $\angle RDA = \angle QSA$ et que les mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors les troisièmes angles de ces triangles, soit $\angle SQA$ et $\angle DRA$, sont congrus.

Puisque les angles des triangles QAS et RAD sont congrus deux à deux, ces triangles sont semblables.
Donc dans ces triangles, les rapports des longueurs de côtés correspondants sont égaux.
Donc $\frac{RD}{QS} = \frac{DA}{SA}$, ou $RD = QS \times \frac{DA}{SA}$.
Or, $DA = AS + SD$, d'où $DA = 24 + \frac{28}{3}$, ou $DA = \frac{100}{3}$. Donc $RD = 7 \times \frac{(\frac{100}{3})}{24}$, d'où $RD = 7 \times \frac{100}{72}$, ou $RD = \frac{175}{18}$.
Puisque les triangles QAS et RAD sont semblables, alors $\frac{RA}{QA} = \frac{RD}{QS}$, ou $RA = QA \times \frac{RD}{QS}$.
Donc $RA = 25 \times \frac{(\frac{175}{18})}{7}$, d'où $RA = 25 \times \frac{25}{18}$, ou $RA = \frac{625}{18}$.
Puisque $QR = RA - QA$, alors $QR = \frac{625}{18} - 25$, d'où $QR = \frac{625 - 450}{18}$, ou $QR = \frac{175}{18}$.
Donc $QR = RD$.

Solution 2
Dans les triangles PQA et TQP, les rapports des longueurs de côtés correspondants sont égaux, c'est-à-dire que $\frac{PA}{TP} = \frac{PQ}{TQ} = \frac{QA}{QP}$. En effet, $\frac{20}{12} = \frac{15}{9} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$.
Ces triangles sont donc semblables et leurs angles correspondants sont congrus deux à deux.
Soit $\angle PQA = \angle TQP = \alpha$.
Puisque les angles RQD et PQA sont opposés par les sommets, $\angle RQD = \angle PQA = \alpha$.
Puisque les segments CD et TS sont parallèles, alors $\angle RDQ = \angle TQP = \alpha$ (angles correspondants par rapports aux segments parallèles).
Donc $\angle RDQ = \angle RQD$. Le triangle RQD est donc isocèle, d'où $QR = RD$.

4. (a) Puisque $T(4) = 10$ et que $T(10) = 55$, alors $T(a) = T(10) - T(4)$, d'où $T(10) = 45$.
On a donc $\frac{a(a+1)}{2} = 45$, d'où $a^2 + a = 90$, ou $a^2 + a - 90 = 0$.
Donc $(a - 9)(a + 10) = 0$, d'où $a = 9$ ou $a = -10$. Puisque a est un entier positif, la dernière racine est rejetée.
Donc $a = 9$.

(b) Le membre de gauche de l'équation, soit $T(b+1)-T(b)$, est égal à $\frac{(b+1)(b+2)}{2} - \frac{b(b+1)}{2}$, que l'on simplifie pour obtenir $\frac{b^2 + 3b + 2 - b^2 - b}{2}$, ou $\frac{2b+2}{2}$, ou $b + 1$.
L'équation nous dit donc que $b + 1$ est égal au nombre triangulaire $T(x)$.
Puisque $b > 2011$, on cherche le plus petit nombre triangulaire supérieur à 2012.
Par tâtonnements, on obtient $T(62) = 1953$ et $T(63) = 2016$.
L'équation devient $b + 1 = 2016$, d'où $b = 2015$.
La plus petite valeur de b est 2015.

(c) Puisque $T(28) = 406$, la deuxième équation est $c + d + e = 406$, ou $e = 406 - (c + d)$.

On simplifie la première équation :

$$\begin{aligned} T(c)+T(d) &= T(e) \\ \frac{c(c+1)}{2}+\frac{d(d+1)}{2} &= \frac{e(e+1)}{2} \\ c(c+1)+d(d+1) &= e(e+1) \end{aligned}$$

On reporte $e = 406-(c+d)$ dans cette équation :

$$\begin{aligned} c(c+1)+d(d+1) &= e(e+1) \\ c(c+1)+d(d+1) &= (406-(c+d))(407-(c+d)) \\ c^2+c+d^2+d &= 406\times 407-406(c+d)-407(c+d)+(c+d)^2 \\ c^2+c+d^2+d &= 406\times 407-813(c+d)+(c+d)^2 \\ c^2+c+d^2+d &= 406\times 407-813(c+d)+c^2+2cd+d^2 \\ c+d &= 406\times 407-813(c+d)+2cd \\ 2cd &= c+d+813(c+d)-406\times 407 \\ 2cd &= 814(c+d)-406\times 407 \\ cd &= 407(c+d)-203\times 407 \\ cd &= 407(c+d-203), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(d) On utilise le résultat de la partie (c). On cherche donc tous les triplets (c, d, e) d'entiers strictement positifs pour lesquels $c \le d \le e$, tels que $cd = 407(c+d-203)$.
Puisque le membre de droite est divisible par 407, le membre de gauche doit l'être également.
Or $407 = 37\times 11$.
Puisque cd est divisible par 407 et que 407 est divisible par 37, alors cd est divisible par 37.
Puisque 37 est un nombre premier, c ou d doit être divisible par 37.
Supposons que d est divisible par 37. Il existe donc un entier strictement positif n tel que $d = 37n$.
(On considérera un peu plus loin la possibilité que c'est l'entier c qui est divisible par 37.)
Puisque $c+d+e = 406$ et que c, d et e sont des entiers strictement positifs, alors $1 \le d \le 404$, d'où $1 \le n \le 10$.
On reporte $d = 37n$ dans l'équation $cd = 407(c+d-203)$.
On obtient $37cn = 407(c+37n-203)$. On divise chaque membre par 37 pour obtenir $cn = 11(c+37n-203)$, ou $cn-11c = 11\times 37n-11\times 203$.
On isole c pour obtenir $c(n-11) = 407n-2233$, ou $c = \dfrac{407n-2233}{n-11}$.
On écrit le numérateur $407n-2233$ sous la forme $407n-4477+2244$, ou $407(n-11)+2244$.
Donc $c = \dfrac{407(n-11)+2244}{n-11}$, ou $c = \dfrac{407(n-11)}{n-11}+\dfrac{2244}{n-11}$, ou $c = 407+\dfrac{2244}{n-11}$.
Puisque c est un entier strictement positif, alors $n-11$ doit être un diviseur de 2244.
Puisque $1 \le n \le 10$, alors $-10 \le n-11 \le -1$.
Les seules valeurs possibles de $n-11$ sont donc $-1, -2, -3, -4$ et -6.
Parmi ces valeurs possibles, seule $n-11 = -6$ donne une valeur positive de c.
Puisque $n-11 = -6$, alors $n = 5$, $d = 37\times 5$, ou $d = 185$, $c = 33$ et $e = 406-(c+d)$, ou $e = 188$.
On a trouvé un triplet (c, d, e), pour lequel $c \le d \le e$, tel que $cd = 407(c+d-203)$, soit

$(33, 185, 188)$.

On a supposé, un peu plus haut, que d était divisible par 37. Supposons maintenant que c'est c qui est divisible par 37. Il existe donc un entier strictement positif n tel que $c = 37n$.
Puisque $c + d + e = 406$ et que c, d et e sont des entiers strictement positifs, alors $1 \leq c \leq 404$, d'où $1 \leq n \leq 10$.
On reporte $c = 37n$ dans l'équation $cd = 407(c + d - 203)$ qui devient
$37dn = 407(37n + d - 203)$.
On divise chaque membre par 37 pour obtenir $dn = 11(37n + d - 203)$, ou
$dn - 11d = 11 \times 37n - 11 \times 203$.
On isole d pour obtenir $d(n - 11) = 407n - 2233$, ou $d = \dfrac{407n - 2233}{n - 11}$.
On écrit le numérateur $407n-2233$ sous la forme $407n-4477+2244$, ou $407(n-11)+2244$.
Donc $d = \dfrac{407(n - 11) + 2244}{n - 11}$, ou $d = \dfrac{407(n - 11)}{n - 11} + \dfrac{2244}{n - 11}$, ou $d = 407 + \dfrac{2244}{n - 11}$.
Puisque d est un entier strictement positif, alors $n - 11$ doit être un diviseur de 2244.
Puisque $1 \leq n \leq 10$, alors $-10 \leq n - 11 \leq -1$.
Les seules valeurs possibles de $n - 11$ sont donc $-1, -2, -3, -4$ et -6.
Parmi ces valeurs possibles, seule $n - 11 = -6$ donne une valeur positive de d.
Puisque $n - 11 = -6$, alors $n = 5$, $c = 37 \times 5$, ou $c = 185$, $d = 33$ et $e = 406 - (c + d)$, ou $e = 188$.
Puisqu'on doit avoir $c \leq d \leq e$, cette solution est rejetée.

Le seul triplet (c, d, e) pour lequel $c \leq d \leq e$, tel que $cd = 407(c+d-203)$ est $(33, 185, 188)$.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Galois 2010

le vendredi 9 avril 2010

Solutions

©2010 Le Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

1. (a) La nouvelle pomme de douche laisse passer 13 L d'eau à la minute.
Pour utiliser 260 L d'eau à ce taux, Émilie prendrait $\frac{260}{13}$ minutes, ou 20 minutes.

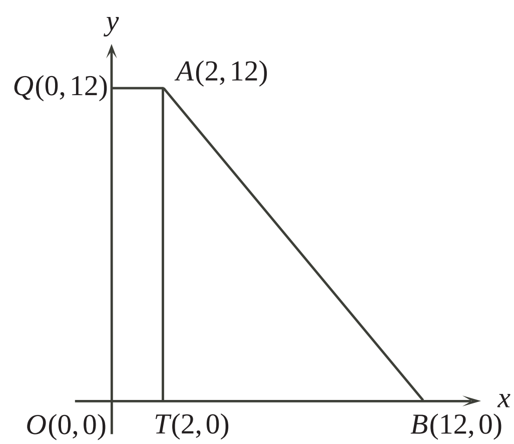
(b) En utilisant la nouvelle pomme de douche, Émilie utilise 5 L (c.-à-d. 18 L $-$ 13 L) d'eau par minute de moins que lorsqu'elle utilisait la vieille pomme de douche.
Si elle prend une douche de 10 minutes, Émilie utilise donc 50 L (c.-à-d. 10×5 L) moins d'eau.

(c) D'après la partie (b), Émilie épargne 5 L d'eau par minute en utilisant la nouvelle pomme de douche.
Si elle prend une douche de 15 minutes, Émilie épargne 75 L (c.-à-d. 15×5 L) d'eau.
Puisque l'eau coûte 8 cents par 100 L, Émilie épargnera 6 cents (c.-à-d. $\frac{8}{100} \times 75$ cents) en utilisant la nouvelle pomme de douche.

(d) *Solution 1*
L'eau coûte 8 cents par 100 L et Émilie épargne 5 L d'eau par minute.
Avec la nouvelle pomme de douche, elle épargne donc $\frac{8}{100} \times 5$ cents par minute, soit $\frac{8}{20}$ cents par minute, ou $\frac{2}{5}$ cents par minute.
Pour épargner 30 \$, Émilie devra passer $3000 \div \frac{2}{5}$ minutes, soit $3000 \times \frac{5}{2}$ minutes, ou 7500 minutes sous la douche.

Solution 2
D'après la partie (c), Émilie épargne 6 cents lorsqu'elle prend une douche de 15 minutes.
Puisque $3000 \div 6 = 500$, elle aura besoin de 15×500 minutes, ou 7500 minutes, sous la douche pour épargner 30 \$.

2. (a) *Solution 1*
Soit T le point $(2, 0)$. T est situé sur OB de manière que AT soit vertical.
Puisque QO et AT sont verticaux et que QA et OT sont horizontaux, $QATO$ est un rectangle.
L'aire du rectangle $QATO$ est égale à $QA \times QO$, soit 2×12, ou 24.
Puisque AT est perpendulaire à TB, alors dans le triangle ATB, AT est la hauteur qui correspond à la base TB.
L'aire du triangle ATB est égale à $\frac{1}{2} \times TB \times AT$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2} \times (12 - 2) \times 12$, ou 60.
L'aire du quadrilatère $QABO$ est égale à la somme de l'aire du rectangle $QATO$ et de l'aire du triangle ATB, c'est-à-dire à $24 + 60$, ou 84.



Solution 2
Puisque QA et OB sont horizontaux, QA est parallèle à OB.
Donc, $QABO$ est un trapèze.
Puisque QO est perpendiculaire à OB, QO est la hauteur du trapèze.
Donc, l'aire de $QABO$ est égale à $\frac{1}{2} \times QO \times (QA + OB)$, ou $\frac{1}{2} \times 12 \times (2 + 12)$, ou 84.

(b) Puisque CO est perpendiculaire à OB, alors dans le triangle COB, CO est la hauteur qui correspond à la base OB. L'aire du triangle COB est égale à $\frac{1}{2} \times OB \times CO$, soit $\frac{1}{2} \times 12 \times p$, ou $6p$.

(c) Puisque QA est perpendiculaire à QC, alors dans le triangle QCA, QC est la hauteur qui correspond à la base QA. L'aire du triangle QCA est égale à $\frac{1}{2} \times QA \times QC$, soit $\frac{1}{2} \times 2 \times (12 - p)$, ou $12 - p$.

(d) On obtient l'aire du triangle ABC en soustrayant l'aire des triangles COB et QCA de l'aire du quadrilatère $QABO$.
D'après les parties (a), (b) et (c), l'aire du triangle ABC est donc égale à $84-6p-(12-p)$, ou $72 - 5p$.
Puisque l'aire du triangle ABC est égale à 27, alors $72 - 5p = 27$, d'où $5p = 45$, ou $p = 9$.

3. (a) Pour résoudre le système d'équations, on utilise la méthode par élimination.
On additionne les équations, membre par membre, pour obtenir $2x = 52$, ou $x = 26$.
On reporte $x = 26$ dans la première équation pour obtenir $26 + y = 42$, ou $y = 16$.
On a donc pour solution $(x,y) = (26,16)$.

(b) *Solution 1*
On utilise la méthode par élimination, comme dans la partie (a).
On additionne les équations, membre par membre, pour obtenir $2x = p + q$, ou $x = \frac{p+q}{2}$.
Or, p est un entier pair et q est un entier impair.
La somme d'un entier pair et d'un entier impair est toujours un entier impair.
Donc, $\frac{p+q}{2}$ représente un entier impair divisé par 2, ce qui n'est pas un entier.
Donc, le système d'équations n'admet aucune solution (x,y) pour laquelle x et y sont des entiers.

Solution 2
On utilise la méthode par élimination, comme dans la partie (a).
On additionne les équations, membre par membre, pour obtenir $2x = p + q$. Puisque la somme d'un entier pair et d'un entier impair est toujours un entier impair, le membre de droite de l'équation $2x = p + q$ est un nombre impair. Or, le membre de gauche de l'équation est un entier pair pour tout entier x. Donc, le système d'équations n'admet aucune solution (x,y) pour laquelle x et y sont des entiers.

(c) Le membre de gauche de l'équation, soit $x^2 - y^2$, est une différence de carrés.
On factorise l'expression $x^2 - y^2$ et l'équation $x^2 - y^2 = 420$ devient $(x + y)(x - y) = 420$.
Puisque x et y sont des entiers positifs, alors $x + y$ est un entier positif.
Puisque $(x + y)(x - y) = 420$ et que $x + y$ est un entier positif, alors $x - y$ est un entier positif.
Puisque x et y sont des entiers positifs, alors $x + y > x - y$.
On cherche donc deux entiers positifs qui ont un produit de 420.
On écrit toutes les possibilités pour lesquelles $x + y > x - y$:

$x+y$	$x-y$	$(x+y)(x-y)$
420	1	420
210	2	420
140	3	420
105	4	420
84	5	420
70	6	420
60	7	420
42	10	420
35	12	420
30	14	420
28	15	420
21	20	420

Chacune de ces possibilités génère un système d'équations.
Par exemple, pour 420 et 1, on a $(x+y)(x-y) = 420 \times 1$, d'où :

$$\begin{aligned} x+y &= 420 \\ x-y &= 1 \end{aligned}$$

D'après la partie (b), on sait que le système n'admet aucune solution $(x{,}y)$ pour laquelle x et y sont des entiers strictement positifs si un des facteurs est pair alors que l'autre est impair. On peut donc éliminer du tableau les cas où un facteur est pair et l'autre est impair. Il reste les possibilités suivantes :

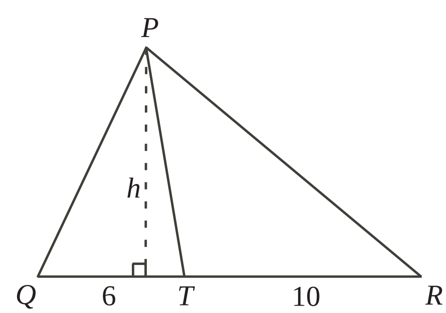
$x+y$	$x-y$	$(x+y)(x-y)$
210	2	420
70	6	420
42	10	420
30	14	420

D'après la partie (b), on sait aussi que pour déterminer la valeur de x, on additionne les deux équations, membre par membre, et qu'on divise ensuite chaque membre par 2. On reporte ensuite la valeur de x dans une ou l'autre équation pour déterminer la valeur de y. On complète les solutions à l'aide du tableau suivant :

$x+y$	$x-y$	$(x+y)(x-y)$	$2x$	x	y
210	2	420	212	106	104
70	6	420	76	38	32
42	10	420	52	26	16
30	14	420	44	22	8

Donc, les couples (x, y) d'entiers strictement positifs qui vérifient l'équation $x^2 - y^2 = 420$ sont $(106, 104), (38, 32), (26, 16)$ et $(22, 8)$.

4. (a) Au point P, on abaisse la hauteur du triangle PQT. On remarque que cette hauteur est aussi une hauteur du triangle PTR. Soit h la longueur de cette hauteur. Le rapport de l'aire du triangle PQT à celle du triangle PTR est égale à $\dfrac{\frac{1}{2} \times QT \times h}{\frac{1}{2} \times TR \times h}$, soit $\dfrac{QT}{TR}$, ou $\dfrac{6}{10}$, ou $\dfrac{3}{5}$.



(b) D'après la partie (a), on peut conclure que si deux triangles ont chacun une base sur une même droite ainsi qu'une même hauteur, alors le rapport de leur aire est égal au rapport de la longueur de leur base. On fera appel à cette conclusion dans les parties (b) et (c). On utilisera aussi la notation $|\triangle XYZ|$ pour représenter l'aire du triangle XYZ.

On a donc $\dfrac{|\triangle AEF|}{|\triangle DEF|} = \dfrac{AF}{FD} = \dfrac{3}{1}$. Donc $|\triangle AEF| = 3 \times |\triangle DEF|$, d'où $|\triangle AEF| = 3(17)$, ou $|\triangle AEF| = 51$.

Donc, $|\triangle AED| = |\triangle AEF| + |\triangle DEF|$, d'où $|\triangle AED| = 51 + 17$, ou $|\triangle AED| = 68$.

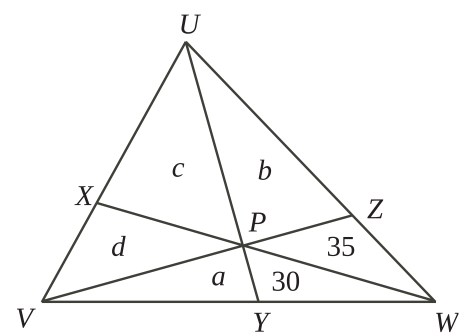
De même, $\dfrac{|\triangle ECD|}{|\triangle AED|} = \dfrac{EC}{AE} = \dfrac{2}{1}$. Donc, $|\triangle ECD| = 2 \times |\triangle AED|$, d'où $|\triangle ECD| = 2(68)$, ou $|\triangle ECD| = 136$.

Donc $|\triangle DCA| = |\triangle ECD| + |\triangle AED|$, d'où $|\triangle DCA| = 136 + 68$, ou $|\triangle DCA| = 204$.

Puisque D est le milieu de BC, $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{1}{1}$. Donc $\dfrac{|\triangle BDA|}{|\triangle DCA|} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{1}{1}$.

Donc $|\triangle BDA| = |\triangle DCA| = 204$ et $|\triangle ABC| = |\triangle BDA| + |\triangle DCA|$, d'où $|\triangle ABC| = 204 + 204$, ou $|\triangle ABC| = 408$.

(c) Soit a, b, c et d l'aire respective des triangles PYV, PZU, UXP et XVP.



Puisque $\dfrac{|\triangle PYV|}{|\triangle PYW|} = \dfrac{VY}{YW} = \dfrac{4}{3}$, alors $|\triangle PYV| = \frac{4}{3} \times |\triangle PYW|$, d'où $|\triangle PYV| = \frac{4}{3}(30)$, ou $|\triangle PYV| = 40$. Donc $a = 40$.

De plus, $\dfrac{|\triangle VZW|}{|\triangle VZU|} = \dfrac{ZW}{ZU} = \dfrac{|\triangle PZW|}{|\triangle PZU|}$, d'où $|\triangle VZW| \times |\triangle PZU| = |\triangle PZW| \times |\triangle VZU|$.

Donc $\dfrac{|\triangle VZU|}{|\triangle PZU|} = \dfrac{|\triangle VZW|}{|\triangle PZW|}$, d'où $\dfrac{b+c+d}{b} = \dfrac{35+30+40}{35}$, ou $\dfrac{b+c+d}{b} = \dfrac{105}{35}$, ou $\dfrac{b+c+d}{b} = \dfrac{3}{1}$. Donc $b + c + d = 3b$, ou $c + d = 2b$.

De plus, on a $\dfrac{|\triangle UVY|}{|\triangle UYW|} = \dfrac{VY}{YW}$, d'où $\dfrac{40+c+d}{30+35+b} = \dfrac{4}{3}$.

Puisque $c + d = 2b$, la dernière équation devient $3(40 + 2b) = 4(65 + b)$, d'où $120 + 6b = 260 + 4b$, ou $2b = 140$, ou $b = 70$.

De plus, on a $\dfrac{|\triangle UXW|}{|\triangle XVW|} = \dfrac{UX}{XV}$, d'où $\dfrac{|\triangle UXW|}{|\triangle XVW|} = \dfrac{|\triangle UXP|}{|\triangle XVP|}$, d'où $\dfrac{35+b+c}{30+a+d} = \dfrac{c}{d}$.

Puisque $b = 70$ et $a = 40$, alors $\dfrac{105+c}{70+d} = \dfrac{c}{d}$, d'où $d(105 + c) = c(70 + d)$.

Donc $105d + cd = 70c + cd$, ou $105d = 70c$. Donc $\dfrac{d}{c} = \dfrac{70}{105}$, ou $\dfrac{d}{c} = \dfrac{2}{3}$, ou $d = \dfrac{2}{3}c$.

Puisque $c + d = 2b$, alors $c + d = 2(70)$, ou $c + d = 140$. On reporte $d = \frac{2}{3}c$ dans cette équation qui devient $c + \frac{2}{3}c = 140$, ou $\frac{5}{3}c = 140$. Donc $c = \frac{3}{5}(140)$, ou $c = 84$.

Donc, le triangle UXP a une aire de 84.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Galois 2009

le mercredi 8 avril 2009

Solutions

©2009 Le Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

1. (a) Le nombre total d'élèves dans la classe est égal à $8+7+3+2$, ou 20. Donc, la fraction des élèves de la classe qui ont les cheveux blonds est égale à $\frac{8}{20}$.
Or, $\frac{8}{20} = \frac{40}{100} = 40\,\%$. Donc, $40\,\%$ des élèves de la classe ont les cheveux blonds.

(b) Dans la classe, 3 élèves ont les cheveux roux et 2 élèves ont les cheveux noirs. Donc 5 élèves ont les cheveux roux ou noirs.
La fraction des élèves de la classe qui ont les cheveux roux ou noirs est égale à $\frac{5}{20}$.
Or, $\frac{5}{20} = \frac{25}{100} = 25\,\%$. Donc, $25\,\%$ des élèves de la classe ont les cheveux roux ou noirs.

(c) On sait que si certains élèves blonds se teignent les cheveux en noir, le nombre d'élèves de la classe ne change pas.
Pour que $20\,\%$ des élèves de la classe aient les cheveux noirs, il faut que $20\,\%$ de 20 élèves, soit 4 élèves, aient les cheveux noirs.
Or présentement, 2 élèves ont les cheveux noirs. Il faut donc que 2 élèves blonds se teignent les cheveux en noir.

(d) Soit x le nombre d'élèves aux cheveux roux qu'il faut ajouter à la classe pour que $32\,\%$ des élèves de la classe aient les cheveux roux. Il y aura donc $3+x$ élèves aux cheveux roux et un total de $20+x$ élèves dans la classe.
Donc, la fraction d'élèves de la classe qui auront les cheveux roux sera égale à $\frac{3+x}{20+x}$.
Or, $32\,\% = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}$. On cherche donc la valeur de x telle que $\frac{3+x}{20+x} = \frac{8}{25}$. On peut voir, par inspection, que $x = 5$. On peut aussi multiplier chaque membre de l'équation par 25 et par $20+x$ pour obtenir $25(3+x) = 8(20+x)$, d'où $75+25x = 160+8x$, ou $17x = 85$ ou $x = 5$.
Il faudrait donc ajouter 5 élèves aux cheveux roux à la classe pour que $32\,\%$ des élèves de la classe aient les cheveux roux.

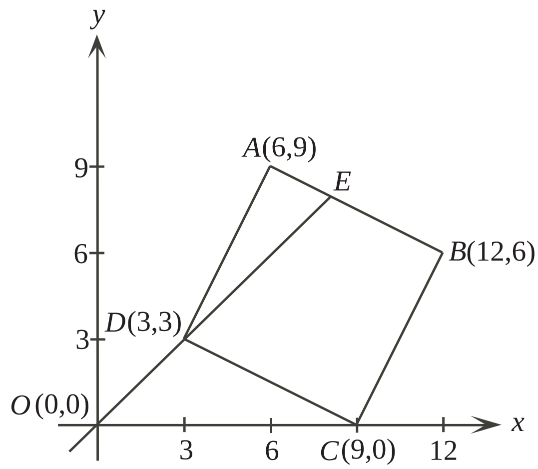
2. (a) *Solution 1*
Puisque $ABCD$ est un carré, les côtés AB et DC sont parallèles et ils ont la même longueur. Donc, le parcours du point A au point B est le même que celui du point D au point C. Or, pour se rendre de A à B, on se déplace de 6 unités vers la droite et de 3 unités vers le bas. Il en est donc de même pour se rendre de D à C.
Donc, C a pour coordonnées $(3+6, 3-3)$, ou $(9,0)$. Donc $t = 9$.

Solution 2
La pente de CD est égale à $\frac{3-0}{3-t}$ et celle de AB est égale à $\frac{6-9}{12-6}$, ou $\frac{-3}{6}$, ou $-\frac{1}{2}$.
Puisque $ABCD$ est un carré, CD est parallèle à AB.
Donc, ces segments ont la même pente. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{3}{3-t} &= -\frac{1}{2} \\ (3)(2) &= (-1)(3-t) \\ 6 &= -3+t \\ t &= 9 \end{aligned}$$

Donc, l'abscisse du sommet C est égale à 9.

(b)



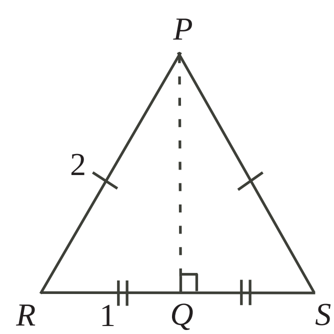
On détermine d'abord l'équation de la droite qui passe aux points $O(0,0)$ et $D(3,3)$.
La pente de cette droite est égale à $\dfrac{3-0}{3-0}$, ou 1.
Puisque la droite passe à l'origine, son ordonnée à l'origine est nulle. Donc, la droite a pour équation $y = x$.
On détermine ensuite l'équation de la droite qui passe aux points A et B.
Comme dans la partie (a), la droite qui passe aux points A et B a une pente de $-\frac{1}{2}$.
Elle a donc une équation de la forme $y = -\frac{1}{2}x + b$ pour une valeur quelconque de b.
Puisque $B(12,6)$ est situé sur cette droite, alors $6 = -\frac{1}{2}(12) + b$, d'où $6 = -6 + b$, ou $b = 12$.
Donc, la droite a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + 12$.
Au point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = -\frac{1}{2}x + 12$, on a $x = -\frac{1}{2}x + 12$, d'où $\frac{3}{2}x = 12$, ou $x = 8$. Donc $y = 8$.
Le point E a donc pour coordonnées $(8,8)$.

(c) Voici les longueurs des côtés :

$$ED = \sqrt{(8-3)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$EB = \sqrt{(8-12)^2 + (8-6)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$CD = CB = \sqrt{(12-9)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Le périmètre du quadrilatère $EBCD$ est donc égal à $5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 2 \times 3\sqrt{5}$, ou $5\sqrt{2} + 8\sqrt{5}$.

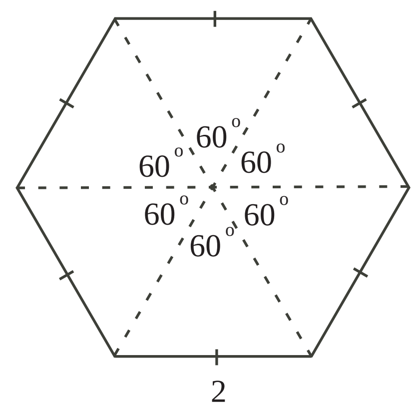
3. (a) Le triangle équilatéral PRS a des côtés de longueur 2.
Puisque $PR = PS$, la perpendiculaire abaissée au point P coupe RS en son milieu Q. Donc, $RQ = QS = 1$ et le triangle PRQ est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore :



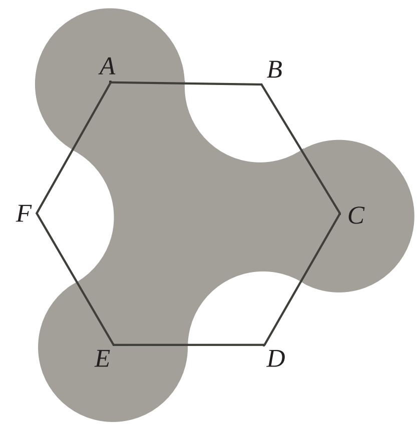
$$\begin{aligned} PR^2 &= RQ^2 + QP^2 \\ 2^2 &= 1^2 + QP^2 \\ 4 &= 1 + QP^2 \\ 3 &= QP^2 \\ QP &= \sqrt{3} \quad (\text{puisque } QP > 0) \end{aligned}$$

L'aire du triangle équilatéral est égale à $\frac{1}{2}(RS)(QP)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(2)(\sqrt{3})$, ou $\sqrt{3}$.

(b) L'hexagone peut être formé de 6 triangles équilatéraux ayant des côtés de longueur 2.
En effet, chaque sommet d'un tel triangle a un angle de 60°. Donc, lorsque l'on juxtapose 6 triangles, au point commun, la somme des mesures d'angles est égale à $6 \times 60°$, ou 360° et les 6 angles forment donc un angle plein. De plus, les côtés de l'hexagone ont une longueur de 2 et ses angles intérieurs mesurent $60° + 60°$, ou 120°.
L'aire de l'hexagone régulier est donc égale à 6 fois l'aire d'un triangle équilatéral de la partie (a), c'est-à-dire à $6 \times \sqrt{3}$, ou $6\sqrt{3}$.



(c) D'après la partie (b), les angles intérieurs de l'hexagone mesurent 120°.
Puisque les angles intérieurs aux sommets B, D et F mesurent 120°, alors les secteurs de cercles non ombrés de centres B, D et E à l'intérieur de l'hexagone sont chacun $\frac{1}{3}$ d'un disque de rayon 1, car $\frac{1}{3}(360°) = 120°$.
Donc, l'aire totale de ces trois régions non ombrées correspond à l'aire d'un disque de rayon 1, c'est-à-dire $\pi(1)^2$, ou π.
Puisque chaque angle intérieur de l'hexagone mesure 120°, les angles extérieurs aux sommets A, C et E mesurent chacun $360° - 120°$, ou 240°.
Les secteurs ombrés de centres A, C et E, à l'extérieur de l'hexagone, sont chacun $\frac{2}{3}$ d'un disque de rayon 1, car $\frac{2}{3}(360°) = 240°$. Donc, chacun de ces secteurs a une aire égale à $\frac{2}{3} \times \pi(1)^2$, ou $\frac{2}{3}\pi$.
L'aire totale de ces 3 secteurs est donc égale à $3 \times \frac{2}{3}\pi$, ou 2π.
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire de l'hexagone moins l'aire des secteurs non ombrés de centres B, D et F, plus l'aire des secteurs ombrés de centres A, C et E, c'est-à-dire à $6\sqrt{3} - \pi + 2\pi$, ou $6\sqrt{3} + \pi$.



4. (a) On obtient le plus grand entier positif N qu'il est possible d'écrire sous cette forme en choisissant les plus grandes valeurs permises de a, b, c, d et e, soit $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$ et $e = 5$. On obtient $N = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + 4(4!) + 5(5!)$, c'est-à-dire $N = 1 + 2(2) + 3(6) + 4(24) + 5(120)$, ou $N = 719$.

(b) Étant donné deux entiers strictement positifs n et m, il est possible d'écrire la division de n par m sous la forme d'un énoncé de la forme

$$n = qm + r,$$

le quotient q et le reste r étant des entiers non négatifs tels que $0 \leq r < m$.
Le tableau suivant présente quelques exemples. Ainsi dans la première ligne, si on divise 20 par 6, on obtient un quotient de 3 et un reste de 2. L'énoncé $n = qm + r$ devient alors $20 = 3(6) + 2$.

n	m	q	r	$n = qm + r$
20	6	3	2	$20 = 3(6) + 2$
12	13	0	12	$12 = 0(13) + 12$
9	7	1	2	$9 = 1(7) + 2$
36	9	4	0	$36 = 4(9) + 0$

On remarque que dans chaque exemple, l'inégalité $0 \leq r < m$ est satisfaite.
Il est toujours possible de satisfaire à cette inégalité en soustrayant de n des multiples de m jusqu'à ce qu'on obtienne un nombre inférieur à m.
On utilise ce processus de façon répétée pour écrire $n = 653$ sous la forme requise en divisant 653 par 5!, puis en divisant le reste par 4!, ainsi de suite. Or $m = 5! = 120$. On divise 653 par 120 pour obtenir un quotient de 5 et un reste de 53. Donc $653 = 5(120)+53$.
On divise le reste 53 par 4! (ou 24) pour obtenir un quotient de 2 et un reste de 5 (dans le tableau on a donc, dans la deuxième ligne, $n = 53$, $m = 24$, $q = 2$ et $r = 5$). On recommence à chaque fois, en divisant successivement par $5\,!$, $4\,!$, $3\,!$, $2\,!$ et $1\,!$.

n	m	q	r	$n = qm + r$
653	120	5	53	$653 = 5(120) + 53$
53	24	2	5	$53 = 2(24) + 5$
5	6	0	5	$5 = 0(6) + 5$
5	4	1	1	$5 = 2(2) + 1$
1	1	1	0	$1 = 1(1) + 0$

D'après la 5$^{\text{e}}$ colonne du tableau, on a :

$$\begin{aligned}
653 &= 5(120) + 53 \\
&= 5(120) + 2(24) + 5 \\
&= 5(120) + 2(24) + 0(6) + 5 \\
&= 5(120) + 2(24) + 0(6) + 2(2) + 1 \\
&= 5(120) + 2(24) + 0(6) + 2(2) + 1(1) + 0 \\
&= 5(5!) + 2(4!) + 0(3!) + 2(2!) + 1(1!)
\end{aligned}$$

On a donc écrit $n = 653$ sous la forme demandée en utilisant $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 2$ et $e = 5$.

(c) On généralise la procédure utilisée dans la partie (b) :

n	m	q	r	$n = qm + r$	restriction sur r
n	120	e	r_1	$n = e(120) + r_1$	$0 \leq r_1 < 120$
r_1	24	d	r_2	$r_1 = d(24) + r_2$	$0 \leq r_2 < 24$
r_2	6	c	r_3	$r_2 = c(6) + r_3$	$0 \leq r_3 < 6$
r_3	2	b	r_4	$r_3 = b(2) + r_4$	$0 \leq r_4 < 2$
r_4	1	a	r_5	$r_4 = a(1) + r_5$	$0 \leq r_5 < 1$

D'après la 5$^{\text{e}}$ colonne du tableau, on a :

$$\begin{aligned}
n &= e(120) + r_1 \\
&= e(120) + d(24) + r_2 \\
&= e(120) + d(24) + c(6) + r_3 \\
&= e(120) + d(24) + c(6) + b(4) + r_4 \\
&= e(120) + d(24) + c(6) + b(4) + a(1) + r_5 \\
&= e(5!) + d(4!) + c(3!) + b(2!) + a(1!) \text{ (puisque } r_5 = 0)
\end{aligned}$$

Il faut justifier que les entiers a, b, c, d, and e satisfont aux inégalités données.
D'après la partie (b), chacun de ces entiers est non négatif. Il reste à démontrer que $a \leq 1$, $b \leq 2$, $c \leq 3$, $d \leq 4$ et $e \leq 5$.
D'après la partie (a), $N = 719$. Donc $0 \leq n < 720$.
D'après le tableau précédent, $n = e(120) + r_1$. Donc $e(120) + r_1 < 720$, d'où $e(120) < 720$ (puisque $r_1 \geq 0$), ou $e < 6$. L'inégalité $e \leq 5$ est bien satisfaite.
D'après le tableau, on a aussi $r_1 < 120$. Donc $d(24) + r_2 < 120$, d'où $d(24) < 120$ (puisque $r_2 \geq 0$), ou $d < 5$. L'inégalité $d \leq 4$ est bien satisfaite.
De plus, $r_2 < 24$. Donc $c(6) + r_3 < 24$, d'où $c(6) < 24$ (puisque $r_3 \geq 0$), ou $c < 4$.
L'inégalité $c \leq 3$ est bien satisfaite.
De plus, $r_3 < 6$. Donc $b(2) + r_4 < 6$, d'où $b(2) < 6$ (puisque $r_4 \geq 0$), ou $b < 3$.
L'inégalité $b \leq 2$ est bien satisfaite.
Enfin, $r_4 < 2$. Donc $a(1) + r_5 < 2$, d'où $a(1) < 2$ (puisque $r_5 = 0$), ou $a < 2$.
L'inégalité $a \leq 1$ est bien satisfaite.
Donc tous les entiers n (ou $0 \leq n \leq N$) peuvent être écrits sous la forme demandée.

(d) Puisque $c = 0$, on cherche la somme de tous les entiers n de la forme $n = a + 2b + 24d + 120e$, selon les restrictions imposées sur les entiers a, b, d et e.
Puisque $n = a + 2b + 24d + 120e = (a + 2b) + 24(d + 5e)$, soit $n_1 = a + 2b$ et $n_2 = d + 5e$.
Donc $n = n_1 + 24n_2$. On considère d'abord toutes les valeurs possibles de n_1.
Puisque $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 2$ et puisque $n_1 = a + 2b$, on conclut que n_1 peut prendre n'importe quelle valeur de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Chacun de ces nombres provient d'une valeur particulière de a et d'une valeur particulière de b.
On considère ensuite toutes les valeurs possibles de n_2 ($n_2 = d + 5e$). Puisque $0 \leq d \leq 4$ et $0 \leq e \leq 5$, on conclut que $d + 5e$ peut prendre n'importe quelle valeur de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, 29\}$. Chacun de ces nombres provient d'une valeur particulière de d et d'une valeur particulière de e. Donc, $24n_2$ peut prendre n'importe quelle valeur de l'ensemble $\{24 \times 0, 24 \times 1, 24 \times 2, \ldots, 24 \times 29\}$, ou $\{0, 24, 48, \ldots, 696\}$. Ce sont les multiples de 24 de 0 à 696.
On ajoute tour à tour chacune des valeurs possibles de $24n_2$ à chacune des 6 valeurs possibles de n_1 pour obtenir les valeurs possibles suivantes de n ($n = n_1 + 24n_2$) :

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 48, 49, 50, 51, 52, 53, \ldots, 696, 697, 698, 699, 700, 701\}$$

Puisque les 6 valeurs possibles de n_1 proviennent chacune d'un couple (a, b) et que les 30 valeurs possibles de n_2 proviennent chacune d'un couple (d, e), alors chacun des nombres de l'ensemble précédent paraît une seule fois lorsque a, b, d et e prennent leurs valeurs possibles.
Il reste à calculer la somme de ces valeurs de n :

$$\begin{aligned}
& 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 48 + 49 + \cdots + 699 + 700 + 701 \\
= \; & 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + (24 + 0) + (24 + 1) + (24 + 2) + (24 + 3) + (24 + 4) + (24 + 5) \\
& + (48 + 0) + (48 + 1) + \cdots + (696 + 3) + (696 + 4) + (696 + 5) \\
= \; & (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 24 \times 6 + (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 48 \times 6 \\
& + (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) + \cdots + 696 \times 6 + (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) \\
= \; & 30(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 24 \times 6 + 48 \times 6 + \cdots + 696 \times 6 \\
= \; & 30(15) + 24(6)[1 + 2 + 3 + \cdots + 29] \\
= \; & 30(15) + 24(6)\left[\frac{29 \times 30}{2}\right] \\
= \; & 63\,090
\end{aligned}$$

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Galois 2008

le mercredi 16 avril 2008

Solutions

©2008 Le Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

1. (a) Puisque $(36, 25, x)$ est un triplet O'Hara, alors $\sqrt{36}+\sqrt{25} = x$, d'où $x = 6+5$, ou $x = 11$.

   (b) Puisque $(a, 9, 5)$ est un triplet O'Hara, alors $\sqrt{a} + \sqrt{9} = 5$, ou $\sqrt{a} + 3 = 5$, d'où $\sqrt{a} = 2$, ou $a = 4$.

   (c) On cherche des entiers positifs a et b tels que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 6$.
   On peut déterminer les cinq triplets en utilisant :
   - $\sqrt{a} = 5$ et $\sqrt{b} = 1$, d'où $a = 25$ et $b = 1$;
   - $\sqrt{a} = 4$ et $\sqrt{b} = 2$, d'où $a = 16$ et $b = 4$;
   - $\sqrt{a} = 3$ et $\sqrt{b} = 3$, d'où $a = 9$ et $b = 9$;
   - $\sqrt{a} = 2$ et $\sqrt{b} = 4$, d'où $a = 4$ et $b = 16$;
   - $\sqrt{a} = 1$ et $\sqrt{b} = 5$, d'où $a = 1$ et $b = 25$.

   Donc, $(25, 1, 6)$, $(16, 4, 6)$, $(9, 9, 6)$, $(4, 16, 6)$ et $(1, 25, 6)$ sont cinq triplets O'Hara pour lesquels $x = 6$.
   (Remarquer qu'on ne demandait pas de prouver que ce sont les seuls tels triplets.)

2. (a) La pente de la droite est égale à : $\dfrac{9-5}{6-0} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$
   Puisque la droite passe au point $P(0, 5)$, elle a une ordonnée à l'origine de 5.
   Donc, la droite a pour équation $y = \frac{2}{3}x + 5$.

   (b) Une droite perpendiculaire à la droite précédente a pour pente l'opposé de l'inverse de la pente $\frac{2}{3}$. Sa pente est donc égale à $-\dfrac{1}{\frac{2}{3}}$, ou $-\frac{3}{2}$.
   Cette droite a donc une équation de la forme $y = -\frac{3}{2}x + b$, b étant un nombre quelconque.
   Puisque la droite passe au point $Q(6, 9)$, ses coordonnées $(6, 9)$ vérifient l'équation de la droite. Donc $9 = -\frac{3}{2}(6) + b$, d'où $9 = -9 + b$, ou $b = 18$.
   Donc, la droite a pour équation $y = -\frac{3}{2}x + 18$.

   (c) Puisque R est situé sur l'axe des abscisses, son ordonnée est égale à 0. Puisque R est sur la droite, ses coordonnées vérifient l'équation $y = -\frac{3}{2}x + 18$. Pour déterminer l'abscisse de R, on pose donc $y = 0$ dans l'équation qui devient $0 = -\frac{3}{2}x + 18$, ou $\frac{3}{2}x = 18$, d'où $x = \frac{2}{3}(18)$, ou $x = 12$.
   Donc, R a pour coordonnées $(12, 0)$.

   (d) *Solution 1*
   Puisque le triangle PQR est rectangle en Q, son aire est égale à $\frac{1}{2}(PQ)(QR)$.
   Puisque P, Q et R ont pour coordonnées respectives $(0, 5)$, $(6, 9)$ et $(12, 0)$, alors :

$$PQ = \sqrt{(6-0)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

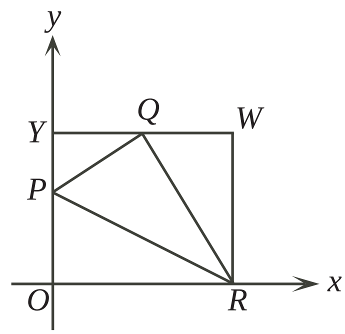
   et

$$QR = \sqrt{(6-12)^2 + (9-0)^2} = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

   L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}(2\sqrt{13})(3\sqrt{13})$, soit $3(13)$, ou 39.

Solution 2

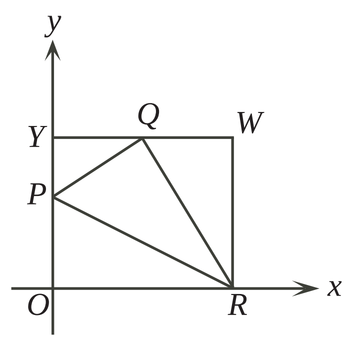
On forme un rectangle $ORWY$ en traçant une droite horizontale qui passe au point Q et qui coupe l'axe des ordonnées au point $Y(0,9)$, de même qu'une droite verticale qui passe au point R et qui coupe la droite horizontale précédente au point $W(12,9)$.



Le rectangle $ORWY$ a une base de 12 et une hauteur de 9. Il a donc une aire de 12(9), ou 108.

L'aire du triangle PQR est égale à l'aire du rectangle moins l'aire des triangles POR, PYQ et QWR.

Chacun de ces trois derniers triangles a des cathètes parallèles aux axes.



D'après la figure précédente, l'aire du triangle POR est égale à $\frac{1}{2}(5)(12)$, ou 30.

De même, l'aire du triangle PYQ est égale à $\frac{1}{2}(4)(6)$, ou 12, et l'aire du triangle QWR est égale à $\frac{1}{2}(6)(9)$, ou 27.

Donc, l'aire du triangle PQR est égale à $108 - 30 - 12 - 27$, ou 39.

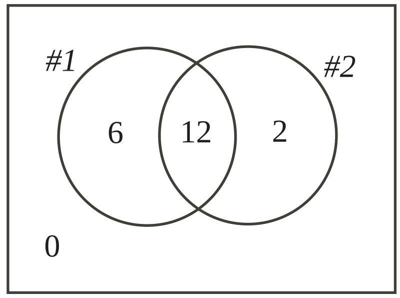
3. (a) Le plus grand nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre correctement aux deux questions est 14. (Ceci se produirait si chacun des 14 élèves qui ont répondu correctement à la question 2 avait aussi répondu correctement à la question 1.) Il ne peut pas y avoir plus de 14 élèves, car seulement 14 élèves ont répondu correctement à la question 2.

Pour déterminer le plus petit nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre correctement aux deux questions, on détermine le plus grand nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre incorrectement à au moins une question. On suppose donc que les élèves qui ont répondu incorrectement à une question ne sont pas les mêmes que ceux qui ont répondu incorrectement à l'autre question.

On sait que sur 20 élèves, 2 ont répondu incorrectement à la question 1 et 6 ont répondu incorrectement à la question 2. Il peut donc y avoir un maximum de 8 élèves qui ont répondu incorrectement à une question. (Il pourrait y avoir moins de 8 élèves si certains d'entre eux ont répondu incorrectement aux deux questions.)

Puisque 8 élèves au plus ont répondu incorrectement à une question, alors au moins 8 élèves (soit $20 - 8$) ont répondu correctement aux deux questions.

Le diagramme de Venn suivant montre que ce nombre est possible. Les cercles indiquent les nombres d'élèves qui ont répondu correctement aux questions.



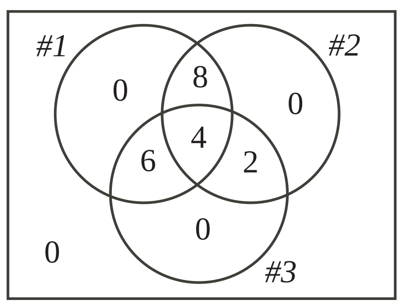
(b) Le plus grand nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre correctement aux trois questions est 12. (Cela se produirait si chacun des 12 élèves qui ont répondu correctement à la question 3 ont aussi répondu correctement aux deux autres questions.) Il ne peut pas y avoir plus de 12 élèves, car seulement 12 élèves ont répondu correctement à la question 3.

Pour déterminer le plus petit nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre correctement aux trois questions, on détermine le plus grand nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre incorrectement à au moins une question. On suppose donc que les élèves qui ont répondu incorrectement à une question ne sont pas les mêmes que ceux qui ont répondu incorrectement à une autre question.

On sait que sur 20 élèves, 2 ont répondu incorrectement à la question 1, 6 ont répondu incorrectement à la question 2 et 8 ont répondu incorrectement à la question 3. Donc, il peut y avoir un maximum de 16 élèves qui ont répondu incorrectement à une question.

Puisque 16 élèves au plus ont répondu incorrectement à une question, alors au moins 4 élèves (soit $20 - 16$) ont répondu correctement aux trois questions.

Le diagramme de Venn suivant montre que ce nombre est possible. Les cercles indiquent les nombres d'élèves qui ont répondu correctement aux questions.



(c) On utilise une démarche semblable à celle utilisée dans la partie (b).

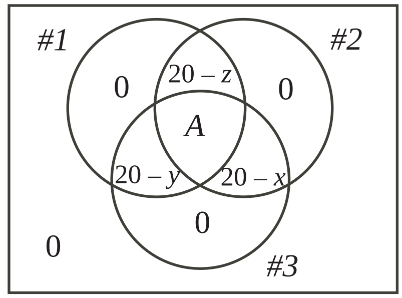
Pour déterminer le plus petit nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre correctement aux trois questions, on détermine le plus grand nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre incorrectement à au moins une question. On suppose donc que les élèves qui ont répondu incorrectement à une question ne sont pas les mêmes que ceux qui ont répondu incorrectement à une autre question.

On sait que sur 20 élèves, $20 - x$ élèves ont répondu incorrectement à la question 1, $20 - y$ élèves ont répondu incorrectement à la question 2 et $20 - z$ élèves ont répondu incorrectement à la question 3. Donc, il peut y avoir un maximum de $60 - x - y - z$ élèves qui ont répondu incorrectement à une question.

(Puisque $40 \leq x + y + z \leq 60$, alors $0 \leq 60 - x - y - z \leq 20$. Il est donc approprié de parler de $60 - x - y - z$ élèves dans ce contexte.)

Puisque $60 - x - y - z$ élèves au plus ont répondu incorrectement à une question, alors au moins $x + y + z - 40$ élèves (soit $20 - (60 - x - y - z)$) ont répondu correctement aux

trois questions.
(On remarque que $0 \leq x+y+z-40 \leq 20$, puisque $40 \leq x+y+z \leq 60$. Donc, $x+y+z-40$ est un nombre permis d'élèves.)
Le diagramme de Venn suivant montre que ce nombre est possible. Les cercles indiquent les nombres d'élèves qui ont répondu correctement aux questions.



$A = x + y + z - 40$

4. (a) Au départ, la liste comprend les entiers 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
Caroline enlève le 2. Paul enlève ensuite les diviseurs de 2, soit le nombre 1. La liste comprend maintenant les entiers 3, 4, 5 et 6.
Caroline doit enlever un nombre de cette liste de manière que dans la liste, ce nombre ait un diviseur propre, c'est-à-dire un diviseur autre que lui-même.
Le seul tel nombre est le 6. Caroline enlève donc le 6. Paul enlève ensuite les diviseurs de 6, soit le nombre 3. La liste comprend maintenant les entiers 4 et 5.
Caroline ne peut enlever aucun de ces deux nombres, car aucun n'a de diviseur propre dans la liste.
Donc, Paul enlève le 4 et le 5.
Caroline a donc enlevé le 2 et le 6 qui ont une somme de 8. Paul a enlevé le 1, le 3, le 4 et le 5, qui ont une somme de 13.

(b) À chacun de ses tours, Caroline enlève un seul nombre, de manière que Paul puisse à son tour enlever au moins un nombre. Elle peut donc enlever au plus la moitié des nombres de la liste. Dans ce cas-ci, elle peut enlever un maximum de 5 nombres de la liste.
Les cinq plus grands nombres que Caroline pourrait enlever, sans égard aux règles du jeu, sont 6, 7, 8, 9 et 10. Ils ont une somme de 40. Lui est-il possible de les enlever en suivant les règles du jeu ?
Pour réussir, elle doit forcer Paul à n'enlever qu'un seul nombre à chaque tour.
Si Caroline enlève d'abord le 7, Paul ne peut enlever que le 1.
Si Caroline enlève ensuite le 9, Paul ne peut enlever que le 3.
Si Caroline enlève ensuite le 6, Paul ne peut enlever que le 2.
Si Caroline enlève ensuite le 8, Paul ne peut enlever que le 4.
Si Caroline enlève ensuite le 10, Paul ne peut enlever que le 5.
(Caroline aurait pu changer ses deux derniers choix l'un pour l'autre.)
Donc, Caroline peut enlever les cinq plus grands nombres. Elle peut donc obtenir une somme maximale possible de 40.

(c) Comme dans la partie (b), Caroline peut enlever au plus la moitié des nombres, soit 7.
Lui est-il possible d'enlever 7 nombres en suivant les règles du jeu ?
Si Caroline enlève 7 nombres, Paul doit enlever 7 nombres, car il doit enlever au moins un nombre à chacun de ses tours et il y a 14 nombres en tout.
Puisque Paul enlève des nombres qui sont des diviseurs propres du nombre que Caroline a enlevé, alors les nombres qu'il enlève ne peuvent pas être supérieurs à $\frac{1}{2}n$. (Pour enlever un

nombre supérieur à $\frac{1}{2}n$, il faudrait que Caroline ait enlevé un nombre supérieur à $2 \times \frac{1}{2}n$, c'est-à-dire supérieur à n, ce qui est impossible.)

Donc, si Caroline enlève 7 nombres, elle doit enlever les 7 nombres qui sont supérieurs à $\frac{1}{2}(14)$ (soit 8, 9, 10, 11, 12, 13 et 14).

Quel que soit le nombre que Caroline enlève en premier, Paul enlèvera le nombre 1 à son premier tour. (Il se peut qu'il puisse enlever d'autres nombres en plus.)

Avant que Caroline n'entreprenne son deuxième tour, au moins un des nombres 11 et 13 est encore dans la liste, car elle a peut-être enlevé l'un ou l'autre à son premier tour, mais pas les deux.

Supposons que le 11 est encore dans la liste. (On utilise le même argument si le 13 est encore dans la liste.)

Caroline ne pourra jamais enlever le 11 de la liste, puisque ce nombre est premier et que son seul diviseur propre est 1 qui n'est plus dans la liste. D'après la dernière règle, elle ne peut donc pas enlever le 11.

Donc, Caroline ne peut pas enlever les sept nombres de 8 à 14. Elle ne peut donc pas enlever 7 nombres de la liste.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Galois 2007

le mercredi 18 avril 2007

Solutions

©2007 La Fondation de mathématiques de Waterloo

1. (a) Soit a le coût d'un avocat en cents, b le coût d'une banane en cents et c le coût d'une cerise en cents.
   D'après les renseignements donnés, $a + c = 62$ et $b + c = 66$.
   Or, chaque membre de gauche est composé du coût d'une cerise et soit du coût d'une banane, soit du coût d'un avocat. Puisque $66 - 62 = 4$, on voit qu'une banane coûte 4 cents de plus qu'un avocat.
   (On aurait pu soustraire les équations, membre par membre, pour obtenir $b - a = 4$.)
   Il y a donc une différence de 4 cents entre le prix d'un avocat et celui d'une banane. La banane coûte plus cher.

   (b) *Solution 1*
   Soit m le coût d'une mangue en cents, n le coût d'une nectarine en cents et p le coût d'une poire en cents.
   D'après les renseignements donnés, $m + n = 60$, $p + n = 60$ et $m + p = 68$.
   D'après les deux premières équations, m et p doivent être égaux (car $m = 60 - n$ et $p = 60 - n$).
   On reporte $m = p$ dans la troisième équation pour obtenir $2p = 68$, ou $p = 34$. Une poire coûte donc 34 cents.

   Solution 2
   Soit m le coût d'une mangue en cents, n le coût d'une nectarine en cents et p le coût d'une poire en cents.
   D'après les renseignements donnés, $m + n = 60$, $p + n = 60$ et $m + p = 68$.
   On additionne les deuxième et troisième équations, membre par membre, pour obtenir $2p + m + n = 60 + 68$, ou $2p + m + n = 128$.
   Puisque $m + n = 60$ (d'après la première équation), alors $2p + 60 = 128$, d'où $2p = 68$, ou $p = 34$. Une poire coûte donc 34 cents.

   Solution 3
   Soit m le coût d'une mangue en cents, n le coût d'une nectarine en cents et p le coût d'une poire en cents.
   D'après les renseignements donnés, $m + n = 60$, $p + n = 60$ et $m + p = 68$.
   On additionne les trois équations, membre par membre, pour obtenir $2m + 2n + 2p = 188$.
   On divise chaque membre par 2 pour obtenir $m + n + p = 94$.
   Puisque $m + n = 60$ et $m + n + p = 94$, alors $p = 94 - 60$, ou $p = 34$.
   Une poire coûte donc 34 cents.

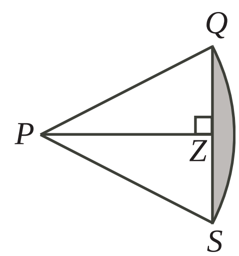
   (c) Soit m le coût d'une mandarine en cents, c le coût d'un citron en cents et p le coût d'un pamplemousse en cents.
   D'après les renseignements donnés, $m + c = 60$, $m - p = 6$ et $p + m + c = 94$.
   On reporte la première équation dans la troisième pour obtenir $p + 60 = 94$, d'où $p = 34$.
   Puisque $p = 34$ et $m - p = 6$, alors $m = 34 + 6$, d'où $m = 40$.
   Puisque $m = 40$ et $m + c = 60$, alors $c = 20$. Un citron coûte donc 20 cents.
   (Il y a plusieurs autres façons de combiner les équations pour obtenir $c = 20$.)

2. (a) Puisque le secteur a un rayon de 12, on a $OA = OB = 12$.
Puisque l'angle du secteur mesure $60°$ et que $\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$, alors le secteur est $\frac{1}{6}$ d'un disque.
La longueur de l'arc AB est donc $\frac{1}{6}$ de la circonférence d'un cercle de rayon 12. Elle est donc égale à $\frac{1}{6}(2\pi(12))$, ou 4π.
Le périmètre du secteur est donc égal à $12 + 12 + 4\pi$, ou $24 + 4\pi$.

(b) Chacun des secteurs ABD et BDC est un sixième d'un disque de rayon 12. Chacun a donc une aire égale à un sixième de l'aire d'un disque de rayon 12.
Chacun a donc une aire égale à $\frac{1}{6}(\pi(12^2))$, soit $\frac{1}{6}(144\pi)$, ou 24π.
L'aire de la figure $ABCD$ est égale à $2(24\pi)$, ou 48π.

(c) Puisque OY est le rayon du secteur de centre O, alors $OY = 12$.
Pour déterminer la longueur XY, il faut déterminer la longueur OX.
Puisque $OA = OB$, le triangle OAB est isocèle.
Puisque $\angle OAB = 60°$, alors $\angle OBA = 60°$ et le triangle OAB est équilatéral.
Puisque $\angle AXO = 90°$, alors $\angle AOX = 180° - 60° - 90°$, d'où $\angle AOX = 30°$. Le triangle OAX est donc un triangle remarquable $30°$-$60°$-$90°$.
Puisque $OA = 12$, alors $AX = \frac{1}{2}OA$, et $OX = \sqrt{3}AX$, d'où $AX = 6$ et $OX = 6\sqrt{3}$.
Donc $XY = OY - OX$, ou $XY = 12 - 6\sqrt{3}$, ou $XY \approx 1{,}61$.

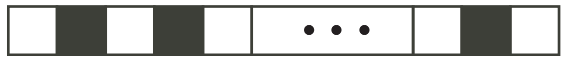
(d) Par symétrie, la ligne verticale sépare la région ombrée en deux parties égales.
On considère la partie droite de la région ombrée, ainsi que le triangle de gauche.



L'aire de cette partie ombrée est égale à l'aire du secteur PQS moins celle du triangle PQS.
L'aire du secteur PQS est égale à 24π selon la partie (b).
D'après la partie (c), le triangle PQS est équilatéral. Donc $QS = 12$.
Au point P, on abaisse une perpendiculaire PZ à QS.
D'après la partie (c), $PZ = 6\sqrt{3}$.
Le triangle PQS a donc une base QS de longueur 12 et une hauteur correspondante PZ de longueur $6\sqrt{3}$.
L'aire du triangle PQS est donc égale à $\frac{1}{2}(12)(6\sqrt{3})$, ou $36\sqrt{3}$.
L'aire de la partie droite de la région ombrée est égale à $24\pi - 36\sqrt{3}$. Donc l'aire de la partie ombrée au complet est égale à $2(24\pi - 36\sqrt{3})$, ou $48\pi - 72\sqrt{3}$, soit environ 26,1.

3. (a) Les cubes 1 sur 1 sur 1 qui ont au moins deux faces peintes sont ceux qui contiennent les arêtes du grand cube. Ceci inclut les petits cubes dans les coins du grand cube.
Le grand cube a 12 arêtes qui contiennent chacun 3 petits cubes qui ne forment pas des coins. De plus, il a 8 sommets et donc 8 coins.
Le nombre de petits cubes qui ont au moins deux faces peintes est donc égal à $3 \times 12 + 8$, ou 44.

(b) i. Les petits cubes qui ont exactement deux faces blanches sont situés sur des arêtes du grand cube et pas dans les coins.
Chacune des 12 arêtes du grand cube compte $2k+1$ petits cubes.
Les « cubes blancs » que l'on veut compter (c'est-à-dire ceux qui ont deux faces blanches) sont ceux qui ne sont pas situés dans les coins.
On considère une rangée de cubes le long d'une arête.



Si on enlève un des $2k+1$ cubes à une des extrémités, la moitié des cubes qui restent (c'est-à-dire k des cubes qui restent) sont blancs et un seul est situé à une extrémité. Il y a donc $k-1$ cubes blancs dans cette rangée qui ont exactement deux faces blanches. Puisque le grand cube a 12 arêtes, le nombre total de petits cubes qui ont exactement deux faces blanches est égal à $12(k-1)$, ou $12k-12$.

ii. Les cubes qui ont au moins deux faces blanches sont ceux de la partie (i) qui ont exactement deux faces blanches, ainsi que les 8 cubes, dans les coins du grand cube, qui ont trois faces blanches.
Le nombre de cubes qui ont au moins deux faces blanches est donc égal à $12k-12+8$, ou $12k-4$.
On cherche donc une valeur de k pour laquelle $12k-4$ est égal à 2006.
Si $12k-4=2006$, alors $12k=2010$, ou $k=167{,}5$. Cette valeur n'est pas un entier.
Il n'y a donc aucune valeur de k pour laquelle il y a 2006 petits cubes qui ont au moins deux faces blanches.

4. (a) Supposons qu'on utilise x tiges jaunes et y tiges vertes.
On veut donc que $5x+3y=62$, ou $3y=62-5x$, x et y étant des entiers non négatifs.
On peut considérer les diverses valeurs possibles de x et vérifier si y est un entier. On utilise un tableau :

x	$62-5x$	Es-ce que $62-5x$ est divisible par 3 ?	y
0	62	Non	
1	57	Oui	19
2	52	Non	
3	47	Non	
4	42	Oui	14
5	37	Non	
6	32	Non	
7	27	Oui	9
8	22	Non	
9	17	Non	
10	12	Oui	4
11	7	Non	
12	2	Non	

Il y a donc 4 façons de choisir un ensemble de tiges jaunes et vertes, soit 1 jaune et 19 vertes, 4 jaunes et 14 vertes, 7 jaunes et 9 vertes, 10 jaunes et 4 vertes.

(b) Les tiges vertes ont une longueur de 3 cm, les tiges jaunes ont une longueur de 5 cm, les tiges noires ont une longueur de 7 cm et les tiges bleues ont une longueur de 9 cm.
Si on utilise a tiges vertes et b tiges bleues, alors le poteau a une longueur de $3a+9b$ cm, ce qui est divisible par 3.

Puisque 62 n'est pas divisible par 3, il est impossible de former un poteau de 62 cm en n'employant que des tiges vertes et bleues.
(On peut vérifier que tout autre choix nous permet de former un poteau de 62 cm : 19 tiges vertes et 1 tige jaune, 16 vertes et 2 noires, 11 jaunes et 1 noire, 7 jaunes et 3 bleues, 5 noires et 3 bleues.)

(c) Puisqu'on utilise au moins 81 tiges de chacune de ces quatre couleurs, supposons qu'on utilise $81+a$ tiges vertes, $81+b$ tiges roses, $81+c$ tiges grises et $81+d$ tiges bleues, a, b, c et d étant des entiers non négatifs.
Pour obtenir un poteau de 2007 cm, il faut que :

$$\begin{aligned}
3(81+a)+4(81+b)+8(81+c)+9(81+d) &= 2007\\
3a+4b+8c+9d+81(3+4+8+9) &= 2007\\
3a+4b+8c+9d &= 2007-1944\\
3a+4b+8c+9d &= 63
\end{aligned}$$

On cherche le nombre de solutions entières non négatives de cette dernière équation.
On regroupe les termes du membre de gauche sous la forme $3(a+3d)+4(b+2c)$ et on pose $x=a+3d$ et $y=b+2c$. L'équation devient $3x+4y=63$, x et y étant des entiers non négatifs.
Les solutions (x,y) de l'équation sont $(1,15),(5,12),(9,9),(13,6),(17,3)$ et $(21,0)$.
Si $x=a+3d=1$, alors $(a,d)=(1,0)$. Il y a une valeur possible de a et de d.
Si $x=a+3d=5$, alors (a,d) peut égaler $(5,0)$ ou $(2,1)$. Il y a 2 valeurs possibles.
Si $x=a+3d=9$, alors (a,d) peut égaler $(9,0),(6,1),(3,2)$ ou $(0,3)$. Il y a 4 valeurs possibles.
Si $x=a+3d=13$, alors (a,d) peut égaler $(13,0),(10,1),(7,2),(4,3)$ ou $(1,4)$. Il y a 5 valeurs possibles.
Si $x=a+3d=17$, alors (a,d) peut égaler $(17,0),(14,1),(11,2),(8,3),(5,4)$ ou $(2,5)$. Il y a 6 valeurs possibles.
Si $x=a+3d=21$, alors (a,d) peut égaler $(21,0),(18,1),(15,2),(12,3),(9,4),(6,5),(3,6)$ ou $(0,7)$. Il y a 8 valeurs possibles.
De même, si on laisse $y=b+2c$ égaler successivement 15, 12, 9, 6, 3 et 0, on obtient respectivement 8, 7, 5, 4, 2 et 1 valeurs possibles de b et de c.

On considère maintenant ces valeurs possibles comme un tout.
Si $x=1$ et $y=15$, il y a 1 valeur possible de a et de d et 8 valeurs possibles de b et de c. Le nombre de valeurs possibles de a, b, c et d est donc égal à 1×8, ou 8.
Si $x=5$ et $y=12$, il y a 2 valeurs possibles de a et de d et pour chacune d'elles, il y a 7 valeurs possibles de b et de c. Le nombre de valeurs possibles de a, b, c et d est donc égal à 2×7, ou 14.
De la même manière, pour les autres valeurs de x et de y, les nombres de valeurs possibles de a, b, c et d égalent respectivement $4\times 5=20$, $5\times 4=20$, $6\times 2=12$ et $8\times 1=8$.
En tout, le nombre de valeurs possibles de a, b, c et d est égal à $8+14+20+20+12+8$, ou 82. Il y a donc 82 façons de choisir un ensemble de tiges.

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Galois 2006

le jeudi 20 avril 2006

Solutions

©2006 La Fondation de mathématiques de Waterloo

1. (a) On obtient la plus grande différence possible lorsque l'un choisit les bouts de papier avec les plus grands numéros et l'autre choisit ceux avec les plus petits numéros.
Donc, l'un choisit 1, 2 et 3, pour un total de 6, tandis que l'autre choisit 4, 5 et 6, pour un total de 15.
La plus grande différence possible est 9.

(b) La somme des six nombres sur les bouts de papier est égale à $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, ou 21. Le total d'Amélie et celui de Boris ont donc une somme de 21. Pour que le total d'Amélie soit 1 de plus que celui de Boris, il faut qu'elle ait un total de 11 et que Boris ait un total de 10.
Les groupes de trois bouts de papier qui donnent un total de 11 sont :

$$1, 4, 6 \quad 2, 3, 6 \quad 2, 4, 5$$

(c) Pour qu'Amélie et Boris aient le même total, il faudrait que la somme des totaux soit un nombre pair. Or, la somme des numéros est égale à 21 et la somme des deux totaux doit donc être égale à 21, qui est un nombre impair.
Donc, il est impossible pour Amélie et Boris d'obtenir le même total.

(d) Puisque Amélie et Boris choisissent chacun la moitié des bouts de papier, il doit y avoir un nombre pair de bouts de papier.
La plus petite valeur de n doit donc être de 8 ou plus.
Si $n = 8$, peuvent-ils obtenir le même total ?
Si $n = 8$, la somme des numéros sur les bouts de papier est égale à $1+2+3+4+5+6+7+8$, ou 36, qui est un nombre pair.
Amélie et Boris pourraient obtenir le même total si l'un choisissait 1, 2, 7, 8 et l'autre choisissait 3, 4, 5, 6.
La plus petite valeur de n est donc 8.

2. (a) *Solution 1*
On a $DE = EF = 4$ et $\angle DEF = 90°$. D'après le théorème de Pythagore,
$DF^2 = DE^2 + EF^2$, c'est-à-dire que $DF^2 = 4^2 + 4^2$, ou $DF^2 = 32$. Donc $DF = \sqrt{32}$, ou $DF = 4\sqrt{2}$.

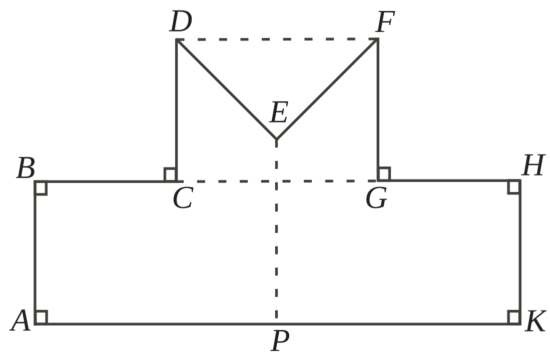
Solution 2
Puisque le triangle DEF est isocèle et rectangle, il s'agit d'un triangle remarquable 45° - 45° - 90°. Donc $DF = \sqrt{2}(DE)$, ou $DF = 4\sqrt{2}$.

(b) *Solution 1*
Puisque le triangle DEF est isocèle, avec $DE = EF$, et que EM est perpendiculaire à DF, alors $DM = MF = \frac{1}{2}(DF)$, ou $DM = MF = 2\sqrt{2}$.
Puisque le triangle DME est rectangle, alors d'après le théorème de Pythagore,
$EM^2 = DE^2 - DM^2$, c'est-à-dire que $EM^2 = 4^2 - (2\sqrt{2})^2$, d'où $EM^2 = 16 - 8$, ou $EM^2 = 8$. Donc $EM = \sqrt{8}$, ou $EM = 2\sqrt{2}$.

Solution 2
Puisque le triangle DEF est isocèle, avec $DE = EF$, et que EM est perpendiculaire à DF, alors $DM = MF = \frac{1}{2}(DF)$, ou $DM = MF = 2\sqrt{2}$.

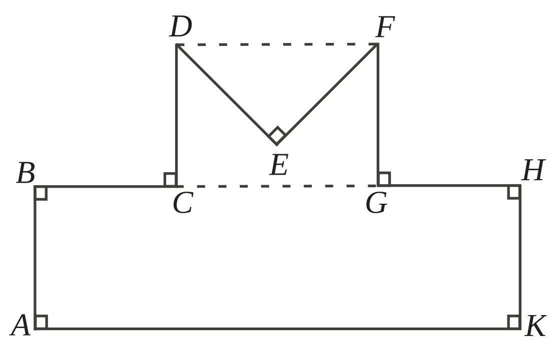
Puisque le triangle DEF est isocèle et rectangle, alors $\angle EDF = 45°$ et le triangle DME est aussi isocèle et rectangle.
Donc $EM = DM = 2\sqrt{2}$.
Solution 3
Puisque DE est perpendiculaire à EF, l'aire du triangle DEF est ègale à $\frac{1}{2}(DE)(EF)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8.
Puisque DF est perpendiculaire à ME, l'aire du triangle DEF est aussi égale à $\frac{1}{2}(DF)(ME)$.
On a donc $\frac{1}{2}(4\sqrt{2})(ME) = 8$, d'où $ME = \dfrac{8}{2\sqrt{2}}$, ou $ME = 2\sqrt{2}$.

(c) On trace les segments DF et CG.



$CGFD$ et $AKHB$ sont des rectangles, puisqu'ils ont chacun quatre angles droits.
Le rectangle $CGFD$ a une hauteur de 4, puisque $DC = FG = 4$. Le rectangle $AKHB$ a aussi une hauteur de 4, puisque $AB = HK = 4$.
La longueur de EP est donc égale à la distance de E à CG plus la hauteur du rectangle $AKHB$.
La distance de E à CG est égale à la différence entre la hauteur du rectangle $CGFD$ et la longueur de EM, soit $4 - 2\sqrt{2}$.
La longueur de EP est donc égale à $4 + (4 - 2\sqrt{2})$, ou $8 - 2\sqrt{2}$.

(d) L'aire de la figure est égale à l'aire du rectangle $AKHB$ plus l'aire du rectangle $CGFD$ moins l'aire du triangle DEF.



Puisque $DF = 4\sqrt{2}$ et que $CD = 4$, l'aire du rectangle $CGFD$ est égale à $4(4\sqrt{2})$, ou $16\sqrt{2}$.
Or $BH = BC + CG + GH$, c'est-à-dire que $BH = 4 + DF + 4$, ou $BH = 8 + 4\sqrt{2}$.
Puisque $AB = 4$, l'aire du rectangle $AKHB$ est égale à $4(8 + 4\sqrt{2})$, ou $32 + 16\sqrt{2}$.
D'après la Solution 3 de la partie (b), l'aire du triangle DEF est égale à 8.
L'aire de la figure $ABCDEFGHK$ est donc égale à $(16\sqrt{2}) + (32 + 16\sqrt{2}) - 8$, ou $24 + 32\sqrt{2}$.

3. (a) Puisque A a pour coordonnées $(0, 16)$ et que B a pour coordonnées $(8, 0)$, la droite qui passe par A et B a pour pente $\dfrac{16-0}{0-8}$, ou -2.
Puisque la droite coupe l'axe des ordonnées au point $A(0, 16)$, son ordonnée à l'origine est égale à 16. Son équation est donc $y = -2x + 16$.

(b) Soit (c, d) les coordonnées de P.
Puisque P est sur la droite d'équation $y = -2x + 16$, alors $d = -2c + 16$. Les coordonnées de P sont donc $(c, -2c + 16)$.
Pour que $PDOC$ soit un carré, il faut que $PD = PC$.
Puisque PD est la distance de P à l'axe des ordonnées, $PD = c$. Puisque PC est la distance de P à l'axe des abscisses, $PC = -2c + 16$.
Donc $c = -2c + 16$, d'où $3c = 16$, ou $c = \frac{16}{3}$.
Les coordonnées de P sont donc $\left(\frac{16}{3}, \frac{16}{3}\right)$.

(c) *Solution 1*
Comme dans la partie (b), soit $(c, -2c + 16)$ les coordonnées de P.
L'aire du rectangle $PDOC$ est égale à $PD \times PC$, ou $c(-2c + 16)$.
Puisque l'aire est égale à 30, alors :

$$\begin{aligned} 30 &= c(-2c+16) \\ 30 &= -2c^2+16c \\ 2c^2-16c+30 &= 0 \\ c^2-8c+15 &= 0 \\ (c-3)(c-5) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $c = 3$ ou $c = 5$.
Les deux points P ont pour coordonnées respectives $(3, 10)$ et $(5, 6)$.
(On peut vérifier que chaque point donne un rectangle qui a une aire de 30.)

Solution 2
Puisque le rectangle $PDOC$ a une aire de 30, les coordonnées de P sont $\left(c, \dfrac{30}{c}\right)$.
Puisque P est sur la droite d'équation $y = -2x + 16$:

$$\begin{aligned} \frac{30}{c} &= -2c+16 \\ 30 &= -2c^2+16c \\ c^2-8c+15 &= 0 \\ (c-3)(c-5) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $c = 3$ ou $c = 5$.
Les deux points P ont pour coordonnées respectives $(3, 10)$ et $(5, 6)$.

4. (a) On considère le nombre de deux chiffres $\underline{a}\,\underline{b} = 10a + b$ et on renverse l'ordre de ses chiffres pour obtenir le nombre $\underline{b}\,\underline{a} = 10b + a$.
La différence est égale à $(10b + a) - (10a + b)$, soit $9b - 9a$, ou $9(b - a)$.
Pour que la différence soit égale à 27, on doit avoir $9(b - a) = 27$, d'où $b - a = 3$, ou $b = a + 3$. Il faut donc que le 2$^{\text{e}}$ chiffre du nombre initial soit 3 de plus que le 1$^{\text{er}}$ chiffre.

Donc, les nombres 14, 25, 36, 47, 58 et 69 donnent une augmentation de 27 lorsqu'on renverse l'ordre de leurs chiffres.

(b) *Solution 1*

Soit $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = 100a + 10b + c$ un entier de trois chiffres. On renverse l'ordre de ses chiffres pour obtenir l'entier $\underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a} = 100c + 10b + a$.
On peut supposer que le premier nombre est supérieur au deuxième, sinon on renverse l'ordre des deux nombres.
Leur différence est égale à :

$$\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t} = \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} - \underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c)$$

Puisque a et c sont des chiffres distincts, l'expression $a - c$ peut prendre toutes les valeurs entières de 1 à 9. L'entier $\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t}$ peut donc prendre des valeurs égales à 99 fois les entiers de 1 à 9. Le tableau suivant indique les valeurs possibles de $\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t}$, les valeurs correspondantes de $\underline{t}\,\underline{s}\,\underline{r}$ et les valeurs correspondantes de leur somme :

$\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t}$	099	198	297	396	495	594	693	792	891
$\underline{t}\,\underline{s}\,\underline{r}$	990	891	792	693	594	495	396	297	198
Somme	1089	1089	1089	1089	1089	1089	1089	1089	1089

Donc, la somme est toujours égale à 1089.

Solution 2

Soit $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = 100a + 10b + c$ un entier de trois chiffres. On renverse l'ordre de ses chiffres pour obtenir l'entier $\underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a} = 100c + 10b + a$.
On peut supposer que le premier nombre est supérieur au deuxième, sinon on renverse l'ordre des deux nombres.
Leur différence est égale à :

$$\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t} = \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} - \underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c)$$

Puisque a et c sont des chiffres distincts, l'expression $a - c$ peut prendre toutes les valeurs entières de 1 à 9.
Dans chacun de ces cas, $\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t} = 99(a - c) = 100(a - c) - (a - c)$. Ainsi $\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t}$ est $a - c$ de moins que $100(a - c)$. Son chiffre des centaines est donc $a - c - 1$, son chiffre des dizaines est 9 et son chiffre des unités est $10 - (a - c)$.
On a donc $\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t} = \underline{a - c - 1}\ \ \underline{9}\ \ \underline{10 - (a - c)}$.
Lorsqu'on renverse l'ordre des chiffres, on obtient $\underline{t}\,\underline{s}\,\underline{r} = \underline{10 - (a - c)}\ \ \underline{9}\ \ \underline{a - c - 1}$.
On additionne ces deux nombres :

$$\begin{array}{cccc} & \underline{a-c-1} & \underline{9} & \underline{10-(a-c)} \\ + & \underline{10-(a-c)} & \underline{9} & \underline{a-c-1} \\ \hline \underline{1} & \underline{0} & \underline{8} & \underline{9} \end{array}$$

(Remarquer qu'un 1 a été retenu de la colonne des dizaines à la colonne des centaines et un autre de la colonne des centaines à la colonne des milliers.)

(c) Puisque $N = \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d} = 1000a + 100b + 10c + d$, alors $M = \underline{d}\,\underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a} = 1000d + 100c + 10b + a$. Donc :

$$\begin{aligned} P &= M - N \\ &= (1000d + 100c + 10b + a) - (1000a + 100b + 10c + d) \\ &= 1000(d-a) + 100(c-b) + 10(b-c) + (a-d) \\ &= 999d + 90c - 90b - 999a \\ &= 999(d-a) + 90(c-b) \end{aligned}$$

Puisque $a \leq b \leq c \leq d$, alors $d - a \geq 0$ et $c - b \geq 0$.
(Ceci nous dit que même si la 3^e^ ligne du développement précédent semble être une représentation de P au moyen de ses chiffres, deux des parenthèses sont possiblement négatives.)
De plus, $d - a \geq c - b$.

<u>1^er^ cas : $a = b = c = d$</u>
Dans ce cas, on a $P = 0$, d'où $Q = 0$. Donc $P + Q = 0$.

<u>2^e^ cas : $d - a = 1$</u>
Dans ce cas, $c - b$ peut seulement prendre les valeurs de 0 ou de 1. Les valeurs correspondantes de P sont $P = 999(1) + 90(0)$ et $P = 999(1) + 90(1)$, c'est-à-dire $P = 0999$ et $P = 1089$.
On renverse l'ordre de ces chiffres pour obtenir $Q = 9990$ et $Q = 9801$. On obtient donc $P+Q = 0999+9990$ et $P+Q = 1089+9801$, c'est-à-dire $P+Q = 10\,989$ et $P+Q = 10\,890$.

<u>3^e^ cas : $d - a > 1$, $c - b = 0$</u>
Dans ce cas, $P = 999(d-a)$, ou $P = 1000(d-a)-(d-a)$. La représentation de P en chiffres est donc $\underline{d-a-1}\ \ \underline{9}\ \ \underline{9}\ \ \underline{10-(d-a)}$. Celle de Q est donc $\underline{10-(d-a)}\ \ \underline{9}\ \ \underline{9}\ \ \underline{d-a-1}$.
La somme de P et de Q est donc :

$$\begin{array}{cccccc} & & \underline{d-a-1} & \underline{9} & \underline{9} & \underline{10-(d-a)} \\ + & & \underline{10-(d-a)} & \underline{9} & \underline{9} & \underline{d-a-1} \\ \hline & \underline{1} & \underline{0} & \underline{9} & \underline{8} & \underline{9} \end{array}$$

Voici une autre façon de s'y prendre (on s'assure que 1000, 100, 10 et 1 sont multipliés par un entier non négatif inférieur à 10) :

$$\begin{aligned} P &= 999(d-a) \\ &= 1000(d-a) - (d-a) \\ &= 1000(d-a-1) + 1000 - (d-a) \\ &= 1000(d-a-1) + 100(9) + 100 - (d-a) \\ &= 1000(d-a-1) + 100(9) + 10(9) + (10 - (d-a)) \end{aligned}$$

Les chiffres sont $d - a - 1$, 9, 9 et $10 - (d - a)$.
On a donc $Q = 1000(10 - (d - a)) + 100(9) + 10(9) + (d - a - 1)$.
Donc $P + Q = 1000(9) + 100(18) + 10(18) + 9$, ou $P + Q = 10\,989$.

<u>4^e</u>

4[e] cas : $d-a>1$, $c-b>0$

Dans ce cas, on a :

$$\begin{array}{rcl}
P & = & 999(d-a)+90(c-b) \\
 & = & 1000(d-a)-(d-a)+100(c-b)-10(c-b) \\
 & = & \underline{d-a-1}\ \ \underline{9}\ \ \underline{9}\ \ \underline{10-(d-a)}+\underline{c-b-1}\ \ \underline{10-(c-b)}\ \ \underline{0} \\
 & = & \underline{d-a-1}\ \ \underline{9+c-b-1}\ \ \underline{9+10-(c-b)}\ \ \underline{10-(d-a)+0} \\
 & = & \underline{d-a-1}\ \ \underline{9+c-b-1+1}\ \ \underline{9-(c-b)}\ \ \underline{10-(d-a)} \\
 & = & \underline{d-a}\ \ \underline{c-b-1}\ \ \underline{9-(c-b)}\ \ \underline{10-(d-a)}
\end{array}$$

(Des retenues ont été utilisées dans les deux dernières lignes.)

Donc $Q=\underline{10-(d-a)}\ \ \underline{9-(c-b)}\ \ \underline{c-b-1}\ \ \underline{d-a}$.

On additionne P et Q :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \underline{d-a} & \underline{c-b-1} & \underline{9-(c-b)} & \underline{10-(d-a)} \\
+ & & \underline{10-(d-a)} & \underline{9-(c-b)} & \underline{c-b-1} & \underline{d-a} \\
\hline
 & \underline{1} & \underline{0} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{0}
\end{array}$$

Voici une autre façon de s'y prendre (on s'assure que 1000, 100, 10 et 1 sont multipliés par un entier non négatif inférieur à 10) :

$$\begin{array}{rcl}
P & = & 999(d-a)+90(c-b) \\
 & = & 1000(d-a)+100(c-b)-10(c-b)-(d-a) \\
 & = & 1000(d-a)+100(c-b-1)+100-10(c-b)-(d-a) \\
 & = & 1000(d-a)+100(c-b-1)+10(10-(c-b))-(d-a) \\
 & = & 1000(d-a)+100(c-b-1)+10(9-(c-b))+(10-(d-a))
\end{array}$$

Les chiffres sont $d-a$, $c-b-1$, $9-(c-b)$ et $10-(d-a)$.

On a donc $Q=1000(10-(d-a))+100(9-(c-b))+10(c-b-1)+(d-a)$.

Donc $P+Q=1000(10)+100(8)+10(8)+10$, ou $P+Q=10\,890$.

Les valeurs possibles de $P+Q$ sont 0, 10 890 et 10 989.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Galois 2005

Le mercredi 20 avril 2005

Solutions

©2005 La Fondation de mathématiques de Waterloo

1. (a) *Solution 1*
On écrit les 11 premiers termes en ajoutant toujours 5 au terme précédent :

$$17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57, 62, 67$$

Le 11^{e} terme est 67.

Solution 2
Puisqu'on ajoute toujours 5 au terme précédent pour obtenir le terme suivant, on doit ajouter 10 fois le nombre 5 au terme initial, soit 17, pour obtenir le 11^{e} terme.
Le 11^{e} terme est donc égal à $17 + 5(10)$, ou 67.

(b) *Solution 1*
Chaque terme de la 1re suite se termine par un 7 ou un 2. En effet, on ajoute toujours 5 au terme précédent pour obtenir le terme suivant et lorsqu'on ajoute 5 à un nombre qui se termine par un 7, on obtient un nombre qui se termine par un 2 ; lorsqu'on ajoute 5 à un nombre qui se termine par un 2, on obtient un nombre qui se termine par un 7.
Chaque terme de la 2^{e} suite se termine par un 3 ou un 8. En effet, on ajoute 15 au terme précédent pour obtenir le terme suivant et lorsqu'on ajoute 15 à un nombre qui se termine par un 3, on obtient un nombre qui se termine par un 8 ; lorsqu'on ajoute 15 à un nombre qui se termine par un 8, on obtient un nombre qui se termine par un 3.
Il n'existe aucun nombre qui soit un terme de chaque suite, car il n'existe aucun nombre qui se termine par deux chiffres différents.

Solution 2
Chaque terme de la 1re suite est de la forme $17 + 5n$, n étant un entier non négatif quelconque.
Chaque terme de la 2^{e} suite est de la forme $13 + 15m$, m étant un entier non négatif quelconque.
Pour qu'un nombre soit un terme de chaque suite, il faudrait que $17 + 5n = 13 + 15m$, c'est-à-dire que $4 = 15m - 5n$, ou $4 = 5(3m - n)$.
Or, le membre de droite est un multiple de 5, tandis que le membre de gauche ne l'est pas. Cette dernière équation n'admet donc aucune solution, c'est-à-dire aucune valeur de m et de n qui la vérifie.
Donc, il n'existe aucun nombre qui soit un terme de chaque suite.

(c) *Solution 1*
On remarque que 22 est un terme de chaque suite.
Puisque la différence entre les termes consécutifs de la 1re suite est de 5 et que celle de la 2^{e} suite est de 6, alors un nombre qui est 30 (soit 5×6) de plus que 22 sera aussi un terme de chaque suite. (En effet, lorsqu'on ajoute 30 à un terme de la 1re suite, on avance de 6 termes. Lorsqu'on ajoute 30 à un terme de la 2^{e} suite, on avance de 5 termes.)
Les nombres qui sont des termes des deux suites sont 22, 52, 82, 112, 142, 172, 202, 232, 262, 292, 322, 352, 382, 412, ...
Donc le nombre, entre 400 et 420, qui est un terme de chaque suite est 412.

Solution 2
Puisque la différence entre les termes consécutifs de la 1re suite est de 5, cette suite contient tous les entiers positifs, à partir de 17, qui se terminent par un 2 ou un 7.
Donc, les termes de la 1re suite, entre 400 et 420, sont 402, 407, 412 et 417.
Lequel de ces quatre nombres est aussi un terme de la 2^{e} suite ?

Puisque la différence entre les termes consécutifs de la 2^e^ suite est de 6, tous les termes de cette suite sont de la forme $16 + 6n$, n étant un entier non négatif.
On cherche donc un entier n tel que $16 + 6n = 402$, $16 + 6n = 407$, $16 + 6n = 412$ ou $16+6n = 417$, c'est-à-dire tel que $6n = 386$, $6n = 391$, $6n = 396$ ou $6n = 401$. On voit que la 2^e^ et la 4^e^ équation ont un membre de gauche pair et un membre de droite impair. Elles n'admettent donc aucune solution entière. On voit aussi que 386 n'est pas divisible par 3. Il n'est donc pas divisible par 6. La 1^re^ équation n'admet donc aucune solution entière. On vérifie que l'équation $6n = 396$ admet une solution, soit $n = 66$.
Donc, le nombre 412 est un terme de chaque suite.

2. (a) Il reste un 5 et deux 6 à placer. Il n'y a que trois façons de les placer :

1	3	6	5
3	1	2	2
5	4	4	6

(sommes des colonnes : 9, 8, 12, 13 ; sommes des rangées : 15, 8, 19)

1	3	5	5
3	1	2	2
6	4	4	6

(sommes des colonnes : 10, 8, 11, 13 ; sommes des rangées : 14, 8, 20)

1	3	6	5
3	1	2	2
6	4	4	5

(sommes des colonnes : 10, 8, 12, 12 ; sommes des rangées : 15, 8, 19)

La première façon donne plus de points à Isaac :

1	3	6	5
3	1	2	2
5	4	4	6

Isaac obtient 4 points et Paulette en obtient 3.

(b) Il y a 4 colonnes et 3 rangées. Chacune fournit 1 point pour un total de 7 points. Le nombre de points d'Isaac et de Paulette doit donc avoir une somme de 7.
Puisque 7 est un nombre impair, Isaac et Paulette ne peuvent pas obtenir le même nombre de points.

(c) *Solution 1*
Il reste deux 2, un 4 et un 5 à placer, c'est-à-dire trois nombres pairs et un nombre impair.
La quatrième colonne est déjà remplie et elle a une somme paire, ce qui accorde un point à Paulette.
On considère les 1^re^ et 3^e^ colonnes, ainsi que les 1^re^ et 3^e^ rangées.
Chacune a un espace vide et, à ce point, une somme paire.
Si un nombre pair est placé dans un espace vide d'une colonne ou d'une rangée, celle-ci sera complète et sa somme sera paire, ce qui accordera un point à Paulette. Si un nombre impair y est placé, la colonne ou la rangée sera complète et sa somme sera impaire, ce qui accordera un point à Isaac.
Or, il ne reste qu'un numéro impair à jouer. Donc, une seule de ces colonnes ou de ces rangées aura une somme impaire, tandis que trois d'entre elles auront une somme paire.
Donc, peu importe où Isaac place le 5, Paulette recevra au moins 3 points de plus pour un total d'au moins 4 points.

Isaac obtiendra au plus 3 points, car il y a un total de 7 points disponibles.

Solution 2

Il reste deux 2, un 4 et un 5 à placer, c'est-à-dire trois nombres pairs et un nombre impair.
Supposons qu'Isaac place son 5 dans la 1re colonne.
La somme de la 1re rangée est égale à $1+2+3+6$ ou $1+4+3+6$. Elle est donc paire.
La somme de la 3e rangée est égale à $3+2+1+6$ ou $3+4+1+6$. Elle est donc paire.
La somme de la 4e colonne est égale à 16. Elle est paire.
La somme de la 3e colonne est égale à $3+2+1$ ou $3+4+1$. Elle est donc paire.
Dans ce cas, Paulette recevra au moins 4 points et Isaac en recevra au plus 3. Elle gagnera.

Si Isaac place le 5 dans la 3e colonne, l'argument est le même que pour le cas précédent, sauf qu'on considère la 3e colonne au lieu de la 1re. Paulette obtient au moins 4 points.

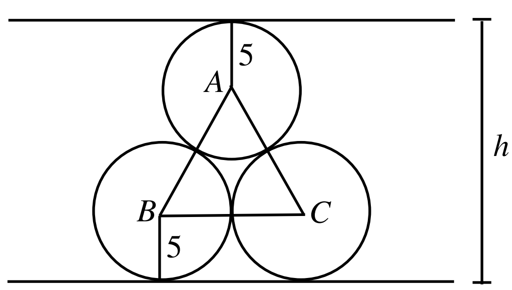
Supposons qu'Isaac place le 5 dans la 1re rangée.
Il reste alors deux 2 et un 4 à placer.
La somme de la 3e rangée est égale à $3+2+1+6$ ou $3+4+1+6$. Elle est donc paire.
La somme de la 4e colonne est égale à 16. Elle est paire.
La somme de la 1re colonne et celle de la 3e colonne est égale à $3+2+1$ ou $3+4+1$. Elle est donc paire.
Dans ce cas, Paulette recevra au moins 4 points et Isaac en recevra au plus 3. Elle gagnera.

Si Isaac place le 5 dans la 3e rangée, l'argument est le même que pour le cas précédent, sauf qu'on considère la 1re rangée au lieu de la 3e. Paulette obtient au moins 4 points.

Dans chacun des cas possibles, Paulette gagne, peu importe où Isaac place le 5.

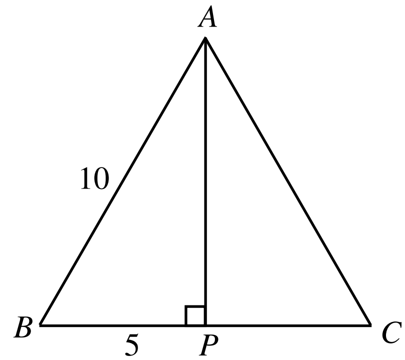
3. (a) Dans la 1re caisse, il y a 10 tuyaux par rangée. Puisque la caisse contient 200 tuyaux, elle contient 10 rangées de tuyaux.
Dans la 2e caisse, le nombre de tuyaux par rangée alterne entre 9 et 10. Dans deux rangées adjacentes, il y a un total de 19 tuyaux. Dans 20 rangées, il y a donc 190 tuyaux. La rangée du dessus a 9 tuyaux, car les rangées dont le numéro est pair contiennent chacune 9 tuyaux. Donc, si on ajoute une autre rangée de tuyaux, on ajoute 10 tuyaux pour un total de 200 tuyaux. Donc, il y a 21 rangées de tuyaux dans la 2e caisse.

   (b) Soit A, B et C le centre des trois cercles. On les joint pour former un triangle.
Les segments AB, BC et CA passent chacun par un point de contact de deux cercles. Chacun a donc une longueur de 10 cm, soit le double du rayon d'un cercle.
On divise la hauteur de la pile en trois parties, soit la distance entre le bas de la pile et le segment BC, la hauteur du triangle équilatéral ABC et la distance de A jusqu'au sommet de la pile.



La première et la troisième partie ont chacun une hauteur de 5 cm, soit le rayon d'un cercle.

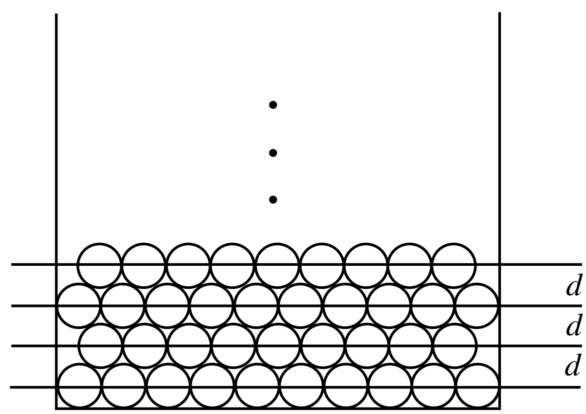
Il reste à déterminer la hauteur du triangle ABC, qui est équilatéral avec des côtés de 5 cm.
On peut s'y prendre de plusieurs façons.
On abaisse la hauteur AP.
Puisque $AB = AC$, alors P est le milieu de BC, d'où $BP = 5$ cm.



Le triangle ABP est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $AP = \sqrt{3}BP$, d'où $AP = 5\sqrt{3}$ cm.
La hauteur de la pile est donc égale à $(5 + 5\sqrt{3} + 5)$ cm, ou $(10 + 5\sqrt{3})$ cm.

(c) Dans la 1re caisse, il y a 20 rangées de 10 tuyaux empilés directement les uns sur les autres. La hauteur totale de la pile est égale à 20 fois le diamètre d'un tuyau, c'est-à-dire à 200 cm.

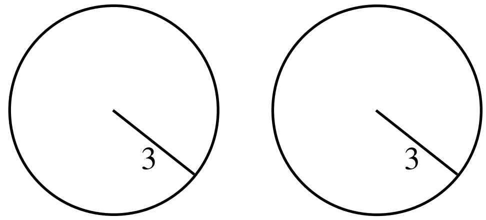
Pour calculer la hauteur de la pile dans la 2e caisse, on trace une ligne horizontale à travers le centre des tuyaux de chaque pile.
La distance entre deux droites consécutives est la même, disons d. Puisqu'il y a 21 rangées, il y a 20 telles distances.



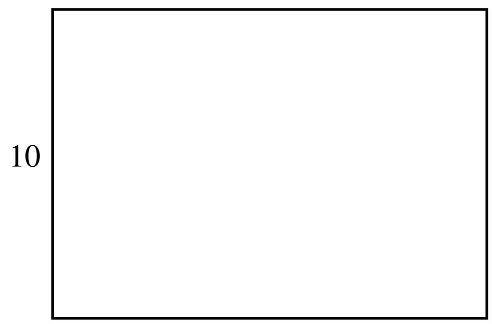
La distance entre le bas de la pile et la ligne du bas est égale au rayon d'un tuyau. Il en est de même de la distance entre la ligne du haut et le haut de la pile. La hauteur de la pile dans la 2e caisse est donc égale à $(10 + 20d)$ cm.
Quelle est la valeur de d ?
Si on considère trois tuyaux placés comme dans la partie (b), on voit que d est égal à la hauteur du triangle équilatéral de (b). On a donc $d = 5\sqrt{3}$ cm.
La hauteur de la pile dans cette caisse est égale à $(10 + 100\sqrt{3})$ cm, soit environ 183,2 cm.

La différence entre la hauteur totale des deux piles est de $[200 - (10 + 100\sqrt{3})]$ cm, ou $(190 - 100\sqrt{3})$ cm, ou environ 16,8 cm. La 1re pile est la plus haute.

4. (a) Pour calculer l'aire totale du cylindre, on imagine qu'on découpe les deux extrémités pour obtenir deux disques de rayon 3.



L'aire totale des disques est égale à $2\pi r^2$, c'est-à-dire à $2\pi(3^2)$, ou 18π.
On calcule ensuite l'aire de la surface latérale.
Pour la calculer, on découpe la surface latérale à la verticale et on la déroule pour la placer à plat.
On obtient alors un rectangle de hauteur 10. La base du rectangle est égale à la circonférence du cylindre avant le déroulement.



Cette circonférence est égale à $2\pi r$, c'est-à-dire à $2\pi(3)$, ou 6π. La base du rectangle a donc une longueur de 6π.
L'aire du rectangle est donc égale à $10 \times 6\pi$, ou 60π.
L'aire totale du cylindre est égale à $18\pi + 60\pi$, ou 78π.
Le volume du cylindre est égal à $\pi r^2 h$, c'est-à-dire à $\pi(3^2)(10)$, ou 90π.

(b) Le volume de la sphère est égal à $\frac{4}{3}\pi r^3$ et celui du cylindre est égal à $\pi r^2 H$. Puisque ces volumes sont égaux, alors $\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 H$, d'où $H = \frac{4}{3}r$ (on a divisé chaque membre par πr^2).
D'après le travail de la partie (a) et en généralisant, on voit qu'un cylindre de rayon r et de hauteur H a une aire totale de $2\pi r^2 + 2\pi r H$ (aire des extrémités plus l'aire latérale).
Il est donné que l'aire totale d'un cône de rayon r et de hauteur h est égale à $\pi r^2 + \pi r s$, s étant la longueur de la génératrice.
Puisque le cône et le cylindre ont la même aire totale, alors :

$$\begin{aligned} 2\pi r^2 + 2\pi r H &= \pi r^2 + \pi r s \\ 2r + 2H &= r + s \qquad \text{(On a divisé chaque membre par } \pi r.) \\ r + 2H &= s \end{aligned}$$

Puisqu'on veut démontrer une relation entre h et H, on devrait tenter d'éliminer s.
On trace un segment entre le sommet (l'apex) du cône et le centre de la base du cône. Puisque ce segment est perpendiculaire à la base, il forme un triangle rectangle ayant une hypoténuse de longueur s et des cathètes de longueurs r et h.
D'après le théorème de Pythagore, $s = \sqrt{r^2 + h^2}$.
L'équation ci-haut devient alors $r + 2H = \sqrt{r^2 + h^2}$.
Or, on sait que $H = \frac{4}{3}r$, d'où $r = \frac{3}{4}H$. On reporte $r = \frac{3}{4}H$ dans l'équation précédente

pour qu'elle soit exprimée en fonction de H et de h seulement :

$$\begin{aligned}
r + 2H &= \sqrt{r^2 + h^2} \\
\frac{3}{4}H + 2H &= \sqrt{\left(\frac{3}{4}H\right)^2 + h^2} \\
\frac{11}{4}H &= \sqrt{\frac{9}{16}H^2 + h^2} \\
\frac{121}{16}H^2 &= \frac{9}{16}H^2 + h^2 \qquad \text{(On a mis chaque membre au carré.)} \\
\frac{112}{16}H^2 &= h^2 \\
7H^2 &= h^2
\end{aligned}$$

Puisque $h^2 = 7H^2$, alors $h = \sqrt{7}H$. Donc, h et H ne peuvent tous deux être des entiers, car $\sqrt{7}$ est un nombre irrationnel.

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Galois 2004 (10^{e} année ou Secondaire IV)

© 2004 La Fondation de mathématiques de Waterloo

1. a) Puisqu'au moins un prix de chaque sorte est décerné, un prix de chaque sorte correspond à une somme de $5\ \$ + 25\ \$ + 125\ \$ + 625\ \$$, ou 780 $.
Puisque cinq prix sont décernés, le 5e prix vaut $905\ \$ - 780\ \$$, ou 125 $.
La Fondation Galois a donc décerné un prix de 5 $, un prix de 25 $, deux prix de 125 $ et un prix de 625 $.

b) Comme dans la partie a), un prix de chaque sorte correspond à une somme de 780 $.
Le 5e prix pourrait correspondre à 5 $, pour un total de $780\ \$ + 5\ \$$, ou 785 $.
Le 5e prix pourrait correspondre à 25 $, pour un total de $780\ \$ + 25\ \$$, ou 805 $.
Le 5e prix pourrait correspondre à 625 $, pour un total de $780\ \$ + 625\ \$$, ou 1405 $.
[On a déjà traité du prix supplémentaire de 125 $ dans la partie a).]

c) *Solution 1*
Un prix de chaque sorte correspond à une somme de 780 $. Il reste à distribuer $880\ \$ - 780\ \$$, ou 100 $, en attribuant les prix au plus cinq autres fois chacun. On ne peut décerner d'autres prix de 125 $ ou de 625 $, car cela dépasse ce qu'il reste à distribuer.
On peut décerner quatre autres prix de 25 $, pour une somme de 100 $.
Peut-on décerner moins de quatre autres prix de 25 $? Si on décerne trois autres prix de 25 $, il reste 25 $ à distribuer. On peut le faire en décernant cinq prix de 5 $.
Peut-on décerner moins de trois prix de 25 $? Si on le faisait, il resterait au moins 50 $ à distribuer et il faudrait décerner au moins dix prix de 5 $. Or, on ne peut décerner plus de cinq autres prix de 5 $. C'est donc impossible.
Il y a donc deux façons de décerner des prix d'une valeur totale de 880 $ selon les conditions données :
   i) un prix de 625 $, un prix de 125 $, cinq prix de 25 $ et un prix de 5 $
   ii) un prix de 625 $, un prix de 125 $, quatre prix de 25 $ et six prix de 5 $
On peut vérifier, en additionnant, que la valeur totale est de 880 $ dans chaque cas.

Solution 2
Un prix de chaque sorte correspond à une somme de 780 $. En ajoutant un autre prix, on atteint les sommes suivantes : 785 $, 805 $, 905 $ et 1405 $. Or les deux dernières sommes dépassent la valeur totale de 880 $.
En partant de 785 $ ou de 805 $, on tente de se rendre à 880 $.

En partant de 785 $, il faut distribuer 95 $ de plus pour se rendre à 880 $. En décernant trois autres prix de 25 $, on ajoute 75 $ et il reste 20 $ à distribuer, ce qu'on peut faire en décernant quatre prix de 5 $. (On ne peut décerner moins de trois autres prix de 25 $ sans décerner plus de six prix de 5 $ en tout.) On peut donc décerner un prix de 625 $, un prix de 125 $, quatre prix de 25 $ et six prix de 5 $ (car on avait déjà décerné deux prix de 5 $ pour faire une somme initiale de 785 $).

En partant de 805 \$, il faut distribuer 75 \$ de plus pour se rendre à 880 \$. On peut le faire en décernant trois autres prix de 25 \$. On décerne alors un prix de 625 \$, un prix de 125 \$, cinq prix de 25 \$ et un prix de 5 \$. On peut aussi combler la somme de 75 \$ en décernant deux autres prix de 25 \$ et cinq autres prix de 5 \$. On décerne alors un prix de 625 \$, un prix de 125 \$, quatre prix de 25 \$ et six prix de 5 \$ (ce qui correspond au résultat obtenu en partant de 785 \$). Si on décernait moins de deux autres prix de 25 \$, il faudrait décerner un trop grand nombre de prix de 5 \$.

Il y a donc deux façons de décerner des prix d'une valeur totale de 880 \$ selon les conditions données :

i) un prix de 625 \$, un prix de 125 \$, cinq prix de 25 \$ et un prix de 5 \$

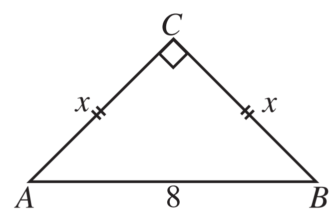
ii) un prix de 625 \$, un prix de 125 \$, quatre prix de 25 \$ et six prix de 5 \$

On peut vérifier, en additionnant, que la valeur totale est de 880 \$ dans chaque cas.

2. a) *Solution 1*

Soit $AC = x$. Puisque le triangle *ABC* est isocèle, alors $BC = x$.
Puisque le triangle *ABC* est rectangle, on a, d'après le théorème de Pythagore :

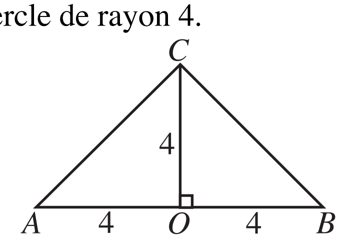
$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 8^2 \\ 2x^2 &= 64 \\ x^2 &= 32 \\ x &= \sqrt{32} \text{ ou } x = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$



(Cette dernière ligne est superflue, car il suffit de connaître x^2.)
L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(AC)(BC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}x^2$, ou 16.

Solution 2

Soit *O* le milieu de *AB*. Donc, *O* est le centre du demi-cercle de rayon 4.
On joint *O* et *C*. Puisque le triangle *ABC* est isocèle, *OC* est perpendiculaire à *AB*. Puisque *C* est sur le cercle, *OC* est un rayon. Donc $OC = 4$.
L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(AB)(OC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(8)(4)$, ou 16.



b) L'aire totale de la partie ombrée est égale à la différence entre l'aire du demi-cercle et celle du triangle. L'aire du triangle est égale à 16.
Le demi-cercle a un rayon de 4. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}\pi(4)^2$, ou 8π.
L'aire totale de la partie ombrée est égale à $8\pi - 16$.

c) On sait que l'aire du demi-cercle de diamètre *AB* est égale à 8π.
Puisque $AC = CB$, les deux demi-cercles, de diamètres *AC* et *CB*, ont la même aire.
Puisque $AC = 4\sqrt{2}$, le demi-cercle de diamètre *AC* a un rayon de $2\sqrt{2}$. L'aire du demi-cercle de diamètre *AC* est égale à $\frac{1}{2}\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}\pi(8)$, ou 4π.
Donc : (Aire du demi-cercle de diamètre *AC*) + (Aire du demi-cercle de diamètre *BC*)
$= 4\pi + 4\pi$
Cette aire est égale à 8π, soit l'aire du demi-cercle de diamètre *AB*.

3. a) Si Boris place un 3 dans n'importe quel des huit cercles vides, la somme des deux nombres placés est égale à 8. Annick peut ensuite gagner en plaçant un 7 dans le cercle diamétralement opposé.

b) Comme dans la partie a), Boris peut placer un des numéros 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 dans n'importe quel des huit cercles vides. À son tour, Annick devrait placer un numéro dans le cercle diamétralement opposé. Le numéro qu'elle place devrait être choisi de manière à donner une somme de 15. Le tableau suivant indique comment le faire.

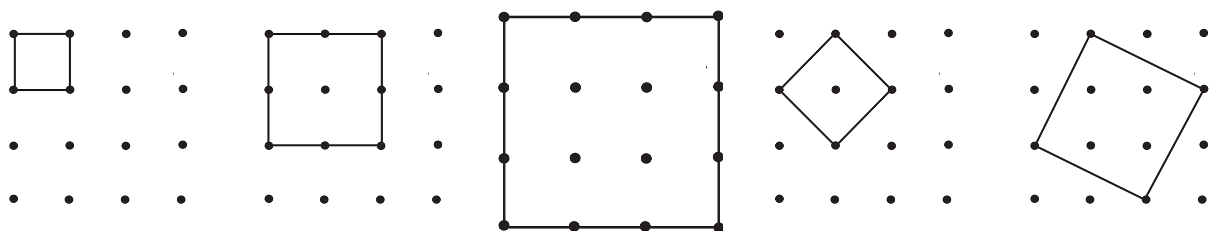
1^er^ tour de Boris	*Total à date*	*2^e^ tour d'Annick*
1	6	9
2	7	8
3	8	7
4	9	6
6	11	4
7	12	3
8	13	2
9	14	1

Puisque chacun de ces choix est possible (le 5 initial n'est pas réutilisé et aucun des choix n'est le même que celui de Boris), Annick peut toujours gagner à son prochain tour.

c) Boris peut placer n'importe quel des numéros 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans n'importe quel des six cercles vides. Il est possible d'apparier le 5 et le 9 ou le 6 et le 8, qui ont une somme de 14, de manière qu'en les plaçant aux extrémités d'une même ligne, on ait une somme de 15. Il n'est pas possible d'apparier le 4 ou le 7 avec un autre nombre pour obtenir une somme de 14. Si Boris place le 5, le 6, le 8 ou le 9, Annick peut placer le deuxième nombre de la paire et gagner.

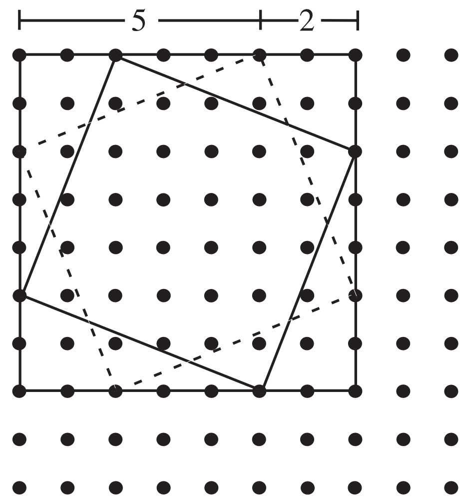
Si Boris place le 4 ou le 7, Annick devrait placer le deuxième de ces deux nombres, soit le 7 ou le 4, respectivement. Elle ne gagnera pas tout de suite, mais elle force Boris à jouer un des quatre numéros précédents, ce qui lui permettra de gagner en jouant le deuxième nombre de la paire.

4. a) On peut placer 3 carrés de dimensions 1 sur 1 par rangée, sur 3 rangées, pour un total de 9 carrés.
On peut placer 2 carrés de dimensions 2 sur 2 par rangée, sur 2 rangées, pour un total de 4 carrés.
On peut placer 1 carré de dimensions 3 sur 3.



On peut former un autre carré en joignant les milieux des côtés d'un carré de dimensions 2 sur 2. On obtient alors un carré de dimensions $\sqrt{2}$ sur $\sqrt{2}$, comme dans la 4e figure. Chacun des 4 carrés de dimensions 2 sur 2 donne un carré de dimensions $\sqrt{2}$ sur $\sqrt{2}$, c'est-à-dire que l'on a 4 nouveaux carrés.
On peut former un nouveau carré à partir du carré de dimensions 3 sur 3. Il suffit de découper, dans chaque coin, un triangle rectangle dont les cathètes mesurent 1 et 2 (et dont l'hypoténuse mesure $\sqrt{5}$). On obtient alors un carré de dimensions $\sqrt{5}$ sur $\sqrt{5}$, comme dans la 5e figure. Or, on peut le faire de deux façons, soit en découpant dans l'ordre des cathètes de longueurs 1 et 2 ou 2 et 1. On obtient alors un carré qui est la réflexion du carré ci-dessus, par rapport à un axe de réflexion vertical. Le carré de dimensions 3 sur 3 donne donc 2 carrés de dimensions $\sqrt{5}$ sur $\sqrt{5}$.
Le nombre de carrés de chaque grandeur qu'il est possible de tracer est donc égal à $9+4+1+4+2$, ou 20.

b) On remarque qu'il est possible de tracer 9 carrés de dimensions 7 sur 7. Les côtés de ces carrés sont parallèles aux lignes du quadrillage. À partir de chacun de ces carrés, il est possible de former 2 carrés de dimensions $\sqrt{29}$ sur $\sqrt{29}$. La figure suivante montre un carré de dimensions 7 sur 7 et les 2 carrés correspondants de dimensions $\sqrt{29}$ sur $\sqrt{29}$.



c) On compte d'abord le nombre de carrés dont les côtés sont parallèles aux lignes du quadrillage.
Dimensions 1 sur 1 : On peut en placer 9 par rangée, sur 9 rangées, pour un total de 9^2.
Dimensions 2 sur 2 : On peut en placer 8 par rangée, sur 8 rangées, pour un total de 8^2.
Cette régularité se poursuit jusqu'aux 2^2 carrés de dimensions 8 sur 8 et 1^2 carré de dimensions 9 sur 9.
Comme on l'a vu, chacun de ces carrés peut être découpé pour former d'autres carrés.
Chaque carré de dimensions 2 sur 2 génère un carré de dimensions $\sqrt{2}$ sur $\sqrt{2}$. Les carrés de dimensions 2 sur 2 contribuent donc un total de $2\left(8^2\right)$ carrés, soit 8^2 carrés de dimensions 2 sur 2 et 8^2 carrés de dimensions $\sqrt{2}$ sur $\sqrt{2}$).
Chaque carré de dimensions 3 sur 3 génère 2 carrés de dimensions $\sqrt{5}$ sur $\sqrt{5}$, car on peut découper les coins avec des cathètes de longueurs respectives 1 et 2 ou 2 et 1. Les carrés de dimensions 3 sur 3 contribuent donc un total de $3\left(7^2\right)$ carrés.

On peut découper les coins d'un carré de dimensions 4 sur 4 avec des cathètes de longueurs respectives 1 et 3, 2 et 2 ou 3 et 1, pour donner des carrés de dimensions $\sqrt{10}$ sur $\sqrt{10}$, $\sqrt{8}$ sur $\sqrt{8}$ ou $\sqrt{10}$ sur $\sqrt{10}$, selon le cas. Les carrés de dimensions 4 sur 4 contribuent donc un total de $4\left(6^2\right)$ carrés.

Cette régularité se poursuit jusqu'au carré de dimensions 9 sur 9. On peut découper les coins d'un carré de dimensions 9 sur 9 avec des cathètes de longueurs respectives 1 et 8, 2 et 7, 3 et 6, 4 et 5, 5 et 4, 6 et 3, 7 et 2, ou 8 et 1, pour donner des carrés dont les côtés ont des longueurs respectives de $\sqrt{65}$, $\sqrt{53}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{53}$ ou $\sqrt{65}$. Le carré de dimensions 9 sur 9 contribue donc un total de $9\left(1^2\right)$ carrés.

Le nombre total de carrés qu'il est possible de tracer est donc égal à

$$1\left(9^2\right)+2\left(8^2\right)+3\left(7^2\right)+4\left(6^2\right)+5\left(5^2\right)+6\left(4^2\right)+7\left(3^2\right)+8\left(2^2\right)+9\left(1^2\right).$$

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre
en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Galois 2003 (10e – année)

(Secondaire IV au Québec)

pour les prix du
The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

© 2003 La Fondation de mathématiques de Waterloo

1. a) *Solution 1*

Puisqu'on cherche 5 carrés parfaits consécutifs dont la somme est égale à 1815, le carré du milieu devrait être près de $\frac{1}{5}(1815)$, ou 363.

Quel est le carré parfait le plus près de 363? À l'aide d'une calculatrice, on obtient $\sqrt{363} \approx 19{,}05$. Donc 19^2, ou 361, est le carré parfait le plus près de 363.

On vérifie : $17^2 + 18^2 + 19^2 + 20^2 + 21^2$ est égal à $289 + 324 + 361 + 400 + 441$, ou 1815.

Le plus grand des entiers est 21.

Solution 2

Soit *n* le plus petit des 5 entiers positifs consécutifs. Donc :

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 = 1815$$
$$n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 6n + 9 + n^2 + 8n + 16 = 1815$$
$$5n^2 + 20n + 30 = 1815$$
$$n^2 + 4n + 6 = 363$$
$$n^2 + 4n - 357 = 0$$
$$(n+21)(n-17) = 0$$

Puisque *n* est positif, on a $n = 17$. Le plus grand des entiers est $n + 4$, ou 21.

Solution 3

Soit *m* l'entier du milieu. (Ce choix facilite les manipulations algébriques.)

Les 5 entiers positifs consécutifs sont donc $m-2$, $m-1$, m, $m+1$ et $m+2$. Donc :

$$(m-2)^2 + (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 = 1815$$
$$m^2 - 4m + 4 + m^2 - 2m + 1 + m^2 + m^2 + 2m + 1 + m^2 + 4m + 4 = 1815$$
$$5m^2 + 10 = 1815$$
$$5m^2 = 1805$$
$$m^2 = 361$$

Puisque *m* est positif, on a $m = 19$. Le plus grand des entiers est $m + 2$, ou 21.

b) *Solution 1*

Soit *n* le plus petit des cinq entiers consécutifs.

La somme de leurs carrés est égale à :

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2$$
$$= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 6n + 9 + n^2 + 8n + 16$$
$$= 5n^2 + 20n + 30$$
$$= 5\left(n^2 + 4n + 6\right)$$

Puisque 5 est un facteur de la somme et que le deuxième facteur est un entier (puisque n est un entier), la somme des carrés de n'importe quels 5 entiers consécutifs est toujours divisible par 5.

Solution 2

Soit m l'entier du milieu. (Ce choix facilite les manipulations algébriques.)
Les 5 entiers positifs consécutifs sont donc $m-2$, $m-1$, m, $m+1$ et $m+2$. Donc :

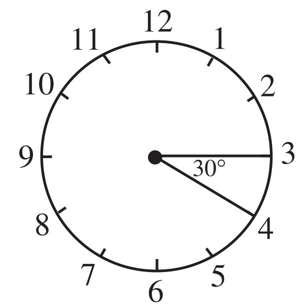
$$\begin{aligned}&(m-2)^2+(m-1)^2+m^2+(m+1)^2+(m+2)^2\\&=m^2-4m+4+m^2-2m+1+m^2+m^2+2m+1+m^2+4m+4\\&=5m^2+10\\&=5\left(m^2+2\right)\end{aligned}$$

Puisque 5 est un facteur de la somme et que le deuxième facteur est un entier (puisque m est un entier), la somme des carrés de n'importe quels 5 entiers consécutifs est toujours divisible par 5.

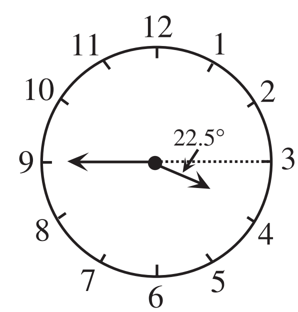
Prolongement

Dans la partie a), on a vu que $17^2+18^2+19^2+20^2+21^2=1815$.
Pour exprimer 1815 comme somme de cinq entiers consécutifs, on peut d'abord déterminer le nombre du milieu, qui est aussi la moyenne des cinq nombres, soit $\frac{1}{5}(1815)$, ou 363. On a donc $361+362+363+364+365=1815$.
On cherche le prochain nombre, plus grand que 1815, qui vérifie la même propriété.
Cherchons d'abord le prochain entier qui est la somme des carrés de 5 entiers consécutifs.
Dans la partie b), on a vu que si m est le nombre du milieu parmi 5 entiers consécutifs, la somme des carrés des 5 entiers est égale à $(m-2)^2+(m-1)^2+m^2+(m+1)^2+(m+2)^2$, ou $5n^2+10$. On a vu que si $m=19$, la somme des carrés est égale à 1815. On obtiendra donc la prochaine somme des carrés de 5 entiers consécutifs en posant $m=20$, ce qui donne une somme de $5(20)^2+10$, ou 2010.
Ce nombre est-il aussi la somme de 5 entiers consécutifs?
Le nombre du milieu serait égal à $\frac{1}{5}(2010)$, ou 402, ce qui est bien un entier. On peut vérifier que $400+401+402+403+404=2010$.
Donc le nombre 2010 est le premier nombre, après 1815, qui est à la fois la somme de 5 entiers consécutifs et la somme des carrés de 5 entiers consécutifs.
(D'après ce qu'on a fait, il semble bien que *n'importe quel* multiple de 5 est la somme de 5 entiers consécutifs. Pouvez-vous le prouver?)

2\. a) Dans l'intervalle de 3 h à 3 h 45, $\frac{3}{4}$ d'une heure s'est écoulée. La petite aiguille balaye donc $\frac{3}{4}$ de l'angle entre le 3 et le 4.
On forme des rayons joignant le 3 et le 4 au centre. Ces rayons forment un angle qui est $\frac{1}{12}$ d'un angle plein (360°), soit 30°.
La petite aiguille balaye donc un angle de $\frac{3}{4}(30°)$, ou 22,5°.



b) *Solution 1*
À 3 h 45, la grand aiguille pointe vers le 9, tandis que la petite aiguille a balayé un angle de 22,5° en s'éloignant du 3 vers le 4. Si la petite aiguille avait pointé vers le 3, les aiguilles formeraient un angle de 180°. Puisqu'elle a avancé de 22,5°, l'angle entre les aiguilles mesure $180^\circ - 22{,}5^\circ$, ou 157,5°.

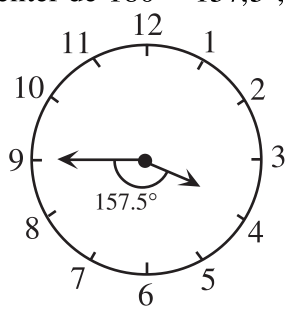


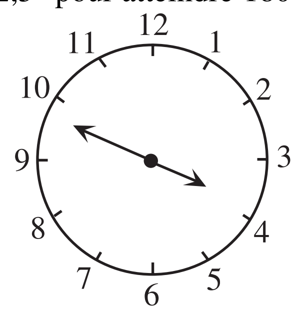
Solution 2
À chaque heure, la grande aiguille balaie un angle de 360°, tandis que la petite aiguille balaie un angle de 30°. Donc dans une période d'une heure, la grande aiguille balaie un angle qui mesure 330° de plus que celui balayé par la petite aiguille. Dans une minute, la grande aiguille balaie donc un angle qui mesure $5{,}5^\circ$ de plus que celui balayé par la petite aiguille.
Dans l'intervalle de 3 h à 3 h 45, la grande aiguille balaie un angle qui mesure $5{,}5^\circ \times 45$, ou 247,5° de plus que celui balayé par la petite aiguille.
Or à 3 h, la grande aiguille avait un retard de 90° sur la petite aiguille. À 3 h 45, elle aura donc une avance de $247{,}5^\circ - 90^\circ$, ou 157,5°. À 3 h 45, l'angle formé par les aiguilles mesure donc 157,5°.

c) *Solution 1*
À 3 h 45, l'angle formé par les aiguilles mesure $157{,}5^\circ$. Cet angle augmente, car la grande aiguille avance plus rapidement que la petite aiguille.
À chaque minute, la grande aiguille fait $\frac{1}{60}$ d'un tour. Elle balaie donc un angle de 6°.
À chaque minute, la petite aiguille fait $\frac{1}{60}$ de l'angle entre deux numéros, soit $\frac{1}{60}$ de $\frac{1}{12}$ d'un tour. Elle balaie donc un angle de $0{,}5^\circ$.
L'angle entre les aiguilles augmente donc de $6^\circ - 0{,}5^\circ$, ou 5,5° par minute, car les aiguilles avancent dans le même sens.

À partir de 3 h 45, l'angle doit augmenter de $180^\circ - 157{,}5^\circ$, ou 22,5° pour atteindre 180°.

Cela prendra donc $\frac{22{,}5}{5{,}5}$, ou 4,09 minutes (ou 4 minutes et 5 secondes).
Les aiguilles formeront un angle de 180° vers 3 h 49.

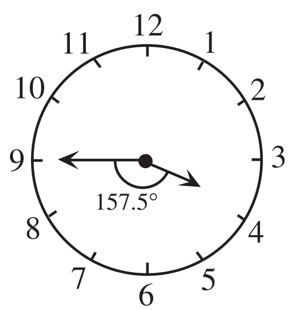


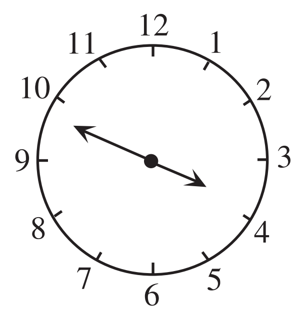


Solution 2

D'après la solution 2 de la partie b), on sait qu'à chaque minute la grande aiguille balaie un angle qui mesure $5{,}5^\circ$ de plus que l'angle balayé par la petite aiguille. À 3 h, la grande aiguille a un retard de 90° sur la petite aiguille et on veut que la grande aiguille ait une avance de 180° sur la petite.

La grande aiguille doit donc « combler » un angle de 270°, ce qui prendra $\frac{270}{5{,}5}$, ou $49\frac{1}{11}$ minutes.
Les aiguilles formeront donc un angle de 180° vers 3 h 49.

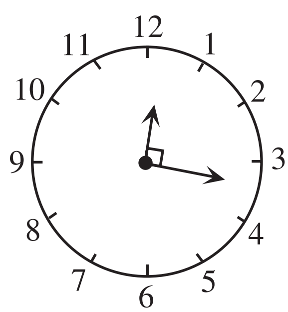


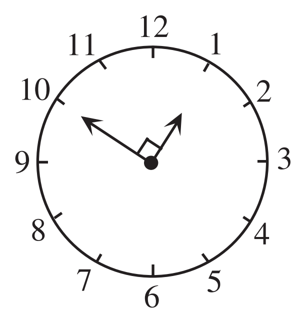


Prolongement

On peut supposer que la période de 12 heures va de 0 h à 12 h. Si elle commençait à une autre heure, il suffirait de faire subir une rotation à l'horloge.
On cherche les positions des aiguilles, dans chaque intervalle d'une heure, où les aiguilles forment un angle de 90°.

Entre 0 h et 1 h, la petite aiguille sera entre le 12 et le 1. Les aiguilles formeront un angle de 90° lorsque la grande aiguille sera entre le 3 et le 4 (entre 12 h 15 et 12 h 20) et lorsqu'elle sera entre le 9 et le 10 (entre 12 h 45 et 12 h 50).





Entre 1 h et 2 h, la petite aiguille sera entre le 1 et le 2. Les aiguilles formeront un angle de 90° à deux moments, soit lorsque la grande aiguille sera entre le 4 et le 5 et lorsqu'elle sera entre le 10 et le 11.
On reprend ce raisonnement pour chaque intervalle d'une heure. On obtient 2 positions des aiguilles dans chaque intervalle. Il semble donc qu'il y ait 24 positions des aiguilles qui forment un angle de 90°. Or si l'angle de 90° est formé sur l'heure, comme à 3 h et à

9 h, on aura compté une des deux positions deux fois. En effet, de 2 h à 3 h, la deuxième position est formée à 3 h. De 3 h à 4 h, la première position est aussi formée à 3 h. Il en est de même à 9 h. Il faut donc soustraire 2 du 24.
Pendant une période de 12 heures, les aiguilles forment 22 fois un angle de 90°.

3. a) Voici un diagramme indiquant chaque mouvement.

Il s'agit d'une façon de jouer en 8 mouvements.

Départ	*V*	*V*		*D*	*D*
Glissement	*V*		*V*	*D*	*D*
Saut	*V*	*D*	*V*		*D*
Glissement	*V*	*D*	*V*	*D*	
Saut	*V*	*D*		*D*	*V*
Saut		*D*	*V*	*D*	*V*
Glissement	*D*		*V*	*D*	*V*
Saut	*D*	*D*	*V*		*V*
Glissement	*D*	*D*		*V*	*V*

De fait, il n'y a qu'une autre façon de réussir en 8 mouvements. Les mouvements sont les mêmes que ceux du diagramme précédent, sauf qu'à chaque mouvement, on bouge la pièce de dix cents au lieu de la pièce de vingt-cinq cents et vice versa.

(On peut vérifier qu'à chaque étape, il y a un seul mouvement possible qui permet de ne pas reculer.)

Départ	*V*	*V*		*D*	*D*
Glissement	*V*	*V*	*D*		*D*
Saut	*V*		*D*	*V*	*D*
Glissement		*V*	*D*	*V*	*D*
Saut	*D*	*V*		*V*	*D*
Saut	*D*	*V*	*D*	*V*	
Glissement	*D*	*V*	*D*		*V*
Saut	*D*		*D*	*V*	*V*
Glissement	*D*	*D*		*V*	*V*

b) Si on a 3 pièces de chaque sorte, il y aura 7 cases. Puisque seuls les sauts et les glissements sont permis et qu'une pièce ne peut sauter par dessus une autre pièce de la même sorte, les trois pièces de vingt-cinq cents seront toujours dans le même ordre. Ainsi la pièce de vingt-cinq cents qui se trouve dans la 3^{e} case finira dans la 7^{e} case, celle qui se trouve dans la 2^{e} case finira dans la 6^{e} case et celle qui se trouve dans la 1^{re} case finira dans la 5^{e} case.
Chaque pièce de vingt-cinq cents bouge de 4 espaces pour un total de 12 espaces. De

même, chaque pièce de dix cents bouge de 4 espaces pour un total de 12 espaces. En tout, les pièces bougent de 24 espaces. S'il n'y avait que des glissements, il y aurait 24 mouvements en tout.

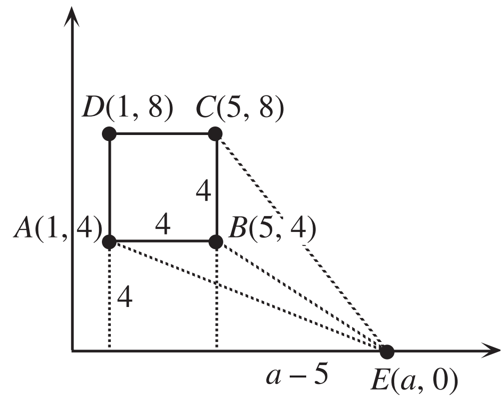
Or il est impossible de faire des glissements seulement. Il faut des sauts. Pour que les pièces de dix cents et les pièces de vingt-cinq cents changent de position, chaque pièce de dix cents doit sauter par dessus (ou passer en dessous de) chaque pièce de vingt-cinq cents. Il doit donc y avoir 9 sauts. Or chaque saut est l'équivalent de deux glissements, car la pièce bouge de deux espaces. Chaque saut « épargne » donc un mouvement. Le nombre de mouvements requis est donc au moins égal à $24-9$, ou 15. On a supposé que l'on n'a pas fait marche arrière. Le jeu exige donc au moins 15 mouvements.
On peut construire un diagramme qui illustre une joute en 15 mouvements.

Prolongement
On utilise la même stratégie que dans la partie b).
Si on a n pièces de chaque sorte, il y aura $2n+1$ cases.
Puisque seuls les sauts et les glissements sont permis et qu'une pièce ne peut sauter par dessus une autre pièce de la même sorte, les pièces de vingt-cinq cents seront toujours dans le même ordre.
Ainsi la pièce de vingt-cinq cents qui se trouve dans la 1re case finira dans la $(n+2)^{\text{e}}$ case, la pièce de vingt-cinq cents qui se trouve dans la 2e case finira dans la $(n+3)^{\text{e}}$ case, ainsi de suite, et la pièce de vingt-cinq cents qui se trouve dans la n^{e} case finira dans la $(2n+1)^{\text{e}}$ case.
Chacune des n pièces de vingt-cinq cents bouge donc de $n+1$ espaces. Les pièces de vingt-cinq cents bougent donc un total de $n(n+1)$ espaces.
De même, les pièces de dix cents bougent un total de $n(n+1)$ espaces.
En tout, les pièces bougent de $2n(n+1)$, ou $2n^2+2n$ espaces. S'il n'y avait que des glissements, il y aurait $2n^2+2n$ mouvements en tout.
En utilisant le même raisonnement que dans la partie c), on conclut que le nombre de mouvements requis est au moins égal à $2n^2+2n-n^2$, c'est-à-dire à n^2+2n, ou $n(n+2)$.
(On devrait aussi se demander s'il est possible de réussir le jeu en $n(n+2)$ mouvements. Pour y répondre, il faudrait décrire une stratégie qui permet de réussir en $n(n+2)$ mouvements, peu importe la valeur de n.)

4. a) Puisque $ABCD$ est un carré dont le côté AD a une longueur de 4, tous les côtés ont une longueur de 4. Le point B a donc pour coordonnées $(5,4)$ et le point C a pour coordonnées $(5,8)$. (Puisque AD est parallèle à l'axe des ordonnées, AB est parallèle à l'axe des abscisses.) L'aire du carré $ABCD$ est donc égale à 16.

Puisque les triangles CBE et ABE sont situés complètement à l'extérieur du carré $ABCD$, le point E doit être en dessous de la droite AB (ce qui est le cas) et à la droite de la droite CB, d'où $a > 5$.

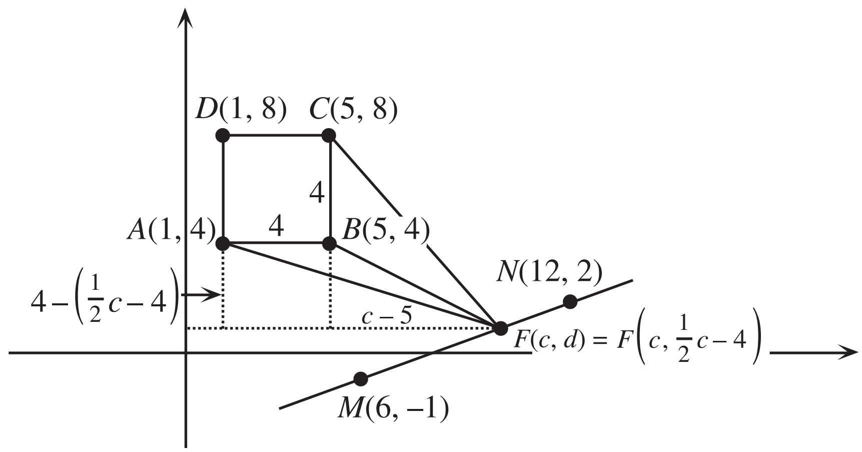
On considère d'abord le triangle ABE. Sa base AB a une longueur de 4. La hauteur correspondante a également une longueur de 4, puisque la base est parallèle à l'axe des abscisses. L'aire du triangle ABE est égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8. (On remarque que l'aire du triangle ABE est *toujours* égale à 8, peu importe la position de E sur l'axe des abscisses.)



On considère ensuite le triangle CBE. Sa base CB a une longueur de 4. La hauteur correspondante a une longueur de $a-5$, puisque la base est parallèle à l'axe des ordonnées. L'aire du triangle CBE est égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(a-5)$, ou $2a-10$.

On veut que la somme de ces aires soit égale à l'aire du carré. Donc $8+(2a-10)=16$, d'où $a=9$.
[On peut aussi obtenir ce résultat par la soustraction d'aires.]

b) Soit (c, d) les coordonnées du point F.
Puisque le triangle CBF est situé complètement à l'extérieur du carré, F est situé à la droite du carré. Donc $c > 5$. Puisque le triangle ABF est situé complètement à l'extérieur du carré, F est situé en dessous du carré. Donc $d < 4$.
On sait que F est situé sur la droite qui passe par les points M et N. Quelle est l'équation de cette droite? Sa pente est égale à $\frac{2-(-1)}{12-6}$, ou $\frac{1}{2}$. L'équation de la droite est donc $y-2=\frac{1}{2}(x-12)$, ou $y=\frac{1}{2}x-4$.
Puisque F est sur cette droite, on a $d=\frac{1}{2}c-4$ et F a pour coordonnées $\left(c, \frac{1}{2}c-4\right)$.



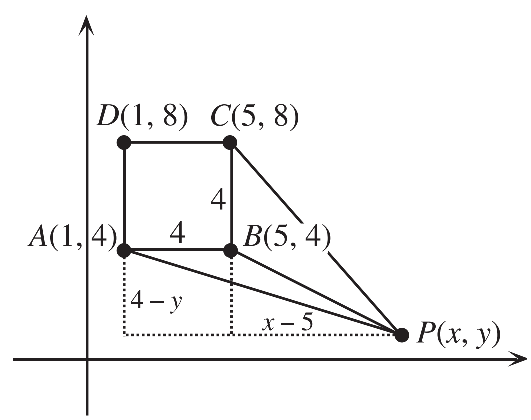
On considère le triangle ABF. Sa base AB a une longueur de 4. La hauteur correspondante est la distance verticale de F à la droite horizontale AB. Elle a une longueur de $4-\left(\frac{1}{2}c-4\right)$, ou $8-\frac{1}{2}c$. L'aire du triangle ABF est donc égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)\left(8-\frac{1}{2}c\right)$, ou $16-c$.

Le triangle CBF a une base, CB, de longueur 4. La hauteur correspondante est la distance horizontale de F à la droite verticale BC. Elle a une longueur de $c-5$. L'aire du triangle CBF est donc égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(c-5)$, ou $2c-10$.

On cherche donc la valeur de c pour laquelle $16-c+2c-10=16$, d'où $c=10$.
Le point F a donc pour coordonnées $(10,1)$.

Prolongement

Puisque le triangle CBP est situé complètement à l'extérieur du carré, P est situé à la droite du carré. Donc $x>5$. Puisque le triangle ABP est situé complètement à l'extérieur du carré, P est situé dessous le carré. Donc $y<4$.



On considère le triangle ABP. Sa base AB a une longueur de 4. La hauteur correspondante est la distance verticale de P à la droite horizontale AB. Elle a une longueur égale à $4-y$. L'aire du triangle ABP est donc égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(4-y)$, ou $8-2y$.

Le triangle CBP a une base CB de longueur 4. La hauteur correspondante est la distance horizontale de P à la droite verticale BC. Elle a une longueur égale à $x-5$. L'aire du triangle CBP est donc égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(x-5)$, ou $2x-10$.

Puisque la somme de l'aire des triangles CBP et ABP doit être égale à l'aire du carré, alors :

$$\begin{aligned}(8-2y)+(2x-10)&=16\\ 2x-18&=2y\\ y&=x-9\end{aligned}$$

L'ensemble de tous les points P tels que les triangles ABP et CBP soient situés complètement à l'extérieur du carré et que la somme de leur aire soit égale à l'aire du carré est le segment de tous les points sur la droite d'équation $y=x-9$, où $x>5$ et $y<4$.

[On pourrait aussi inclure les extrémités $(5,-4)$ et $(13,4)$ du segment si on accepte que l'aire d'un des triangles soit égale à 0.]