Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^e année – Sec. IV)

le jeudi 4 avril 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 5 avril 2024
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

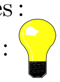
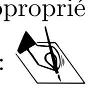
Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

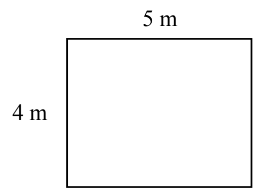
Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

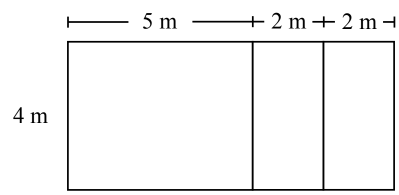
NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

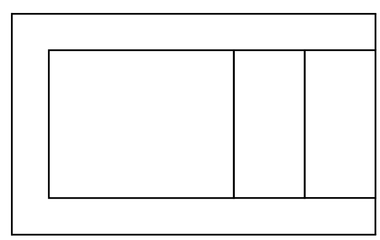
1. Trois élèves participent à l'agrandissement du jardin de leur école. Au départ, le jardin avait une longueur de 5 m et une largeur de 4 m, comme dans la figure ci-contre.



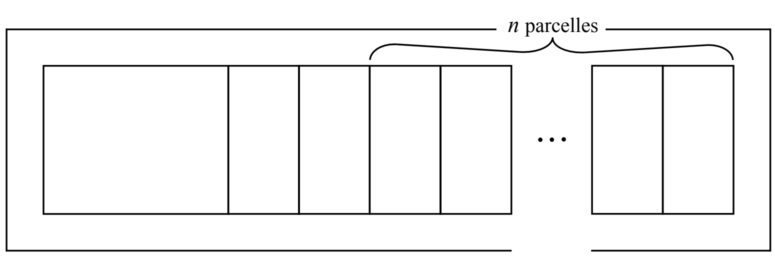
(a) Romain agrandit le jardin en y ajoutant deux parcelles supplémentaires de 2 m sur 4 m, comme dans la figure ci-contre. Quelle est l'aire totale du jardin après que Romain a ajouté les deux parcelles supplémentaires ?



(b) Kirima aménage un chemin autour de trois côtés du jardin précédent, comme dans la figure ci-contre. Si le chemin a une largeur de 1 m, quelle est l'aire totale du jardin et du chemin ?



(c) Noah agrandit le jardin de la partie (b) en y ajoutant n parcelles supplémentaires, chacune mesurant 2 m sur 4 m. Ensuite, il prolonge le chemin de 1 m de large de manière qu'il entoure tout le jardin, comme dans la figure ci-dessous. Si le jardin et le chemin ont une aire totale de 150 m^2, déterminer la valeur de n.



2. Lorsqu'un point (x, y) subit une rotation de 90° dans le sens horaire autour de l'origine, son image a pour coordonnées $(y, -x)$. Soit R la représentation de cette rotation. Lorsqu'un point (x, y) subit une translation de 2 unités vers le haut, son image a pour coordonnées $(x, y + 2)$. Soit T la représentation de cette translation. Par exemple, si le point $(8, -2)$ subit une rotation R suivie d'une translation T, son image aura pour coordonnées $(-2, -6)$:

$$(8, -2) \xrightarrow{R} (-2, -8) \xrightarrow{T} (-2, -6)$$

(a) Si le point $(5, 11)$ subit une rotation R suivie d'une translation T, quelles sont les coordonnées de son image ?

(b) Si le point $(-3, 7)$, subit la rotation R à cinq reprises, quelles sont les coordonnées de son image ?

(c) Considérons la séquence de transformations suivante : R, puis R à nouveau et ensuite T. Si le point $(9, 1)$, subit cette séquence de transformations (soit R, R, T) à 11 reprises, déterminer les coordonnées de son image.

3. On place sept boules noires numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6, et 7 dans un sac. On retire les boules du sac une par une et au hasard. Lorsqu'une boule est retirée du sac, elle n'est ni remplacée par une autre boule, ni remise dans le sac.

(a) Quelle est la probabilité pour que la première boule retirée soit un nombre pair ?

(b) Quelle est la probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit égale à 5 ?

(c) Déterminer la probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit supérieure ou égale à 6.

(d) On ajoute une huitième boule au sac. Cette huitième boule est dorée et porte l'entier k $(1 \leq k \leq 7)$. La probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit supérieure ou égale à 7 est égale à $\frac{3}{4}$. Déterminer la valeur de k.

4. Dans une grille rectangulaire $3 \times n$, deux cases sont *voisines* si elles partagent un côté. Une *grille Griffin* $3 \times n$ est une grille $3 \times n$ telle que $n \geq 2$ et que :
   - chaque case contient soit -1, soit 1 et
   - le nombre dans chaque case est égal au produit des nombres dans toutes les cases voisines.

Dans la figure ci-contre, on voit un exemple d'une grille Griffin 3×2.

−1	1
−1	−1
−1	1

(a) Remplir les cases vides de la grille 3×5 ci-contre afin qu'elle soit une grille Griffin.

−1				
1				
−1				

(b) Déterminer le nombre total de grilles Griffin 3×5.

(c) Soit S la somme des nombres des grilles Griffin $3 \times n$ avec $2 \leq n \leq 2024$. Déterminer la valeur de S.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2024! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI. Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2024.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— des copies gratuites des concours précédents

— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir

— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2024/2025

— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre

— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11e et 12e année

— utiliser notre générateur de séries de problèmes gratuit pour créer des séries de problèmes afin de soutenir et d'enrichir le programme scolaire; veuillez noter que cette ressource n'est disponible qu'en anglais

— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne

— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne

— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants

— trouver les résultats de vos élèves dans les concours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^e année – Sec. IV)

le mercredi 5 avril 2023
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 6 avril 2023
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

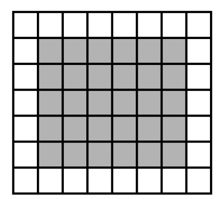
Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Dans les casse-têtes, les pièces sont souvent disposées en rangées et en colonnes de manière à former une grille rectangulaire où chaque cellule dans la grille représente une pièce. Chaque grille comporte deux types de pièces : les *pièces de bord* qui forment le bord extérieur de la grille et les *pièces centrales* qui forment l'intérieur de la grille. Dans l'exemple ci-contre, il y a 7 rangées et 8 colonnes et les pièces centrales sont ombrées.



(a) Combien y a-t-il de pièces au total dans une grille composée de 12 rangées et de 15 colonnes ?

(b) Combien y a-t-il de pièces centrales dans une grille composée de 6 rangées et de 4 colonnes ?

(c) Si une grille comprend 14 pièces centrales, elle comprend soit s pièces de bord, soit t pièces de bord. Déterminer les valeurs de s et t.

(d) Une grille composée de 5 rangées et de c colonnes comprend le même nombre de pièces de bord que de pièces centrales. Déterminer la valeur de c.

2. Une *suite Ing* est une suite dont le premier terme est un entier strictement positif et dont chaque terme, après le premier, est obtenu de la manière suivante :
   – si un terme, soit x, est impair, le terme suivant est $x + 3$ et
   – si un terme, soit x, est pair, le terme suivant est $x + 4$.

   Par exemple, si le premier terme d'une suite Ing est 13, alors le deuxième terme est 16 et le troisième terme est 20.

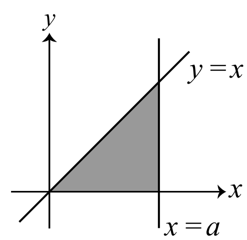
   (a) Si le premier terme d'une suite Ing est 7, quel est le cinquième terme de la suite ?

   (b) Si le cinquième terme d'une suite Ing est 62, quelles sont les deux possibilités pour le premier terme ?

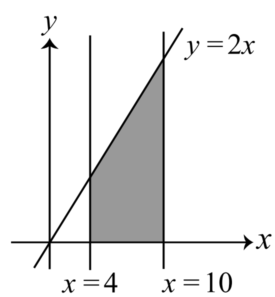
   (c) Si le premier terme d'une suite Ing est 49, déterminer les termes qui paraissent dans la suite dont les valeurs sont à la fois supérieures à 318 et inférieures à 330.

   (d) Le nombre 18 parait quelque part dans une suite Ing après le premier terme. Si le premier terme est l'entier strictement positif n, déterminer toutes les valeurs possibles de n.

3. (a) Dans la figure ci-contre, le triangle ombré est borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = x$ et $x = a$ $(a > 0)$. Si le triangle a une aire de 32, quelle est la valeur de a ?



   (b) Un triangle est borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = 2x$ et $x = 10$. Diego trace la droite verticale $x = 4$. Comme on le voit dans la figure ci-contre, cette droite coupe le triangle initial en un trapèze ombré et un petit triangle non ombré. Quelle est l'aire du trapèze ombré ?



   (c) Un triangle est borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = 3x$ et $x = 21$. Alice trace la droite verticale $x = c$ $(0 < c < 21)$. Cette droite coupe le triangle initial en un trapèze et un petit triangle. Si le trapèze a une aire qui est égale à 8 fois l'aire du petit triangle, déterminer la valeur de c.

   (d) Un triangle est borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = 4x$ et $x = 1$. Ahmed trace une première droite verticale, soit $x = p$ $(0 < p < 1)$. Cette droite coupe le triangle initial en deux parties de même aire. Ahmed trace ensuite une deuxième droite verticale, soit $x = q$ $(0 < q < p)$. Cette droite coupe le triangle borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = 4x$ et $x = p$ en deux parties de même aire. Ahmed continue de tracer des droites verticales à des valeurs décroissantes de x de manière que chacune de ces droites coupe le triangle précédent en deux parties de même aire. Si la 12^e droite verticale qu'il trace a pour équation $x = k$, déterminer la valeur de k.

4. Lorsqu'un groupe de personnes se regroupe pour une réunion, chaque personne peut soit serrer la main de toutes les autres personnes, serrer la main de quelques personnes ou ne serrer la main de personne. De plus, aucune personne ne serre la main d'une autre personne plus d'une fois. Lorsque deux personnes se serrent la main, on compte cela comme une seule poignée de main.

   (a) Lors d'une réunion de 5 personnes, Amrita a serré la main d'exactement 1 personne, Bin et Carlos ont serré la main d'exactement 2 personnes chacun, Denis a serré la main d'exactement 3 personnes et Éloïse n'a serré la main de personne. Combien de poignées de main ont été données ?

   (b) Lors d'une réunion de 9 personnes, chaque participant a déclaré avoir serré la main d'exactement 3 personnes. Expliquer pourquoi cela n'est pas possible.

   (c) Lors d'une réunion de 7 personnes, au moins une poignée de main a été donnée dans chaque groupe de 3 personnes. Déterminer le nombre minimum possible de poignées de main, m, qui ont été données lors de cette réunion. Une solution complète doit comprendre : la valeur de m, une explication de la manière dont les conditions données peuvent être satisfaites avec un ensemble spécifique de m poignées de main et une explication de la raison pour laquelle on ne peut avoir moins de m poignées de main pour satisfaire aux conditions données.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2023! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2023.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2023/2024
— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les concours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^e année – Sec. IV)

le mardi 12 avril 2022
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 13 avril 2022
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

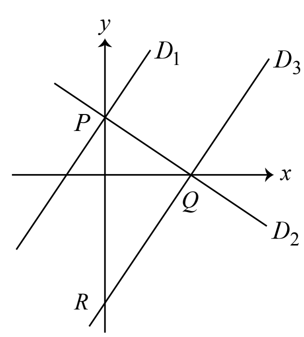
1. Alice et Bello ont contribué aux coûts de démarrage d'une nouvelle entreprise. Le rapport de la contribution d'Alice à celle de Bello est de 3 : 8.

   (a) Si les coûts de démarrage de la nouvelle entreprise s'élevaient à 9240 \$, quel est le montant de la contribution de Bello aux coûts de démarrage ?

   (b) Dans la première année d'activité, Alice et Bello se sont partagés tous les profits réalisés par leur entreprise selon le même rapport que leurs contributions aux coûts de démarrage ; soit 3 : 8. Étant donné que la part du profit revenant à Alice était de 1881 \$, quel est le profit total réalisé par l'entreprise pendant cette première année ?

   (c) Dans la deuxième année, Alice et Bello ont décidé de partager tous les profits réalisés par leur entreprise cette année-là selon un rapport de $3 : (8 + x)$. Si l'entreprise a réalisé un profit total de 6400 \$ lors de sa deuxième année d'activité et que la part de ce profit revenant à Bello était de 5440 \$, déterminer la valeur de x.

2. Dans la figure ci-dessous, la droite D_1 a pour équation $y = \frac{3}{2}x + k$, où $k > 0$, et coupe l'axe des ordonnées en P. On trace une deuxième droite, D_2, passant par P de manière qu'elle soit perpendiculaire à D_1 et qu'elle coupe l'axe des abscisses en Q. On trace une troisième droite, D_3, passant par Q de manière qu'elle soit parallèle à L_1 et qu'elle coupe l'axe des ordonnées en R.



   (a) Quelle est la pente de D_2 ?

   (b) Exprimer l'abscisse du point Q en fonction de k.

   (c) Sachant que le triangle PQR a une aire de 351, déterminer la valeur de k.

3. La *factorisation première* du nombre 324 est $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ or $2^2 \times 3^4$. Or, 324 est un carré parfait, car on peut l'écrire sous la forme $(2 \times 3^2) \times (2 \times 3^2)$.
La factorisation première de 63 est $3^2 \times 7$. Donc, 63 n'est pas un carré parfait, mais 63×7 est un carré parfait, car $63 \times 7 = 3^2 \times 7^2 = (3 \times 7) \times (3 \times 7)$.

(a) Le produit $84 \times k$ est un carré parfait. Sachant que k est un entier strictement positif, quelle est la plus petite valeur possible de k ?

(b) Le produit $572 \times \ell$ est un carré parfait. Sachant que ℓ est un entier strictement positif inférieur à 6000, quelle est la plus grande valeur possible de ℓ ?

(c) Démontrer que si m est un entier strictement positif inférieur à 200, alors $525\,000 \times m$ ne peut être un carré parfait.

(d) La liste $10, 10^3, 10^5, \ldots, 10^{99}$ contient les cinquante puissances de 10, dont les exposants sont des entiers impairs, comprises entre 10^1 et 10^{99} inclus. Démontrer que la somme de chaque choix de trois puissances de 10 différentes de cette liste n'est pas un carré parfait.

4. Une *chaine Bauman* est une chaine de lettres qui satisfait aux deux conditions suivantes :

— Chaque lettre de la chaîne est A, B, C, D ou E.
— La chaine ne peut contenir un couple de lettres adjacentes qui soient identiques.

Par exemple, $AECD$ et $BDCEC$ sont, respectivement, des chaines Bauman de longueur 4 et 5, tandis que $ABBC$ et $DAEEE$ ne sont pas des chaines Bauman.

(a) Combien y a-t-il de chaines Bauman de longueur 5 dont la première lettre et la dernière lettre sont toutes deux A ?

(b) Déterminer le nombre de chaines Bauman de longueur 6 qui contiennent plus d'un seul B.

(c) Déterminer le nombre de chaines Bauman de longueur 10 dont la première lettre est C et la dernière lettre est D.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2022! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2022.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2022/2023
— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^{e} et 12^{e} année
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les concours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^e année – Sec. IV)

Avril 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

Avril 2021
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. L'opération $\triangle$ est définie par $a \triangle b = a(2b + 4)$, a et b étant des entiers. Par exemple, $3 \triangle 6 = 3(2 \times 6 + 4) = 3(16) = 48$.

   (a) Quelle est la valeur de $5 \triangle 1$?

   (b) Si $k \triangle 2 = 24$, quelle est la valeur de k ?

   (c) Déterminer toutes les valeurs de p telles que $p \triangle 3 = 3 \triangle p$.

   (d) Déterminer toutes les valeurs de m telles que $m \triangle (m + 1) = 0$.

2. L'organisateur d'une ligue sportive composée de quatre équipes a enregistré certaines des données de fin de saison dans le tableau ci-dessous. Chaque équipe a disputé 27 matchs et chaque match a entraîné soit une victoire pour une équipe et une défaite pour l'autre équipe, soit un match nul entre les deux équipes. Chaque équipe a gagné 2 points pour une victoire, 0 point pour une défaite et 1 point pour un match nul.

Nom de l'équipe	**Matchs joués**	**Nombre de victoires**	**Nombre de défaites**	**Nombre de matchs nuls**	**Nombre total de points**
P	27	10	14		23
Q	27				
R	27				25
S	27				

(a) Combien de fois l'équipe P a-t-elle fait match nul ?

(b) L'équipe Q a remporté 2 victoires de plus que l'équipe P et 4 défaites de moins que l'équipe P. Quel est le nombre total de points de l'équipe Q à la fin de la saison ?

(c) Expliquer pourquoi l'équipe R n'aurait pas pu terminer la saison avec exactement 6 matchs nuls.

(d) À la fin de la saison, l'équipe S avait 4 victoires de plus que de défaites. Démontrer que l'équipe S a dû terminer la saison avec un total de 31 points.

3. Le rectangle $ABCD$ a pour sommets $A(0,0)$, $B(0,12)$, $C(6,12)$ et $D(6,0)$.

(a) Les diagonales AC et BD se coupent en point E. Quelle est l'aire du triangle ADE ?

(b) Le point $P(0,p)$ est situé sur le segment de droite AB. L'aire du trapèze $BCDP$ est le double de l'aire du triangle PAD. Quelle est la valeur de p ?

(c) La droite passant par $U(0,u)$, $V(2,4)$ et $W(6,w)$ divise $ABCD$ en deux trapèzes. Déterminer tous les couples possibles de points U et W pour lesquels les aires des deux trapèzes ont un rapport de 5 : 3.

4. (a) Sachant que $\dfrac{5}{x}+\dfrac{14}{y}=2$ et que $x=6$, quelle est la valeur de y ?

(b) Déterminer tous les couples possibles d'entiers strictement positifs (x,y) qui vérifient l'équation $\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=1$.

(c) On considère l'équation $\dfrac{16}{x}+\dfrac{25}{y}=p$, p étant un nombre premier tel que $p \geq 5$. Déterminer toutes les valeurs possibles de p telles qu'il y ait au moins un couple d'entiers strictement positifs (x,y) qui vérifient l'équation.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2021! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2021.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— des copies gratuites des concours précédents

— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir

— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2021/2022

— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre

— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de la 9e à la 12e année

— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne

— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne

— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants

— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^e année – Sec. IV)

le mercredi 15 avril 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 avril 2020
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

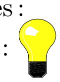
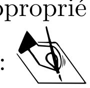
Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. On utilise les lettres A et B afin de créer une suite de rangées présentant une régularité. Il y a un seul A dans la première rangée de la régularité. De rangée en rangée, on alterne entre les lettres A et B, et le nombre de lettres dans chaque rangée est le double du nombre de lettres dans la rangée précédente. Les quatre premières rangées de la régularité sont présentées ci-contre.

Rangée 1	A
Rangée 2	BB
Rangée 3	$AAAA$
Rangée 4	$BBBBBBBB$

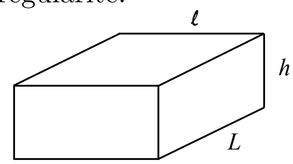
   (a) Si la régularité est composée de 6 rangées, combien de lettres y a-t-il dans la 6ᵉ rangée ?

   (b) Si la régularité est composée de 6 rangées, quel est le nombre total de lettres dans la régularité ?

   (c) Si la régularité contient 63 lettres au total, déterminer le nombre de lettres A et le nombre de lettres B.

   (d) Si la régularité contient 4095 lettres au total, déterminer la différence entre le nombre de lettres A et le nombre de lettres B dans la régularité.

2. Dans la figure ci-contre, on voit un prisme droit à base rectangulaire de longueur L, de largeur ℓ, de hauteur h, et dont l'aire totale et le volume sont obtenus, respectivement, par les formules $A = 2L\ell + 2Lh + 2\ell h$ et $V = L\ell h$.



   (a) Un prisme droit à base rectangulaire a une longueur de 2 cm, une largeur de 5 cm et une hauteur de 9 cm. Quelle est son aire totale ?

   (b) Un prisme droit a une hauteur de 10 cm et une base carrée. Le prisme a un volume de 160 cm^3. Quelle est la longueur des côtés de la base carrée ?

   (c) Un prisme droit a une base carrée dont l'aire est égale à 36 cm^2. Le prisme a une aire totale de 240 cm^2. Déterminer le volume du prisme.

(d) Un prisme droit à base rectangulaire a une longueur de k cm, une largeur de $2k$ cm et une hauteur de $3k$ cm, k ayant une valeur supérieure à 0. Le prisme a un volume de x cm^3 et une aire totale de x cm^2. Déterminer la valeur de k.

3. Julie multiplie les nombres 2 et 5 et obtient 10 comme produit. Elle ajoute 4 à chacun de ses nombres originaux et obtient les nombres 6 et 9. Elle multiplie ces derniers et obtient 54 comme produit. Julie remarque que chacun des chiffres du nouveau produit, 54, est 4 de plus que son chiffre correspondant du premier produit, 10.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & 5 & = & 1\;0 \\ {\scriptstyle +4}\downarrow & & {\scriptstyle +4}\downarrow & & {\scriptstyle +4}\downarrow\downarrow{\scriptstyle +4} \\ 6 & \times & 9 & = & 5\;4 \end{array}$$

Le couple $(2,5)$ est un exemple d'un *SuperCouple*.
De façon générale, un couple (a,b) (a et b étant des entiers strictement positifs qui vérifient $a \leq b \leq 9$ et dont le produit, ab, est un entier de deux chiffres) est un *SuperCouple* s'il existe un entier strictement positif d tel que :

– le produit de $(a+d)(b+d)$ est un entier de deux chiffres,

– le chiffre des unités du produit $(a+d)(b+d)$ est égal à la somme de d et du chiffre des unités du produit ab et

– le chiffre des dizaines du produit $(a+d)(b+d)$ est égal à la somme de d et du chiffre des dizaines du produit ab.

(a) Démontrer que le couple $(2,8)$ est un SuperCouple.

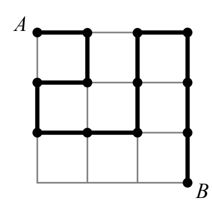
(b) Démontrer que le couple $(3,6)$ n'est pas un SuperCouple.

(c) Quels sont les entiers strictement positifs x ($x \leq 6$) pour lesquels le couple $(x,6)$ serait un SuperCouple ?

(d) Déterminer le nombre de SuperCouples (a,b) pour lesquels $a \leq b$, tout en justifiant sa démarche.

4. Dans une grille $n \times n$ de carrés unités, les lignes de la grille se coupent toutes en des points que l'on surnommera *coupements*, il y a donc $(n+1)^2$ *coupements*. Le coupement A est celui au coin supérieur gauche de la grille tandis que le coupement B est celui au coin inférieur droit de la grille. Un *chemin* de A à B est une suite d'arêtes telles que :

– chaque arête relie deux coupements adjacents,
– lorsque reliées, les arêtes sucessives forment une suite de coupements dont le début est le coupement A et dont la fin est le coupement B et
– le chemin ne passe pas par un coupement plus d'une seule fois.



La longueur d'un tel chemin est égale au nombre d'arêtes dans le chemin. Par exemple, dans la figure ci-dessus, on voit un chemin de longueur 12 qui relie les coupements A et B dans une grille 3×3.

(a) Dans une grille 2×2, déterminer le nombre de chemins de quelconques longueurs qui relient A et B.

(b) Dans une grille 10×10, expliquer pourquoi tout chemin qui relie A et B ne peut avoir un nombre impair comme longueur.

(c) Dans une grille 4×4, déterminer le nombre de chemins de longueur 10 qui relient A et B.

2020 Concours Galois (français)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2020! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2020.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2020/2021
— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^{e} et 12^{e} année
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^e année – Sec. IV)

le mercredi 10 avril 2019
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 11 avril 2019
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

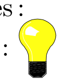
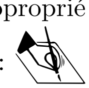
Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Le restaurant Galois est situé dans une région qui ajoute une taxe de vente de 10% au prix des boissons et des plats commandés au restaurant. Les prix indiqués dans leur menu ne comprennent pas la taxe de vente.

   (a) Becky commande du menu une assiette de lasagnes au prix de 7,50 \$, une salade au prix de 5,00 \$ et une limonade au prix de 3,00 \$. Après la taxe de vente, que sera la facture totale de Becky ?

   (b) Un burrito coûte 6,00 \$ dans le menu. Sachant que la taxe de vente est incluse dans la facture totale, quel est le nombre maximal de burritos que Jackson pourra s'acheter s'il n'a que 50,00 \$ à dépenser ?

   (c) Dans le menu du restaurant Galois, on propose des hotdogs à un prix habituel de 5,00 \$. Par contre, le restaurant propose aussi les offres promotionnelles suivantes :

   - Le lundi, l'achat d'un premier hotdog au prix habituel de 5,00 \$ vous permet d'acheter un deuxième hotdog à un prix réduit de 4,50\$.
   - Le mardi, le restaurant n'ajoute que la moitié de la taxe de vente au prix des hotdogs.

   Chase a acheté deux hotdogs lundi et deux hotdogs mardi. Sachant que la taxe de vente est incluse dans la facture totale, déterminer le jour où Chase a dépensé le moins d'argent.

2. Dans la Figure 1, l'hypoténuse du triangle rectangle AOB est située sur la droite d'équation $y = -2x + 12$ tandis que les cathètes du triangle AOB sont situées sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

   (a) Quelle est l'aire du triangle AOB ?

   (b) Dans la Figure 2, une deuxième droite passe par O et est perpendiculaire à la première droite. Ces deux droites se coupent en C. Déterminer les coordonnées du point C.

   (c) Dans la Figure 3, la deuxième droite passe par le point D dans le premier quadrant. Les points E et F sont situés sur les axes de manière que $DEOF$ soit un rectangle. Si l'aire de $DEOF$ est égale à 1352, déterminer les coordonnées du point D.

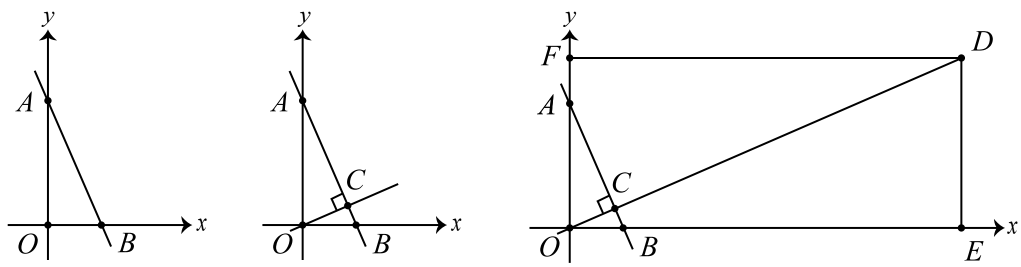


Figure 1 Figure 2 Figure 3

3. Si n est un entier positif, la notation $n!$ (qui se lit "factorielle de n") est utilisée pour représenter le produit des entiers de 1 à n. C'est-à-dire, $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$. Par exemple, $5! = 5(4)(3)(2)(1)$ ou $5! = 120$.

   (a) Quel est le plus grand entier positif m qui admettrait 2^m comme diviseur de $9!$?

   (b) Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle $n!$ est divisible par 7^2 ?

   (c) Expliquer pourquoi il n'existe pas un entier positif n pour lequel $n!$ est divisible par 7^7 mais n'est pas divisible par 7^8.

   (d) Démontrer qu'il y a un seul entier positif n pour lequel

$$n! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \quad \text{et}$$

$$a + b + c + d = 45$$

   a, b, c, d étant des entiers positifs.

4. Un entier positif est dit avoir un *équilibre des chiffres* si chaque chiffre d (où $0 \leq d \leq 9$) paraît un nombre maximal de d fois dans l'entier. Par exemple, 13224 a un équilibre des chiffres tandis que 21232 ne l'a pas.

   (a) Expliquer pourquoi un entier qui aurait un équilibre des chiffres ne serait pas divisible par 10.

   (b) Combien d'entiers à 4 chiffres, dont aucun n'est 0, *n'auraient pas* un équilibre des chiffres ?

   (c) Déterminer le nombre d'entiers positifs k pour lesquels existeraient des entiers positifs m et n qui auraient un équilibre des chiffres, où m et n auraient chacun k chiffres, et qui vérifieraient l'équation $m + n = 10^k$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2019! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2019.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2019/2020
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^{e} et 12^{e} année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^e année – Sec. IV)

le jeudi 12 avril 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2018
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable, telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera, (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. (a) Sachant que $x \neq 0$, simplifier l'expression $\dfrac{12x^2}{3x}$.

   (b) Quelle est la valeur de l'expression $\dfrac{12x^2}{3x}$ lorsque $x = 5$?

   (c) Sachant que $n = 2m$ et que $m \neq 0$, quelle est la valeur de l'expression $\dfrac{8mn}{3m^2}$?

   (d) Sachant que $q = 6$, déterminer tous les entiers positifs p tels que $3 \leq \dfrac{8p^2q}{5pq^2} \leq 4$.

2. Voici deux propriétés des cercles :

   - Si des points A, B et C sont situés sur un cercle de manière que $\angle ABC = 90°$, alors AC est un diamètre du cercle. Dans la figure 1, AC est donc un diamètre du cercle.
   - Si des points D, E et F sont situés sur un cercle de manière que EF est un diamètre, alors $\angle EDF = 90°$. Dans la figure 2, on a donc $\angle EDF = 90°$.

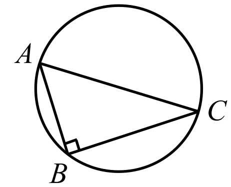


Figure 1

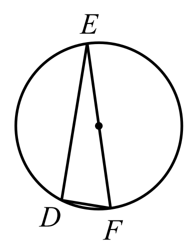


Figure 2

   (a) Dans la figure 1 ci-dessus, $AB = 8$ et $BC = 15$. Quelle est la longueur du diamètre AC ?

   (b) Dans la figure 2 ci-dessus, $DE = 24$ et le cercle a un rayon de 13. Quelle est la longueur de DF ?

   (c) Dans la figure 3, les points P, Q, R et S sont situés sur un cercle de centre O. De plus, SQ est un diamètre du cercle et O est joint à R. Sachant que $SP = PQ$ et que $\angle RQP = 80°$, déterminer la mesure de l'angle ROQ et celle de l'angle RSQ.

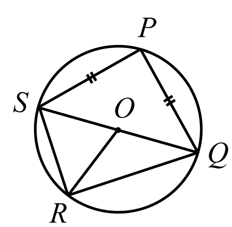


Figure 3

3. Le cylindre A a un rayon de 12 et une hauteur de 25. Le cylindre B a un rayon de 9 et une hauteur h. On verse de l'eau dans le cylindre A jusqu'à une profondeur de 19. Le cylindre B est vide. On abaisse le cylindre B jusqu'au fond du cylindre A, comme il est indiqué dans les figures suivantes. Selon la valeur de h,

   (i) de l'eau peut se déverser du cylindre A sur le sol (Figure 1), ou

   (ii) de l'eau peut se déverser du cylindre A dans le cylindre B (Figure 2), ou

   (iii) (i) puis (ii).

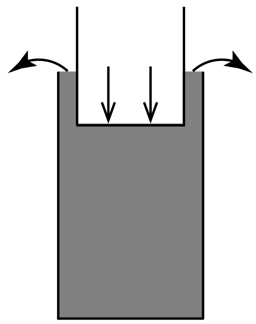


Figure 1

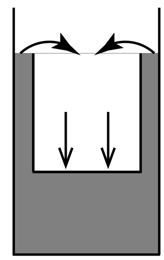


Figure 2

Les bases et les parois des deux cylindres sont suffisamment minces pour qu'on puisse ignorer leur épaisseur.

(a) Supposons que $h = 30$. Quel est le volume d'eau qui se déverse du cylindre A sur le sol ?

(b) Supposons que $h = 20$. Déterminer le volume d'eau qui se déverse du cylindre A sur le sol et la profondeur d'eau dans le cylindre B lorsqu'il est au fond du cylindre A.

(c) Déterminer l'intervalle des valeurs de h de manière que lorsque le cylindre B est au fond du cylindre A, il y a de l'eau dans le cylindre B, sans qu'il soit plein.

4. Pour chaque entier strictement positif k, l'expression $C(k)$ représente le nombre de façons d'écrire k comme somme d'un ou de plusieurs entiers consécutifs strictement positifs. Par exemple, $C(21) = 4$, car on peut écrire 21 comme

$$21, \quad 10+11, \quad 6+7+8 \quad \text{et} \quad 1+2+3+4+5+6,$$

et il n'existe aucune autre façon d'écrire 21 comme somme d'entiers consécutifs strictement positifs.

(a) Déterminer la valeur de $C(45)$.

(b) L'entier positif m est égal à la somme des entiers positifs de 4 à n. Déterminer les valeurs de a et de b ($a < b$) pour lesquelles $m = \frac{1}{2}(n+a)(n+b)$ pour chaque entier n ($n \geq 4$).

(c) Déterminer la valeur de $C(2 \times 3^4 \times 5^6)$.

(d) Déterminer le plus petit entier strictement positif k pour lequel $C(k) = 215$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2018! Chaque année, plus de 240 000 élèves, provenant de 75 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2018.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2018/2019
— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^{e} et 12^{e} année
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^e année – Sec. IV)

le mercredi 12 avril 2017

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 13 avril 2017

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF
WATERLOO

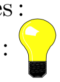
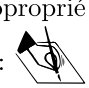
Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Lundi, Daniel avait 90 tasses, chacune étant mauve ou jaune. Il a placé les tasses dans trois boites comme suit :

   Boite D : 9 tasses mauves et 23 tasses jaunes, soit 32 tasses en tout
   Boite E : 6 tasses mauves et 24 tasses jaunes, soit 30 tasses en tout
   Boite F : 28 tasses en tout

   (a) Quel pourcentage des tasses dans la boite E étaient mauves ?

   (b) Lundi, 30 % des tasses de Daniel étaient mauves. Combien y avait-il de tasses mauves dans la boite F ?

   (c) Mardi, Aviva apporte 9 tasses mauves qu'elle ajoute aux tasses de Daniel. Basile apporte des tasses jaunes qu'il ajoute aux tasses de Daniel. Après ces ajouts, il y a encore 30 % des tasses de Daniel qui sont mauves. Combien de tasses Basile a-t-il apportées ?

2. Lundi le restaurant Matinal offre une tarification spéciale. Si un client arrive entre 4 h 30 et 7 h 00, l'heure à laquelle il arrive, en heures et en minutes, devient le prix d'un déjeuner, en dollars et en cents. Par exemple, si un client arrive à 5 h 23, il paie 5,23 $.

   (a) Abdi arrive à 5 h 02 et Caleb arrive à 5 h 10. Combien paient-ils en tout ?

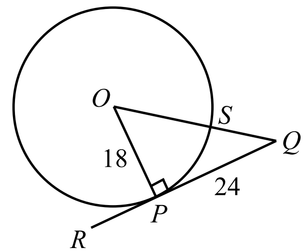
   (b) Robert arrive 10 minutes avant Émilie et chacun est arrivé pendant la période de tarification spéciale. En tout, ils paient 12,34 $. À quelle heure chacun est-il arrivé ?

   (c) Isaac et Jacob arrivent ensemble et Karla arrive plus tard. Chacun est arrivé pendant la période de tarification spéciale. En tout, ils paient 18,55 $. Quel est le prix minimum que Karla aurait pu payer ?

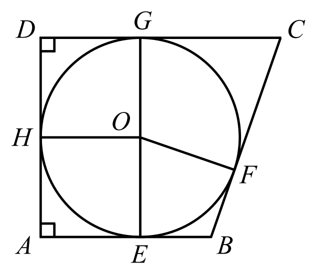
   (d) Lara et Fabien arrivent séparément pendant la période de tarification spéciale. En tout, ils paient 11,98 $. Déterminer les intervalles de temps pendant lesquels Lara aurait pu arriver.

3. Une *tangente* à un cercle est une droite ou un segment de droite qui touche le cercle en exactement un point et ne le toucherait pas de nouveau même si on l'étendait à l'infini dans les deux sens. Lorsqu'une tangente à un cercle de centre O touche le cercle au point P, le rayon OP est perpendiculaire à la tangente.

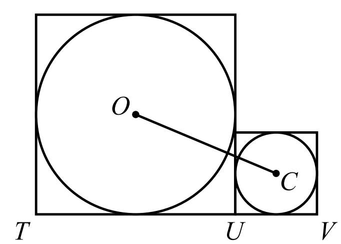
   (a) Dans la figure ci-contre, O est le centre d'un cercle de rayon 18. QR est tangent au cercle au point P. Le segment de droite OQ coupe le cercle au point S. Déterminer la longueur de SQ.



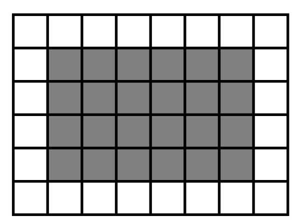
   (b) On dit qu'un cercle est *inscrit* dans un quadrilatère si chaque côté du quadrilatère est tangent au cercle. Dans la figure ci-contre, un cercle de centre O est inscrit dans un quadrilatère $ABCD$, touchant AB en E, BC en F, CD en G et DA en H. Sachant que le cercle a un rayon de 12, que $OB = 15$, $OC = 20$ et $\angle BAD = \angle ADC = 90°$, quel est le périmètre du quadrilatère $ABCD$?



   (c) Dans la figure ci-contre, deux cercles de centres O et C sont inscrits dans deux carrés. Le grand carré a une aire de 289 et le petit carré a une aire de 49. Sachant que T, U et V sont situés sur une même droite, déterminer la longueur de OC.



4. Un rectangle *Koeller* :
   - est un rectangle m sur n, m et n étant des entiers avec $m \geq 3$ et $n \geq 3$,
   - avec des droites parallèles à ses côtés qui le divisent en carrés 1 sur 1 et
   - dont les carrés 1 sur 1 qui longent ses côtés sont blancs et les carrés 1 sur 1 qui ne longent pas ses côtés sont ombrés.



   La figure est un exemple d'un rectangle Koeller avec $m = 8$ et $n = 6$.

   Étant donné un rectangle Koeller, soit r le rapport de l'aire de la partie ombrée à l'aire de la partie non ombrée.

   (a) Quelle est la valeur de r pour un rectangle Koeller avec $m = 14$ et $n = 10$?

   (b) Déterminer toutes les valeurs entières et strictement positives de u pour lesquelles il existe un rectangle Koeller avec $n = 4$ et $r = \dfrac{u}{77}$.

   (c) Déterminer tous les nombres premiers p pour lesquels il existe exactement 17 valeurs entières strictement positives de u pour des rectangles Koeller avec $n = 10$ et $r = \dfrac{u}{p^2}$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2017! Chaque année, plus de 220 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2017.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2017/2018
— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^{e} et 12^{e} année
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^e année – Sec. IV)

le mercredi 13 avril 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 avril 2016
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

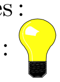
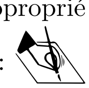
Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 . . . ou 1,41 . . ., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

REMARQUES :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'on puisse utiliser une calculatrice pour des calculs numériques, on doit présenter et justifier les autres étapes d'une solution. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. On ne peut participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

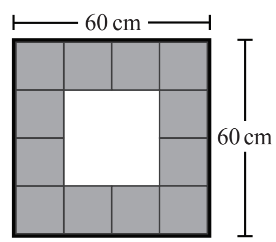
1. Lisa a une rangée de seaux. Le premier seau contient 17 disques verts et 7 disques rouges. Chaque seau après le premier contient 1 disque vert de plus et 3 disques rouges de plus que le seau précédent.

   (a) Quel seau contient 16 disques rouges ?

   (b) Dans quel seau y a-t-il un nombre égal de disques verts et de disques rouges ?

   (c) Il existe un seau dans lequel le nombre de disques rouges est le double du nombre de disques verts. Combien y a-t-il de disques en tout dans ce seau ?

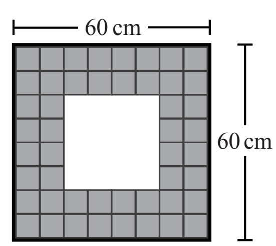
2. Jade a des assiettes carrées avec des côtés de 60 cm. Une assiette est *carrelée* si on a tracé des carrés ombrés identiques le long de sa bordure, comme dans la figure ci-contre. La figure illustre une assiette qui est carrelée avec 12 carrés ombrés.



   (a) La première assiette de Jade est carrelée avec 36 carrés ombrés. Quelle est la longueur de côté de chaque carré ombré ?

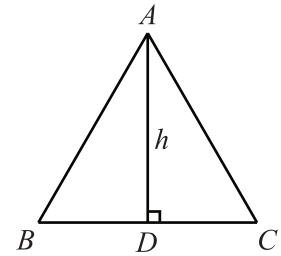
   (b) Une autre assiette est carrelée de manière qu'il reste une surface non ombrée de 1600 cm^2 au milieu de l'assiette. Quelle est la longueur de côté de chaque carré ombré ?

   (c) Une assiette est *bicarrelée* si on a tracé deux rangées de carrés ombrés identiques le long de sa bordure, comme dans la figure ci-contre. La figure illustre une assiette qui est bicarrelée avec 48 carrés ombrés.

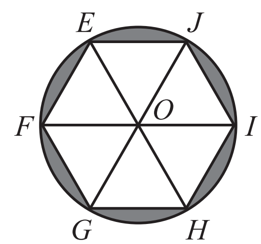


   Une nouvelle assiette est bicarrelée, laissant une surface non ombrée de 2500 cm^2 au milieu. Déterminer le nombre de carrés ombrés.

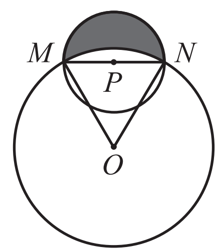
3. (a) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est équilatéral avec des côtés de longueur 6. D est le milieu de BC. Déterminer la valeur *exacte* de la hauteur h du triangle ABC.



(b) Dans la figure ci-contre, le cercle de centre O a un rayon de longueur 6. L'hexagone régulier $EFGHIJ$ a des côtés de longueur 6 et ses sommets sont situés sur le cercle. Déterminer la valeur *exacte* de l'aire de la région ombrée.



(c) Un cercle a pour centre O et pour rayon r. Un deuxième cercle a pour centre P et pour diamètre MN. Les cercles se coupent en M et N. Sachant que $MN = \ r$, déterminer la valeur *exacte* de l'aire de la région ombrée en fonction de r.



4. La factorisation première de 45 est $3^2 5^1$. De façon générale, la factorisation première d'un entier n ($n \geq 2$) est l'écriture du nombre sous la forme $p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_k^{a_k}$ ($p_1, p_2, ..., p_k$ étant des nombres premiers distincts et $a_1, a_2, ..., a_k$ étant des entiers strictement positifs).
Étant donné un entier n ($n \geq 2$) comme entrée, le *processus de Barbeau* donne comme sortie l'entier égal à $n\left(\dfrac{a_1}{p_1} + \dfrac{a_2}{p_2} + \dfrac{a_3}{p_3} + \cdots + \dfrac{a_k}{p_k}\right)$.

Par exemple, étant donné 45 comme entrée, le processus de Barbeau calcule $45\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{5}\right)$, qui est égal à $30 + 9$, avec pour sortie 39, puisque la factorisation première de 45 est $3^2 5^1$.

(a) Étant donné pour entrée 126, quelle sortie obtient-on par le processus de Barbeau ?

(b) Déterminer tous les couples (p, q) de nombres premiers distincts de manière que l'entrée $p^2 q$ donne la sortie 135 par le processus de Barbeau.

(c) Déterminer tous les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs de manière que l'entrée $2^a 3^b 5^c$ donne la sortie $4 \times 2^a 3^b 5^c$ par le processus de Barbeau.

(d) Déterminer toutes les valeurs entières de n ($2 \leq n < 10^{10}$) de manière que l'entrée n donne la sortie $3n$ par le processus de Barbeau.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2016! Chaque année, plus de 220 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2016.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2016/2017
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^{e} et 12^{e} année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^e année – Sec. IV)

le jeudi 16 avril 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 17 avril 2015
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF
WATERLOO

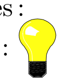
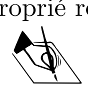
Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 . . . ou 1,41 . . ., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

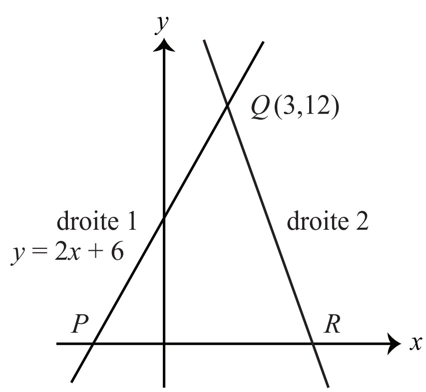
NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. (a) Dans la figure ci-contre, la droite 1 a pour équation $y = 2x + 6$ et elle coupe l'axe des abscisses au point P. Quelle est l'abscisse à l'origine de la droite 1 ?

   (b) La droite 2 a une pente de -3 et elle coupe la droite 1 au point $Q(3, 12)$. Déterminer l'équation de la droite 2.

   (c) La droite 2 coupe l'axe des abscisses au point R. Déterminer l'aire du triangle PQR.



2. Mercredi, on a demandé aux élèves de six écoles différentes s'ils avaient reçu un tour en voiture pour venir à l'école ce jour-là.

   (a) À l'école A, 330 ont reçu un tour et 420 élèves n'en ont pas reçu. Quel pourcentage des élèves de l'école A ont reçu un tour ?

   (b) L'école B compte 240 élèves dont 30 % ont reçu un tour. Combien d'élèves de plus auraient dû recevoir un tour pour que 50 % des 240 élèves de l'école B aient reçu un tour ?

   (c) L'école C compte 200 élèves dont 45 % ont reçu un tour. L'école D compte 300 élèves. Lorsqu'on réunit les élèves des écoles C et D, 57,6 % de ces élèves ont reçu un tour. Si x % des élèves de l'école D ont reçu un tour, déterminer la valeur de x.

   (d) L'école E compte 200 élèves dont n % ont reçu un tour. L'école F compte 250 élèves dont $2n$ % ont reçu un tour. Lorsqu'on réunit les élèves des écoles E et F, entre 55 % et 60 % de ces élèves ont reçu un tour. Sachant que n est un entier strictement positif, déterminer toutes les valeurs possibles de n.

3. (a) Sachant que $n + 5$ est un entier pair, indiquer lequel des énoncés est vrai : n est pair ou n est impair.

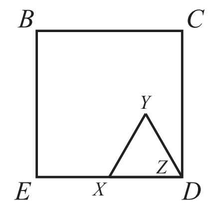
(b) Sachant que c et d sont des entiers, expliquer pourquoi $cd(c + d)$ est toujours un entier pair.

(c) Déterminer le nombre de couples (e, f) d'entiers strictement positifs pour lesquels

- $e < f$,
- $e + f$ est impair et
- $ef = 300$.

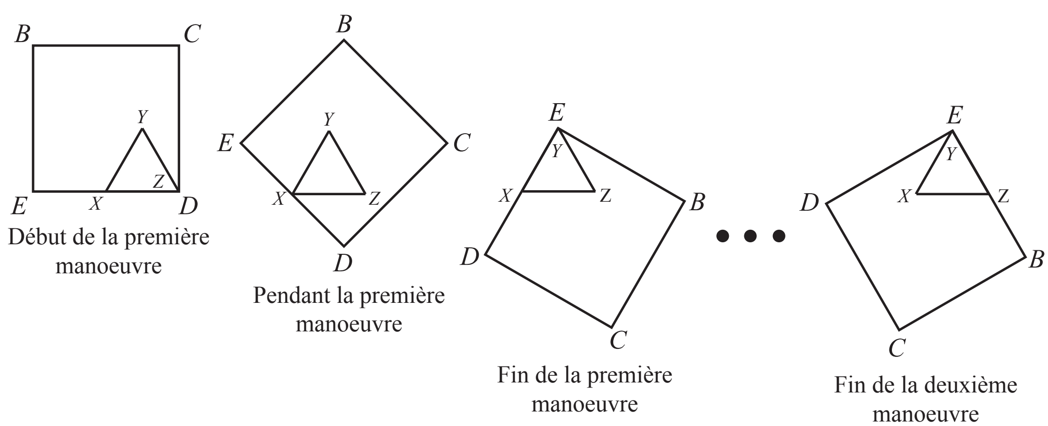
(d) Déterminer le nombre de couples (m, n) d'entiers strictement positifs pour lesquels $(m + 1)(2n + m) = 9000$.

4. Dans la figure ci-contre, le carré $BCDE$ a des côtés de longueur 2. Le triangle équilatéral XYZ a des côtés de longueur 1. Le sommet Z coïncide avec le sommet D et le sommet X est situé sur ED.



(a) Quelle est la mesure de l'angle YXE ?

(b) Une manoeuvre consiste à faire tourner le carré autour d'un sommet du triangle, dans le sens des aiguilles d'une montre, jusqu'à ce qu'un côté du carré rencontre un côté du triangle. La première manoeuvre est une rotation de centre X et la deuxième manoeuvre est une rotation de centre Y, comme dans les figures suivantes. (On remarque que le sommet du triangle qui agit comme centre de rotation demeure en contact avec le carré pendant la rotation.)



Dans les manoeuvres suivantes, les rotations du carré ont pour centre Z, puis X, puis Y, et ainsi de suite. Déterminer le nombre de manoeuvres qu'il faut, à partir du début, jusqu'à ce que le sommet D coïncide de nouveau avec un sommet du triangle. Justifier les étapes de sa présentation.

(c) Déterminer la longueur du chemin emprunté par le point E du début de la première manoeuvre jusqu'à ce que le carré $BCDE$ retourne à sa position de départ pour la première fois (c'est-à-dire lorsque D coïncide pour la première fois avec Z et XZ est situé sur ED).

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2015! Chaque année, plus de 200 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2015.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :
- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2015/2016
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^{e} et 12^{e} année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^e année – Sec. IV)

le mercredi 16 avril 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 17 avril 2014
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO   WATERLOO MATHEMATICS   Deloitte.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Durée : 75 minutes | **Nombre de questions :** 4
L'utilisation d'une calculatrice est permise. | **Chaque question vaut 10 points.**

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 . . . ou 1,41 . . ., sauf indication contraire.

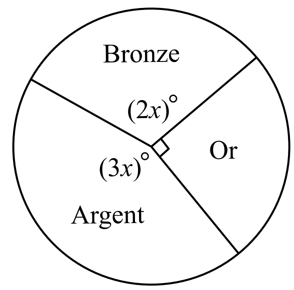
Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées a l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.

1. Le diagramme circulaire ci-contre indique la distribution des médailles de bronze, d'argent et d'or exposées dans la vitrine de l'école.



   (a) Quelle est la valeur de x ?

   (b) Écrire le rapport irréductible du nombre de médailles de bronze au nombre de médailles d'argent au nombre de médailles d'or.

   (c) Sachant qu'il y a 80 médailles dans la vitrine, déterminer le nombre de médailles de bronze, le nombre de médailles d'argent et le nombre de médailles d'or dans la vitrine.

   (d) Dans la vitrine, il y a le même nombre de médailles de chaque sorte que dans la partie (c). Une enseignante trouve une boite de médailles et ajoute ces médailles à celles de la vitrine. Le rapport du nombre de médailles de bronze au nombre de médailles d'argent au nombre de médailles d'or demeure inchangé. Quel est le plus petit nombre de médailles qu'il peut y avoir dans la vitrine ?

2. Un avion peut transporter un maximum de 245 passagers. Pour défrayer le cout additionnel de transporter des bagages, les passagers doivent payer des frais de 20 \$ pour la première valise et de 7 \$ par valise additionnelle. (Les passagers qui voyagent sans valise ne paient aucun frais additionnel.)

   (a) Lors d'un vol, 200 passagers avaient une valise chacun et les 45 autres passagers avaient deux valises chacun. Déterminer le total des frais additionnels pour les valises.

   (b) Lors d'un deuxième vol, l'avion était complet. Chaque passager avait soit une valise, soit deux valises. Sachant que le total des frais additionnels était de 5173 \$, combien de passagers avaient deux valises ?

   (c) Lors d'un troisième vol, le total des frais additionnels était de 6825 \$. Expliquer pourquoi il doit y avoir au moins un passager qui avait au moins trois valises.

   (d) Lors d'un quatrième vol, le total des frais additionnels était de 142 \$. Expliquer pourquoi il doit y avoir au moins un passager qui avait au moins trois valises.

3. Chaque carte d'un jeu de cartes porte un entier strictement positif et les entiers sur ces cartes sont consécutifs. On choisit ensuite une paire de cartes dont les numéros forment un couple (a, b), $a < b$, de manière à créer une somme $a + b$. Par exemple, Anna a un jeu de cartes numérotées de 1 à 50 et elle doit créer une somme de 60. Entre autres, elle peut choisir une paire qui forme le couple $(10, 50)$ ou une paire qui forme le couple $(25, 35)$.

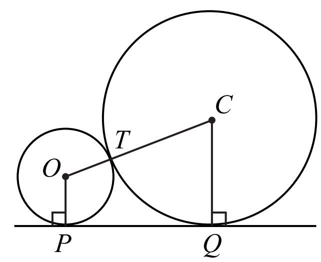
   (a) Eva a 10 cartes numérotées de 1 à 10. Elle peut choisir exactement trois paires de cartes dont les couples ont une somme de 8. Énumérer les trois couples.

   (b) Simon a 10 cartes numérotées de 1 à 10. Déterminer le nombre de paires de cartes qu'il peut choisir pour que les couples aient une somme de 13.

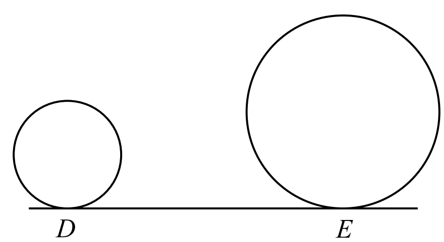
   (c) Daniel a k cartes numérotées de 1 à k. Il peut choisir exactement 10 paires de cartes dont les couples ont une somme de 100. Quelle est la valeur de k ?

   (d) Denis a 75 cartes numérotées de 1 à 75. Il peut choisir exactement 33 paires de cartes dont les couples ont une somme de S. Déterminer toutes les valeurs possibles de S, tout en justifiant sa démarche.

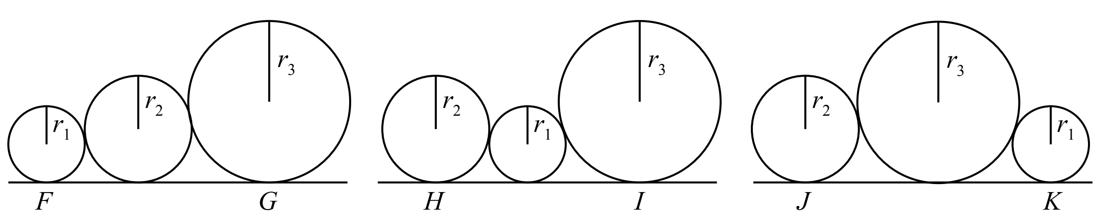
4. (a) Un cercle de rayon 2 et un cercle de rayon 5 sont tangents extérieurement l'un à l'autre au point T et ils sont tangents à une droite horizontale aux points P et Q, comme dans la figure ci-contre. Soit O et C les centres des cercles. Alors O, T et C sont alignés et les rayons OP et CQ sont perpendiculaires à PQ. En construisant un segment parallèle à PQ à partir du point O, déterminer la distance entre les points P et Q.



   (b) Un cercle de rayon 4 et un cercle de rayon 9 sont tangents à une droite horizontale aux points D et E, comme dans la figure ci-contre. On peut placer un cercle entre ces deux cercles de manière qu'il soit tangent extérieurement à chacun des deux cercles et tangent à la droite horizontale. Sachant que $DE = 24$, déterminer le rayon du troisième cercle, tout en justifiant sa démarche.



   (c) Trois cercles de rayons r_1, r_2 et r_3, où $r_1 < r_2 < r_3$, sont placés de manière qu'ils soient tangents à une droite horizontale et que chaque deux cercles adjacents soient tangents extérieurement l'un à l'autre. Les points F, G, H, I, J et K sont des points de contact des cercles avec la droite horizontale, comme dans la figure ci-dessous. Les segments FG, HI et JK, dans un ordre quelconque, ont pour longueurs 18, 20 et 22. Déterminer les valeurs de r_1, r_2 et r_3, tout en justifiant sa démarche.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2014!
En 2013, plus de 15 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Fryer, Galois et Hypatie.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre.

Visitez notre site Web pour
- des copies gratuites des concours précédents
- des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
- des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour
- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2014/2015
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
- trouver les résultats de votre école
- vous inscrire au Problème de la semaine
- obtenir des renseignements au sujet de notre programme de Master of Mathematics for Teachers (maîtrise en mathématiques pour enseignants)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^e^ année – Sec. IV)

le jeudi 18 avril 2013

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 19 avril 2013

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

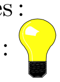
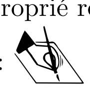
UNIVERSITY OF WATERLOO — WATERLOO MATHEMATICS — Deloitte.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Durée : 75 minutes — **Nombre de questions :** 4

L'utilisation d'une calculatrice est permise. — **Chaque question vaut 10 points.**

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 . . . ou 1,41 . . ., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées a l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.

1. (a) Déterminer une équation de la droite qui passe aux points $(2, 0)$ et $(0, 4)$.

   (b) Récrire l'équation obtenue dans la partie (a) sous la forme $\dfrac{x}{c} + \dfrac{y}{d} = 1$, c et d étant des entiers.

   (c) Indiquer l'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{10} = 1$.

   (d) Déterminer l'équation de la droite qui passe aux points $(8, 0)$ et $(2, 3)$ et l'écrire sous la forme $\dfrac{x}{e} + \dfrac{y}{f} = 1$, e et f étant des entiers.

2. Une chandelle rouge est plus épaisse qu'une chandelle verte. Elles ont toutes deux une longueur de 100 cm. Les deux chandelles sont allumées en même temps. À mesure qu'elles brulent, leur longueur diminue à des vitesses constantes, mais différentes. La chandelle rouge met 600 minutes pour bruler au complet. La chandelle verte met 480 minutes pour bruler au complet.

   (a) De combien la longueur de la chandelle rouge a-t-elle diminué 180 minutes après qu'elle a été allumée ?

   (b) Combien de minutes après qu'elle a été allumée la chandelle verte aura-t-elle une longueur de 80 cm ?

   (c) De combien la chandelle rouge sera-t-elle plus longue que la chandelle verte 60 minutes après qu'elles ont été allumées ?

   (d) Combien de minutes après qu'elles ont été allumées la chandelle rouge sera-t-elle 7 cm plus longue que la chandelle verte ?

3. On écrit les entiers pairs strictement positifs en ordre comme dans le tableau suivant.

Numéro de la rangée				
1	2			
2	4	6		
3	8	10	12	
4	14	16	18	20
		⋮		

Chaque nouvelle rangée contient un entier de plus que la rangée précédente. Le dernier nombre de chaque rangée est égal au produit du numéro de cette rangée et du numéro suivant. Par exemple, le dernier nombre de la 4e rangée est égal à 4×5, ou 20. Il est permis d'utiliser ce renseignement sans le prouver.

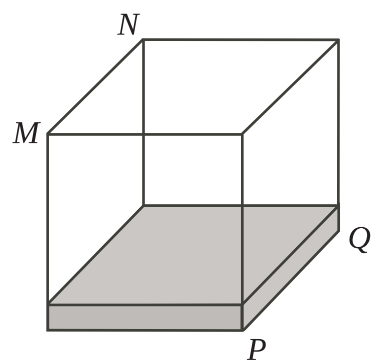
(a) Écrire les nombres de la 7e rangée du tableau.

(b) Quels sont le premier et le dernier nombre de la 100e rangée du tableau ?

(c) Soit D le dernier nombre de la rangée r. Soit P le premier nombre de la rangée $(r + 2)$. Déterminer la plus petite valeur possible de r pour laquelle $P + D$ a une valeur d'au moins 2013.

4. Un cube, qui a des arêtes de 9 cm, contient une certaine quantité d'eau.

(a) Lorsqu'une des faces du cube repose par terre, comme dans la figure ci-contre, la profondeur de l'eau est de 1 cm. Quel est le volume de l'eau dans le cube ?



(b) On déplace le cube de manière que l'arête PQ repose par terre et que l'arête opposée, MN, soit directement au-dessus de PQ. Déterminer la profondeur de l'eau dans le cube.

(c) On déplace le cube de manière qu'un seul sommet, P, repose par terre et que le sommet opposé, N, soit directement au-dessus de P. Déterminer, au centième de centimètre près, la profondeur de l'eau dans le cube.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2013!
En 2012, plus de 13 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Fryer, Galois et Hypatie.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre.

Visitez notre site Web pour

- des copies gratuites des concours précédents
- des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
- des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2013/2014
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
- trouver les résultats de votre école
- vous inscrire au Problème de la semaine
- obtenir des renseignements au sujet de notre programme de Master of Mathematics for Teachers (maîtrise en mathématiques pour enseignants)

The CENTRE for EDUCATION
in MATHEMATICS and COMPUTING
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^{e} année – Sec. IV)

le jeudi 12 avril 2012
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2012
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

STRONGER COMMUNITIES TOGETHER™

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Durée : 75 minutes — **Nombre de questions :** 4
L'utilisation d'une calculatrice est permise. — **Chaque question vaut 10 points.**

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 . . . ou 1,41 . . ., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié dans les Résultats du concours Euclide sur notre site web à l'adresse http://www.cemc.uwaterloo.ca.

REMARQUES

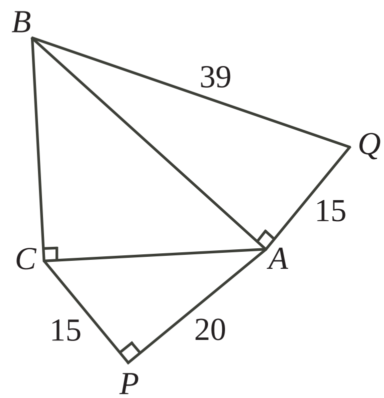
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées a l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.

1. Adam et Budan jouent à la pétanque. Chacun veut que sa boule tombe le plus près possible de la petite boule, appelée *cochonnet*, qui se trouve au point C dans la figure. La boule d'Adam tombe au point A et celle de Budan tombe au point B.

   (a) Quelle est la distance de A à C ?

   (b) Quelle est la distance de B à A ?

   (c) Déterminer laquelle des deux boules, celle d'Adam ou celle de Budan, est le plus près du cochonnet.

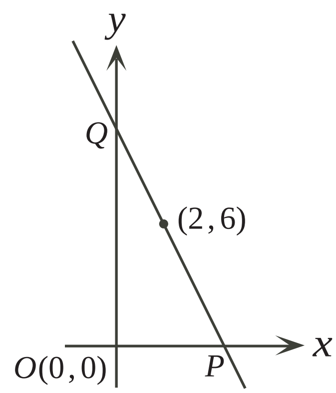


2. (a) Lorsque les nombres 25, 5 et 29 sont choisis deux à deux et que la moyenne des deux nombres est calculée, quelles sont les trois moyennes obtenues ?

   (b) Lorsque les nombres 2, 6 et n sont choisis deux à deux et que la moyenne des deux nombres est calculée, on obtient des moyennes de 11, 4 et 13. Déterminer la valeur de n.

   (c) On considère trois nombres, a, b et 2. On additionne chaque nombre à la moyenne des deux autres nombres. On obtient 14, 17 et 21. Sachant que $2 < a < b$, déterminer la valeur de a et celle de b.

3. Dans la figure ci-contre, une droite passe au point $(2,6)$. Il existe une infinité de droites qui passent à ce point.

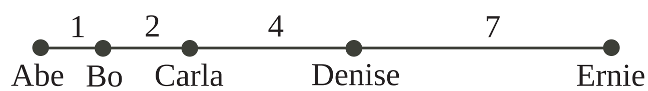


   (a) On considère une droite de pente -3 qui passe au point $(2,6)$. Déterminer l'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine de cette droite.

   (b) Une autre droite, de pente m, passe au point $(2,6)$. Déterminer l'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine de cette droite en fonction de m.

   (c) Une droite de pente m passe au point $(2,6)$, coupe la partie positive de l'axe des abscisses au point P et la partie positive de l'axe des ordonnées au point Q, comme dans la figure. Déterminer les deux valeurs de m pour lesquelles le triangle POQ a une aire de 25.

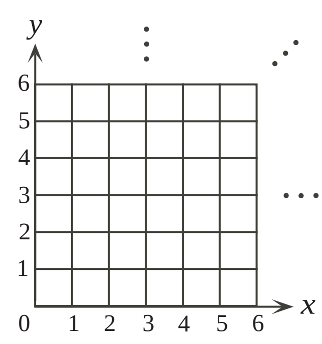
4. (a) Dans la ville A, cinq élèves sont situés à des carrefours différents sur une même rue est-ouest, comme dans la figure suivante. Les distances, en kilomètres, entre les carrefours adjacents sont données.



   Les élèves se donnent rendez-vous sur la rue à l'endroit qui minimisera la distance totale qu'ils devront parcourir. Où les élèves devront-ils se rencontrer ?

   (b) Dans la ville B, il y a un nombre pair d'élèves situés à des carrefours différents sur une même rue nord-sud. Les élèves se donnent rendez-vous sur la rue à l'endroit qui minimisera la distance totale qu'ils devront parcourir. Déterminer tous les endroits possibles où les élèves peuvent se rencontrer. Justifier sa réponse.

   (c) Dans la ville C, les rues sont orientées nord-sud ou est-ouest. Elles forment un quadrillage et les rues parallèles sont à 1 km les unes des autres, comme dans la figure. Cent élèves sont situés à des carrefours différents. Les 50 premiers élèves, numérotés de 1 à 50, sont situés de manière que l'élève numéro k est situé au carrefour $(2^k, k)$ dans le plan. (Par exemple, l'élève numéro 5 est situé au carrefour $(32,5)$.) Les autres élèves, numérotés de 51 à 100, sont situés de manière que l'élève numéro j est situé au carrefour $(j-50, 2j-100)$. Les élèves, qui peuvent seulement se déplacer le long des rues, se donnent rendez-vous au carrefour qui minimisera la distance totale qu'ils devront parcourir. Déterminer tous les carrefours possibles où les élèves peuvent se rencontrer. Justifier sa réponse.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2012!
En 2011, plus de 13 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Fryer, Galois et Hypatie.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre.

Visitez notre site Web pour

– des copies gratuites des concours précédents
– des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
– des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour

– obtenir des renseignements au sujet des concours de 2012/2013
– vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
– trouver les résultats de votre école
– vous inscrire au Problème de la semaine
– obtenir des renseignements au sujet de notre programme de Master of Mathematics for Teachers (maîtrise en mathématiques pour enseignants)

www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2011 (10^e^ année – Sec. IV)

le mercredi 13 avril 2011

1. Jacques énonce la règle suivante pour créer des suites :
   « Si x représente un terme de ta suite, alors le terme suivant de la suite est $\dfrac{1}{1-x}$. »
   Par exemple, Marie utilise le nombre 3 pour commencer sa suite.
   Le 2^e^ terme de sa suite est $\dfrac{1}{1-3}$, ce qui est égal à $\dfrac{1}{-2}$, ou $-\dfrac{1}{2}$. Sa suite est alors $3, -\frac{1}{2}$.

   Le 3^e^ terme de sa suite est $\dfrac{1}{1-(-\frac{1}{2})}$, ce qui est égal à $\frac{1}{\frac{3}{2}}$, ou $\frac{2}{3}$. Sa suite est alors $3, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$.

   Le 4^e^ terme de sa suite est $\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}}$, ce qui est égal à $\frac{1}{\frac{1}{3}}$, ou 3. Sa suite est alors $3, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 3$.

   Fabien utilise le nombre 2 pour commencer sa suite. Il utilise la règle de Jacques jusqu'à ce que sa suite contienne 2011 termes.

   (a) Quel est le 2^e^ terme de sa suite ?

   (b) Quel est le 5^e^ terme de sa suite ?

   (c) Dans la suite de Fabien, combien des 2011 termes égalent 2 ? Expliquer.

   (d) Déterminer la somme de tous les termes de cette suite.

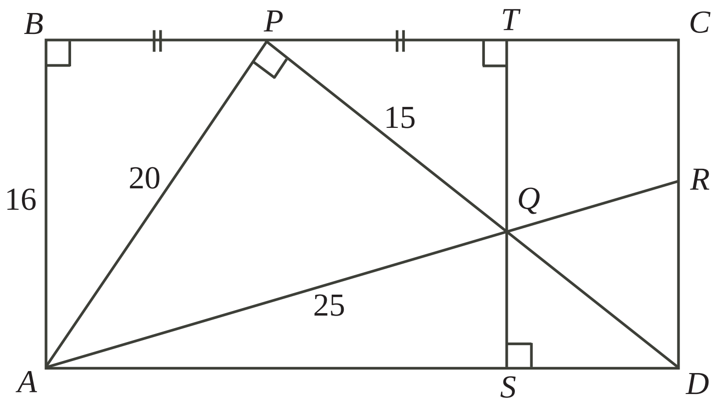
2. Alia a un seau rempli de jetons. Chaque jeton porte le numéro 0 d'un côté et un nombre entier supérieur à 0 de l'autre côté. Elle choisit trois jetons au hasard, les lance et calcule une somme en additionnant les trois nombres qui paraissent.

   (a) Lundi, Alia choisit des jetons portant un 7, un 5 et un 10. Elle les lance et les nombres $7, 0$ et 10 paraissent pour une somme de 17. Quelles autres sommes peut-elle obtenir en utilisant les trois mêmes jetons ?

   (b) Mardi, Alia choisit trois jetons, les lance trois fois et obtient des sommes de $60, 110$ et 130. Après chaque lancer, exactement un des jetons indique un 0. Déterminer la somme maximale que l'on peut obtenir en lançant ces trois jetons.

   (c) Mercredi, Alia choisit un jeton portant un 25, un jeton portant un 50 et un troisième jeton. Elle lance les trois jetons et obtient une somme de 170. Déterminer tous les nombres possibles, en plus du zéro, qui pourraient paraître sur le troisième jeton.

3. On considère le rectangle $ABCD$ suivant. P est un point sur BC de manière que $\angle APD = 90°$. TS est perpendiculaire à BC et $BP = PT$. PD coupe TS en Q. Le point R est sur CD de manière que RA passe au point Q. Dans le triangle PQA, $PA = 20$, $AQ = 25$ et $QP = 15$.



   (a) Déterminer la longueur de BP et celle de QT.
   (b) Démontrer que les triangles PQT et DQS sont semblables ; c'est-à-dire démontrer que les angles correspondants des deux triangles sont congrus.
   (c) Déterminer la longueur de QS et celle de SD.
   (d) Démontrer que $QR = RD$.

4. On considère un entier strictement positif n.
   Le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire est le nombre $T(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
   Par exemple, $T(3) = \frac{3(3+1)}{2} = \frac{3(4)}{2} = 6$. Donc, le 3^{e} nombre triangulaire est 6.
   (a) Il existe un entier positif a pour lequel $T(4) + T(a) = T(10)$. Déterminer a.
   (b) Déterminer le plus petit entier b supérieur à 2011 de manière que $T(b+1) - T(b) = T(x)$, x étant un entier strictement positif quelconque.
   (c) Si $T(c) + T(d) = T(e)$ et $c + d + e = T(28)$, démontrer que $cd = 407(c + d - 203)$.
   (d) Déterminer tous les triplets (c, d, e) d'entiers strictement positifs pour lesquels $c \leq d \leq e$, tels que $T(c) + T(d) = T(e)$ et $c + d + e = T(28)$.

Concours Galois 2010 (10^e année – Sec. IV)

le vendredi 9 avril 2010

1. Émilie utilisait une vielle pomme de douche qui laissait passer 18 L d'eau à la minute. Elle pose une nouvelle pomme de douche qui laisse passer 13 L d'eau à la minute.

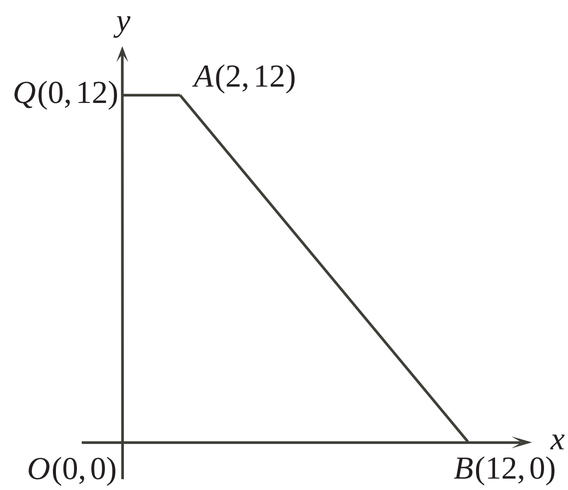
   (a) Lorsqu'elle prend son bain, Émilie a besoin de 260 L d'eau. Avec sa nouvelle pomme de douche, combien de minutes prend-elle pour utiliser 260 L d'eau ?

   (b) Si Émilie prend une douche de 10 minutes, quelle quantité d'eau *en moins* utilise-t-elle avec sa nouvelle pomme de douche au lieu de la vieille ?

   (c) L'eau qu'Émilie utilise lui coûte 8 cents par 100 L. Lorsqu'elle utilise sa nouvelle pomme de douche, elle utilise moins d'eau et elle épargne de l'argent. Si Émilie prend une douche de 15 minutes, combien d'argent *épargne*-t-elle en eau en utilisant sa nouvelle pomme de douche au lieu de la vieille ?

   (d) Combien de minutes Émilie doit-elle passer sous la douche pour épargner 30 \$ en utilisant sa nouvelle pomme de douche au lieu de la vieille ?

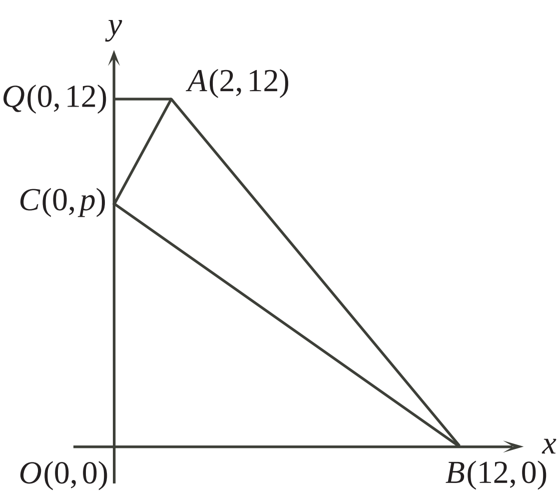
2. (a) On considère le quadrilatère $QABO$ ci-contre. Déterminer son aire.



   (b) Dans la figure ci-contre, le point $C(0, p)$ est situé sur l'axe des ordonnées entre les points $Q(0, 12)$ et $O(0, 0)$. Déterminer une expression en fonction de p pour l'aire du triangle COB.

   (c) Déterminer une expression en fonction de p pour l'aire du triangle QCA.

   (d) Déterminer la valeur de p pour laquelle le triangle ABC a une aire de 27.



3. (a) Résoudre le système d'équations suivant de façon algébrique :

$$\begin{aligned} x + y &= 42 \\ x - y &= 10 \end{aligned}$$

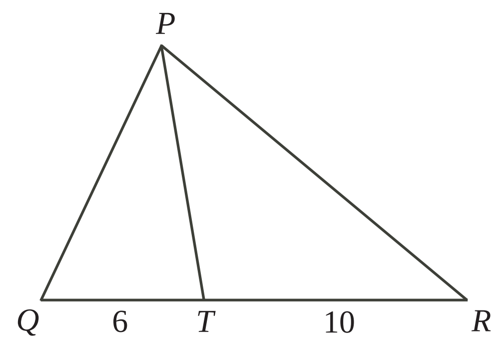
(b) Soit p un entier pair et q un entier impair. Expliquer pourquoi le système d'équations

$$\begin{aligned} x + y &= p \\ x - y &= q \end{aligned}$$

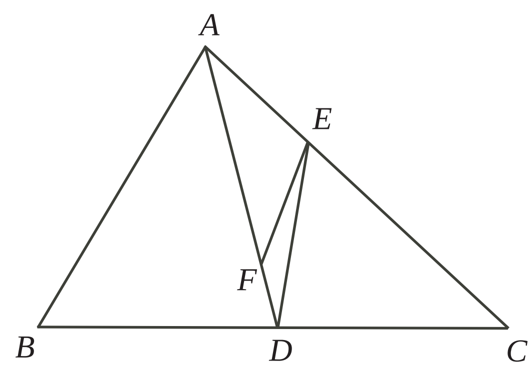
n'admet aucune solution (x, y) pour laquelle x et y sont des entiers strictement positifs.

(c) Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers strictement positifs qui vérifient l'équation $x^2 - y^2 = 420$.

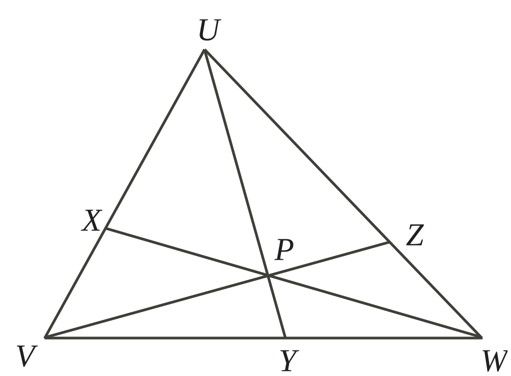
4. (a) On considère le triangle PQR ci-contre. Le point T est situé sur le côté QR de manière que $QT = 6$ et $TR = 10$. Expliquer pourquoi le rapport de l'aire du triangle PQT à l'aire du triangle PTR est de 3 : 5.



(b) Dans le triangle ABC ci-contre, le point D est le milieu du côté BC. Le point E est situé sur le côté AC de manière que $AE : EC = 1 : 2$. Le point F est situé sur le segment AD de manière que $AF : FD = 3 : 1$. Déterminer l'aire du triangle ABC, sachant que l'aire du triangle DEF est égale à 17.



(c) Dans la figure ci-contre, les points X, Y et Z sont situés sur les côtés respectifs UV, VW et WU du triangle UVW. Les segments UY, VZ et WX se coupent en P. De plus, $VY : YW = 4 : 3$. Déterminer l'aire du triangle UXP, sachant que le triangle PYW a une aire de 30 et que le triangle PZW a une aire de 35.



Concours Galois 2009 (10^e^ année – Sec. IV)

le mercredi 8 avril 2009

1. Alexa a noté la couleur des cheveux des élèves de sa classe. Le tableau suivant présente ses résultats :

Couleur des cheveux	Nombre d'élèves
Blond	8
Brun	7
Roux	3
Noir	2

   (a) Quel pourcentage des élèves de la classe ont les cheveux blonds ?

   (b) Quel pourcentage des élèves de la classe ont les cheveux roux ou noirs ?

   (c) Si certains élèves blonds de la classe se teignaient les cheveux en noir, combien en faudrait-il pour que 20 % des élèves de la classe aient les cheveux noirs ?

   (d) Combien d'élèves aux cheveux roux faudrait-il ajouter à la classe pour que 32 % des élèves de la classe aient les cheveux roux ?

2. Un carré a pour sommets les points $A(6,9)$, $B(12,6)$, $C(t,0)$ et $D(3,3)$.

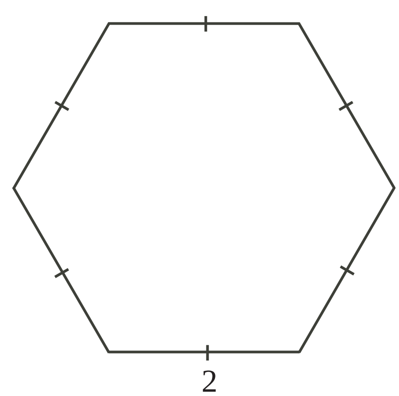
   (a) Déterminer la valeur de t, l'abscisse du sommet C.

   (b) On trace une droite qui passe aux points $O(0,0)$ et D. Cette droite coupe le côté AB en E. Déterminer les coordonnées du point E.

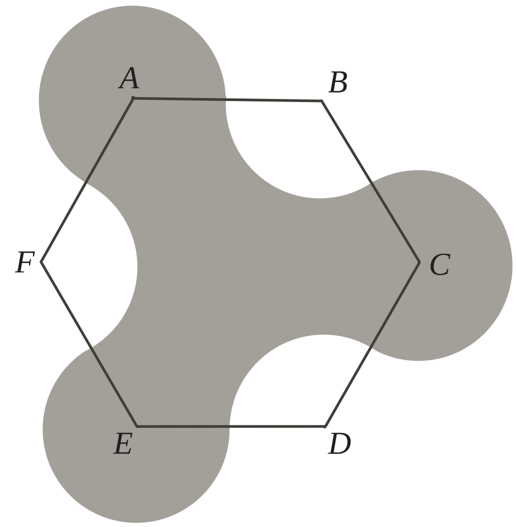
   (c) Déterminer le périmètre du quadrilatère $EBCD$.

3. (a) Déterminer l'aire d'un triangle équilatéral qui a des côtés de longueur 2.

   (b) Déterminer l'aire d'un hexagone régulier qui a des côtés de longueur 2.



(c) Dans la figure ci-contre, l'hexagone régulier $ABCDEF$ a des côtés de longueur 2. Des portions de cercles de rayon 1 et de centres respectifs A, C et E sont tracées à l'extérieur de l'hexagone. Des portions de cercles de rayon 1 et de centres respectifs B, D et F sont tracées à l'intérieur de l'hexagone. Ces six arcs de cercles se joignent pour former une courbe. Déterminer l'aire de la région ombrée renfermée par cette courbe.



4. Soit m un entier strictement positif. L'expression $m!$ représente le produit des entiers de 1 à m, c'est-à-dire que $m! = m(m-1)(m-2)\cdots(3)(2)(1)$. Par exemple, $5! = 5(4)(3)(2)(1)$, ou $5! = 120$.
Il est possible d'écrire certains entiers strictement positifs n sous la forme

$$n = a(1!) + b(2!) + c(3!) + d(4!) + e(5!)$$

de manière que chacune des conditions suivantes soit satisfaite :

- a, b, c, d et e sont des entiers
- $0 \leq a \leq 1$
- $0 \leq b \leq 2$
- $0 \leq c \leq 3$
- $0 \leq d \leq 4$
- $0 \leq e \leq 5$

(a) Déterminer le plus grand entier positif N qu'il est possible d'écrire sous cette forme.

(b) Écrire $n = 653$ sous cette forme.

(c) Démontrer que tous les entiers n (où $0 \leq n \leq N$) peuvent être écrits sous cette forme.

(d) Déterminer la somme de tous les entiers n qui peuvent être écrits sous cette forme avec $c = 0$.

Concours Galois 2008 (10^e année – Sec. IV)

le mercredi 16 avril 2008

1. Trois entiers positifs a, b et x forment un *triplet O'Hara* (a, b, x) si $\sqrt{a} + \sqrt{b} = x$. Par exemple, $(1, 4, 3)$ est un triplet O'Hara, puisque $\sqrt{1} + \sqrt{4} = 3$.
   (a) Sachant que $(36, 25, x)$ est un triplet O'Hara, déterminer la valeur de x.
   (b) Sachant que $(a, 9, 5)$ est un triplet O'Hara, déterminer la valeur de a.
   (c) Déterminer les cinq triplets O'Hara pour lesquels $x = 6$. Expliquer sa démarche.

2. (a) Déterminer l'équation de la droite qui passe aux points $P(0, 5)$ et $Q(6, 9)$.
   (b) Une droite perpendiculaire à PQ passe au point Q. Déterminer l'équation de cette droite.
   (c) La droite de la partie (b) coupe l'axe des abscisses au point R. Déterminer les coordonnées de R.
   (d) Déterminer l'aire du triangle rectangle PQR.

3. (a) On a posé deux questions à 20 élèves pour les évaluer. Voici les résultats :

Numéro de la question	Nombre d'élèves qui ont répondu correctement
1	18
2	14

   Déterminer le plus petit nombre possible et le plus grand nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre correctement aux deux questions. Justifier pourquoi il s'agit bien du plus petit nombre possible et du plus grand nombre possible.

   (b) On a posé trois questions à 20 élèves pour les évaluer. Voici les résultats :

Numéro de la question	Nombre d'élèves qui ont répondu correctement
1	18
2	14
3	12

   Déterminer le plus petit nombre possible et le plus grand nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre correctement aux trois questions. Justifier pourquoi il s'agit bien du plus petit nombre possible et du plus grand nombre possible.

   (c) On a posé trois questions à 20 élèves pour les évaluer. Voici les résultats :

Numéro de la question	Nombre d'élèves qui ont répondu correctement
1	x
2	y
3	z

   On sait que $x \geq y \geq z$ et $x + y + z \geq 40$.
   Déterminer, en fonction de x, y et z, le plus petit nombre d'élèves possible qui auraient pu répondre correctement aux trois questions.

4. Caroline et Paul prennent part à un jeu dans lequel on utilise une liste d'entiers de 1 à n. Voici les règles du jeu :

   - Caroline joue toujours en premier.
   - Caroline et Paul jouent à tour de rôle.
   - À chacun de ses tours, Caroline doit enlever un nombre de la liste de manière que dans la liste, ce nombre ait un diviseur autre que lui-même.
   - À chacun de ses tours, Paul doit enlever de la liste tous les nombres qui sont des diviseurs du nombre que Caroline vient d'enlever.
   - Si Caroline ne peut plus enlever un nombre de la liste, Paul enlève tous les nombres qui restent.

   Par exemple, si $n = 6$, voici une séquence possible de choix des deux joueurs :

Joueur	Nombres enlevés	Nombres qui restent	Remarques
Caroline	4	1, 2, 3, 5, 6	
Paul	1, 2	3, 5, 6	
Caroline	6	3, 5	Elle ne peut enlever le 3 ou le 5.
Paul	3	5	
Caroline	Aucun	5	Caroline ne peut rien enlever.
Paul	5	Aucun	

   Dans cet exemple, la somme des nombres que Caroline a enlevés est égale à $4 + 6$, ou 10, et la somme des nombres que Paul a enlevés est égale à $1 + 2 + 3 + 5$, ou 11.

   (a) Supposons que $n = 6$ et que Caroline enlève le nombre 2 à son premier tour. Déterminer la somme des nombres que Caroline enlèvera et la somme des nombres que Paul enlèvera.

   (b) Si $n = 10$, déterminer la somme maximale possible des nombres que Caroline peut enlever. Prouver que cette somme est bien la somme maximale possible qu'elle peut obtenir.

   (c) Si $n = 14$, prouver que Caroline ne peut enlever 7 nombres.

Concours Galois 2007 (10^e année – Sec. IV)
le mercredi 18 avril 2007

1. Jean fait ses courses à un magasin de fruits plutôt particulier. Au lieu d'indiquer le prix de chaque sorte de fruits, le propriétaire matheux répond à des questions sur le prix d'une combinaison de fruits.

   (a) Voici les réponses aux questions que Jean a posées dans l'allée 1 :

Questions de Jean	Réponses
Quel est le coût total d'un avocat et d'une cerise ?	62 cents
Quel est le coût total d'une banane et d'une cerise ?	66 cents

   Quelle est la différence entre le prix d'un avocat et celui d'une banane ? Lequel est le plus cher ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.

   (b) Voici les réponses aux questions que Jean a posées dans l'allée 2 :

Questions de Jean	Réponses
Quel est le coût total d'une mangue et d'une nectarine ?	60 cents
Quel est le coût total d'une poire et d'une nectarine ?	60 cents
Quel est le coût total d'une mangue et d'une poire ?	68 cents

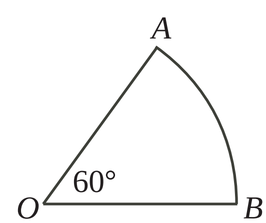
   Quel est le coût d'une poire ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.

   (c) Voici les réponses aux questions que Jean a posées dans l'allée 3 :

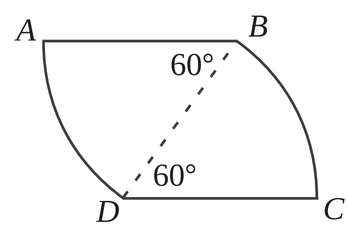
Questions de Jean	Réponses
Quel est coût total d'une mandarine et d'un citron ?	60 cents
Combien la mandarine coûte-t-elle de plus qu'un pamplemousse ?	6 cents
Quel est le coût total d'un pamplemousse, d'une mandarine et d'un citron ?	94 cents

   Quel est le coût d'un citron ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.

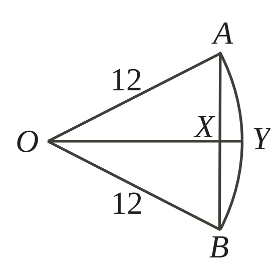
2. (a) Dans la figure ci-contre, quel est le périmètre du secteur de cercle de rayon 12 ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.



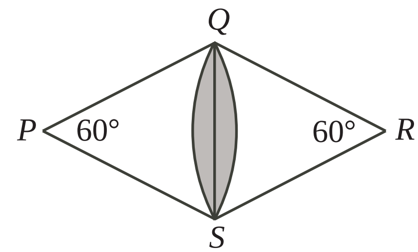
   (b) Deux secteurs de cercles de rayon 12 sont collés l'un contre l'autre comme dans la figure ci-contre. Déterminer l'*aire* de la figure $ABCD$. Expliquer comment la réponse a été obtenue.



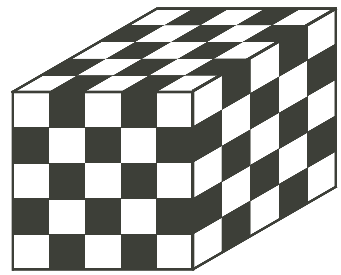
   (c) Dans la figure ci-contre, AOB est un secteur de cercle et $\angle OAB = 60°$. Le rayon OY est perpendiculaire au segment AB qu'il coupe en X. Quelle est la longueur de XY ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.



(d) Dans la figure ci-contre, deux secteurs de cercles de rayon 12 se chevauchent. Déterminer l'aire de la région ombrée. Expliquer comment la réponse a été obtenue.



3. (a) Chaque face d'un cube de bois 5 sur 5 sur 5 a été divisée en carrés 1 sur 1. Chaque carré a été peint en noir ou en blanc, comme dans la figure. Ensuite, on a découpé le grand cube en petits cubes 1 sur 1 sur 1. Combien de ces petits cubes ont *au moins* deux faces peintes ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.



(b) Un cube mesure $(2k+1)$ sur $(2k+1)$ sur $(2k+1)$, k étant un entier strictement positif. Ses faces sont peintes comme dans la partie (a), avec des faces blanches dans les coins. On coupe ensuite ce grand cube en petits cubes 1 sur 1 sur 1.

i. Déterminer, en fonction de k, le nombre de petits cubes qui ont *exactement* deux faces blanches. Expliquer comment la réponse a été obtenue.

ii. Prouver qu'il n'existe aucune valeur de k pour laquelle il y a 2006 petits cubes qui ont *au moins* deux faces blanches.

4. Josée a une boîte qui contient des tiges cylindriques de six couleurs différentes. Chaque couleur de tige correspond à une longueur particulière, comme l'indique le tableau suivant.

Couleur	Longueur
Vert	3 cm
Rose	4 cm
Jaune	5 cm
Noir	7 cm
Gris	8 cm
Bleu	9 cm

On peut joindre des tiges bout à bout pour former des poteaux.
Il y a 2 façons de choisir un ensemble de tiges jaunes et vertes de manière à former un poteau de 29 cm : 8 tiges vertes et 1 tige jaune OU 3 tiges vertes et 4 tiges jaunes.

(a) Combien y a-t-il de façons de choisir un ensemble de tiges jaunes et vertes de manière à former un poteau de 62 cm ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.

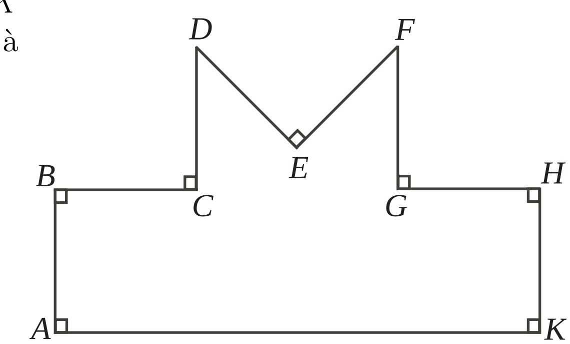
(b) En se limitant aux tiges vertes, jaunes, noires et bleues, déterminer deux couleurs pour lesquelles il est impossible de former un poteau de 62 cm en n'employant que des tiges de ces deux couleurs. Expliquer comment la réponse a été obtenue.

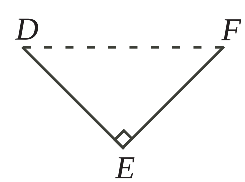
(c) Si on doit utiliser au moins 81 tiges de chacune des couleurs vert, rose, gris et bleu, combien y a-t-il de façons de choisir un ensemble de tiges de manière à former un poteau de 2007 cm ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.

Concours Galois 2006 (10^{e} année – Sec. IV)
le jeudi 20 avril 2006

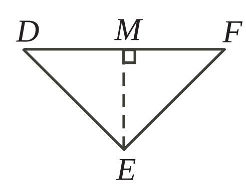
1. Dans un chapeau, il y a six bouts de papier numérotés de 1 à 6. Amélie et Boris choisissent chacun trois bouts de papier sans les remettre dans le chapeau. Ensuite, chacun additionne les numéros sur ses bouts de papier.
   (a) Déterminer la plus grande différence possible entre le total d'Amélie et celui de Boris. Expliquer comment cette différence a été obtenue.
   (b) Établir une liste de tous les groupes de trois bouts de papier qu'Amélie peut choisir pour que son total soit un de plus que celui de Boris.
   (c) Expliquer pourquoi il est impossible pour Amélie et Boris d'obtenir le même total, peu importe quels bouts de papier ils choisissent.
   (d) Supposons que l'on ajoute d'autres bouts de papier, numérotés de 7 à n, quelle est la plus petite valeur de n ($n > 6$) de manière qu'il soit possible pour Amélie et Boris de choisir chacun la moitié des bouts de papier numérotés de 1 à n et d'obtenir le même total ? Expliquer pourquoi cette valeur de n rend la situation possible.

2. Dans la figure, AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH et HK ont tous une longueur de 4. De plus, tous les angles, à l'exception des angles D et F, sont droits.





   (a) Déterminer la longueur de DF.



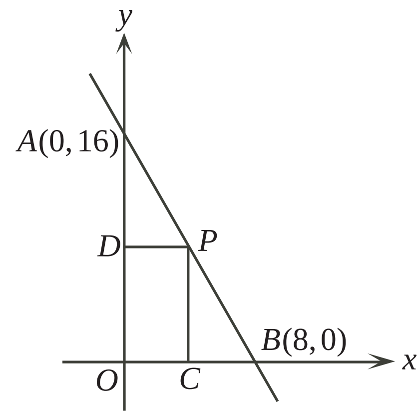
   (b) Si on abaisse une perpendiculaire EM de E à DF, quelle est la longueur de EM ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.
   (c) Si on abaisse une perpendiculaire EP de E à AK, quelle est la longueur de EP ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.
   (d) Quelle est l'aire de la figure $ABCDEFGHK$? Expliquer comment la réponse a été obtenue.

3. Dans la figure ci-contre, une droite passe par les points $A(0,16)$ et $B(8,0)$. Un point P est situé sur cette droite dans le quadrant I. Les points respectifs C et D sont situés sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées de manière que $PDOC$ soit un rectangle.

   (a) Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points A et B.

   (b) Déterminer les coordonnées du point P pour lequel $PDOC$ est un carré.

   (c) Déterminer les coordonnées de tous les points P pour lesquels l'aire du rectangle $PDOC$ est égale à 30.



4. (a) Lorsqu'on renverse l'ordre des chiffres du nombre 14, pour obtenir le nombre 41, il y a une augmentation de 27 d'un nombre à l'autre. Déterminer tous les nombres de 2 chiffres qui donnent une augmentation de 27 lorsqu'on renverse l'ordre de leurs chiffres.

   (b) Choisir n'importe quel entier $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$ de trois chiffres différents les uns des autres.
   (Lorsqu'on écrit $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$, a, b et c étant des chiffres, il s'agit de l'entier qui a une valeur de $100a + 10b + c$.)
   Renverser l'ordre des chiffres pour obtenir l'entier $\underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a}$.
   Soustraire le plus petit de ces deux entiers du plus grand pour obtenir l'entier $\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t}$, r pouvant être égal à 0.
   Renverser l'ordre des chiffres de cet entier pour obtenir l'entier $\underline{t}\,\underline{s}\,\underline{r}$.
   Démontrer que, peu importe l'entier $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$ choisi au départ, on a toujours $\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t}+\underline{t}\,\underline{s}\,\underline{r} = 1089$.

   (c) On considère l'entier de quatre chiffres, $N = \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}$ $(a \leq b \leq c \leq d)$.
   Lorsqu'on renverse l'ordre des chiffres de N pour obtenir l'entier M, il y a une augmentation de P lorsqu'on passe de N à M.
   (Encore une fois, le premier des quatre chiffres de P peut être égal à 0.)
   On renverse l'ordre des chiffres de P pour former l'entier Q.
   Déterminer toutes les valeurs possibles de $P + Q$, tout en justifiant sa démarche.

Concours Galois (10^e *année – Sec. IV*)
le mercredi 20 avril 2005

---

1. Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, à partir du deuxième, est obtenu en additionnant une constante au terme précédent.
   Par exemple, la suite 2, 11, 20, 29, ... est une suite arithmétique.
   (Les trois points de suspension, dans cet exemple, indiquent que la suite continue sans fin.)
   (a) Quel est le 11^e terme de la suite arithmétique 17, 22, 27, 32, ... ?
   (b) Expliquer pourquoi il n'existe aucun nombre qui soit un terme de chacune des deux suites arithmétiques suivantes :
   17, 22, 27, 32, ...
   13, 28, 43, 58, ...
   (c) Déterminer un nombre, entre 400 et 420, qui est un terme de chacune des suites suivantes :
   17, 22, 27, 32, ...
   16, 22, 28, 34, ...
   Expliquer sa démarche.

2. Paulette et Isaac jouent un jeu dans lequel chacun, à tour de rôle, place une tuile sur la grille suivante.

   Chaque tuile porte un nombre de 1 à 6. Paulette commence chaque partie avec les six tuiles suivantes : $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ et $\boxed{6}$.
   Isaac commence chaque partie avec les six tuiles suivantes : $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ et $\boxed{6}$.
   Une fois qu'une tuile est placée sur la grille, elle ne peut être bougée.
   Lorsque toutes les tuiles ont été placées, Paulette reçoit un point pour chaque rangée dont la somme est paire et un point pour chaque colonne dont la somme est paire. Isaac reçoit un point pour chaque rangée dont la somme est impaire et un point pour chaque colonne dont la somme est impaire. Par exemple, si la partie se termine avec les tuiles placées comme dans la figure suivante, Paulette reçoit 5 points et Isaac reçoit 2 points.

3	1	2	4
5	5	2	4
1	3	6	6

   (a) Dans la grille suivante, Isaac vient de placer son avant-dernière tuile. Remplir la grille de manière qu'Isaac reçoive plus de points que Paulette. (Il n'est pas nécessaire de présenter une stratégie. Il suffit de remplir la grille.)

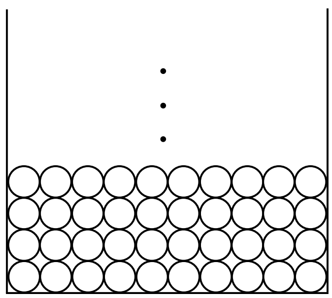
1	3		5
3	1	2	2
	4	4	

(b) Expliquer pourquoi il est impossible pour Paulette et Isaac d'obtenir le même nombre de points dans une partie.

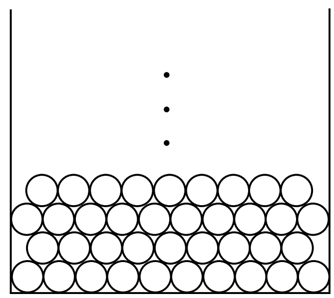
(c) Dans la grille suivante, c'est au tour d'Isaac de jouer. Il lui reste un 2 et un 5 à placer. Expliquer pourquoi Isaac ne peut obtenir plus de points que Paulette, peu importe où il place son 5.

1		3	6
	5		4
3		1	6

3. Deux caisses identiques sont remplies de tuyaux cylindriques. Chaque tuyau a un diamètre de 10 cm. Les tuyaux ont été placés de façons différentes dans chaque caisse. La figure suivante présente une vue de face de la façon dont les tuyaux sont disposés dans les quatre premières rangées de chaque caisse.



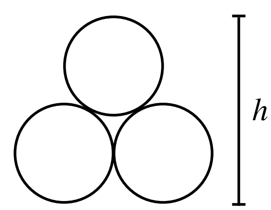
La caisse A



La caisse B

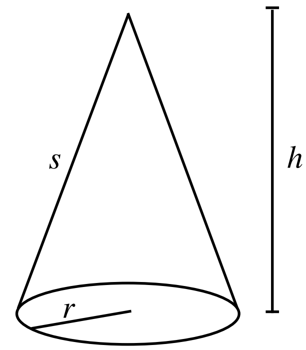
(a) Si chaque caisse contient 200 tuyaux, combien de rangées de tuyaux y a-t-il dans chaque caisse ? Expliquer sa démarche.

(b) La figure ci-contre montre une vue de face de trois tuyaux de la caisse B. Déterminer la hauteur h de cette pile de 3 tuyaux. Expliquer sa démarche.

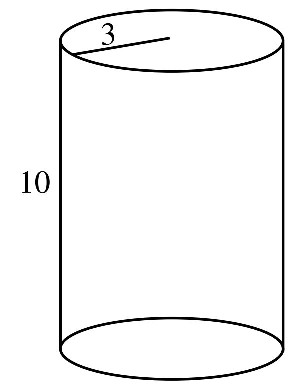


(c) Une fois que les caisses sont remplies, elles contiennent 200 tuyaux chacune. Quelle est la différence entre la hauteur totale des deux piles de 200 tuyaux ? Expliquer sa démarche.

4. Le volume d'une sphère de rayon r est égal à $\frac{4}{3}\pi r^3$.
   L'aire *totale* d'un cône de hauteur h et de rayon r est égale à $\pi r^2 + \pi rs$, s étant la longueur de la génératrice.



   (a) Un cylindre a une hauteur de 10 et un rayon de 3. Déterminer l'aire *totale* (y compris l'aire des extrémités) du cylindre, ainsi que son volume.



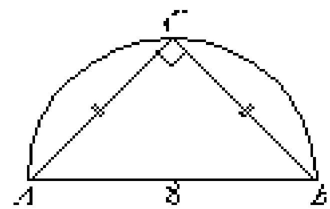
   (b) Un cône, un cylindre et une sphère ont un rayon égal à r. La hauteur du cylindre est égale à H et celle du cône est égale à h. Le cylindre et la sphère ont le même volume. Le cône et le cylindre ont la même aire totale. Démontrer que h et H ne peuvent tous deux être des entiers.

Concours Galois (10^e année - Sec. IV)
le jeudi 15 avril 2004

---

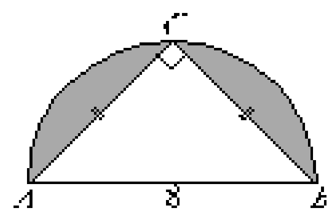
1. Le Groupe Galois donne des prix de 5 \$, de 25 \$, de 125 \$ et de 625 \$.
   a) Le Groupe décerne au moins un prix de chaque sorte. Si elle a décerné cinq prix d'une valeur totale de 905 \$, combien de prix de chaque sorte a-t-elle décernés? Expliquer son raisonnement.
   b) Si le Groupe décerne cinq prix, dont au moins un prix de chaque sorte, déterminer les trois autres valeurs totales possibles. Expliquer son raisonnement.
   c) Il y a deux façons pour le Groupe de décerner des prix d'une valeur totale de 880 \$, en décernant chaque prix au moins une fois, mais pas plus de six fois. Déterminer ces deux façons de le faire, tout en expliquant son raisonnement.

2. Dans la figure suivante, le segment *AB* est le diamètre du demi-cercle et $AB = 8$. Le point *C* est sur le demi-cercle de manière que le triangle *ABC* soit rectangle et isocèle.

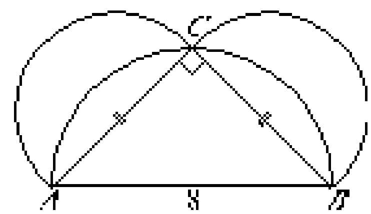


   a) Déterminer l'aire du triangle *ABC*.

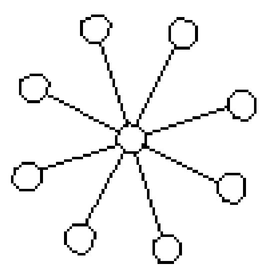
   b) On a ombré la partie intérieure du demi-cercle qui est à l'extérieur du triangle. Déterminer l'aire totale de la partie ombrée.



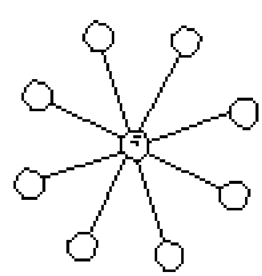
c) Dans la figure suivante, on a construit des demi-cercles de diamètres *AC* et *CB*.
   Démontrer que :
   (Aire du demi-cercle de diamètre *AB*)
   = (Aire du demi-cercle de diamètre *AC*) + (Aire du demi-cercle de diamètre *BC*)



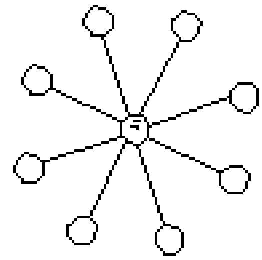
3. Dans le jeu « Le soleil des Incas », deux joueurs utilisent un ensemble de jetons, numérotés de 1 à 9. Tour à tour, ils placent un jeton dans un des cercles de la figure. L'objectif du jeu est d'être la première personne à placer un jeton de manière que les trois nombres le long d'une ligne qui passe par le centre aient une somme de 15.



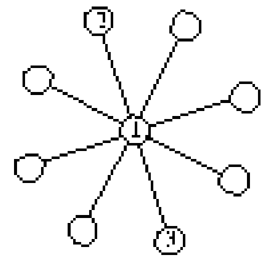
   a) Si Annick place un 5 dans le cercle du centre et que Boris place ensuite un 3, démontrer comment Annick peut gagner à son prochain tour.



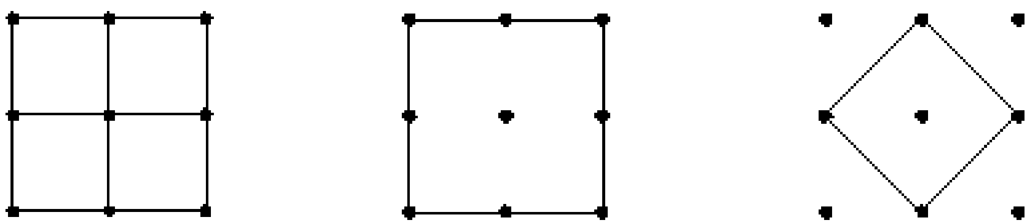
b) Si Annick place un 5 dans le cercle du centre, démontrer que quel que soit le choix de Boris, Annick peut toujours gagner à son prochain tour.



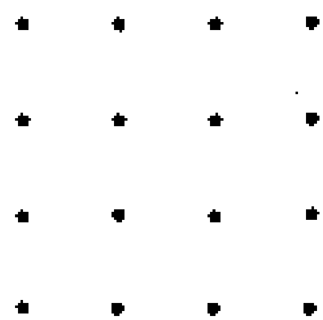
c) Dans la position ci-contre, c'est à Boris de jouer. Montrer que, quel que soit le choix de Boris, Annick peut gagner.



4. Un quadrillage à points est formé de points de manière que la distance horizontale ou verticale entre deux points adjacents est égale à 1. Dans un quadrillage à points de dimensions 3×3, il est possible de tracer six carrés de diverses grandeurs, dont les sommets sont sur les points, comme l'indiquent les figures suivantes.



a) Dans un quadrillage à points de dimensions 4×4, il est possible de tracer 20 carrés de cinq grandeurs différents, dont les sommets sont sur les points. Tracer un exemple de chaque grandeur et indiquer le nombre de carrés de chaque grandeur qu'il est possible de tracer.



b) Dans un quadrillage à points de dimensions 10×10, il est possible de tracer deux fois plus de carrés dont les côtés mesurent $\sqrt{29}$, que de carrés dont les côtés mesurent 7. Expliquer pourquoi.

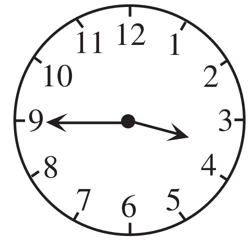
c) Démontrer que dans un quadrillage à points de dimensions 10×10, le nombre total de carrés qu'il est possible de tracer est égal à
$1(9^2)+2(8^2)+3(7^2)+4(6^2)+5(5^2)+6(4^2)+7(3^2)+8(2^2)+9(1^2)$.

Concours Galois (10e année - Sec. IV au Quebec)

mercredi 16 avril 2003

1. a) La *somme des carrés* de 5 entiers positifs consécutifs est égale à 1815. Quel est le plus grand de ces entiers?
   b) Démontrer que la somme des carrés de n'importe quels 5 entiers consécutifs est toujours divisible par 5.

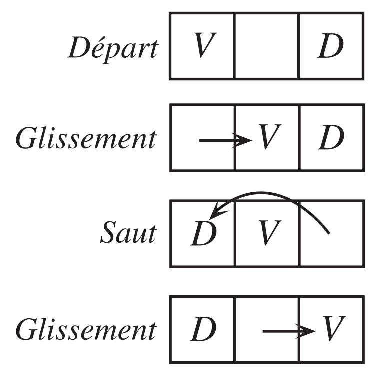
2. Le professeur Coucou croit, à tort, que les aiguilles d'une montre, à 3 h 45, forment un angle de 180°.



   a) Dans l'intervalle de 3 h à 3 h 45, quelle est la mesure de l'angle balayé par la petite aiguille?
   b) Pour démontrer que le professeur a tort, déterminer la mesure correcte de l'angle entre les aiguilles d'une montre à 3 h 45.
   c) À quelle heure, entre 3 h et 4 h, les aiguilles de la montre formeront-elles un angle de 180°?

3. Dans le jeu de *Commutation*, on doit déplacer des pièces de dix cents (D) et des pièces de vingt-cinq cents (V), de manière que les unes prennent la place des autres. Le diagramme de départ est illustré ci-dessous pour une pièce de dix cents et une pièce de vingt-cinq cents. Voici les mouvements permis :
   i) S'il y a une place vide à côté d'une pièce de monnaie, on peut faire *glisser* la pièce à cet endroit.
   ii) On peut faire *sauter* une pièce de dix cents par dessus une pièce de vingt-cinq cents, ou une pièce de vingt-cinq cents par dessus une pièce de dix cents, s'il y a un espace vide de l'autre côté.

   Le diagramme ci-contre montre les trois mouvements nécessaires pour une pièce de chaque sorte.



   a) Compléter le diagramme ci-contre pour montrer comment le jeu de *Commutation*, avec 2 pièces de chaque sorte, peut être joué en 8 mouvements

V	*V*		*D*	*D*
D	*D*		*V*	*V*

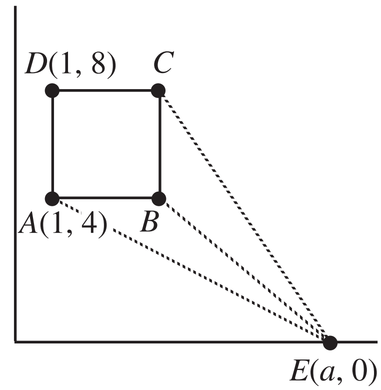
   b) En considérant le nombre de *glissements* et de *sauts*, expliquer pourquoi le jeu exige au moins 15 mouvements si on a 3 pièces de chaque sorte.

à suivre ...

4. Dans le diagramme, $ABCD$ est un carré et les coordonnées de A et de D sont indiquées.

   a) Soit le point $E(a, 0)$, sur l'axe des abscisses, de manière que les triangles CBE et ABE soient situés complètement à l'extérieur du carré $ABCD$. Pour quelle valeur de a la somme de l'aire des triangles CBE et ABE est-elle égale à l'aire du carré $ABCD$?

   b) Soit le point F, sur la droite qui passe par les points $M(6, -1)$ et $N(12, 2)$, de manière que les triangles CBF et ABF soient situés complètement à l'extérieur du carré $ABCD$. Déterminer les coordonnées du point F si la somme de l'aire des triangles CBF et ABF est égale à l'aire du carré $ABCD$.



Prolongements (Vous devriez essayer de répondre à ces questions uniquement lorsque vous aurez complété au meilleur de vos connaissances les quatre principaux problèmes)

Prolongement du Problème 1

Le nombre 1815 est aussi la somme de 5 entiers positifs consécutifs. Déterminer le prochain nombre, plus grand que 1815, qui est à la fois la somme de cinq entiers positifs consécutifs et la somme des carrés de 5 entiers consécutifs.

Prolongement du Problème 2

On pourrait croire que les aiguilles d'une montre forment un angle de 90° 24 fois pendant une période de 12 heures. Or ce n'est pas le cas. Déterminer le bon nombre de fois que les aiguilles forment un angle de 90° pendant une période de 12 heures.

Prolongement du Problème 3

Expliquer pourquoi le jeu exige au moins $n(n+2)$ mouvements si on a n pièces de chaque sorte.

Prolongement du Problème 4

Déterminer l'ensemble de tous les points $P(x, y)$ tels que les triangles CBP et ABP soient situés complètement à l'extérieur du carré $ABCD$ et que la somme de l'aire des triangles CBP et ABP soit égale à l'aire du carré $ABCD$.