Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2024

le jeudi 4 avril 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 5 avril 2024
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) On obtient le 5$^{\text{e}}$ terme en ajoutant 6 au 4$^{\text{e}}$ terme. Donc, le 5$^{\text{e}}$ terme est $21 + 6 = 27$.

(b) *Solution 1*
On obtient le 6$^{\text{e}}$ terme en ajoutant 6 au 5$^{\text{e}}$ terme. Donc, le 6$^{\text{e}}$ terme est $27 + 6 = 33$.
Donc, la moyenne des 4$^{\text{e}}$, 5$^{\text{e}}$ et 6$^{\text{e}}$ termes est égale à $\frac{21+27+33}{3} = \frac{81}{3} = 27$.

Solution 2
Le 4$^{\text{e}}$ terme est 6 de moins que le 5$^{\text{e}}$ terme et le 6$^{\text{e}}$ terme est 6 de plus que le 5$^{\text{e}}$ terme. Donc la moyenne des 4$^{\text{e}}$, 5$^{\text{e}}$ et 6$^{\text{e}}$ termes est égale au 5$^{\text{e}}$ terme, soit 27.

(c) On obtient le $n^{\text{ième}}$ terme ($n \geq 2$) en ajoutant $n-1$ fois 6 au premier terme, 3. Par exemple, le 2$^{\text{e}}$ terme est $3 + 1 \times 6$, le 3$^{\text{e}}$ terme est $3 + 2 \times 6$, le 4$^{\text{e}}$ terme est $3 + 3 \times 6$ et ainsi de suite.
De façon générale, le $n^{\text{ième}}$ terme est égal à $3 + (n - 1) \times 6$.
Donc, le 20$^{\text{e}}$ terme est égal à $3 + 19 \times 6 = 3 + 114 = 117$.

(d) *Solution 1*
Puisque chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant 6 au terme précédent et que $\frac{1000}{6} \approx 166{,}7$, il serait logique de déterminer d'abord le 166$^{\text{e}}$ terme. Le 166$^{\text{e}}$ terme est égal à $3 + 165 \times 6 = 993$ et le terme suivant est égal à $993 + 6 = 999$ (ce qui est inférieur à 1000).
Donc, le plus petit terme qui est supérieur à 1000 est le 168$^{\text{e}}$ terme, soit $999 + 6 = 1005$.
(Remarquons que $1005 = 3 + 167 \times 6$.)

Solution 2
D'après la partie (c), le $n^{\text{ième}}$ terme est égal à $3 + (n - 1) \times 6$.
On veut déterminer le plus petit terme qui est supérieur à 1000. Donc, on trouve d'abord la plus petite valeur de n qui vérifie $3 + (n - 1) \times 6 > 1000$.
On résout cette inéquation pour obtenir

$$\begin{aligned} 3 + (n-1) \times 6 &> 1000 \\ 3 + 6n - 6 &> 1000 \\ 6n - 3 &> 1000 \\ 6n &> 1003 \\ n &> \tfrac{1003}{6} \approx 167{,}2 \end{aligned}$$

Puisque n doit être un entier, alors le premier terme qui est supérieur à 1000 est le 168$^{\text{e}}$ terme, soit $3 + 167 \times 6 = 1005$.

2. (a) Au magasin 2, 50 % des chemises qu'Ella a déposées étaient rouges. Donc, les chemises restantes, soit 50 %, étaient bleues.
Cela signifie qu'elle a déposé un nombre égal de chemises rouges et bleues au magasin 2.
Puisque toutes les 200 chemises bleues ont été déposées au magasin 2, alors Ella a déposé 200 chemises rouges au magasin 2. Ella avait chargé 800 chemises rouges dans son camion et en a déposé 200 au magasin 2. Donc, elle a déposé $800 - 200 = 600$ chemises rouges au magasin 1.

(b) Au magasin 1, Ella a déposé 40 % de $5x$ chemises rouges, soit $0{,}40 \times 5x = 2x$ chemises rouges.
Ella a déposé les $5x - 2x = 3x$ chemises rouges restantes au magasin 2, en plus des $5x$ chemises bleues. Au magasin 2, $\dfrac{5x}{3x + 5x} = \dfrac{5}{8}$ des chemises déposées étaient bleues, ce qui représente $\frac{5}{8} \times 100\ \% = 62{,}5\ \%$ des chemises.

(c) Ella n'a déposé aucune chemise bleue au magasin 1. Elle a donc déposé toutes les y chemises bleues au magasin 2. Étant donné qu'Ella a déposé un nombre égal de chemises rouges, bleues et vertes au magasin 2, cela signifie qu'elle a déposé y chemises vertes et y chemises

rouges au magasin 2.
Mercredi, Ella a déposé $3y$ chemises rouges, y chemises bleues et y chemises vertes, soit $5y$ chemises en tout.
Sur l'ensemble des chemises déposées mercredi, $\dfrac{y}{5y} = \dfrac{1}{5}$ étaient vertes, ce qui représente $\frac{1}{5} \times 100\ \% = 20\ \%$ du nombre total de chemises.

3. (a) Dans la Figure 2, chaque petit morceau possède une croûte de même longueur.
On doit donc déterminer la longueur de MN telle que chaque morceau ait la même aire.
L'aire du carré $ABCD$ est égale à $30 \times 30 = 900$. Donc, chacun des trois petits morceaux a une aire de $\frac{900}{3} = 300$.

Puisque $ABCD$ est un carré, alors $AD = BC = 30$. Donc, $AM = 15$.
Le morceau $AMNB$ est un trapèze (AB et MN sont perpendiculaires à AM et sont donc parallèles l'un à l'autre) et a donc une aire de $\frac{15}{2}(MN + 30)$. On résout pour obtenir $\frac{15}{2}(MN + 30) = 300$ ou $MN + 30 = \frac{300 \times 2}{15}$, d'où $MN + 30 = 40$, soit $MN = 10$.

On aurait également pu remarquer que le triangle BNC a une aire de 300 et une base de $BC = 30$ et on aurait donc pu calculer sa hauteur, soit $h = \frac{300}{15} = 20$. Donc, $MN = AB - h$ soit $MN = 30 - 20 = 10$.

(b) Dans la Figure 3, chaque petit morceau possède une croûte de même longueur.
Puisque la tranche de pain a des croûtes sur trois côtés, alors la longueur totale des croûtes est égale à $3 \times 30 = 90$.
La longueur de la croûte de chaque morceau est donc égale à $\frac{90}{5} = 18$.
Puisque l'un des morceaux est le triangle TPQ, alors la longueur de sa croûte, représentée par le côté PQ, est donc égale à $PQ = 18$.

(c) Le carré $ABCD$ a une aire de $30 \times 30 = 900$. Donc, chacun des 5 morceaux a une aire de $\frac{900}{5} = 180$.
Soit W un point placé sur BC tel que MW soit perpendiculaire à BC.
Puisque MW doit passer par S et T, alors TW est la hauteur du triangle TPQ.
Le triangle TPQ a une aire de 180. Donc, $\frac{1}{2} \times PQ \times TW = 180$ ou $\frac{1}{2} \times 18 \times TW = 180$, soit $TW = \frac{180}{9} = 20$.

Puisque MS et AU sont tous deux perpendiculaires à AM, alors MS et AU sont parallèles et donc $AMSU$ est un trapèze.
Les 5 morceaux ont la même longueur de croûte, donc $AU = PQ = 18$.
L'aire de $AMSU$ est égale à 180. On résout $\frac{AM}{2}(MS + AU) = 180$ pour obtenir $\frac{15}{2}(MS + 18) = 180$ ou $MS + 18 = 24$. Donc, $MS = 6$.
Puisque $MW = AB = 30$, alors $ST = 30 - MS - TW$ ou $ST = 30 - 6 - 20$, soit $ST = 4$.

4. (a) Puisque chaque joueur peut obtenir 3 entiers distincts, alors le nombre total de résultats possibles est égal à $3 \times 3 = 9$. De plus, ces résultats sont équiprobables.
Si Alice obtenait un 5, elle gagnerait si Binh obtenait un 1, mais elle perdrait si Binh obtenait un 8 ou un 10.
Si Alice obtenait un 9, elle gagnerait si Binh obtenait un 1 ou un 8, mais elle perdrait si Binh obtenait un 10.
Si Alice obtenait un 11, elle gagnerait si Binh obtenait un 1, un 8 ou un 10.
Ces résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous, où « A » indique qu'Alice a gagné et « B » que Binh a gagné.

Nombre qu'Alice a obtenu

Nombre que Binh a obtenu	B \ A	5	9	11
	1	A	A	A
	8	B	A	A
	10	B	B	A

Parmi les 9 résultats possibles, Alice est la gagnante dans 6 cas. Donc, la probabilité pour qu'Alice remporte la partie est égale à $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

(b) Le disque de Carole comporte les entiers $\{1, 5, 10\}$. Soit $\{a, b, c\}$ le disque de Darsh avec $a < b < c$; a, b et c étant trois entiers distincts parmi 2, 3, 4, 6, 7, 8 et 9.
Chaque joueur peut obtenir 3 entiers distincts et donc le nombre total de résultats possibles est égal à $3 \times 3 = 9$. De plus, ces résultats sont équiprobables.
Donc, la probabilité pour que Darsh remporte la partie est supérieure à celle de Carole si l'entier qu'il obtient est supérieur à celui de Carole pour au moins 5 des 9 résultats possibles.

Si Carole obtenait un 1, alors Darsh gagnerait puisque chacun de ses entiers doit être supérieur à 1.
Lorsque Carole obtient un 1, il y a 3 résultats gagnants pour Darsh car il peut obtenir a, b ou c (chacun étant supérieur à 1).
Si Carole obtenait un 10, alors Darsh perdrait puisque chacun de ses entiers doit être inférieur à 10.
Il y a 3 résultats possibles lorsque Carole obtient un 10, chacun de ces résultats représentant une perte pour Darsh.
Jusque-là, Darsh remporte 3 des résultats possibles si Carole obtient un 1 ou un 10.
Cela indique que l'on peut déterminer la probabilité pour que Darsh remporte la partie en comparant a, b, c avec le 5 obtenu par Carole sur son disque.
Plus précisément, si au moins deux des entiers de Darsh sont supérieurs à 5, alors la probabilité pour que Darsh remporte la partie est supérieure à celle de Carole (et l'inverse est vrai si au moins deux de ses entiers sont inférieurs à 5).
Pourquoi est-ce le cas ? Lorsque Carole obtient un 1, Darsh remporte les 3 résultats possibles. Lorsque Carole obtient un 10, Darsh ne remporte aucun des résultats possibles. Lorsque Carole obtient un 5, Darsh remporte au moins 2 résultats possibles uniquement lorsque deux de ses entiers sont supérieurs à 5. Donc, Darsh remporte au moins $3+0+2 = 5$ résultats sur les 9 résultats possibles (et Carole remporte 4 résultats ou moins).
Pour déterminer le nombre de disques différents pour lesquels au moins deux des entiers de Darsh sont supérieurs à 5, on considère les deux cas suivants.

1[er] cas : Les trois entiers de Darsh sont tous supérieurs à 5.

Dans ce cas, Darsh remporte 6 résultats sur les 9 résultats possibles, comme dans le tableau ci-contre. Les entiers que Darsh peut choisir sont 6, 7, 8 et 9. Donc, il y a 4 disques possibles dans ce cas : {6, 7, 8}, {6, 7, 9}, {6, 8, 9} et {7, 8, 9}.

Nombre que Darsh a obtenu

Nombre que Carole a obtenu

C \ D	a	b	c
1	D	D	D
5	D	D	D
10	C	C	C

2[e] cas : Parmi les entiers de Darsh, deux sont supérieurs à 5 et un est inférieur à 5.

Dans ce cas, Darsh remporte 5 résultats sur les 9 résultats possibles, comme dans le tableau ci-contre. Il y a 6 paires possibles d'entiers qui sont supérieurs à 5, soit {6, 7}, {6, 8}, {6, 9}, {7, 8}, {7, 9} et {8, 9}. Pour chacune de ces 6 paires, il y a 3 choix possibles pour l'entier inférieur à 5, soit 2, 3 et 4. Donc, il y a $6 \times 3 = 18$ disques possibles dans ce cas.

Nombre que Darsh a obtenu

Nombre que Carole a obtenu

C \ D	a	b	c
1	D	D	D
5	C	D	D
10	C	C	C

Donc, Darsh peut créer $4 + 18 = 22$ disques différents pour lesquels la probabilité qu'il remporte la partie est supérieure à celle de Carole.

(c) On détermine d'abord la valeur de p, soit la probabilité pour que François gagne contre Eloïse.
Ces résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous, où « F » indique que François a gagné et « E » qu'Eloïse a gagné.

Nombre que François a obtenu

Nombre qu'Eloïse a obtenu

E \ F	2	10	18
5	E	F	F
8	E	F	F
15	E	E	F

On constate que François remporte 5 résultats sur les 9 résultats possibles, donc $p = \frac{5}{9}$.
Selon l'énoncé, $p = q = r$. Donc, $q = r = \frac{5}{9}$. C'est-à-dire que la probabilité pour qu'Eloïse gagne contre Geneviève est égale à $\frac{5}{9}$ et la probabilité que Geneviève gagne contre François est également $\frac{5}{9}$. Cela signifie qu'Eloïse remporte exactement 5 résultats sur les 9 résultats possibles lorsqu'elle joue contre Geneviève. De même, Geneviève remporte exactement 5 résultats sur les 9 résultats possibles lorsqu'elle joue contre François.
Examinons d'abord le jeu où Eloïse et Geneviève s'affrontent.
Le disque d'Eloïse comporte les entiers {5, 8, 15}. Le disque de Geneviève comporte les

entiers $\{x, y, z\}$ avec $x < y < z$; x, y, z étant trois entiers distincts parmi

$$1, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 19, 20$$

Chacun des 3 entiers d'Eloïse (5, 8, 15) remporte 0, 1, 2 ou 3 résultats possibles.
Par exemple, si Eloïse obtient 15 et $15 > z$, alors Eloïse remporte les 3 résultats possibles (15 bat x, y et z).
À l'inverse, si Eloïse obtient 15 et $15 < x$, alors Eloïse ne remporte aucun résultat possible.
On remarque que si un disque comporte les entiers $\{p,q,r\}$ avec $p < q < r$, alors le nombre de résultats gagnants lorsqu'on obtient r doit être supérieur ou égal au nombre de résultats gagnants lorsqu'on obtient q ; ce dernier doit être supérieur ou égal au nombre de résultats gagnants lorsqu'on obtient p. Pouvez-vous expliquer pourquoi ?

Il y a trois manières différentes pour qu'Eloïse remporte exactement 5 résultats sur les 9 résultats possibles contre Geneviève :

- Le plus grand entier d'Éloïse remporte exactement 3 résultats, son deuxième plus grand entier remporte exactement 2 résultats et son plus petit entier ne remporte aucun résultat,
- Le plus grand entier d'Éloïse remporte exactement 3 résultats et ses deux autres entiers remportent chacun exactement 1 résultat ou
- Les deux plus grands entiers d'Éloïse remportent chacun exactement 2 résultats et son plus petit entier remporte exactement 1 résultat.

Soit ces trois scénarios respectivement les scénarios 3/2/0, 3/1/1 et 2/2/1.
On remarque que dans chaque cas, la somme des nombres de résultats gagnants est 5 et que ce sont les seules manières possibles pour qu'il y ait exactement 5 résultats gagnants.
Si le scénario 3/2/0 est l'issue du jeu entre Eloïse et Geneviève, alors Eloïse remporte les 3 résultats lorsqu'elle obtient 15, remporte 2 résultats lorsqu'elle obtient 8 et ne remporte aucun résultat lorsqu'elle obtient 5.
Rappelons que le disque de Geneviève comporte les entiers $\{x, y, z\}$ avec $x < y < z$. Cela signifie que si l'issue du jeu est le scénario 3/2/0, alors les six entiers des deux disques, en ordre croissant, sont :

$$5 < x < y < 8 < z < 15$$

Autrement dit, puisque 15 est supérieur à x, à y et à z, alors Eloïse remporte 3 résultats lorsqu'elle obtient 15. Puisque 8 est supérieur à x et à y, alors Eloïse remporte 2 résultats lorsqu'elle obtient 8. Puisque 5 est inférieur à x, à y et à z, alors Eloïse ne remporte aucun résultat lorsqu'elle obtient 5.
Donc, si Geneviève crée son disque avec $x = 6$, $y = 7$ et $z = 9$, 11, 12, 13 ou 14, alors la probabilité pour qu'Eloïse gagne contre Geneviève est égale à $\frac{5}{9}$ puisque Eloïse remportera exactement 5 résultats sur les 9 résultats possibles.

Si l'issue du jeu est le scénario 3/1/1, alors les six entiers des deux disques, en ordre croissant, sont :

$$x < 5 < 8 < y < z < 15$$

Dans ce cas, un résultat de 15 gagne 3 fois et des résultats de 5 et 8 gagnent chacun exactement une fois.
Donc, si Genevièvre crée son disque avec $x = 1, 3$ ou 4 et que y et z (avec $y < z$) sont choisis parmi 9, 11, 12, 13, 14, alors la probabilité pour qu'Eloïse gagne contre Geneviève est égale à $\frac{5}{9}$.

Enfin, si le scénario 2/2/1 est l'issue du jeu entre Eloïse et Geneviève, alors les six entiers des deux disques, en ordre croissant, sont :

$$x < 5 < y < 8 < 15 < z$$

donc $x = 1, 3$ ou 4, $y = 6$ ou 7 et $z = 16, 17, 19$ ou 20.

Ces résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Eloïse $\{5, 8, 15\}$ bat Geneviève $\{x, y, z\}$

Cas	Scénario	Ordre des entiers	x possible	y possible	z possible
1	3/2/0	$5 < x < y < 8 < z < 15$	6	7	9,11,12,13,14
2	3/1/1	$x < 5 < 8 < y < z < 15$	$1, 3, 4$	9,11,12,13,14	9,11,12,13,14
3	2/2/1	$x < 5 < y < 8 < 15 < z$	$1, 3, 4$	$6, 7$	$16, 17, 19, 20$

(Remarquons que dans le 2^{e} cas, les valeurs de y ne sont possibles que si $y < z$.)
Il faut également que le disque de Geneviève soit conçu de telle sorte que la probabilité pour que Geneviève batte François soit égale à $\frac{5}{9}$.
Dans le jeu où Geneviève et François s'affrontent, on utilise le même processus et la même notation que ceux que l'on a utilisé dans le jeu entre Eloïse et Geneviève.
De plus, d'après le tableau ci-dessus, on doit choisir x, y, z de manière que

$$x = 1, 3, 4 \text{ ou } 6 \text{ et } y = 6, 7, 9, 11, 12, 13 \text{ ou } 14 \text{ et } z = 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 19, \text{ou } 20$$

en notant à nouveau qu'il faut avoir $x < y < z$.
Dans le tableau ci-dessous, on exclut toutes les autres valeurs possibles de x, y, z qui ne figurent pas dans la liste ci-dessus.

Geneviève $\{x, y, z\}$ bat François $\{2, 10, 18\}$

Cas	Scénario	Ordre des entiers	x possible	y possible	z possible
4	3/2/0	$x < 2 < 10 < y < 18 < z$	1	11,12,13,14	19,20
5	3/1/1	$2 < x < y < 10 < 18 < z$	3,4,6	6,7,9	19,20
6	2/2/1	$2 < x < 10 < y < z < 18$	3,4,6	11,12,13,14	11,12,13,14,16,17

(Remarquons que dans les 5^{e} et 6^{e} cas, les valeurs de x et de y ne sont possibles que si $x < y < z$.)
Pour concevoir un disque qui permet à Eloïse de gagner contre Geneviève avec une probabilité de $\frac{5}{9}$ et à Geneviève de gagner contre François avec la même probabilité, on doit déterminer les valeurs de x, y, z qui satisfont au moins l'un des 1er, 2^{e} ou 3^{e} cas tout en satisfaisant simultanément au moins l'un des 4^{e}, 5^{e} ou 6^{e} cas.

On détermine d'abord s'il existe des valeurs de x, y, z qui satisfont le 1er cas tout en satisfaisant simultanément au moins l'un des 4^{e}, 5^{e} ou 6^{e} cas.
Pour satisfaire le 1er cas, on doit avoir $y = 7$ et $z = 9, 11, 12, 13$ ou 14. Cependant, aucun des 4^{e}, 5^{e} ou 6^{e} cas ne correspond à ces restrictions sur y et z. Il n'y a donc pas de disques qui soient conçus de telle sorte qu'Eloïse gagne contre Geneviève avec le scénario 3/2/0.

Ensuite, on détermine s'il existe des valeurs de x, y, z qui satisfont le 2^{e} cas tout en satisfaisant simultanément au moins l'un des 4^{e}, 5^{e} ou 6^{e} cas.
Pour satisfaire le 2^{e} cas, on doit avoir $z = 9, 11, 12, 13$ ou 14. Cependant, aucun des 4^{e} et 5^{e} cas ne correspond à ces restrictions sur z. Il nous reste donc à considérer les 2^{e} et 6^{e} cas.
Si $x = 3$ ou 4, et $y = 11, 12, 13$ ou 14, et $z = 11, 12, 13$ ou 14, alors les restrictions sur les 2^{e} et 6^{e} cas sont satisfaites.

En rappelant que $y < z$, il y a 6 paires (y, z) qui satisfont ces restrictions : $(y, z) = (11, 12), (11, 13), (11, 14), (12, 13), (12, 14), (13, 14)$.
Pour chacune de ces 6 paires, il y a 2 choix possibles pour x (x peut égaler 3 ou 4) et il y a donc $6 \times 2 = 12$ disques que Geneviève pourrait créer.

Enfin, on détermine s'il y a des valeurs de x, y, z qui satisfont le 3e cas tout en satisfaisant simultanément au moins l'un des 4e, 5e ou 6e cas.
Pour satisfaire le 3e cas, on doit avoir $y = 6$ ou 7. Cependant aucun des 4e et 6e cas ne correspond à ces restrictions sur y. Il nous reste donc à considérer les 3e et 5e cas.
Si $x = 3$ ou 4, et $y = 6$ ou 7, et $z = 19$ ou 20, alors les restrictions sur les 3e et 5e cas sont satisfaites.
Puisque x, y et z peuvent prendre 2 valeurs chacun, alors Geneviève peut créer $2 \times 2 \times 2 = 8$ disques (remarquons que chacun des 8 disques a $x < y < z$).

Puisque les $12 + 8 = 20$ disques sont différents les uns des autres, alors Geneviève peut créer 20 disques différents pour que $p = q = r = \frac{5}{9}$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2023

le mercredi 5 avril 2023
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 6 avril 2023
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Léon se repose pendant 30 s entre les 1[er] et 2[e] sprints, les 2[e] et 3[e] sprints et ainsi de suite jusqu'au 23[e] et 24[e] sprints inclus.
Donc, Léon se repose pendant 30 s à 23 reprises.

(b) Puisque Léon sprinte à une vitesse constante de 8 m/s, alors il lui faut $\dfrac{200 \text{ m}}{8 \text{ m/s}} = 25$ s pour parcourir 200 m.
Étant donné qu'il a fait un sprint de 200 m vingt-quatre fois, cela lui a pris 24×25 s $= 600$ s.
Puisque Léon se repose pendant 30 s à 23 reprises, il se reponse pendant 23×30 s $= 690$ s.
Donc, Léon s'est entraîné pendant 600 s $+$ 690 s $=$ 1290 s lundi.

(c) *Solution 1*
Mardi, chacun des sprints de 240 m lui prend $\dfrac{240 \text{ m}}{8 \text{ m/s}} = 30$ s. Donc, Léon sprinte pendant 20×30 s $= 600$ s.
Léon se repose 19 fois. Il se repose donc pendant 19×30 s $= 570$ s en tout.
Donc, le temps total pendant lequel il s'est entraîné mardi est égal à 600 s$+$570 s $=$ 1170 s.
Donc, l'entraînement de mardi a duré $1290 - 1170 = 120$ secondes de moins par rapport à celui de lundi.

Solution 2
Lundi, Léon parcourt 24×200 m $= 4800$ m en sprintant.
Mardi, Léon parcourt également 20×240 m $= 4800$ m en sprintant.
Puisque Léon sprinte à la même vitesse constante les deux jours, alors il sprinte pendant le même montant de temps chaque jour.
Donc, la différence entre le temps total pendant lequel il s'est entraîné lundi et le temps total pendant lequel il s'est entraîné mardi est égale à la différence entre le temps pendant lequel il s'est reposé lundi et le temps pendant lequel il s'est reposé mardi.
Lundi, Léon se repose pendant 30 s à 23 reprises. Mardi, Léon se répose pendant 30 s à 19 reprises.
Comme il se repose 4 fois de plus le lundi que le mardi, alors l'entraînement de mardi a duré $4 \times 30 = 120$ secondes de moins par rapport à celui de lundi.

2. (a) La 5[e] rangée comprend les entiers 17, 19, 21, 23 et 25. Ces entiers ont une moyenne de $\dfrac{17 + 19 + 21 + 23 + 25}{5} = 21$.

(b) La rangée dans laquelle l'entier 145 parait à la 1[re] position doit suivre directement la rangée dans laquelle l'entier 144 parait à la dernière position.
Puisque $12^2 = 144$, alors l'entier 144 parait à la dernière position de la 12[e] rangée. Donc, l'entier 145 parait à la 1[re] position de la 13[e] rangée.

(c) Puisque $40^2 = 1600$, alors l'entier qui parait à la dernière position (soit la 40[e] position) de la 40[e] rangée est 1600.
Lorsque l'on se déplace de droite à gauche le long de chaque rangée, les entiers diminuent de 2. Donc, l'entier qui parait à la 39[e] position de la 40[e] rangée est $1600 - 2 = 1598$.

(d) *Solution 1*
Lorsque l'on se déplace de gauche à droite le long d'une rangée, les entiers augmentent d'une constante (soit 2). Donc, la moyenne des entiers dans une rangée est égale à la moyenne des entiers aux première et dernière positions de la rangée. Pouvez-vous voir pourquoi cela est vrai ?
Puisque $15^2 = 225$, alors l'entier qui parait à la dernière position de la 15[e] rangée est 225, d'où celui qui parait à la 1[re] position de la 16[e] rangée est donc 226.
Puisque $16^2 = 256$, alors l'entier qui parait à la dernière position de la 16[e] rangée est 256.

Donc, les entiers de la 16^e rangée ont une moyenne de $\dfrac{226+256}{2} = 241$, d'où $r = 16$.

Solution 2

Puisque $15^2 = 225$, alors chacun des entiers dans les 15 premières rangées est au plus 225. Cela signifie que la moyenne des entiers dans chaque rangée jusqu'à la 15^e rangée incluse doit être inférieure ou égale à 225.

Puisque $16^2 = 256$, chacun des entiers dans les rangées après la 16^e rangée est supérieur à 256. Cela signifie que chaque rangée après la 16^e contient des entiers dont la moyenne est supérieure à 256.

Cela signifie que r doit être supérieur à 15 et inférieur à 17. Autrement dit, $r = 16$.

On peut vérifier que les entiers de la 16^e rangée sont

$$226, 228, 230, 232, 234, 236, 238, 240, 242, 244, 246, 248, 250, 252, 254, 256$$

et que ces derniers ont effectivement une moyenne de 241.

3. (a) L'entier strictement positif de cinq chiffres $4B5B2$ est divisible par 3 uniquement lorsque la somme de ses chiffres, soit $4+B+5+B+2 = 2B+11$, est divisible par 3.

Dans le tableau ci-dessous, on vérifie les valeurs possibles de B :

Valeur de B	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Valeur de $2B+11$	13	15	17	19	21	23	25	27	29

On voit donc que $2B+11$ est divisible par 3 lorsque $B = 2$, $B = 5$ et $B = 8$.

(b) *Solution 1*

Puisque $ABABA$ n'est pas divisible par 3, alors $A+B+A+B+A = 3A+2B$ n'est pas divisible par 3.

Puisque $3A$ est divisible par 3 pour toutes les valeurs possibles du chiffre A, alors si $2B$ était également divisible par 3 (c'est-à-dire si $B = 3, 6, 9$), il en résulterait que $3A+2B$ serait divisible par 3.

Puisque $3A+2B$ n'est pas divisible par 3, alors $2B$ ne peut être divisible par 3, d'où les valeurs possibles de B sont donc 1, 2, 4, 5, 7, 8.

Puisque $ABABA$ est divisible par 4, alors l'entier strictement positif de deux chiffres BA est divisible par 4.

Pour chacune des valeurs possibles de B (soit $B = 1, 2, 4, 5, 7, 8$) on détermine les valeurs de A telles que BA soit divisible par 4 .

Par exemple, lorsque $B = 1$, l'entier strictement positif de deux chiffres $1A$ est divisible par 4 uniquement lorsque $A = 2$ ou $A = 6$.

Dans le tableau ci-dessous, on détermine le restant des paires possibles A et B.

B	A	(A,B)
1	2, 6	$(2,1)$, $(6,1)$
2	4, 8	$(4,2)$, $(8,2)$
4	4, 8	$(4,4)$, $(8,4)$
5	2, 6	$(2,5)$, $(6,5)$
7	2, 6	$(2,7)$, $(6,7)$
8	4, 8	$(4,8)$, $(8,8)$

Donc, il y a 12 paires différentes de chiffres non nuls A et B qui sont possibles.

Solution 2

Puisque $ABABA$ est divisible par 4, alors il est également divisible par 2. L'entier $ABABA$ est donc pair.

Puisque $ABABA$ est pair, alors son chiffre des unités est pair, d'où les valeurs possibles de A sont donc 2, 4, 6, 8.

Puisque $ABABA$ est divisible par 4, alors l'entier strictement positif de deux chiffres BA est divisible par 4.

Pour chacune des valeurs possibles de A (soit $A = 2$, 4, 6, 8) on détermine les valeurs de B telles que BA soit divisible par 4 .

Par exemple, lorsque $A = 2$, l'entier strictement positif de deux chiffres $B2$ est divisible par 4 uniquement lorsque $B = 1$, 3, 5, 7 et 9.

Lorsque $A = 4$, l'entier strictement positif de deux chiffres $B4$ est divisible par 4 uniquement lorsque $B = 2$, 4, 6 et 8.

Lorsque $A = 6$, l'entier strictement positif de deux chiffres $B6$ est divisible par 4 uniquement lorsque $B = 1$, 3, 5, 7 et 9.

Lorsque $A = 8$, l'entier strictement positif de deux chiffres $B8$ est divisible par 4 uniquement lorsque $B = 2$, 4, 6 et 8.

Enfin, considérons le fait que $ABABA$ n'est pas divisible par 3.

Comme on l'a démontré dans la Solution 1, les valeurs possibles de B sont 1, 2, 4, 5, 7, 8 ($B \neq 3, 6, 9$).

Lorsqu'on prend cela et les valeurs précédentes de A et B en compte, on a que les couples différents de chiffres non nuls (A, B) qui sont possibles sont $(2, 1)$, $(2, 5)$, $(2, 7)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$, $(4, 8)$, $(6, 1)$, $(6, 5)$, $(6, 7)$, $(8, 2)$, $(8, 4)$ et $(8, 8)$.

Donc, il y a 12 paires différentes de chiffres non nuls A et B qui sont possibles.

(c) Si $t = ACA2 \times BAC$ est divisible par 15, alors t est divisible à la fois par 5 et par 3.

Un entier est divisible par 5 uniquement lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5. Donc, $ACA2$ n'est pas divisible par 5.

Puisque $t = ACA2 \times BAC$ est divisible par 5 et que $ACA2$ ne l'est pas, alors BAC doit être divisible par 5, ce qui signifie que $C = 5$ (puisque C est un chiffre non nul).

Lorsqu'on reporte $C = 5$ dans l'équation, on obtient $t = A5A2 \times BA5$.

Puisque t est divisible par 3 et que 3 est un nombre premier, alors au moins l'un de $A5A2$ ou $BA5$ est divisible par 3. Donc, $A + 5 + A + 2 = 2A + 7$ est divisible par 3, ou $B + A + 5$ est divisible par 3, ou les deux sont divisibles par 3.

Puisque t n'est pas divisible par 12 mais que t est divisible par 3, alors t n'est pas divisible par 4.

L'entier de trois chiffres $BA5$ n'est pas divisible par 2 (et n'est donc pas divisible par 4) pour toutes les valeurs possibles de A. Donc, l'entier de quatre chiffres $A5A2$ n'est pas divisible par 4.

L'entier de quatre chiffres $A5A2$ est divisible par 4 lorsque l'entier de deux chiffres $A2$ est divisible par 4 ou lorsque $A = 1$, 3, 5, 7 ou 9. Donc, les valeurs possibles de A sont 2, 4, 6 et 8.

Enfin, on retourne à la condition selon laquelle $t = A5A2 \times BA5$ est divisible par 3, ce qui signifie qu'au moins l'un de $2A + 7$ ou $B + A + 5$ est divisible par 3.

Lorsque $A = 2$, alors $2A+7 = 11$, ce qui n'est pas divisible par 3. Donc, $B+A+5 = B+7$ doit être divisible par 3. $B + 7$ est divisible par 3 uniquement lorsque $B = 2$, 5 ou 8. Donc, il y a 3 triplets A, B, C qui sont possibles dans ce cas.

Lorsque $A = 4$, alors $2A + 7 = 15$, ce qui est divisible par 3, d'où on a donc que B peut être égal à n'importe quel chiffre non nul. Donc, il y a 9 triplets A, B, C qui sont possibles dans ce cas.

Lorsque $A = 6$, alors $2A+7 = 19$, ce qui n'est pas divisible par 3. Donc, $B+A+5 = B+11$ doit être divisible par 3. $B+11$ est divisible par 3 uniquement lorsque $B = 1$, 4 ou 7. Donc, il y a 3 triplets A, B, C qui sont possibles dans ce cas.

Lorsque $A = 8$, alors $2A+7 = 23$, ce qui n'est pas divisible par 3. Donc, $B+A+5 = B+13$ doit être divisible par 3. $B+13$ est divisible par 3 uniquement lorsque $B = 2$, 5 ou 8. Donc, il y a 3 triplets A, B, C qui sont possibles dans ce cas.

Donc, il y a $3 + 9 + 3 + 3 = 18$ triplets différentes de chiffres non nuls A, B, C qui sont possibles.

4. (a) L'ordinateur 1 est un ordinateur impair. Donc, chaque cordon reliant l'ordinateur 1 à un autre ordinateur impair est rouge.
Donc, il existe un chemin composé entièrement de cordons rouges reliant l'ordinateur 1 et chacun des ordinateurs impairs de 3 à 49 inclus.
Chaque cordon qui relie un ordinateur impair et un ordinateur pair est bleu.
L'ordinateur 1 est un ordinateur impair. Donc, tout chemin possible reliant l'ordinateur 1 à un ordinateur pair doit comprendre au moins un cordon bleu.
Il n'existe donc aucun chemin composé entièrement de cordons rouges reliant l'ordinateur 1 à un ordinateur pair.
Il y a 24 nombres impairs entre 2 et 50. Donc, il y a 24 valeurs possibles de n.

(b) Deux entiers sont dits de *parité différente* si l'un des entiers est pair tandis que l'autre est impair.
En revanche, deux entiers sont dits de *même parité* s'ils sont tous deux pairs ou tous deux impairs.
Il y a deux cas à considérer : A et B sont soit de parité différente, soit de même parité.
Si A et B sont de parité différente, alors le cordon reliant l'ordinateur A et l'ordinateur B est bleu. Il existe donc un chemin composé entièrement de cordons bleus qui les relie.
Si A et B sont de même parité, alors on choisit un nombre C qui a une parité différente de celle de A et B.
Le cordon reliant l'ordinateur A et l'ordinateur C est bleu et le cordon reliant l'ordinateur C et l'ordinateur B est également bleu. Donc, le chemin qui mène de l'ordinateur A à l'ordinateur C et ensuite à l'ordinateur B est composé entièrement de cordons bleus.
Donc, pour toute paire d'ordinateurs distincts, soit l'ordinateur A et l'ordinateur B, il y a toujours un chemin composé entièrement de cordons bleus qui les relie.

(c) Si le cordon reliant l'ordinateur 13 et l'ordinateur 14 est jaune, alors il y a un chemin composé entièrement de cordons jaunes qui les relie. Donc, supposons que le cordon qui les relie est vert.
Puisqu'il n'existe aucun chemin composé entièrement de cordons verts reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 50, alors le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 50 doit être jaune.
De plus, puisqu'il n'existe aucun chemin composé entièrement de cordons verts reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 50, alors au moins une des affirmations suivantes doit être vraie :

(i) le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 13 est jaune ou

(ii) le cordon reliant l'ordinateur 13 et l'ordinateur 50 est jaune,

sinon le chemin reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 13 serait composé entièrement de cordons verts.
De même, puisqu'il n'existe aucun chemin composé entièrement de cordons verts reliant

l'ordinateur 1 et l'ordinateur 50, alors au moins une des affirmations suivantes doit être vraie :

(iii) le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 14 est jaune ou

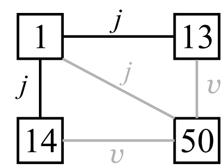
(iv) le cordon reliant l'ordinateur 14 et l'ordinateur 50 est jaune,

sinon le chemin reliant l'ordinateur 1 à l'ordinateur 14 à l'ordinateur 50 serait composé entièrement de cordons verts.

Puisqu'au moins l'un de (i) ou (ii) doit être vrai et qu'au moins l'un de (iii) ou (iv) doit être vrai, alors il y a 4 cas à considérer.

Cas A : (i) et (iii) sont vrais

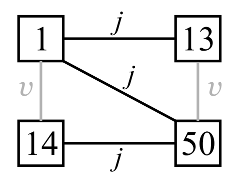
Dans ce cas, le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 13 est jaune et le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 14 est jaune. Donc, le chemin reliant l'ordinateur 13 à l'ordinateur 1 à l'ordinateur 14 est composé entièrement de cordons jaunes.



Cas B : (i) et (iv) sont vrais

Dans ce cas, le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 13 est jaune et le cordon reliant l'ordinateur 14 et l'ordinateur 50 est jaune.

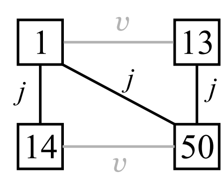
Rappelons-nous que le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 50 est également jaune. Donc, le chemin reliant l'ordinateur 13 à l'ordinateur 1 à l'ordinateur 50 à l'ordinateur 14 est composé entièrement de cordons jaunes.



Cas C : (ii) et (iii) sont vrais

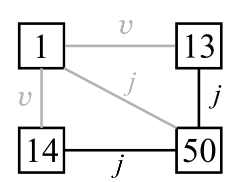
Dans ce cas, le cordon reliant l'ordinateur 13 et l'ordinateur 50 est jaune et le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 14 est jaune.

Puisque le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 50 est également jaune, alors le chemin reliant l'ordinateur 13 à l'ordinateur 50 à l'ordinateur 1 à l'ordinateur 14 est composé entièrement de cordons jaunes.



Cas D : (ii) et (iv) sont vrais

Dans ce cas, le cordon reliant l'ordinateur 13 et l'ordinateur 50 est jaune et le cordon reliant l'ordinateur 14 et l'ordinateur 50 est jaune. Donc, le chemin reliant l'ordinateur 13 à l'ordinateur 50 à l'ordinateur 14 est composé entièrement de cordons jaunes.



Donc, s'il n'existe aucun chemin composé entièrement de cordons verts reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 50, alors il y aura toujours un chemin composé entièrement de cordons jaunes reliant l'ordinateur 13 et l'ordinateur 14.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2022

le mardi 12 avril 2022
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 13 avril 2022
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Chaque lancer réussi ajoute 7 points au pointage de Sébastien. Donc, 4 lancers réussis ajoutent $7 \times 4 = 28$ points à son pointage.
Pour chaque lancer raté, 3 points sont soustraits du pointage de Sébastien. Donc, 2 lancers ratés enlèvent $3 \times 2 = 6$ points de son pointage.
Étant donné qu'un joueur commence toujours avec un pointage de 0, alors le pointage de Sébastien après ses 6 lancers est égal à $28 - 6 = 22$.

(b) *Solution 1*
Après exactement h lancers réussis et 6 lancers ratés, le pointage de Suzanne peut être représenté par l'expression $7 \times h - 3 \times 6$ ou $7h - 18$.
Après ses lancers, Suzanne a un pointage de 59. Donc, $7h - 18 = 59$.
On a donc $7h = 59 + 18$ ou $7h = 77$, soit $h = 11$.

Solution 2
Les 6 lancers ratés de Suzanne enlèvent $3 \times 6 = 18$ points de son pointage.
Puisqu'elle a 59 points, alors Suzanne a dû obtenir $59 + 18 = 77$ points à partir de lancers réussis.
Puisque chaque lancer réussi vaut 7 points, alors la valeur de h est égale à $77 \div 7 = 11$.

(c) *Solution 1*
On commence en faisant une estimation initiale de la valeur de m, puis on ajuste systématiquement cette valeur à la hausse ou à la baisse selon les besoins.
Par exemple, si l'on commence avec $m = 3$, alors le nombre de lancers réussis est égal à $20 - 3 = 17$ et le pointage de Souresh est égal à $7 \times 17 - 3 \times 3 = 119 - 9 = 110$.
Puisque ce pointage est supérieur à 105, alors la valeur de m est supérieure à 3 (plus on rate de lancers, moins on en réussit, ce qui résulte en un pointage plus bas).
Lorsque $m = 4$, le nombre de lancers réussis est égal à $20-4 = 16$ et Souresh a un pointage de $7 \times 16 - 3 \times 4 = 112 - 12 = 100$.
Puisque ce pointage est supérieur à 85 et inférieur à 105, alors 4 est une valeur possible de m.
Lorsque $m = 5$, le nombre de lancers réussis est égal à $20-5 = 15$ et Souresh a un pointage de $7 \times 15 - 3 \times 5 = 105 - 15 = 90$.
Ce pointage est également supérieur à 85 et inférieur à 105, alors 5 est une valeur possible de m.
Lorsque $m = 6$, le nombre de lancers réussis est égal à 14 et Souresh a un pointage de $7 \times 14 - 3 \times 6 = 98 - 18 = 80$.
Puisque ce pointage est inférieur à 85, alors 6 n'est pas une valeur possible de m.
Si l'on augmente le nombre de lancers ratés, le pointage de Souresh continuera à diminuer.
Donc, les seules valeurs possibles sont $m = 4$ et $m = 5$.

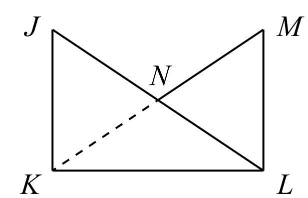
Solution 2
Puisque Souresh effectue 20 lancers dont m sont des lancers ratés, alors les $20 - m$ lancers restants sont des lancers réussis.
Après exactement $20 - m$ lancers réussis et m lancers ratés, le pointage de Souresh peut être représenté par l'expression $7(20 - m) - 3m$ ou $140 - 10m$.
Puisque le pointage de Souresh $(140-10m)$ est supérieur à 85, alors $10m$ doit être inférieur à 55 (remarquons que $140 - 85 = 55$), d'où $m < \frac{55}{10}$.
Puisque $\frac{55}{10} = 5\frac{1}{2}$ et que m est un entier strictement positif, alors $m \leq 5$.
Puisque le pointage de Souresh est inférieur à 105, alors $10m$ doit être supérieur à 35 (remarquons que $140 - 105 = 35$), d'où $m > \frac{35}{10}$.
Puisque $\frac{35}{10} = 3\frac{1}{2}$ et que m est un entier strictement positif, alors $m \geq 4$.

Donc, m est un entier strictement positif et $4 \le m \le 5$, d'où $m = 4$ ou $m = 5$.
(On peut vérifier que le pointage de Souresh est égal à $7 \times 16 - 3 \times 4 = 112 - 12 = 100$ lorsque $m = 4$ et à $7 \times 15 - 3 \times 5 = 105 - 15 = 90$ lorsque $m = 5$.)

2. (a) *Solution 1*
L'aire de $ABGH$ est égale à la somme des aires de $ABCD$ et $EFGH$ moins l'aire du chevauchement $EFCD$ puisqu'elle est prise en compte deux fois dans cette somme.
Donc, l'aire de $ABGH$ est égale à $(13\text{ cm}^2) + (13\text{ cm}^2) - (5\text{ cm}^2) = 21\text{ cm}^2$.

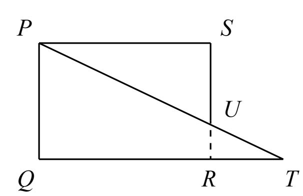
Solution 2
L'aire de $ABCD$ est égale à 13 cm^2 et à la somme des aires de $ABFE$ et $EFCD$.
Puisque l'aire de $EFCD$ est égale à 5 cm^2, alors l'aire de $ABFE$ est égale à $(13\text{ cm}^2) - (5\text{ cm}^2) = 8\text{ cm}^2$.
L'aire de $ABGH$ est égale à la somme des aires de $ABFE$ et $EFGH$, soit $(8\text{ cm}^2) + (13\text{ cm}^2) = 21\text{ cm}^2$.

(b) Soit $x\text{ cm}^2$ l'aire de la région où les deux triangles se chevauchent (soit le triangle KLN).



L'aire du triangle KLN est égale à la moitié de l'aire du triangle JKL. Donc, le triangle JKN a également une aire de $x\text{ cm}^2$.
Puisque les triangles JKL et MLK sont identiques, alors le triangle MLN a également une aire de $x\text{ cm}^2$.
Donc, la figure $JKLMN$ a une aire de $3x\text{ cm}^2$. On a donc $3x = 48$ ou $x = 16$.
Puisque le triangle JKL est rectangle en K, alors son aire est égale à $\frac{1}{2}(JK)(KL)$.
Puisque l'aire du triangle JKL est égale à $2x\text{ cm}^2 = 32\text{ cm}^2$, alors $\frac{1}{2}(JK)(KL) = 32\text{ cm}^2$ ou $\frac{1}{2}(6\text{ cm})(KL) = 32\text{ cm}^2$, d'où $KL = \frac{32}{3}\text{ cm}$.

(c) On utilise la notation $|\triangle URT|$ pour représenter l'aire du triangle URT et on représente les aires des autres formes de la même manière.



Puisque $|PQRS| + |\triangle URT| = |PQTUS|$, alors

$$|\triangle URT| = |PQTUS| - |PQRS| = 117\text{ cm}^2 - 108\text{ cm}^2 = 9\text{ cm}^2.$$

Puisque $|PQRU| + |\triangle URT| = |\triangle PQT|$, alors

$$|PQRU| = |\triangle PQT| - |\triangle URT| = 81\text{ cm}^2 - 9\text{ cm}^2 = 72\text{ cm}^2.$$

3. (a) La factorisation première de $675 = 3^3 \times 5^2$. Donc, 675 admet $4 \times 3 = 12$ diviseurs positifs.

(b) L'entier strictement positif n admet $4 + 14 = 18$ diviseurs positifs en tout.
Puisque n admet les diviseurs positifs $9 = 3^2$, 11, $15 = 3 \times 5$ et $25 = 5^2$, alors la factorisation première de n doit comprendre au moins deux facteurs 3, au moins deux facteurs 5 et au moins un facteur 11.
En d'autres termes, n doit admettre $3^2 \times 5^2 \times 11$ comme diviseur.
Supposons que $n = 3^2 \times 5^2 \times 11$. Alors n admet $3 \times 3 \times 2 = 18$ diviseurs positifs, comme souhaité.
Si la factorisation première de n contenait plus de facteurs, alors n admettrait plus de 18 diviseurs positifs.
Donc, $n = 3^2 \times 5^2 \times 11 = 2475$.

(c) Supposons que m est un entier strictement positif inférieur à 500 qui admet exactement $2 + 10 = 12$ diviseurs positifs.
Puisque m admet les diviseurs positifs 2 et $9 = 3^2$, alors la factorisation première de m doit comprendre au moins un facteur 2 et au moins deux facteurs 3.
En d'autres termes, m doit admettre 2×3^2 comme diviseur.
Pour commencer, supposons que m a exactement 2 facteurs premiers distincts.
C'est-à-dire qu'on suppose que $m = 2^a \times 3^b$, a et b étant des entiers tels que $a \geq 1$ et $b \geq 2$.
Dans ce cas, m admet $(a + 1)(b + 1) = 12$ diviseurs positifs.
Puisque $a \geq 1$ et $b \geq 2$, alors $a + 1 \geq 2$ et $b + 1 \geq 3$.
À partir de ces restrictions, il y a exactement trois possibilités pour lesquelles $(a + 1)(b + 1) = 12$. Ces dernières sont

$$a + 1 = 2 \text{ et } b + 1 = 6, \text{ d'où } a = 1 \text{ et } b = 5$$

$$a + 1 = 3 \text{ et } b + 1 = 4, \text{ d'où } a = 2 \text{ et } b = 3$$

$$a + 1 = 4 \text{ et } b + 1 = 3, \text{ d'où } a = 3 \text{ et } b = 2$$

Si $a = 1$ et $b = 5$, alors $m = 2 \times 3^5 = 486$.
Si $a = 2$ et $b = 3$, alors $m = 2^2 \times 3^3 = 108$.
Si $a = 3$ et $b = 2$, alors $m = 2^3 \times 3^2 = 72$.
Puisque chacune de ces valeurs est inférieure à 500, alors il y a 3 entiers strictement positifs dans ce cas qui satisfont aux conditions données.

Ensuite, supposons que m a exactement 3 facteurs premiers distincts.
C'est-à-dire qu'on suppose que $m = 2^a \times 3^b \times p^c$, p étant un nombre premier qui n'est pas égal à 2 ou à 3, et a, b et c étant des entiers tels que $a \geq 1$, $b \geq 2$ et $c \geq 1$.
Si $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$ (les valeurs minimales possibles de a, b, c), alors $m = 2 \times 3^2 \times p$.
Dans ce cas, m admet $2 \times 3 \times 2 = 12$ diviseurs positifs, comme souhaité.
Le fait d'augmenter a, b ou c augmente le nombre de diviseurs positifs. Donc, $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$ est la seule possibilité pour laquelle m admet 12 diviseurs positifs et a 3 facteurs premiers distincts.
Si $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$, alors $m = 2 \times 3^2 \times p = 18p$.
Quels nombres premiers $p > 3$ sont tels que $18p$ soit inférieur à 500 ?
Puisque $18p < 500$, alors $p < \frac{500}{18}$, d'où $p \leq 27$.
Les nombres premiers de cet intervalle sont 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23. Dans ce cas, on a donc 7 entiers strictement positifs qui satisfont aux conditions données.

Enfin, supposons que m a exactement 4 facteurs premiers distincts.
C'est-à-dire qu'on suppose que $m = 2^a \times 3^b \times p^c \times q^d$, p et q étant des nombres premiers différents qui ne sont pas égaux à 2 ou à 3, et a, b, c, d étant des entiers tels que $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 1$ et $d \geq 1$.
Si $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ et $d = 1$ (les valeurs minimales possibles de a, b, c, d), alors m admet $2 \times 3 \times 2 \times 2 = 24$ diviseurs positifs, ce qui est une contradiction.
Le fait d'augmenter a, b, c ou d, ou le fait d'augmenter le nombre de facteurs premiers distincts augmente le nombre de diviseurs positifs. Donc, il n'y a pas de possibilités telles que m admette 12 diviseurs positifs et ait 4 facteurs premiers distincts ou plus.

Donc, il y a $3 + 7 = 10$ entiers strictement positifs inférieurs à 500 qui admettent 2, 9 et exactement dix autres entiers comme diviseurs positifs.

4. (a) Puisque l'un des bocaux contient 0 haricot, alors tous les haricots doivent être retirés du bocal qui en contient 40.

Aux tours de François, le nombre de haricots qu'il retire est de 1, 3, 4, 1, 3, 4, ... et ainsi de suite.
Après les 5 tours de François, il aura retiré un total de $1 + 3 + 4 + 1 + 3 = 12$ haricots.
Aux tours de Sarah, le nombre de haricots qu'elle retire est de 2, 5, 2, 5, 2, 5, ... et ainsi de suite.
Après les 5 tours de Sarah, elle aura retiré un total de $2 + 5 + 2 + 5 + 2 = 16$ haricots.
Après un total de 10 tours, le nombre total de haricots retirés par François et Sarah est inférieur à 40. On comprend donc que chacun des deux joueurs a pu retirer le nombre de haricots requis à chacun de ses 5 tours.
Après un total de 10 tours, le nombre total de haricots restant dans les deux bocaux est égal à $40 - (12 + 16) = 40 - 28 = 12$.

(b) Puisque l'un des bocaux contient 0 haricot, alors tous les haricots doivent être retirés du bocal qui en contient 384.
À chaque série de trois tours de François, il doit essayer de retirer $1, 3$ et 4 haricots, ce qui est un cycle de longueur 3.
À chaque série de deux tours de Sarah, elle doit essayer de retirer 2 et 5 haricots, ce qui est un cycle de longueur 2.
Puisque 6 est le plus petit commun multiple de 3 et 2, alors après que chaque joueur ait joué 6 fois (12 tours au total), ils seront chacun au début de leur cycle.
Après les 12 premiers tours (François et Sarah ont chacun joué 6 fois), François aura retiré

$$1 + 3 + 4 + 1 + 3 + 4 = 2(1 + 3 + 4) = 16 \text{ haricots,}$$

et Sarah aura retiré

$$2 + 5 + 2 + 5 + 2 + 5 = 3(2 + 5) = 21 \text{ haricots.}$$

À chaque cycle de 12 tours, François retire en tout 16 haricots et Sarah retire en tout 21 haricots.
À partir du début de la partie, ils retirent ensemble $16+21 = 37$ haricots tous les 12 tours.
Après 10 tels cycles de 12 tours, (soit un total de $10 \times 12 = 120$ tours), le nombre total de haricots retirés est égal à $10 \times 37 = 370$, d'où il reste donc $384 - 370 = 14$ haricots dans le bocal.
Après ces 120 tours, François et Sarah seront chacun au début de leur cycle de tours et c'est au tour de François de jouer.
Au 121^{e} tour, François retire 1 haricot et il reste donc $14 - 1 = 13$ haricots.
Au 122^{e} tour, Sarah retire 2 haricots et il reste donc $13 - 2 = 11$ haricots.
Au 123^{e} tour, François retire 3 haricots et il reste donc $11 - 3 = 8$ haricots.
Au 124^{e} tour, Sarah retire 5 haricots et il reste donc $8 - 5 = 3$ haricots.
C'est au tour de François de jouer. Or, il ne peut retirer le nombre requis de haricots (soit 4). Par conséquent, François perd et Sarah gagne après exactement $n = 124$ tours.

(c) On utilise la notation Tn pour représenter le tour n et (x, y) pour représenter la manière dont les haricots sont répartis ; soit x haricots dans un bocal et y dans l'autre bocal.
Lorsque la partie commence, les haricots sont répartis de la manière $(17, 6)$, soit un total de $17 + 6 = 23$ haricots.
Après T4 (2 tours chacun), François a retiré $1 + 3 = 4$ haricots et Sarah a retiré $2 + 5 = 7$ haricots.
Donc, après T4, il reste un total de $23 - (4 + 7) = 12$ haricots dans les bocaux.
Puisqu'il reste 12 haricots, au moins un des bocaux doit contenir 6 haricots ou plus, car si

les deux bocaux contenaient moins de 6 haricots, le nombre total de haricots serait d'au plus $5 + 5 = 10$.
Puisqu'au moins un des bocaux contient 6 haricots ou plus, alors François peut retirer 4 haricots au T5. Il reste donc $12 - 4 = 8$ haricots.
Puisqu'il reste 8 haricots, au moins un des bocaux doit contenir 4 haricots ou plus, alors Sarah peut retirer 2 haricots au T6 et François peut retirer 1 haricot au T7.
Après T7 (François a donc joué 4 fois et Sarah joué 3 fois), le nombre total de haricots restant dans les bocaux est égal à $8 - (2 + 1) = 5$.
Sarah doit retirer 5 haricots au T8 (soit le 4^{e} tour de Sarah).
Si les haricots sont répartis de la manière $(5, 0)$, alors Sarah retirera les 5 haricots et gagnera au T8.
En revanche, si les haricots sont répartis de la manière $(4, 1)$ ou $(3, 2)$, alors Sarah ne pourra retirer 5 haricots et perdra le jeu (François sera donc vainqueur).

Pour résumer :
- Aucun joueur ne peut gagner du T1 au T6.
- Après le T7, il reste 5 haricots en tout dans les deux bocaux.
- Au T8, c'est au tour de Sarah de jouer et elle doit retirer 5 haricots.
- Après le T7, François gagne s'il fait de sorte que les haricots soient répartis de la manière $(4, 1)$ ou $(3, 2)$ après son tour.
- Après le T7, François perdra si les haricots sont répartis de la manière $(5, 0)$ après son tour (Sarah gagnera au T8)

Donc, François a une stratégie gagnante s'il peut s'assurer que les 5 derniers haricots ne sont pas tous dans un seul bocal, sinon c'est Sarah qui a une stratégie gagnante.

François a la stratégie gagnante.
On résume sa stratégie ci-dessous et on explique pourquoi cette stratégie lui garantit une victoire.
La stratégie de François :
- Retirer 1 haricot du bocal contenant 17 haricots au T1
- Retirer 3 haricots du bocal contenant le moins de haricots au T3
- Retirer les haricots du bocal contenant le plus grand nombre de haricots au T5 et T7.

Au T1, François retire 1 haricot du bocal contenant 17 haricots. Les haricots sont répartis de la manière $(16, 6)$ après ce tour.
Au T2, Sarah retire 2 haricots de l'un des bocaux. Les haricots sont répartis de la manière $(14, 6)$ ou de la manière $(16, 4)$ après ce tour.
Au T3, François retire 3 haricots du bocal contenant le moins de haricots.
Donc, après exactement 3 tours, les haricots sont répartis de la manière $(14, 3)$ ou de la manière $(16, 1)$.
Du T4 au T7 inclusivement, on retire $5 + 4 + 2 + 1 = 12$ haricots de plus.
Donc, dans chacun des deux cas ci-dessus, le bocal contenant le plus grand nombre de haricots (14 et 16) ne peut pas être vidé.
Sarah peut-elle vider un bocal qui contient 3 haricots ou qui contient 1 haricot sans que François ne retire aucun haricot de ces bocaux ?
Puisque Sarah peut retirer 2 ou 5 haricots à chacun de ses tours, elle ne pourra pas retirer exactement 3 haricots et elle ne pourra pas non plus retirer exactement 1 haricot.
Cela signifie que pour chacun des deux cas ci-dessus, Sarah ne pourra pas vider l'un ou l'autre des bocaux.
Par conséquent, après exactement 7 tours, les bocaux contiendront $(2, 3)$, ou $(4, 1)$. Donc Sarah perdra puisqu'elle ne pourra pas retirer 5 haricots au T8.

(d) Il y a $2023 + 2022 = 4045$ haricots en tout au début de la partie.
Comme dans la partie (b), 37 haricots sont retirés tous les 12 tours à partir du début de la partie.
Après 109 tels cycles de 12 tours (soit un total de $109 \times 12 = 1308$ tours), le nombre total de haricots retirés est égal à $109 \times 37 = 4033$, d'où il reste donc $4045 - 4033 = 12$ haricots dans le bocal.
Après 1308 tours, François et Sarah seront chacun au début de leur cycle de tours et ce sera au tour de François de jouer.
Puisqu'il reste 12 haricots, au moins un des bocaux doit contenir 6 haricots ou plus, cela signifie que François et Sarah ont pu retirer le nombre de haricots requis à chacun des 1308 premiers tours.

À partir de ce point du jeu, le gagnant est déterminé par la manière dont les 12 haricots sont répartis entre les deux bocaux.
Par exemple, supposons que les 12 derniers haricots sont répartis de la manière $(12, 0)$.
François en retire 1, Sarah en retire 2, François en retire 3, Sarah en retire 5 et il reste donc $12 - (1 + 2 + 3 + 5) = 1$ haricot.
Au tour suivant, François ne peut pas retirer 4 haricots et donc Sarah gagne dans ce cas.

Supposons que les 12 derniers haricots sont répartis de la manière $(11, 1)$.
Après que François ait retiré 1 haricot, les haricots sont répartis de la manière $(10, 1)$ ou de la manière $(11, 0)$.
Comme nous l'avons vu dans le cas précédent, si les haricots sont répartis de la manière $(11, 0)$ à ce stade du jeu, alors Sarah gagnera.
On suppose donc que François retire le haricot du bocal contenant 11 haricots de sorte que les haricots soient répartis de la manière $(10, 1)$.
Au cours des 3 tours suivants, les haricots devront être retirés du bocal contenant 10 haricots : Sarah en retire 2, François en retire 3, Sarah en retire 5 et il reste donc $10 - (2 + 3 + 5) = 0$ haricot dans ce bocal et encore 1 haricot dans l'autre bocal.
Au tour suivant, François ne peut pas retirer 4 haricots et donc Sarah gagne dans ce cas.

Il existe d'autres manières de répartir les 12 derniers haricots entre les deux bocaux, certaines garantissant une victoire pour Sarah.
Cependant, pour décrire de façon concise une stratégie gagnante pour Sarah, on démontre comment Sarah peut s'assurer que les 12 derniers haricots soient répartis de l'une des deux manières décrites ci-dessus.

Ensuite, on va démontrer comment Sarah peut s'assurer que les 12 derniers haricots soient répartis de la manière $(12, 0)$ ou de la manière $(11, 1)$.
La stratégie gagnante de Sarah est de retirer tous les haricots de l'un des bocaux, ou de retirer tous les haricots des bocaux et de n'en laisser qu'un seul dans un bocal.
Appelons ce bocal le bocal *cible*. La stratégie de Sarah est la suivante :

- Si le bocal cible contient 5 haricots ou plus, Sarah retire des haricots du bocal cible à chacun de ses tours.
- Si le bocal cible contient 2, 3 ou 4 haricots, Sarah retire 2 haricots du bocal cible (au tour où elle doit retirer 2 haricots) et retire 5 haricots de l'autre bocal (au tour où elle doit retirer 5 haricots).
- Lorsque le bocal cible contient 0 ou 1 haricot, Sarah retire des haricots de l'autre bocal à chacun de ses tours restants.

Enfin, on explique pourquoi Sarah est capable d'exécuter cette stratégie.
À chaque cycle de 12 tours (Sarah joue 6 fois), Sarah retire $3(2 + 5) = 21$ haricots.

Donc, dans les 109 premiers cycles de 12 tours (soit 1308 tours), Sarah retire $109 \times 21 = 2289$ haricots.
Puisque les bocaux contenaient initialement 2022 et 2023 haricots, Sarah pourra retirer suffisamment de haricots pour que le bocal cible contienne 0 haricot ou 1 haricot.
Après les 1308 tours, l'autre bocal contient 12 ou 11 haricots. Donc, Sarah sera en mesure de retirer le nombre requis de haricots à chacun de ses tours.
(On remarque que François peut également retirer des haricots du bocal cible. Or, cela n'aura aucun effet sur la stratégie de Sarah).

En résumé, Sarah a une stratégie qui lui permet de s'assurer que les 12 derniers haricots soient répartis de la manière $(12, 0)$ ou de la manière $(11, 1)$.
Étant donné que les 12 derniers haricots sont répartis de l'une de ces deux manières, Sarah est sûr de gagner la partie. Elle a donc une stratégie gagnante.

Il est intéressant de noter que le joueur qui a la stratégie gagnante dans ce jeu, Sarah, est unique, cependant l'argument démontrant sa victoire garantie, n'est pas unique. Par exemple, Sarah est également sûr de gagner si les 12 derniers haricots sont répartis de la manière $(10, 2)$ ou de la manière $(9, 3)$, ce qu'on aurait également pu utiliser pour décrire la stratégie gagnante de Sarah.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2021

Avril 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

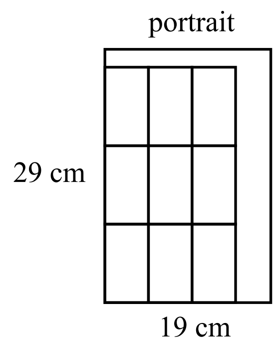
Avril 2021
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Chaque carte d'affaires mesure 5 cm $\times$ 9 cm et a donc une aire égale à 5 cm$\times$9 cm = 45 cm^2.

   (b) L'aire d'une page mesurant 20 cm $\times$ 27 cm est égale à 20 cm $\times$ 27 cm = 540 cm^2. Chaque carte d'affaires a une aire de 45 cm^2.
   Puisque la page entière est utilisée sans qu'il n'y ait de gaspillage, alors on peut imprimer $\dfrac{540 \text{ cm}^2}{45 \text{ cm}^2} = 12$ cartes d'affaires sans qu'il n'y ait de chevauchement.

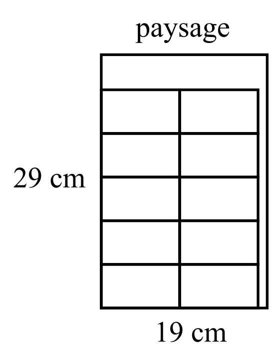
   (c) Considérons d'abord le cas où les cartes d'affaires sont en orientation portrait sur la page.
   La largeur de chaque carte est de 5 cm tandis que la largeur de la page est de 19 cm. Puisque 3 cartes adjacentes ont une largeur combinée de 15 cm (ce qui est inférieur à 19 cm) et que 4 cartes adjacentes ont une largeur combinée de 20 cm (ce qui est supérieur à 19 cm), alors on ne peut avoir qu'un maximum de 3 cartes placées comme tel sur le côté horizontal de la page.



   La hauteur de chaque carte est de 9 cm tandis que la hauteur de la page est de 29 cm. Puisque 3 cartes adjacentes ont une hauteur combinée de 27 cm (ce qui est inférieur à 29 cm) et que 4 cartes adjacentes ont une hauteur combinée de 36 cm (ce qui est supérieur à 29 cm), alors on ne peut avoir qu'un maximum de 3 cartes placées comme tel sur le côté vertical de la page.

   Donc, comme on le voit dans la figure ci-dessus, on ne peut imprimer qu'un maximum de $3 \times 3 = 9$ cartes d'affaires en orientation portrait par page.

   Considérons ensuite le cas où les cartes d'affaires sont en orientation paysage sur la page.
   La largeur de chaque carte est de 9 cm tandis que la largeur de la page est de 19 cm. Puisque 2 cartes adjacentes ont une largeur combinée de 18 cm (ce qui est inférieur à 19 cm) et que 3 cartes adjacentes ont une largeur combinée de 27 cm (ce qui est supérieur à 19 cm), alors on ne peut avoir qu'un maximum de 2 cartes placées comme tel sur le côté horizontal de la page.



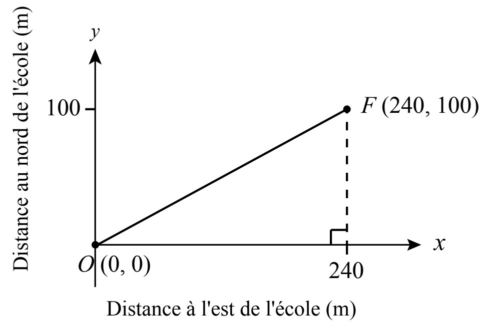
   La hauteur de chaque carte est de 5 cm tandis que la hauteur de la page est de 29 cm. Puisque 5 cartes adjacentes ont une hauteur combinée de 25 cm (ce qui est inférieur à 29 cm) et que 6 cartes adjacentes ont une hauteur combinée de 30 cm (ce qui est supérieur à 29 cm), alors on ne peut avoir qu'un maximum de 5 cartes placées comme tel sur le côté vertical de la page.

   Donc, comme on le voit dans la figure ci-dessus, on ne peut imprimer qu'un maximum de $2 \times 5 = 10$ cartes d'affaires en orientation paysage par page.

   Donc, on peut imprimer le plus grand nombre de cartes d'affaires par page lorsque les cartes sont en orientation portrait.

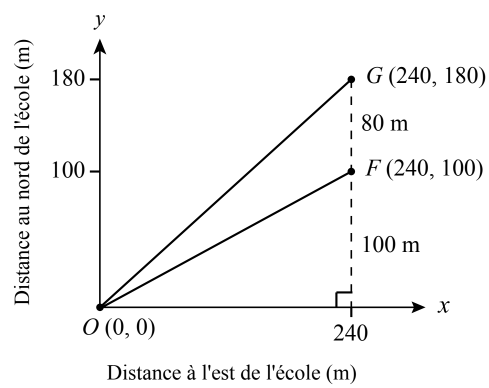
2. Tel qu'indiqué dans l'énoncé du problème, toutes coordonnées représentent des longueurs en mètres.

 (a) Soit A le point situé à $(240, 0)$. Donc, OA représente une distance horizontale de 240 m, AF représente une distance verticale de 100 m et le triangle OAF est rectangle en A, comme dans la figure ci-contre. D'après le théorème de Pythagore, $FO^2 = OA^2 + AF^2$ ou $FO^2 = (240 \text{ m})^2 + (100 \text{ m})^2 = 67\,600 \text{ m}^2$, d'où $FO = \sqrt{67\,600 \text{ m}^2} = 260$ m.
 Donc, la distance du chemin rectiligne reliant l'école à la maison de François est de 260 m.



 (b) Lundi, François rentre de l'école (en parcourant donc une distance de 260 m) en marchant à une vitesse constante de 80 m/min. Comme le temps est égal à la distance divisée par la vitesse, alors François rentre chez lui en $\dfrac{260 \text{ m}}{80 \text{ m/min}} = \dfrac{13}{4}$ (soit 3,25) minutes.

 (c) Puisque les points F et G ont la même abscisse, alors la différence entre leurs ordonnées est égale à la distance entre la maison de François et celle de Georgette. Donc, les deux maisons se trouvent à 80 m l'une de l'autre, comme dans la figure ci-contre.
 François et Georgette se rencontrent à mi-chemin entre leurs maisons, soit à une distance de 40 m de chaque maison.
 D'après la partie (b), François quitte l'école et rentre chez lui en $\dfrac{13}{4}$ (soit 3,25) minutes en marchant à une vitesse constante de 80 m/min.



 Donc, pour parcourir une distance supplémentaire de 40 m (afin de rencontrer Georgette à mi-chemin entre leurs maisons), il lui faut $\dfrac{40 \text{ m}}{80 \text{ m/min}} = \dfrac{1}{2}$ (soit 0,5) minutes de plus.

 Donc, François met $\dfrac{13}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{15}{4}$ (soit 3,75) minutes en tout pour rentrer chez lui et pour se rendre au point situé à mi-chemin entre les deux maisons.

 Puisque Georgette et François quittent l'école en même temps que les deux se rencontrent à mi-chemin entre leurs maisons, alors Georgette met également $\dfrac{15}{4}$ minutes en tout pour rentrer chez elle et pour se rendre au point situé à mi-chemin entre les deux maisons.
 Comme dans la partie (a), le triangle OAG est rectangle en A. Donc, d'après le théorème de Pythagore, $GO^2 = OA^2 + AG^2$ ou $GO^2 = (240 \text{ m})^2 + (180 \text{ m})^2 = 90\,000 \text{ m}^2$, d'où $GO = \sqrt{90\,000 \text{ m}^2} = 300$ m.
 Puisque le chemin rectiligne reliant l'école à la maison de Georgette a une longueur de 300 m tandis que celui allant de la maison de Georgette jusqu'au point situé à mi-chemin entre les deux maisons a une longueur de 40 m, alors Georgette parcourt $300 \text{ m} + 40 \text{ m} = 340$ m en tout.
 Comme la vitesse de Georgette (soit g m/min) est égale à la distance divisée par le temps, alors la valeur de g est égale à $340 \div \dfrac{15}{4} = 340 \times \dfrac{4}{15} = \dfrac{272}{3}$, soit $90\dfrac{2}{3}$.

3. (a) Lorsque la liste $5, 2, 3, 1, 4, 6$ subit l'opération R_3, l'ordre des trois premiers nombres de la liste est renversé, ce qui produit la liste $3, 2, 5, 1, 4, 6$.

(b) Les deux Opérations de Renversement ont changé l'ordre des quatre premiers nombres de la liste ($1, 2, 3$ et 4) et n'ont pas changé l'ordre des deux derniers nombres de la liste (5 et 6). Il est donc raisonnable de supposer que la première Opération de Renversement pourrait être R_4.
Lorsque la liste initiale subit l'opération R_4, l'ordre des 4 premiers nombres de la liste est renversé, ce qui produit la liste $4, 3, 2, 1, 5, 6$.
Lorsque la nouvelle liste subit l'opération R_2, l'ordre des 2 premiers nombres de la liste est renversé, ce qui produit $3, 4, 2, 1, 5, 6$.
Donc, les deux Opérations de Renversement sont R_4 et R_2, dans cet ordre.
(Remarquons que ceci est le seul moyen d'obtenir la liste finale donnée en utilisant exactement deux Opérations de Renversement.)

(c) (i) Chaque Opération de Renversement, à l'exception de R_6, ne change pas le nombre situé à la dernière position de la liste. De plus, R_6 renverserait l'ordre de tous les nombres de la liste ; c'est-à-dire que le premier nombre de la liste se retrouverait donc à la dernière position après l'exécution de cette opération.
C'est-à-dire que le nombre 3 peut uniquement se retrouver à la dernière position lorsque R_6 est exécuté sur une liste dans laquelle 3 est à la première position.
Est-il possible d'exécuter une Opération de Renversement sur la liste initiale de manière que le nombre 3 se retrouve à la première position de la liste résultante ?
Si la liste initiale $1, 2, 3, 4, 5, 6$ subit l'opération R_3, on obtient $3, 2, 1, 4, 5, 6$.
Si cette nouvelle liste subit l'opération R_6, on obtient $6, 5, 4, 1, 2, 3$ comme souhaité.
Donc, la liste $1, 2, 3, 4, 5, 6$ doit subir les opérations R_3 et R_6, dans cet ordre, pour que 3 se retrouve à la dernière position de la liste. Donc, 2 Opérations de Renversement peuvent produire le résultat souhaité.

(ii) Puisqu'on a trouvé un moyen d'obtenir le résultat souhaité en exécutant 2 Opérations de Renversement dans la partie (i), on n'a qu'à expliquer pourquoi il n'est pas possible d'exécuter une seule Opération de Renversement pour obtenir le résultat souhaité.
Comme on l'a décrit dans la partie (i), le nombre 3 peut uniquement se retrouver à la dernière position lorsque R_6 est exécuté sur une liste dans laquelle 3 est à la première position. Puisque 3 n'est pas le premier nombre de la liste initiale, alors on ne peut obtenir le résultat souhaité à partir d'une seule Opération de Renversement.

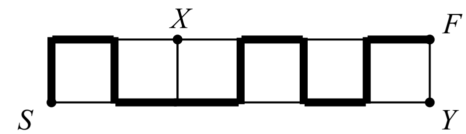
Donc, d'après (i) et (ii), on voit que la liste $1, 2, 3, 4, 5, 6$ doit subir au moins 2 Opérations de Renversement pour que le dernier nombre de la liste soit 3.

(d) Si la liste initiale $1, 2, 3, 4, 5, 6$ subit les opérations R_5, R_2 et R_6, dans cet ordre, alors on obtient : $5, 4, 3, 2, 1, 6$ après la première opération, $4, 5, 3, 2, 1, 6$ après la deuxième opération et $6, 1, 2, 3, 5, 4$ après la troisième opération.
Donc, on peut obtenir une liste de la forme souhaitée en exécutant 3 Opérations de Renversement.

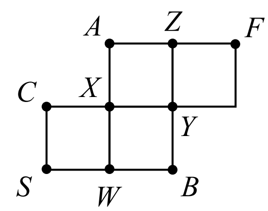
Peut-on obtenir le résultat souhaité en exécutant moins de 3 Opérations de Renversement ?
D'après une manière semblable à celle de la partie (c), la liste initiale doit subir les opérations R_4 et R_6, dans cet ordre, pour que 4 se retrouve à la dernière position de la liste.
Donc, il faut au moins 2 Opérations de Renversement pour que 4 se retrouve à la dernière position de la liste. De plus, ces deux opérations (R_4 et R_6) sont les seules qui peuvent déplacer le nombre 4 à la dernière position de la liste. (Pouvez-vous voir pourquoi ?)

Or, lorsque la liste initiale $1, 2, 3, 4, 5, 6$ subit les opérations R_4 et R_6, dans cet ordre, on obtient $4, 3, 2, 1, 5, 6$ et ensuite $6, 5, 1, 2, 3, 4$. L'avant-dernier nombre de cette liste n'est pas 5. Il n'est donc pas possible d'obtenir le résultat souhaité en exécutant 2 Opérations de Renversement.
Puisqu'il n'est clairement pas possible d'obtenir le résultat souhaité en exécutant une seule Opération de Renversement, alors il faut en exécuter au moins 3.

4. (a) Dans la figure ci-contre, on voit le chemin SF qui passe par chaque sommet *à l'exception* des sommets X et Y.

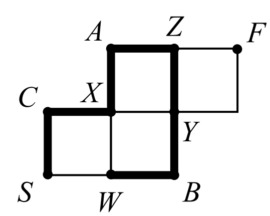


(b) On nomme les sommets comme dans la figure ci-contre.

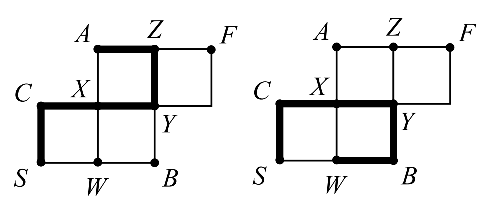


Un chemin commençant à S peut d'abord se diriger vers W ou vers C. Supposons que le chemin commençant à S mène d'abord à W. Dans ce cas, le chemin peut uniquement passer par C en allant de W à X et ensuite à C.
Rendu à C, le chemin ne peut continuer car les deux sommets reliés à C (soit X et S) sont des sommets par lesquels le chemin est déjà passé. Autrement dit, un chemin commençant à S et menant d'abord à W s'arrêtera à C et ne pourra ni passer par les sommets A et B, ni atteindre F.
Donc, un chemin SF passant par C doit d'abord se diriger vers C.
À partir de C, le chemin doit se diriger vers X (puisqu'il ne peut retourner à S). Donc, tout chemin SF passant par C commence d'abord à S et passe par C puis X, soit $S - C - X$.
À partir de X, le chemin peut se diriger dans 3 directions : vers A, vers Y, ou vers W. Considérons chacun de ces trois cas de manière séparée.

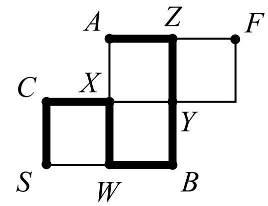
Si le chemin se dirige vers A avec pour but de passer par A et B, alors le chemin doit suivre $X - A - Z - Y - B - W$. Or, chaque côté relié à W mène à un sommet par lequel le chemin est déjà passé. Donc, à partir de X, un chemin SF ayant pour but de passer par A et B et de se terminer à F ne peut se diriger vers A.



Si le chemin se dirige vers Y avec pour but de passer par A et B, alors le chemin doit suivre $X - Y - Z - A$ ou $X - Y - B - W$. Or, chaque côté relié à A mène à un sommet par lequel le chemin est déjà passé. Il en est de même pour les côtés reliés à W. Donc, à partir de X, un chemin SF ayant pour but de passer par A et B et de se terminer à F ne peut se diriger vers Y.

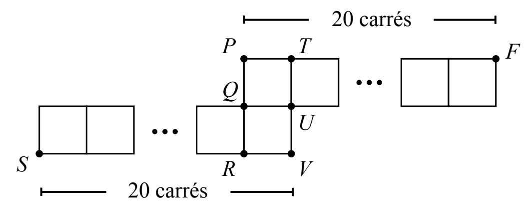


Enfin, si le chemin se dirige vers W avec pour but de passer par A et B, alors le chemin doit suivre $X - W - B - Y - Z - A$. Or, chaque côté relié à A mène à un sommet par lequel le chemin est déjà passé. Donc, à partir de X, un chemin SF ayant pour but de passer par A et B et de se terminer à F ne peut se diriger vers W.



Donc, il n'y a pas de chemin SF qui puisse passer par les trois sommets A, B et C.

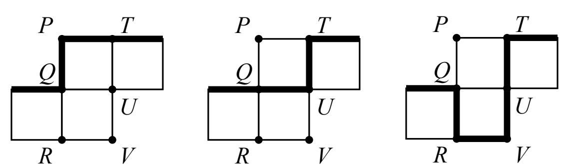
(c) On nomme les points P, Q, R, T, U, V de manière à définir la « colonne du milieu » comme dans la figure ci-contre.
Chaque chemin SF doit passer par au moins l'un de Q ou R et doit également passer par au moins l'un de T ou U.



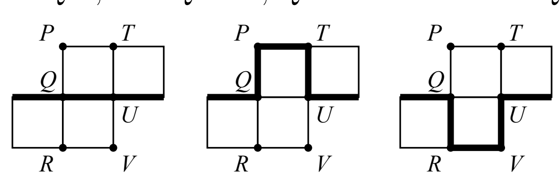
En venant de la gauche, chaque chemin SF « entre » dans la colonne du milieu en passant par Q ou par R et la « quitte » en passant par T ou par U.
Chaque chemin SF passant par la colonne du milieu appartient exactement à l'un des quatre groupes de chemins suivants :

— Un chemin QT : La partie d'un chemin SF venant de la gauche qui entre dans la colonne du milieu en passant par Q et la quitte en passant par T.
— Un chemin QU : La partie d'un chemin SF venant de la gauche qui entre dans la colonne du milieu en passant par Q et la quitte en passant par U.
— Un chemin RT : La partie d'un chemin SF venant de la gauche qui entre dans la colonne du milieu en passant par R et la quitte en passant par T.
— Un chemin RU : La partie d'un chemin SF venant de la gauche qui entre dans la colonne du milieu en passant par R et la quitte en passant par U.

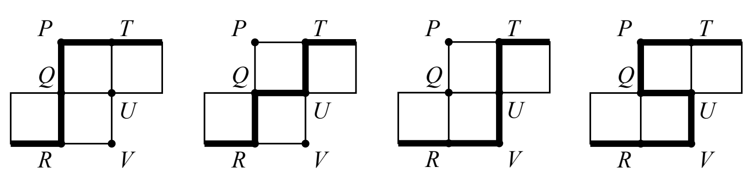
Il y a exactement 3 chemins QT, soit $Q - P - T$, $Q - U - T$ et $Q - R - V - U - T$.



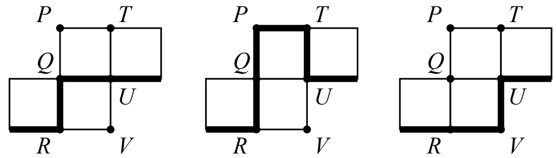
Il y a exactement 3 chemins QU, soit $Q - U$, $Q - P - T - U$ et $Q - R - V - U$.



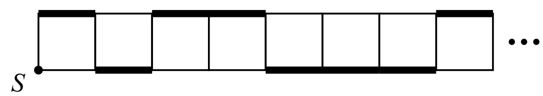
Il y a exactement 4 chemins RT soit $R - Q - P - T$, $R - Q - U - T$, $R - V - U - T$ et $R - V - U - Q - P - T$.



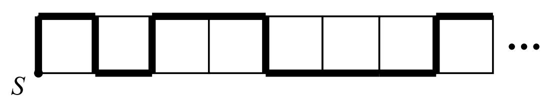
Il y a exactement 3 chemins RU, soit $R - Q - U$, $R - Q - P - T - U$ et $R - V - U$.



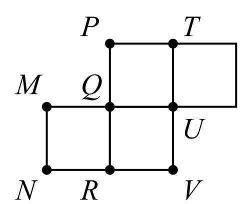
Pour chacun de ces cas, le point terminal gauche (Q ou R) et le point terminal droit (T ou U) sont chacun attachés à un segment de chemin horizontal du carré adjacent.
Il reste donc 18 carrés de chaque côté de la colonne du milieu à travers lesquels le chemin peut passer.
Pour les 18 premiers carrés, un chemin SF peut se diriger de manière horizontale en longeant le côté horizontal inférieur ou supérieur d'un carré.
Par exemple, on voit une sélection possible de côtés supérieurs et inférieurs pour les 8 premiers carrés dans la figure ci-dessous.



Ces choix de côtés supérieurs ou inférieurs déterminent de manière unique le chemin car ce dernier doit suivre des côtés verticaux exactement lorsque le chemin passant à travers deux carrés adjacents a des segments horizontaux différents (l'un suit un côté supérieur tandis que l'autre un côté inférieur).
Dans la figure ci-dessous, on voit où ces côtés verticaux doivent être ajoutés à l'exemple précédent. Il n'y a pas de choix dans la sélection des côtés verticaux une fois que les côtés horizontaux ont été choisis.



Remarquons qu'un chemin ne peut pas suivre à la fois les côtés supérieur et inférieur d'un carré donné car un tel chemin passerait par un sommet plus d'une fois.
Puisque chacun des 18 premiers carrés a deux choix (soit le côté supérieur ou le côté inférieur), alors on a 2^{18} chemins.
Soit M le point à gauche de Q et soit N le point à gauche de R, comme on le voit dans la figure ci-contre.
En venant de la gauche, les 2^{18} chemins se terminent soit à M, soit à N. C'est-à-dire qu'aucun des 2^{18} chemins ne comprend le segment vertical MN.
Combien de ces 2^{18} chemins sont reliés à un chemin QT (par exemple) ?



Chacun des chemins arrivant à N (en venant de la gauche) peut se diriger vers M puis ensuite vers Q tandis que chacun des chemins arrivant à M (en venant de la gauche) peut se diriger directement vers Q.
Donc, il y a exactement 2^{18} chemins qui entrent dans la colonne du milieu en passant par Q (en venant de la gauche). Autrement dit, 2^{18} chemins commencent à S et atteignent Q en venant de la gauche.
De même, 2^{18} chemins commencent à S et atteignent R (en venant de la gauche).

Des arguments semblables démontrent qu'il y a 2^{18} chemins passant par les 18 derniers carrés. Donc, 2^{18} chemins quittent T en se dirigeant vers la droite pour se terminer à F tandis que 2^{18} chemins quittent U en se dirigeant vers la droite pour se terminer à F.

D'après notre analyse précédente, il y a exactement 3 chemins QT. Donc, il y a exactement

$2^{18} \cdot 3 \cdot 2^{18} = 3 \cdot 2^{36}$ chemins SF dont la partie du chemin passant par la colonne du milieu emprunte un chemin QT.
Il y a $3 \cdot 2^{36}$ chemins SF dont la partie du chemin passant par la colonne du milieu emprunte un chemin QU, $4 \cdot 2^{36}$ chemins SF empruntant un chemin RT, et $3 \cdot 2^{36}$ chemins SF empruntant un chemin RU.
Donc, il y a $2^{36}(3 + 3 + 4 + 3)$ ou $13 \cdot 2^{36}$ chemins SF en tout.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2020

le mercredi 15 avril 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 avril 2020
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) D'après le point C du diagramme, on voit que Cao paie 7,00 \$ pour 14 affiches, soit un prix unitaire de $7\ \$ \div 14 = 0{,}50\ \$$.

   (b) Selon la partie (a), Daniel paie 1,60 \$ par affiche et Cao paie 0,50 \$ par affiche.
   On calcule les prix unitaires des autres candidats : Annie paie 10,00 \$ pour 5 affiches, soit un prix unitaire de $10\ \$ \div 5 = 2{,}00\ \$$, Bogdan paie $8{,}00\ \$ \div 8 = 1{,}00\ \$$ par affiche et Émilie paie $15{,}00\ \$ \div 15 = 1{,}00\ \$$ par affiche.
   Donc, Bogdan et Émilie paient le même prix par affiche.
   (Par ailleurs, on aurait pu remarquer que la droite qui passe par l'origine (0,0) et par E passe également par B.
   La pente de cette droite représente le prix unitaire en dollars des affiches de Bogdan et d'Émilie.)

   (c) Selon la partie (a), Daniel s'est fait imprimer son premier lot d'affiches à un prix unitaire de 1,60 \$.
   Si Daniel décide d'imprimer son deuxième lot d'affiches à la bibliothèque du quartier, il paiera $60{,}00\ \$ \div 40 = 1{,}50\ \$$ par affiche.
   Afin de dépenser le moins d'argent possible, Daniel devrait imprimer ses 40 affiches à la bibliothèque.

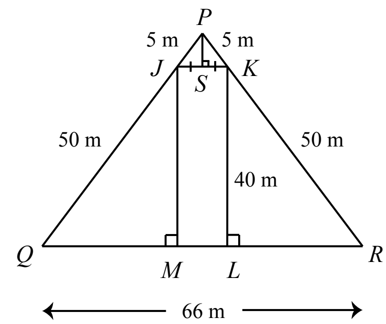
   Par ailleurs, puisque Daniel a payé 16,00 \$ pour son premier lot de 10 affiches, il paierait $4 \times 16{,}00\ \$ = 64{,}00\ \$$ pour son deuxième lot d'affiches s'il décidait de les faire imprimer à la même imprimerie que son premier lot.
   Puisque la bibliothèque du quartier peut lui imprimer ses 40 affiches pour un coût total de 60,00 \$, il devrait imprimer ses affiches à la bibliothèque afin de dépenser le moins d'argent possible.

   (d) Dans la partie (b), on a calculé qu'Émilie a payé 1,00 \$ par affiche.
   Puisque ce prix unitaire est un prix fixe, Émilie a dû payer 1,00 \$ l'affiche pour chacune des 25 affiches. Elle a donc dépensé 25,00 \$.
   Émilie et Annie ont chacune dépensé la même somme d'argent, soit 25,00 \$, afin d'imprimer chacune 25 affiches.
   Puisque l'imprimerie qu'Annie a choisie lui a offert les 5 premières affiches à un prix de 10,00 \$, elle a donc dépensé $25{,}00\ \$ - 10{,}00\ \$ = 15{,}00\$$ pour faire imprimer les $25 - 5 = 20$ affiches restantes.
   Donc, l'imprimerie d'Annie lui a offert un prix unitaire réduit de $15{,}00\ \$ \div 20 = 0{,}75\ \$$ pour chaque affiche supplémentaire.

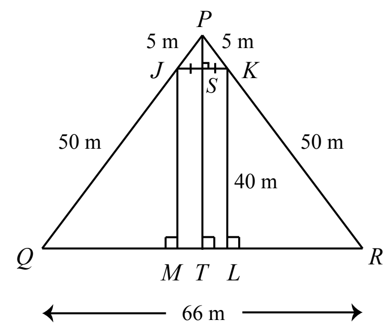
2. (a) Dans le triangle KLR, on a $\angle KLR = 90°$. D'après le théorème de Pythagore, $LR^2 = 50^2 - 40^2 = 900$, d'où $LR = \sqrt{900} = 30$ m (puisque $LR > 0$).

   (b) On démontre d'abord que les triangles JMQ et KLR sont isométriques.
   Puisque $JKLM$ est un rectangle, alors $JM = KL = 40$ m.
   De plus, les hypoténuses JQ et KR sont de même longueur. Donc, les triangles JMQ et KLR sont isométriques puisque leurs côtés sont isométriques deux à deux.
   Donc, $MQ = LR = 30$ m, d'où $ML = 66 - 30 - 30 = 6$ m.

(c) Puisque $PJ = PK = 5$ m, alors le triangle PJK est isocèle et sa hauteur, PS, est la droite menée du milieu de sa base JK jusqu'à P.
Puisque $JKLM$ est un rectangle, alors $JK = ML = 6$ m, d'où $SK = \frac{JK}{2} = 3$ m.
Dans le triangle PSK, on a $PS^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ d'après le théorème de Pythagore, d'où $PS = 4$ m (puisque $PS > 0$).
Donc, la hauteur du triangle PJK, soit la droite menée du milieu de sa base JK jusqu'à P, est de 4 m.



(d) On détermine d'abord l'aire du triangle PQR.
Dans la figure ci-contre, soit la hauteur du triangle PQR la droite menée de T (le milieu de sa base QR) jusqu'à P.
Puisque PT et QR sont perpendiculaires, alors PT et KL sont parallèles (puisque KL est également perpendiculaire à QR).
Par symétrie, PT passe par le point S. La hauteur PT est donc égale à $PS + ST = PS + KL$ ou $4 + 40 = 44$ m.
L'aire du triangle PQR est égale à
$\frac{1}{2} \times QR \times PT = \frac{1}{2} \times 66 \times 44 = 1452$ m^2.
L'aire du rectangle $JKLM$ est égale à
$ML \times KL = 6 \times 40 = 240$ m^2.
La fraction de l'aire du triangle PQR qui est recouverte par le rectangle $JKLM$ est donc égale à $\frac{240}{1452} = \frac{20}{121}$.



3. (a) Si le 5$^{\text{e}}$ terme d'une suite Dlin est 142, alors le 6$^{\text{e}}$ terme est $(142 + 1) \times 2 = 143 \times 2 = 286$.

Puisqu'on obtient chaque terme après le premier en ajoutant 1 au terme précédent et en doublant ce résultat alors, ayant le 5$^{\text{e}}$ terme de la suite, on peut faire « marche arrière » en divisant d'abord le 5$^{\text{e}}$ terme par 2 puis en soustrayant 1 de ce résultat afin d'obtenir le 4$^{\text{e}}$ terme de la suite.
Pour le voir, considérons deux termes consécutifs dans une suite Dlin, soit a suivi de b, qui vérifient donc $b = (a + 1) \times 2$.
Pour déterminer les opérations nécessaires pour obtenir a étant donné b (c'est-à-dire pour reculer dans la suite), on isole a dans l'équation afin d'exprimer ce dernier en fonction de b :

$$\begin{aligned} b &= (a+1) \times 2 \\ \tfrac{b}{2} &= a + 1 \\ \tfrac{b}{2} - 1 &= a \end{aligned}$$

Donc, si le 5$^{\text{e}}$ terme de la suite Dlin est 142, alors le 4$^{\text{e}}$ terme est $\frac{142}{2} - 1 = 71 - 1 = 70$.
(On peut vérifier que 142 est bien le terme après 70 : $(70 + 1) \times 2 = 142$.)

(b) Si le 1$^{\text{er}}$ terme de la suite est 1406, alors on a clairement une suite Dlin dans laquelle 1406 parait comme terme.
Si le 2$^{\text{e}}$ terme d'une suite Dlin est 1406, alors le 1$^{\text{er}}$ terme de la suite est $\frac{1406}{2} - 1 = 703 - 1 = 702$.
Si le 3$^{\text{e}}$ terme d'une suite Dlin est 1406, alors le 2$^{\text{e}}$ terme est 702 (ce qu'on a calculé dans la ligne précédente) et le 1$^{\text{er}}$ terme de la suite est $\frac{702}{2} - 1 = 351 - 1 = 350$.
Si le 4$^{\text{e}}$ terme d'une suite Dlin est 1406, alors le 3$^{\text{e}}$ terme est 702, le 2$^{\text{e}}$ terme est 350 et le 1$^{\text{er}}$ terme de la suite est $\frac{350}{2} - 1 = 175 - 1 = 174$.

À ce point, on voit que 174, 350, 702 et 1406 sont des 1^er^ termes possibles de suites Dlin dans lesquelles 1406 parait comme terme.
On peut continuer ce processus de « marche arrière » (en divisant par 2 puis en soustrayant 1 du résultat) pour déterminer tous les 1^er^ termes possibles de suites Dlin dans lesquelles 1406 parait comme terme.

$$1406 \to 702 \to 350 \to 174 \to \frac{174}{2} - 1 = 86 \to \frac{86}{2} - 1 = 42 \to \frac{42}{2} - 1 = 20 \to \frac{20}{2} - 1 = 9$$

Si l'on tente de poursuivre ce processus au-delà de 9, on obtient $\frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$. Or, ce dernier n'est pas possible car le 1^er^ terme d'une suite Dlin doit être un entier strictement positif (d'où chacun des termes de la suite est donc un entier strictement positif).
Donc, 9, 20, 42, 86, 174, 350, 702 et 1406 sont les 1^er^ termes possibles de suites Dlin dans lesquelles 1406 parait comme terme.

(c) Chacun des entiers de 10 à 19 peut être le premier terme d'une suite Dlin. Donc, pour chacun de ces dix premiers termes possibles, on doit déterminer le chiffre des unités des termes qui suivent.
Si le 1^er^ terme de la suite est 10, alors le 2^e^ terme, $(10 + 1) \times 2 = 22$, a 2 comme chiffre des unités tandis que le 3^e^ terme, $(22 + 1) \times 2 = 46$, a 6 comme chiffre des unités.
Si le 1^er^ terme de la suite est 11, alors le 2^e^ terme, $(11 + 1) \times 2 = 24$, a 4 comme chiffre des unités tandis que le 3^e^ terme, $(24 + 1) \times 2 = 50$, a 0 comme chiffre des unités.
On dresse la liste des chiffres des unités des 2^e^ et 3^e^ termes pour chacun des premiers termes possibles dans le tableau ci-dessous :

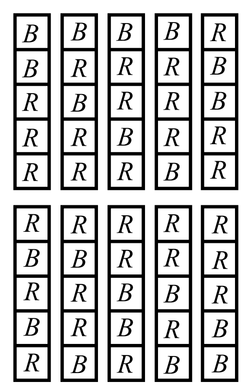
1^er^ terme	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Chiffre des unités du 2^e^ terme	2	4	6	8	0	2	4	6	8	0
Chiffre des unités du 3^e^ terme	6	0	4	8	2	6	0	4	8	2

D'après le tableau ci-dessus, on voit que 8 est le seul chiffre des unités que les 2^e^ et 3^e^ termes peuvent avoir en commun.
Donc, si le 1^er^ terme de la suite est 18 (ayant donc un 8 comme chiffre des unités), alors les 2^e^ et 3^e^ termes de la suite ont 8 comme chiffre des unités. Donc, tous les termes ont le même chiffre des unités.
De même, si le 1^er^ terme de la suite est 13 (ayant donc un 3 comme chiffre des unités), alors les 2^e^ et 3^e^ termes de la suite ont 8 comme chiffre des unités.
Il s'ensuit donc que tous les autres termes après le premier auront 8 comme chiffre des unités.
Parmi les entiers strictement positifs de 10 à 19, 13 et 18 sont ceux qui pourraient être les premiers termes d'une suite Dlin dont tous les termes, après le premier, ont le même chiffre des unités.

(d) Si le 1^er^ terme d'une suite Dlin est x, alors le 2^e^ terme est $(x + 1) \times 2 = 2x + 2$ tandis que le 3^e^ terme est $(2x + 2 + 1) \times 2 = (2x + 3) \times 2 = 4x + 6$.
Par exemple, si $x = 1$ (remarquons qu'il s'agit du plus petit 1^er^ terme possible d'une suite Dlin), alors le 3^e^ terme est $4 \times 1 + 6 = 10$. De plus, si $x = 2$, alors le 3^e^ terme est $4 \times 2 + 6 = 14$.
Quelle est la plus grande valeur possible de x (le 1^er^ terme de la suite) telle que $4x + 6$ (le 3^e^ terme de la suite) soit inférieur ou égal à 2020 ?
En posant $4x + 6 = 2020$ et en résolvant, on obtient $4x = 2014$, d'où $x = 503{,}5$.
Puisque le 1^er^ terme de la suite doit être un entier strictement positif, on ne peut avoir 2020 comme 3^e^ terme.
De même, en posant $4x + 6 = 2019$ et en résolvant, on obtient une valeur non entière de

x. Donc, on ne peut avoir 2019 comme 3^e terme d'une suite Dlin.
Lorsque $4x + 6 = 2018$, on obtient $4x = 2012$, d'où $x = 503$.
Donc, si le 1er terme d'une suite Dlin est 503, alors le 3^e terme de la suite, soit 2018, est un entier strictement positif entre 1 et 2020.
De plus, 503 est le plus grand 1er terme possible tel que le 3^e terme soit un entier strictement positif entre 1 et 2020.
Dans les suites Dlin, on obtient un 3^e terme $(4x + 6)$ différent pour chaque premier terme distinct (x).
Donc, afin de déterminer combien des entiers strictement positifs de 1 à 2020 pourraient être le 3^e terme dans une suite Dlin, on détermine le nombre de 1er termes tels que le 3^e terme ait cette propriété.
Le plus petit 1er terme possible est 1 (d'où on a 10 comme 3^e terme) et le plus grand 1er terme possible est 503 (d'où on a 2018 comme 3^e terme).
De plus, chaque valeur de x entre 1 et 503 produit un 3^e terme ayant une valeur entre 10 et 2018.
Donc, il y a 503 entiers strictement positifs, de 1 à 2020, qui pourraient être le 3^e terme dans une suite Dlin.

4. (a) On peut colorier une grille 5×1 de 10 manières différentes afin qu'elle ait exactement 3 cases rouges et 2 cases bleues.
On peut le voir en comptant le nombre de manières différentes dont on peut colorier 2 cases bleues puisque chacune des 3 cases restantes devra être coloriée en rouge.
(Par ailleurs, on pourrait compter le nombre de manières différentes dont on pourrait colorier 3 cases rouges.) Pour la première case à colorier en bleu, on a 5 choix de cases. Après qu'on ait choisi et colorié la première case, il nous reste 4 choix de cases pour la seconde case à colorier. Donc, il y a $5 \times 4 = 20$ tels choix de cases.
Or, puisqu'on ne peut pas distinguer les deux cellules bleues l'une de l'autre, il s'avère que chacune des différentes façons de colorier deux cellules bleues a été compté en double.
Par exemple, les deux choix suivants sont pareils et ont le même résultat final : (1) on choisit d'abord de colorier la case de la deuxième rangée en bleu et ensuite celle de la cinquième rangée, (2) on choisit d'abord de colorier la case de la cinquième rangée en bleu et ensuite celle de la deuxième rangée.
Donc, on peut colorier une grille 5×1 de $20 \div 2 = 10$ manières différentes afin qu'elle contienne exactement 3 cases rouges et 2 cases bleues. Ces 10 manières différentes sont représentées dans la figure ci-contre.



(b) Remarquons d'abord qu'on peut colorier chacune des 13 cases de deux manières différentes (rouge ou bleu), on peut donc colorier une grille 1×13 de 2^{13} manières différentes.
Pour chacune des grilles 1×13, Carrie compte le nombre de cases rouges (qu'on représente par r) et le nombre de cases bleues (qu'on représente par b).
Puisqu'il y a 13 cases en tout, alors $r + b = 13$ et soit $r > b$ soit $b > r$ (puisque r et b sont des entiers et que leur somme est impaire, ils ne peuvent pas être égaux).
Si $r > b$, alors $r > 13 - r$, d'où $2r > 13$ ou $r > 6{,}5$. Donc, $r \geq 7$ (puisque r est un entier).
Si $b > r$, alors $b > 13 - b$, d'où $2b > 13$ ou $b > 6{,}5$. Donc, $b \geq 7$ (puisque b est un entier).
Donc, si le nombre de cases rouges est supérieur au nombre de cases bleues, Carrie notera le nombre de cases rouges car ce dernier est le plus grand des deux nombres et sera supérieur

ou égal à 7.
De même, si le nombre de cases bleues est supérieur au nombre de cases rouges, Carrie notera le nombre de cases bleues car ce dernier est le plus grand des deux nombres et sera supérieur ou égal à 7.
Dans les deux cas, chaque nombre que Carrie notera dans sa liste sera un entier de 7 à 13.
Au moins une des 2^{13} manières différentes dont Carrie pourrait colorier une grille 1×13 contient 7 cases rouges et 6 cases bleues. Donc la liste de Carrie comprend au moins un 7.
Puisque la liste de Carrie comprend un 7 et que chaque nombre de sa liste est supérieur ou égal à 7, alors 7 est le plus petit nombre de sa liste.

(c) Dans une grille $3 \times n$, chaque colonne contient exactement 3 cases. On peut colorier chacune de ces 3 cases de deux manières différentes (rouge ou bleu). Puisqu'on peut colorier chacune de ces 3 cases de deux manières différentes, on peut donc colorier chaque colonne d'une grille $3 \times n$ de $2^3 = 8$ manières différentes.
Donc, on peut colorier une grille $3 \times n$, n étant un entier qui vérifie $1 \leq n \leq 8$, telle que chaque colonne soit coloriée d'une manière différente (on voit un tel exemple dans la grille 3×8 ci-contre).

R	*R*	*R*	*B*	*R*	*B*	*B*	*B*
R	*R*	*B*	*R*	*B*	*R*	*B*	*B*
R	*B*	*R*	*R*	*B*	*B*	*R*	*B*

Puisqu'on ne peut colorier chaque colonne de 3 cases que de 8 manières différentes, alors une grille 3×9 comprendra forcément deux colonnes qui seront coloriées de manière identique.
Donc, la plus petite valeur de n est 9.

(d) L'énoncé du problème est vrai.
Puisqu'il y a 5 rangées dans une grille 5×41, alors les 41 colonnes contiennent chacune 5 cases.
Dans chacune des colonnes, au moins 3 des 5 cases doivent être de même couleur.
Dans chaque colonne, soit le nombre de cases rouges est plus grand que le nombre de cases bleues, soit le nombre de cases bleues est plus grand que le nombre de cases rouges (puisque 5 est impair, on ne peut avoir le même nombre de cases de chaque couleur).
Une colonne qui contient plus de cases rouges que de cases bleues est une *colonne rouge* tandis qu'une colonne qui contient plus de cases bleues que de cases rouges est une *colonne bleue*.
Soit $\mathbb{R}$ le nombre total de colonnes rouges et soit $\mathbb{B}$ le nombre total de colonnes bleues. Donc, $\mathbb{R} + \mathbb{B} = 41$.
En utilisant le même argument que celui de la partie (b), si $\mathbb{R} > \mathbb{B}$, alors $\mathbb{R} \geq 21$, sinon $\mathbb{B} \geq 21$.
Supposons que $\mathbb{R} \geq 21$ (l'argument qui suit peut être avancé de manière similaire si $\mathbb{B} \geq 21$).
Dans ce cas, chacune de ces 21 (ou plus) colonnes a plus de cases rouges que de cases bleues. Donc chacune de ces colonnes a au moins 3 cases rouges.
On va montrer que 3 cases rouges ont le même emplacement dans au moins 3 des 21 colonnes.
De toutes les colonnes rouges, considérons les 21 premières (il y en a au moins 21).
Pour chacune de ces colonnes rouges, considérons les 3 premières cases rouges (il y a au moins 3 cases rouges) en allant du haut vers le bas.
Quel est le plus grand nombre de manières dont on peut colorier chaque colonne telle qu'il y ait exactement 3 cases rouges ?
Puisqu'une grille 5×1 est de la même grandeur que chacune des colonnes dans une grille 5×41, on constate que la question précédente est la même que celle à laquelle on avait

répondu dans la partie (a). Il y a donc 10 telles manières.

Parmi les 21 colonnes rouges, supposons que 2 colonnes au plus ont les mêmes 3 cases coloriées en rouge.

Puisqu'on ne peut colorier une colonne que de 10 manières différentes afin qu'elle contienne exactement 3 cases rouges, alors il y a $2 \times 10 = 20$ telles colonnes au plus.

Or, puisqu'il y a 21 colonnes rouges, on a donc une contradiction.

Donc, notre supposition que 2 colonnes au plus parmi les 21 colonnes rouges avaient les mêmes 3 cases coloriées en rouge était erronée. Il doit donc y avoir au moins 3 colonnes dont les mêmes 3 cases sont coloriées en rouge.

On a donc 9 cases rouges situées aux intersections de ces 3 colonnes et des 3 rangées de chaque colonne contenant les cases rouges.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2019

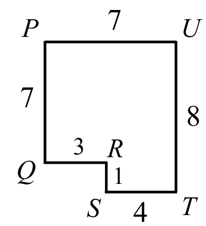
le mercredi 10 avril 2019
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 11 avril 2019
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

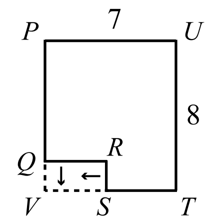
1. (a) Le rectangle dans la Figure A mesure 7 sur 8 et a donc un périmètre égal à $2 \times 7 + 2 \times 8$ ou 30.

(b) *Solution 1*



Dans la figure ci-contre, on identifie les sommets de la Figure B en les nommant.
La Figure B a une largeur de $PU = 7$.
Cependant, la largeur est aussi égale à $QR + ST$.
Puisque $QR = 3$, alors $ST = 7 - 3 = 4$.
De même, $PQ + RS = UT = 8$ et puisque $RS = 1$, alors $PQ = 7$.
La Figure B a un périmètre de $PQ+QR+RS+ST+TU+UP = 7+3+1+4+8+7 = 30$.

Solution 2



La réponse énoncée dans la Solution 1 (30) est égale à la réponse de la partie (a). Pourquoi ?
Considérons les translations dans la figure ci-contre : on fait glisser le segment RS vers la gauche jusqu'à ce qu'il atteigne QV et on fait glisser le segment QR vers le bas jusqu'à ce qu'ill atteigne VS.
Puisque $QRSV$ est un rectangle, alors $PVTU$ est un rectangle.
De plus, puisque $RS = QV$ et $QR = VS$, alors le périmètre de la Figure B est égal au périmètre du rectangle $PVTU$.
Puisque $PV = UT = 8$ et $VT = PU = 7$, le périmètre du rectangle $PVTU$ est égal à 30 (ce rectangle est celui de la partie (a)).
Ainsi, la Figure B a un périmètre de 30.

(c) Si l'on emploie le même raisonnement que celui de la Solution 2, le périmètre de la Figure C est égal au périmètre d'un rectangle qui a des côtés de longueurs $k + 4$ et $k + 2$.
Puisque la Figure C a un périmètre de 56, alors $2(k+4)+2(k+2) = 56$ ou $2k+8+2k+4 = 56$ d'où $4k = 44$ ou $k = 11$.
(Par ailleurs, on aurait pu déterminer que les deux longueurs manquantes dans la Figure C étaient toutes les deux égales à k. On aurait pu ensuite additionner les longueurs des six segments de la Figure C afin de déterminer son périmètre, soit $4k + 12$.)

(d) Tous les segments de longueurs 4 et 7 peuvent être déplacés vers l'extérieur de la figure de manière à ce que la Figure D ressemble à un carré dont les longueurs des côtés sont $8n + 1$.
Ainsi, la Figure D a un périmètre de $4(8n + 1) = 32n + 4$.
On veut déterminer le plus grand entier n qui vérifie $32n + 4 < 1000$.
On résout cette inégalité afin d'obtenir $32n < 996$ ou $n < \frac{996}{32}$ d'où $n < 31{,}125$.
Ainsi, 31 est le plus grand entier n qui remplirait la condition que D soit inférieur à 1000.

2. (a) Il y a $10 \times 60 = 600$ secondes en 10 minutes.
Si la machine est réglée de manière à couper un bout de corde toutes les 8 secondes, alors $\dfrac{600\text{ s}}{8\text{ s}} = 75$ bouts de cordes seront coupés en l'espace de 10 minutes.

(b) On introduit une corde dans la machine à un rythme constant de 2 mètres par seconde.
Si la machine est réglée de manière à couper un bout de corde toutes les 3 secondes, alors la longueur de chaque bout de corde coupé sera de $2 \times 3 = 6$ mètres.

(c) *Solution 1*
On introduit une corde dans la machine à un rythme constant de 2 mètres par seconde. Ceci est équivalent à $2 \times 60 = 120$ mètres par minute.
Si chaque bout de corde coupé a une longueur de 30 m, la machine effectuera donc $\dfrac{120 \text{ m}}{30 \text{ m}} = 4$ coupes en l'espace d'une minute.
Solution 2
On introduit une corde dans la machine à un rythme constant de 2 mètres par seconde. Afin de couper un bout de corde qui mesure 30 m de longueur, la machine doit être réglée de manière à effectuer une coupe toutes les $\dfrac{30}{2} = 15$ secondes.
Si la machine effectue une coupe toutes les 15 secondes, elle effectuera $\dfrac{60 \text{ s}}{15 \text{ s}} = 4$ coupes en l'espace d'une minute.

Solution 3
Dans la partie (b), la machine est réglée de manière à effectuer une coupe toutes les 3 secondes. Les bouts de cordes coupés ont donc une longueur de 6 mètres.
Puisqu'on introduit une corde dans la machine à un rythme constant, la machine doit être réglée de manière à effectuer une coupe en 5 fois plus de temps, soit chaque 5×3 secondes (15 secondes), afin de couper des bouts de corde 5 fois plus longs (car un bout de corde qui mesure 30 m de longueur est 5 fois plus long qu'un bout de corde de 6 m).
Si la machine effectue une coupe toutes les 15 secondes, elle effectuera donc $\dfrac{60 \text{ s}}{15 \text{ s}} = 4$ coupes en l'espace d'une minute.

(d) *Solution 1*
Si la machine est réglée de manière à effectuer 16 coupes en l'espace d'une minute (ou 16 coupes en l'espace de 60 secondes), elle effectuera une coupe toutes les $\dfrac{60 \text{ s}}{16}$ secondes (3,75 secondes). On introduit une corde dans la machine à un rythme constant de 2 mètres par seconde.
Puisque la machine est réglée de manière à effectuer une coupe toutes les 3,75 secondes, alors chaque bout de corde qui sera coupé aura une longueur de $2 \times 3{,}75 = 7{,}5$ mètres.

Solution 2
Puisque la machine est réglée de manière à effectuer 16 coupes en l'espace d'une minute, elle effectuera donc 16 coupes en l'espace de 60 secondes.
On introduit une corde dans la machine à un rythme constant de 2 mètres par seconde. Donc, en l'espace de 60 secondes, $60 \times 2 = 120$ mètres de corde auront été introduits dans la machine.
Pendant ces 60 secondes, la corde de 120 mètres sera coupée 16 fois. Donc, chaque bout de corde qui sera coupé aura une longueur de $\dfrac{120 \text{ m}}{16} = 7{,}5$ mètres.

3. (a) *Solution 1*
Dans la liste des entiers qui débute par 1, le 6^{e} multiple de 5 est $6 \times 5 = 30$.
Donc, Tania a dressé la liste de chacun des entiers de 1 à 29 à l'exception des multiples positifs de 5 inférieurs à 30, soit les entiers $5, 10, 15, 20, 25$.
Alors, avant que sa liste n'atteinge la position où le 6^{e} multiple de 5 est omis, elle aura listé $29 - 5 = 24$ entiers.

Solution 2
En commençant par 1, chaque groupe de 5 entiers comporte un entier qui est un multiple de 5.
Par exemple, le premier groupe de cinq entiers, soit le groupe $1, 2, 3, 4, 5$, a un multiple de 5 (soit l'entier 5). De même, le deuxième groupe de cinq entiers, soit le groupe $6, 7, 8, 9, 10$ a un multiple de 5 (soit l'entier 10).
Dans la liste de Tania, elle omet les entiers qui sont des multiples de 5, donc pour chaque groupe de 5 entiers, Tania n'en liste que 4.
Alors, avant que Tania n'omette le 6$^{\text{e}}$ multiple de 5, elle aura listé $6 \times 4 = 24$ entiers.

(b) *Solution 1*
Tania inlut l'entier 2019 dans sa liste mais en omet l'entier 2020 (car 2020 est un multiple de 5).
En commençant par 1, 2020 est le 404$^{\text{e}}$ multiple de 5 car $\frac{2020}{5} = 404$.
C'est-à-dire, les entiers de 1 à 2020 contiennent 404 groupes de 5 entiers.
Chacun de ces 404 groupes comporte un entier qui est un multiple de 5. Donc Tania omet 404 entiers (y compris 2020) de sa liste des entiers de 1 à 2020.
Si 2019 est le k^{e} entier dans la liste de Tania, alors $k = 2020 - 404 = 1616$.

Solution 2
Tania inlut l'entier 2019 dans sa liste mais en omet l'entier 2020 (car 2020 est un multiple de 5).
En commençant par 1, 2020 est le 404$^{\text{e}}$ multiple de 5 car $\frac{2020}{5} = 404$.
C'est-à-dire, les entiers de 1 à 2020 contiennent 404 groupes de 5 entiers.
Dans la liste de Tania, elle omet les entiers qui sont des multiples de 5, donc pour chaque groupe de 5 entiers, Tania n'en liste que 4.
Si 2019 est le k^{e} entier dans la liste de Tania, alors $k = 404 \times 4 = 1616$.

(c) *Solution 1*
On commence en déterminant quels entiers se trouvent dans la liste de Tania.
En commençant par 1, dans chaque groupe successif de 5 entiers consécutifs, Tania n'en liste que 4 (car elle omet les entiers qui sont des multiples de 5).
C'est-à-dire, dans chacun de ces groupes de 5 entiers, la liste de Tania ne contient que $\frac{4}{5}$ de ces entiers.
Considérons tous les entiers positifs de 1 à n, où n est un multiple de 5.
La liste de Tania ne contient que $\frac{4}{5}n$ de ces n entiers.
La liste de Tania contient 200 entiers, donc $\frac{4}{5}n = 200$ ou $n = \frac{200 \times 5}{4} = 250$.
Ainsi, si Tania dresse la liste des entiers positifs de 1 à 250 mais en omet les entiers qui sont des multiples de 5, sa liste contiendra $\frac{4}{5} \times 250 = 200$ entiers.
Il faut déterminer la somme, $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + \cdots + 244 + 246 + 247 + 248 + 249$, des 250 premiers entiers positifs de la liste de Tania dont les multiples de 5 ont été omis.
On déterminera cela en calculant la somme de tous les entiers de 1 à 250 dont on soustrait ensuite la somme de tous les entiers qui sont des multiples de 5 dans cette liste.
La somme des entiers de 1 à n est représentée par $\frac{1}{2}n(n+1)$. Donc la somme de tous les entiers de 1 à 250 est égale à $\frac{1}{2}(250)(251) = 31\,375$.

Les multiples de 5 dans cette liste, $5 + 10 + 15 + \cdots + 240 + 245 + 250$, peuvent être écrits de la forme $5(1 + 2 + 3 + \cdots + 48 + 49 + 50)$ en factorisant le facteur commun de 5 (car chacun d'eux est un multiple de 5).

Cette somme est égale à $5 \times \frac{1}{2}(50)(51) = 6375$.

Si Tania dresse la liste des entiers positifs, en ordre, tout en omettant les entiers qui sont des multiples de 5, les 200 premiers entiers de sa liste auront une somme de $31\,375 - 6375$ ou $25\,000$.

Solution 2

Comme on l'a démontré dans la Solution 1 ci-dessus, la somme des 200 premiers entiers de la liste de Tania est la somme $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + \cdots + 244 + 246 + 247 + 248 + 249$.

Les premier et dernier entiers de cette liste ont une somme de $1 + 249 = 250$.

La somme du deuxième entier et de l'avant-dernier entier est égale à $2 + 248 = 250$.

La somme du troisième entier et de l'antépénultième entier est égale à $3 + 247 = 250$.

En continuant de cette manière, on converge vers le milieu de la liste.

C'est-à-dire qu'on se déplace d'un entier à la droite du premier nombre précédent tandis qu'on se déplace d'un nombre vers la gauche du deuxième nombre précédent.

On remarque ainsi que

— lorsque le premier nombre du nouveau couple est un de plus que le premier nombre précédent, le nombre avec lequel il est jumelé est égal à un de moins que le deuxième nombre précédent et

— lorsque le premier nombre du nouveau couple est deux de plus que le premier nombre précédent (comme c'est le cas lorsqu'un multiple de 5 est omis), le nombre avec lequel il est jumelé est inférieur de deux par rapport au deuxième nombre précédent.

C'est-à-dire, en convergeant vers le milieu de la liste de Tania, chaque couple aura toujours une somme de 250.

Puisqu'il y a 200 entiers dans la liste de Tania, il doit ainsi y avoir 100 tels couples.

Donc, si Tania dresse la liste des entiers positifs, en ordre, tout en omettant les entiers qui sont des multiples de 5, les 200 premiers entiers de sa liste auront une somme de $250 \times 100 = 25\,000$.

4. (a) On commence en remarquant que lorsque $x = 18$,

$$12 \times 18 \times 24 = 12 \times (6 \times 3) \times (2 \times 12) = 12 \times 6 \times 6 \times 12 = (12 \times 6)^2 = 72^2.$$

Ainsi, $12, 18, 24$ est une suite Shonk.

Ensuite, étant donné que $12, x, 24$ doit être une suite Shonk, il faut démontrer que $x = 18$ est la seule valeur qui remplirait cette condition.

Afin que $12, x, 24$ soit une suite Shonk, il faut que $12 < x < 24$.

Cela signifie que la valeur de x est l'une parmi $13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22$ et 23.

Lorsque $x = 13$, le produit $12 \times 13 \times 24 = 3744$ n'est pas un carré parfait.

Cela peut être vérifié sur une calculatrice. Par contre, si on arrive à comprendre pourquoi ce produit n'est pas un carré parfait, on saura comment appliquer ce même raisonnement à nouveau.

Soit n un entier qui vérifie $n^2 = 12 \times 13 \times 24$.

Cela signifie que 13 est un facteur de n^2.

Par contre, puisque 13 est un nombre premier, cela signifie que 13 n'admet que n et lui-même comme facteurs.

Cela signifie que n^2 a au moins deux facteurs 13. Donc $12 \times 13 \times 24$ doit avoir au moins deux facteurs 13.

Cependant, ni 12 ni 24 n'ont 13 comme facteur. On arrive donc à la conclusion que $12 \times 13 \times 24$ n'est pas un carré parfait.

Donc, $12, 13, 24$ n'est pas une suite Shonk, alors $x \neq 13$.

La clé du raisonnement ci-dessus est que 13 est un nombre premier.

Ainsi, on peut utiliser le même raisonnement pour conclure que $x \neq 17$, que $x \neq 19$ et que $x \neq 23$.

Supposons maintenant que $x = 14$. Dans ce cas, $12 \times 14 \times 24$ a un facteur 7.

Si n est un entier qui vérifie $12 \times 14 \times 24 = n^2$, alors 7 est un facteur de n^2 et puisque 7 est un nombre premier, cela signifie que n doit avoir un 7 comme facteur.

Ainsi, $n^2 = 12 \times 14 \times 24$ a au moins deux facteurs 7. Or cela n'est pas le cas puisque 14 n'a qu'un seul facteur 7 et ni 12 ni 24 n'ont 7 comme facteur.

Alors, $12 \times 14 \times 24$ n'est pas un carré parfait, donc $12, 14, 24$ n'est pas une suite Shonk et $x \neq 14$.

Puisque $21 = 3 \times 7$, on peut utiliser le même raisonnement afin de démontrer que $x \neq 21$. C'est-à-dire, afin que $12 \times 21 \times 24$ soit un carré parfait, il doit avoir au moins deux facteurs 7. Or cela n'est pas le cas car il n'en contient qu'un seul.

Nous avons ainsi réduit la liste des valeurs possibles de x aux entiers $15, 16, 18, 20$ et 22.

Puisque 15 et 20 ont tous les deux 5 comme facteur, les produits $12 \times 15 \times 24$ et $12 \times 20 \times 24$ ont chacun un seul 5 (qui lui est un nombre premier) comme facteur, donc ce ne sont pas des carrés parfaits.

Cela signifie que ni $12, 15, 24$ ni $12, 20, 24$ sont des suites Shonk, alors $x \neq 15$ et $x \neq 20$.

Puisque $22 = 2 \times 11$, on peut aussi conclure que $x \neq 22$ car $12 \times 22 \times 24$ a un seul 11 (qui lui est un nombre premier) comme facteur, donc $12 \times 22 \times 24$ n'est pas un carré parfait d'où $12, 22, 24$ n'est pas une suite Shonk.

Nous avons ainsi réduit la liste des valeurs possibles de x à $x = 16$ ou $x = 18$.

On va démontrer que $12 \times 16 \times 24$ n'est pas un carré parfait.

Afin de faire cela, on l'écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers :

$$12 \times 16 \times 24 = (2 \times 2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 3)$$

La factorisation première de $12 \times 16 \times 24$ révèle qu'elle n'a que 2 et 3 comme facteurs premiers.

Plus précisément, il y a neuf facteurs 2 et deux facteurs 3.

Si n est un entier qui vérifie $12 \times 16 \times 24 = n^2$, alors n^2 doit avoir précisément neuf facteurs 2.

Or, chaque facteur de n a le même montant de facteurs 2, donc n^2 doit avoir un nombre pair de facteurs 2.

Puisque $12 \times 16 \times 24$ a un nombre impair de facteurs 2, on peut conclure que, pour tout entier quelconque n, $12 \times 16 \times 24 \neq n^2$ et n'est donc pas un carré parfait.

Ainsi, $12, 16, 24$ n'est pas une suite Shonk, donc $x \neq 16$.

On a exclu toute autre possibilité de x, on peut donc conclure que $12, x, 24$ est une suite Shonk uniquement lorsque $x = 18$.

(b) En nous appuyant sur le raisonnement de la partie (a), nous utiliserons l'observation selon laquelle, lors de la factorisation première d'un carré parfait, ses facteurs premiers paraitront toujours un nombre pair de fois.

Par exemple, 100 est un carré parfait tel que démontré par $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$ où il y a deux facteurs 2 et deux facteurs 5.

Dans l'énoncé de la question, on retrouve l'exemple $18^2 = 324$, ce qui équivaut à

$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$. Ce dernier est le produit de deux facteurs 2 et de quatre facteurs 3.
En effet, si n est un entier qui a p comme facteur premier, il existe alors une "copie" de p dans chaque facteur de n qui se produit dans n^2.
D'autre part, si les facteurs d'un nombre sont des facteurs premiers qui paraissent un nombre pair de fois, alors ces facteurs premiers peuvent être regroupés afin de démontrer que le nombre d'origine est un carré parfait.
Par exemple, le nombre qui a quatre facteurs 2, deux facteurs 3 et six facteurs 5 est un carré parfait puisque

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = (2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5)^2$$

Afin que $28, y, z, 65$ soit une suite Shonk, $28 \times y \times z \times 65$ doit être un carré parfait.
On effectue la factorisation première de 28 et de 65 afin de réécrire l'expression sous la forme

$$2 \times 2 \times 7 \times y \times z \times 5 \times 13$$

Cette dernière doit être un carré parfait.
Les facteurs premiers 2, 5, 7 et 13 paraissent tous dans cette factorisation.
D'après nos délibérations ci-dessus, il doit y avoir un nombre pair de chacun de ces nombres premiers si le produit doit être un carré parfait.
Il doit donc y avoir un autre facteur de chacun des nombres premiers $5, 7$ et 13 dans le produit.
De plus, ces nombres premiers doivent être des facteurs de soit y soit z.
Cela signifie que soit y soit z doit avoir un 5 comme facteur, soit y soit z doit avoir un 7 comme facteur et soit y soit z doit avoir un 13 comme facteur.
Puisqu'il y a deux variables et trois nombres premiers, une de ces variables doit avoir deux de ces nombres comme facteurs premiers.
Puisque $5 \times 13 = 65$ et $7 \times 13 = 91$ et que y et z doivent être tous les deux inférieurs à 65, alors 5 et 13 ne peuvent pas être des facteurs pour la même variable. De même, 7 et 13 ne peuvent pas être des facteurs pour la même variable.
Donc, soit 5 et 7 sont tous les deux des facteurs de y, soit 5 et 7 sont tous les deux des facteurs de z.
Cela signifie que soit y, soit z est un multiple de $5 \times 7 = 35$.
Sachant que tout autre multiple de 35 sera supérieur à 65, on comprend alors que soit $y = 35$, soit $z = 35$.
La variable qui n'est pas égale à 35 doit être un multiple de 13 qui est situé entre 28 et 65.
Les seuls tels multiples de 13 sont 39 et 52. Puisque les deux sont supérieurs à 35, on en déduit que $y = 35$. On comprend donc que soit $z = 39$, soit $z = 52$.
Si $z = 39$, on a

$$28 \times y \times z \times 65 = (2 \times 2 \times 7) \times (5 \times 7) \times (3 \times 13) \times (5 \times 13)$$

mais puisque ce produit n'a qu'un seul facteur 3, il ne peut pas représenter un carré parfait.
D'autre part, si $z = 52$, on a

$$\begin{aligned} 28 \times y \times z \times 65 &= (2 \times 2 \times 7) \times (5 \times 7) \times (2 \times 2 \times 13) \times (5 \times 13) \\ &= (2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 13)^2 \\ &= 1820^2 \end{aligned}$$

Donc, $y = 35$ et $z = 52$ sont les seules valeurs qui font de $28, y, z, 65$ une suite Shonk.

(c) La plus longue suite de Shonk dont chacun des termes est un entier de 1 à 12 a neuf termes. Un exemple d'une telle suite est $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$.
Chaque terme après le premier est supérieur au terme précédent, on doit donc vérifier que le produit de tous les termes est un carré parfait.
On effectue la factorisation première de chaque terme afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 8 \times 9 \times 10 \\ = \; & 2 \times 3 \times (2 \times 2) \times 5 \times (2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (2 \times 5) \\ = \; & (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5)^2 \\ = \; & 720^2 \end{aligned}$$

Il faut démontrer qu'aucune suite Shonk dont chacun des termes est un entier de 1 à 12 ne peut avoir une longueur supérieure à neuf termes.
On commence en remarquant que de 1 à 12, le seul nombre qui a 7 comme facteur est le nombre 7 lui-même.
Par conséquent, le nombre 7 ne peut pas être inclus dans la suite car le produit des termes d'une telle suite ne pourrait pas être un carré parfait.
De même, le nombre 11 ne peut pas être inclus dans la suite car aucun autre nombre de 1 à 12 n'a 11 comme facteur et donc, le produit des termes d'une suite qui inclurait 11 ne pourrait pas être un carré parfait.
Cela signifie que la suite doit être composée des nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$ et 12.
Il y a 10 nombres dans cette liste. Donc afin d'avoir une suite de Shonk plus longue que celle du dessus, il faudrait inclure tous ces 10 entiers dans la suite.
Par contre, le produit

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 8 \times 9 \times 10 \times 12$$

a cinq facteurs 3 (dont un qui provient de chacun des nombres 3, 6 et 12, tandis que deux proviennent de 9).
Ainsi, ca ne peut pas être un carré parfait puisque tout facteur premier doit paraitre un nombre pair de fois dans la liste des facteurs premiers d'un carré parfait.

(d) On a besoin de deux faits liés à propos des carrés parfaits :
(F1) Un entier positif, n est un carré parfait lorsque chaque facteur premier parait un nombre pair de fois dans la liste de ses facteurs premiers. (On a vu cela dans la partie (b).)
(F2) Soient r, s et t des entiers qui vérifient $r = st$. S'il y a deux carrés parfaits parmi r, s, t, donc le troisième sera aussi un carré parfait. Cela est dû au fait que la liste des facteurs premiers du produit de deux carrés parfaits contiendra toujours un nombre pair de facteurs premiers. De même, la liste des facteurs premiers du quotient (entier) de deux carrés parfaits contiendra toujours un nombre pair de facteurs premiers.
Supposons que $m, 1176, n, 48\,400$ est une SSSC. Alors

- $m < 1176 < n < 48\,400$
- $m \times 1176 \times n$ est un carré parfait et
- $1176 \times n \times 48\,400$ est un carré parfait et
- $m \times 1176 \times n \times 48\,400$ est un carré parfait.

Puisque $1176 \times n \times 48\,400$ est un carré parfait et que $m \times (1176 \times n \times 48\,400)$ est aussi un carré parfait, donc, d'après (F2), m est aussi un carré parfait.
De plus, puisque $48\,400 = 220^2$ et $1176 = 6 \times 14^2$, alors

$$1176 \times n \times 48\,400 = (220 \times 14)^2 \times (6 \times n)$$

Ce dernier est un carré parfait uniquement lorsque $6n$ est un carré parfait.
Ainsi, si $m, 1176, n, 48\,400$ est une SSSC, alors m et $6n$ seront tous les deux des carrés parfaits.
De plus, si m et $6n$ sont tous les deux des carrés parfaits, alors $m \times 1176 \times n$, $1176 \times n \times 48\,400$ et $m \times 1176 \times n \times 48\,400$ seront tous des carrés parfaits.

On peut ainsi répondre à la question en comptant le nombre de couples d'entiers positifs (m,n) qui vérifient $1 \leq m < 1176$ et $1176 < n < 48\,400$, où m et $6n$ seraient tous les deux des carrés parfaits.

On remarque que $34^2 = 1156$ et que ce dernier est inférieur à 1176. On remarque aussi que $35^2 = 1225$ et que ce dernier est supérieur à 1176. Donc les valeurs possibles de m sont $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 33^2, 34^2$.
Il y a 34 possibilités pour la valeur de m.
On sait que $6 \times 14^2 = 1176$ et que ce dernier n'est pas supérieur à 1176. Donc la plus petite valeur de n est 6×15^2.
On remarque aussi que $6 \times 89^2 = 47\,526 < 48\,400$ mais que $6 \times 90^2 = 48\,600 > 48\,400$.
Donc, les valeurs possibles de n sont

$$6 \times 15^2, 6 \times 16^2, \ldots, 6 \times 89^2$$

Il y a $89 - 14 = 75$ telles valeurs.
Donc, il y a $34 \times 75 = 2550$ couples (m,n) qui permettraient à la suite $m, 1176, n, 48\,400$ d'être une SSSC.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2018

le jeudi 12 avril 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2018
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Lundi, Sacha a acheté 4 boites de cerises qu'il a payées 2,00 \$ $\times$ 4, ou 8,00 \$.
Il a aussi acheté 3 boites de prunes qu'il a payées 3,00 \$ $\times$ 3, ou 9,00 \$ et 2 boites de bleuets qu'il a payées 4,50 \$ $\times$ 2, ou 9,00 \$.
En tout, Sacha a dépensé 8,00 \$ + 9,00 \$ + 9,00 \$, ou 26,00 \$.

(b) Mercredi, Sacha a acheté 2 boites de prunes qu'il a payées 3,00 \$ $\times$ 2, ou 6,00 \$.
Puisqu'il a dépensé 22,00 \$ en tout, il a dépensé 16,00 \$ (22,00 \$ − 6,00 \$ = 16,00 \$) pour des boites de cerises.
Puisque chaque boite de cerises coute 2,00 \$, Sacha a acheté 8 boites de cerises (16,00 \$ $\div$ 2,00 \$ = 8).

(c) *Solution 1*
Samedi, Sacha a rendu 100,00 \$ à la caissière qui lui a remis 14,50 \$. Il a donc dépensé 85,50 \$ (100,00 \$ − 14,50 \$ = 85,50 \$).
Il a acheté 3 boites de bleuets qui ont couté 13,50 \$ (4,50 \$ $\times$ 3 = 13,50 \$).
Il a donc dépensé 72,00 \$ (85,50 \$ − 13,50 \$ = 72,00 \$) pour des prunes et des cerises.
Si Sacha a acheté c boites de cerises, alors il a aussi acheté $2c$ boites de prunes (2 fois plus).
Les c boites de cerises ont couté 2,00 \$ $\times\, c$, ou $2c$ \$.
Les $2c$ boites de prunes ont couté 3,00 \$ $\times\, 2c$, ou $6c$ \$.
Sacha a dépensé $8c$ \$ pour les cerises et les prunes ($2c$ \$ + $6c$ \$ = $8c$ \$). Donc $8c = 72$, ou $c = 9$.
Sacha a acheté 9 boites de cerises.

Solution 2
Comme dans la solution 1, on détermine d'abord que Sacha a dépensé 72,00 \$ pour des prunes et des cerises.
Pour chaque boite de cerises qu'il a achetée, il a acheté 2 boites de prunes.
Une boite de cerises et deux boites de prunes coutent 8 \$ (2,00 \$ + 2 $\times$ 3,00 \$ = 8,00 \$).
Puisque 72,00 \$ $\div$ 8,00 \$ = 9, Sacha a acheté 9 boites de cerises (et 18 boites de prunes).

Remarque : Dans chacune des solutions, on peut vérifier que 9 boites de cerises, 18 boites de prunes et 3 boites de bleuets coutent 9 $\times$ 2,00 \$ + 18 $\times$ 3,00 \$ + 3 $\times$ 4,50 \$, ou 85,50 \$ et que la somme de 14,50 \$ de monnaie rendue est correcte.

2. (a) Dans la première figure (chemin parcouru par Paul), le triangle ABM est rectangle en B.
D'après le théorème de Pythagore, $MA^2 = AB^2 + BM^2$. Soit $MA = x$ m.
Donc $x^2 = 105^2 + 100^2$, ou $x^2 = 21\,025$. Donc $x = \sqrt{21\,025}$, ou $x = 145$ (puisque $x > 0$).
Donc $MA = 145$ m.

(b) Dans la deuxième figure (chemin parcouru par Théo), $AD = BC = 200$ m et $DC = AB = 105$ m (puisque $ABCD$ est un rectangle).
Donc $PD = AD - AP$, ou $PD = 200$ m − 140 m, ou $PD = 60$ m.
De même, $DQ = DC - QC$, ou $DQ = 105$ m − 60 m, ou $DQ = 45$ m.
Le triangle PDQ est rectangle en D. Soit $PQ = y$ m. D'après le théorème de Pythagore, $PQ^2 = PD^2 + DQ^2$. Donc $y^2 = 60^2 + 45^2$, ou $y^2 = 5625$. Donc $y = 75$ (puisque $y > 0$).
Donc $PQ = 75$ m.
La distance totale parcourue par Théo est égale à :

$$AP + PQ + QC + CB + BA = 140 \text{ m} + 75 \text{ m} + 60 \text{ m} + 200 \text{ m} + 105 \text{ m} = 580 \text{ m}$$

(c) La distance totale parcourue par Paul est égale à :

$$AD + DC + CM + MA = 200 \text{ m} + 105 \text{ m} + (200 \text{ m} - 100 \text{ m}) + 145 \text{ m} = 550 \text{ m}.$$

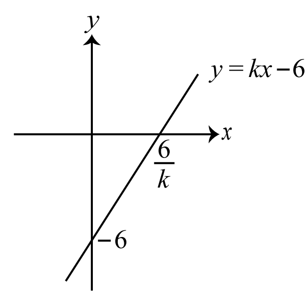
Théo court à une vitesse de 145 m/min. Il met donc 4 minutes ($580 \div 145 = 4$) pour terminer son trajet.
Paul commence en même temps que Théo et termine 1 minute après Théo. Il met donc 5 minutes ($4 + 1 = 5$) pour terminer son trajet.
Pendant ce temps, Paul parcourt 550 m. Il a donc une vitesse de 110 m/min ($550 \div 5 = 110$).

3. (a) On détermine l'abscisse à l'origine en posant $y = 0$ dans l'équation $y = 2x - 6$.
On obtient donc $0 = 2x - 6$, d'où $2x = 6$, ou $x = 3$.
L'abscisse à l'origine de la droite d'équation $y = 2x - 6$ est 3.

On détermine l'ordonnée à l'origine en posant $x = 0$ dans l'équation $y = 2x - 6$.
On obtient donc $y = 2(0) - 6$, d'où $y = -6$.
L'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $y = 2x - 6$ est -6.

(b) Posons $y = 0$ dans l'équation de la droite. On obtient $0 = kx - 6$, ou $kx = 6$, ou $x = \frac{6}{k}$, ($k \neq 0$).
La droite a pour abscisse à l'origine $\frac{6}{k}$ ($k \neq 0$).

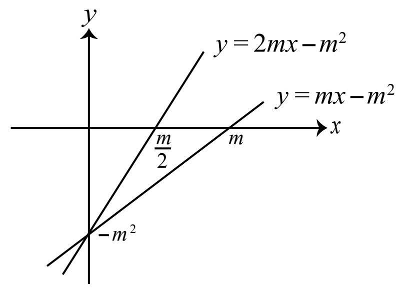
(c) D'après la partie (b), la droite d'équation $y = kx - 6$ a pour abscisse à l'origine $\frac{6}{k}$.
Puisque $k > 0$, alors $\frac{6}{k} > 0$ et la droite coupe donc l'axe des abscisses à la droite de l'origine.
La droite d'équation $y = kx - 6$ a pour ordonnée à l'origine -6.



Le triangle est formé par la droite, la partie positive de l'axe des abscisses et la partie négative de l'axe des ordonnées. Il a une base de longueur $\frac{6}{k}$ et une hauteur de 6 (puisque l'ordonnée à l'origine est égale à -6). Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}\left(\frac{6}{k}\right)(6)$, ou $\frac{36}{2k}$, ou $\frac{18}{k}$.
Puisque le triangle a une aire de 6, alors $\frac{18}{k} = 6$, d'où $18 = 6k$, ou $k = 3$.

(d) On obtient l'abscisse à l'origine de la droite d'équation $y = 2mx - m^2$ en posant $y = 0$.
On obtient $0 = 2mx - m^2$, ou $0 = m(2x - m)$. Puisque $m > 0$, alors $2x = m$, ou $x = \frac{m}{2}$.
Cette droite a donc pour abscisse à l'origine $\frac{m}{2}$ ($m > 0$).
On obtient l'ordonnée à l'origine de cette droite en posant $x = 0$.
On obtient $y = 2m(0) - m^2$, ou $y = -m^2$.
Cette droite a donc pour ordonnée à l'origine $-m^2$.
De même, on obtient l'abscisse à l'origine de la droite d'équation $y = mx - m^2$ en posant $y = 0$. On obtient $0 = mx - m^2$, ou $0 = m(x - m)$. Puisque $m > 0$, alors $x = m$.
Cette droite a donc pour abscisse à l'origine m ($m > 0$).
On obtient l'ordonnée à l'origine de cette droite en posant $x = 0$. On obtient $y = m(0) - m^2$,

ou $y = -m^2$. Cette droite a donc pour ordonnée à l'origine $-m^2$.
Les deux droites ont donc la même ordonnée à l'origine.



On considère la partie entre les deux droites sur l'axe des abscisses comme la base du triangle. Sa longueur est égale à la différence des abscisses à l'origine. Elle est égale à $m - \dfrac{m}{2}$, ou $\dfrac{m}{2}$.
La hauteur est la partie de l'axe des ordonnées entre l'origine et le point d'intersection des droites avec cet axe. Puisque les droites ont une ordonnée à l'origine de $-m^2$, la hauteur du triangle est égale à m^2.
L'aire du triangle est donc égale à $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m}{2}\right)(m^2)$, ou $\dfrac{m^3}{4}$.
Puisque cette aire est égale à $\dfrac{54}{125}$, on a $\dfrac{m^3}{4} = \dfrac{54}{125}$, ou $m^3 = \dfrac{216}{125}$, ou $m = \sqrt[3]{\dfrac{216}{125}}$, ou $m = \dfrac{6}{5}$. (On peut vérifier que $\left(\dfrac{6}{5}\right)^3 = \dfrac{216}{125}$.)
La seule valeur de m pour laquelle le triangle a une aire de $\dfrac{54}{125}$ est $m = \dfrac{6}{5}$.

4. (a) Chacun des trois chiffres peut être un 1 ou un 2. Pour chacun des 2 choix pour le premier chiffre, il y a 2 choix pour le deuxième chiffre. Pour chacun de ces 2×2 choix, il y a 2 choix pour le troisième chiffre. Il y a donc 8 nombres Bauman de trois chiffres ($2^3 = 8$).
Ces nombres sont : 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222.

(b) Un nombre de Bauman de moins de trois tranches doit avoir une tranche ou deux tranches.

On considère d'abord les nombres de Bauman de 10 chiffres composés d'une seule tranche.
Un tel nombre doit être composé de 10 chiffres 1 ou de 10 chiffres 2.
Il y a donc 2 nombres de Bauman composés d'une tranche.

On considère ensuite les nombres de Bauman de 10 chiffres composés d'exactement deux tranches.
Un tel nombre doit avoir une tranche de chiffres 1 suivie d'une tranche de chiffres 2 ou bien une tranche de chiffres 2 suivie d'une tranche de chiffres 1.
Supposons que la tranche de chiffres 1 précède la tranche de chiffres 2.
La tranche de chiffres 1 peut contenir 1 chiffre, 2 chiffres, et ainsi de suite jusqu'à 9 chiffres (cette tranche a une longueur maximale de 9 chiffres, puisqu'elle doit être suivie d'une tranche de chiffres 2).
Dans chaque cas, les chiffres qui suivent sont des 2. Il y a donc 9 nombres de Bauman de cette sorte.
De même, il y a 9 nombres Bauman de 10 chiffres composés d'une tranche de chiffres 2 (de 1 à 9 chiffres 2) suivie d'une tranche de chiffres 1.

En tout, il y a 20 nombres de Bauman ($2 + 9 + 9 = 20$) de 10 chiffres composés de moins de trois tranches.

(c) On considère d'abord les nombres de Bauman composés d'une seule tranche.
Si la tranche est composée de chiffres 2, la somme de ses chiffres est paire. Il n'existe donc aucun nombre de Bauman composé d'exactement une tranche de chiffres 2 dont la somme des chiffres est égale à 7.
Il y a 1 nombre de Bauman composé d'une tranche de sept chiffres 1 dont la somme des chiffres est égale à 7.

On considère ensuite les nombres de Bauman composés d'exactement deux tranches.
Un tel nombre doit avoir au moins un chiffre 2 (puisqu'il y a deux tranches), et au plus trois chiffres 2, puisque la somme des chiffres est égale à 7.
Si le nombre de Bauman a une tranche d'un seul chiffre 2, il doit alors avoir une tranche de cinq chiffres 1.
Il existe exactement deux nombres de ce type, soit 211 111 et 111 112.
Si le nombre de Bauman a une tranche d'exactement deux chiffres 2, il doit avoir une tranche de trois chiffres 1.
Il existe exactement deux nombres de ce type, soit 22 111 et 11 122.
Si le nombre de Bauman a une tranche d'exactement trois chiffres 2, il doit avoir une tranche de un chiffre 1.
Il existe exactement deux nombres de ce type, soit 2221 et 1222.
Il existe donc 6 nombres de Bauman composés d'exactement deux tranches et dont les chiffres ont une somme de 7.

On considère enfin les nombres de Bauman composés d'exactement trois tranches.
Comme ci-haut, ils doivent avoir au moins un chiffre 2 et au plus trois chiffres 2.
Les nombres Bauman de ce type doivent être composés de :

(i) une tranche de un chiffre 2 et deux tranches de chiffres 1 (cinq 1 en tout), ou
(ii) une tranche de deux chiffres 2 et deux tranches de chiffres 1 (trois 1 en tout), ou
(iii) une tranche de un chiffre 1 et deux tranches de chiffres 2 (trois 2 en tout), ou
(iv) une tranche de trois chiffres 1 et deux tranches de chiffres 2 (deux 2 en tout)

On remarque qu'il est impossible pour des nombres de Bauman de ce type d'être composés de :

- une tranche de trois chiffres 2 ou plus et deux tranches de chiffres 1, puisque la somme des chiffres serait supérieure à 7 ;
- une tranche de deux chiffres 1 et deux tranches de chiffres 2 puisque la somme des chiffres serait paire ;
- une tranche de quatre chiffres 1 ou plus et deux tranches de chiffres 2, puisque la somme des chiffres serait supérieure à 7.

Dans le tableau suivant, on indique les nombres de Bauman qui sont composés d'exactement trois tranches et dont les chiffres ont une somme de 7.
Chaque rangée correspond à un des quatre cas énumérés ci-haut.

Cas	Nombres de Bauman
(i)	121 111, 112 111, 111 211, 111 121
(ii)	12 211, 11 221
(iii)	2122, 2212
(iv)	21 112

Il existe 9 nombres de Bauman composés d'exactement trois tranches et dont les chiffres ont une somme de 7.

Il existe 16 nombres de Bauman ($1+6+9=16$) composés d'au plus trois tranches et dont la somme des chiffres est égale à 7.

(d) On utilisera la notation $\boxed{2}$ pour représenter une tranche d'exactement 2018 chiffres 2. De plus, X_n représentera une suite de n chiffres contenant des 1, des 2 ou des 1 et des 2.
On cherche combien il existe de nombres de Bauman de 4037 chiffres qui ont au moins une $\boxed{2}$.
On considère trois cas :

(i) Le nombre de Bauman commence par une $\boxed{2}$. Les 2018 premiers chiffres sont donc des 2 et le 2019ᵉ chiffre est un 1. On remarque le 2019ᵉ chiffre doit être un 1, autrement la première tranche aurait au moins 2019 chiffres 2 et le nombre ne commencerait pas par une $\boxed{2}$.

(ii) Le nombre de Bauman se termine par une $\boxed{2}$. Ainsi les 2018 chiffres sont des 2 et le chiffre qui les précède (encore le 2019ᵉ chiffre du nombre) est un 1.
On remarque que (i) et (ii) peuvent se produire en même temps.

(iii) Le nombre de Bauman contient une $\boxed{2}$, mais cette $\boxed{2}$ ne se produit pas au début du nombre, ni à la fin du nombre. Dans ce cas, le nombre de Bauman contient les 2020 chiffres $1\boxed{2}1$ dans cet ordre.

On remarque que tout nombre de Bauman qui contient au moins une $\boxed{2}$ est conforme à au moins un des cas précédents.
On compte ensuite combien il existe de nombres de Bauman de 4037 chiffres dans chacun de ces trois cas.

<u>Cas (i)</u>

Les 2019 premiers chiffres du nombre sont $\boxed{2}1$. Il reste donc $(4037-2019)$ chiffres, ou 2018 chiffres, chacun pouvant être un 1 ou un 2.
Dans ce cas, les nombres de Bauman sont de la forme $\boxed{2}1X_{2018}$.
Il y a 2 choix pour chacun des 2018 derniers chiffres (soit un 1 ou un 2). Il y a donc 2^{2018} nombres de Bauman de cette forme.

<u>Cas (ii)</u>

De même, les 2019 derniers chiffres du nombre sont $1\boxed{2}$ et il reste 2018 chiffres $(4037-2019=2018)$, chacun pouvant être un 1 ou un 2.
Dans ce cas, les nombres de Bauman sont de la forme $X_{2018}1\boxed{2}$.
Il y a 2 choix pour chacun des 2018 autres chiffres (soit un 1 ou un 2). Il y a donc 2^{2018} nombres de Bauman de cette forme.
Comme il a été mentionné précédemment, il y a exactement 1 nombre qui satisfait aux conditions du cas (i) et du cas (ii).
Le nombre de Bauman $\boxed{2}1\boxed{2}$ a 4037 chiffres et il commence et se termine par $\boxed{2}$.
On a donc compté ce nombre deux fois, une fois dans le cas (i) et une autre fois dans le cas (ii).
Donc, le nombre de nombres de Bauman de 4037 chiffres qui satisfont aux conditions du cas (i) ou du cas (ii) est égal à $2^{2018}+2^{2018}-1$.

<u>Cas (iii)</u>

On remarque que chaque nombre de Bauman qui satisfait aux conditions du cas (iii) doit être différent de tout nombre de Bauman qui satisfait aux conditions du cas (i) ou du cas (ii).
On suppose d'abord que les 2020 premiers chiffres du nombre de Bauman sont $1\boxed{2}1$.
Dans ce cas, il reste 2017 chiffres $(4037-2020=2017)$, chacun pouvant être un 1 ou un 2.

Ces nombres de Bauman sont de la forme $1\boxed{2}1X_{2017}$.
Puisqu'il ne reste que 2017 chiffres à choisir, il n'est pas possible d'avoir un autre $\boxed{2}$, puisque chaque $\boxed{2}$ contient 2018 chiffres.
Il y a deux choix pour chacun des 2017 chiffres. Il y a donc 2^{2017} nombres de Bauman de cette forme.
Si on fait glisser les 2020 chiffres $1\boxed{2}1$ d'une position vers la droite, on obtient un nombre de la forme $X_1 1\boxed{2}1X_{2016}$.
Il y a toujours 2^{2017} façons de choisir les 2017 chiffres.
On fait glisser les 2020 chiffres successivement d'une position vers la droite pour obtenir les nombres de la forme $X_2 1\boxed{2}1X_{2015}$, $X_3 1\boxed{2}1X_{2014}$, $X_4 1\boxed{2}1X_{2013}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que $1\boxed{2}1$ se retrouve à la fin du nombre et que l'on obtienne un nombre de la forme $X_{2017}1\boxed{2}1$.
Pour chacun de ces nombres, il y a 2 façons de choisir chacun des 2017 autres chiffres. Il y a donc 2^{2017} nombres de Bauman de cette forme.
En d'autres mots, pour chaque nombre de Bauman d'une des formes

$$1\boxed{2}1X_{2017}, X_1 1\boxed{2}1X_{2016}, X_2 1\boxed{2}1X_{2015}, X_3 1\boxed{2}1X_{2014}, \ldots, X_{2016}1\boxed{2}1X_1, X_{2017}1\boxed{2}1,$$

il y a 2^{2017} façons de choisir les autres chiffres.
Puisqu'il y a 2018 telles formes, chacune avec 2^{2017} façons de choisir les autres chiffres, il y a $2018 \cdot 2^{2017}$ nombres de Bauman qui satisfont aux conditions du cas (iii).

Le nombre de nombres de Bauman de 4037 chiffres qui incluent au moins une tranche d'exactement 2018 chiffres 2 est égal à :

$$\begin{aligned} 2^{2018} + 2^{2018} - 1 + 2018 \cdot 2^{2017} &= 2 \cdot 2^{2018} - 1 + 1009 \cdot 2 \cdot 2^{2017} \\ &= 2 \cdot 2^{2018} - 1 + 1009 \cdot 2^{2018} \\ &= 1011 \cdot 2^{2018} - 1 \end{aligned}$$

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2017

le mercredi 12 avril 2017
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 13 avril 2017
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Les stylos rouges se vendent en boites de 6 stylos.
Donc, 5 boites de stylos rouges contiennent 30 stylos ($5 \times 6 = 30$).
Les stylos bleus se vendent en boites de 9 stylos.
Donc, 3 boites de stylos bleus contiennent 27 stylos ($3 \times 9 = 27$).
En tout, Igor a acheté 57 stylos ($30 + 27 = 57$).

(b) Rachel a acheté 21 boites de stylos rouges, soit un total de 126 stylos rouges ($21 \times 6 = 126$).
Elle a acheté 369 stylos en tout. Elle a donc acheté 243 stylos bleus ($369 - 126 = 243$).
Puisque les stylos bleus se vendent en boites de 9 stylos, elle a acheté 27 boites de stylos bleus ($243 \div 9 = 27$).

(c) *Solution 1*
Supposons que Suzanne achète r boites de stylos rouges et b boites de stylos bleus, r et b étant des entiers positifs ou nuls.
Donc, elle achète $6r$ stylos rouges et $9b$ stylos bleus.
Si elle achetait 31 stylos en tout, on aurait $6r + 9b = 31$.
Or, si on factorise le membre de gauche de cette équation, on obtient $3(2r + 3b) = 31$.
Puisque r et b sont des entiers, alors $2r + 3b$ est aussi un entier, ce qui signifie que le membre de gauche de l'équation est un multiple de 3.
Puisque le membre de droite, 31, n'est pas un multiple de 3, l'équation n'admet aucune solution. C'est-à-dire qu'il n'existe pas d'entiers r et b qui vérifient l'équation $6r+9b = 31$.
Donc, il est impossible pour Suzanne d'acheter exactement 31 stylos.

Solution 2
Supposons que Suzanne achète r boites de stylos rouges et b boites de stylos bleus, r et b étant des entiers positifs ou nuls.
Donc, elle achète $6r$ stylos rouges et $9b$ stylos bleus.
Si elle achetait 31 stylos en tout, elle aurait $6r + 9b = 31$.
La plus petite valeur possible de b est 0 et la plus grande valeur possible de b est 3, puisque si $b \geq 4$, alors le nombre de stylos achetés serait supérieur ou égal à 36 ($4 \times 9 = 36$).
On isole r dans l'équation $6r + 9b = 31$ pour obtenir $6r = 31 - 9b$, puis $r = \dfrac{31 - 9b}{6}$.
On utilise cette équation, ainsi que les les valeurs de b qui varient de 0 à 3 pour calculer les valeurs correspondantes de r. Les valeurs sont placées dans le tableau suivant :

b	$r = \dfrac{31 - 9b}{6}$
0	$r = \dfrac{31 - 9(0)}{6} = \dfrac{31}{6}$
1	$r = \dfrac{31 - 9(1)}{6} = \dfrac{22}{6}$
2	$r = \dfrac{31 - 9(2)}{6} = \dfrac{13}{6}$
3	$r = \dfrac{31 - 9(3)}{6} = \dfrac{4}{6}$

Pour chacune des valeurs de b, la valeur correspondante de r n'est jamais un entier.
Donc, il n'existe pas d'entiers r et b qui vérifient l'équation $6r + 9b = 31$. Il est donc

impossible pour Suzanne d'acheter exactement 31 stylos.

2. (a) On exprime $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{4}$ au moyen du dénominateur commun 40 : $\frac{1}{5} = \frac{8}{40}$ et $\frac{1}{4} = \frac{10}{40}$.
On veut que $\frac{n}{40} > \frac{8}{40}$ et $\frac{n}{40} < \frac{10}{40}$. On doit donc avoir $n > 8$ et $n < 10$.
La seule valeur entière de n qui vérifie ces deux inéquations est $n = 9$.

(b) On exprime $\frac{m}{8}$ et $\frac{1}{3}$ au moyen du dénominateur commun 24 : $\frac{m}{8} = \frac{3m}{24}$ et $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$.
On veut que $\frac{3m}{24} > \frac{8}{24}$. On doit donc avoir $3m > 8$, ou $m > \frac{8}{3}$.
Puisque $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ et que m est un entier, alors $m \geq 3$.
On exprime $\frac{m+1}{8}$ et $\frac{2}{3}$ au moyen du dénominateur commun 24 : $\frac{m+1}{8} = \frac{3(m+1)}{24}$ et $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$.
On doit avoir $\frac{3(m+1)}{24} < \frac{16}{24}$. On doit donc avoir $3m + 3 < 16$, ou $3m < 13$, ou $m < \frac{13}{3}$.
Puisque $\frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$ et que m est un entier, alors $m \leq 4$.
Les valeurs entières de m qui vérifient $m \geq 3$ et $m \leq 4$ sont $m = 3$ et $m = 4$.

(c) Au début du weekend, Fiona avait joué 30 matchs et gagné g matchs. Son ratio de victoires était donc égal à $\frac{g}{30}$.
Puisque son ratio de victoires était supérieur à 0,5, ou $\frac{1}{2}$, alors $\frac{g}{30} > \frac{1}{2}$.
Puisque $\frac{1}{2} = \frac{15}{30}$, on a $\frac{g}{30} > \frac{15}{30}$, d'où $g > 15$.
Pendant le weekend, Fiona joue 5 matchs pour un total de 35 matchs joués $(30 + 5 = 35)$.
Puisqu'elle a gagné 3 de ces matchs, elle a un total de $g+3$ victoires et son ratio de victoires est donc égal à $\frac{g+3}{35}$.
À la fin du weekend, le ratio de victoires de Fiona est inférieur à 0,7, ou $\frac{7}{10}$. On a donc $\frac{g+3}{35} < \frac{7}{10}$.
On récrit cette inéquation au moyen du dénominateur commun 70. On obtient $\frac{2(g+3)}{70} < \frac{49}{70}$, d'où $2(g+3) < 49$, ou $2g + 6 < 49$, ou $2g < 43$, ou $g < \frac{43}{2}$.
Puisque $\frac{43}{2} = 21\frac{1}{2}$ et que g est un entier, alors $g \leq 21$.
Les valeurs entières de g qui vérifient $g > 15$ et $g \leq 21$ sont $g = 16, 17, 18, 19, 20, 21$.

3. (a) Puisque les cordes DE et FG se coupent en X, alors $(DX)(EX) = (FX)(GX)$, ou $(DX)(8) = (6)(4)$. On a donc $DX = \frac{(6)(4)}{8}$, ou $DX = 3$.
DX a une longueur de 3.

(b) Puisque les cordes JK et LM se coupent en X, alors $(JX)(KX) = (LX)(MX)$, ou $(8y)(10) = (16)(y+9)$. On a donc $80y = 16y + 144$, d'où $64y = 144$, ou $y = \frac{144}{64}$, ou $y = \frac{9}{4}$.

(c) Puisque les cordes PQ et ST se coupent en U, alors $(PU)(QU) = (SU)(TU)$.
Puisque $TU = TV + UV$, alors $TU = 6 + n$.
L'équation $(PU)(QU) = (SU)(TU)$ devient $(m)(5) = (3)(6 + n)$, ou $5m = 18 + 3n$.
Puisque les cordes PR et ST se coupent en V, alors $(PV)(RV) = (TV)(SV)$.
Puisque $SV = SU + UV$, alors $SV = 3 + n$.
L'équation $(PV)(RV) = (TV)(SV)$ devient $(n)(8) = (6)(3 + n)$, ou $8n = 18 + 6n$, ou $2n = 18$, ou $n = 9$.
On reporte $n = 9$ dans $5m = 18 + 3n$ pour obtenir $5m = 18 + 3(9)$, ou $5m = 45$, ou $m = 9$.
Donc $m = 9$ et $n = 9$.

4. (a) Dan, Yona et Tam ont respectivement 6, 4 et 8 bonbons après la 2e étape.
Puisqu'ils ont tous un nombre pair de bonbons, aucun bonbon n'est rejeté à la 1re étape.
Durant la 2e étape, Dan donne la moitié de ses 6 bonbons à Yona et reçoit la moitié des 8 bonbons de Tam. Il a maintenant 7 bonbons $(6 - 3 + 4 = 7)$.
Yona donne la moitié de ses 4 bonbons à Tam et reçoit la moitié des 6 bonbons de Dan. Elle a maintenant 5 bonbons $(4 - 2 + 3 = 5)$.
Tam donne la moitié de ses 8 bonbons à Dan et reçoit la moitié des 4 bonbons de Yona. Il a maintenant 6 bonbons $(8 - 4 + 2 = 6)$.
Puisque Dan a 7 bonbons et que Yan en a 5, ils se débarassent d'un bonbon chacun, tandis que Tam, qui a un nombre pair de bonbons, ne fait rien.
Ces étapes sont résumées dans le tableau ci-contre.

On continue à remplir le tableau jusqu'à la fin. À la fin, Dan, Yona et Tam ont chacun 4 bonbons.

	Dan	Yona	Tam
Au départ	3	7	10
Après la 1re étape	2	6	10
Après la 2e étape	6	4	8
Après la 2e étape	7	5	6
Après la 1re étape	6	4	6
Après la 2e étape	6	5	5
Après la 1re étape	6	4	4
Après la 2e étape	5	5	4
Après la 1re étape	4	4	4

(b) Dan, Yona et Tam ont respectivement 16, 0 et 0 bonbons au départ.
Les résultats après chaque étape sont donnés dans le tableau ci-contre. (Ceux de la 1re étape sont ignorés lorsque chaque élève a un nombre pair de bonbons.)
À la fin, chacun a 4 bonbons.

	Dan	Yona	Tam
Au départ	16	0	0
Après la 2e étape	8	8	0
Après la 2e étape	4	8	4
Après la 2e étape	4	6	6
Après la 2e étape	5	5	6
Après la 1re étape	4	4	6
Après la 2e étape	5	4	5
Après la 1re étape	4	4	4

(c) On examine d'abord ce qui arrive au nombre de bonbons après la 2e étape.
Supposons que Yona a c bonbons et que Dan (de qui Yona reçoit des bonbons) a d bonbons et supposons que c et d sont des entiers pairs.
Pendant la 2e étape, Yona donne la moitié de ses bonbons et il lui restera $\frac{c}{2}$ bonbons.
Pendant cette étape, Yona reçoit $\frac{d}{2}$ bonbons de Dan (la moitié des d bonbons de Dan).
Après la 2e étape, Yona aura $\frac{c}{2} + \frac{d}{2}$ bonbons, c'est-à-dire $\frac{c+d}{2}$ bonbons, ce qui représente

la moyenne des c bonbons et des d bonbons qu'elle et Dan avaient avant cette étape.

Mercredi, au départ, Dan a $2n$ bonbons tandis que Yona et Tam ont chacun $2n + 3$ bons. Puisque $2n + 3$ est 3 de plus qu'un multiple de 2, alors $2n + 3$ est un entier impair pour toute valeur entière de n.
On procède donc à la 1re étape et après cette étape, Dan a $2n$ bonbons ($2n$ est pair et Dan garde tous ses bonbons), tandis que Yona et Tam ont chacun $2n + 2$ bonbons.
Après la 2^{e} étape, Yona aura la moyenne de ses $2n+2$ bonbons et des $2n$ bonbons de Dan, c'est-à-dire $\dfrac{(2n + 2) + 2n}{2}$ bonbons, ou $\dfrac{4n + 2}{2}$ bonbons, ou $2n + 1$ bonbons.
Tam aura la moyenne de ses $2n + 2$ bonbons et des $2n + 2$ bonbons de Yan, c'est-à-dire $2n + 2$ bonbons.

Dan aura la moyenne de ses $2n$ bonbons et des $2n + 2$ bonbons de Tam, c'est-à-dire $\dfrac{(2n + 2) + 2n}{2}$ bonbons, ou $\dfrac{4n + 2}{2}$ bonbons, ou $2n + 1$ bonbons.

Puisque Yona et Dan ont chacun un nombre impair de bonbons, on procède à la 1re étape.
On continue dans le tableau ci-contre.

	Dan	Yona	Tam
Au départ	$2n$	$2n+3$	$2n+3$
Après la 1re étape	$2n$	$2n+2$	$2n+2$
Après la 2^{e} étape	$2n+1$	$2n+1$	$2n+2$
Après la 1re étape	$2n$	$2n$	$2n+2$
Après la 2^{e} étape	$2n+1$	$2n$	$2n+1$
Après la 1re étape	$2n$	$2n$	$2n$

À la fin, chacun a $2n$ bonbons.

(d) Jeudi, au départ, Dan a 2^{2017} bonbons. Il en donne la moitié (c'est-à dire $\frac{1}{2} \times 2^{2017}$, ou 2^{2016}) à Yona et en reçoit 0 de Tam. À la fin de cette 2^{e} étape, il a 2^{2016} bonbons.
On remplit un tableau pour suivre les premiers pas de cette procédure et se faire une idée de ce qui arrive. (On ignore toujours la 1re étape lorsque tous les nombres sont pairs.)

	Dan	Yona	Tam
Au départ	2^{2017}	0	0
Après la 2^{e} étape	2^{2016}	2^{2016}	0
Après la 2^{e} étape	2^{2015}	2^{2016}	2^{2015}
Après la 2^{e} étape	2^{2015}	$2^{2014} + 2^{2015}$ $= 2^{2014} + 2 \times 2^{2014}$ $= 3 \times 2^{2014}$	$2^{2015} + 2^{2014}$ $= 2 \times 2^{2014} + 2^{2014}$ $= 3 \times 2^{2014}$
Après la 2^{e} étape	$2^{2015} + 2^{2013}$ $= 2^2 \times 2^{2013} + 2^{2013}$ $= 5 \times 2^{2013}$	$2^{2013} + 2^{2015}$ $= 2^{2013} + 2^2 \times 2^{2013}$ $= 5 \times 2^{2013}$	$2^{2015} + 2^{2014}$ $= 2 \times 2^{2014} + 2^{2014}$ $= 3 \times 2^{2014}$

Comme on l'a montré dans la partie (c), après une 2^{e} étape, chaque élève a un nombre de bonbons égal à la moyenne des nombres de bonbons de deux élèves au début de l'étape.
Si chaque élève, au début de l'étape, a un nombre de bonbons divisible par 2^k (k étant un entier strictement positif quelconque), alors à la fin de la 2^{e} étape, chaque élève aura un nombre de bonbons qui est divisible par 2^{k-1}. Pourquoi ?
Si Yona a a bonbons et Dan a b bonbons, a et b étant chacun divisible par 2^k, alors après la 2^{e} étape, le nombre de bonbons de Yona est égal à la moyenne $\dfrac{a+b}{2}$, ou $\dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2}$.

Puisque a est divisible par 2^k, alors $\dfrac{a}{2}$ est divisible par 2^{k-1} et de même, $\dfrac{b}{2}$ est divisible par 2^{k-1}. Leur somme est donc divisible par 2^{k-1} (et possiblement davantage).
On présente maintenant quatre remarques importantes qui nous mèneront à la conclusion.

1^{re} remarque importante :
Au départ, les élèves ont respectivement 2^{2017}, 0 et 0 bonbons et chacun de ces nombres est divisible par 2^{2017}.
Après la 1re utilisation de la 2e étape, on obtient trois nombres qui sont divisibles par 2^{2016}.
Après la 2e utilisation de la 2e étape, on obtient trois nombres qui sont divisibles par 2^{2015}.
Après la 3e utilisation de la 2e étape, on obtient trois nombres qui sont divisibles par 2^{2014}, et ainsi de suite. (On peut le vérifier dans le tableau ci-dessus.)
Donc, en commençant avec 2^{2017}, 0 et 0 bonbons, on peut utiliser la 2e étape 2017 fois de suite.
On remarque qu'après chacune de ces 2017 fois, chaque élève a un nombre pair de bonbons et la 1re étape n'est donc jamais utilisée (aucun bonbon n'est rejeté) et le nombre total de bonbons est toujours égal à 2^{2017}.

2e remarque importante :
Au début de la 2e étape, si les élèves ont respectivement $2a, 2a$ et $2b$ bonbons (exactement deux élèves ont le même nombre de bonbons), alors après la 2e étape, ils auront respectivement $a + b, 2a$, et $a + b$ bonbons.
Il y aura donc exactement deux élèves qui ont le même nombre de bonbons.

3e remarque importante :
Au début de la 2e étape, si les élèves ont respectivement $2a, 2a$ et $2b$ bonbons ($a < b$), on dira qu'on a une situation « 2 bas, 1 haut », ou BBH (les deux nombres égaux sont inférieurs au troisième).
Dans ce cas, à la fin de la 2e étape, les élèves ont respectivement $a+b, 2a$ et $a+b$ bonbons, c'est-à-dire une situation « 2 hauts, 1 bas », ou HHB. (Puisque $a < b$, alors $a + a < b + a$, ou $2a < a + b$.)
Si on passe à la 2e étape avec cette situation HHB, on obtient une situation BBH.
Puisqu'au départ, il y a 2^{2017}, 0 et 0 bonbons, c'est-à-dire une situation BBH, alors après 2017 applications de la 2e étape, on aura une situation HHB.

4e remarque importante :
Si les élèves ont respectivement $2a, 2a$ et $2b$ bonbons, la différence positive entre le plus grand nombre de bonbons et le plus petit nombre de bonbons est égale à $2b-2a$ (ou $2a-2b$ lorsque $a > b$).
Après la 2e étape, ils ont respectivement $a+b, 2a$ et $a+b$ bonbons et la la différence positive entre le plus grand nombre de bonbons et le plus petit nombre de bonbons est égale à $b-a$ (ou $a - b$ lorsque $a > b$).
Donc, lorsqu'on applique la 2e étape une fois, la différence positive entre le plus grand nombre de bonbons et le plus petit nombre de bonbons est diminuée par un facteur de 2 (c.-à-d. que $a - b = \frac{1}{2}(2a - 2b)$).
Donc lorsque les élèves ont respectivement 2^{2017}, 0 et 0 bonbons au départ, avec une différence positive égale à 2^{2017}, et qu'on applique la 2e étape 2017 fois, on obtient une situation HHB avec une différence positive entre le plus grand nombre de bonbons et le plus petit nombre de bonbons égale à 1.
Après avoir appliqué la 2e étape 2017 fois, les nombres respectifs de bonbons sont donc $n + 1, n + 1$ et n (n étant un entier non négatif quelconque).

Conclusion :
Puisque la 1re étape n'a pas été utilisée, il reste encore 2^{2017} bonbons partagés par trois élèves.

Si n est impair, le nombre total de bonbons, $3n + 2$, est impair.
Puisque $3n + 2$ doit être égal à 2^{2017}, ceci n'est pas possible. Donc n doit être pair.
Puisque n est pair, alors $n + 1$ est impair et on utilise la 1re étape avec les $n + 1, n + 1$ et n bonbons, après quoi chaque élève a n bonbons.
Deux bonbons ont été rejetés dans cette 1re étape et il reste donc $2^{2017} - 2$ bonbons.
Puisque chaque élève a le même nombre de bonbons et qu'il reste $2^{2017} - 2$ bonbons en tout, chacun a $\dfrac{2^{2017} - 2}{3}$ bonbons à la fin.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2016

le mercredi 13 avril 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 avril 2016
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) On obtient le résultat total de l'école A en additionnant les résultats des quatre élèves qui représentent cette école, soit ceux de la première rangée.
On a $12 + 8 + 10 + 6 = 36$. Le résultat total de l'école A est égal à 36.

(b) Puisque l'école A a un résultat total de 36, l'école B a aussi un résultat total de 36.
Les élèves de l'école B ont pour résultats $17, 5, 7$ et x. Donc $17 + 5 + 7 + x = 36$, ou $29 + x = 36$, d'où $x = 7$.

(c) Le résultat z de l'élève 4 de l'école C est le double du résultat y de l'élève 3 de l'école C. Donc $z = 2y$.
Les élèves de l'école C ont pour résultats $9, 15, y$ et z.
Puisque l'école C a aussi un résultat total de 36 et que $z = 2y$, alors $9 + 15 + y + 2y = 36$, ou $24 + 3y = 36$. Donc $3y = 12$, ou $y = 4$.
L'élève 3 de l'école C a donc un résultat de 4 et l'élève 4 de l'école C a le double, soit 8.

2. (a) À toutes les deux secondes, Esther fait 5 pas et chaque pas a une longueur de 0,4 m.
En 2 secondes, Esther parcourt donc une distance de $5 \times 0{,}4$ m, ou 2 m.

(b) *Solution 1*
À toutes les deux secondes, Paul fait 5 pas et chaque pas a une longueur de 1,2 m.
En 2 secondes, Paul parcourt donc une distance de $5 \times 1{,}2$ m, ou 6 m.
Il parcourt donc 3 m à chaque seconde. Il court donc à une vitesse de 3 m/s.

Solution 2
Paul fait 5 pas à toutes les 2 secondes. Il fait donc 2,5 pas par seconde.
Chacun de ses pas a une longueur de 1,2 m. À chaque seconde, Paul parcourt donc $2{,}5 \times 1{,}2$ m, ou 3 m.
Paul court donc à une vitesse de 3 m/s.

(c) *Solution 1*
Paul court à une vitesse de 3 m/s. En 120 secondes (2 minutes), il parcourt donc une distance de 120×3 m, ou 360 m.
Esther parcourt 2 m à toutes les 2 secondes. Elle court donc à une vitesse de 1 m/s.
En 120 secondes, elle parcourt donc une distance de 120×1 m, ou 120 m.
Si les deux commencent une course en même temps, alors après 2 minutes Paul aura une avance de 360 m − 120 m, ou 240 m sur Esther.

Solution 2
Chacun des pas de Paul a 0,8 m de plus que chaque pas d'Esther (1,2 m − 0,4 m = 0,8 m).
À toutes les 2 secondes, Paul et Esther font chacun 5 pas. En 2 minutes, ou 120 secondes (60×2 secondes), Paul et Esther font 300 pas ($60 \times 5 = 300$).
Si les deux commencent une course en même temps, alors après 2 minutes Paul aura une avance de $0{,}8 \times 300$ m, ou 240 m sur Esther.

Solution 3
Paul court à une vitesse de 3 m/s et Esther court à une vitesse de 1 m/s, car elle parcourt 2 m en 2 secondes.
Dans 1 seconde, Paul parcourt 3 m et Esther parcourt 1 m.
À chaque seconde, Paul parcourt donc 2 m de plus qu'Esther.
Si les deux commencent une course en même temps, alors après 2 minutes (120 secondes) Paul aura une avance de 120×2 m, ou 240 m sur Esther.

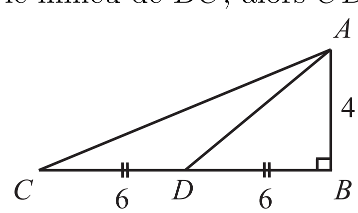
(d) *Solution 1*
Esther parcourt 2 m à toutes les 2 secondes, ou 1 m par seconde.
En 3 minutes (180 secondes), Esther parcourt donc 180 m.
Paul court à une vitesse de 3 m/s, ce qui est 2 m/s de plus que la vitesse d'Esther.
À chaque seconde, Paul parcourt donc 2 m de plus qu'Esther.
Puisqu'Esther a une avance de 180 m lorsque Paul commence la course, Paul mettra 90 s ($180 \div 2 = 90$) pour combler la différence, c'est-à-dire pour rejoindre Esther.

Solution 2
Esther parcourt 2 m à toutes les 2 secondes, ou 1 m par seconde.
En 3 minutes (180 secondes), Esther parcourt donc 180 m.
Chaque pas de Paul a 0,8 m de plus ($1{,}2\,\text{m} - 0{,}4\,\text{m} = 0{,}8\,\text{m}$) que chaque pas d'Esther.
Puisque Paul et Esther font leurs pas au même rythme (5 pas à toutes les 2 secondes), alors Paul aura besoin de 225 pas ($180 \div 0{,}8 = 225$) pour rejoindre Esther.
Puisque Paul fait 5 pas à toutes les 2 secondes, il mettra 90 s ($\frac{225}{5} \times 2 = 45 \times 2 = 90$) pour rejoindre Esther.

3. (a) *Solution 1*
Dans le triangle ABC, AD est une médiane. Donc, D est le milieu de BC.
Puisque $BC = 12$ et que D est le milieu de BC, alors $CD = \frac{12}{2}$, ou $CD = 6$.

Dans le triangle ACD, la base CD a une longueur de 6 et la hauteur correspondante, AB, a une longueur de 4. (Puisque $\angle ABC = 90°$, AB est une hauteur du triangle ACD même si AB est à l'extérieur du triangle ACD.)
Le triangle ACD a donc une aire de $\frac{1}{2}(6)(4)$, ou 12.

Solution 2
Dans le triangle ABC, AD est une médiane. Donc, D est le milieu de BC.
Puisque $BC = 12$ et que D est le milieu de BC, alors $CD = DB = 6$.



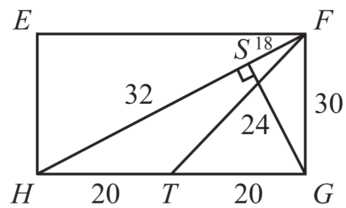
Dans le triangle ABD, on a $AB = 4$, $DB = 6$ et $\angle ABD = 90°$. Le triangle ABD a donc une aire de $\frac{1}{2}(6)(4)$, ou 12.
De même, le triangle ABC a une aire de $\frac{1}{2}(12)(4)$, ou 24. L'aire du triangle ACD est égale à l'aire du triangle ABC moins celle du triangle ABD. Elle est égale à $24 - 12$, ou 12.

Solution 3
Dans le triangle ABC, on a $AB = 4$, $BC = 12$ et $\angle ABC = 90°$. Le triangle ABC a donc une aire de $\frac{1}{2}(12)(4)$, ou 24.
Une médiane du triangle ABC coupe le triangle en deux triangles de même aire. Pourquoi ?

Dans le triangle ABC, AD est une médiane. D est donc le milieu de BC.
Les triangles ACD et ABD ont donc des bases égales ($CD = BD$).
Ces triangles partagent aussi la même hauteur AB.
Les triangles ACD et ABD ont donc la même aire et cette aire est la moitié de l'aire du triangle ABC. La médiane AD coupe donc le triangle ABC en deux triangles de même aire.

Puisque le triangle ABC a une aire de 24, alors le triangle ACD a une aire de $\frac{24}{2}$, ou 12.

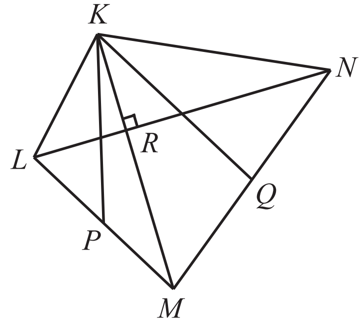
(b) *Solution 1*
Dans le triangle FSG, on a $FS = 18$, $SG = 24$ et $\angle FSG = 90^\circ$.
D'après le théorème de Pythagore, $FG = \sqrt{18^2 + 24^2} = \sqrt{324 + 576} = \sqrt{900} = 30$ (puisque $FG > 0$).
Puisque S est situé sur FH et que $FS = 18$ et $SH = 32$, alors $FH = FS + SH$, d'où $FH = 18 + 32$, ou $FH = 50$.
Dans le triangle FGH, on a $FH = 50$, $FG = 30$ et $\angle FGH = 90^\circ$.
D'après le théorème de Pythagore, $GH = \sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{2500 - 900} = \sqrt{1600} = 40$ (puisque $GH > 0$).
Dans le triangle FGH, FT est une médiane. T est donc le milieu de GH.
Dans le triangle FHT, la base HT a une longueur de $\frac{40}{2}$, ou 20, et la hauteur correspondante FG a une longueur de 30. (Puisque $\angle FGH = 90^\circ$, FG est une hauteur du triangle FHT même si FG est situé à l'extérieur du triangle.)



Le triangle FHT a donc une aire égale à $\frac{1}{2}(20)(30)$, ou 300.

Solution 2
Puisque S est situé sur FH et que $FS = 18$ et $SH = 32$, alors $FH = FS + SH$, d'où $FH = 18 + 32$, ou $FH = 50$.
Dans le triangle FGH, la base FH a une longueur de 50 et la hauteur correspondante SG a une longueur de 24 (Puisque SG est perpendiculaire à FH, SG est une hauteur du triangle FGH).
Le triangle FGH a donc une aire égale à $\frac{1}{2}(50)(24)$, ou 600.
La médiane d'un triangle coupe le triangle en deux triangles de même aire.
(La solution 3 de la partie (a) explique pourquoi au moyen d'un exemple.)
Puisque FT est une médiane du triangle FGH, alors l'aire du triangle FHT est égale à $\frac{600}{2}$, ou 300.

(c) On utilise la notation $|\triangle KLM|$ pour représenter l'aire du triangle KLM, $|KPMQ|$ pour représenter l'aire de $KPMQ$, et ainsi de suite.
Dans le triangle KLM, KP est une médiane. On a donc $2|\triangle KPM| = |\triangle KLM|$.
(La solution 3 de la partie (a) explique pourquoi une médiane coupe un triangle en deux triangles de même aire.)
Dans le triangle KMN, KQ est une médiane. On a donc $2|\triangle KMQ| = |\triangle KMN|$.



Donc
$$|KLMN| = |\triangle KLM| + |\triangle KMN| = 2|\triangle KPM| + 2|\triangle KMQ|$$

et

$$|KPMQ| = |\triangle KPM| + |\triangle KMQ|.$$

On a donc $|KLMN| = 2|KPMQ|$.
Puisque $|KPMQ| = 63$, alors $|KLMN| = 2|KPMQ|$, d'où $|KLMN| = 2(63) = 126$.
Or, $|KLMN| = |\triangle KRL| + |\triangle LRM| + |\triangle KRN| + |\triangle NRM|$.
Chacun de ces quatre triangles est rectangle.
Puisque $KR = x$ et $LR = 6$, alors $|\triangle KRL| = \frac{1}{2}x(6) = 3x$.
Puisque $LR = 6$ et $RM = 2x + 2$, alors $|\triangle LRM| = \frac{1}{2}(6)(2x + 2) = 6x + 6$.
Puisque $KR = x$ et $RN = 12$, alors $|\triangle KRN| = \frac{1}{2}x(12) = 6x$.
Puisque $RN = 12$ et $RM = 2x + 2$, alors $|\triangle NRM| = \frac{1}{2}(12)(2x + 2) = 12x + 12$.
Donc $126 = 3x + (6x + 6) + 6x + (12x + 12)$, ou $126 = 27x + 18$, d'où $27x = 108$, ou $x = 4$.

4. (a) Puisque les nombres d'une colonne n'ont aucune influence sur ceux d'une autre colonne, la plus petite somme possible des nombres dans une rangée d'une carte de BINGO est égale à la somme des plus petits nombres possibles de chaque colonne.

Colonne	Nombres possibles	Plus petit nombre possible
B	$1, 2, 3, \ldots, 13, 14, 15$	1
I	$16, 17, 18, \ldots, 28, 29, 30$	16
N	$0, 31, 32, 33, \ldots, 43, 44, 45$	0
G	$46, 47, 48, \ldots, 58, 59, 60$	46
O	$61, 62, 63, \ldots, 73, 74, 75$	61

La plus petite somme possible des nombres dans une rangée d'une carte de BINGO est égale à $1 + 16 + 0 + 46 + 61$, ou 124. (Cette somme peut seulement survenir dans la rangée du milieu, car le 0 peut seulement paraitre dans la case du milieu.)

(b) *Solution 1*
D'après la partie (a), la plus petite somme possible des nombres dans une rangée est 124.
Cette somme minimale se produit dans la 3$^{\text{e}}$ rangée et le nombre de la colonne N est 0.
(Si on n'utilise pas la 3$^{\text{e}}$ rangée, le plus petit nombre possible dans la colonne N est 31. La somme minimale possible des nombres dans une rangée autre que la 3$^{\text{e}}$ est donc de $1 + 16 + 31 + 46 + 61$, ou $124 + 31$, ou 155.)
La somme minimale possible des nombres d'une diagonale est aussi de 124, car on peut aussi utiliser le plus petit nombre de chaque colonne.
Dans chaque cas, pour la somme minimale d'une rangée et la somme minimale d'une diagonale, on utiliserait les mêmes nombres, soit $1, 16, 0, 46$ et 61.
Or, le nombre 1 ne peut paraitre dans la 3$^{\text{e}}$ rangée et dans une diagonale, puisqu'une carte de BINGO contient 25 nombres distincts.
Dans la colonne B, les deux plus petits nombres qui peuvent paraitre dans la 3$^{\text{e}}$ rangée et dans la diagonale sont 1 et 2.
De même, dans la colonne I, les deux plus petits nombres qui peuvent paraitre dans la 3$^{\text{e}}$ rangée et dans la diagonale sont 16 et 17.
Dans la colonne N, la 3$^{\text{e}}$ rangée et la diagonale partagent le plus petit nombre, soit 0.
De même, dans la colonne G, les deux plus petits nombres qui peuvent paraitre dans la 3$^{\text{e}}$ rangée et dans la diagonale sont 46 et 47.
De même, dans la colonne O, les deux plus petits nombres qui peuvent paraitre dans la 3$^{\text{e}}$ rangée et dans la diagonale sont 61 et 62.
Ainsi sur n'importe quelle carte de BINGO, les nombres qui paraissent dans une rangée et ceux qui paraissent dans une diagonale ne peuvent pas être plus petits que 1, 2, 16, 17, 0,

0, 46, 47, 61 et 62.
La somme de ces nombres est égale à $1 + 2 + 16 + 17 + 0 + 0 + 46 + 47 + 61 + 62$, ou 252.
Puisque la carte de BINGO de Carla a une rangée et une diagonale qui ont la même somme, cette somme doit être supérieure ou égale à la moitié de 252, soit 126.
Une telle carte de BINGO existe (voir la carte suivante) avec une rangée et une diagonale dont les nombres ont une somme de 126.

B	I	N	G	O
1				
	17			
2	16	0	47	61
			46	
				62

On voit que la rangée et la diagonale ont chacun des nombres avec une somme de 126 : $2 + 16 + 0 + 47 + 61 = 1 + 17 + 0 + 46 + 62 = 126$.
Les autres cases de la carte peuvent être remplies avec les autres nombres non utilisés.

Solution 2
D'après la partie (a), la plus petite somme possible des nombres dans une rangée est 124.
Cette somme minimale se produit dans la 3^{e} rangée et le nombre de la colonne N est 0.
(Si on n'utilise pas la 3^{e} rangée, le plus petit nombre possible dans la colonne N est 31.
La somme minimale possible des nombres dans une rangée autre que la 3^{e} est donc de $1 + 16 + 31 + 46 + 61$, ou $124 + 31$, ou 155.)
La somme minimale possible des nombres d'une diagonale est aussi de 124, car on peut aussi utiliser le plus petit nombre de chaque colonne.
Dans chaque cas, pour la somme minimale d'une rangée et la somme minimale d'une diagonale, on utiliserait les mêmes nombres, soit $1, 16, 0, 46$ et 61.
Or, le nombre 1 ne peut paraitre dans la 3^{e} rangée et dans la diagonale, puisque 1 ne peut paraitre deux fois dans la colonne B.
De même, le nombre 16 ne peut paraitre dans la 3^{e} rangée et dans la diagonale, puisque 16 ne peut paraitre deux fois dans la colonne I. De même, 46 et 61 ne peuvent paraitre dans la 3^{e} rangée et dans la diagonale. Il est donc impossible pour une carte de BINGO d'avoir une 3^{e} colonne et une diagonale avec la même somme de 124.
Il est possible pour une carte de BINGO d'avoir une 3^{e} colonne et une diagonale avec une même somme de 126 comme dans l'exemple suivant :

B	I	N	G	O
1				
	16			
2	17	0	46	61
			47	
				62

On peut vérifier que les sommes sont $2+17+0+46+61 = 126$ et $1+16+0+47+62 = 126$.
Les autres cases de la carte peuvent être remplies avec les autres nombres non utilisés.

Existe-t-il une carte de BINGO ayant une rangée et une diagonale avec chacune une somme de 125 ?
On considère la plus petite somme possible pour une diagonale, soit $1 + 16 + 0 + 46 + 61$, ou 124.
Puisque 1, 16, 0, 46 et 61 sont les plus petits nombres possibles dans chaque colonne, il

faudrait augmenter de 1 un seul des entiers 1, 16, 46 ou 61 pour obtenir une somme de 125. On obtiendrait ainsi les quatre sommes possibles suivantes :

$$2 + 16 + 0 + 46 + 61 = 125 \qquad 1 + 17 + 0 + 46 + 61 = 125$$

$$1 + 16 + 0 + 47 + 61 = 125 \qquad 1 + 16 + 0 + 46 + 62 = 125$$

Pour la même raison, si on voulait une 3^e rangée avec une somme de 125, il faudrait aussi choisir une de ces quatre sommes.
En choisissant n'importe quelles deux de ces quatre séries de nombres, on choisirait toujours deux séries avec deux nombres communs, soit 0 et un autre nombre commun. (Par exemple, $2 + 16 + 0 + 46 + 61$ et $1 + 16 + 0 + 47 + 61$ ont en commun les nombres 16, 0 et 61 et le nombre 16 ne peut paraitre à deux endroits différents dans la colonne I, soit dans la diagonale (2^e ou 4^e rangée) et dans la 3^e rangée.) Une somme commune de 125 est donc impossible.

Donc si les nombres d'une rangée et d'une diagonale ont une même somme, la plus petite somme possible est 126.

(c) *Solution 1*
La plus grande somme possible pour les nombres d'une 3^e rangée ou d'une diagonale est $15 + 30 + 0 + 60 + 75$, ou 180.
On veut que les nombres de la 3^e rangée aient une somme de 177, de même que ceux de la diagonale.
On déterminera le nombre de façons de le faire en commençant par une somme maximale de 180 et en diminuant les nombres jusqu'à ce qu'on obtienne une somme de 177.
Soit $15 - W, 30 - X, 60 - Y$ et $75 - Z$ les nombres de la 3^e rangée et $15 - w, 30 - x, 60 - y$ et $75 - z$ les nombres de la diagonale, W, X, Y, Z, w, x, y et z étant des entiers quelconques.
On a donc la situation suivante :

B	I	N	G	O
$15 - w$	23	35	47	65
5	$30 - x$	31	52	63
$15 - W$	$30 - X$	0	$60 - Y$	$75 - Z$
11	20	40	$60 - y$	69
9	18	38	48	$75 - z$

Puisque les nombres de la colonne B peuvent avoir une valeur de 1 à 15, alors $w \geq 0$ et $W \geq 0$. De même, chacun des nombres x, X, y, Y, z et Z est supérieur ou égal à 0.
Puisque les nombres de la 3^e rangée ont une somme de 177, alors

$$(15 - W) + (30 - X) + 0 + (60 - Y) + (75 - Z) = 177.$$

Donc $180 - (W + X + Y + Z) = 177$, ou $W + X + Y + Z = 3$.
De même, $w + x + y + z = 3$.
Puisque les nombres de la colonne B doivent être distincts, $15 - w$ et $15 - W$ ne peuvent être égaux. On a donc $w \neq W$. De la même façon, $x \neq X$, $y \neq Y$ et $z \neq Z$.

Le nombre de cartes de BINGO que l'on cherche correspond donc au nombre de façons de choisir des entiers w, x, y, z, W, X, Y, Z avec les bonnes sommes de manière qu'il n'y ait pas deux nombres égaux dans une même colonne.

Puisque W, X, Y et Z sont des entiers et que chacun est supérieur ou égal à 0, ils doivent être $3, 0, 0, 0$ dans un ordre quelconque ou $2, 1, 0, 0$ dans un ordre quelconque ou $1, 1, 1, 0$ dans un ordre quelconque. En effet :

Pour qu'une somme soit égale à 3, aucun entier ne peut être supérieur à 3. Si un entier est 3, les autres doivent être 0. Si un entier est 2, un autre doit être 1 et les autres doivent être 0. Si aucun entier n'est 2 ou 3, trois entiers doivent être 1.

De même, w, x, y, z doivent être $3, 0, 0, 0$ dans un ordre quelconque ou $2, 1, 0, 0$ dans un ordre quelconque ou $1, 1, 1, 0$ dans un ordre quelconque.

Puisqu'aucune des valeurs ne peut être supérieure à 3, les nombres manquants dans les colonnes B, I, G ou O sont supérieurs à 12, 27, 57 et 72, respectivement. Ils sont donc différents des nombres déjà sur la carte.

Pour déterminer le nombre de cartes de BINGO, on compte le nombre de combinaisons possibles des valeurs de W, X, Y, Z et w, x, y, z.

Dans ce qui suit, on dira que w et W ont des *positions correspondantes*, c'est-à-dire qu'elles correspondent à une même colonne. De même, x et X sont des positions correspondantes, y et Y le sont aussi et z et Z le sont aussi.

1er cas : W, X, Y, Z ont pour valeurs $3, 0, 0, 0$ dans un ordre quelconque

(i) w, x, y, z ne peuvent avoir pour valeurs $3, 0, 0, 0$. Autrement, dans au moins deux paires, les positions correspondantes égaleraient 0 et au moins deux colonnes contiendraient ainsi deux fois un même nombre. (Par exemple, si $W = 3$, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ et $w = 0$, $x = 0$, $y = 3$, $z = 0$, on aurait alors $X = x = 0$ et $Z = z = 0$. La colonne I contiendrait deux fois le nombre 30 et la colonne O contiendrait deux fois le nombre 75.)

(ii) w, x, y, z ne peuvent avoir pour valeurs $2, 1, 0, 0$. Autrement dans au moins une paire, les positions correspondantes égaleraient 0 et au moins une colonne contiendrait deux fois un même nombre.

(iii) w, x, y, z pourraient avoir pour valeurs $1, 1, 1, 0$ dans un ordre quelconque. De combien de façons cela peut-il se produire ?
Puisque W, X, Y, Z ont pour valeurs $3, 0, 0, 0$ dans un ordre quelconque, il y a 4 positions possibles pour le 3. Les trois autres positions doivent être des 0.
Quant à w, x, y, z, le 0 doit aller dans la position qui correspond au 3 (car il ne peut y avoir deux 0 en positions correspondantes) et les trois autres positions doivent être des 1.
Il y a donc 4 façons de le faire.

2e cas : W, X, Y, Z ont pour valeurs $2, 1, 0, 0$ dans un ordre quelconque

(i) w, x, y, z ne peuvent avoir pour valeurs $3, 0, 0, 0$ comme on l'a vu dans le 1er cas.

(ii) w, x, y, z pourraient avoir pour valeurs $2, 1, 0, 0$ dans un ordre quelconque.
On considère les valeurs de W, X, Y, Z : il y a 4 positions possibles pour le 2. Pour chacune d'elles, il y a 3 positions possibles pour le 1. Les deux autres positions doivent être des 0.
Quant à w, x, y, z, les 0 doivent aller dans les positions qui correspondent au 2 et au 1 dans les valeurs de W, X, Y, Z. Il y a donc 2 positions possibles pour le 2 et le 1 est placé dans l'autre position.
Il y a donc $4 \cdot 3 \cdot 2$ façons, ou 24 façons de le faire.

(iii) w, x, y, z pourraient avoir pour valeurs $1, 1, 1, 0$ dans un ordre quelconque.
On considère les valeurs de W, X, Y, Z : il y a 4 positions possibles pour le 2. Pour chacune d'elles, il y a 3 positions possibles pour le 1. Les deux autres positions doivent être des 0.
Quant à w, x, y, z, les 0 doivent aller dans les positions qui correspondent au 1 dans les valeurs de W, X, Y, Z, puisqu'il ne peut y avoir deux 1 dans cette position. Les positions

des 1 suivent.
Il y a donc $4 \cdot 3$ façons, ou 12 façons de le faire.

3e cas : W, X, Y, Z ont pour valeurs $1, 1, 1, 0$ dans un ordre quelconque

(i) w, x, y, z pourraient avoir pour valeurs $3, 0, 0, 0$ dans un ordre quelconque. Comme dans le 1er cas, il y a 4 façons de le faire.

(ii) w, x, y, z pourraient avoir pour valeurs $2, 1, 0, 0$ dans un ordre quelconque. Comme dans le 2e cas, il y a 12 façons de le faire.

(iii) w, x, y, z ne peuvent avoir pour valeurs $1, 1, 1, 0$ dans un ordre quelconque, Autrement, dans au moins deux paires, les positions correspondantes égaleraient 1 et au moins deux colonnes contiendraient ainsi deux fois un même nombre.

En tout, il y a $(4 + 24 + 12 + 4 + 12)$ façons, ou 56 façons d'attribuer les valeurs de W, X, Y, Z, w, x, y, z.
Chacune de ces 56 façons produit une carte de BINGO qui répond aux critères donnés. Il y a donc 56 façons de remplir la carte de BINGO de manière que les nombres de la diagonale et les nombres de la 3e rangée aient une somme de 177.

Solution 2
La plus grande somme possible pour les nombres d'une 3e rangée ou d'une diagonale est $15 + 30 + 0 + 60 + 75$, ou 180.
On veut que les nombres de la 3e rangée aient une somme de 177, de même que ceux de la diagonale.
Puisque 177 est 3 de moins que la somme maximale possible de 180, alors tout nombre manquant sur la carte de BINGO peut être 0, 1, 2 ou 3 de moins que le plus grand nombre permis dans la colonne B, I, G ou O correspondante.
Ainsi dans la colonne B, les deux nombres manquants peuvent être 0, 1, 2 ou 3 de moins que 15.
Dans la colonne I, les deux nombres manquants peuvent être 0, 1, 2 ou 3 de moins que 30.
Dans la colonne G, les deux nombres manquants peuvent être 0, 1, 2 ou 3 de moins que 60 et dans la colonne O, les deux nombres manquants peuvent être 0, 1, 2 ou 3 de moins que 75.
Donc, les nombres manquants sur a carte de BINGO peuvent être choisis parmi les nombres suivants :

$12, 13, 14, 15$ pour la colonne B,
$27, 28, 29, 30$ pour la colonne I,
$57, 58, 59, 60$ pour la colonne G et
$72, 73, 74, 75$ pour la colonne O.

(On remarque qu'aucun de ces nombres ne parait déjà sur la carte de BINGO et chacun peut donc être choisi sans problème.)
Il existe exactement trois méthodes pour diminuer de 3 la somme maximale, 180, de manière à obtenir une somme de 177.
À partir des listes ci-dessus, on peut :

— choisir le plus petit nombre d'une liste (ce nombre est 3 de moins que le plus grand) et le plus grand nombre de chaque autre liste. Par exemple, on choisit le plus petit nombre de la liste B, 12, et le plus grand nombre de chaque autre liste, soit $30, 60$ et 75. On a alors $12 + 30 + 60 + 75 = 177$. OU

— choisir le plus grand nombre d'une liste et le deuxième plus grand de chaque autre liste. Par exemple, on choisit le plus grand nombre de la liste B, 15, et le deuxième plus grand de chaque autre liste, soit $29, 59$ et 74. On a alors $15 + 29 + 59 + 74 = 177$. OU

— choisir le plus grand nombre de deux des listes, le deuxième plus grand d'une troisième liste et le troisième plus grand de la quatrième liste. Par exemple, on choisit le plus grand nombre des listes B et C, 15 et 30, le deuxième plus grand de la liste G, 59, et le troisième plus grand de la liste O, 73. On a alors $15 + 30 + 59 + 73 = 177$.

Ce sont les trois seules méthodes pour diminuer de 3 la somme maximale, 180, afin d'obtenir une somme de 177.

On reformule ces trois méthodes au moyen du tableau suivant :

	B	I	G	O
P	15	30	60	75
Q	14	29	59	74
R	13	28	28	73
S	12	27	57	72

Les trois méthodes pour obtenir une somme de 177 dans la 3^e^ rangée ou la diagonale sont :

(1) choisir 1 nombre de la ligne S (soit $12, 27, 57$ ou 72) et 3 nombres de la ligne P, OU

(2) choisir 1 nombre de la ligne P et 3 nombres de la ligne Q, OU

(3) choisir 2 nombres de la ligne P, 1 nombre de la ligne Q et 1 nombre de la ligne R.

Il faut aussi que les nombres de la 3^e^ rangée aient une somme de 177, de même que ceux de la diagonale.

Il faut donc utiliser deux des méthodes précédentes pour choisir les nombre de la 3^e^ rangée et ceux de la diagonale, tout en s'assurant de choisir deux nombres différents pour chaque colonne.

Quelles combinaisons de méthode peut-on utiliser parmi les trois méthodes ?

Si on utilise la méthode (1) pour remplir la 3^e^ rangée de la carte de BINGO, on ne peut remplir la diagonale par la méthode (1) ou la méthode (3), car on aurait déjà utilisé trois nombres de la ligne P et il n'y en resterait pas suffisamment pour remplir la diagonale.

Si on utilise la méthode (1) pour remplir la 3^e^ rangée de la carte de BINGO, il faut donc utiliser la méthode (2) pour remplir la diagonale.

De même, si on utilise la méthode (2) pour remplir la 3^e^ rangée, on ne peut utiliser la méthode (2) pour remplir la diagonale.

Si on utilise la méthode (3) pour remplir la 3^e^ rangée, on ne peut utiliser la méthode (1) pour remplir la diagonale.

Toutes les autres combinaisons de méthodes sont possibles. Elles sont résumées dans le tableau suivant :

Méthode utilisée pour remplir la 3^e^ rangée	Méthode utilisée pour remplir la diagonale
1 : $SPPP$	2 : $PQQQ$
2 : $PQQQ$	1 : $SPPP$
2 : $PQQQ$	3 : $PPQR$
3 : $PPQR$	2 : $PQQQ$
3 : $PPQR$	3 : $PPQR$

Pour déterminer le nombre de façons de remplir la carte de BINGO, il faut compter le nombre de façons de choisir les nombres qui satisfont à chacune des cinq combinaisons du tableau.

1^re^ combinaison : $SPPP$ dans la 3^e^ rangée et $PQQQ$ dans la diagonale

Il y a 4 façons d'obtenir $SPPP$ dans la 3^e^ rangée :

Il y a 4 choix pour la colonne (B, I, G ou O) dans laquelle on utilisera le nombre S, les autres colonnes recevant chacune un nombre P.

Pour remplir la diagonale de cette carte de BINGO au moyen de $PQQQ$, il faut que le nombre P soit dans la même colonne que le nombre S de la 3e rangée, car chacun des trois autres nombres P est déjà dans la 3e rangée.
Il n'y a donc qu'un choix pour le nombre P de la diagonale et chaque case des autres colonnes de la diagonale sera remplie par son nombre Q.
Il y a donc 4 choix possibles pour remplir la 3e colonne et pour chacun de ces choix, il y a 1 choix possible pour remplir la diagonale. Pour cette 1re combinaison, il y a donc 4×1 façons, ou 4 façons de remplir la carte de BINGO.

<u>2e combinaison : $PQQQ$ dans la 3e rangée et $SPPP$ dans la diagonale</u>
On procède comme dans la combinaison précédente, sauf que les rôles de la 3e rangée et de la diagonale sont renversés.
Il y a donc 4 façons possibles de remplir la carte de BINGO pour cette combinaison.

<u>3e combinaison : $PQQQ$ dans la 3e rangée et $PPQR$ dans la diagonale</u>
Il y a 4 façons d'obtenir $PQQQ$ dans la 3e rangée :

> Il y a 4 choix possibles pour la colonne (B, I, G ou O) dans laquelle on utilisera le nombre P, les autres colonnes recevant chacune un nombre Q.

Pour remplir la diagonale de cette carte de BINGO au moyen de $PPQR$, il faut que le nombre Q soit dans la même colonne que le nombre P de la 3e rangée, car chacun des trois autres nombres Q est déjà dans la 3e rangée.
Il faut remplir les 3 autres colonnes avec les nombres PPR correspondants.
Il y a 3 façons possibles de les mettre en ordre (PPR, PRP et RPP). Il y a donc 3 façons de continuer à remplir la diagonale.
Il y a donc 4 façons de remplir la 3e rangée et dans chaque cas, 1×3 façons de remplir la diagonale. Il y a donc 4×3 façons, ou 12 façons de remplir la carte de BINGO selon cette troisième combinaison.

<u>4e combinaison : $PPQR$ dans la 3e rangée et $PQQQ$ dans la diagonale</u>
On procède comme dans la combinaison précédente, sauf que les rôles de la 3e rangée et de la diagonale sont renversés.
Il y a donc 12 façons de remplir la carte de BINGO selon cette quatrième combinaison.

<u>5e combinaison : $PPQR$ dans la 3e rangée et $PPQR$ dans la diagonale</u>
Il y a 12 façons d'obtenir $PPQR$ dans la 3e rangée :

> Il y a 4 choix possibles pour la colonne qui contiendra le nombre Q. Pour chacun, il y a 3 choix possibles pour la colonne qui contiendra le nombre R. Les nombres P remplissent ensuite les places vides.

Il y a ensuite 2 façons possibles de remplir la diagonale :

> Les nombres P de la diagonale doivent occuper les mêmes colonnes que les nombres Q et R de la 3e rangée.
> Il y a 2 façons possibles de placer les nombres Q et R de la diagonale, soit dans l'ordre QR ou dans l'ordre RQ.

Il y a 12×2 façons, ou 24 façons de remplir la carte de BINGO selon cette cinquième combinaison.

En tout, il y a donc $(4 + 4 + 12 + 12 + 24)$ façons, ou 56 façons de remplir la carte de BINGO de manière que les nombres de la diagonale et les nombres de la 3e rangée aient une somme de 177.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2015

le jeudi 16 avril 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 17 avril 2015
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

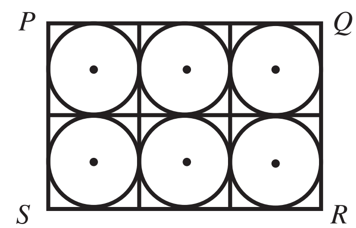
1. (a) Le cylindre modèle A a un rayon r de 10 cm et une hauteur h de 16 cm. Il a un volume V égal à $\pi(10)^2(16)$ cm^3. Donc $V = 1600\pi$ cm^3.

   OU La base du cylindre est un cercle de rayon 10 cm. Elle a donc une aire égale à πr^2 cm^2, ou $\pi 10^2$ cm^2, ou 100π cm^2. Le volume du cylindre est égal à (aire de la base) $\times$ hauteur. Il est donc égal à $100\pi \times 16$ cm^3. Donc $V = 1600\pi$ cm^3.

   (b) Le cylindre modèle B a un rayon r de 8 cm. Son volume V est égal à $\pi(8)^2(h)$ cm^3, ou $64\pi h$ cm^3. Puisque le modèle A et le modèle B ont le même volume, alors $64\pi h = 1600\pi$, d'où $h = \dfrac{1600\pi}{64\pi}$ cm, ou $h = 25$ cm.

   Le cylindre modèle B a une hauteur de 25 cm.

   (c) On considère la vue de haut de la boite A ci-contre.

   On nomme le rectangle $PQRS$.
   Puisque chaque cercle a un rayon de 10 cm, chacun a un diamètre de 20 cm. Chaque cercle peut donc être placé dans un carré de 20 cm sur 20 cm dont les côtés sont parallèles à ceux du rectangle $PQRS$.
   Chaque cercle touche les quatre côtés du carré qui l'entoure.
   Puisque chaque cercle touche un ou deux côtés du rectangle $PQRS$ et que chaque cercle touche deux ou trois autres cercles, les six carrés recouvrent complètement le rectangle $PQRS$ sans chevauchement. Puisque $PQRS$ a une largeur de trois carrés et une hauteur de 2 carrés, $PQ = SR = 3 \times 20$ cm $= 60$ cm et $PS = QR = 2 \times 20$ cm $= 40$ cm.
   Puisque chaque cylindre modèle A a une hauteur de 16 cm, la boite a une hauteur de 16 cm.
   La boite A a donc un volume de $60 \times 40 \times 16$ cm^3, ou 38 400 cm^3.

   (d) Le volume de la boite B est égal à celui de la boite A.
   Cela semble vrai de façon intuitive, puisque le cylindre modèle A et le cylindre modèle B ont le même volume et que chaque boite contient six cylindres disposés de la même manière.
   De façon plus formelle, on utilise la méthode de la partie (c) pour montrer que la boite B a aussi un volume de 38 400 cm^3.

   D'après la partie (b), le cylindre B a un rayon de 8 cm et une hauteur de 25 cm.
   La longueur de la boite B est égale à 6 fois le rayon du cylindre modèle B, soit 6×8 cm, ou 48 cm. La largeur de la boite B est égale à 4 fois le rayon du cylindre modèle B, soit, soit 4×8 cm, ou 32 cm.
   La hauteur de la boite B est égale à la hauteur du cylindre modèle B, soit 25 cm.
   La boite B a donc un volume de $48 \times 32 \times 25$ cm^3, ou 38 400 cm^3, soit le même volume que la boite A.

2. (a) Une pièce de 25 ¢ vaut 0,25 \$. Trois pièces de 25 ¢ valent donc $3 \times 0{,}25$ \$, ou 0,75 \$.
   Une pièce de 10 ¢ vaut 0,10 \$. Dix-huit pièces de 10 ¢ valent donc $18 \times 0{,}10$ \$, ou 1,80 \$.
   Une pièce de 5 ¢ vaut 0,05 \$. Vingt-cinq pièces de 5 ¢ valent donc $25 \times 0{,}05$ \$, ou 1,25 \$.
   Les pièces de Suzanne valent donc 0,75 \$ + 1,80 \$ + 1,25 \$, ou 3,80 \$.

   (b) *Solution 1*
   On apparie chaque pièce de 10 ¢ avec une pièce de 5 ¢.
   Puisqu'il y a un nombre égal de pièces de 10 ¢ et de 5 ¢ (et aucune autre pièce), chaque pièce de 10 ¢ est appariée avec une pièce de 5 ¢ et il ne reste aucune pièce.
   Chaque paire (une pièce de 10 ¢ et une pièce de 5 ¢) a une valeur de 0,05 \$ + 0,10 \$, ou 0,15 \$. Puisque les pièces de Luc ont une valeur totale de 1,50 \$, il a $\dfrac{1{,}50}{0{,}15}$ paires, ou 10 paires.

Puisqu'il y a une pièce de 5 ¢ dans chaque paire, Luc a 10 pièces de 5 ¢.

Solution 2
Soit y le nombre de pièces de 5 ¢ que Luc a en sa possession.
Luc a un nombre égal de pièces de 10 ¢ et de 5 ¢. Il a donc y pièces de 10 ¢.
Les y pièces de 5 ¢ ont une valeur de $0{,}05y$ \$.
Les y pièces de 10 ¢ ont une valeur de $0{,}10y$ \$.
Puisque les pièces de Luc ont une valeur totale de 1,50 \$, alors $0{,}05y + 0{,}10y = 1{,}50$, d'où $0{,}15y = 1{,}50$. Donc $y = \frac{1{,}50}{0{,}15}$, d'où $y = 10$.
Luc a 10 pièces de 5 ¢.

(c) Une pièce de 25 ¢ vaut 0,25 \$. Donc x pièces de 25 ¢ ont une valeur de $0{,}25x$ \$.
Une pièce de 10 ¢ vaut 0,10 \$. Donc $2x + 3$ pièces de 10 ¢ ont une valeur de $0{,}10(2x + 3)$ \$.
Puisque les pièces de 25 ¢ et de 10 ¢ ont une valeur totale de 10,65 \$, alors
$0{,}25x + 0{,}10(2x + 3) = 10{,}65$, d'où $0{,}25x + 0{,}20x + 0{,}30 = 10{,}65$, ou $0{,}45x = 10{,}35$.
Donc $x = \frac{10{,}35}{0{,}45}$, ou $x = 23$.

3. (a) On utilise la formule donnée pour calculer la somme des 200 premiers entiers strictement positifs :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 198 + 199 + 200 = \frac{200(200 + 1)}{2} = 100(201) = 20\,100$$

(b) La somme des 200 premiers entiers strictement positifs est égale à la somme des 150 premiers entiers strictement positifs plus la somme des 50 entiers suivants, soit $151 + 152 + 153 + \cdots + 198 + 199 + 200$. Donc :

$$1+2+\cdots+198+199+200 = (1+2+\cdots+148+149+150)+(151+152+\cdots+198+199+200).$$

La somme des 50 entiers consécutifs $151 + 152 + 153 + \cdots + 198 + 199 + 200$ est donc égale à la différence entre la somme des 200 premiers entiers strictement positifs et la somme des 150 premiers entiers strictement positifs.
Dans la partie (a), on a vu que la somme des 200 premiers entiers strictement positifs est égale à 20 100.
On utilise la formule pour calculer la somme des 150 premiers entiers strictement positifs :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 148 + 149 + 150 = \frac{150(150 + 1)}{2} = 75(151) = 11\,325.$$

La somme des 50 entiers consécutifs à partir de 151 est donc égale à :

$$\begin{aligned} 151 + 152 + \cdots + 199 + 200 &= (1 + 2 + \cdots + 199 + 200) - (1 + 2 + \cdots + 149 + 150) \\ &= 20\,100 - 11\,325 \\ &= 8775 \end{aligned}$$

(c) Soit S la somme de l'addition $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 11 + \cdots + 998 + 1000$.
Soit T la somme des 333 premiers multiples de 3, c'est-à-dire la somme de
$3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 996 + 999$.
La somme des 1000 premiers entiers strictement positifs est égale à $S+T$, c'est-à-dire que :

$$1+2+\cdots+998+999+1000 = (1+2+4+5+7+\cdots+998+1000)+(3+6+\cdots+996+999).$$

La somme S est égale à la différence entre la somme des 1000 premiers entiers strictement positifs et T.
On utilise la formule pour calculer la somme des 1000 premiers entiers strictement positifs :

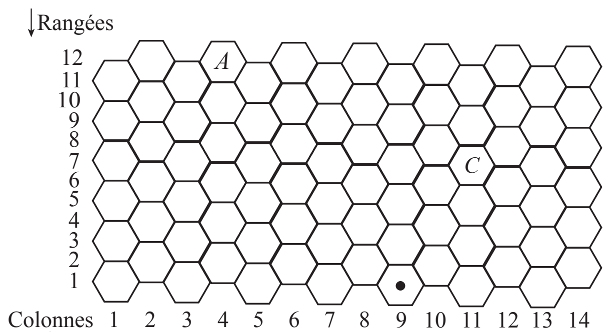
$$1+2+3+\cdots+998+999+1000=\frac{1000(1000+1)}{2}=500(1001)=500\,500.$$

On détermine la somme T en factorisant le diviseur 3 de chaque terme et en utilisant la formule :

$$\begin{aligned}3+6+9+\cdots+993+996+999 &= 3(1+2+3+\cdots+331+332+333)\\ &= 3\left(\frac{333(333+1)}{2}\right) \qquad \text{(d'après la formule)}\\ &= 3(333\times 167)\\ &= 166\,833.\end{aligned}$$

Donc, la somme S est égale à $500\,500-166\,833$, ou $333\,667$.

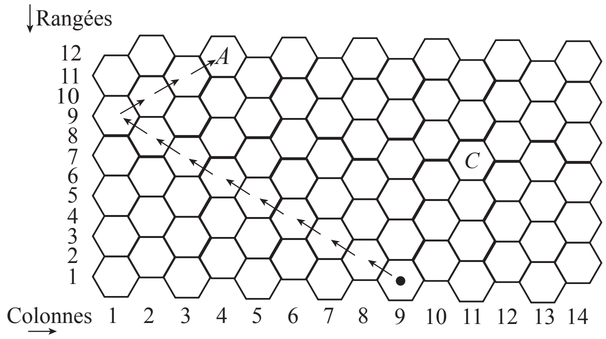
4. On numérote les rangées et les colonnes d'hexagones comme suit :



On remarque que la colonne 1 ne contient que des hexagones des rangées impaires, que la colonne 2 ne contient que des hexagones des rangées paires, et ainsi de suite.
Au départ, le jeton est dans l'hexagone de la rangée 1, colonne 9 (on écrit r1c9), l'hexagone A est dans la rangée 12, colonne 4 (r12c4), et l'hexagone C est dans la rangée 7, colonne 11 (r7c11).
Un déplacement $\uparrow$ augmente de 2 le numéro de la rangée et ne change pas celui de la colonne.
Un déplacement $\nwarrow$ augmente de 1 le numéro de la rangée et diminue de 1 celui de la colonne.
Un déplacement $\nearrow$ augmente de 1 le numéro de la rangée et augmente de 1 celui de la colonne.

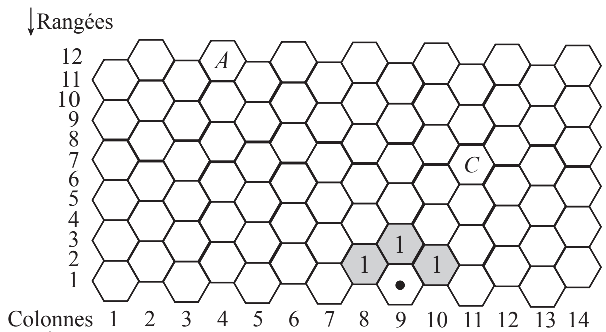
(a) On doit déplacer le jeton de r1c9 à r12c4 dans un nombre minimal d'étapes.
Il faut au moins 5 étapes $\nwarrow$ pour déplacer le jeton de 5 colonnes vers la gauche. (On peut utiliser plus d'étapes $\nwarrow$ si elles sont équilibrées par des étapes $\nearrow$.)
On peut déplacer le jeton de r1c9 à r12c4 en utilisant 5 étapes $\nwarrow$ (ce qui déplace le jeton jusqu'à r6c4, puisque chaque étape $\nwarrow$ déplace le jeton de 1 colonne vers la gauche et de 1 rangée vers le haut), puis de 3 étapes $\uparrow$.
On a pris 8 étapes.
Peut-on déplacer le jeton de r1c9 à r12c4 en moins de 8 étapes ?
On a vu qu'il faut au moins 5 étapes $\nwarrow$. Ces étapes déplacent le jeton de 5 des 11 rangées qu'il faut.
Pour déplacer le jeton des 6 rangées qui restent, il faut au moins 3 autres étapes, puisqu'une étape peut déplacer le jeton d'un maximum de 2 rangées.
Il faut donc au moins 8 étapes. Le nombre minimal d'étapes qu'il faut est 8.

(b) On veut déplacer le jeton de r1c9 à r12c4 en utilisant un nombre maximal d'étapes.
Chaque étape déplace le jeton d'au moins 1 rangée vers le haut. Puisque le jeton doit être déplacé de 11 rangées vers le haut, on peut utiliser au plus 11 étapes.
La figure suivante montre qu'on peut le faire en exactement 11 étapes :

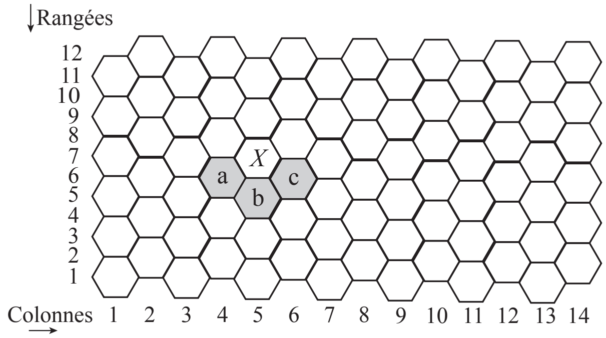


On remarque qu'aucune étape ↑ n'a été utilisée, puisqu'une telle étape déplace le jeton de 2 rangées vers le haut.
Le nombre maximal d'étapes est 11.
(Il y a beaucoup de chemins de 11 étapes qui mènent à A.)

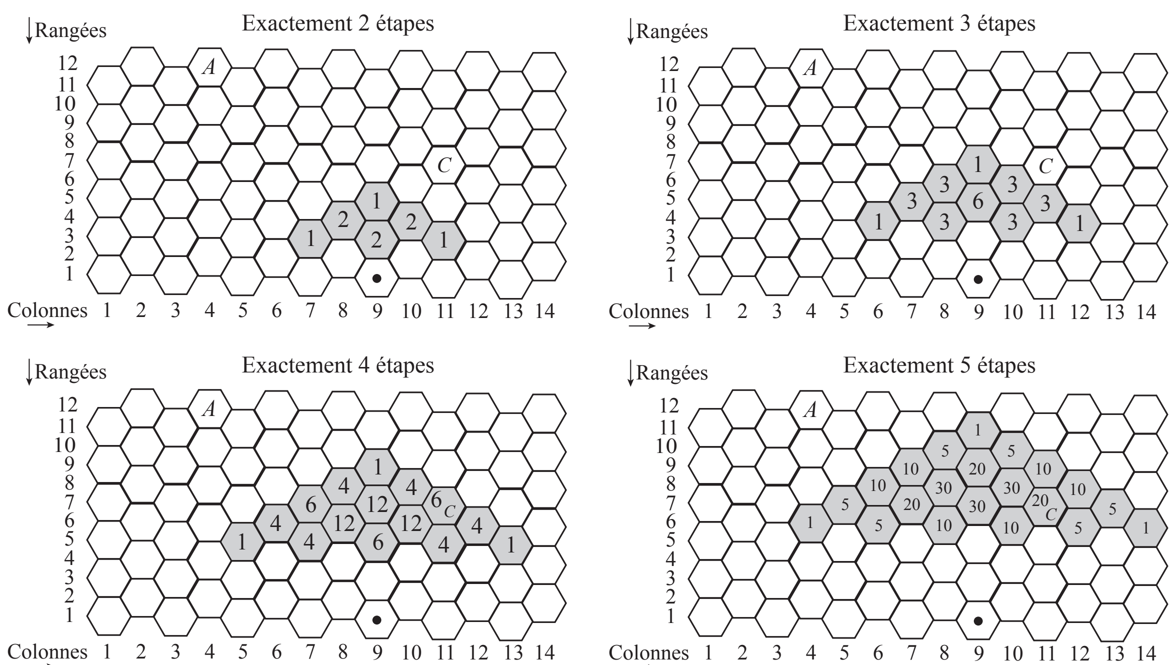
(c) *Solution 1*
En 1 étape, on peut atteindre trois hexagones différents d'une façon chacun. (Il s'agit des hexagones que l'on atteint en utilisant 1 étape ↖, 1 étape ↑ ou 1 étape ↗.)



Étant donné un entier s ($s \geq 1$), on peut déterminer les hexagones qui peuvent être atteints en exactement $s+1$ étapes à partir des hexagones qui peuvent être atteints en exactement s étapes et en procédant de chacun de ces hexagones dans une des trois directions.
On peut aussi déterminer le nombre de façons d'atteindre chacun de ces nouveaux hexagones en exactement $s+1$ étapes.
Le nombre de façons d'atteindre un hexagone particulier en exactement $s+1$ étapes est la somme des nombres de façons d'atteindre chacun des trois hexagones adjacents au dessous en exactement s étapes.
En effet, tout chemin qui mène à un hexagone particulier en exactement $s+1$ étapes doit être formé d'un chemin de s étapes qui mène à un hexagone adjacent au dessous, suivi d'une étape ↗ , d'une étape ↑ ou d'une étape ↖.
Par exemple, dans la figure suivante, les hexagones ombrés peuvent être atteints en exactement s étapes de a, b et c façons, respectivement. Ainsi l'hexagone X peut être atteint en exactement $s+1$ étapes de $a+b+c$ façons.



Il existe exactement 3^s chemins de longueur s, puisqu'il y a 3 possibilités pour chacune des s étapes du chemin.
Ceci nous permet de vérifier, à chaque étape, que l'on a tenu compte de toutes les possibilités.
On utilise ces faits pour déterminer les hexagones qui peuvent être atteints en exactement 2, 3, 4 et 5 étapes, ainsi que le nombre de façons d'atteindre chacun de ces hexagones.
Les figures suivantes indiquent ces renseignements :



D'après la dernière figure, on voit qu'il y a exactement 6 hexagones qui peuvent être atteints en exactement 5 étapes d'au moints 20 façons différentes. Donc $n = 6$.

Solution 2
On remarque que si on change l'ordre des étapes d'un chemin particulier, on aboutit toujours au même hexagone.
En effet, chaque étape change le numéro de la rangée et le numéro de la colonne d'une façon particulière et le résultat cumulé des étapes est le même, peu importe l'ordre des étapes.
Ainsi les chemins $\nearrow\nwarrow\uparrow\uparrow\nearrow$ et $\uparrow\nearrow\nearrow\nwarrow\uparrow$ aboutissent au même hexagone.
Puisqu'il y a trois sortes d'étapes ($\nwarrow, \uparrow, \nearrow$), un chemin d'exactement 5 étapes peut être formé de :

(i) 5 fois la même étape, ou

(ii) 4 fois une étape et 1 fois une autre étape, ou

(iii) 3 fois une étape et 2 fois une autre étape, ou

(iv) 3 fois une étape, 1 fois une deuxième étape et 1 fois une troisième étape, ou

(v) 2 fois une étape, 2 fois une deuxième étape, et 1 fois une troisième étape.

Ce sont les seules combinaisons possibles des trois sortes d'étapes.
Pour chaque combinaison, on peut placer les étapes de diverses façons :

(i) 5 fois la même étape
On a 3 choix pour la sorte d'étape, soit $\nwarrow$, $\uparrow$ ou $\nearrow$.
Pour chaque choix, il y a 1 façon de placer les étapes en ordre.
À partir de r1c9, il y a un chemin jusqu'à r6c4 (5 étapes $\nwarrow$), un chemin jusqu'à r11c9 (5 étapes $\uparrow$) et un chemin jusqu'à r6c14 (5 étapes $\nearrow$).

(ii) 4 fois une étape et 1 fois une autre étape
Il y a 3 choix pour l'étape qui sera répétée 4 fois, soit $\nwarrow$, $\uparrow$ ou $\nearrow$ (on appelle cette étape x). Pour chacun de ces choix, il y a 2 choix pour l'étape qui sera utilisée 1 fois (on appelle cette étape y).
Il y a donc 3×2 choix, ou 6 choix des deux types d'étapes et chaque choix permet d'atteindre un hexagone particulier. Chaque arrangement des deux types d'étapes choisies donne le même hexagone.
Étant donné un choix particulier de x et de y, il y a 5 façons de placer les étapes, soit $xxxxy$, $xxxyx$, $xxyxx$, $xyxxx$ et $yxxxx$ (il y a 5 positions où l'on peut placer le y, les autres positions étant automatiquement remplies par les x).
En commençant à r1c9, il y a donc 5 chemins vers chacune des positions r7c5 ($x = \nwarrow$, $y = \uparrow$), r6c6 ($x = \nwarrow$, $y = \nearrow$), r7c13 ($x = \nearrow$, $y = \uparrow$), r6c12 ($x = \nearrow$, $y = \nwarrow$), r10c8 ($x = \uparrow$, $y = \nwarrow$) et r10c10 ($x = \uparrow$, $y = \nearrow$).

(iii) 3 fois une étape et 2 fois une autre étape
Il y a 3 choix pour l'étape qui sera répétée 3 fois, soit $\nwarrow$, $\uparrow$ ou $\nearrow$ (on appelle cette étape x). Pour chacun de ces choix, il y a 2 choix pour l'étape qui sera utilisée 2 fois (on appelle cette étape y).
Il y a donc 3×2 choix, ou 6 choix des deux étapes, et chaque choix permet d'atteindre un hexagone particulier. Chaque arrangement des deux types d'étapes choisies donne le même hexagone.
Étant donné un choix particulier de x et de y, il y a 10 façons de placer les étapes x et y en ordres différents, car il y a 10 choix pour les positions des deux y, les autres positions étant automatiquement remplies par les x :

Positions 1 et 2 ($yyxxx$), positions 1 et 3 ($yxyxx$), positions 1 et 4 ($yxxyx$), positions 1 et 5 ($yxxxy$),
Positions 2 et 3 ($xyyxx$), positions 2 et 4 ($xyxyx$), positions 2 et 5 ($xyxxy$),
Positions 3 et 4 ($xxyyx$), positions 3 et 5 ($xxyxy$),
Positions 4 et 5 ($xxxyy$)

En commençant à r1c9, il y a donc 10 chemins vers chacune des positions r8c6 ($x = \nwarrow$, $y = \uparrow$), r6c8 ($x = \nwarrow$, $y = \nearrow$), r8c12 ($x = \nearrow$, $y = \uparrow$), r6c10 ($x = \nearrow$, $y = \nwarrow$), r9c7 ($x = \uparrow$, $y = \nwarrow$) et r9c11 ($x = \uparrow$, $y = \nearrow$).

(iv) 3 fois une étape, 1 fois une deuxième étape et 1 fois une troisième étape
Il y a 3 choix pour l'étape qui sera répétée 3 fois, soit $\nwarrow$, $\uparrow$ ou $\nearrow$ (on appelle cette étape x). Les choix des deux autres types d'étapes qui seront utilisées 1 fois chacune sont fixés (on appelle ces étapes y et z dans un ordre quelconque).
Il y a donc 3 choix des trois types d'étapes et chaque choix permet d'atteindre un hexagone particulier. Chaque arrangement des étapes choisies donne le même hexagone.

Étant donné un choix particulier de x, y et z, il y a 20 façons de placer les étapes $xxxyz$ en ordres différents, car il y a 5 choix pour la position du y et pour chacun de ces choix, il y a 4 choix pour la position du z, les autres positions étant automatiquement remplies par les x.

En commençant à r1c9, il y a donc 20 chemins vers chacune des positions r7c7 ($x = \nwarrow$, $y = \uparrow$, $z = \nearrow$), r7c11 ($x = \nearrow$, $y = \nearrow$, $z = \uparrow$) et r9c9 ($x = \uparrow$, $y = \nwarrow$, $z = \nearrow$).

(v) <u>2 fois une étape, 2 fois une deuxième étape, et 1 fois une troisième étape</u>

Il y a 3 choix pour le type d'étape qui sera utilisé 1 fois, soit $\nwarrow$, $\uparrow$ ou $\nearrow$ (on appelle cette étape z). Une fois que l'on a choisi z, les choix des deux autres types d'étapes qui seront utilisées 2 fois chacune sont fixés (on appelle ces étapes x et y).

Il y a donc 3 façons de choisir les trois types d'étapes, chacune permettant d'atteindre un hexagone différent. Chaque arrangement des étapes choisies donne le même hexagone.

Étant donné un choix particulier de x, y et z, il y a 30 façons de placer les étapes $xxyyz$ en ordres différents, car il y a 10 choix pour les positions des x (positions 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 5, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 3 et 4, 3 et 5, 4 et 5) et pour chacun de ces choix, il y a 3 choix pour la position du z (il reste 3 positions), les autres positions étant automatiquement remplies par les y.

En commençant à r1c9, il y a donc 30 chemins vers chacune des positions r8c8 ($x = \nwarrow$, $y = \uparrow$, $z = \nearrow$), r7c9 ($x = \nearrow$, $y = \nwarrow$, $z = \uparrow$) et r8c10 ($x = \uparrow$, $y = \nearrow$, $z = \nwarrow$).

En utilisant exactement 5 étapes, le jeton peut aboutir sur 6 hexagones différents (soit r7c7, r7c11, r9c9, r8c8, r7c9, r8c10) d'au moins 20 façons différentes. Donc $n = 6$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2014

le mercredi 16 avril 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 17 avril 2014
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Il y a 99 entiers de 1 à 99.
Les 9 premiers entiers, soit de 1 à 9, sont des entiers de 1 chiffre et chacun contribue 1 chiffre dans la formation du nouvel entier, pour un total de 9 chiffres.
Les 90 derniers entiers, soit de 10 à 99, sont des entiers de 2 chiffres et chacun contribue 2 chiffres dans la formation du nouvel entier, pour un total de 2×90 chiffres, ou 180 chiffres.
Le nouvel entier est donc formé de $9 + 180$ chiffres, ou 189 chiffres.

(b) D'après la partie (a), les 99 premiers entiers contribuent un total de 189 chiffres dans la formation du nouvel entier.
En plus de ces 99 premiers entiers, le nouvel entier est formé des entiers de 100 à 199 écrits l'un à côté de l'autre. Il y a $199 - 99$ tels entiers, ou 100 entiers, ayant chacun trois chiffres.
Ils contribuent un total de 3×100 chiffres, ou 300 chiffres dans la formation du nouvel entier.
Le nouvel entier est donc formé de $189 + 300$ chiffres, ou 489 chiffres.

(c) D'après la partie (b), les entiers de 1 à 199 forment un entier de 489 chiffres.
Pour obtenir un entier de 1155 chiffres, il faut ajouter $1155 - 489$ chiffres, ou 666 chiffres.
On suppose que tous les entiers de 200 jusqu'à n ont trois chiffres (on le vérifiera plus loin). Il faut donc ajouter $\frac{666}{3}$ entiers, ou 222 entiers pour obtenir un nouvel entier de 1155 chiffres. (Les 222 entiers qui suivent 199 sont en effet des entiers de 3 chiffres.)
L'entier n est donc 222 de plus que l'entier 199. Donc $n = 199 + 222$, ou $n = 421$.
Si les entiers de 1 à 421 sont écrits l'un à côté de l'autre, ils forment un nouvel entier de 1155 chiffres.

(d) D'après la partie (c), les entiers de 1 à 421 forment un entier de 1155 chiffres.
Pour obtenir un entier de 1358 chiffres, il faut ajouter $1358 - 1155$ chiffres, ou 203 chiffres.
Si on ajoute les 68 entiers qui suivent l'entier 421, on ajoute 3×68 chiffres, ou 204 chiffres au nouvel entier (puisque chacun de ces 68 entiers est un entier de 3 chiffres).
Le 68$^{\text{e}}$ entier après 421 est égal à $421 + 68$, ou 489.
Or, il ne faut ajouter que 203 chiffres et non pas 204 chiffres. Or, le 204$^{\text{e}}$ chiffre est le dernier chiffre du nombre 489, soit 9. Si on enlève ce chiffre, le 203$^{\text{e}}$ chiffre est 8.
Donc, si on écrit les entiers de 1 à 100 l'un à côté de l'autre, le 1358$^{\text{e}}$ chiffre du nouvel entier ainsi formé est un 8.

2. (a) Les mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°.
Donc $\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle ACB$, d'où $\angle BAC = 180° - 60° - 50°$, ou $\angle BAC = 70°$.

(b) Puisque BD est la bissectrice de l'angle ABC, alors $\angle DBC = \frac{60°}{2}$, ou $\angle DBC = 30°$.
Puisque CD est la bissectrice de l'angle ACB, alors $\angle DCB = \frac{50°}{2}$, ou $\angle DCB = 25°$.
Puisque mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°,

$$\angle BDC = 180° - \angle DBC - \angle DCB = 180° - 30° - 25° = 125°.$$

(c) Dans le triangle SQR, soit $x°$ la mesure de l'angle SQR. Puisque le triangle SQR est isocèle ($QS = RS$), alors $\angle SRQ = \angle SQR = x°$.
Les mesures des angles du triangle SQR ont une somme de 180°.
Donc $\angle SQR + \angle SRQ + \angle QSR = 180°$, d'où $x° + x° + 140° = 180°$, ou $2x = 40$, ou $x = 20$.
Puisque QS est la bissectrice de l'angle PQR, alors $\angle PQS = \angle SQR = x°$.
De même, puisque RS est la bissectrice de l'angle PRQ, alors $\angle PRS = \angle SRQ = x°$.
Dans le triangle PQR, $\angle PQR = \angle PQS + \angle SQR$ et $\angle PRQ = \angle PRS + \angle SRQ$.

Donc $\angle PQR = (2x)^\circ$ et $\angle PRQ = (2x)^\circ$.
Puisque les mesures des angles du triangle PQR ont une somme de 180°, alors $\angle QPR = 180^\circ - \angle PQR - \angle PRQ$, d'où $\angle QPR = 180^\circ - (2x)^\circ - (2x)^\circ$, ou $\angle QPR = 180^\circ - (4x)^\circ$. Donc $\angle QPR = 180^\circ - (4 \times 20)^\circ$, ou $\angle QPR = 100^\circ$.

(d) On suppose qu'il est possible que $\angle QSR = 80^\circ$.
On procède comme dans la partie (c). Soit x° la mesure de l'angle SQR.
Donc $\angle SRQ = \angle SQR = y^\circ$.
Dans le triangle SQR, $\angle SQR + \angle SRQ + \angle QSR = 180^\circ$. Donc $y^\circ + y^\circ + 80^\circ = 180^\circ$, d'où $2y = 100$, ou $y = 50$.
Dans le triangle PQR, $\angle PQR = \angle PQS + \angle SQR$ et $\angle PRQ = \angle PRS + \angle SRQ$ (QS et RS sont des bissectrices). Donc $\angle PQR = (2y)^\circ$ et $\angle PRQ = (2y)^\circ$.
Donc $\angle QPR = 180^\circ - \angle PQR - \angle PRQ$, d'où $\angle QPR = 180^\circ - (2y)^\circ - (2y)^\circ$, ou $\angle QPR = 180^\circ - (4y)^\circ$. Donc $\angle QPR = 180^\circ - (4 \times 50)^\circ$, ou $\angle QPR = -20^\circ$.
Puisque tous les angles doivent avoir une mesure positive, alors la seule hypothèse que l'on a faite (celle que $\angle QSR = 80^\circ$) doit être fausse.
Il est donc impossible que $\angle QSR = 80^\circ$.

3. (a) Puisque la base BC du triangle ABC est horizontale, elle a une longueur de $10 - 0$, ou 10.
La hauteur correspondante du triangle ABC est donc égale à l'ordonnée du point A, soit 9.
Au départ, l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \times 10 \times 9$, ou 45.

(b) Lorsque le sommet A est au point $(2,7)$, l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \times 10 \times 7$, ou 35 (puisque le triangle a une base de 10 et une hauteur de 7).
La personne qui réussit à rendre l'aire du triangle ABC égale à 25 gagne la partie.
La base BC du triangle ABC a une longueur de 10 tout au long de la partie, car seul le point A peut bouger.
L'aire du triangle ABC est donc égale à 25 lorsque la hauteur est égale à 5, puisque $\frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25$.
La hauteur est égale à 5 lorsque l'ordonnée du point A est égale à 5.
Donc, la seule façon pour un joueur de gagner est de changer l'ordonnée du point A à 5.

Or, c'est au tour de Damien de jouer. Damien peut faire bouger le point A d'une unité vers le bas à la position $(2,6)$ ou d'une unité vers la gauche à la position $(1,7)$.
Dans le premier cas, Édith peut ensuite faire bouger le point A d'une unité vers le bas à la position $(2,5)$, ce qui est une position gagnante (puisque A a une ordonnée de 5).
Dans le deuxième cas, Édith peut ensuite faire bouger le point A d'une unité vers la gauche à la position $(0,7)$ (Elle ne ferait pas bouger le point A d'une unité vers le bas à la position $(1,6)$ car Damien pourrait gagner au tour suivant).
Au tour suivant, Damien doit faire bouger le point A d'une unité vers le bas à la position $(0,6)$, puisque s'il faisait bouger le point A d'une unité vers la gauche, l'abscisse du point serait négative, ce qui est interdit.
Au tour suivant, Édith fait bouger le point A d'une unité vers le bas à la position $(0,5)$, qui est une position gagnante.
On a démontré que peu importe comment Damien joue, Édith peut toujours gagner lorsque le sommet A est en position $(2,7)$ et que c'est au tour de Damien de jouer.

(c) (i) Lorsque le point A est en position $(6, 9)$, le deuxième joueur, soit Gilles, a une stratégie gagnante. La stratégie sera décrite dans la partie (ii) et justifiée dans la partie (iii).

(ii) On peut décrire la stratégie gagnante de plusieurs façons.
Par exemple, on peut dire que Gilles jouera exactement comme Farid. Si celui-ci fait bouger le point A d'une position vers la gauche ou vers le bas, Gilles fait de même à son tour.

(iii) Pourquoi cette stratégie est-elle gagnante ?
On suppose d'abord que Gilles peut toujours répéter le mouvement de Farid (on le prouvera plus loin).
Au départ, le sommet A a une ordonnée de 9.
Si Farid fait bouger le point d'une unité vers le bas, jusqu'à 8, Gilles peut faire de même jusqu'à 7.
Si Farid fait bouger le point d'une unité vers le bas, jusqu'à 6, Gilles peut faire de même jusqu'à 5.
Dans la partie (b), on a vu que le joueur qui fait bouger le point A pour qu'il ait une ordonnée de 5 gagne la partie.
Dans ce cas, Gilles gagne.

Il reste à démontrer que Gilles peut toujours faire comme Farid.
On considère d'abord les mouvements vers le bas.
Comme ci-haut, un mouvement vers le bas peut toujours être suivi d'un mouvement vers le bas, ce qui se termine éventuellement par le sommet A avec une ordonnée de 5, Gilles étant gagnant.
En d'autres mots, dans ce cas, l'ordonnée de A ne sera jamais négative et Gilles peut toujours faire comme Farid et gagner.
On considère ensuite les mouvements vers la gauche.
Au départ, le point A a une abscisse de 6, ce qui est un entier pair.
Si Farid fait bouger le point A d'une unité vers la gauche, le point A aurait une abscisse de 5, ce qui est un entier impair.
Au tour suivant, Gilles fait de même et le point A a une abscisse de 4, ce qui est un entier pair.
En d'autres mots, chaque fois que Farid fait bouger le point A d'une unité vers la gauche, l'abscisse du point A devient un entier impair et au tour suivant, Gilles fait de même, de sorte que l'abscisse redevient un entier pair.
Puisque la plus petite abscisse permise est 0 (elle ne peut être négative) et que cette abscisse est paire, c'est Gilles qui, au besoin, sera le dernier à faire bouger le point A vers la gauche.
Au tour suivant, Farid serait obligé de faire bouger le point A vers le bas.

On a démontré que Gilles peut toujours répéter les mouvements de Farid et ce faisant, s'assurer que le point A obtienne une ordonnée de 5, ce qui est une position gagnante.

4. (a) Les huit sous-ensembles de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ sont $\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$.
Les huit sommes des sous-ensembles sont donc : $0, 1, 2, 3, 3, 4, 5$ et 6.

(b) Lorsqu'on construit un sous-ensemble de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, on doit décider si chaque élément, soit 1, 2, 3, 4 et 5, en fera partie ou non.
Il y a donc 2 choix par rapport à l'élément 1 ; pour chaque choix, il y a 2 choix par rapport à l'élément 2 et ainsi de suite.
Il y a donc un total de 2^5 choix, ou 32 choix, donnant chacun un sous-ensemble particulier.

Il y a donc 32 sous-ensembles.
On considère le nombre de sous-ensembles qui contiennent l'élément 1.
Si l'élément 1 a été choisi dans la construction des sous-ensembles, il y a 2 choix pour chacun des éléments 2, 3, 4 et 5. Il y a donc 2^4 sous-ensembles, ou 16 sous-ensembles qui contiennent l'élément 1 (et il y a donc $32 - 16$ sous-ensembles, ou 16 sous-ensembles qui ne contiennent pas le lélément 1).
De la même manière, il y a 16 sous-ensembles qui contiennent l'élément 2, 16 sous-ensembles qui contiennent l'élément 3, et ainsi de suite.
Puisque le nombre 1 parait dans exactement 16 sous-ensembles, il contribue 1×16, ou 16 à la somme des sommes des sous-ensembles.
De même, puisque le nombre 2 parait dans exactement 16 sous-ensembles, il contribue 2×16, ou 32 à la somme des sommes des sous-ensembles.
Il en est de même pour les nombres 3, 4 et 5. En tout, cela donne :

$$(1 \times 16) + (2 \times 16) + (3 \times 16) + (4 \times 16) + (5 \times 16) = 16(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 16(15) = 240.$$

La somme des sommes des sous-ensembles de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ est donc égale à 240.

(c) Chaque sous-ensemble de l'ensemble $\{1, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 16\}$ contient de zéro à quatre des entiers impairs $1, 3, 5, 7$ et de zéro à quatre des multiples de 4, soit $4, 8, 12, 16$.
Si un sous-ensemble ne contient que des nombres divisibles par 4, alors la somme du sous-ensemble l'est aussi (puisque la somme de multiples de 4 est un multiple de 4).
Donc, chaque sous-ensemble de $\{4, 8, 12, 16\}$ a une somme des sous-ensembles divisible par 4.
Comme dans la partie (b), chacun des éléments de l'ensemble $\{4, 8, 12, 16\}$ paraitra dans 2^3, ou 8 des 16 sous-ensembles. La somme des sommes des sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$ est donc égale à $(4 \times 8) + (8 \times 8) + (12 \times 8) + (16 \times 8)$, ou $8(4 + 8 + 12 + 16)$, ou 320.
Tout sous-ensemble comprend 0,1,2,3 ou 4 des éléments de l'ensemble $\{4, 8, 12, 16\}$.
La somme de ces éléments est divisible par 4.
Pour que la somme de tous les éléments du sous-ensemble soit divisible par 4, la somme des éléments (impairs) qui restent doit être divisible par 4.
Or, certains des sous-ensembles de $\{1, 3, 5, 7\}$ ont une somme divisible par 4.
Il s'agit des sous-ensembles $\{1, 3\}$, $\{1, 7\}$, $\{3, 5\}$, $\{5, 7\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$ et de l'ensemble vide $\{\}$. (Les autres sous-ensembles de $\{1, 3, 5, 7\}$ ont une somme non divisible par 4, puisque les éléments sont tous impairs et que la somme de trois entiers impairs est impaire et les sous-ensembles $\{1, 5\}$ et $\{3, 7\}$ ont une somme respective de 6 et 10).
Puisque les sous-ensembles $\{1, 3\}$, $\{1, 7\}$, $\{3, 5\}$, $\{5, 7\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$ ont une somme divisible par 4, alors les ensembles formés de tous leurs éléments et de certains éléments de l'ensemble $\{4, 8, 12, 16\}$ produiront un nouveau sous-ensemble dont la somme est divisible par 4.
Il reste à déterminer la somme de ces sommes de sous-ensembles.
On considère d'abord les sous-ensembles formés des deux éléments de $\{1, 3\}$ avec les éléments de chacun des sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$. On sait que les sommes de sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$ ont une somme de 320.
Lorsqu'on ajoute les éléments de $\{1, 3\}$ à chacun de ces sous-ensembles, on ajoute $1 + 3$, ou 4 à chaque somme de sous-ensemble.
Puisqu'il y a 16 sous-ensembles, les sommes de ces sous-ensembles ont une somme de $(4 \times 16) + 320$, ou 384.
De même, si on ajoute les éléments de $\{1, 7\}$ à chacun des sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$, cela ajoute $1 + 7$, ou 8 à chaque somme de sous-ensembles.

Puisqu'il y a 16 sous-ensembles, les sommes de ces sous-ensembles ont une somme de $(8 \times 16) + 320$, ou 448.
Si on ajoute les éléments de $\{3, 5\}$ à chacun des sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$, les sommes de ces sous-ensembles ont une somme de $(8 \times 16) + 320$, ou 448 .
Si on ajoute les éléments de $\{5, 7\}$ à chacun des sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$, les sommes de ces sous-ensembles ont une somme de $(12 \times 16) + 320$, ou 512.
Si on ajoute les éléments de $\{1, 3, 5, 7\}$ à chacun des sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$, les sommes de ces sous-ensembles ont une somme de $(16 \times 16) + 320$, ou 576.
Si on ajoute les éléments de l'ensemble vide à $\{4, 8, 12, 16\}$ chacun des sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$, les sommes de ces sous-ensembles ont une somme de 320
$((0 \times 16) + 320 = 320)$.
Puisque ce sont les seuls sous-ensembles de $\{1, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 16\}$ qui ont une somme divisible par 4, les sommes de sous-ensembles de cet ensemble ont une somme de
$384 + 448 + 448 + 512 + 576 + 320$, ou 2688.

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2013

le jeudi 18 avril 2013

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 19 avril 2013

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) La marque moyenne des deux parties est de $\frac{103+117}{2}$, ou $\frac{220}{2}$, ou 110.

   (b) *Solution 1*

   Puisque Bruno avait une marque moyenne de 115 points après ses trois premières parties, il avait obtenu de 3×115 points, ou 345 points.
   Or dans ses deux premières parties, il a obtenu un total de $(108+125)$ points, ou 233 points.
   Dans sa troisième partie, Bruno a donc obtenu $(345 - 233)$ points, ou 112 points.

   Solution 2

   Soit x le nombre de points que Bruno a obtenus dans sa troisième partie.
   Puisqu'il avait une moyenne de 115 points après ses trois premières parties, alors $\frac{108+125+x}{3} = 115$.
   Donc $108 + 125 + x = 115 \times 3$, d'où $233 + x = 345$, ou $x = 345 - 233$, ou $x = 112$.
   Dans sa troisième partie, Bruno a donc obtenu 112 points.

   (c) *Solution 1*

   Puisque Carl avait une marque moyenne de 113 points après ses trois premières parties, il avait un total de 3×113 points, ou 339 points.
   Si Carl obtient une moyenne de 120 points dans ses cinq parties, il aura un total de 5×120 points, ou 600 points.
   Dans ses quatrième et cinquième parties, il aura donc un total de $(600 - 339)$ points, ou 261 points.
   Or, Carl a obtenu le même nombre de points dans ces deux parties. Puisque $\frac{261}{2} = 130{,}5$, il a obtenu 130,5 points dans chaque partie, ce qui est impossible puisque aux quilles, la marque est toujours un nombre entier de points.
   Donc, il est impossible que Carl ait obtenu une marque moyenne de 120 points dans ses cinq parties.

   Solution 2

   Puisque Carl avait une marque moyenne de 113 points après ses trois premières parties, il avait un total de 3×113 points, ou 339 points.
   Soit y le nombre de points que Carl a obtenus dans chacune des quatrième et cinquième parties (puisqu'il a obtenu le même nombre de points dans chacune).
   Si Carl a une moyenne de 120 points dans ses cinq parties, alors $\frac{339+y+y}{5} = 120$.
   Donc $339 + 2y = 120 \times 5$, d'où $339 + 2y = 600$, ou $2y = 261$, ou $y = 130{,}5$.
   Puisque aux quilles la marque est toujours un nombre entier de points, ce résultat est rejeté. Donc, il est impossible que Carl ait obtenu une marque moyenne de 120 points dans ses cinq parties.

2. (a) La ligne qui délimite le champ est formée de deux segments de 100 m et de deux demi-cercles d'un diamètre de 60 m.
   Le périmètre du champ est donc égal à la somme des deux longueurs de segments, soit 200 m, ajoutée à la circonférence d'un cercle ayant un diamètre de 60 m, soit $\pi(60)$ m.
   Le périmètre du champ est donc de $(200 + 60\pi)$ m.

   (b) Puisque Alice court du point C au point D en suivant la ligne qui délimite le champ, elle peut le faire de deux façons. Dans chaque cas, elle court le long d'un segment de 100 m et le long d'un demi-cercle ayant un diamètre de 60 m.
   La distance qu'elle parcourt est donc un demi-périmètre du champ, soit $(100 + 30\pi)$ m.
   Béatrice court en ligne droite du point C au point D.
   Puisque le segment de 100 m et le diamètre de 60 m sont perpendiculaires, CD est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les cathètes mesurent 100 m et 60 m.

D'après le théorème de Pythagore, $CD^2 = 100^2 + 60^2$, d'où $CD = \sqrt{13\,600}$ m (puisque $CD > 0$).
Puisque $100 + 30\pi - \sqrt{13\,600} \approx 78$, Alice parcourt environ 78 m de plus que Béatrice.

(c) La ligne qui délimite l'extérieur de la piste est composée de deux segments de 100 m et de deux demi-cercles ayant un diamètre de $(60 + x + x)$ m, ou $(60 + 2x)$ m.
La longueur de cette ligne est donc égale à la somme des deux longueurs de segments, soit 200 m, ajoutée à la circonférence d'un cercle ayant un diamètre de $(60 + 2x)$ m, ou $\pi(60 + 2x)$ m. Elle est donc égale à $(200 + (60 + 2x)\pi)$ m.
Puisque la limite extérieure de la piste a un périmètre de 450 m, alors
$200 + (60 + 2x)\pi = 450$.
Donc $(60 + 2x)\pi = 250$, ou $60 + 2x = \frac{250}{\pi}$, d'où $2x = \frac{250}{\pi} - 60$. Donc $x = \frac{125}{\pi} - 30$, ou $x \approx 9{,}789$ m.
Arrondie à l'entier près, x a une valeur de 10.

3. (a) Le nombre de quatre chiffres, $51A3$, est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
La somme des chiffres est égale à $5 + 1 + A + 3$, ou $9 + A$.
Les valeurs du chiffre A pour lesquelles $9 + A$ est divisible par 3 sont 0, 3, 6 et 9.

(b) Le nombre de quatre chiffres, $742B$ est divisible par 2 s'il est pair.
Donc, $742B$ est divisible par 2 si B est égal à 0, 2, 4, 6 ou 8.
Le nombre $742B$ est divisible par 3 si $7 + 4 + 2 + B$, ou $13 + B$, est divisible par 3.
Donc, $742B$ est divisible par 3 si B est égal à 2, 5 ou 8.
Les valeurs de B pour lesquelles le nombre $742B$ est divisible par 6 (c'est-à-dire par 2 et par 3) sont $B = 2$ et $B = 8$.

(c) Un entier est divisible par 15 s'il est divisible par 3 et par 5 (puisque 3 et 5 ont un produit de 15 et qu'ils ne partagent aucun diviseur commun).
L'entier $1234PQPQ$ est divisible par 5 si son chiffre des unités, Q, est égal à 0 ou à 5.
L'entier $1234PQPQ$ est divisible par 3 si la somme de ses chiffres, $1+2+3+4+P+Q+P+Q$, ou $10 + 2P + 2Q$, est divisible par 3.
On considère les cas où $Q = 0$ et $Q = 5$.
Lorsque $Q = 0$, la somme des chiffres, $10 + 2P + 2Q$, est égale à $10 + 2P$.
Dans ce cas, $10 + 2P$ est divisible par 3 lorsque P est égal à 1, 4 ou 7.
Lorsque $Q = 5$, la somme des chiffres, $10 + 2P + 2Q$, est égale à $10 + 2P + 10$ ou $20 + 2P$.
Dans ce cas, $20 + 2P$ est divisible par 3 lorsque P est égal à 2, 5 ou 8.
Les valeurs du couple (P, Q) pour lesquelles le nombre $1234PQPQ$ est divisible par 15 sont $(1, 0)$, $(4, 0)$, $(7, 0)$, $(2, 5)$, $(5, 5)$ et $(8, 5)$.

(d) Un entier est divisible par 12 s'il est divisible par 3 et par 4 (puisque 3 et 4 ont un produit de 12 et qu'ils ne partagent aucun diviseur commun).
Dans le produit $2CC \times 3D5$, $3D5$ est impair et ne peut être divisible par 4.
Donc, $2CC$ doit être divisible par 4.
Puisque $2CC$ est égal à $2 \times 100 + 10 \times C + C$, ou $200 + 11 \times C$, et que 200 est divisible par 4, alors $11 \times C$ doit être divisible par 4.
Puisque 11 n'est pas divisible par 2 ou par 4, alors C doit être divisible par 4.
Le produit $2CC \times 3D5$ est donc divisible par 4 lorsque C est égal à 0, 4 ou 8.
On considère les cas où $C = 0$, $C = 4$ et $C = 8$.
Lorsque $C = 0$, le produit $2CC \times 3D5$ devient $200 \times 3D5$.
Le nombre 200 n'est pas divisible par 3, puisque la somme de ses chiffres n'est pas divisible par 3. Donc, le nombre $3D5$ doit être divisible par 3, c'est-à-dire que $8 + D$ doit être

divisible par 3.
Les valeurs de D pour lesquelles $8 + D$ est divisible par 3 sont 1, 4 et 7.
Dans ce cas, il y a trois couples de chiffres C et D pour lesquels le produit $2CC \times 3D5$ est divisible par 12.
Lorsque $C = 4$, le produit $2CC \times 3D5$ devient $244 \times 3D5$.
Le nombre 244 n'est pas divisible par 3 puisque la somme de ses chiffres n'est pas divisible par 3.
Donc, le nombre $3D5$ doit être divisible par 3. Comme dans le cas précédent, il y a trois couples de chiffres C et D pour lesquels le produit $2CC \times 3D5$ est divisible par 12.
Lorsque $C = 8$, le produit $2CC \times 3D5$ devient $288 \times 3D5$.
Le nombre 288 est divisible par 3 puisque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Donc, le produit $288 \times 3D5$ est divisible par 3 quelle que soit la valeur du chiffre D.
Donc, D peut être n'importe quel chiffre de 0 à 9.
Dans ce cas, il y a dix couples de chiffres C et D pour lesquels le produit $2CC \times 3D5$ est divisible par 12.
En tout, le nombre de couples de chiffres C et D pour lesquels le produit $2CC \times 3D5$ est divisible par 12 est égal à $3 + 3 + 10$, ou 16.

4. (a) Puisque la position initiale du point est $(0, 0)$ et que sa position finale est $(1, 0)$, le point se déplace d'une unité vers la droite et de 0 unité vers le haut ou le bas.
Puisque le point se déplace de 0 unité vers le haut ou le bas, alors le nombre de déplacements $\uparrow$ doit être égal au nombre de déplacements $\downarrow$.
Puisqu'il y a 4 déplacements ou moins, les façons possibles incluent $0 \uparrow$ et $0 \downarrow$ (0 déplacement en tout), ou $1 \uparrow$ et $1 \downarrow$ (2 déplacements en tout), ou $2 \uparrow$ et $2 \downarrow$ (4 déplacements en tout).
Puisque la position finale est 1 unité à la droite de la position initiale, alors le nombre de déplacements $\rightarrow$ est 1 de plus que le nombre de déplacements $\leftarrow$.
Puisqu'il y a 4 déplacements ou moins, les façons possibles incluent $1 \rightarrow$ et $0 \leftarrow$ (1 déplacement en tout), ou $2 \rightarrow$ et $1 \leftarrow$ (3 déplacements en tout).

S'il y a 0 déplacement haut/bas, il peut y avoir 1 ou 3 déplacements gauche/droite.

Avec 0 déplacement haut/bas et 1 déplacement gauche/droite, la série de déplacements est $\rightarrow$.

Avec 0 déplacement haut/bas et 3 déplacements gauche/droite, la série de déplacements est $\leftarrow\rightarrow\rightarrow$ ou n'importe quelle permutation de ces déplacements.
Il y a 3 permutations possibles des déplacements $\leftarrow\rightarrow\rightarrow$. (En effet, le déplacement $\leftarrow$ peut être placé en 1^{re}, en 2^{e} ou en 3^{e} position, les deux autres déplacements étant chacun $\rightarrow$.)

S'il y a 2 déplacements haut/bas, il peut y avoir 1 déplacement gauche/droite.
Avec 2 déplacements haut/bas et 1 déplacement gauche/droite, la série de déplacements est $\uparrow\downarrow\rightarrow$ ou n'importe quelle permutation de ces déplacements.
Il y a 6 permutations possibles des déplacements $\uparrow\downarrow\rightarrow$. (En effet, il y a 3 déplacements possibles pour la 1^{re} position ; dans chaque cas, il y a 2 déplacements possibles pour la 2^{e} position ; dans chacue cas, il y a 1 déplacement possible pour la 3^{e} position. En tout, il y a $3 \times 2 \times 1$ permutations, ou 6 permutations.)

S'il y a 4 déplacements haut/bas, il peut y avoir 0 déplacement gauche/droite, ce qui est impossible.

Le nombre total de façons possibles pour que le point se retrouve en position $(1, 0)$ en 4 déplacements ou moins est égal à $1 + 3 + 6$, ou 10.

(b) Si le point subit exactement 4 déplacements, ces déplacements peuvent être :
– n'importe quelle permutation de 4 déplacements gauche/droite, ou
– n'importe quelle permutation de 3 déplacements gauche/droite et 1 déplacement haut/bas, ou
– n'importe quelle permutation de 2 déplacements gauche/droite et n'importe quelle permutation de 2 déplacements haut/bas, ou
– 1 déplacement gauche/droite et n'importe quelle permutation de 3 déplacements haut/bas, ou
– n'importe quelle permutation de 4 déplacements haut/bas.

Étant donné un ensemble particulier de déplacements, toute permutation de ces déplacements fera en sorte que le point arrivera à la même position finale. On peut donc considérer que tous les déplacements gauche/droite se font avant les déplacements haut/bas.

Quatre déplacements gauche/droite peuvent être formés de 4 à droite (qui se terminent en $x = 4$), 3 à droite et 1 à gauche (qui se terminent en $x = 2$), 2 à droite et 2 à gauche (qui se terminent en $x = 0$), 1 à droite et 3 à gauche (qui se terminent en $x = -2$), ou 4 à gauche (qui se terminent en $x = -4$).

Trois déplacements gauche/droite peuvent être formés de 3 à droite, 2 à droite et 1 à gauche, 1 à droite et 2 à gauche, ou 3 à gauche, qui se terminent respectivement en $x = 3$, $x = 1$, $x = -1$, $x = -3$.

Deux déplacements gauche/droite peuvent être formés de 2 à droite, 1 à droite et 1 à gauche, ou 2 à gauche, qui se terminent respectivement en $x = 2$, $x = 0$, $x = -2$.

Un déplacement gauche/droite peut être 1 à droite ou 1 à gauche, qui se termine respectivement en $x = 1$, $x = -1$.

Plus de déplacements gauche/droite se termine en $x = 0$.

De même, quatre déplacements haut/bas peuvent se terminer respectivement en $y = 4$, $y = 2$, $y = 0$, $y = -2$, $y = -4$, trois déplacements haut/bas peuvent se terminer respectivement en $y = 3$, $y = 1$, $y = -1$, $y = -3$, deux déplacements haut/bas peuvent se terminer respectivement en $y = 2$, $y = 0$, $y = -2$, un déplacement haut/bas peut se terminer respectivement en $y = 1$, $y = -1$, et plus de déplacements haut/bas se termine en $y = 0$. (Pour le voir de façon explicite, on peut reprendre les arguments précédents en remplaçant « gauche/droite » par « haut/bas » et en remplaçant les abscisses par des ordonnées.)

Étant donné un nombre particulier de déplacements, il faut considérer toutes les répartitions de ces déplacements à la verticale et à l'horizontale.

Puisque le point subit exactement 4 déplacements, on peut avoir :
– n'importe quelle permutation de 4 déplacements droite/gauche et plus de déplacements haut/bas ($x = 4{,}2{,}0{,}-2{,}-4$ et $y = 0$), qui se terminent en $(4{,}0),(2{,}0),(0{,}0),(-2{,}0),(-4{,}0)$, ou
– n'importe quelle permutation de 3 déplacements droite/gauche et 1 déplacement haut/bas ($x = 3{,}1,-1,-3$ et $y = 1,-1$), qui se terminent en $(3{,}1),(3,-1),(1{,}1),(1,-1),(-1{,}1)$, $(-1,-1),(-3{,}1),(-3,-1)$, ou
– n'importe quelle permutation de 2 déplacements droite/gauche et n'importe quelle permutation de 2 déplacements haut/bas ($x = 2{,}0,-2$ et $y = 2{,}0,-2$), qui se terminent en $(2{,}2),(2{,}0),(2,-2),(0{,}2),(0{,}0),(0,-2),(-2{,}2),(-2{,}0),(-2,-2)$, ou
– 1 déplacement droite/gauche et n'importe quelle permutation de 3 déplacements haut/bas ($x = 1{,}-1$ et $y = 3{,}1{,}-1{,}-3$), qui se terminent en $(1{,}3),(1{,}1),(1{,}-1),(1{,}-3),(-1{,}3),(-1{,}1)$, $(-1,-1),(-1,-3)$, ou
– n'importe quelle permutation de 4 déplacements haut/bas et plus de déplacements droite/gauche ($x = 0$ et $y = 4{,}2{,}0,-2,-4$), qui se terminent en $(0{,}4),(0{,}2),(0{,}0)$,

$(0,-2)$,$(0,-4)$.

Après une observation attentive de la liste des points ci-haut, nous voyons qu'un certain nombre de points peut être atteint plus qu'une façon.

En comptant le nombre total de points distincts, nous devons prendre soin de compter le même point plusieurs fois.

Dans le premier point ci-dessus, il y a 5 points distincts.

Dans le deuxième point, il existe 8 nouveaux points qui n'ont pas encore été prise en compte.

Dans le troisième point, il y a 9 points, pourtant, nous avons déjà compté les 3 points (2,0), (0,0) and $(-2,0)$.

Dans le quatrième point, il y a 8 points, pourtant, nous avons déjà compté les 4 points (1,1), $(1,-1)$, $(-1,1)$, and $(-1,-1)$.

Dans le dernière point, il y a 5 points, pourtant, nous avons déjà compté les 3 points (0,2), (0,0) and $(0,-2)$.

Le nombre de positions possibles est donc égal à $5+8+(9-3)+(8-4)+(5-3)$, ou 25.

(c) Le point peut se retrouver en position $(-7,12)$ après 19 déplacements, soit 7 déplacements vers la gauche et 12 déplacements vers le haut.

Il faut au moins 19 déplacements pour arriver au point $(-7,12)$, puisqu'il faut au moins 7 déplacements vers la gauche et au moins 12 déplacements vers le haut (avec possiblement d'autres déplacements qui s'annulent les uns les autres).

Le point peut aussi atteindre la position $(-7,12)$ en 21 déplacements : 7 vers la gauche, 12 vers le haut, 1 vers la gauche, 1 vers la droite.

Le point peut aussi atteindre la position $(-7,12)$ en 23 déplacements : 7 vers la gauche, 12 vers le haut, 2 vers la gauche, 2 vers la droite.

De même, le point peut aussi atteindre la position $(-7,12)$ en $19+2m$ déplacements, m étant n'importe quel entier non négatif : 7 vers la gauche, 12 vers le haut, m vers la gauche, m vers la droite.

À mesure que m augmente de 0 à 40, l'expression $19+2m$ prend toutes les valeurs entières impaires de 19 à 99, soit 41 valeurs.

On a démontré que si $k<19$, le point ne peut atteindre la position $(-7,12)$ en k déplacements et que si $k\geq 19$ et k est impair, le point peut atteindre la position $(-7,12)$ en k déplacements.

Il reste à démontrer que si $k\geq 19$ et k est pair, alors le point ne peut atteindre la position $(-7,12)$ en k déplacements. Ceci complètera la démonstration et donnera la réponse de 41 valeurs obtenue ci-haut.

On suppose que k est un entier pair, $k\geq 19$, et que le point peut atteindre la position $(-7,12)$ en k déplacements.

Ces k déplacements consistent en h déplacements horizontaux (gauche/droite) et v déplacements verticaux (haut/bas). Donc $k=h+v$.

Puisque k est pair, alors h et v doivent être tous les deux pairs ou tous les deux impairs. (En effet, la somme de deux entiers pairs est paire, la somme de deux entiers impairs est paire et la somme d'un entier pair et d'un entier impair est impaire.)

Supposons que h est pair. Les h déplacements horizontaux consistent en d déplacements vers la droite et g déplacements vers la gauche. On a donc $h=d+g$ et $d-g=-7$, puisque le point d'arrivée a une abscisse de -7.

Puisque h est pair et que $h=d+g$, alors d et g sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

Or puisque d et g sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs, alors $d-g$ est pair.

Ceci contredit la condition que $d - g = -7$.
La supposition que h est pair est donc fausse. Donc h est impair.
Donc v est impair.
Les v déplacements verticaux consistent en u déplacements vers le haut et b déplacements vers le bas. Donc $v = u + b$ et $u - v = 12$.
Puisque $v = u + b$ est impair, alors u et b doivent être l'un pair et l'autre impair. Donc $u - b$ est impair et ne peut donc pas être égal à 12.
Donc, aucune de ces alternatives n'est vraiment possible.
Il est donc impossible pour le point d'atteindre la position $(-7, 12)$ dans un nombre pair de déplacements.
Il existe donc 41 entiers strictement positifs k, $k \leq 100$, pour lesquels le point peut atteindre la position $(-7, 12)$ en k déplacements.

(d) On considère une position P que le point peut atteindre en 47 déplacements. Le point peut aussi atteindre la position P en 49 déplacements. Il suffirait d'ajouter $\rightarrow\leftarrow$ à la fin des 47 déplacements précédents.
Donc, chacune des 2304 positions que le point peut atteindre en 47 déplacements peut aussi être atteinte en 49 déplacements.
Toute autre position Q que le point peut atteindre en 49 déplacements ne peut pas être atteinte en 47 déplacements.
On considère une série de déplacements tels que le point atteint le point Q en 49 déplacements. Cette série ne peut inclure un déplacement vers la gauche et un déplacement vers la droite, ni un déplacement vers le haut et un déplacement vers le bas, car deux tels déplacements s'annuleraient de manière à permettre au point d'atteindre la position Q en 47 déplacements.
Donc, une série de déplacements qui permettent au point d'atteindre la position Q doivent inclure h déplacements horizontaux et v déplacements verticaux (avec $h + v = 49$), où tous les déplacements horizontaux sont dans la même direction et tous les déplacements verticaux sont dans la même direction.
Si $h = 0$, alors $v = 49$. Le point atteint donc la position $(0, 49)$ (49 déplacements vers le haut) ou la position $(0, -49)$ (49 déplacements vers le bas).
De même si $v = 0$, le point peut atteindre la position $(49, 0)$ ou la position $(-49, 0)$.
Si h et v sont tous les deux non nuls, il y a des déplacements horizontaux et des déplacements verticaux.
On considère le cas où il y a h déplacements vers la droite et v déplacements vers le haut, $h + v = 49$.
Puisque $h \geq 1$ et $v \geq 1$, alors h peut prendre n'importe quelle valeur de 1 à 48 ; v prendrait des valeurs correspondantes de 48 à 1. Le point atteindrait les positions $(1, 48), (2, 47), \ldots, (47, 2), (48, 1)$.
Il s'agit de 48 positions distinctes.
De même, si les déplacements sont vers la droite et vers le bas, ou vers la gauche et vers le haut, ou vers la gauche et vers le bas, on obtient 48 positions distinctes dans chaque cas.
Donc, le nombre de positions Q que le point peut atteindre en 49 déplacements, mais pas en 47 déplacements, est égal à $2 + 2 + 4 \times 48$, ou 196.
Le nombre de positions que le point peut atteindre en 49 positions est donc égal à $2304 + 196$, ou 2500.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2012

le jeudi 12 avril 2012
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2012
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Puisque $\frac{1008}{5600} = 0{,}18 = \frac{18}{100} = 18\,\%$, le candidat a reçu $18\,\%$ de tous les votes.

   (b) *Solution 1*
   Puisque $\frac{3}{5} = 0{,}60 = \frac{60}{100} = 60\,\%$, le candidat B a reçu $60\,\%$ de tous les votes.
   Puisque les candidats C et D sont arrivés deuxièmes en obtenant un même nombre de votes, ils ont partagé également les autres votes, soit $40\,\%$ de tous les votes, car $100\,\% - 60\,\% = 40\,\%$.
   Donc, le candidat C a reçu la moitié de $40\,\%$ des votes, c'est-à-dire $20\,\%$ des votes.

   Solution 2
   Puisque le candidat B a reçu $\frac{3}{5}$ des votes et que $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, les candidats C et D ont partagé $\frac{2}{5}$ des votes. Or, ceux-ci ont obtenu le même nombre de votes, soit la moitié de $\frac{2}{5}$ des votes, ou $\frac{1}{5}$ des votes. Puisque $\frac{1}{5}$ de $100\,\%$ est égal à $20\,\%$, le candidat C a reçu $20\,\%$ des votes.

   (c) *Solution 1*
   À 22 h 00, on avait compté $90\,\%$ de 6000 votes, c.-à-d. $\frac{90}{100} \times 6000$ votes, ou 5400 votes.
   Le candidat E a reçu $53\,\%$ de ces 5400 votes. À 22 h 00, le candidat E avait donc reçu $\frac{53}{100} \times 5400$ votes, ou 2862 votes.
   Puisqu'il n'y avait que deux candidats et que $5400 - 2862 = 2538$, le candidat F a reçu les 2538 votes qui restaient. Puisque $2862 - 2538 = 324$, le candidat E avait reçu 324 votes de plus que le candidat F.

   Solution 2
   À 22 h 00, on avait compté $90\,\%$ de 6000 votes, c.-à-d. $\frac{90}{100} \times 6000$ votes, ou 5400 votes.
   Le candidat E a reçu $53\,\%$ de ces 5400 votes.
   Puisqu'il n'y avait que deux candidats, le candidat F a donc reçu $47\,\%$ des votes, puisque $100\,\% - 53\,\% = 47\,\%$.
   Puisque $53\,\% - 47\,\% = 6\,\%$, le candidat E a reçu $6\,\%$ des votes de plus que le candidat F.
   Puisqu'on avait compté 5400 votes à 22 h 00 et que $6\,\%$ de 5400 est égal à 324, le candidat E avait reçu 324 votes de plus que le candidat F.

   (d) Le candidat H a reçu $40\,\%$ des votes et le candidat J a reçu $35\,\%$ des votes.
   Puisque $100\,\% - 40\,\% - 35\,\% = 25\,\%$, le seul autre candidat, G, a reçu $25\,\%$ des votes.
   Puisque G a reçu 2000 votes et que cela représente $25\,\%$ de tous les votes, alors le nombre total des votes est égal à 4×2000, ou 8000 (puisque $4 \times 25\,\% = 100\,\%$).
   Le candidat H a donc reçu $40\,\%$ de 8000 votes, c.-à-d. $\frac{40}{100} \times 8000$ votes, ou 3200 votes.

2. (a) On a $112 = 2 \times 56 = 2 \times 2 \times 28 = 2 \times 2 \times 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7$.
   Donc, la factorisation première de 112 est $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7$, ou $2^4 \times 7$.

   (b) Dans la factorisation première d'un carré parfait, chacun des facteurs premiers parait un nombre pair de fois, car on doit pouvoir les répartir également pour créer deux facteurs égaux. (Par exemple, le nombre 22 500, qui est égal à 150^2, est égal à $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ en factorisation première. Puisque le facteur 2 parait 4 fois, que le facteur 3 parait 2 fois et que le facteur 5 parait 2 fois, on peut répartir les facteurs également dans deux parenthèses et écrire $22\,500 = (2^2 \times 3 \times 5) \times (2^2 \times 3 \times 5)$, ce qui est équivalent à $22\,500 = 150 \times 150$.)

   D'après la partie (a), la factorisation première de 112 est $2^4 \times 7$.
   On cherche la plus petite valeur entière de u pour laquellle $112 \times u$, ou $2^4 \times 7 \times u$, est un carré parfait. Le facteur premier 2 parait un nombre pair de fois (quatre fois) dans la factorisation première de 112, alors que le facteur premier 7 ne parait qu'une fois. Si on essaie de partager également les facteurs premiers de 112 en deux parenthèses, on ne peut obtenir que $112 = (2 \times 2 \times 7) \times (2 \times 2)$.

On voit qu'il suffit d'ajouter un autre facteur 7 dans la deuxième parenthèse pour que le nombre $2^4 \times 7 \times u$ soit un carré parfait.
Donc, la plus petite valeur possible de u pour laquelle $112 \times u$ est un carré parfait est 7 :

$$112 \times u = [(2 \times 2 \times 7) \times (2 \times 2)] \times 7 = (2 \times 2 \times 7) \times (2 \times 2 \times 7) = (2^2 \times 7) \times (2^2 \times 7)$$

(c) Puisque $5632 = 512 \times 11$ et que $512 = 2^9$, alors la factorisation première de 5632 est $2^9 \times 11$. Dans la factorisation première d'un carré parfait, chaque facteur premier parait un nombre pair de fois. Or dans la factorisation première de 5632, le facteur 2 parait 9 fois et le facteur 11 parait 1 fois. Si on essaie de partager également les facteurs premiers de 5632 en deux parenthèses, on ne peut obtenir que $5632 = (2^5 \times 11) \times (2^4)$.
Pour obtenir un carré parfait, il suffit d'ajouter un facteur 2 et un facteur 11 dans la deuxième parenthèse. Donc, la plus petite valeur possible de v pour laquelle $5632 \times v$, ou $2^9 \times 11 \times v$, est un carré parfait est 2×11, ou 22 :

$$5632 \times v = [(2^5 \times 11) \times (2^4)] \times 2 \times 7 = (2^5 \times 11) \times (2^4 \times 2 \times 11) = (2^5 \times 11) \times (2^5 \times 11).$$

(d) Dans la factorisation première d'un cube parfait, le nombre de fois que chaque facteur premier parait doit être un multiple de 3, de manière que les facteurs puissent être répartis également dans trois parenthèses. (Par exemple, le nombre 1728, qui est égal à 12^3, est égal à $2^6 \times 3^3$ en factorisation première. Puisque le facteur 2 parait 6 fois et que le facteur 3 parait 3 fois, 6 et 3 étant des multiples de 3, on peut les répartir également dans trois parenthèses et écrire $1728 = (2^2 \times 3) \times (2^2 \times 3) \times (2^2 \times 3)$, ce qui est équivaleut à $1728 = 12 \times 12 \times 12$.)
D'après la partie (a), la factorisation première de 112 est $2^4 \times 7$. Or le facteur 2 parait 4 fois et le facteur 7 parait 1 fois. Si on essaie de partager également les facteurs premiers de 112 en trois parenthèses, on ne peut obtenir que $112 = (2^2 \times 7) \times (2) \times (2)$.
Pour obtenir un cube parfait, il suffit donc d'ajouter un facteur 2 et un facteur 7 à chacune des 2ᵉ et 3ᵉ parenthèses. Donc, la plus petite valeur entière de w pour laquelle $112 \times w$, ou $2^4 \times 7 \times w$, est un cube parfait est $2^2 \times 7^2$, ou 196 :

$$112 \times w = [(2^2 \times 7) \times (2) \times (2)] \times 2^2 \times 7^2 = (2^2 \times 7) \times (2^2 \times 7) \times (2^2 \times 7).$$

3. (a) La première rangée contient les entiers de 1 à 6.
Chacune des rangées suivantes contient les six entiers qui suivent le plus grand entier de la rangée précédente. Donc, le plus grand entier de n'importe quelle rangée est égal à 6 fois le numéro de la rangée.
Ainsi le plus grand entier de la rangée 30 est égal à 6×30, ou 180.

(b) D'après l'argument utilisé dans la partie (a), le plus grand entier de la rangée 2012 est égal à 6×2012, ou 12 072.
On trouve les autres entiers de la rangée en comptant à rebours.
Donc, les six entiers de la rangée 2012 sont 12 072, 12 071, 12 070, 12 069, 12 068 et 12 067.
La somme des six entiers de la rangée 2012 est donc égale à :

$$12\,072 + 12\,071 + 12\,070 + 12\,069 + 12\,068 + 12\,067 = 72\,417$$

(c) D'après l'argument utilisé dans la partie (a), le plus grand entier d'une rangée est égal à 6 fois le numéro de la rangée.
Pour déterminer le numéro de la rangée dans laquelle le nombre 5000 parait, on divise d'abord 5000 par 6. Puisque $5000 \div 6 = 833\frac{1}{3}$ et que $6 \times 833 = 4998$, alors le plus grand entier de la rangée 833 est 4998.
Donc, la rangée 834 contient les six entiers suivants, de 4999 à 5004.

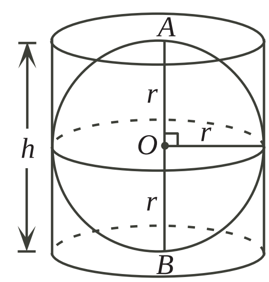
(On peut vérifier que $6 \times 834 = 5004$.)
Donc, le nombre 5000 parait dans la rangée 834.
On sait que dans les rangées paires, les six entiers sont placés en ordre décroissant, de la colonne A jusqu'à la colonne F.
Puisque la rangée 834 est paire, les nombres de la rangée sont, dans l'ordre, 5004, 5003, 5002, 5001, 5000 et 4999, le nombre 5004 étant dans la colonne A.
Donc, le nombre 5000 est dans la rangée 834, colonne E.

(d) Le plus grand entier de la rangée r est égal à $6 \times r$, ou $6r$.
Puisque la rangée comprend six entiers consécutifs, on compte à rebours pour conclure que les cinq autres entiers de la rangée sont $6r - 1$, $6r - 2$, $6r - 3$, $6r - 4$ et $6r - 5$.
La somme des entiers de la rangée r est donc égale à :

$$6r + (6r - 1) + (6r - 2) + (6r - 3) + (6r - 4) + (6r - 5) = 36r - 15$$

On veut que la somme soit supérieure à 10 000. On veut donc que $36r - 15 > 10\,000$, ou $36r > 10\,015$, ou $r > \frac{10\,015}{36}$, ou $r > 278\frac{7}{36}$.
Puisque le numéro r de la rangée est un entier, il faut donc que $r \geq 279$.
Or, on veut aussi que la somme soit inférieure à 20 000.
On veut donc que $36r - 15 < 20\,000$, ou $36r < 20\,015$, ou $r < \frac{20\,015}{36}$, ou $r < 555\frac{35}{36}$.
Puisque le numéro r de la rangée est un entier, il faut donc que $r \leq 555$.
Donc, les rangées dans lesquelles la somme des six nombres est supérieure à 10 000 et inférieure à 20 000 sont les nombres 279, 280, 281, ..., 555.
Le nombre de rangées qui vérifient la condition est égal à $555 - 278$ (ou $555 - 279 + 1$), ou 277.

4. (a) D'après la description, la hauteur du cylindre correspond au diamètre de la sphère, c'est-à-dire à 2 fois son rayon. On a donc $h = 2r$. (On le voit bien dans la figure ci-contre. Le point A est situé sur la sphère, directement au-dessus du centre O de la sphère. De même, le point B est situé directement au-dessous de O. Le dessus et le dessous du cylindre touchent la sphère aux points respectifs A et B. Le segment AB passe par le centre de la sphère. Il s'agit donc d'un diamètre. Puisque OA est un rayon, il a pour longueur r. Donc, le diamètre AB a pour longueur $2r$. Or, le segment AB est perpendiculaire aux deux extrémités du cylindre. Il a donc une longueur de h. Donc $h = 2r$.)



(b) *Solution 1*
On considère un cône ayant le même diamètre et la même hauteur que le cylindre. D'après la relation d'Archimède, le volume du cône est un tiers du volume du cylindre et la moitié du volume de la sphère. Son volume est donc égal à la moitié de 288π, ou 144π.
Le volume du cylindre est égal à 3 fois le volume de ce cône. Il est donc égal à $3 \times 144\pi$, ou 432π.

Solution 2
Le volume d'une sphère peut être calculé à partir de la formule $\frac{4}{3}\pi r^3$.
Puisque la sphère a un volume de 288π, on a donc $\frac{4}{3}\pi r^3 = 288\pi$, ou $4\pi r^3 = 3 \times 288\pi$, d'où $r^3 = \frac{3\times 288\pi}{4\pi} = 216$.
Or le volume du cylindre est égal à $\pi r^2 h$. D'après la partie (a), $h = 2r$.
Le volume du cylindre est donc égal à $\pi r^2 h$, ou $\pi r^2(2r)$, ou $2\pi r^3$. Puisque $r^3 = 216$, le volume du cylindre est égal à $2\pi(216)$, ou 432π.

(c) L'espace dans lequel Darla peut se déplacer est limité par les points qui sont situés à 1 km du point le plus près sur le cube.
Or, on peut considérer trois sortes de points sur un cube, soit les sommets, les points qui sont sur des arêtes (à l'exception des sommets) et les points sur les six faces du cube (à l'exception des points sur les arêtes).
Pour déterminer le volume de l'espace dans lequel Darla peut se déplacer, on considère trois cas, selon ces trois sortes de points.

1er cas - Points sur une face du cube (à l'exception de ceux sur les arêtes)
Si Darla est à un tel point sur une face du cube, elle peut se déplacer jusqu'à 1 km de ce point.
Le point le plus éloigné du cube, à partir de ce point, est un point qui est à 1 km du cube, mesuré perpendiculairement à la face du cube.
Si elle se déplace de cette façon à partir de chaque point sur la même face du cube, elle peut occuper un espace qui a la forme d'un cube ayant une longueur d'arête de 1 km.
Ce cube s'étend à l'extérieur du cube initial.
On peut recommencer pour chacune des 6 faces du cube. Darla peut donc occuper un espace ayant un volume de $6 \times 1 \times 1 \times 1$ km^3, ou 6 km^3, comme on le voit dans la figure 1.

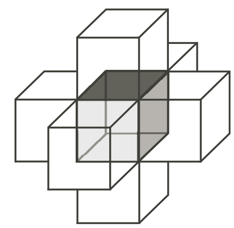


Figure 1

2e cas - Points sur une arête du cube (à l'exception des sommets)
On considère le point A situé au milieu d'une arête. Soit B et C les milieux respectifs de deux arêtes, comme dans la figure 2.
Darla peut se déplacer jusqu'aux points B et C, puisque A est sur le cube initial et qu'il est à 1 km de chacun de ces points. De plus, Darla peut aussi se déplacer de A jusqu'à n'importe quel point sur l'arc BC de centre A. Cet arc est un quart de cercle de centre A. Il a un rayon de 1 km et il passe aux points B et C (puisque $\angle BAC = 90°$).

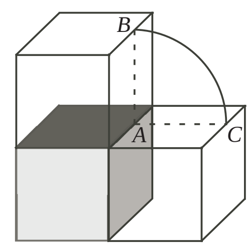


Figure 2

Darla peut répéter ces déplacements à partir de n'importe quel point autre que A sur la même arête. L'espace qu'elle occupe est un quart d'un cylindre ayant un rayon de 1 km et une hauteur de 1 km. Il a donc un volume de $\frac{1}{4}\pi(1)^2(1)$ km^3, ou $\frac{1}{4}\pi$ km^3 (voir la figure 3).

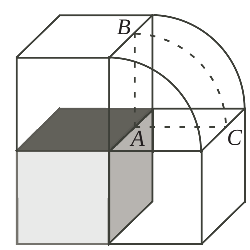


Figure 3

Or, Darla peut faire de même à partir de n'importe quelle des 12 arêtes du cube initial. Le volume total de l'espace qu'elle peut occuper, dans ce 2e cas, est de $12 \times \frac{1}{4}\pi$ km^3, ou 3π km^3. L'espace est indiqué dans la figure 4.

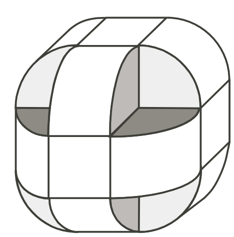


Figure 4

3^e cas - Points qui correspondent aux sommets du cube.
On considère un sommet P du cube initial.
Soit Q, R et S des sommets de trois cubes externes, comme dans la figure 5.
Darla peut se déplacer jusqu'à n'importe quels de ces points, puisqu'ils sont à 1 km de P.
D'après le 2^e cas, Darla peut aussi se déplacer sur les arcs QR, RS et SQ. Or, Darla peut aussi se déplacer dans l'espace entre les quarts de disques PQR, PRS et PSQ, jusqu'à une distance de 1 km du point P.
Puisque $\angle SPQ = \angle SPR = \angle QPR = 90°$, cet espace est délimité par une surface qui est un huitième d'une sphère de centre P, dont le rayon mesure 1 km (voir la figure 5).
Cet espace a un volume de $\frac{1}{8} \times \frac{4}{3}\pi(1)^3$ km^3, ou $\frac{1}{6}\pi$ km^3.
On peut recommencer à chacun des 8 sommets du cube initial.
Donc, l'espace dans lequel Darla peut se déplacer, dans ce cas, a un volume de $8 \times \frac{1}{6}\pi$ km^3, ou $\frac{4}{3}\pi$ km^3. L'espace est indiqué dans la figure 6.

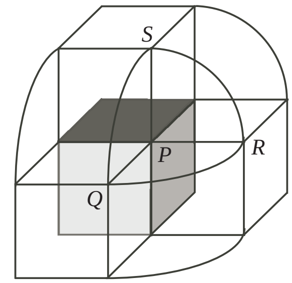


Figure 5

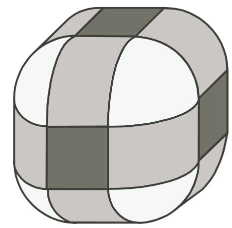


Figure 6

Le volume total de l'espace dans lequel Darla peut se déplacer est égal à la somme des volumes dans les trois cas précédents.
Il est égal à $(6 + 3\pi + \frac{4}{3}\pi)$ km^3, ou $(6 + \frac{13\pi}{3})$ km^3.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Concours Fryer 2011

le mercredi 13 avril 2011

Solutions

1. (a) Puisque le 5^e terme est 14 et que la raison est 3, alors le 6^e terme est égal à $14+3$, ou 17. De même, le 7^e terme est égal à $17+3$, ou 20.

   (b) Chaque terme, après le premier, est 3 de plus que le terme à sa gauche.
   Pour se rendre du 1^{er} terme au 31^e terme, il faut avancer 30 fois vers la droite.
   Donc, le 31^e terme est 30×3 de plus que le 1^{er} terme. Il est donc égal à $2+30(3)$, ou 92.

   (c) Selon le travail de la partie (b), on cherche combien de fois il faut ajouter 3 à 2 pour donner 110. Or, de 2 à 110, il y a une augmentation de 108.
   Puisque $108 \div 3 = 36$, il faut ajouter 36 fois le nombre 3 à 2 pour obtenir 110, c'est-à-dire que $2+36\times 3 = 110$.
   On a donc ajouté 36 termes à la suite, après le premier terme, pour obtenir le dernier terme, 110. Il y a donc 37 termes dans la suite.

   (d) De 2 à 1321, il y a une augmentation de 1319.
   Est-il possible d'ajouter le nombre 3 un certain nombre de fois pour obtenir une augmentation totale de 1319 ?
   Or, $1319 \div 3 = 439\frac{2}{3}$. Puisque 1319 d'est pas un multiple de 3, il est impossible d'ajouter le nombre 3 un certain nombre de fois pour obtenir une augmentation totale de 1319.
   Donc, le nombre 1321 ne peut pas paraître dans la suite.

2. (a) (i) Puisque $AB = AC$, le triangle ABC est isocèle. Donc, la hauteur AD coupe la base BC en son milieu et on a donc $BD = DC = \frac{14}{2}$, ou $BD = DC = 7$.
   Puisque $\angle ADB = 90^\circ$, le triangle ADB est rectangle.
   D'après le théorème de Pythagore, $25^2 = AD^2 + 7^2$, ou $AD^2 = 25^2 - 7^2$, ou $AD^2 = 576$. Puisque $AD > 0$, alors $AD = \sqrt{576}$, ou $AD = 24$.

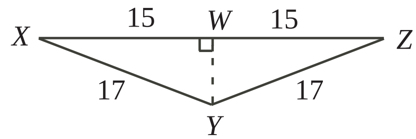
   (ii) L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \times BC \times AD$, ou $\frac{1}{2} \times 14 \times 24$, ou 168.

   (b) (i) D'après la description, le triangle ADB subit une rotation de centre D et de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre pour devenir le triangle PDQ.
   De même le triangle ADC subit une rotation de centre D et de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre pour devenir le triangle RDQ.
   Pendant ces rotations, les longueurs de côtés ne changent pas. Donc $PD = AD = 24$ et $RD = AD = 24$.
   Puisque P, D et R sont alignés, alors $PR = PD + RD$, d'où $PR = 24 + 24$, ou $PR = 48$.

   (ii) *Solution 1*
   Lorsqu'on fait subir au triangle ADC une rotation de 90° de centre D, le côté DC devient la hauteur DQ du triangle PQR.
   Donc $DQ = DC = 7$.
   L'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2} \times PR \times DQ$, ou $\frac{1}{2} \times 48 \times 7$, ou 168.

   Solution 2
   D'après la partie (a), l'aire du triangle ABC est égale à 168.
   Puisque la hauteur AD coupe la base en son milieu, alors les triangles ABD et ADC ont chacun une aire de 84.
   Pendant les rotations, les triangles ADB et ADC ne changent pas.
   Le triangle ABD devient le triangle PQD et le triangle ACD devient le triangle RQD.
   Les triangles PQD et RQD ont donc chacun une aire de 84.
   L'aire du triangle PQR est égale à la somme de l'aire de ces triangles. Elle est donc égale à 168.

(c) Puisque $XY = YZ$, le triangle XYZ est isocèle.
Au point Y, on trace la hauteur YW.
La hauteur YW coupe la base XZ en son milieu. Donc $XW = WZ = 15$.



Puisque $\angle YWX = 90°$, le triangle YWX est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, on a $17^2 = YW^2 + 15^2$, d'où $YW^2 = 64$. Puisque $YW > 0$, alors $YW = 8$.
On renverse le processus de la partie (b). On fait subir au triangle XWY une rotation de centre W et de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre et au triangle ZWY une rotation de centre W et de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On obtient un autre triangle de même aire.
Le nouveau triangle a deux côtés de longueur 17 (puisqu'ils sont formés des côtés XY et ZY) et un côté dont la longueur est le double de celle de YW (puisque la nouvelle base est formée de deux fois YW), soit 2×8, ou 16.

3. (a)

Nombre de deux chiffres	1^{re} étape	2^e étape	3^e étape
68	$6 \times 8 = 48$	$4 \times 8 = 32$	$3 \times 2 = 6$

En commençant par le nombre 68, il faut 3 étapes pour obtenir un nombre de un chiffre.

(b) Si on aboutit au nombre 8, le nombre précédent doit être formé de deux chiffres ayant un produit de 8. Les paires de facteurs possibles de 8 sont 1×8 et 2×4.
Les nombres possibles de deux chiffres ayant un produit de 8 sont donc 18, 81, 24 et 42.
On considère maintenant les paires de facteurs possibles de 18, 81, 24 et 42.
Les paires de facteurs possibles de 18 sont 1×18, 2×9 et 3×6.
Puisque les facteurs 1 et 18 ne peuvent pas former deux chiffres, les nombres possibles de deux chiffres ayant un produit de 18 sont 29, 92, 36 et 63.
Les paires de facteurs possibles de 81 sont 1×81, 3×27 et 9×9.
Le seul nombre possible de deux chiffres ayant un produit de 81 est 99.
Les paires de facteurs possibles de 24 sont 1×24, 2×12, 3×8 et 4×6.
Les nombres possibles de deux chiffres ayant un produit de 24 sont donc 38, 83, 46 et 64.
Les paires de facteurs possibles de 42 sont 1×42, 3×14 et 6×7.
Les nombres possibles de deux chiffres ayant un produit de 42 sont donc 67 et 76.
Le tableau suivant résume la situation.

Nombre de deux chiffres	1re étape	2e étape
29, 92, 36, 63	18	8
99	81	8
38, 83, 46, 64	24	8
67, 76	42	8

Donc, les nombres de deux chiffres qui aboutissent au nombre 8 après 2 étapes sont 29, 92, 36, 63, 99, 38, 83, 46, 64, 67 et 76.

(c) Si on aboutit au nombre 4, le nombre précédent doit être formé de deux chiffres ayant un produit de 4. Les paires de facteurs possibles de 4 sont 1×4 et 2×2.
Les nombres possibles de deux chiffres ayant un produit de 4 sont 14, 41 et 22.
On considère maintenant les paires de facteurs possibles de 14, 41 et 22.
Les paires de facteurs possibles de 14 sont 1×14 et 2×7.
Les nombres possibles de deux chiffres ayant un produit de 14 sont 27 et 72.
La seule paire de facteurs possibles de 41 est 1×41. Puisque les facteurs 41 et 1 ne peuvent pas former deux chiffres, il n'y a aucun nombre possible de deux chiffres ayant un produit de 41.
Les paires de facteurs possibles de 22 sont 1×22 et 2×11.
Il n'y a donc aucun nombre possible de deux chiffres ayant un produit de 22.
Le tableau suivant résume la situation. On le lit de droite à gauche, puisqu'on procède à rebours.

Nombre de deux chiffres	Étape précédente	Avant-dernière étape	Dernière étape
	27	14	4
	72	14	4
	aucun	41	4
	aucun	22	4

On continue à rebours en déterminant les nombres de deux chiffres ayant un produit de 27 ou de 72. Les résultats se trouvent dans le tableau suivant.

Nombre de deux chiffres	1re étape	2e étape	3e étape
39, 93	27	14	4
89, 98	72	14	4

Puisqu'il n'existe aucun nombre de deux chiffres dont le produit est égal à 39, 93, 89 ou 98, il est impossible de continuer à rebours. La liste est donc complète.
Donc, les nombres de deux chiffres qui aboutissent au nombre 4 sont 14, 41, 22, 27, 72, 39, 93, 89 et 98.

(d) On peut procéder à rebours de façon systématique à partir de chaque nombre de un chiffre, de 0 à 9.
On peut utiliser les résultats précédents qui donnent tous les nombres qui aboutissent à 4 ou qui aboutissent à 8 en 2 étapes.
Par exemple, dans la partie (b), il y a 11 nombres qui aboutissent à 8 après 2 étapes.
Trois de ces nombres nous permettent de continuer à rebours, soit 36, 63 et 64.
Or, le nombre 63 nous permet de reculer d'une étape seulement, soit avec 79 ou 97.
De même, le nombre 64 nous permet de reculer d'une seule étape, soit avec 88.
Le nombre 36 nous permet de reculer d'une étape en obtenant 49, 94 et 66. De plus, le nombre 49 nous permet de reculer d'une autre étape en obtenant 77. Donc, le nombre 77 nous permet d'aboutir à 8 en 4 étapes, comme le montre le tableau suivant.

Nombre de deux chiffres	1re étape	2e étape	3e étape	4e étape
77	$7 \times 7 = 49$	$4 \times 9 = 36$	$3 \times 6 = 18$	$1 \times 8 = 8$

On invite la lectrice ou le lecteur à démontrer que 77 est le seul nombre de deux chiffres qui aboutit à un nombre de un chiffre après 4 étapes.
Pourquoi n'y a-t-il aucun nombre de deux chiffres qui aboutit à un nombre de un chiffre après 5 étapes ?

4. (a) Au début de l'année, Ian a exactement 365 pièces de 2 $ dans son bocal, soit une somme de $365 \times 2\,\$$, ou 730 $.
Après 365 jours, il a dépensé $365 \times 1{,}72\,\$$, ou 627,80 $.
Il y aura donc $730\,\$ - 627{,}80\,\$$, ou 102,20 $ dans le bocal après 365 jours.

(b) Puisqu'il y a 365 pièces de 2 $ dans le bocal au départ, Ian peut toujours utiliser une de ces pièces au besoin, à condition de respecter les règles. Il paiera avec une pièce de 2 $ aussi longtemps qu'il n'aura pas accumulé au moins 1,72 $ en monnaie reçue.
Lorsque Ian paie avec une pièce de 2 $, il reçoit 0,28 $ en monnaie, c'est-à-dire 1 pièce de 25 ¢ et 3 pièces de 1 ¢, car le thé coûte 1,72 $.
Le 1^{er} jour, il paie avec une pièce de 2 $ et il reçoit 1 pièce de 25 ¢ et 3 pièces de 1 ¢.
Le 2^{e} jour, il paie avec une pièce de 2 $ et il reçoit 1 pièce de 25 ¢ et 3 pièces de 1 ¢.
Il en est de même jusqu'au 7^{e} jour, car même après 6 jours, Ian n'aura reçu en monnaie que $6 \times 0{,}28\,\$$, soit 1,68 $. Cette monnaie est formée de 6 pièces de 25 ¢ et de 18 pièces de 1 ¢. À la fin du 7^{e} jour, Ian aura donc reçu 7 pièces de 25 ¢ et 21 pièces de 1 ¢ en monnaie, soit une somme de 1,96 $.
On a donc démontré que le nombre maximal de pièces de 25 ¢ qu'il y aura dans le bocal à n'importe quel moment est au moins 7.
Or, à chaque fois qu'il y a 7 pièces de 25 ¢ dans le bocal, il y a au moins 1,75 $ en petites pièces dans le bocal. Le lendemain, Ian remettrait donc au plus 1,75 $ pour sa tasse de thé et recevrait au plus 3 pièces de 1 ¢ de monnaie. Le nombre de pièces de 25 ¢ dans le bocal n'augmenterait donc pas.
Donc, le nombre maximal de pièces de 25 $ qu'il peut y avoir dans le bocal à n'importe quel moment est 7.

(c) Dans la partie (b), on a vu que lorsque Ian paie avec une pièce de 2 $, il reçoit 1 pièce de 25 ¢ et 3 pièces de 1 ¢ en monnaie.
Puisque cette situation se présente assez souvent, on dira qu'il s'agit d'une *journée typique*.
Une journée typique se présente lorsqu'il y a moins de 1,72 $ en petite monnaie dans le bocal et que Ian doit donc présenter une pièce de 2 $ pour payer son thé.
Dans le tableau suivant, on présente le nombre de pièces de chaque sorte qu'il y a dans le bocal à la fin de la journée. Pour condenser, on a omis certaines journées typiques.
Or, on sait qu'à chaque journée typique, Ian paie en remettant une pièce de 2 $ et qu'il reçoit comme monnaie 1 pièce de 25 ¢ et 3 pièces de 1 ¢.

Pièce	Jour 7	Jour 8	Jour 14	Jour 15	Jour 21	Jour 22	Jour 28	Jour 29	Jour 35	Jour 36	Jour 42	Jour 43	Jour 49	Jour 50
2 $	358	358	352	352	346	346	340	340	334	334	328	328	322	322
25 ¢	7	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0
1 ¢	21	24	42	20	38	16	34	12	30	8	26	4	22	0

En guise d'explication, on voit que les jours 9 à 13, 16 à 20, et ainsi de suite sont des journées typiques.
À chacune de ces journées typiques, le nombre de pièces de 2 $ diminue de 1, le nombre de pièces de 25 ¢ augmente de 1 et le nombre de pièces de 1 ¢ augmente de 3.
On voit qu'à partir du jour 8, chaque 7^{e} jour n'est pas une journée typique. Donc, les jours 8, 15, 22, 29, 36, 43 et 49, il y a au moins 1,72 $ en petite monnaie qui peut être utilisée au lieu d'une pièce de 2 $ pour payer le thé.
Toutes les journées absentes du tableau sont des journées typiques.
Après 50 jours, Ian a utilisé 43 pièces de 2 $ ($365 - 322 = 43$) et il ne reste que des pièces de 2 $ dans le bocal. Il s'agit de la première journée, depuis le début, où le bocal ne contient que des pièces de 2 $.

Puisque le lendemain, jour 51, on recommence avec un bocal qui ne contient que des pièces de 2 \$, le même cycle de pièces remises et de pièces reçues se reproduira à tous les 50 jours.
Donc après 250 jours, Ian aura utilisé 215 pièces de 2 \$ ($5 \times 43 = 215$) et le bocal contiendra 150 pièces de 2 \$ ($365 - 215 = 150$) et aucune autre pièce.
Donc le 277^e^ jour, le bocal contiendra le même nombre de pièces de 25 ¢ et de 1 ¢ que le 27^e^ jour.
D'après le tableau ci-dessus, il y a 6 pièces de 25 ¢ et 34 pièces de 1 ¢ le 28^e^ jour.
Puisque le 28^e^ jour est une journée typique, il y avait donc 5 pièces de 25 ¢ et 31 pièces de 1 ¢ le 27^e^ jour.
De plus, il y a 341 pièces de 2 \$ dans le bocal le 27^e^ jour.
Donc Ian a utilisé 24 pièces de 2 \$ dans les 27 premières journées ($365 - 341 = 24$).
À cause de la régularité qui se répète à tous les 50 jours, 24 pièces de 2 \$ seront utilisées à partir de la 251^e^ journée jusqu'à la fin de la 277^e^ journée.
Puisqu'il y a 150 pièces de 2 \$ dans le bocal après 250 jours, il y a 126 pièces de 2 \$ dans le bocal après 277 jours ($150 - 24 = 126$).
Après 277 jours, il y a 126 pièces de 2 \$, 5 pièces de 25 ¢ et 31 pièces de 1¢ dans le bocal.

On peut vérifier si cette réponse est raisonnable.
Après 277 jours, Ian a dépensé 476,44 \$ ($277 \times 1{,}72 = 476{,}44$).
Il doit donc rester 253,56 \$ dans le bocal ($730 - 476{,}44 = 253{,}56$).
D'après la réponse, la quantié d'argent dans le bocal est égale à $126 \times 2{,}00\,\$ + 5 \times 0{,}25\,\$ + 31 \times 0{,}01\,\$$, ou 253,56 \$.
Cela nous confirme que notre réponse est probablement correcte.

Il est sage de constater qu'au départ, Ian a des pièces de 2 \$ (ou de 200 ¢) et que le prix du thé est de 172 ¢.
On peut vérifier que le plus petit commun multiple de 200 et de 172 est 8600.
Comment peut-on utiliser ce plus petit commun multiple pour déterminer le nombre de jours qu'il faut pour que le bocal retourne à sa condition initiale où il ne contient que des pièces de 2 \$?

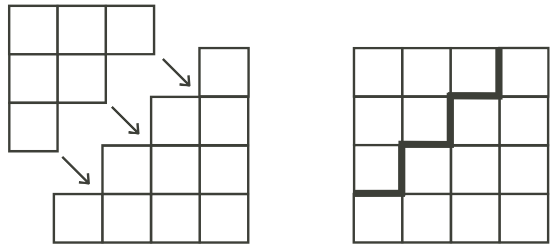
Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fryer 2010

le vendredi 9 avril 2010

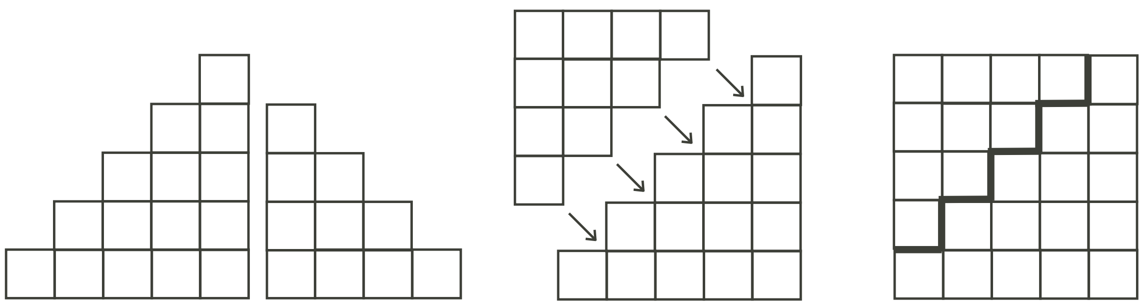
Solutions

1. (a) On peut placer le morceau de droite à la gauche de l'autre morceau, comme il est indiqué ci-dessous. On obtient ainsi 4 rangées de 4 carreaux, soit un carré contenant 16 carreaux.



(b) *Solution 1*
Les 4 rangées supérieures de la figure 5 sont identiques aux rangées de la figure 4. La rangée du bas de la figure 5 contient deux carreaux de plus que la rangée du bas de la figure 4, soit $7 + 2$ carreaux, ou 9 carreaux.
En tout, la figure 5 contient $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ carreaux, ou 25 carreaux.

Solution 2
La rangée du bas de la figure 5 contient deux carreaux de plus que la rangée du bas de la figure 4, soit $7 + 2$ carreaux, ou 9 carreaux. On utilise la méthode de la partie (a) pour couper la figure 5 en deux morceaux qu'on peut placer comme dans les figures suivantes. On obtient un carré 5 sur 5 qui contient 25 carreaux.



(c) On compte le nombre de carreaux qui forment la rangée du bas des 5 premières figures et on inscrit les résultats dans le tableau suivant :

Numéro de la figure	Nombre de carreaux dans la rangée du bas
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9

Puisque le nombre de carreaux dans la rangée du bas d'une figure est toujours 2 de plus que le nombre de carreaux dans la rangée du bas de la figure précédente, on peut prolonger le tableau.

Numéro de la figure	Nombre de carreaux dans la rangée du bas
6	11
7	13
8	15
9	17
10	19

Donc, la rangée du bas de la figure 10 compte 19 carreaux.

(d) *Solution 1*
Les 9 rangées supérieures de la figure 11 sont indentiques aux rangées de la figure 9.
Puisque la figure 11 compte 11 rangées, la différence entre le nombre total de carreaux qui forment la figure 11 et le nombre total de carreaux qui forment la figure 9 est égale au nombre total de carreaux dans les rangées 10 et 11 de la figure 11.
Dans la rangée 10 de la figure 11, il y a le même nombre de carreaux que dans la rangée du bas de la figure 10, soit 19.
D'après la partie (c), on sait que dans la rangée du bas de la figure 11, il y a 2 carreaux de plus que dans la rangée du bas de la figure 10, soit $19 + 2$ carreaux, ou 21 carreaux.
Donc, la différence entre le nombre total de carreaux qui forment la figure 11 et le nombre total de carreaux qui forment la figure 9 est égal à $19 + 21$, ou 40.

Solution 2
On utilise la méthode de la partie (a) pour montrer que la figure 11 peut être découpée de manière à former un carré 11 sur 11 qui contient 121 carreaux.
De même, la figure 9 peut être découpée de manière à former un carré 9 sur 9 qui contient 81 carreaux.
Donc, la différence entre le nombre total de carreaux qui forment la figure 11 et le nombre total de carreaux qui forment la figure 9 est égal à $121 - 81$, ou 40.

2. (a) La moyenne d'un ensemble de nombres est égale à la somme de ces nombres divisée par le nombre de nombres dans l'ensemble.
Donc, la moyenne des entiers donnés est égale à $\frac{71+72+73+74+75}{5}$, ou $\frac{365}{5}$, ou 73.

(b) (i) On additionne : $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10$

(ii) Puisque la somme des cinq entiers consécutifs est égale à $5n + 10$, la moyenne de ces entiers est égale à $\dfrac{5n + 10}{5}$, ou $n + 2$.
Si n est un entier pair, alors $n + 2$ est un entier pair, puisqu'il est 2 de plus que n.
De même, si n est un entier impair, alors $n + 2$ est un entier impair.
Donc, si la moyenne des entiers, soit $n + 2$, est impaire, n doit être impair.

(c) *Solution 1*
On additionne : $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) = 6n + 15$
Puisque la somme des 6 entiers consécutifs est égale à $6n + 15$, la moyenne de ces entiers est égale à $\dfrac{6n + 15}{6}$, soit $n + \frac{15}{6}$, ou $n + \frac{5}{2}$.
Or, quel que soit l'entier n, $n + \frac{5}{2}$ n'est jamais un entier.
Donc, la moyenne de six entiers consécutifs n'est jamais un entier.

Solution 2
Étant donné six entiers consécutifs, trois des entiers doivent être pairs et les trois autres doivent être impairs. Donc, leur somme est nécessairement impaire.
Or, le quotient d'un nombre impair divisé par un nombre pair, soit 6, ne peut pas être un entier. Donc, la moyenne de six entiers consécutifs n'est jamais un entier.

3. (a) Lorsque le train 1 roule à une vitesse de 60 km/h pendant 9 heures, il franchit une distance de 9×60 km, ou 540 km. Soit d km la distance entre Amville et Batton. On a donc $\frac{2}{3}d = 540$, d'où $d = \frac{540(3)}{2}$, ou $d = 810$.
La distance entre Amville et Batton est donc de 810 km.

(b) La distance entre Amville et Batton est de 810 km.
Deux tiers de cette distance est égale à $\frac{2}{3} \times 810$ km, ou 540 km.
Le train 2 a mis 6 heures pour parcourir 540 km.
Puisque $\frac{540}{6} = 90$, le train 2 voyage à une vitesse constante de 90 km/h.

(c) Soit t le nombre d'heures que le train 1 met pour se rendre d'Amville à Cuford. Puisque ce train voyage à une vitesse de 60 km/h, la distance d'Amville à Cuford est de $60t$ km.
Le train 2 quitte Batton $3\frac{1}{2}$ heures après de départ du train 1 d'Amville.
Puisque les deux trains arrivent à Cuford en même temps, le train 2 met $\left(t - 3\frac{1}{2}\right)$ heures pour aller de Batton à Cuford. Or, le train 2 voyage à une vitesse de 90 km/h. Donc, la distance de Batton à Cuford est de $90(t - 3\frac{1}{2})$ km.
La distance d'Amville à Cuford plus la distance de Cuford à Batton est égale à la distance d'Amville à Batton, soit 810 km.
Donc $60t + 90(t - 3\frac{1}{2}) = 810$, ou $60t + 90t - 315 = 810$, d'où $150t = 1125$, ou $t = 7\frac{1}{2}$.
Donc, le train 1 a mis $7\frac{1}{2}$ heures pour se rendre d'Amville à Cuford.
Puisque le train 1 est arrivé à Cuford à 21 h 00, il est parti d'Amville à 13 h 30.

4. (a) Un palindrome inférieur à 1000 doit être composé de 1, 2 ou 3 chiffres.
On considère donc 3 cas.

1er cas : Les palindromes de 1 chiffre

Tous les entiers de 1 à 9 sont des palindromes, puisqu'on peut les lire de gauche à droite ou de droite à gauche. Il y a donc 9 palindromes de 1 chiffre.

2e cas : Les palindromes de 2 chiffres

On cherche le nombre de palindromes parmi les entiers de 10 à 99.
Or, un palindrome de 2 chiffres doit avoir deux chiffres identiques.
Il y a donc 9 palindromes de 2 chiffres, soit 11,22,33,44,55,66,77,88 et 99.

3e cas : Les palindromes de 3 chiffres

Les palindromes de 3 chiffres sont de la forme aba, a étant un chiffre de 1 à 9 et b étant un chiffre de 0 à 9. En effet, dans un palindrome de 3 chiffres, le premier chiffre ne peut être nul et il doit être égal au troisième chiffre, tandis que le deuxième chiffre peut être égal à n'importe quel entier de 0 à 9.
Puisque le chiffre des centaines a peut être égal à n'importe quel entier de 1 à 9, il y a 9 choix possibles pour a. Le chiffre des unités est par le fait même choisi en même temps que le chiffre des centaines.
Pour chacun de ces 9 choix, il y a 10 choix pour le chiffre des dizaines b, soit n'importe quel entier de 0 à 9.
En tout, il y a 9×10 façons de choisir a et b. Il y existe donc 90 palindromes de 3 chiffres.

Il y a donc 9 palindromes de 1 chiffre, 9 palindromes de 2 chiffres et 90 palindromes de 3 chiffres. Il y a donc 108 (soit $9 + 9 + 90$) palindromes inférieurs à 1000.

(b) Les palindromes de 7 chiffres sont de la forme $abcdcba$, a,b,c et d étant des entiers ($1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b,c,d \leq 9$).
Puisque les trois derniers chiffres cba sont déterminés par le choix des trois premiers chiffres abc, le nombre de palindromes de 7 chiffres dépend du nombre de choix des quatre premiers chiffres $abcd$. Il y a 9 choix pour le 1er chiffre a ; pour chacun de ces choix, il y a 10 choix pour le 2e chiffre b ; pour chacun de ces choix, il y a 10 choix pour le 3e chiffre c ; pour chacun de ces choix, il y a 10 choix pour le 4e chiffre d.

En tout, il y a $9 \times 10 \times 10 \times 10$ choix pour les chiffres $abcd$ et il y a donc 9000 palindromes de 7 chiffres.

(c) Les palindromes 7 chiffres entre 1 000 000 et 2 000 000 commencent par un 1 et sont donc de la forme $1bcdcb1$.
Comme dans la partie (b), il y a 10 choix pour chacun des chiffres b, c et d. Le nombre de palindromes entre 1 000 000 et 2 000 000 est donc égal à $10 \times 10 \times 10$, ou 1000.
Si les palindromes de la partie (a) sont écrits en ordre croissant, les 1000 palindromes entre 1 000 000 et 2 000 000 sont les 1000 premiers.
De même, viennent ensuite les 1000 palindromes entre 2 000000 et 3 000 000, puis les 1000 palindromes entre 3 000 000 et 4 000 000.
Le 2125$^{\text{e}}$ est situé entre 3 000 000 et 4 000 000 et il doit donc être de la forme $3bcdcb3$.
Parmi les palindromes de la forme $3bcdcb3$, les plus petits sont de la forme $30cdc03$.
Puisqu'il y a 10 choix pour chacun des chiffres c et d, le nombre de tels palindromes est égal à 10×10, ou 100.
Le plus grand de ces 100 palindromes, soit 3099903, est le 2100$^{\text{e}}$ palindrome de la liste.
De même, il y a 100 palindromes de la forme $31cdc13$.
Le 2125$^{\text{e}}$ palindrome sera donc de cette forme.
Parmi les palindromes de la forme $31cdc13$, les plus petits sont de la forme $310d013$.
Puisqu'il y a 10 choix pour d, il y a 10 tels palindromes.
De même, viennent ensuite 10 palindromes de la forme $311d113$.
Le plus grand de ces 10 palindromes, soit 3119113, est le 2120$^{\text{e}}$ palindrome de la liste.
De même, viennent ensuite 10 palindromes de la forme $312d213$.
Le 2125$^{\text{e}}$ palindrome de la liste complète est le 5$^{\text{e}}$ de ces 10 palindromes, soit 3124213.

(d) Les palindromes de 6 chiffres sont de la forme $abccba$, a,b et c étant des entiers ($1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b,c \leq 9$).
Soit l'entier N formé de ces chiffres $abccba$.
On a donc $N = 100000a + 10000b + 1000c + 100c + 10b + a = 100001a + 10010b + 1100c$.
Or, les entiers $100001, 10010$ et 1100 sont divisibles par 11.
Donc $N = 11(9091a + 910b + 100c)$, ou $N = 11k$ ($k = 9091a + 910b + 100c$).
Pour que N soit divisible par 91, il faut que $11k$ soit divisible par 91.
Puisque 11 est un nombre premier et qu'il n'est pas un diviseur de 91, alors N est divisible par 91 si $k = 9091a + 910b + 100c$ est divisible par 91. On récrit k sous la forme :

$$\begin{aligned} k &= 9091a + 910b + 100c \\ &= (9100a - 9a) + 910b + (91c + 9c) \\ &= (9100a + 910b + 91c) + (9c - 9a) \\ &= 91(100a + 10b + c) + 9(c - a) \end{aligned}$$

Puisque $91(100a + 10b + c)$ est divisible par 91, alors quelles que soient les valeurs de a, de b et de c, k est divisible par 91 seulement si $9(c - a)$ est divisible par 91.
Puisque 9 et 91 n'ont aucun diviseur commun, $9(c - a)$ est seulement divisible par 91 si $(c - a)$ est divisible par 91.
Or $1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq c \leq 9$. Donc 91 est un diviseur de $(c - a)$ seulement si $c - a = 0$, ou $c = a$.
Donc, les palindromes de 6 chiffres qui sont divisibles par 91 sont de la forme $abaaba$ ($1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$).
Puisqu'il y a 9 choix pour a et 10 choix pour b, le nombre de palindromes de 6 chiffres qui sont divisible par 91 est égal à 9×10, ou 90.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fryer 2009

le mercredi 8 avril 2009

Solutions

1. (a) Le coût total, en dollars, pour faire 100 verres de limonade est égal à $12,00 + 100 \times 0,15$, c'est-à-dire $12,00 + 15,00$, ou 27,00.

   (b) Si elle vend 100 verres de limonade, la somme qu'elle reçoit, en dollars, est égale à $100 \times 0,75$, ou 75,00. Son profit, en dollars, est égal à l'argent reçu moins le coût total, c'est-à-dire $75,00 - 27,00$, ou 48,00.

   (c) Soit v le nombre de verres de limonade qu'Émilie doit ventre pour un profit de 0 $.
   Le coût total, en dollars, pour faire v verres de limonade est égal à $12,00 + v \times 0,15$, ou $12 + 0,15v$.
   Si elle vend v verres de limonade, elle reçoit $v \times 0,75$ dollars, ou $0,75v$ dollars.
   Pour un profit de 0 $, il faut que l'argent reçu soit égal au coût.
   On a donc $12 + 0,15v = 0,75v$, d'où $12 = 0,60v$, ou $v = 20$.
   Émilie doit vendre 20 verres de limonade pour obtenir un profit de 0 $.

   (d) Soit n le nombre de verres de limonade qu'Émilie doit vendre pour un profit d'exactement 17,00 $. Comme dans la partie (c) le coût total, en dollars, pour faire n verres de limonade est égal à $12 + 0,15n$.
   Comme dans la partie (c), si elle vend n verres de limonade, elle reçoit $0,75n$ dollars.
   Pour un profit de 17,00 $, il faut que l'argent reçu moins la somme dépensée soit égal à 17,00 $. On a donc $0,75n - (12,00 + 0,15n) = 17,00$, d'où $0,60n - 12,00 = 17,00$, ou $0,60n = 29,00$. Donc $n = \dfrac{29}{0,6} = \dfrac{290}{6} = 48\frac{1}{3}$.
   Puisque n représente le nombre de verres vendus, n doit être un entier non négatif et ne peut donc pas égaler $48\frac{1}{3}$.
   Donc, il est impossible pour Émilie d'obtenir un profit d'exactement 17,00 $.

2. (a) On a : $2\nabla 5 = \dfrac{2+5}{1+2\times 5} = \dfrac{7}{11}$.

   (b) On évalue d'abord l'expression entre parenthèses : $(1\nabla 2) = \dfrac{1+2}{1+1\times 2} = \dfrac{3}{3} = 1$
   Donc $(1\nabla 2)\nabla 3 = 1\nabla 3 = \dfrac{1+3}{1+1\times 3} = 1$.
   (Pour n'importe quelle valeur de b ($b > 0$), on a $1\nabla b = \dfrac{1+b}{1+1\times b} = \dfrac{1+b}{1+b} = 1$.)

   (c) Par définition, $2\nabla x = \dfrac{2+x}{1+2x}$. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{2+x}{1+2x} &= \frac{5}{7} \\ 7(2+x) &= 5(1+2x) \\ 14+7x &= 5+10x \\ 9 &= 3x \end{aligned}$$

   Donc $x = 3$.

   (d) Par définition, $x\nabla y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.
   On cherche donc les valeurs de x et de y pour lesquelles $\dfrac{x+y}{1+xy} = \dfrac{x+y}{17}$.
   Le numérateur de chaque fraction, soit $x+y$, n'est pas égal à 0, car $x > 0$ et $y > 0$.

Puisque les fractions sont égales et que les numérateurs sont égaux et non nuls, les dénominateurs doivent être égaux.
Donc $1 + xy = 17$, ou $xy = 16$. Les couples d'entiers positifs (x, y), pour lesquels $xy = 16$ sont $(1, 16)$, $(16, 1)$, $(2, 8)$, $(8, 2)$ et $(4, 4)$.

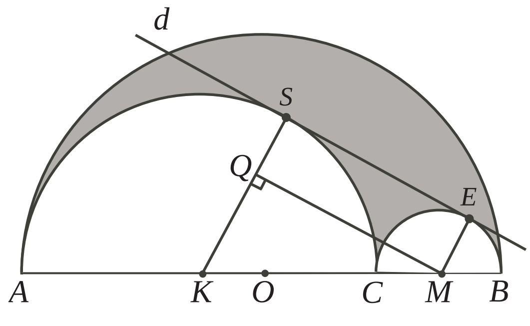
3. (a) On sait que OA et OB sont des rayons du demi-cercle de centre O.
Donc $OA = OB = OC + CB$, d'où $OA = OB = 32 + 36$, ou $OA = OB = 68$.
Donc $AC = AO + OC$, d'où $AC = 68 + 32$, ou $AC = 100$.

(b) Le demi-cercle de centre K a pour rayon AK et $AK = \frac{1}{2}(AC)$, d'où $AK = \frac{1}{2}(100)$, ou $AK = 50$.
L'aire de ce demi-cercle est donc égale à $\frac{1}{2}\pi(AK)^2$, ou $\frac{1}{2}\pi(50)^2$, ou 1250π.

(c) L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du demi-cercle de centre O moins l'aire des demi-cercles de centres K et M.
Le rayon MB du petit demi-cercle est égal à $\frac{1}{2}(CB)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(36)$, ou 18.
Donc, l'aire de la région ombrée est égale à :

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}\pi(OB)^2 - \tfrac{1}{2}\pi(AK)^2 - \tfrac{1}{2}\pi(MB)^2 \\ = \ & \tfrac{1}{2}\pi(68)^2 - \tfrac{1}{2}\pi(50)^2 - \tfrac{1}{2}\pi(18)^2 \\ = \ & \tfrac{1}{2}\pi(68^2 - 50^2 - 18^2) \\ = \ & \tfrac{1}{2}\pi(4624 - 2500 - 324) \\ = \ & \tfrac{1}{2}\pi(1800) \\ = \ & 900\pi \end{aligned}$$

(d) On construit les segments de droites KS et ME, perpendiculaires à la droite d.
Au point M, on abaisse une perpendiculaire MQ au segment KS.
Dans le quadrilatère $MQSE$, $\angle MQS = \angle QSE = \angle SEM = 90°$.
Donc, le quadrilatère $MQSE$ est un rectangle.



Le demi-cercle de centre K a un rayon AK de longueur 50. Donc $KC = KS = 50$.
Le petit demi-cercle de centre M a un rayon MB de longueur 18. Donc $ME = MC = 18$.
Donc $MK = MC + KC$, d'où $MK = 18 + 50$, ou $MK = 68$.
Le quadrilatère $KSEM$ est composé du rectangle $MQSE$ et du triangle MKQ (il est aussi un trapèze). Puisque $QS = ME = 18$, alors $KQ = KS - QS$, d'où $KQ = 50 - 18$, ou $KQ = 32$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle MKQ, $MK^2 = KQ^2 + QM^2$, d'où $68^2 = 32^2 + QM^2$. Donc $QM = \sqrt{68^2 - 32^2}$, ou $QM = 60$ (puisque $QM > 0$).
L'aire du triangle MKQ est égale à $\frac{1}{2}(KQ)(QM)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(32)(60)$, ou 960.
L'aire du rectangle $MQSE$ est égale à $(QM)(QS)$, c'est-à-dire à $(60)(18)$, ou 1080.
L'aire du quadrilatère $KSEM$ est donc égale à $960 + 1080$, ou 2040.

4. Lorsqu'on calcule une telle somme sans calculatrice, on commence par additionner les chiffres des unités, ce qui nous donne une somme pour cette colonne. On écrit le chiffre des unités de cette somme et les autres chiffres sont utilisés comme retenue dans la colonne des dizaines. Puis, on recommence avec la colonne des dizaines et ainsi de suite.
Par exemple, si la somme des chiffres d'une colonne et de la retenue est égale à 124, on écrit le chiffre 4 au-dessous de la colonne et on place une retenue de 12 dans la colonne suivante à gauche.

(a) La somme des chiffres de la colonne des unités est égale à 101×2, ou 202. Le chiffre des unités A est donc égal à 2 et le 20 est utilisé comme retenue dans la colonne des dizaines, car il y a 20 dizaines dans le nombre 202. Donc $A = 2$.

(b) La colonne des dizaines contient 100 fois le chiffre 2 et la somme de ces chiffres est égale à 100×2, ou 200. Puisqu'il y a une retenue de 20, le total pour la colonne des dizaines est égal à $200 + 20$, ou 220.
Donc, le chiffre B est égal à 0 et une retenue de 22 est ajoutée à la colonne des centaines.
La colonne des centaines contient 99 fois le chiffre 2 et la somme de ces chiffres est égale à 99×2, ou 198. Puisqu'il y a une retenue de 22, le total pour la colonne des centaines est égal à $198 + 22$, ou 220.
Donc, le chiffre C est égal à 0.

(c) On démontre que le chiffre du milieu de la somme est 3 en suivant les étapes suivantes :
– Étape 1 : La somme est composée de 101 chiffres.
– Étape 2 : Le total, dans la colonne du milieu, est supérieur ou égal à 113.
– Étape 3 : Le total, dans la colonne du milieu, ne peut étre supérieur ou égal à 114.
Les étapes 2 et 3 nous disent que le total, dans la colonne du milieu, est égal à 113 et que le chiffre du milieu de la somme est 3. Dans l'argumentation, on utilisera deux fois la propriété suivante qui sera démontrée à la fin :

Propriété : La retenue, d'une colonne à l'autre, ne peut dépasser 22.

Les colonnes sont numérotées de gauche à droite.

Étape 1 : La somme est composée de 101 chiffres.
Le total de la colonne 1 est égal à 2 plus la retenue de la colonne 2. Il est composé d'un seul chiffre, à moins que la retenue provenant de la colonne 2 soit de 8 ou plus.
Or, cette retenue est égale à 8 ou plus si le total de la colonne 2 est égal à 80 ou plus. Puisque la somme des chiffres de la colonne 2 est égale à 4, il faudrait que la retenue provenant de la colonne 3 soit égale à 76 ou plus.
Or, d'après la propriété mentionnée ci-haut, la retenue de peut dépasser 22.
Donc, le total de la colonne 1 est composé d'un seul chiffre.
La somme a donc le même nombre de chiffres que le nombre de la 101^{e} rangée, soit 101 chiffres.

Étape 2 : Le total, dans la colonne du milieu, est supérieur ou égal à 113.
Puisque la somme est composée de 101 chiffres, le chiffre du milieu est celui sous la colonne 51. (Il y a 50 chiffres avant cette colonne et 50 chiffres après cette colonne, pour un total de 101 chiffres en tout.)
La somme des chiffres de la colonne 51 est égale à 51×2, ou 102.
La somme des chiffres de la colonne 52 est égale à 52×2, ou 104.
La somme des chiffres de la colonne 53 est égale à 53×2, ou 106.
Ainsi, la retenue provenant de la colonne 53 et ajoutée à la colonne 52 est égale à 10 ou

plus. Donc, le total de la colonne 52 est égal à $104 + 10$ ou plus, c'est-à-dire à 114 ou plus. Ainsi, la retenue provenant de la colonne 52 et ajoutée à la colonne 51 est égale à 11 ou plus. Donc, le total de la colonne 51 est égal à $102 + 11$ ou plus, c'est-à-dire à 113 ou plus.

<u>Étape 3 : Le total, dans la colonne du milieu, ne peut étre supérieur ou égal à 114.</u>
Si le total de la colonne 51 était supérieur ou égal à 114, alors la retenue provenant de la colonne 51 serait supérieure ou égale à $114 - 102$, c'est-à-dire supérieure ou égale à 12.
Pour que la retenue de la colonne 52 soit supérieure ou égale à 12, le total de la colonne 52 doit être supérieur ou égal à 120. Il faut alors que la retenue de la colonne 53 soit supérieure ou égale à $120 - 104$, c'est-à-dire supérieure ou égale à 16.
Pour que la retenue provenant de la colonne 53 soit supérieure ou égale à 16, le total de cette colonne doit être supérieur ou égal à 160. Pour que ce total soit supérieur ou égal à 160, il faut que la retenue provenant de la colonne 54 soit supérieure ou égale à $160 - 106$, c'est-à-dire supérieure ou égale à 54.
Or, d'après la propriété mentionnée ci-haut, la retenue de peut dépasser 22.
Donc, le total de la colonne 51 ne peut être supérieur ou égal à 114.

Le total de la colonne 51 doit donc être égal à 113.
Il reste à démontrer que la propriété est vraie.

<u>Propriété : La retenue, d'une colonne à l'autre, ne peut dépasser 22.</u>
On commence par la colonne des unités.
La somme des chiffres de la colonne 101 est égale à 101×2, ou 202. Cela produit une retenue de 20 qui est ajoutée à la colonne 100.
Le total de la colonne 100 est donc égal à $100 \times 2 + 20$, ou 220. Cela produit une retenue de 22 qui est ajoutée à la colonne 99.
Le total de la colonne 99 est donc égal à $99 \times 2 + 22$, ou 220.
Jusqu'à ce point, aucune retenue ne dépasse 22.
Supposons qu'il y a une colonne n dans laquelle la retenue dépasse 22 pour la première fois lorsqu'on continue à additionner colonne par colonne de droite à gauche.
On sait que $n \leq 98$, puisque les retenues des trois colonnes de droite ne dépassent pas 22.
On sait aussi que la retenue ajoutée à la colonne n ne dépasse pas 22, puisque la retenue qui provient de la colonne n est la première qui dépasse 22.
Examinons la colonne n.
La colonne n comprend n chiffres 2. Donc, la somme de ces chiffres est égale à $2n$.
Puisque $n \leq 98$, la somme de ces chiffres ne peut dépasser 98×2, ou 196.
Pour que la retenue de la colonne n dépasse 22, il faut que le total de cette colonne soit au moins égale à 230. Donc, la retenue qui a été ajoutée à cette colonne doit être au moins égale à $230 - 196$, ou 34.
Or, on sait que cette retenue ne peut dépasser 22, car la retenue qui provient de la colonne n est la première qui dépasse 22 .
On a donc une contradiction, car la retenue qui est ajoutée à la colonne n ne peut être à la fois inférieure ou égale à 22 et supérieure ou égale à 34.
On doit donc rejeter notre supposition qu'il y a une colonne n dans laquelle la retenue dépasse 22 pour la première fois.
Donc, aucune retenue ne peut dépasser 22.
Ceci complète l'argument.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fryer 2008

le mercredi 16 avril 2008

Solutions

1. (a) (i) La somme des neuf entiers est égale à :

$$11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 135$$

(ii) Les neuf nombres du carré magique ont une somme de 135.
Puisque la somme des nombres de chaque rangée est la même, elle est égale à $\frac{1}{3}$ de la somme des neuf nombres, soit $\frac{1}{3}(135)$, ou 45.
Donc, la constante magique est égale à 45.

(iii) La somme des nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale principale est égale à 45.
Puisqu'on connaît déjà deux nombres de la 1re rangée et deux nombres d'une diagonale, on peut compléter cette rangée et cette diagonale pour obtenir

18	11	16
	15	
		12

, puisque $45 - 18 - 11 = 16$ et $45 - 18 - 12 = 15$.

On peut maintenant compléter les 2e et 3e colonnes pour obtenir

18	11	16
	15	17
	19	12

.

On peut maintenant compléter les 2e et 3e rangées pour obtenir

18	11	16
13	15	17
14	19	12

.

(b) (i) La somme des seize entiers est égale à :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 13 + 14 + 15 + 16 = 136$$

(On peut apparier 1 avec 16, 2 avec 15, ainsi de suite, pour obtenir 8 paires de nombres qui ont chacune une somme de 17.)

(ii) Les seize nombres du carré magique ont une somme de 136.
Puisque la somme des nombres de chaque rangée est la même, elle est égale à $\frac{1}{4}$ de la somme des seize nombres, soit $\frac{1}{4}(136)$, ou 34.
Donc, la constante magique est égale à 34.

(iii) La somme des nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale principale est égale à 45.
Puisqu'on connaît trois nombres des 1re et 4e rangées, des 1re, 3e et 4e colonnes et de chaque diagonale, on peut compléter ces rangées, ces colonnes et ces diagonales pour obtenir

16	3	2	13
5	10	11	8
9		7	12
4	15	14	1

, puisque $34 - 16 - 3 - 13 = 2$ et ainsi de suite.

On peut compléter le carré magique pour obtenir

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

.

2. (a) Après avoir joué 5 matchs de plus, le nombre de matchs joués est égal à $10 + 5$, ou 15, et le nombre de victoires est égal à $8 + 1$, ou 9.

   Le pourcentage de victoires final des Requins est égal $\dfrac{9}{15} \times 100\,\%$, ou $60\,\%$.

   (b) En tout, les Émeus ont joué $10 + x$ matchs et en ont gagné $4 + x$.

   Puisque leur pourcentage de victoires final est égal à $70\,\%$, alors $\dfrac{4+x}{10+x} \times 100\,\% = 70\,\%$, ou $\dfrac{4+x}{10+x} = \dfrac{7}{10}$.

   Donc $10(4 + x) = 7(10 + x)$, d'où $40 + 10x = 70 + 7x$, ou $3x = 30$, ou $x = 10$.

   Donc, le nombre total de matchs qu'ils ont joués est égal à $10 + x$, soit $10 + 10$, ou 20.

   (c) Supposons qu'à un moment, les Diables ont joué y matchs de plus que les 10 matchs initiaux, qu'ils les ont tous perdus et qu'à ce moment, ils ont gagné exactement $\frac{2}{7}$ des matchs joués. À ce moment, ils ont joué $10 + y$ matchs et en ont gagné 7.

   Donc $\dfrac{7}{10+y} = \dfrac{2}{7}$, d'où $7(7) = 2(10 + y)$, ou $2y + 20 = 49$, ou $2y = 29$.

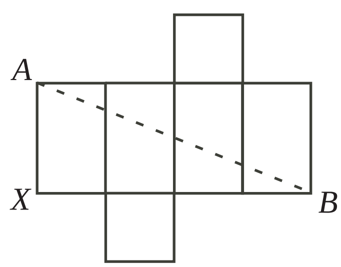
   Puisque y n'est pas un entier, il n'y a pas eu un moment où les Diables ont gagné exactement $\frac{2}{7}$ des matchs joués.

3. (a) La boîte que l'on peut former à partir du développement de la figure 1 a des dimensions de 4 sur 4 sur 7. Elle a donc un volume de $4 \times 4 \times 7$, ou 112.

   On peut obtenir l'aire totale de la boîte à partir du développement. D'après le développement, la boîte aura deux faces de dimensions 4 sur 4 et quatre faces de dimensions 4 sur 7.

   L'aire totale est donc égale à $2(4 \times 4) + 4(4 \times 7)$, soit $32 + 112$, ou 144.

   (b) Soit le point X indiqué dans la figure suivante.



   Puisque AX correspond à la hauteur de la boîte, on a $AX = 6$.

   On sait que $\angle AXB = 90°$, puisque la boîte est de forme rectangulaire.

   On voit aussi que $XB = 2 + 2 + 2 + 2$, ou $XB = 8$, puisque XB est formé des quatre arêtes qui entourent la face inférieure de la boîte.

   D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AX^2 + XB^2$, d'où $AB^2 = 6^2 + 8^2$, ou $AB^2 = 100$. Donc $AB = 10$, puisque $AB > 0$.

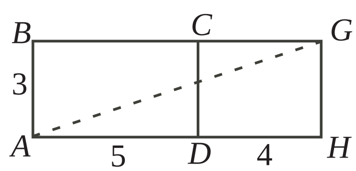
   (c) On cherche la distance la plus courte du point A au point G le long de la surface du bloc. Quelques remarques s'imposent :

   – On peut tracer n'importe quel trajet de A à G sur un développement du bloc, comme dans les parties (a) ou (b).
   – Étant donné un développement particulier du bloc, le trajet le plus court de A à G sera un segment de droite. La longueur de ce segment peut être obtenue à partir du théorème de Pythagore, en utilisant les déplacements horizontal et vertical de A à G.

– Aucune face du bloc ne contient les deux points A et G. Il est donc impossible pour la chenille de se rendre de A à G en se promenant sur une face seulement. Elle doit emprunter au moins deux faces.
– N'importe quel segment AG qui emprunte plus de 2 faces sera plus long que les segments possibles AG qui empruntent exactement 2 faces. En effet, le déplacement horizontal et le déplacement vertical seront chacun au moins aussi long que si le segment emprunte 2 faces.
– Il n'est pas nécessaire de considérer les chemins qui empruntent des arêtes du bloc, puisqu'un tel chemin ne formerait pas un segment de droite sur le développement.

Il suffit donc de considérer tous les chemins possibles de A à G, en ligne droite, qui empruntent exactement deux faces. Voici les combinaisons possibles de 2 faces adjacentes :
– $ABCD$ suivie de $DCGH$
– $ABCD$ suivie de $BCGF$
– $ADHE$ suivie de $DCGH$
– $ADHE$ suivie de $EHGF$
– $ABFE$ suivie de $BCGF$
– $ABFE$ suivie de $EHGF$

On considère le segment AG qui emprunte les faces $ABCD$ et $DCGH$.



Ce segment est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant des cathètes de longueurs 3 et 9. Il a donc pour longueur $\sqrt{3^2 + 9^2}$, ou $\sqrt{90}$.
De la même manière, on obtient les longueurs de AG qui empruntent chacune des autres combinaisons possibles :
– $ABCD$ suivie de $DCGH$: $\sqrt{90}$
– $ABCD$ suivie de $BCGF$: $\sqrt{74}$
– $ADHE$ suivie de $DCGH$: $\sqrt{80}$
– $ADHE$ suivie de $EHGF$: $\sqrt{74}$
– $ABFE$ suivie de $BCGF$: $\sqrt{80}$
– $ABFE$ suivie de $EHGF$: $\sqrt{90}$

(On remarque que ces longueurs surviennent en trois paires de longueurs égales. On aurait donc pu déterminer trois longueurs et faire appel à la symétrie pour les trois autres.)
Le plus court segment AG a donc une longueur de $\sqrt{74}$. La distance la plus courte du point A au point G le long de la surface du bloc est donc égale à $\sqrt{74}$.

4. (a) On considère d'abord les chiffres d'un palindrome quelconque.
Si un palindrome P est formé d'un nombre pair de chiffres (p. ex., 1221), alors chacun des chiffres qui paraissent dans P paraît un nombre pair de fois, car chaque chiffre qui paraît dans la première moitié du nombre est apparié au même chiffre dans la deuxième moitié.
Si un palindrome P est formé d'un nombre impair de chiffres (p. ex., 12321), alors un des chiffres qui paraissent dans P paraît un nombre impair de fois et chacun des autres chiffres qui paraîssent dans P paraît un nombre pair de fois. En effet, P admet alors un chiffre du milieu. Si on enlevait ce chiffre du milieu, P serait alors formé d'un nombre pair de chiffres et chacun des chiffres qui paraissent maintenant dans P paraîtrait un nombre pair de fois. En rajoutant le nombre du milieu, il y aurait maintenant un chiffre qui paraît un

nombre impair de fois.
Étant donné n'importe quel groupe de chiffres dans lequel les chiffres paraissent un nombre pair de fois, il est possible de placer ces chiffres de manière à former un palindrome. Il suffit de le former en plaçant deux chiffres identiques l'un à côté de l'autre et en ajoutant progressivement un chiffre au début et un chiffre identique à la fin.
De même, étant donné n'importe quel groupe de chiffres dans lequel tous les chiffres sauf un paraissent un nombre pair de fois, il est possible de placer ces chiffres de manijère à former un palindrome. Il suffit de placer le chiffre qui paraît un nombre impair de fois, puis d'ajouter progressivement un chiffre au début et un chiffre identique à la fin.
(Aucun autre groupe de chiffres ne peuvent être déplacés pour former un palindrome.)

On considère maintenant le nombre x.
Le tableau suivant indique le nombre de fois que les chiffres paraissent dans x :

Chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de fois	3	13	13	4	3	3	3	3	3	3

Si on voulait créer un palindrome P formé d'un nombre pair des chiffres de x, il faudrait réduire le nombre de fois que certains des chiffres de x paraissent de manière que chacun paraisse un nombre pair de fois. Pour le faire en enlevant le plus petit nombre de chiffres possible, il faudrait enlever un chiffre 0, un chiffre 1, un chiffre 2, un chiffre 4, un chiffre 5, un chiffre 6, un chiffre 7, un chiffre 8 et un chiffre 9. (Étant donné un nombre impair, le plus petit nombre qu'on peut soustraire pour qu'il devienne pair est 1.) Chaque chiffre de 0 à 9 paraîtrait alors un nombre pair de fois. En tout, on aurait enlevé 9 chiffres du nombre x.
Si on voulait créer un palindrome P formé d'un nombre impair des chiffres de x, il faudrait réduire le nombre de fois que certains des chiffres de x paraissent de manière que chacun des chiffres, sauf un, paraisse un nombre pair de fois. Pour le faire en enlevant le plus petit nombre de chiffres possible, il faudrait enlever un de chacun des chiffres 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, sauf un. (Par exemple, supposons qu'on n'enlève pas un 9.) Chacun des autres chiffres paraîtrait un nombre pair de fois et le 9 paraîtrait un nombre impair de fois (soit 3 fois). En tout, on aurait enlevé 8 chiffres du nombre x.
Donc, le plus petit nombre de chiffres qu'il faudrait enlever du nombre x de manière que les chiffres qui restent puissent être déplacés pour former un palindrome est 8.

(b) D'après le tableau précédent, la somme des chiffres de x est égale à :

$$3(0) + 13(1) + 13(2) + 4(3) + 3(5) + 3(6) + 3(7) + 3(8) + 3(9) = 168$$

Pour obtenir une somme de 130, il faut enlever des chiffres dont la somme est égale à $168 - 130$, ou 38.
Or, on veut enlever le plus petit nombre de chiffres qui ont une somme de 38.
Pour réussir, il faut enlever les plus grands chiffres en premier.
En enlevant les trois 9, on enlève une somme de 27.
En enlevant aussi un 8, on enlève une somme de 35.
On peut enlever une somme de 38 en enlevant ensuite un 3.
On a donc enlevé 5 chiffres.
Il est impossible d'enlever 4 chiffres ou moins qui ont une somme de 38, puisque la somme maximale de 4 chiffres est égale à 4(9), ou 36.
Donc, le plus petit nombre de chiffres qu'il faudrait enlever est 5.

(c) Le tableau suivant indique le nombre de fois que les chiffres paraissent dans y :

Chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de fois	5	15	15	15	15	6	5	5	5	5

On peut déterminer la somme des chiffres en procédant comme dans la partie (a) ou en remarquant que la plupart des chiffres paraissent un nombre de fois qui est un multiple de 5 et en procédant comme suit :

$$5(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 10(1 + 2 + 3 + 4) + 5 = 330$$

On veut enlever du nombre y des chiffres qui ont une somme de $330 - 210$, ou 120, de manière que les chiffres qui restent, sauf un, paraissent un nombre pair de fois.
On commence par enlever chacun des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 et 9 une fois de manière que chaque chiffre paraisse un nombre pair de fois. À la toute fin, on ajoutera un chiffre de manière que ce chiffre paraisse un nombre impair de fois. Voici les chiffres qui restent :

Chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de fois	4	14	14	14	14	6	4	4	4	4

Ces chiffres ont une somme de 290.
On enlève maintenant des chiffres deux par deux, de manière à enlever le plus petit *nombre* de chiffres pour que la somme des chiffres qui restent soit inférieure ou égale à 210.
On enlève donc les grands chiffres en premier. Si on enlève les quatre 8 et les quatre 9, il reste :

Chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de fois	4	14	14	14	14	6	4	4	0	0

Les chiffres qui restent ont une somme de 222.
Il faut enlever au moins deux autres chiffres pour que la somme des chiffres qui restent soit inférieure ou égale à 210. (Il faut enlever une somme d'au moins 12, ce qui correspond à enlever plus d'un chiffre.)
On peut le faire, par exemple, en enlevant deux 6. Il reste :

Chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de fois	4	14	14	14	14	6	2	4	0	0

On peut ensuite remettre un chiffre 0, tout en maintenant une somme de 210.
Le nombre de chiffres enlevés est donc égal à $9 + 4 + 4 + 2 - 1$, ou 18.
Il s'agit bien du plus petit nombre de chiffres qu'il faut enlever, puisqu'on a enlevé le plus petit nombre de chiffres de manière à pouvoir former un palindrome ayant un nombre pair de chiffres, puis on a rajouté un chiffre.

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fryer 2007

le mercredi 18 avril 2007

Solutions

1. (a) Puisque le rectangle 3 a 4 rangées de carreaux, le rectangle 4 a 5 rangées.
Puisque le rectangle 3 a 7 colonnes de carreaux, le rectangle 4 a 9 colonnes.
Le nombre de carreaux du rectangle 4 est égal à 5×9, ou 45.

(b) Puisque le rectangle 4 a 5 rangées, il a une hauteur de 5.
Puisqu'il a 9 colonnes, il a une longueur de 9.
Son périmètre est donc égal à $2(5) + 2(9)$, ou 28.

(c) Puisque le rectangle 4 a 5 rangées de carreaux, le nombre de rangées du rectangle 7 est égal à $5 + 3$, ou 8.
Puisque le rectangle 4 a 9 colonnes, le nombre de colonnes du rectangle 7 est égal à $9+2(3)$, ou 15.
Le rectangle 7 a donc une hauteur de 8 et une longueur de 15. Son pérmiètre est égal à $2(8) + 2(15)$, ou 46.

(d) *Solution 1*
On procède par tâtonnements.
Le rectangle 7 mesure 8 sur 15. Son périmètre est égal à $2(8) + 2(15)$, ou 46.
On considère un plus grand rectangle.
Dans le rectangle 17, le nombre de rangées est égal à $8 + 10$, ou 18, et le nombre de colonnes est égal à $15 + 2(10)$, ou 35. Il mesure donc 18 sur 35 et son périmètre est égal à $2(18) + 2(35)$, ou 106.
On considère un rectangle encore plus grand.
Dans le rectangle 27, le nombre de rangées est égal à $18 + 10$, ou 28, et le nombre de colonnes est égal à $35 + 2(10)$, ou 55. Il mesure donc 28 sur 55 et son périmètre est égal à $2(28) + 2(55)$, ou 166. C'est proche !
Le rectangle 28 a 29 rangées et 57 colonnes. Son périmètre est égal à $2(29)+2(57)$, ou 172.
Le rectangle 29 a 30 rangées et 59 colonnes. Son périmètre est égal à $2(30)+2(59)$, ou 178.
Donc $n = 29$.
(Il s'agit de la seule réponse, car plus on avance dans la suite, plus le périmètre augmente.)

Solution 2
Le rectangle 7 mesure 8 sur 15. Son périmètre est égal à $2(8) + 2(15)$, ou 46.
Lorsqu'on passe au rectangle 8, la hauteur augmente de 1 et la longueur augmente de 2.
Le périmètre augmente donc de $2(1) + 2(2)$, ou 6.
À chaque nouveau rectangle, la même situation se produit.
Or $178 - 46 = 132$ et $132 = 22(6)$. Pour passer d'un périmètre de 46 à un périmètre de 178, il faut donc avancer 22 fois à partir du rectangle 7. On arrive donc au rectangle 29.
Donc, le rectangle 29 a un périmètre de 178. Donc $n = 29$.

Solution 3
Le rectangle 1 a une rangée de plus que son numéro. À chaque étape, le nombre de rangées augmente de 1. Donc, le rectangle n a $n + 1$ rangées.
Le rectangle 1 a 3 colonnes (ce qui est 1 de plus que le double de son numéro). À chaque étape, le nombre de colonnes augmente de 2. Donc, le rectangle n a $2n + 1$ colonnes.
Le périmètre du rectangle n est donc égal à $2(n + 1) + 2(2n + 1)$, soit $2n + 2 + 4n + 2$, ou $6n + 4$.
Pour obtenir un périmètre de 178, on doit avoir $6n + 4 = 178$, d'où $6n = 174$, ou $n = 29$.
Donc, le rectangle 29 a un périmètre de 178.

2. (a) Le nombre de billets que Jamil a achetés est égal à $5 + 2 + 3$, ou 10.

Le coût total des billets est égal à 5(25 \$) + 2(10 \$) + 3(5 \$), ou 160 \$.

Le coût moyen des billets est donc égal à $\frac{160\ \$}{10}$, ou 16 \$.

(b) Puisque Michel achète 8 billets au coût moyen de 12 \$, le coût total des billets est de 8×12 \$, ou 96 \$.
Il achète ensuite 5 billets platine qu'il paie 5×25 \$, ou 125 \$.
En tout, Michel a payé 96 \$ + 125 \$, ou 221 \$ pour 13 billets.
Le coût moyen de tous les billets qu'il a achetés est égal à $\frac{221\ \$}{13}$, ou 17 \$.

(c) *Solution 1*
Ophélie a d'abord acheté 10 billets au coût moyen de 14 \$. Ils ont donc coûté 10×14 \$, ou 140 \$ en tout.
Elle achète ensuite n billets platine qui coûtent $25n$ dollars.
En tout, elle a dépensé $140 + 25n$ dollars pour $10 + n$ billets.
Or, on sait que le coût moyen de tous ces billets est de 20 \$. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{140+25n}{10+n} &= 20 \\ 140+25n &= 20(10+n) \\ 140+25n &= 200+20n \\ 5n &= 60 \\ n &= 12 \end{aligned}$$

Après les 10 premiers billets, Ophélie a acheté 12 billets platine.

Solution 2
Le coût moyen des 10 premiers billets est 6 \$ de moins que le coût moyen final de 20 \$.
En tout, elle a déboursé 10×6 \$, ou 60 \$ de moins pour ces billets que si elle les avait payés à un coût moyen de 20 \$.
Pour obtenir un coût moyen de 20 \$, à la fin, elle doit donc payer 60 \$ de plus, pour les nouveaux billets platine, que le coût moyen de 20 \$.
Or, chaque billet platine coûte 5 \$ de plus que le coût moyen de 20 \$. Le nombre de billets platine qu'elle doit acheter est donc égal à 60 \$ $\div$ 5 \$, ou 12.

3. (a) Le nombre $992\,466\,1A6$ est divisible par 8 si $1A6$ est divisible par 8.
On vérifie tous les cas possibles à la main ou à l'aide d'une calculette :

106 n'est pas divisible par 8 ; 116 non plus ; 126 non plus ;
136 est divisible par 8 ;
146 n'est pas divisible par 8 ; 156 non plus ; 166 non plus ;
176 est divisible par 8 ;
186 n'est pas divisible par 8 ; 196 non plus.

Les valeurs possibles de A sont 3 et 7.

(b) Le nombre $D\,767\,E89$ est divisible par 9 si $D+7+6+7+E+8+9$, ou $37+D+E$, est divisible par 9.
Puisque D et E sont des chiffres de 0 à 9, alors $D+E$ a une valeur de 0 à 18.
Donc, $37+D+E$ a une valeur de 37 à 55.
Les nombres de 37 à 55 qui sont divisibles par 9 sont 45 et 54.
Si $37+D+E=45$, alors $D+E=8$.

Si $37 + D + E = 54$, alors $D + E = 17$.
Les valeurs possibles de $D + E$ sont 8 et 17.

(c) Le nombre $5\,41G\,507\,2H6$ est divisible par 72 s'il est divisible par 8 et par 9.
On vérifie d'abord la divisibilité par 8, ce qui établira un petit nombre de valeurs de H.
Le nombre $5\,41G\,507\,2H6$ est divisible par 8 si $2H6$ est divisible par 8.
On procède comme dans la partie (a) et on établit que $2H6$ est divisible par 8 lorsque $H = 1{,}5{,}9$ (c'est-à-dire que 216, 256 et 296 sont divisibles par 8, tandis que 206, 226, 236, 246, 266, 276 et 286 ne le sont pas).
Pour chaque valeur possible de H, on doit déterminer les valeurs de G pour lesquelles le nombre $5\,41G\,507\,2H6$ est divisible par 9.
On considère d'abord $H = 1$. Quelles sont les valeurs de G pour lesquelles le nombre $5\,41G\,507\,216$ est divisible par 9 ?
Il faut que $5 + 4 + 1 + G + 5 + 0 + 7 + 2 + 1 + 6$, ou $31 + G$, soit divisible par 9.
Puisque G prend des valeurs de 0 à 9, alors $31 + G$ a une valeur de 31 à 40. Pour être divisible par 9, elle doit donc être égale à 36. Donc $G = 5$.
On considère ensuite $H = 5$. Quelles sont les valeurs de G pour lesquelles le nombre $5\,41G\,507\,256$ est divisible par 9 ?
Il faut que $5 + 4 + 1 + G + 5 + 0 + 7 + 2 + 5 + 6$, ou $35 + G$, soit divisible par 9.
Puisque G prend des valeurs de 0 à 9, alors $35 + G$ a une valeur de 31 à 40. Pour être divisible par 9, elle doit donc être égale à 36. Donc $G = 1$.
On considère enfin $H = 9$. Quelles sont les valeurs de G pour lesquelles le nombre $5\,41G\,507\,296$ est divisible par 9 ?
il faut que $5 + 4 + 1 + G + 5 + 0 + 7 + 2 + 9 + 6$, ou $39 + G$, soit divisible par 9.
Puisque G prend des valeurs de 0 à 9, alors $39 + G$ a une valeur de 39 à 48. Pour être divisible par 9, elle doit donc être égale à 45. Donc $G = 6$.
Les valeurs possibles de G et de H sont $H = 1$ et $G = 5$, $H = 5$ et $G = 1$, $H = 9$ et $G = 6$.
(On aurait pu combiner l'analyse des trois cas.)

4. (a) *Solution 1*
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle XYZ, $YZ^2 = YX^2 + XZ^2$, c'est-à-dire que $YZ^2 = 60^2 + 80^2$, d'où $YZ^2 = 10\,000$. Donc $YZ = 100$.
(On aurait pu déterminer la longueur YZ sans utiliser le théorème de Pythagore en remarquant que le triangle XYZ est rectangle en X, que $XY = 60 = 3(20)$ et que $XZ = 80 = 4(20)$. Le triangle XYZ est donc semblable au triangle remarquable 3-4-5, d'où $YZ = 5(20) = 100$.)
Puisque le triangle YXZ est rectangle en X, son aire est égale à $\frac{1}{2}(60)(80)$, ou 2400.
Puisque XW est perpendiculaire à YZ, l'aire du triangle YXZ est aussi égale à $\frac{1}{2}(100)(XW)$, ou $50XW$.
Donc $50XW = 2400$, d'où $XW = 48$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle XWZ, $WZ^2 = 80^2 - 48^2$, d'où $WZ^2 = 4096$.
Donc $WZ = 64$.

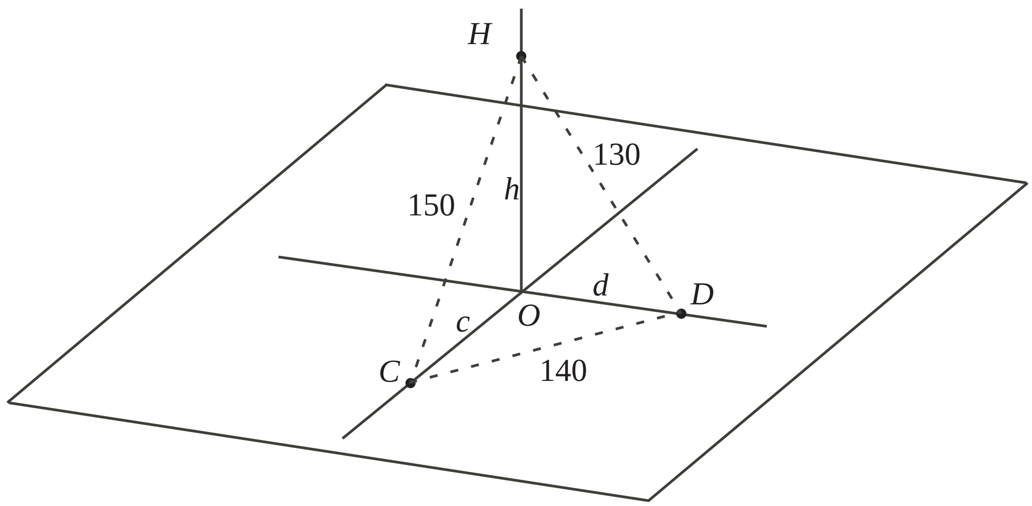
Solution 2
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle XYZ, $YZ^2 = YX^2 + XZ^2$, c'est-à-dire que $YZ^2 = 60^2 + 80^2$, d'où $YZ^2 = 10\,000$. Donc $YZ = 100$.
Soit $WZ = a$. Donc $YW = 100 - a$.
Soit $XW = h$.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle XWY, $(100-a)^2+h^2=60^2$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle XWZ, $a^2+h^2=80^2$.
On soustrait la première équation de la deuxième, membre par membre, pour obtenir :

$$\begin{aligned} a^2-(100-a)^2 &= 80^2-60^2 \\ a^2-(10000-200a+a^2) &= 6400-3600 \\ 200a-10000 &= 2800 \\ 200a &= 12800 \\ a &= 64 \end{aligned}$$

Donc $WZ=64$.

(b) Soit $OC=c$, $OD=d$ et $OH=h$.



Puisque OH est perpendiculaire au champ, alors OH est perpendiculaire à OC et à OD. Puisque OD est orienté vers l'est et que OC est orienté vers le sud, alors OD est perpendiculaire à OC.
Or $HC=150$. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOC, $h^2+c^2=150^2$.
De la même manière, on a $HD=130$ et $CD=140$, d'où $h^2+d^2=130^2$ et $c^2+d^2=140^2$.
On additionne ces deux dernières équations, membre par membre, pour obtenir

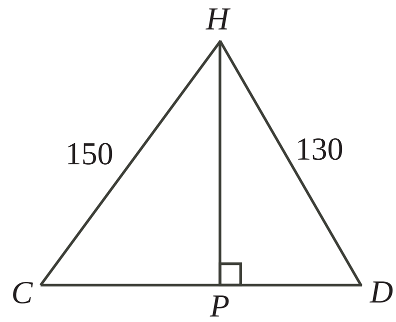
$$2h^2+c^2+d^2=150^2+130^2$$

Puisque $c^2+d^2=140^2$, alors :

$$\begin{aligned} 2h^2+140^2 &= 150^2+130^2 \\ 2h^2 &= 150^2+130^2-140^2 \\ 2h^2 &= 19800 \\ h^2 &= 9900 \\ h &= \sqrt{9900}=30\sqrt{11} \end{aligned}$$

La hauteur de la montgolfière est de $30\sqrt{11}$ m, soit environ 99,5 m.

(c) Pour épargner le plus de corde, il faut que HP ait une longueur minimale.
Or, HP a une longueur minimale lorsqu'elle est perpendiculaire à CD.



(Cette figure nous permet de constater que si on fait glisser P du pied de la perpendiculaire, HP est allongé.)
Dans cette figure, on a $HC = 150$, $HD = 130$ et $CD = 140$.
Soit $HP = x$ et $PD = a$. Donc $CP = 140 - a$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle HPC, $x^2 + (140 - a)^2 = 150^2$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle HPD, $x^2 + a^2 = 130^2$.
On soustrait la deuxième équation de la première, membre par membre, pour obtenir :

$$\begin{aligned} (140 - a)^2 - a^2 &= 150^2 - 130^2 \\ (19600 - 280a + a^2) - a^2 &= 5600 \\ 19600 - 280a &= 5600 \\ 280a &= 14000 \\ a &= 50 \end{aligned}$$

Donc $x^2 + 90^2 = 150^2$, c'est-à-dire que $x^2 = 150^2 - 90^2$, d'où $x^2 = 14400$. Donc $x = 120$.
La longueur de corde la plus courte est de 120 m. La longueur de corde épargnée est de 130 m + 150 m − 120 m, ou 160 m .

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fryer 2006

le jeudi 20 avril 2006

Solutions

1. (a) La note moyenne pour les sept cours est égale à $\dfrac{94+93+84+81+74+83+79}{7}$, c'est-à-dire à $\dfrac{588}{7}$, ou 84.

   (b) La plus grande moyenne possible correspondrait à une note de 100 en Français. Dans ce cas, la moyenne serait égale à $\dfrac{94+93+84+81+74+83+79+100}{8}$, c'est-à-dire à $\dfrac{688}{8}$, ou 86.

   (c) *Solution 1*
   Puisque Sandrine obtient une moyenne de 85 pour ses huit cours, la somme de ses notes est égale à 8×85, ou 680.
   Dans la partie (a), on a vu que la somme de ses sept premières notes était de 588. Puisque $680 - 588 = 92$, elle a obtenu une note de 92 en Français.

   Solution 2
   Si la note de Français était de 84, la moyenne resterait à 84.
   Si la note de Français était de 100, comme dans la partie (b), Sandrine obtiendrait une moyenne de 86.
   Puisque Sandrine obtient une moyenne de 85, soit à mi-chemin entre 84 et 86, la note de Français doit être à mi-chemin entre 84 et 100, soit 92.

2. (a) L'étage du bas est un carré 7 sur 7 de cubes. Il contient donc 7×7 cubes, ou 49 cubes.
   L'étage suivant est un carré 5 sur 5 de cubes. Il contient donc 5×5 cubes, ou 25 cubes.
   L'étage suivant est un carré 3 sur 3 de cubes. Il contient donc 3×3 cubes, ou 9 cubes.
   L'étage du haut contient 1 cube.
   Le nombre total de cubes est égal à $49 + 25 + 9 + 1$, ou 84.

   (b) *Solution 1*
   Le cube de l'étage du haut a 5 faces visibles, car seule la face inférieure est cachée.
   À l'étage suivant, il y a 12 (soit 4×3) faces latérales et 8 (soit $3+2+2+1$) faces supérieures qui sont visibles.
   À l'étage suivant, il y a 20 (soit 4×5) faces latérales et 16 (soit $5 + 4 + 4 + 3$) faces supérieures qui sont visibles.
   Au dernier étage, il y a 28 (soit 4×7) faces latérales et 24 (soit $7 + 6 + 6 + 5$) faces supérieures qui sont visibles.
   Le nombre total de faces visibles est donc égal à $5 + 12 + 8 + 20 + 16 + 28 + 24$, ou 113.

   Solution 2
   Si on regarde la pyramide du haut, on voit un carré 7 sur 7 de faces visibles, pour un total de 49 faces visibles. (Ce carré est formé des faces supérieures visibles des divers étages de la pyramide.)
   Si on regarde le devant de la pyramide, on voit $1 + 3 + 5 + 7$ faces visibles, soit 16 faces visibles. Il en est de même si on regarde l'arrière ou chaque côté. Ces quatre vues nous font donc voir 4(16) faces visibles, ou 64 faces visibles.
   Le nombre total de faces visibles est donc égal à $49 + 64$, ou 113.

(c) *Solution 1*
Pour que la somme des numéros sur les faces visibles soit aussi grande que possible, il faut placer chaque cube de manière que ses deux, trois ou cinq numéros visibles soient aussi grands que possible.

Le cube du haut a 5 faces visibles. On place donc la face « 1 » vers le bas de manière à la cacher. La somme des numéros visibles sur ce cube est donc égale à $2+3+4+5+6$, ou 20.

Aux étages suivants, on place chacun des cubes de coin de manière à montrer les numéros 4, 5 et 6. Ceci est possible, puisque les faces de ces trois numéros partagent un même sommet.
Puisqu'il y a 12 cubes de coin, la somme des numéros visibles sur leurs faces est égale à $12 \times (4+5+6)$, ou 180.

On considère maintenant les autres cubes, soit ceux des trois étages du bas qui ne sont pas sur un coin. Ils ont deux faces visibles et on les place donc de manière à montrer les numéros 5 et 6.
Le nombre de tels cubes est égal à $4+12+20$, ou 36. La somme des numéros visibles sur leurs faces est donc égale à $36 \times (5+6)$, ou 396.

La plus grande somme possible est donc égale à $20+180+396$, ou 596.

Solution 2
Pour que la somme des numéros sur les faces visibles soit aussi grande que possible, il faut placer chaque cube de manière que ses deux, trois ou cinq numéros visibles soient aussi grands que possible.

Comme dans la Solution 2 de la partie (b), on regarde la pyramide du haut. On place chaque cube visible pour que sa face supérieure ait un 6. On obtient une somme de 49×6, ou 294.

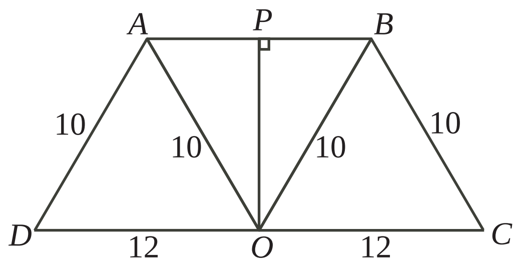
On considère ensuite le cube du haut. Il a une seule face cachée, soit le 1, puisque le 1 est opposé au 6. Cela maximise la somme de ses faces visibles. La somme des numéros sur les quatre faces latérales est égale à $2+3+4+5$, ou 14.

On considère ensuite les autres faces visibles, soit les autres faces latérales sur les côtés de la pyramide. Il y en a $4(3+5+7)$, ou 60. Pour maximiser la somme des nombres sur ces faces, on aimerait y placer des 5, puisque les 6 sont déjà placés. La somme de ces numéros serait alors égale à 5×60, ou 300. Or, sur les 12 cubes de coin, on aurait deux faces qui portent le numéro 5. Sur chacun de ces cubes, on remplace un 5 par un 4, ce qui diminue la somme de 12. (Il est possible de placer ces cubes de coin de manière à montrer un 4, un 5 et un 6, car les faces de ces trois numéros partagent un même sommet.)

La plus grande somme possible est donc égale à $294+14+300-12$, ou 596.

3. (a) Puisque le triangle AOB est isocèle, avec $AO = OB$, et que OP est perpendiculaire à AB, alors P est le milieu de AB. Donc $AP = PB = 6$.
D'après le théorème de Pythagore, $OP = \sqrt{AO^2 - AP^2}$, c'est-à-dire que $OP = \sqrt{10^2 - 6^2}$, d'où $OP = \sqrt{64}$, ou $OP = 8$.

(b) *Solution 1*
Le trapèze $ABCD$ est formé de trois triangles congruents. Son aire est donc égale à trois fois l'aire d'un de ces triangles.



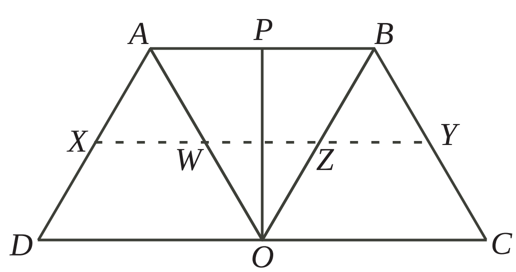
D'après la partie (a), chaque triangle a une base de 12 et une hauteur de 8, soit la longueur de OP. Chacun a donc une aire de $\frac{1}{2}(12)(8)$, ou 48.
L'aire du trapèze est donc égale à 3×48, ou 144.

Solution 2
Puisque le trapèze $ABCD$ a une hauteur de 8, soit la longueur de OP, et des bases AB et DC de longueurs respectives 12 et 24, son aire est égale à

$$\tfrac{1}{2} \times \text{hauteur} \times \text{somme de la longueur des bases}$$

soit $\frac{1}{2}(8)(12 + 24)$, ou 144.

(c) *Solution 1*
Puisque le segment XY coupe AD et BC en leur milieu, il coupe aussi PO en son milieu. En effet, puisque XY est parallèle à AB et à DC et qu'il coupe les côtés AD et BC en leur milieu, il coupe le côté AO du triangle ADO et le côté BO du triangle BCO en leurs milieux respectifs W et Z. Le triangle WZO est donc semblable au triangle ABO et ses dimensions sont la moitié de celles du triangle ABO. Sa hauteur est donc la moitié de PO. De la même manière, les dimensions des triangles AXW et BYZ sont la moitié de celles des triangles ADO et BCO.



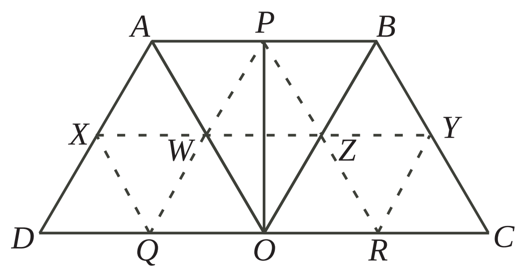
Les trapèzes $ABYX$ et $XYCD$ ont donc chacun une hauteur de 4. De plus, puisque $XW = \frac{1}{2}DO$, $WZ = \frac{1}{2}AB$ et $ZY = \frac{1}{2}OC$, alors $XY = 3(6)$, ou $XY = 18$. D'après la formule pour l'aire d'un trapèze utilisée dans la partie (b), l'aire du trapèze $ABYX$ est égale à $\frac{1}{2}(4)(12 + 18)$, ou 60, et celle du trapèze $XYCD$ est égale à $\frac{1}{2}(4)(18 + 24)$, ou 84.
Le rapport de leur aire est égal à 60 : 84, ou 5 : 7.

Solution 2
Comme dans la Solution 1, chaque petit trapèze a une hauteur de 4.
On calcule la longueur de XY comme suit.
On sait que la somme de l'aire des trapèzes $ABYX$ et $XYCD$ est égale à celle du trapèze $ABCD$. Donc :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(4)(AB+XY)+\tfrac{1}{2}(4)(XY+DC) &= 144\\ 2(12+XY)+2(XY+24) &= 144\\ 4(XY) &= 72\\ XY &= 18\end{aligned}$$

L'aire du trapèze $ABYX$ est égale à $\frac{1}{2}(4)(12+18)$, ou 60, et celle du trapèze $XYCD$ est égale à $\frac{1}{2}(4)(18+24)$, ou 84.
Le rapport de leur aire est égal à 60 : 84, ou 5 : 7.

Solution 3
Soit Q et R les milieux respectifs de DO et de OC. Soit W et Z les points respectifs où XY coupe AO et BO.
On trace les segments XQ, WQ, PW, PZ, RZ et RY.



Le trapèze $ABCD$ a été divisé en 12 triangles congruents.
Pour le démontrer, on considère la division du triangle AOD en quatre petits triangles. Puisque les points X, W et Q sont les milieux respectifs des côtés AD, AO et OD, alors les segments XW, WQ et QX sont parallèles aux côtés respectifs DO, AD et OA. Les triangles AXW, XDQ, WQO et QWX sont congruents, puisqu'ils ont des côtés de longueurs 5, 5 et 6. Il en est de même pour la division des triangles ABO et BOC en petits triangles.
Puisque le trapèze $ABYX$ est composé de 5 petits triangles, que le trapèze $XYCD$ est composé de 7 petits triangles et que les 12 petits triangles ont la même aire, le rapport de l'aire du trapèze $ABYX$ à celle du trapèze $XYCD$ est de 5 : 7.

4. (a) *Solution 1*
Il y a 100 entiers de 1 à 100. Parmi eux, 10 entiers se terminent par le chiffre 7, soit 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87 et 97. De plus, 10 entiers commencent par le chiffre 7, soit 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78 et 79.
Puisque 77 est présent dans les deux listes, on ne doit pas le compter deux fois. On doit donc soustraire 19 entiers des 100 entiers.
Le nombre d'entiers, de 1 à 100, qui ne contiennent pas le chiffre 7 est donc égal à $100-19$, ou 81.

Solution 2
Puisque les entiers 0 et 100 ne contiennent pas le chiffre 7, on remplace 100 par 0 et on cherche le nombre d'entiers de 0 à 99 qui ne contiennent pas le chiffre 7.
Chacun de ces entiers peut être écrit à l'aide de deux chiffres : 00, 01, 02, ..., 98, 99.
Puisqu'on cherche des entiers qui ne contiennent pas le chiffre 7, il y a 9 choix pour le premier chiffre, soit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 ou 9. Pour chacun de ces choix, il y a 9 choix pour le deuxième chiffre. Le nombre de choix est donc égal à 9×9, ou 81.
Il y a donc 81 entiers, de 0 à 99, et donc de 1 à 100, qui ne contiennent pas le chiffre 7.

(b) *Solution 1*
D'après la partie (a), il y 81 entiers, de 1 à 100, qui ne contiennent pas le chiffre 7.
De même, il y a 81 tels entiers, dans chacun des intervalles de 101 à 200, de 201 à 300, de 301 à 400, de 401 à 500 et de 501 à 600. En effet, le premier chiffre n'est pas un 7 et les autres chiffres suivent la même régularité que dans la partie (a).
De 601 à 700, il y en aura 80 (puisque le nombre 700 contient un 7).
De 701 à 800, il y en a 1 (soit 800 — tous les autres nombres contiennent un 7).
Dans chacun des intervalles suivants, il y en aura 81 : de 801 à 900, de 901 à 1000, de 1001 à 1100, de 1101 à 1200, de 1201 à 1300, de 1301 à 1400, de 1401 à 1500 et de 1501 à 1600.
De 1601 à 1700, il y en a 80 ; de 1701 à 1800, il y en a 1 ; de 1801 à 1900, il y en a 81 ; de 1901 à 2000, il y en a 81.
En tout, le nombre d'entiers, de 1 à 2000, qui ne contiennent pas le chiffre 7 est égal à $16(81) + 2(80) + 2(1)$, soit $18(81)$, ou 1458.

Solution 2
Puisque les entiers 0 et 2000 ne contiennent pas le chiffre 7, on remplace 2000 par 0 en on cherche le nombre d'entiers, de 0 à 1999, qui ne contiennent pas le chiffre 7.
Chacun de ces entiers peut être écrit à l'aide de quatre chiffres, soit $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}$, chaque entier pouvant être un zéro. a peut donc prendre les valeurs 0 ou 1, tandis que les chiffres b, c et d peuvent prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 ou 9.
Il y a donc 2 choix pour le premier chiffre ; pour chacun de ces choix, il y a 9 choix pour le deuxième chiffre ; pour chacun de ces choix, il y a 9 choix pour le troisième chiffre ; pour chacun de ces choix il y a 9 choix pour le quatrième chiffre. Le nombre de choix est donc égal à $2 \times 9 \times 9 \times 9$, ou 1458.
Il y a donc 1458 entiers, de 1 à 2000, qui ne contiennent pas le chiffre 7.

(c) *Solution 1*
Dans cette solution, on fera souvent appel au fait que la somme des entiers de 1 à n est égale à $\frac{1}{2}n(n+1)$.
On considère d'abord les entiers de 1 à 100.
Leur somme est égale à $\frac{1}{2}(100)(101)$, ou 5050.
Parmi ces entiers, ceux qui contiennent le chiffre 7 sont 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87 et 97. Leur somme est égale à 1188.
Les entiers, de 1 à 100, qui ne contiennent pas le chiffre 7 ont une somme de $5050 - 1188$, ou 3862.

Dans l'intervalle de 101 à 200, il y a aussi 81 entiers qui ne contiennent pas le chiffre 7. Chacun de ces entiers est 100 de plus qu'un nombre de l'intervalle de 1 à 100 qui ne contient pas le chiffre 7. La somme de ces 81 entiers est donc égale à $3862 + 81(100)$.

On utilise la même approche pour déterminer la somme des entiers appropriés dans chacun des intervalles suivants. On présente les résultats dans un tableau :

Intervalle	Nombre d'entiers qui ne contiennent pas 7	Somme
De 1 à 100	81	3862
De 101 à 200	81	$3862 + 81(100)$
De 201 à 300	81	$3862 + 81(200)$
De 301 à 400	81	$3862 + 81(300)$
De 401 à 500	81	$3862 + 81(400)$
De 501 à 600	81	$3862 + 81(500)$
De 601 à 700	80	$3862 + 81(600) - 700$
De 701 à 800	1	800
De 801 à 900	81	$3862 + 81(800)$
De 901 à 1000	81	$3862 + 81(900)$
De 1001 à 1100	81	$3862 + 81(1000)$
De 1101 à 1200	81	$3862 + 81(1100)$
De 1201 à 1300	81	$3862 + 81(1200)$
De 1301 à 1400	81	$3862 + 81(1300)$
De 1401 à 1500	81	$3862 + 81(1400)$
De 1501 à 1600	81	$3862 + 81(1500)$
De 1601 à 1700	80	$3862 + 81(1600) - 1700$
De 1701 à 1800	1	1800
De 1801 à 1900	81	$3862 + 81(1800)$
De 1901 à 2000	81	$3862 + 81(1900)$
De 2001 à 2006	6	$2001 + 2002 + 2003 + 2004 + 2005 + 2006$

La somme de tous ces entiers est égale à :

$$\begin{aligned}
& 18(3862) \\
& \quad +81(100)(1+2+3+4+5+6+8+9+10+11+12+13+14+15+16+18+19) \\
& \quad -700+800-1700+1800+(2001+2002+2003+2004+2005+2006) \\
= {} & 69\,516 + 8100(166) + 200 + 12\,021 \\
= {} & 1\,426\,337
\end{aligned}$$

Solution 2

On considère d'abord les entiers de 000 à 999 qui ne contiennent pas le chiffre 7. (On peut inclure l'entier 000, car cela ne changera pas la somme.)

Puisque chaque chiffre peut prendre 9 valeurs, le nombre de ces entiers est égal à $9 \times 9 \times 9$, ou 729.

Si on considère ensuite n'importe quel entier particulier dans n'importe quelle des trois positions, il y a 81 entiers, parmi les 729, qui partagent le même chiffre dans cette position. (Par exemple, il y a 81 entiers, dans la liste, qui se terminent par 1.)

Pour déterminer la somme des 729 entiers, on détermine la somme des chiffres des unités, puis la valeur de celle des chiffres des dizaines, puis la valeur de celle des chiffres des centaines.

Chacun des 9 chiffres possibles paraît 81 fois dans la colonne des unités. Donc, la somme des chiffres de cette colonne est égale à :

$$81(0) + 81(1) + 81(2) + 81(3) + 81(4) + 81(5) + 81(6) + 81(8) + 81(9) = 81(38)$$

Chacun des 9 chiffres possibles de la colonne des dizaines paraît 81 fois dans la colonne des dizaines. Donc, la valeur de la somme des chiffres de cette colonne est égale à :

$$81(0 + 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 80 + 90) = 81(380)$$

De même, la valeur de la somme des chiffres dans la colonne des centaines est égale à 81(3800).
Donc, la somme des entiers, de 0 à 999, qui ne contiennent pas le chiffre 7, est égale à :

$$81(38) + 81(380) + 81(3800) = 81(38)(1 + 10 + 100) = 81(38)(111) = 341\,658$$

Dans l'intervalle de 1000 à 1999, chacun des 729 entiers qui ne contiennent pas le chiffre 7 est 1000 de plus qu'un de ces entiers dans l'intervalle de 0 à 999. (Il y a bien 729 tels entiers dans cet intervalle, puisque le premier chiffre est 1 et que chacun des autres chiffres peut prendre une de 9 valeurs.)
La somme de ces entiers, dans l'intervalle de 1000 à 1999, est égale à la somme des entiers correspondants de l'intervalle de 0 à 999, plus 729(1000). Elle est donc égale à $729\,000 + 341\,658$, ou $1\,070\,658$.
Aucun des entiers, de 2000 à 2006, ne contient le chiffre 7. Leur somme est égale à $2000 + 2001 + 2002 + 2003 + 2004 + 2005 + 2006$, soit 7(2003), ou $14\,021$.
La somme de tous les entiers, de 1 à 2006, qui ne contiennent pas le chiffre 7 est égale à $341\,658 + 1\,070\,658 + 14\,021$, ou $1\,426\,337$.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fryer 2005

Le mercredi 20 avril 2005

Solutions

1. (a) L'aire d'un cercle de rayon r est égale à πr^2.
L'aire du grand cercle est égale à $\pi(10^2)$, ou 100π, et l'aire du petit cercle est égale à $\pi(6^2)$, ou 36π.
L'aire de l'anneau ombré est égale à la différence des deux aires.
Elle est donc égale à $100\pi - 36\pi$, ou 64π.

(b) L'aire du petit cercle (l'aire de la région X) est égale à $\pi(4^2)$, ou 16π.
On utilise la même méthode que dans la partie (a) pour déterminer l'aire de l'anneau au milieu (région Y) : Elle est égale à $\pi(6^2) - \pi(4^2)$, c'est-à-dire à $36\pi - 16\pi$, ou 20π.
De même, l'aire du grand anneau (région Z) est égale à $\pi(7^2) - \pi(6^2)$, c'est-à-dire à $49\pi - 36\pi$, ou 13π.
Donc, la région Y a la plus grande aire.

(c) L'aire de l'anneau formé par les deux grands cercles est égale à $\pi(13^2) - \pi(12^2)$, c'est-à-dire à $169\pi - 144\pi$, ou 25π.
Soit r le rayon du petit cercle.
L'aire du petit cercle est donc égale à πr^2.
Puisque l'aire de l'anneau formé par les deux grands cercles est égale à l'aire du plus petit cercle, alors $\pi r^2 = 25\pi$, d'où $r^2 = 25$ et $r = 5$, puisque $r > 0$.
Le petit cercle a donc un rayon de 5.

2. (a) Anne joue en premier et place un A dans la case du milieu.
Bruno ne peut pas placer deux initiales, car il aurait besoin de deux cases adjacentes. Il peut donc seulement placer un B dans une des deux cases non adjacentes.

B	A	

	A	B

Il reste une case vide. Anne place un A dans cette case et gagne.
Anne gagne donc, peu importe le jeu de Bruno.

(b) *Solution 1*
Anne place un A dans la cinquième case.

B		A		A

Bruno peut seulement placer un B dans une des cases vides, car elles ne sont pas adjacentes.
Anne peut placer un A dans la dernière case vide et elle gagne.
Anne peut donc gagner en plaçant un A dans la cinquième case.

Solution 2
Anne place un A dans la quatrième case.

B		A	A	

Bruno peut seulement placer un B dans une des cases vides, car elles ne sont pas adjacentes.
Anne peut placer un A dans la dernière case vide et elle gagne.
Anne peut donc gagner en plaçant un A dans la quatrième case.

Solution 3
Anne place un A dans la cinquième case.

B		A		A

On enlève la première et la cinquième case. Il reste trois cases avec la lettre A au milieu. C'est au tour de Bruno de jouer.
Puisque la situation est la même que dans la partie (a), Anne gagne.

(c) 1re possibilité
Bruno place un B dans les quatrième et cinquième cases.

	A		B	B

Anne peut seulement placer un A dans une des cases vides, car elles ne sont pas adjacentes.
Bruno place un B dans la dernière case vide et il gagne.
Donc, Bruno peut s'assurer d'une victoire avec ce coup.

2e possibilité
Bruno place un B dans les troisième et quatrième cases.

	A	B	B	

Anne peut seulement placer un A dans une des cases vides, car elles ne sont pas adjacentes.
Bruno place un B dans la dernière case vide et il gagne.
Donc, Bruno peut s'assurer d'une victoire avec ce coup.

Ces coups sont les deux seuls qui assurent une victoire à Bruno.
(Il y a quatre autres coups possibles, soit de placer un seul B dans une des quatre cases vides. Pourquoi ces coups assurent-ils une victoire à Anne ?)

3. (a) *Solution 1*
Puisque dans un triangle de Nakamoto les côtés ont des longueurs entières dans le rapport 3 : 4 : 5, alors les longueurs doivent être des produits de 3, de 4 et de 5 par un même entier.
Puisqu'un des côtés a une longueur de 28, cette longueur est un multiple de 4, soit 4×7.
Les autres longueurs doivent être 3×7 et 5×7, ou 21 et 35.

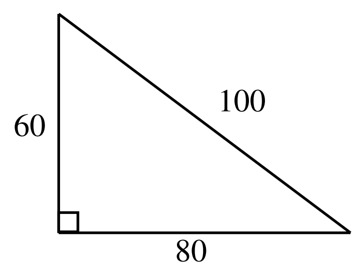
Solution 2
Puisque dans un triangle de Nakamoto les côtés ont des longueurs entières dans le rapport 3 : 4 : 5, alors les longueurs doivent égaler $3x$, $4x$ et $5x$, pour une valeur entière de x.
Puisqu'une de ces longueurs est égale à 28, alors $4x = 28$ (ou $x = 7$), puisque 28 n'est pas un multiple de 3 ou de 5.
Donc, les autres longueurs doivent être 3×7 et 5×7, ou 21 et 35.

(b) *Solution 1*
Puisque dans un triangle de Nakamoto les côtés ont des longueurs entières dans le rapport 3 : 4 : 5, alors les longueurs doivent être des produits de 3, de 4 et de 5 par un même entier.
Le plus petit triangle de Nakamoto a des côtés de longueurs 3, 4 et 5. Son pémimètre est égal à $3 + 4 + 5$, ou 12.
Puisque le triangle donné a un périmètre de 96 et que $96 = 12 \times 8$, ses côtés ont donc une

longueur respective de 3×8, 4×8 et 5×8.
Le triangle a donc des côtés de longueurs 24, 32 et 40.

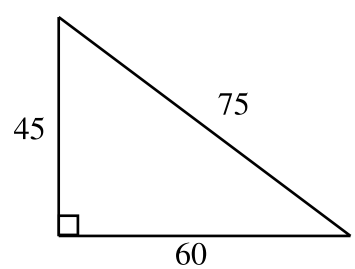
Solution 2
Puisque dans un triangle de Nakamoto les côtés ont des longueurs entières dans le rapport $3:4:5$, alors les longueurs doivent égaler $3x$, $4x$ et $5x$, pour une valeur entière de x.
Puisque le triangle donné a un périmètre de 96, alors $3x + 4x + 5x = 96$, d'où $12x = 96$, ou $x = 8$.
Le triangle a donc des côtés de longueurs 3×8, 4×8 et 5×8, ou 24, 32 et 40.

(c) Puisque 60 est un multiple de 3, $(60 = 20 \times 3)$, il existe un triangle de Nakamoto dont les côtés ont une longueur respective de 20 fois les longueurs 3, 4 et 5. Les côtés ont donc une longueur respective de 60, 80 et 100.
Les longueurs étant dans le rapport $3 : 4 : 5$, ce triangle est rectangle. On peut vérifier que $60^2 + 80^2 = 100^2$, et que les cathètes ont une longueur respective de 60 et 80.



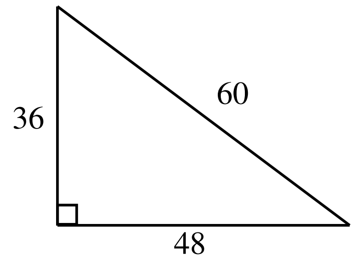
L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(60)(80)$, ou 2400.

Puisque 60 est un multiple de 4, $(60 = 15 \times 4)$, il existe un triangle de Nakamoto dont les côtés ont une longueur respective de 15 fois les longueurs 3, 4 et 5. Les côtés ont donc une longueur respective de 45, 60 et 75.
Puisque l'hypoténuse a une longueur de 75, 75 étant la plus grande longueur, les cathètes ont une longueur respective de 45 et 60.



L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(45)(60)$, ou 1350.

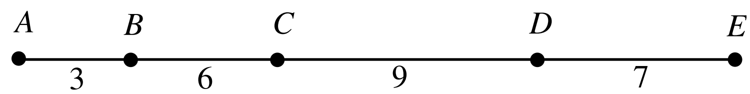
Puisque 60 est un multiple de 5, $(60 = 12 \times 5)$, il existe un triangle de Nakamoto dont les côtés ont une longueur respective de 12 fois les longueurs 3, 4 et 5. Les côtés ont donc une longueur respective de 36, 48 et 60.
Puisque l'hypoténuse a une longueur de 60, 60 étant la plus grande longueur, les cathètes ont une longueur respective de 36 et 48.



L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(36)(48)$, ou 864.

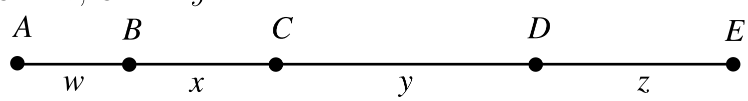
Donc, un triangle de Nakamoto qui a un côté de longueur 60 doit avoir une aire de 2400, de 1350 ou de 864.

4. (a)



On a $AB = 3$, $AC = 9$, $AD = 18$, $AE = 25$, $BC = 6$, $BD = 15$, $BE = 22$, $CD = 9$, $CE = 16$ et $DE = 7$.
La super-somme de AE est égale à $3 + 9 + 18 + 25 + 6 + 15 + 22 + 9 + 16 + 7$, ou 130.

(b) *Solution 1*
Si les 10 segments ont pour longueur respective les entiers de 1 à 10, alors la super-somme de AE est égale à $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$, ou 55.
Soit $AB = w$, $BC = x$, $CD = y$ et $DE = z$.

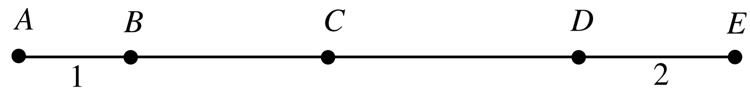


Puisque les segments de base ont une longueur entière, les segments ont tous une longueur entière.
On écrit la longueur de chaque segment en fonction de w, x, y et z.
On a $AB = w$, $AC = w + x$, $AD = w + x + y$, $AE = w + x + y + z$, $BC = x$, $BD = x + y$, $BE = x + y + z$, $CD = y$, $CE = y + z$ et $DE = z$.
La super-somme de AE est égale à :

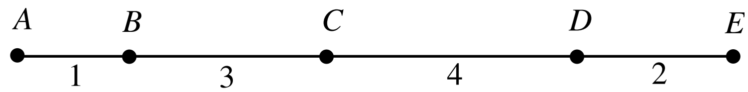
$$w+(w+x)+(w+x+y)+(w+x+y+z)+x+(x+y)+(x+y+z)+y+(y+z)+z = 4w+6x+6y+4z$$

Puisque $4w + 6x + 6y + 4z = 2(2w + 3x + 3y + 2z)$, la super-somme est donc un nombre pair. Elle ne peut donc pas égaler 55.
Il est donc impossible pour le segment AE d'avoir des segments qui ont pour longueur respective les entiers de 1 à 10.

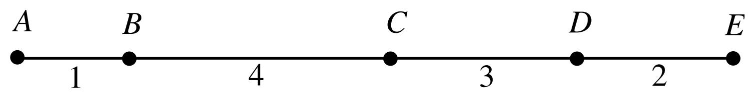
Solution 2
Puisque AE est le segment le plus long, alors on doit avoir $AE = 10$.
Puisque la somme de la longueur des segments de base est égale à la longueur de AE et que ces longueurs font partie de la liste, elles doivent avoir une longueur respective de 1, 2, 3 et 4.
Pour avoir un segment de longueur 9, il faut que les segments de base de longueurs 2, 3 et 4 soient en positions adjacentes. Le segment de base de longueur 1 doit donc se trouver à une extrémité.
Pour avoir un segment de longueur 8, il faut que les segments de base de longueurs 1, 3 et 4 soient en positions adjacentes. Le segment de base de longueur 2 doit donc se trouver à une extrémité.



Il y a donc deux possibilités :

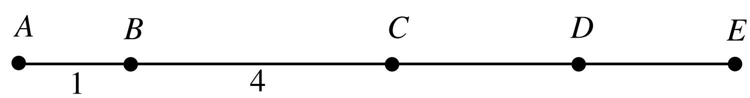


ou



Dans le premier cas, il n'y a aucun segment de longueur 5 et il y a deux segments de longueur 4, soit AC et CD, ce qui contredit la condition initiale.
Dans le deuxième cas, il n'y a aucun segment de longueur 6 et il y a deux segments de longueur 5, soit AC et CE, ce qui contredit la condition initiale.
Puisque les deux possibilités contredisent la condition initiale, il est impossible pour le segment AE d'avoir des segments qui ont pour longueur respective les entiers de 1 à 10.

Solution 3
Puisque AE est le segment le plus long, alors on doit avoir $AE = 10$.
Puisque la somme de la longueur des segments de base est égale à la longueur de AE et que ces longueurs font partie de la liste, elles doivent avoir une longueur respective de 1, 2, 3 et 4.
Pour éviter qu'une même longueur soit répétée, il ne faut pas que le segment de longueur 2 ou 3 soit à côté du segment de longueur 1.
Il faut donc que le segment de longueur 1 soit placé à une extrémité avec le segment de longueur 4 à son côté.



On a alors les segments de base de longueurs 2 et 3 l'un à côté de l'autre, ce qui donne deux segments de longueur 5. Cela contredit la condition initiale.
Il est donc impossible pour le segment AE d'avoir des segments qui ont pour longueur respective les entiers de 1 à 10.

(c) *Solution 1*
Qu'arrive-t-il à la super-somme lorsqu'on ajoute un segment de base JK de longueur $\frac{1}{10}$?
Les segments de AK incluent tous les segments de AJ (dont la somme des longueurs est égale à 45), ainsi que d'autres segments.
Ces derniers segments sont des segments de AK, mais pas de AJ. En d'autres mots, ce sont des segments qui comprennent le segment de base JK. Ce sont donc les segments JK, IK, HK, ainsi de suite, jusqu'à BK et AK.
Quelle est la longueur de chacun de ces segments ?
$JK = \frac{1}{10}$
$IK = IJ + JK = \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$
$HK = HI + IJ + JK = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$
$\vdots$
$AK = AB + BC + \cdots + IJ + JK = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$

Chacun de ces 10 segments contient le segment de base JK, 9 contiennent IJ, 8 contiennent HI, etc., 2 contiennent BC et 1 contient AB.
La super-somme de AK est donc égale à $45+10\left(\frac{1}{10}\right)+9\left(\frac{1}{9}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{2}\right)+1(1)$, c'est-à-dire à $45+10$, ou 55.
Qu'arrive-t-il à la super-somme lorsqu'on ajoute un segment de base KL de longueur $\frac{1}{11}$?
Comme ci-haut, cela ajoutera aux segments déjà contenus dans AK 11 segments contenant KL, 10 segments contenant JK, ainsi de suite, jusqu'à 1 segment contenant AB.
La super-somme de AL est donc égale à $55+11\left(\frac{1}{11}\right)+10\left(\frac{1}{10}\right)+\cdots+1(1)$, c'est-à-dire à $55+11$, ou 66. De la même manière, à mesure qu'on ajoute les autres segments de base pour en arriver au segment AP, on ajoute 12, puis 13, puis 14, puis 15 à la super-somme.
La super-somme de AP est donc égale à $66+12+13+14+15$, ou 120.

Solution 2
Chaque segment de AP est formé de segments de base adjacents. On peut déterminer la super-somme de AP en comptant le nombre de segments qui contiennent chaque segment de base. On détermine ainsi la contribution de chaque segment de base à la super-somme.
Le segment de base AB se retrouve dans les segments AB, AC, ..., AP, ou dans 15 segments en tout.
Par symétrie, OP se retrouve aussi dans 15 segments.
Le segment de base BC se retrouve dans les segments BC, BD, ..., BP (soit dans 14 segments), ainsi que dans les segments AC, AD, ..., AP (soit dans 14 autres segments). Il se retrouve donc dans 28 segments en tout.
Par symétrie, NO se retrouve aussi dans 28 segments.
Y a-t-il une façon plus efficace de compter le nombre de segments dans lequel chaque segment de base se retrouve sans avoir à tous les nommer ?
On considère de nouveau le segment BC.
Un segment qui contient BC doit avoir pour extrémité gauche A ou B (2 possibilités) et pour extrémité droite un point de C à P (14 possibilités). Chaque choix d'une extrémité gauche et d'une extrémité droite est possible, ce qui donne 2×14 segments, ou 28 segments possibles. (On peut utiliser le même argument pour NO, avec 14 extrémités gauches possibles et 2 extrémités droites possibles.)
On construit un tableau dans lequel on indique chacun des autres segments de base, le nombre d'extrémités gauches possibles pour un segment qui le contient, le nombre d'extrémités droites possibles et le nombre total de segments qui le contiennent :

Segments de base	Nombre possible d'extrémités gauches	Nombre possible d'extrémités droites	Nombre total de segments
CD	3	13	39
DE	4	12	48
EF	5	11	55
FG	6	10	60
GH	7	9	63
HI	8	8	64
IJ	9	7	63
JK	10	6	60
KL	11	5	55
LM	12	4	48
MN	13	3	39

La super-somme est donc égale à :

$15(1)+28(\frac{1}{2})+39(\frac{1}{3})+48(\frac{1}{4})+55(\frac{1}{5})+60(\frac{1}{6})+63(\frac{1}{7})+64(\frac{1}{8})+63(\frac{1}{9})+60(\frac{1}{10})+55(\frac{1}{11})+48(\frac{1}{12})+39(\frac{1}{13})+28(\frac{1}{14})+15(\frac{1}{15})$
ou

$$15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1$$

La super-somme de AP est égale à 120.

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Fryer 2004 (9e année ou Secondaire III)

1. a) Puisque $\xrightarrow{I}$ indique que Louis prend l'inverse, alors on a $3 \xrightarrow{I} \frac{1}{3}$.

Puisque $\xrightarrow{A}$ indique qu'il ajoute 1, alors on a $\frac{1}{3} \xrightarrow{A} \frac{1}{3}+1$, ou $\frac{1}{3} \xrightarrow{A} \frac{4}{3}$.

On continue pour obtenir $\frac{4}{3} \xrightarrow{I} \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} \xrightarrow{A} \frac{3}{4}+1$, ou $\frac{3}{4} \xrightarrow{A} \frac{7}{4}$, puis $\frac{7}{4} \xrightarrow{I} \frac{4}{7}$.

On a donc $3 \xrightarrow{I} \frac{1}{3} \xrightarrow{A} \frac{4}{3} \xrightarrow{I} \frac{3}{4} \xrightarrow{A} \frac{7}{4} \xrightarrow{I} \frac{4}{7}$.

b) Comme dans la partie a), on a :

$x \xrightarrow{I} \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x} \xrightarrow{A} \frac{1}{x}+1$, ou $\frac{1}{x} \xrightarrow{A} \frac{1+x}{x}$

$\frac{1+x}{x} \xrightarrow{I} \frac{x}{1+x}$

$\frac{x}{1+x} \xrightarrow{A} \frac{x}{1+x}+1$, ou $\frac{x}{1+x} \xrightarrow{A} \frac{1+2x}{1+x}$

$\frac{1+2x}{1+x} \xrightarrow{I} \frac{1+x}{1+2x}$

On a donc $x \xrightarrow{I} \frac{1}{x} \xrightarrow{A} \frac{1+x}{x} \xrightarrow{I} \frac{x}{1+x} \xrightarrow{A} \frac{1+2x}{1+x} \xrightarrow{I} \frac{1+x}{1+2x}$.

(Puisqu'on a pris l'inverse de x, on suppose que x n'est pas égal à 0.)

c) *Solution 1*

On remarque que si $\frac{1+x}{1+2x}$ est égal à $\frac{14}{27}$ et que $x+1=14$, ou $x=13$, alors $1+2x=27$.

Selon l'énoncé, il s'agit de la seule valeur de x qui donne le résultat final $\frac{14}{27}$.

Solution 2

D'après la partie b), on sait que si la valeur initiale est x, le résultat est égal à $\frac{1+x}{1+2x}$.

Pour obtenir un résultat de $\frac{14}{27}$, on pose $\frac{1+x}{1+2x}=\frac{14}{27}$ et on résout l'équation.

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{1+2x} &= \frac{14}{27}\\ 27(1+x) &= 14(1+2x)\\ 27+27x &= 14+28x\\ 13 &= x\end{aligned}$$

La valeur initiale de 13 donnera le résultat final $\frac{14}{27}$. (On peut vérifier en faisant tous les calculs avec 13 comme valeur initiale.)

Solution 3

On prend le résultat final $\frac{14}{27}$ et on procède à rebours.

Lors de la 5^e^ étape, on a pris l'inverse d'un nombre pour obtenir $\frac{14}{27}$. Le nombre précédent doit donc être égal à $\frac{27}{14}$.

Lors de la 4^e^ étape, on a ajouté 1 à un nombre pour obtenir $\frac{27}{14}$. Le nombre précédent doit donc être égal à $\frac{27}{14}-1$, ou $\frac{13}{14}$.

Lors de la 3^e^ étape, on a pris l'inverse d'un nombre pour obtenir $\frac{13}{14}$. Le nombre précédent doit donc être égal à $\frac{14}{13}$.

Lors de la 2^e^ étape, on a ajouté 1 à un nombre pour obtenir $\frac{14}{13}$. Le nombre précédent doit donc être égal à $\frac{14}{13}-1$, ou $\frac{1}{13}$.

Lors de la 1^re^ étape, on a pris l'inverse d'un nombre pour obtenir $\frac{1}{13}$. Le nombre initial doit donc être égal à 13.

2. a) Puisqu'au moins un prix de chaque sorte est décerné, un prix de chaque sorte correspond à une somme de $5\ \$ + 25\ \$ + 125\ \$ + 625\ \$$, ou 780 \$.
Puisque cinq prix sont décernés, le 5^e^ prix vaut $905\ \$ - 780\ \$$, ou 125 \$.
La Fondation Fryer a donc décerné un prix de 5 \$, un prix de 25 \$, deux prix de 125 \$ et un prix de 625 \$.

b) Comme dans la partie a), un prix de chaque sorte correspond à une somme de 780 \$.
Le 5^e^ prix pourrait correspondre à 5 \$, pour un total de $780\ \$ + 5\ \$$, ou 785 \$.
Le 5^e^ prix pourrait correspondre à 25 \$, pour un total de $780\ \$ + 25\ \$$, ou 805 \$.
Le 5^e^ prix pourrait correspondre à 625 \$, pour un total de $780\ \$ + 625\ \$$, ou 1405 \$.
[On a déjà traité du prix supplémentaire de 125 \$ dans la partie a).]

c) *Solution 1*
Un prix de chaque sorte correspond à une somme de 780 \$. Il reste à distribuer $880\ \$ - 780\ \$$, ou 100 \$, en attribuant les prix au plus cinq autres fois chacun. On ne peut décerner d'autres prix de 125 \$ ou de 625 \$, car cela dépasse ce qu'il reste à distribuer.
On peut décerner quatre autres prix de 25 \$, pour une somme de 100 \$.
Peut-on décerner moins de quatre autres prix de 25 \$? Si on décerne trois autres prix de 25 \$, il reste 25 \$ à distribuer. On peut le faire en décernant cinq prix de 5 \$.
Peut-on décerner moins de trois prix de 25 \$? Si on le faisait, il resterait au moins 50 \$ à distribuer et il faudrait décerner au moins dix prix de 5 \$. Or, on ne peut décerner plus de cinq autres prix de 5 \$. C'est donc impossible.

Il y a donc deux façons de décerner des prix d'une valeur totale de 880 $ selon les conditions données :

i) un prix de 625 $, un prix de 125 $, cinq prix de 25 $ et un prix de 5 $
ii) un prix de 625 $, un prix de 125 $, quatre prix de 25 $ et six prix de 5 $

On peut vérifier, en additionnant, que la valeur totale est de 880 $ dans chaque cas.

Solution 2

Un prix de chaque sorte correspond à une somme de 780 $. En ajoutant un autre prix, on atteint les sommes suivantes : 785 $, 805 $, 905 $ et 1405 $. Or les deux dernières sommes dépassent la valeur totale de 880 $.
En partant de 785 $ ou de 805 $, on tente de se rendre à 880 $.

En partant de 785 $, il faut distribuer 95 $ de plus pour se rendre à 880 $. En décernant trois autres prix de 25 $, on ajoute 75 $ et il reste 20 $ à distribuer, ce qu'on peut faire en décernant quatre prix de 5 $. (On ne peut décerner moins de trois autres prix de 25 $ sans décerner plus de six prix de 5 $ en tout.) On peut donc décerner un prix de 625 $, un prix de 125 $, quatre prix de 25 $ et six prix de 5 $ (car on avait déjà décerné deux prix de 5 $ pour faire une somme initiale de 785 $).

En partant de 805 $, il faut distribuer 75 $ de plus pour se rendre à 880 $. On peut le faire en décernant trois autres prix de 25 $. On décerne alors un prix de 625 $, un prix de 125 $, cinq prix de 25 $ et un prix de 5 $. On peut aussi combler la somme de 75 $ en décernant deux autres prix de 25 $ et cinq autres prix de 5 $. On décerne alors un prix de 625 $, un prix de 125 $, quatre prix de 25 $ et six prix de 5 $ (ce qui correspond au résultat obtenu en partant de 785 $). Si on décernait moins de deux autres prix de 25 $, il faudrait décerner un trop grand nombre de prix de 5 $.

Il y a donc deux façons de décerner des prix d'une valeur totale de 880 $ selon les conditions données :

i) un prix de 625 $, un prix de 125 $, cinq prix de 25 $ et un prix de 5 $
ii) un prix de 625 $, un prix de 125 $, quatre prix de 25 $ et six prix de 5 $

On peut vérifier, en additionnant, que la valeur totale est de 880 $ dans chaque cas.

3. a) Si Boris place un 3 dans n'importe quel des huit cercles vides, la somme des deux nombres placés est égale à 8. Annick peut ensuite gagner en plaçant un 7 dans le cercle diamétralement opposé.

b) Comme dans la partie a), Boris peut placer un des numéros 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 dans n'importe quel des huit cercles vides. À son tour, Annick devrait placer un numéro dans le cercle diamétralement opposé. Le numéro qu'elle place devrait être choisi de manière à donner une somme de 15. Le tableau suivant indique comment le faire.

1^er^ tour de Boris	*Total à date*	*2^e^ tour d'Annick*
1	6	9
2	7	8
3	8	7
4	9	6
6	11	4
7	12	3
8	13	2
9	14	1

Puisque chacun de ces choix est possible (le 5 initial n'est pas réutilisé et aucun des choix n'est le même que celui de Boris), Annick peut toujours gagner à son prochain tour.

c) Boris peut placer n'importe quel des numéros 1, 2, 4, 5, 7, 8 dans n'importe quel des six cercles vides. Il est possible d'apparier les nombres en couples de manière que leur somme, plus 6, soit égale à 15 : 1 et 8; 2 et 7; 4 et 5
Lorsque Boris place un de ces nombres, Annick peut utiliser l'autre nombre du couple et le placer sur la même ligne pour obtenir une somme de 15. Elle peut donc gagner.

4. a) Le 10e nombre triangulaire est égal à $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$, ou 55.
Le 24e nombre triangulaire est égal à $1+2+3+\cdots+23+24$. On peut utiliser une calculatrice pour obtenir une somme de 300. On peut aussi obtenir une régularité en appariant le premier et le dernier nombre, le 2e et l'avant-dernier et ainsi de suite :
Chaque parenthèse a une somme de 25; la somme des nombres est donc égale à 12×25, ou 300. (On peut utiliser cette régularité pour déterminer une formule générale pour la somme $1+2+\cdots+n$.)

b) *Solution 1*

Soit $1+2+3+\cdots+(n-1)+n \quad (1)$,

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1) \quad (2)$ et

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)+(n+2) \quad (3)$

les trois nombres triangulaires consécutifs.

Pour additionner ces trois nombres, on déplace le terme $(n+2)$ de l'expression (3) pour le placer à l'extrémité de l'expression (1) :

$$\begin{aligned}
&[1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+2)] \\
&\quad +[1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)] \\
&\quad +[1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)] \\
&=[1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)]+1 \qquad \text{(On a écrit } n+2 \text{ sous forme } (n+1)+1.) \\
&\quad +[1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)] \\
&\quad +[1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)] \\
&=3[1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)]+1
\end{aligned}$$

Cette dernière expression est 1 de plus que trois fois le deuxième nombre.

Solution 2

On utilise la formule $1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ [que l'on peut obtenir en suivant la démarche de la partie a)]. Les trois nombres triangulaires consécutifs sont alors : $1+2+3+\cdots+(n-1)+n$, ou $\dfrac{n(n+1)}{2}$,

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)$, ou $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, et

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)$, ou $\dfrac{(n+2)(n+3)}{2}$.

On les additionne :

$$\begin{aligned}
&\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{(n+2)(n+3)}{2} \\
&=\frac{n^2+n}{2}+\frac{n^2+3n+2}{2}+\frac{n^2+5n+6}{2} \\
&=\frac{3n^2+9n+8}{2} \\
&=\frac{3n^2+9n+6}{2}+1 \\
&=3\left(\frac{n^2+3n+2}{2}\right)+1
\end{aligned}$$

Cette dernière expression est 1 de plus que trois fois le deuxième nombre.

c) *Solution 1*

Selon l'énoncé, les 3^e, 6^e et 8^e nombres triangulaires forment une suite arithmétique, de même que les 8^e, 12^e et 15^e nombres triangulaires. Il semble y avoir une régularité par rapport aux numéros de position : $3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+2} 8$ et $8 \xrightarrow{+4} 12 \xrightarrow{+3} 15$.

La régularité se poursuit-elle? Si on fait $15 \xrightarrow{+5} 20 \xrightarrow{+4} 24$, est-ce que les 15^e, 20^e et 24^e nombres triangulaires forment une suite arithmétique?

Selon l'énoncé, le 15^e nombre triangulaire est 120 et selon la partie a), le 24^e nombre triangulaire est 300. On peut vérifier, à l'aide d'une calculatrice, que le 20^e nombre triangulaire est 210. La régularité semble bien se poursuivre. (On n'a encore pas démontré que la régularité est bien fondée.)

Si la régularité se poursuit, on a $24 \xrightarrow{+6} 30 \xrightarrow{+5} 35$, $35 \xrightarrow{+7} 42 \xrightarrow{+6} 48$ et $48 \xrightarrow{+8} 56 \xrightarrow{+7} 63$, c'est-à-dire que :

les 24^e, 30^e et 35^e nombres triangulaires forment une suite arithmétique;
les 35^e, 42^e et 48^e nombres triangulaires forment une suite arithmétique;
les 48^e, 56^e et 63^e nombres triangulaires forment une suite arithmétique.

On vérifie si le 48^e terme est supérieur à 2004 :

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+47+48 &= (1+48)+(2+47)+\ldots+(24+25) \\ &= 24\times 49 \\ &= 1176 \end{aligned}$$

Il est encore trop petit.

On continue la régularité : $63 \xrightarrow{+9} 72 \xrightarrow{+8} 80$ et $80 \xrightarrow{+10} 90 \xrightarrow{+9} 99$

On vérifie si le 80^e nombre triangulaire est supérieur à 2004 :

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+79+80 &= 40\times 81 \\ &= 3240 \end{aligned}$$

On vérifie si les 80^e, 90^e et 99^e nombres triangulaires forment une suite arithmétique :

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+89+90 &= 45\times 91 \\ &= 4095 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1+2+\ldots+98+99 &= (1+2+\ldots+99+100)-100 \\ &= 50\times 101-100 \\ &= 4950 \end{aligned}$$

Or, $4950-4095=855$ et $4095-3240=855$. Donc, les 80^e, 90^e et 99^e nombres triangulaires sont supérieurs à 2004 et ils forment une suite arithmétique.

Solution 2

Dans les deux exemples, la différence entre le numéro de position des deux premiers nombres est un de plus que la différence entre le numéro de position des deuxième et troisième nombres [$6-3=(8-6)+1$ et $(12-8)=(15-12)+1$].

On vérifie si cette régularité se poursuit :

On examine le *n*ième nombre triangulaire, le $(n+12)^e$ nombre triangulaire (c.-à-d. 12 termes plus loin) et le $(n+23)^e$ nombre triangulaire (c.-à-d. 11 termes plus loin). (On a choisi le nombre 12 au hasard. On aurait pu en choisir un plus grand ou un plus petit, quitte à recommencer.) On cherche une valeur de n pour laquelle les trois nombres triangulaires forment une suite arithmétique. On veut que :

$$\begin{aligned}
\left[1+2+\cdots+(n+12)\right]-\left[1+2+\cdots+n\right] &= \left[1+2+\cdots+(n+23)\right]-\left[1+2+\cdots+(n+12)\right]\\
(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+12) &= (n+13)+(n+14)+\cdots+(n+23)\\
12n+(1+2+\cdots+12) &= 11n+(13+14+\cdots+23)\\
n &= (13+14+\cdots+23)-(1+2+\cdots+11)-12\\
n &= 11(12)-12\\
n &= 120
\end{aligned}$$

Donc, les 120^{e}, 132^{e} et 143^{e} nombres triangulaires forment une suite arithmétique.
On calcule la valeur de ces nombres, selon l'approche de la partie a), pour vérifier qu'ils satisfont aux conditions :

$$\begin{aligned}
&1+2+\cdots+119+120 \\
&= 60\times 121 \\
&= 7260
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&1+2+\cdots+131+132 \\
&= 66\times 133 \\
&= 8778
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&1+2+\cdots+142+143 \\
&= (1+2+\cdots+143+144)-144 \\
&= 72\times 145-144 \\
&= 10\,296
\end{aligned}$$

On a $8778-7260=1518$ et $10\,296-8778=1518$. Les 120^{e}, 132^{e} et 143^{e} nombres triangulaires forment bien une suite arithmétique et chacun est supérieur à 2004.

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre
en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Fryer 2003

(9e – année)

(Secondaire III au Québec)

pour les prix du
The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. a) *Solution 1*

La moyenne des notes est égale à la somme des notes divisée par le nombre de notes.
On sait qu'il y a 32 élèves. On peut aussi le vérifier en examinant le diagramme.
On a donc $\dfrac{1(10)+2(30)+2(40)+1(50)+4(60)+6(70)+9(80)+4(90)+3(100)}{32}$,
c'est-à-dire $\dfrac{2240}{32}$, ou 70.
La moyenne des notes est égale à 70.

Solution 2

La moyenne des notes est égale à la somme des notes divisée par le nombre de notes.
Voici chaque note selon le diagramme : 10, 30, 30, 40, 40, 50, 60, 60, 60, 60, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 90, 90, 90, 90, 100, 100, 100
On additionne ces notes et on divise la somme par 32 pour obtenir une moyenne de 70.

b) Puisque Paul a une moyenne de 86 après 6 épreuves, il a un total de 6×86, ou 516 points. S'il obtient une note de 100 après la prochaine épreuve, il aura un total de $516 + 100$, ou 616 points. Sa nouvelle moyenne sera $\dfrac{616}{7}$, ou 88.

c) *Solution 1*

Si Marie obtient une note de 100, elle aura une moyenne de 90.
Si elle obtient une note de 70, elle aura une moyenne de 87.
Une différence de 30 points a donc pour effet de baisser sa moyenne de 3 points.
Puisque la moyenne est égale à la somme des points divisée par le nombre d'épreuves et qu'une différence de 30 points fait baisser sa moyenne de 3 points, elle a écrit $\dfrac{30}{3}$, ou 10 épreuves.

Solution 2

Supposons que Marie a écrit n épreuves, y compris la prochaine épreuve.
Puisqu'elle aura une moyenne de 90 points si elle obtient une note de 100 lors de la prochaine épreuve, elle aura un total de $90n$ points après n épreuves. Elle a donc un total de $90n - 100$ points avant d'écrire cette $n^{\text{ième}}$ épreuve.
Puisqu'elle aura une moyenne de 87 points si elle obtient une note de 70 lors de la prochaine épreuve, elle aura un total de $87n$ points après n épreuves. Elle a donc un total de $87n - 70$ points avant d'écrire cette $n^{\text{ième}}$ épreuve.
Or le total de points, avant cette dernière épreuve est le même dans les deux cas. Donc :

$$\begin{aligned} 87n - 70 &= 90n - 100 \\ 30 &= 3n \\ n &= 10 \end{aligned}$$

Marie aura écrit 10 épreuves.

Prolongement
On utilise d'abord les renseignements donnés pour tirer des conclusions au sujet des notes des 32 élèves.
Puisque la médiane est égale à 80, si on plaçait toutes les notes en ordre, il y aurait autant de notes supérieures ou égales à 80 qu'il y en aurait qui sont inférieures ou égales à 80.
Puisque la note la plus élevée est supérieure ou égale à 80 et que l'étendue des notes est égale à 40, il ne peut y avoir de notes inférieures à 40.
Puisque la moyenne de la classe est égale à 58, le total des notes est égal à 32×58, ou 1856.
Que peut-on conclure?
Puisqu'au moins 16 élèves ont une note supérieure ou égale à 80, ces élèves contribuent un total d'au moins 1280 notes.
Puisque les 16 autres élèves ont une note supérieure ou égale à 40, ces élèves contribuent un total d'au moins 640 notes.
Puisque $1280 + 640 = 1920$, les 32 élèves ont contribué un total de 1920 notes. Ceci contredit le total de 1856 notes obtenu précédemment.
L'enseignante a donc commis une erreur.

(Il y a plusieurs façons de s'y prendre. Par exemple, on sait que 16 élèves ont contribué au moins 1280 notes et qu'il y a un total de 1865 notes. Il reste donc un total de $1856 - 1280$, ou 576 notes qui ont été obtenues par les 16 autres élèves. Ces derniers ont donc une moyenne de $576 \div 16$, ou environ 34. Donc au moins un de ces élèves a une note inférieure ou égale à 34. Puisque $80 - 34 > 40$, ceci contredit le résultat selon lequel l'étendue des notes est égale à 40.)

2. a) *Solution 1*
Xavier annonce le numéro 4. Yvonne peut annoncer n'importe quel numéro de 5 à 14, puisque son numéro doit être de 1 à 10 de plus que le numéro précédent.
Si Yvonne annonce un numéro de 5 à 14, Xavier peut annoncer le numéro 15 qui sera de 1 à 10 de plus que n'importe quel numéro annoncé par Yvonne.
Xavier peut donc gagner à son deuxième tour, peu importe le numéro annoncé par Yvonne. Il a donc une stratégie gagnante en annonçant d'abord le numéro 4, puis le numéro 15.

Solution 2
Xavier annonce le numéro 4. Yvonne peut annoncer n'importe quel numéro de la forme $4 + n$, où n est un entier de 1 à 10.
À son deuxième tour, Xavier peut annoncer le numéro 15, pourvu que la différence entre 15 et $4 + n$ soit au moins 1 et pas plus que 10. Or $15 - (4 + n) = 11 - n$. Puisque n est un nombre de 1 à 10, $11 - n$ est aussi un nombre de 1 à 10. Donc Xavier peut annoncer le numéro 15.
Xavier a donc une stratégie gagnante en annonçant d'abord le numéro 4, puis le numéro 15.

b) Dans la partie a), Xavier a annoncé le numéro 4, ce qui lui a permis d'annoncer le numéro 15, soit 11 de plus, à son deuxième tour.
En procédant à rebours, pour annoncer le numéro 50 au dernier tour, il devra annoncer le numéro 39 à l'avant-dernier tour.
(En annonçant le 39, Yvonne peut annoncer n'importe quel nombre de 40 à 49, ce qui permet à Xavier d'annoncer le 50 au dernier tour, ce numéro étant de 1 à 10 de plus que le numéro d'Yvonne.)
De la même manière, pour assurer le choix du numéro 39, il devrait annoncer le numéro 28 au tour précédent, pour la même raison.
Pour assurer le choix du numéro 28, il devrait annoncer le numéro 17 au tour précédent.
Pour assurer le choix du numéro 17, il devrait annoncer le numéro 6 au tour précédent. Ce numéro sera le premier qu'il annoncera.
Pour résumer, Xavier devrait annoncer le 6 au 1er tour, le 17 au 2^{e} tour, le 28 au 3^{e} tour, le 39 au 4^{e} tour et le 50 au 5^{e} tour.
À chaque tour, il choisit le numéro qui est 11 de plus que son numéro précédent. Il peut toujours le faire, car si Yvonne annonce un numéro qui est 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 de plus que le dernier numéro, Xavier peut choisir un numéro correspondant qui est 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 ou 1 de plus que celui d'Yvonne, pour un total de 11 à chaque fois.

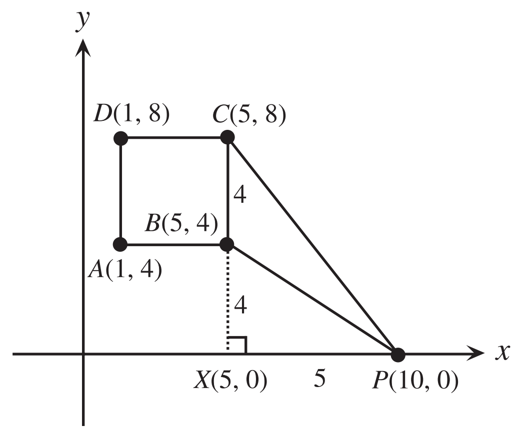
Prolongement
Dans la partie b), on a vu que Xavier pouvait toujours atteindre le nombre-cible s'il annonçait un nombre qui est 11 de plus que le nombre annoncé à son tour précédent.
Examinons divers nombres-cibles.
Si le nombre-cible est un nombre de 1 à 9, Xavier peut gagner au premier tour en annonçant ce nombre.
Selon l'analyse de la partie b), si le nombre-cible est 11 de plus qu'un de ces nombres, Xavier peut gagner au deuxième tour. Xavier peut donc gagner si le nombre-cible est un nombre de 12 à 20.
Qu'en est-il des numéros 10 et 11? Dans chaque cas, Yvonne peut gagner si le nombre-cible est 10 ou 11 en annonçant le numéro 11 à son premier tour. Elle peut le faire car ce nombre est de 1 à 10 de plus que n'importe quel nombre de 1 à 9 choisi par Xavier au premier tour.
Yvonne peut aussi gagner si le nombre-cible est 11 de plus, soit 21 ou 22, 32 ou 33, ainsi de suite.
Xavier et Yvonne peuvent répéter leur stratégie aussi souvent qu'il le faut. Donc Xavier peut gagner si le nombre-cible est un nombre de 1 à 9 ou un nombre de 1 à 9 plus un multiple de 11. Yvonne peut gagner si le nombre-cible est un multiple de 11 ou 1 de moins qu'un multiple de 11.

3. a) *Solution 1*

Puisque $ABCD$ est un carré et que le côté AD a une longueur de 4, chaque côté a une longueur de 4. Le points B et C ont donc pour coordonnées respectives $(5,4)$ et $(5,8)$. (Puisque AD est parallèle à l'axe des ordonnées, AB est donc parallèle à l'axe des abscisses.)

On considère BC comme base du triangle PCB. Elle a une longueur de 4. La hauteur correspondante mesure 5 unités. (On peut le voir en prolongeant le segment CB jusqu'au point X sur l'axe des abscisses. X a pour coordonnées $(5,0)$ et PX, de longueur 5, est la hauteur qui correspond à la base CB.)

L'aire du triangle PCB est donc égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(5)$, ou 10 unités carrées.



Solution 2

Puisque $ABCD$ est un carré et que le côté AD a une longueur de 4, chaque côté a une longueur de 4. Le points B et C ont donc pour coordonnées respectives $(5,4)$ et $(5,8)$. (Puisque AD est parallèle à l'axe des ordonnées, AB est donc parallèle à l'axe des abscisses.)

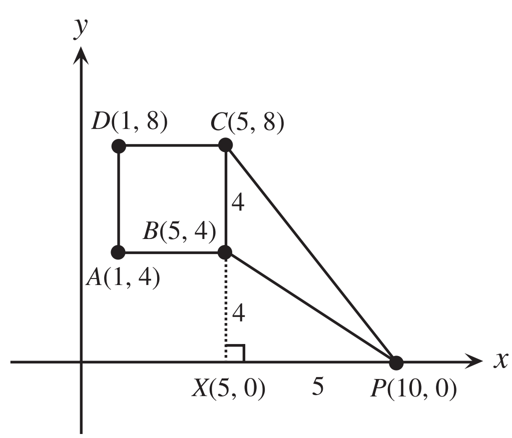
On prolonge le segment CB jusqu'au point X sur l'axe des abscisses. X a pour coordonnées $(5,0)$.

L'aire du triangle PCB est égale à l'aire du triangle PCX moins celle du triangle PBX.

La base PX du triangle PCB a une longueur de 4 et sa hauteur CX mesure 8 unités.

De même, le triangle PBX a une base PX de 5 unités et une hauteur BX de 4 unités.

L'aire du triangle PCB est donc égale à $\frac{1}{2}(4)(10)-\frac{1}{2}(4)(5)$, ou 10 unités carrées.

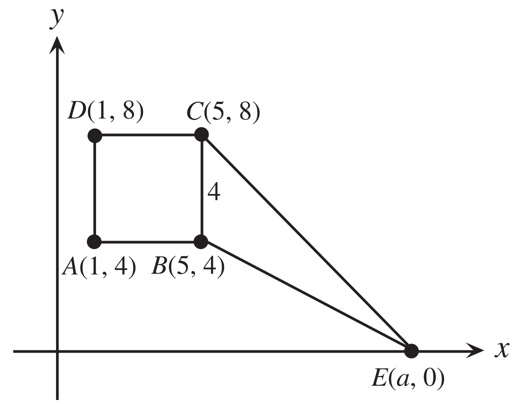


b) *Solution 1*

Puisque le triangle CBE est situé complètement à l'extérieur du carré $ABCD$, le point E doit être situé à la droite du carré et a doit être supérieur ou égal à 5.

On a besoin de l'aire du carré. Puisque les côtés mesurent 4 unités, l'aire est égale à 16.

On considère BC comme base du triangle CBE. Elle a une longueur de 4. La hauteur correspondante mesure $a-5$, puisque E a pour coordonnées $(a,0)$ et que le segment BC est sur la droite d'équation $x=5$.
Puisque l'aire du triangle CBE est égale à l'aire du carré, on a :

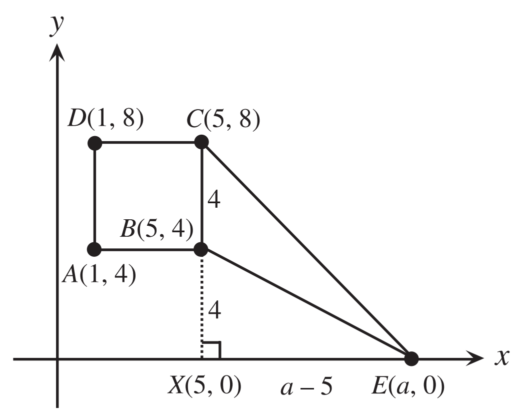


$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(4)(a-5) &= 16 \\ 2a-10 &= 16 \\ 2a &= 26 \\ a &= 13 \end{aligned}$$

(On peut facilement vérifier que si $a=13$, le triangle a une base de 4 et une hauteur de 8, ce qui lui donne une aire de 16.)

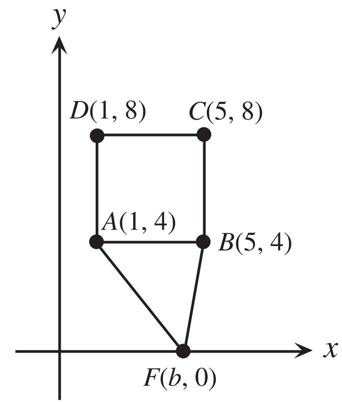
Solution 2
Puisque le triangle CBE est situé complètement à l'extérieur du carré $ABCD$, le point E doit être situé à la droite du carré et a doit être supérieur ou égal à 5.
On a besoin de l'aire du carré. Puisque les côtés mesurent 4 unités, l'aire est égale à 16.

On prolonge le côté CB jusqu'au point X sur l'axe des abscisses. Le point X a pour coordonnées $(5,0)$.
L'aire du triangle CBE est égale à l'aire du triangle CXE moins celle du triangle BXE.
La base EX du triangle CXE mesure $a-5$ et la hauteur CX mesure 8 unités.
La base EX du triangle BXE mesure $a-5$ et la hauteur BX mesure 4 unités.
Puisque l'aire du triangle CBE est égale à l'aire du carré, on a :

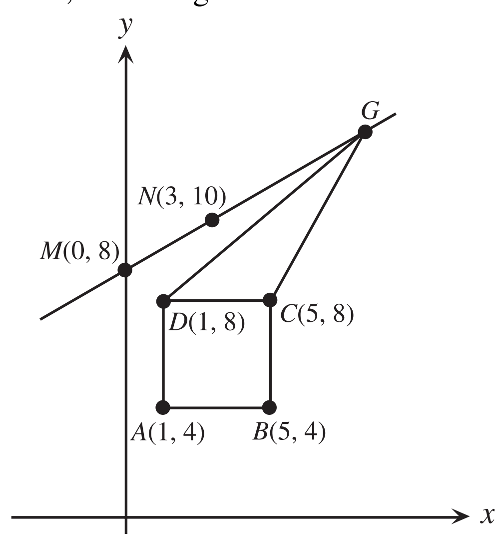


$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(a-5)(8)-\tfrac{1}{2}(a-5)(4) &= 16 \\ 4(a-5)-2(a-5) &= 16 \\ a-5 &= 8 \\ a &= 13 \end{aligned}$$

c) Soit $(b, 0)$ les coordonnées d'un point F.
Le triangle ABF a une base AB de longueur 4.
La hauteur correspondante du triangle ABF est égale à 4, peu importe la position de F sur l'axe des abscisses.
L'aire du triangle ABF est donc toujours égale à $\frac{1}{2}bh$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8. Elle n'est pas égale à l'aire du carré.
Il n'existe donc aucun point F, sur l'axe des abscisses pour lequel l'aire du triangle est égale à l'aire du carré.



Prolongement
Puisque le triangle DCG est situé complètement à l'extérieur du carré, G doit être situé au-dessus de la droite qui passe par D et C. L'ordonnée de G est donc supérieure ou égale à 8.
Puisque l'aire du triangle DCG est égale à l'aire du carré, elle est égale à 16.
La base DC du triangle DCG a une longueur de 4. Soit h la hauteur correspondante. On a donc $\frac{1}{2}bh = 16$, ou $\frac{1}{2}(4)h = 16$, d'où $h = 8$.
Puisque la hauteur du du triangle DCG est égale à 8 et que les points C et D ont une ordonnée de 8, l'ordonnée du point G est égale à 16.
On cherche donc, sur la droite qui passe par $M(0, 8)$ et $N(3, 10)$, le point dont l'ordonnée est 16.
Pour se déplacer de M à N, il faut se déplacer de 3 unités vers la droite et de 2 unités vers le haut.
Pour se déplacer de N à G, il faut se déplacer de 6 unités vers le haut. Il faut donc se déplacer de 9 unités vers la droite.
Les coordonnées de G sont donc $G(12, 16)$.



4. a) Il est sans doute plus efficace de calculer les totaux. Voici les totaux, en ordre croissant.

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111

Il y a 15 totaux. Leur somme, qui est égale à la somme-puissance, est 8888.

b) *Solution 1*
On considère d'abord les totaux distincts obtenus en additionnant un nombre ou plus de l'ensemble $\{1, 10, 100, 1000\}$. Dans la partie a), on a vu que la somme de ces totaux est égale à 8888.

Qu'arrive-t-il si on considère les totaux distincts obtenus en additionnant un nombre ou plus de l'ensemble $\{1,10,100,1000,10\,000\}$? On obtient d'abord les 15 totaux de la partie a). On obtient 15 totaux différents lorsqu'on additionne $10\,000$ à chacun des totaux de la partie a). De plus, le terme $10\,000$ est un total. On a donc $15+15+1$, ou 31 totaux en tout. Leur somme est égale à $8888+\left[8888+15(10\,000)\right]+10\,000$, c'est-à-dire à $2(8888)+160\,000$, ou $177\,776$.

Qu'arrive-t-il si on considère les totaux distincts obtenus en additionnant un nombre ou plus de l'ensemble $\{1,10,100,1000,10\,000,100\,000\}$? On obtient d'abord les 31 totaux du paragraphe précédent. On obtient 31 totaux différents lorsqu'on additionne $100\,000$ à chacun des totaux du paragraphe précédent. Le nombre $100\,000$ est aussi un total différent. On a donc $31+31+1$, ou 63 totaux en tout. Leur somme est égale à :

$$\begin{aligned}177\,776+\left[177\,776+31(100\,000)\right]+100\,000 &= 2(177\,776)+3\,200\,000\\ &= 3\,555\,552\end{aligned}$$

Qu'arrive-t-il si on ajoute le nombre $1\,000\,000$ à l'ensemble? Par un argument semblable, on obtient $63+63+1$ ou 127 totaux en tout. Leur somme est égale à :

$$\begin{aligned}3\,555\,552+\left[3\,555\,552+63(1\,000\,000)\right]+1\,000\,000 &= 2(3\,555\,552)+64\,000\,000\\ &= 71111104\end{aligned}$$

La somme-puissance est égale à 71111104.

Solution 2

Il y a sept nombres dans l'ensemble. Pour obtenir un total, on doit considérer chaque nombre et choisir de le prendre ou de le refuser dans l'addition.

Il y a 2 choix pour le 1, soit le prendre ou le refuser. Pour chacun de ces choix, il y a 2 choix pour le 10, soit le prendre ou le refuser. De même, pour chacun de ces choix, il y a 2 choix pour le 100, et ainsi de suite. En tout, il y a $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$, c'est-à-dire 2^7, ou 128 choix. Ceci inclut le choix de ne prendre aucun élément. Chacun de ces choix correspond à un total, y compris le total nul qui correspond au choix d'aucun élément.

Combien de ces choix comprennent l'élément 1? Si le 1 est choisi, il y a 2 choix pour le 10, 2 choix pour le 100 et ainsi de suite, pour un total de 2^6, ou 64 choix. Le 1 est donc choisi pour 64 totaux. Il contribue donc 64 à la somme-puissance.
Combien des 128 choix comprennent l'élément 10? On utilise le même argument pour démontrer que 64 choix comprennent l'élément 10. Le 10 contribue donc 64×10, ou 640 à la somme-puissance.
On utilise le même argument pour démontrer que chacun des 7 éléments de l'ensemble est choisi 64 fois.

La somme-puissance est donc égale à :

$$64(1+10+100+1000+10\,000+100\,000+1\,000\,000)$$
$$=64(1111111)$$
$$=71111104$$

Prolongement

On utilise les petits nombres pour chercher une régularité.

Avec les nombres 1, 2 et 3, on obtient les totaux suivants :

$$1,\ 2,\ 3,\ 1+3=4,\ 1+3=4,\ 2+3=5,\ 1+2+3=6$$

Avec les nombres 1, 2, 3 et 6, on obtient les totaux précédents, plus les totaux obtenus lorsqu'on ajoute 6 à chacun des totaux précédents. Les totaux sont donc les entiers de 1 à 12.

Si on inclut le nombre 12, on ajoute les totaux de 13 à 24. On a donc, comme totaux, les entiers de 1 à 24.

Si on inclut le nombre 24, les totaux sont les entiers de 1 à 48.

Si on inclut le nombre 48, les totaux sont les entiers de 1 à 96.

Si on inclut le nombre 96, les totaux sont les entiers de 1 à 192.

Il y a donc 192 totaux distincts.

(On peut vérifier que la somme des nombres de l'ensemble est égale à 192.)