Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2024

(11e année – Secondaire V)

le mercredi 28 février 2024

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 29 février 2024

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a $3\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\right)=3\cdot\frac{5}{3}-3\cdot\frac{1}{3}=5-1=4$.
Par ailleurs, $3\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\right)=3\cdot\frac{4}{3}=4$.

Réponse : (D)

2. On a $4x^2-3x^2=x^2$. Lorsque $x=2$, cette expression est égale à 4.
Par ailleurs, lorsque $x=2$, on a $4x^2-3x^2=4\cdot 2^2-3\cdot 2^2=16-12=4$.

Réponse : (C)

3. Le volume d'un cube $1\times 1\times 1$ est égal à 1.
Le volume d'un cube $2\times 2\times 2$ est égal à 8.
Donc, il faut 8 cubes $1\times 1\times 1$ pour former un cube $2\times 2\times 2$.

Réponse : (E)

4. Pour qu'il y ait un nombre égal de bonbons de chaque couleur, il doit y avoir au plus 3 bonbons rouges et au plus 3 bonbons jaunes (puisqu'il y a déjà 3 bonbons bleus au départ).
Donc, Shuxin a mangé au moins 7 bonbons rouges et au moins 4 bonbons jaunes.
Cela signifie que Shuxin a mangé au moins $7+4=11$ bonbons.
Remarquons que si Shuxin mange 7 bonbons rouges, 4 bonbons jaunes et 0 bonbon bleu, il y aura bien un nombre égal de bonbons de chaque couleur.

Réponse : (A)

5. Le carré $PQRS$ est formé de 16 petits carrés isométriques.
Parmi les 16 petits carrés, 2 sont entièrement ombrés et 8 sont à moitié ombrés.
Cela est équivalent à $2+8\cdot\frac{1}{2}=2+4=6$ petits carrés ombrés.
Donc, $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ du carré $PQRS$ est ombré.

Réponse : (E)

6. À l'aide d'une calculatrice, $\sqrt{15}\approx 3{,}87$ et $\sqrt{50}\approx 7{,}07$.
Il y a 4 entiers entre ces nombres réels, soit 4, 5, 6 et 7.
On aurait également pu remarquer que les entiers entre $\sqrt{15}$ et $\sqrt{50}$ correspondent aux valeurs de $\sqrt{n}$ telles que n est un carré parfait entre 15 et 50. Il y a 4 carrés parfaits entre 15 et 50, soit 16, 25, 36, 49.

Réponse : (B)

7. *Solution 1*
Lorsqu'une droite subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, son ordonnée à l'origine ne change pas (puisqu'elle se trouve sur l'axe de symétrie) et sa pente est multipliée par -1.
Donc, la nouvelle droite (son image) a une pente de -3 et une ordonnée à l'origine de 6. Cette droite a donc pour équation $y=-3x+6$.
On pose $y=0$, que l'on reporte dans l'équation de cette nouvelle droite pour obtenir son abscisse à l'origine : $0=-3x+6$ ou $3x=6$, d'où $x=2$.

Solution 2
On pose $y=0$, que l'on reporte dans l'équation de la droite initiale pour obtenir son abscisse à l'origine : $0=3x+6$ ou $3x=-6$, d'où $x=-2$.
Lorsqu'une droite subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, l'abscisse à l'origine de la nouvelle droite (son image) est le reflet de celle de la droite initiale dans l'axe des ordonnées. Donc, $x=2$.

Réponse : (A)

8. D'après les lois des exposants, $1000^{20} = (10^3)^{20} = 10^{60}$. Donc, $n = 60$.

Réponse : (B)

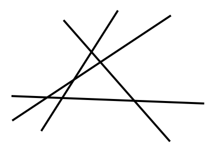
9. Étant donné que O est le centre du cercle, alors $OA = OB = OC$.
Cela signifie que les triangles AOB et COB sont isocèles avec $\angle ABO = \angle BAO = \angle BAC = 25°$.
Donc, $\angle AOB = 180° - \angle ABO - \angle BAO = 130°$.
Puisque l'angle AOC est un angle plat, alors $\angle BOC = 180° - \angle AOB = 180° - 130° = 50°$.

Réponse : (D)

10. Après que David s'est assis, il y a 4 chaises sur lesquelles Pedro peut s'asseoir, dont 2 sont adjacentes à la chaise sur laquelle David s'est assis.
Donc, la probabilité pour que Pedro soit assis à côté de David est égale à $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$.

Réponse : (C)

11. Chacune des 4 lignes peut couper chacune des 3 autres lignes au maximum une fois.
Quoique cela semble produire $4 \times 3 = 12$ points d'intersection, chaque point d'intersection est compté deux fois ; une fois pour chacune des deux lignes.
Donc, le nombre maximum de points d'intersection est égal à $\dfrac{4 \times 3}{2} = 6$.
Dans la figure ci-dessous, on voit qu'il est possible d'avoir 6 points d'intersection :



Réponse : (D)

12. Lorsqu'une liste de 5 nombres a, b, c, d, e est telle que $a+b+c = c+d+e$, alors il est également vrai que $a + b = d + e$.
Avec la liste donnée de 5 nombres, il est probablement plus facile de trouver deux paires de nombres, sans nombres en commun et ayant la même somme, que de trouver deux triplets partageant un nombre commun et ayant la même somme.
En procédant par tâtonnement, on constate que $6 + 21 = 10 + 17$. Donc, la liste 6, 21, 5, 10, 17 a la propriété donnée ; 5 est donc le nombre qui se trouve au milieu.
(Remarquons que ces deux paires sont les seules possibles, après avoir permis l'échange des nombres au sein de chaque paire et/ou des paires elles-mêmes.)

Réponse : (A)

13. On développe l'expression pour obtenir $(x+m)(x+n) = x^2+nx+mx+mn = x^2+(m+n)x+mn$.
Le terme constant de cette expression quadratique est mn. Donc, $mn = -12$.
Puisque m et n sont des entiers, tous deux sont des diviseurs de -12 et donc de 12.
Parmi les choix de réponse, seul 5 n'est pas un diviseur de 12. Donc, m ne peut égaler 5.
On peut vérifier que chacun des quatre autres choix est une valeur possible de m.

Réponse : (E)

14. Remarquons d'abord que le triangle ACB a un angle droit et un angle de 60°. Donc, le triangle ACB est un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Puisque $AB = \sqrt{3}$, alors d'après les rapports connus des longueurs des côtés, $BC = 1$ et $AC = 2$.
Ensuite, on remarque que le triangle ACE a deux angles de 45°. Donc, le triangle ACE est un triangle rectangle isocèle.

Cela signifie que $CE = AC = 2$ et que $\angle ACE = 90^\circ$.
De plus, $AE = \sqrt{2}AC = 2\sqrt{2}$.
En outre, puisque l'angle BCD est un angle plat, alors

$$\angle ECD = 180^\circ - \angle ACB - \angle ACE = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

Puisque le triangle CED a un angle droit et un angle de 30°, alors le triangle CED est également un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Puisque $CE = 2$, alors d'après les rapports connus des longueurs des côtés, $DE = 1$ et $CD = \sqrt{3}$.
Donc, le périmètre de $ABDE$ est égal à

$$AB + BC + CD + DE + AE = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

Réponse : (E)

15. Remarquons d'abord que $197 = 8 \cdot 24 + 5$.
Donc, 197 heures est équivalent à 8 jours et 5 heures.
Puisque la grand-mère d'Anila suit la même routine chaque jour, alors dans 197 heures et 5 minutes, elle fera la même chose que dans 5 heures et 5 minutes, soit du yoga.

Réponse : (C)

16. Parmi les produits des rangées et des colonnes, seuls 135 et 160 sont divisibles par 5. Cela signifie que 5 était l'entier dans la case située à la 2^{e} rangée, 3^{e} colonne.
Parmi les produits des rangées et des colonnes, seuls 21 et 56 sont divisibles par 7. Cela signifie que 7 était l'entier dans la case située à la 1^{re} rangée, 1^{re} colonne.
Parmi les produits des rangées et des colonnes, seuls 108 et 135 sont divisibles par 9. Cela signifie que 9 était l'entier dans la case située à la 2^{e} rangée, 2^{e} colonne.
Jusque-là, on a la grille suivante :

7			56
	9	5	135
			48
21	108	160	

Le produit de la 2^{e} rangée est 135. Cela signifie que l'entier manquant est $\frac{135}{5\cdot 9} = 3$.
Le produit de la 1^{re} colonne est 21. Cela signifie que l'entier manquant est $\frac{21}{7\cdot 3} = 1$.
La 3^{e} rangée, dont le produit est 48, comprend donc 1 et deux autres entiers entre 1 et 9. La seule paire de diviseurs complémentaires de 48 dont les valeurs sont inférieures à 10 est $48 = 6 \cdot 8$.
Puisque 8 n'est pas un diviseur de 108, alors N doit être 6.

Donc, voici la grille complétée :

7	2	4	56
3	9	5	135
1	6	8	48
21	108	160	

Réponse : (C)

17. Puisque $b + d > a + d$, alors $b > a$. Cela signifie que a n'a pas la plus grande valeur.
Puisque $c + e > b + e$, alors $c > b$. Cela signifie que b n'a pas la plus grande valeur.
Puisque $b + d = c$ et que b, c et d sont tous positifs, alors $d < c$. Cela signifie que d n'a pas la plus grande valeur.
Considérons l'équation $a + c = b + e$, ainsi que $a < b < c$.
On a $e = c + (a - b)$.
Puisque $a < b$, alors $a - b$ est négatif. Donc, $e < c$.
Cela signifie que c a la plus grande valeur.

Réponse : (C)

18. Puisque $3x + 2y = 6$, alors $(3x + 2y)^2 = 6^2$ ou $9x^2 + 12xy + 4y^2 = 36$.
Puisque $9x^2 + 4y^2 = 468$, alors

$$12xy = (9x^2 + 12xy + 4y^2) - (9x^2 + 4y^2) = 36 - 468 = -432$$

Donc, $xy = \frac{-432}{12} = -36$.
(Avec un peu plus de travail, on peut trouver les solutions du système d'équations, soit $(x, y) = (-4, 9)$ et $(x, y) = (6, -6)$.)

Réponse : (A)

19. Soit x, y et z les trois nombres obtenus lorsqu'on jette les trois dés.
Puisque chaque dé a six faces, alors il y a $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ résultats possibles.
De plus, la somme, S, des trois dés est au moins $3 \cdot 1 = 3$ et au plus $3 \cdot 6 = 18$.
Les résultats « $S > 5$ » et « $S \leq 5$ » sont complémentaires.
Donc, la probabilité de $S > 5$ est égale à 1 moins la probabilité de $S \leq 5$.
Il est plus simple de calculer directement la probabilité de $S \leq 5$ en comptant les combinaisons correspondantes.
Si $S = 3$, alors $x + y + z = 3$. Donc, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.
Si $S = 4$, alors $x + y + z = 4$. Donc, x, y et z sont 1, 1 et 2 dans un ordre quelconque. Donc, $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ ou $(1, 2, 1)$ ou $(1, 1, 2)$.
Si $S = 5$, alors $x + y + z = 5$. Donc, x, y et z sont 1, 1, 3, ou 1, 2, 2, dans un ordre quelconque. Il y a 3 arrangements dans chaque cas et donc 6 triplets en tout.
Donc, il y a $1 + 3 + 6 = 10$ triplets tels que $S \leq 5$. Donc, la probabilité pour que $S > 5$ est égale à $1 - \frac{10}{216} \approx 0{,}954$.
Parmi les choix de réponse, 0,95 est le choix le plus près.

Réponse : (B)

20. Soit r le rayon du cylindre et h la hauteur du cylindre.
Cela signifie que le volume du cylindre est égal à $\pi r^2 h$ et que le volume de la moitié du cylindre est égal à $\frac{1}{2}\pi r^2 h$.
De plus, le rayon du cône est égal à $\frac{1}{2}r$ et la hauteur du cône est égale à h.
Cela signifie que le volume du cône est égal à $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2 h$, soit $\frac{1}{12}\pi r^2 h$.
Lorsque le cône est divisé en deux parties par un plan horizontal situé à la moitié de sa hauteur, la partie supérieure du cône est un cône ayant les mêmes proportions, mais dont les dimensions sont la moitié de celles du grand cône.
Cela signifie que le volume de la partie supérieure est égal à $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ de celui du cône, soit $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12}\pi r^2 h$ ou $\frac{1}{96}\pi r^2 h$.
Sous un autre angle, remarquons que la partie supérieure du cône a une hauteur de $\frac{1}{2}h$ et devrait avoir un rayon de $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}r$ (puisque le rayon diminue proportionnellement à la hauteur). Cela signifie que le volume de la partie supérieure du cône est égal à $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}r\right)^2 \cdot \frac{1}{2}h$, soit $\frac{1}{96}\pi r^2 h$.
D'après cela, le volume de la partie inférieure du cône est égal à $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{12}\pi r^2 h = \frac{7}{96}\pi r^2 h$.
Quand le cône est placé dans le cylindre et que ce dernier a de l'eau jusqu'à la moitié de sa hauteur, le volume de la moitié inférieure du cylindre est constitué de la partie inférieure du cône et de l'eau.
Donc, le volume d'eau correspond à la différence entre la moitié du volume du cylindre et le volume de la partie inférieure du cône, soit $\frac{1}{2}\pi r^2 h - \frac{7}{96}\pi r^2 h = \frac{48}{96}\pi r^2 h - \frac{7}{96}\pi r^2 h = \frac{41}{96}\pi r^2 h$.
Lorsque le cône est retiré, l'eau occupe alors un cylindre de rayon r et de volume $\frac{41}{96}\pi r^2 h$.
Soit d la profondeur de l'eau dans cette configuration. Donc, $\pi r^2 d = \frac{41}{96}\pi r^2 h$, d'où $d = \frac{41}{96}h$. Cela signifie que la profondeur de l'eau est $\frac{41}{96}$ de la hauteur du cylindre.

Réponse : (B)

21. Puisque la deuxième colonne contient le nombre 1, alors l'étape (ii) n'a jamais été appliquée sur la deuxième colonne, sinon chaque nombre dans cette colonne serait d'au moins 2.
Pour obtenir les 1, 3 et 2 dans la deuxième colonne, on doit donc avoir appliqué l'étape (i) 1 fois sur la rangée 1, 3 fois sur la rangée 2 et 2 fois sur la rangée 3.
On a donc :

1	1	1
3	3	3
2	2	2

Il n'est pas possible d'appliquer l'étape (i) davantage, au risque de voir augmenter les nombres dans la colonne 2. Donc, $a = 1 + 3 + 2 = 6$.
Pour obtenir le tableau final à partir du tableau actuel en appliquant uniquement l'étape (ii), il faut augmenter de 6 chaque nombre dans la colonne 1 (ce qui signifie appliquer l'étape (ii) 3 fois) et augmenter de 4 chaque nombre dans la colonne 3 (ce qui signifie appliquer l'étape (ii) 2 fois).
Donc, $b = 3 + 2 = 5$.
Donc, $a + b = 11$.

Réponse : 11

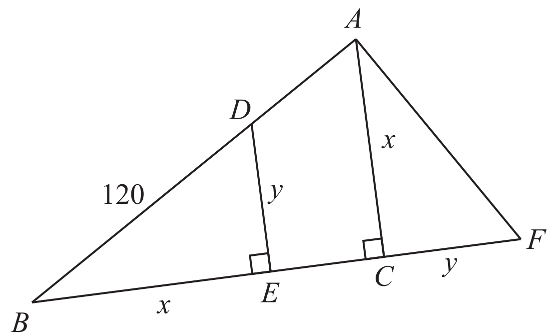
22. Remarquons que

$$ac + bd - ad - bc = ac - ad - bc + bd = a(c - d) - b(c - d) = (a - b)(c - d)$$

Puisque a, b, c et d proviennent tous de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, alors $a - b \leq 9$, car la différence maximale entre deux nombres quelconques de cet ensemble est 9.
De même, $c - d \leq 9$.
Donc, si $a - b = 9$, alors on doit avoir $a = 10$ et $b = 1$.
Dans ce cas, c et d proviennent de l'ensemble $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Donc, $c - d \leq 7$.
Donc, si $a - b = 9$, on a $(a - b)(c - d) \leq 9 \cdot 7 = 63$.
Si $a - b = 8$, alors soit $a = 9$ et $b = 1$, soit $a = 10$ et $b = 2$.
Dans les deux cas, $c - d = 9$ n'est pas possible, mais $c - d = 8$ l'est.
Donc, si $a - b = 8$, on a $(a - b)(c - d) \leq 8 \cdot 8 = 64$.
Enfin, si $a - b \leq 7$, la restriction initiale que $c - d \leq 9$ signifie que $(a - b)(c - d) \leq 7 \cdot 9 = 63$.
Donc, la plus grande valeur possible de $ac + bd - ad - bc$ est 64. Cela se produit, par exemple, lorsque $a = 9$, $b = 1$, $c = 10$ et $d = 2$.

Réponse : 64

23. *Solution 1*
Soit $BE = AC = x$ et $DE = y$.
On prolonge le segment BC jusqu'au point F de manière que $BC = DE = y$.

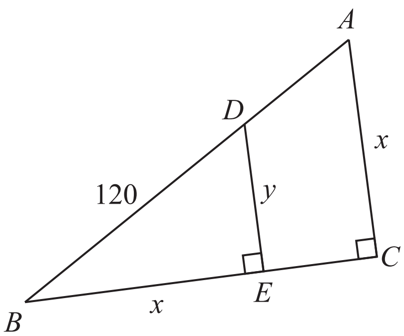


Puisque $BC + DE = 288$, alors $BF = BC + CF = BC + DE = 288$.
De plus, les triangles BED et ACF sont isométriques (côté-angle-côté).
Donc,

$$\angle BAF = \angle BAC + \angle ACF = \angle BDE + \angle DBE = 90^\circ$$

puisque DE et AC sont parallèles.
Ensuite, les triangles BED et BAF sont semblables car ils sont tous deux rectangles et partagent un angle en B.
Donc, $\dfrac{DE}{BD} = \dfrac{FA}{BF}$, soit $\dfrac{DE}{120} = \dfrac{120}{288}$, d'où $DE = \dfrac{120 \cdot 120}{288} = 50$.

Solution 2
Soit $BE = AC = x$ et $DE = y$.
Puisque $DE + BC = 288$, alors $BC = 288 - y$.



Remarquons que les triangles BED et BCA sont semblables car ils sont tous deux rectangles et partagent un angle en B.
Donc, $\dfrac{BE}{DE} = \dfrac{BC}{AC}$, soit $\dfrac{x}{y} = \dfrac{288 - y}{x}$.
On a donc $x^2 = y(288 - y)$, d'où $x^2 = 288y - y^2$ ou $x^2 + y^2 = 288y$.
De plus, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle BED, on a $x^2 + y^2 = 120^2$.
Puisque $x^2 + y^2 = 288y$ et $x^2 + y^2 = 120^2$, alors $288y = 120^2$, d'où $2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot y = 120 \cdot 120$ ou $2y = 10 \cdot 10$, soit $y = 50$.
Donc, $DE = 50$.

Réponse : 50

24. Dans cette solution, on utilise le principe suivant : si N est un entier strictement positif avec $N > 1$ et que sa factorisation première est $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$ ($p_1, p_2, \ldots, p_m$ étant des nombres premiers distincts et $a_1, a_2, \ldots, a_m$ étant des entiers strictement positifs), alors N admet $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_m)$ diviseurs positifs, y compris 1 et N.
On sait que N est un multiple positif de 2024.
On écrit l'entier 2024 en factorisation première : $2024 = 8 \cdot 253 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$.
Cela signifie que N a au moins 3 facteurs premiers (soit 2, 11 et 23) et qu'au moins l'un de ces facteurs premiers a un exposant d'au moins 3.
Supposons que N admette D diviseurs positifs. On sait que $100 < D < 110$.
Puisque $D = (1+a_1)(1+a_2) \cdots (1+a_m)$ et que N a au moins 3 facteurs premiers, alors D est un entier strictement positif que l'on peut exprimer sous la forme d'un produit d'au moins 3 entiers strictement positifs, chacun étant supérieur à 2.
D ne peut égaler 101, 103, 107 ou 109, puisque ces nombres sont premiers et, par conséquent, ne peuvent pas être exprimés sous la forme d'un produit de trois entiers, chacun étant supérieur ou égal à 2.
De plus, D ne peut égaler 106 car $106 = 2 \cdot 53$ (2 et 53 sont tous deux des nombres premiers). Cela signifie que 106 ne peut pas être exprimé sous la forme d'un produit de trois entiers, chacun étant supérieur à 1.
Les valeurs possibles restantes de D sont 102, 104, 105, 108.
Remarquons que $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$, que $104 = 2^3 \cdot 13$, que $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ et que $108 = 2^2 \cdot 3^3$.

<u>1^er cas : $D = 102$</u>
Puisque 2, 11 et 23 font partie des facteurs premiers de N, alors la factorisation première de N comprend donc des termes de la forme 2^a, 11^b et 23^c, a, b et c étant des entiers strictement positifs avec $a \geq 3$.
Si la factorisation première de N comprenait également p^e, alors D serait divisible par

$(1+a)(1+b)(1+c)(1+e)$. (D pourrait avoir un plus grand nombre de facteurs si N avait plus de facteurs premiers.)
Puisque $D = 102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$ a seulement 3 facteurs premiers, on ne peut l'exprimer sous la forme d'un produit de 4 entiers, chacun étant supérieur à 1.
Donc, N ne peut avoir un quatrième facteur premier.
Cela signifie que $N = 2^a 11^b 23^c$, d'où $D = (1+a)(1+b)(1+c) = 2 \cdot 3 \cdot 17$.
Cela signifie que les valeurs de $1+a$, $1+b$ et $1+c$ sont 2, 3 et 17, dans un ordre quelconque, et donc que celles de a, b et c sont 1, 2 et 16, dans un ordre quelconque.
Pour minimiser la valeur de D, l'exposant le plus élevé est associé au plus petit facteur premier, le deuxième plus grand exposant au deuxième plus petit facteur premier et ainsi de suite. (Voyez-vous pourquoi cela minimise la valeur de N ?)
Donc, dans ce cas, la plus petite valeur possible de N est $N = 2^{16} 11^2 23^1 = 182\,386\,688$.

<u>2e cas : $D = 105$</u>
En utilisant un argument semblable, on détermine que $N = 2^a 11^b 23^c$. Cela signifie que les valeurs de $1+a$, $1+b$ et $1+c$ sont 3, 5 et 7, dans un ordre quelconque, et donc que celles de a, b et c sont 2, 4 et 6, dans un ordre quelconque.
Donc, dans ce cas, la plus petite valeur possible de N est $N = 2^6 11^4 23^2 = 495\,685\,696$.

<u>3e cas : $D = 104$</u>
Puisque $D = 2^3 \cdot 13$ comprend 4 facteurs premiers, alors N ne peut avoir plus de 4 facteurs premiers. (Si N avait 5 facteurs premiers ou plus, alors le produit égal à D comprendrait au moins 5 entiers, chacun étant supérieur ou égal à 2.)
Donc, soit $N = 2^a 11^b 23^c$ et $D = (1+a)(1+b)(1+c)$, soit $N = 2^a 11^b 23^c p^e$, p étant un facteur premier tel que $p \neq 2, 11, 23$ et $D = (1+a)(1+b)(1+c)(1+e)$.
Cela signifie que $(1+a)(1+b)(1+c) = 2^3 \cdot 13$ ou $(1+a)(1+b)(1+c)(1+e) = 2^3 \cdot 13$.
Dans le cas où N a trois facteurs premiers, we remarque que $104 = 26 \cdot 2 \cdot 2 = 13 \cdot 4 \cdot 2$ sont les deux seules manières d'exprimer 104 sous la forme d'un produit de 3 entiers, chacun étant supérieur ou égal à 2.
Donc, les valeurs minimales correspondantes de N sont $N = 2^{25} \cdot 11 \cdot 23 = 8\,489\,271\,296$ et $N = 2^{12} \cdot 11^3 \cdot 23 = 125\,390\,848$.
Dans le cas où N a quatre facteurs premiers, alors $(1+a)(1+b)(1+c)(1+e) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$ signifie que a, b, c et e sont 1, 1, 1 et 12, dans un ordre quelconque.
Cela signifie à son tour que la plus petite valeur correspondante possible de N est

$$N = 2^{12} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23 = 3\,108\,864$$

Remarquons que p^e est devenu 3^1 afin de minimiser à la fois p (puisque $p > 2$) et son exposant.

<u>4e cas : $D = 108$</u>
Puisque $D = 2^2 \cdot 3^3$ comprend 5 facteurs premiers, alors N ne peut avoir plus de 5 facteurs premiers.
Si N avait 5 facteurs premiers, alors il faudrait que l'on utilise la factorisation $D = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Cependant, cela n'est pas possible, car 2^a doit avoir $a \geq 3$, ce qui signifie que l'un des cinq facteurs de D devrait être au moins égal à 4.
Si N a 4 facteurs premiers, alors D doit être séparé en $9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ ou en $6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$ ou en $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. (Puisque deux des facteurs premiers doivent être combinés, alors soit deux 2, soit deux 3, ou un 2 et un 3 sont combinés.)
On a donc les valeurs minimales de $N = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 = 582\,912$ et $N = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 23 = 801\,504$ et $N = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 23^2 = 4\,408\,648$.
Si N a 3 facteurs premiers, alors on doit utiliser l'une des factorisations suivantes : $D = 27 \cdot 2 \cdot 2$

ou $D = 18 \cdot 3 \cdot 2$ ou $D = 12 \cdot 3 \cdot 3$ ou $D = 9 \cdot 4 \cdot 3$ ou $D = 6 \cdot 6 \cdot 3$.
Donc, les valeurs minimales correspondantes de N sont :

$$N = 2^{26} \cdot 11 \cdot 23 = 16\,978\,542\,592$$
$$N = 2^{17} \cdot 11^2 \cdot 23 = 364\,773\,376$$
$$N = 2^{11} \cdot 11^2 \cdot 23^2 = 131\,090\,432$$
$$N = 2^{8} \cdot 11^3 \cdot 23^2 = 180\,249\,344$$
$$N = 2^{5} \cdot 11^5 \cdot 23^2 = 2\,726\,271\,328$$

Donc, dans les 4 cas, la valeur minimale possible de N est 582 912.
Les chiffres de 582 912 ont une somme de $5 + 8 + 2 + 9 + 1 + 2 = 27$.

Réponse : 27

25. Soit $a_n = x$ et $a_{n-1} = y$, n étant un entier tel que $n \geq 2$.
On peut récrire l'équation $a_n + a_{n-1} = \frac{5}{2}\sqrt{a_n \cdot a_{n-1}}$ sous la forme $x + y = \frac{5}{2}\sqrt{xy}$.
Puisque $x > 0$ et $y > 0$, alors en élevant chaque membre au carré, on obtient l'équation équivalente $(x + y)^2 = \frac{25}{4}xy$.
On a donc les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= \tfrac{25}{4}xy \\ 4(x^2 + 2xy + y^2) &= 25xy \\ 4x^2 - 17xy + 4y^2 &= 0 \\ (4x - y)(x - 4y) &= 0\end{aligned}$$

d'où on a donc $4x = y$ ou $x = 4y$.

Revenons à la notation employée pour les suites. On sait désormais que $4a_n = a_{n-1}$ (c'est-à-dire que $a_n = \frac{1}{4}a_{n-1}$) ou que $a_n = 4a_{n-1}$.
Autrement dit, chaque terme de la suite peut être obtenu à partir du terme précédent soit en multipliant par 4, soit en divisant par 4.
On sait que $a_1 = 4$ et que $a_{11} = 1024$. Remarquons que $\dfrac{a_{11}}{a_1} = \dfrac{1024}{4} = 256 = 4^4$.
On peut considérer que l'on se déplace le long de la suite de a_1 à a_{11} en effectuant 10 « opérations », chacune d'entre elles étant soit une multiplication par 4, soit une division par 4.

S'il y a m opérations dans lesquelles on multiplie par 4 et $10 - m$ opérations dans lesquelles on divise par 4, alors $\dfrac{4^m}{4^{10-m}} = 4^4$ ou $4^{2m-10} = 4^4$, d'où $2m - 10 = 4$. Donc, $m = 7$.
Autrement dit, la suite comporte 7 opérations de multiplication par 4 et 3 opérations de division par 4.
Ces opérations définissent entièrement la suite.
Le nombre de suites possibles, S, correspond au nombre de manières dont on peut arranger ces 10 opérations, ce qui équivaut à $\dbinom{10}{3}$.
(Pour celles et ceux qui ne sont pas familières ou familiers avec la notation combinatoire, il est également possible de compter les arrangements.)
Donc, $S = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$. Les deux chiffres les plus à droite de S sont 20.

Réponse : 20

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2023

(11^{e} année – Secondaire V)

le mercredi 22 février 2023

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 23 février 2023

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a $0{,}3 + 0{,}03 = 0{,}33$.

Réponse : (D)

2. Puisque $3 + x = 5$, alors $x = 2$.
Puisque $-3 + y = 5$, alors $y = 8$.
Donc, $x + y = 10$.
On aurait également pu additionner les 2 équations initiales pour obtenir $(3+x)+(-3+y) = 5+5$ ou $x + y = 10$.

Réponse : (E)

3. Lorsque $x = 2$, on obtient $2x^2 + 3x^2 = 5x^2 = 5 \cdot 2^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Réponse : (E)

4. Il y a 60 minutes dans une heure et 24 heures dans une journée.
Il y a donc $60 \cdot 24 = 1440$ minutes dans une journée.
Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine, le nombre de minutes dans une semaine est égal à $7 \cdot 1440 = 10\,080$.
Parmi les choix de réponse, le choix (C) 10 000 est celui qui est le plus près de 10 080.

Réponse : (C)

5. En utilisant la règle donnée, l'entier que l'on obtiendra comme sortie est $2 \times 0 + 2 \times 3 = 0 + 6 = 6$.

Réponse : (D)

6. Puisqu'il y a 3 portes et 2 choix de couleurs pour chaque porte, il y a $2^3 = 8$ façons de peindre les trois portes.
Soit « N » une porte peinte en noir et « B » une porte peinte en bleu. On peut peindre les trois portes des huit façons différentes suivantes : NNN, NNB, NBN, NBB, BNN, BNB, BBN et BBB.

Réponse : (A)

7. Comme les boîtes de jus sont vendues en paquets de 3, Daniel doit acheter au moins 6 paquets de jus pour les 17 joueurs. (Si Daniel achetait 5 paquets de jus, il aurait 15 boîtes de jus (ce qui n'est pas suffisant) tandis que s'il achetait 6 paquets de jus, il aurait 18 boîtes de jus.)
Comme les pommes sont vendues en sacs de 5, Daniel doit acheter au moins 4 sacs de pommes. (Remarquons que $3 \cdot 5 = 15$ n'est pas un nombre suffisant de pommes tandis que $4 \cdot 5 = 20$ l'est.)
Donc, le montant minimum que Daniel doit dépenser est égal à $6 \cdot 2{,}00\ \$ + 4 \cdot 4{,}00\ \$ = 28{,}00\ \$$.

Réponse : (B)

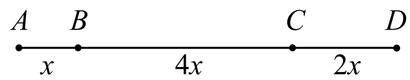
8. Puisque Bri roule à 15 km/h, elle terminera le trajet de 30 km en $\dfrac{30 \text{ km}}{15 \text{ km/h}} = 2$ h.
Puisqu'Ari roule à 20 km/h, il terminera le trajet de 30 km en $\dfrac{30 \text{ km}}{20 \text{ km/h}} = 1{,}5$ h.
Donc, Bri terminera le trajet 0,5 h après qu'Ari l'ait terminé, ce qui correspond à 30 minutes.

Réponse : (C)

9. Au total, les trois réservoirs contiennent $3600 \text{ L} + 1600 \text{ L} + 3800 \text{ L} = 9000 \text{ L}$.
Si l'eau est répartie également entre les trois réservoirs, chacun des réservoirs contiendra $\frac{1}{3} \cdot 9000 \text{ L} = 3000 \text{ L}$.
Donc, il faut pomper et transvaser $3600 \text{ L} - 3000 \text{ L} = 600 \text{ L}$ d'eau du réservoir A au réservoir B.
(Remarquons qu'il faut également pomper et transvaser 800 L d'eau du réservoir C au réservoir B afin que chaque réservoir contienne le même volume d'eau.)

Réponse : (B)

10. Supposons que $AB = x$ avec $x > 0$.
Puisque $AB : AC = 1 : 5$, alors $AC = 5x$.
Cela signifie que $BC = AC - AB = 5x - x = 4x$.
Puisque $BC : CD = 2 : 1$ et que $BC = 4x$, alors $CD = 2x$.



Donc, $AB : CD = x : 2x = 1 : 2$.

Réponse : (B)

11. Supposons que Mathilde avait m pièces au début du mois dernier et que Salah avait s pièces au début du mois dernier.
D'après l'énoncé, 100 est 25 % de plus que m. Donc, $100 = 1{,}25m$, d'où on a donc $m = \dfrac{100}{1{,}25} = 80$.
D'après l'énoncé, 100 est 20 % de moins que s. Donc, $100 = 0{,}80s$, d'où on a donc $s = \dfrac{100}{0{,}80} = 125$.
Donc, au début du mois dernier, Mathilde et Salah avaient $m+s = 80+125 = 205$ pièces en tout.

Réponse : (E)

12. L'aire d'un rectangle ayant une longueur de 8 cm et une largeur de π cm est égale à 8π cm^2.
Soit r cm le rayon du demi-cercle.
L'aire d'un cercle de rayon r cm est égale à πr^2 cm^2. Donc, l'aire du demi-cercle est égale à $\frac{1}{2}\pi r^2$ cm^2.
Puisque le rectangle et le demi-cercle ont la même aire, alors $\frac{1}{2}\pi r^2 = 8\pi$, d'où $\pi r^2 = 16\pi$ ou $r^2 = 16$.
Puisque $r > 0$, alors $r = 4$. Donc, le demi-cercle a un rayon de 4 cm.

Réponse : (B)

13. Les deux termes du membre de gauche de l'équation $a(x+2) + b(x+2) = 60$ ont $x+2$ comme facteur commun.
Donc, on peut récrire l'équation de la manière suivante : $(a+b)(x+2) = 60$.
Lorsque $a+b = 12$, on obtient $12 \cdot (x+2) = 60$, d'où $x+2 = 5$ ou $x = 3$.

Réponse : (A)

14. La droite ayant une pente de 2 et une ordonnée à l'origine de 6 a pour équation $y = 2x + 6$.
Pour déterminer son abscisse à l'origine, on pose $y = 0$ et on obtient $0 = 2x + 6$ ou $2x = -6$, d'où $x = -3$.
La droite ayant une pente de -4 et une ordonnée à l'origine de 6 a pour équation $y = -4x + 6$.
Pour déterminer son abscisse à l'origine, on pose $y = 0$ et on obtient $0 = -4x + 6$ ou $4x = 6$, d'où $x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.
Donc, les abscisses à l'origine des droites ont pour coordonnées $(-3, 0)$ et $(\frac{3}{2}, 0)$ et la distance entre ces deux points est égale à $3 + \frac{3}{2}$, ce qui est égal à $\frac{6}{2} + \frac{3}{2}$ ou $\frac{9}{2}$.

Réponse : (E)

15. Le 1er terme de la suite est 16.
Puisque 16 est pair, le 2e terme de la suite est $\frac{1}{2} \cdot 16 + 1 = 9$.
Puisque 9 est impair, le 3e terme de la suite est $\frac{1}{2}(9 + 1) = 5$.
Puisque 5 est impair, le 4e terme de la suite est $\frac{1}{2}(5 + 1) = 3$.
Puisque 3 est impair, le 5e terme de la suite est $\frac{1}{2}(3 + 1) = 2$.
Puisque 2 est pair, le 6e terme de la suite est $\frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$.
L'étape précédente démontre que lorsqu'un terme est égal à 2, le terme suivant sera également égal à 2.
Donc, les termes restants de cette suite sont tous 2.
Donc, le 101e terme de la suite est 2.

Réponse : (B)

16. Dans l'arrangement donné, on voit quatorze 0 et onze 1.
Lauriane peut choisir n'importe quelle rangée ou colonne pour retourner les 5 cartes. De plus, la rangée ou la colonne que Lauriane choisit peut contenir entre 0 et 5 des cartes portant des nombres différents sur les deux faces.
Sur les 5 rangées et 5 colonnes, 3 contiennent quatre 0 et un 1, 2 contiennent trois 0 et deux 1 et 5 contiennent deux 0 et trois 1.
Cela signifie que le nombre de zéros ne peut pas diminuer de plus de 4 lorsque les cartes d'une rangé ou d'une colonne sont retournées, puisque le seul moyen pour que le nombre de zéros diminue de 5 est que les cinq cartes de la rangée ou de la colonne portent toutes un 0 sur la face supérieure et un 1 sur la face inférieure.
Par conséquent, il ne peut y avoir $14 - 5 = 9$ zéros après que Lauriane ait retourné les cartes, ce qui signifie que le rapport ne peut pas être 9 : 16, soit le choix (C).

Par souci d'exhaustivité, on va démontrer que les autres rapports sont effectivement possibles.
Si Lauriane choisit la première colonne et si cette colonne comprend 3 cartes qui portent chacune un 1 sur les deux faces et 2 cartes qui portent chacune un 0 sur une face (sur la face supérieure) et un 1 sur l'autre face, alors en retournant les cartes de cette colonne on obtient $14 - 2 = 12$ zéros et $11 + 2 = 13$ uns.
Donc, le rapport 12 : 13 (choix (A)) est possible.
Si Lauriane choisit la cinquième colonne et si cette colonne comprend une carte qui porte un 1 sur les deux faces et 4 cartes qui portent chacune un 0 sur une face (sur la face supérieure) et un 1 sur l'autre face, alors en retournant les cartes de cette colonne on obtient $14 - 4 = 10$ zéros et $11 + 4 = 15$ uns.
Donc, le rapport 10 : 15 = 2 : 3 (choix (B)) est possible.
Si Lauriane choisit la première colonne et si chacune des quatre premières cartes de cette colonne porte le même nombre sur les deux faces et que la dernière carte de la colonne porte un 1 sur la face supérieure et un 0 sur la face inférieure, alors en retournant les cartes de cette colonne on obtient $14 + 1 = 15$ zéros et $11 - 1 = 10$ uns.
Donc, le rapport 15 : 10 = 3 : 2 (choix (D)) est possible.
Si Lauriane choisit la première colonne et si les première, quatrième et cinquième cartes de cette colonne portent chacune les mêmes nombres sur les deux faces et que les deuxième et troisième cartes portent chacune un 1 sur la face supérieure et un 0 sur la face inférieure, alors en retournant les cartes de cette colonne, on obtient $14 + 2 = 16$ zéros $11 - 2 = 9$ uns.
Donc, le rapport 16 : 9 (choix (E)) est possible.
Donc, le rapport 9 : 16, soit le choix (C), est le seul rapport impossible.

Réponse : (C)

17. On détermine d'abord les facteurs premiers de 1184 :

$$1184 = 2 \cdot 592 = 2^2 \cdot 296 = 2^3 \cdot 148 = 2^4 \cdot 74 = 2^5 \cdot 37$$

Les diviseurs positifs de 1184 peuvent uniquement contenir 2 et 37 comme facteurs premiers et ne peuvent contenir plus de 5 facteurs 2 ou 1 facteur 37.
Donc, les diviseurs positifs sont

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 74, 148, 296, 592, 1184$$

(Parmi ces diviseurs, les cinq premiers ont 0 facteur 37 et 0 à 5 facteurs 2, tandis que les cinq derniers ont 1 facteur 37 et 0 à 5 facteurs 2.)
La somme, S, de ces diviseurs est égale à

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 + 1184 \\ &= (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) + 37 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) \\ &= (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) \cdot (1 + 37) \\ &= 63 \cdot 38 \\ &= 2394 \end{aligned}$$

Réponse : (A)

18. Chaque groupe de quatre sauts amène la sauterelle à se déplacer de 1 cm vers l'est et de 3 cm vers l'ouest, ce qui équivaut à 2 cm vers l'ouest, et de 2 cm vers le nord et de 4 cm vers le sud, ce qui équivaut à 2 cm vers le sud.
En d'autres termes, on peut voir que chaque groupe de quatre sauts, en commençant par le premier, entraîne un déplacement net de 2 cm vers l'ouest et de 2 cm vers le sud.
Remarquons que $158 = 2 \times 79$.
Donc, après 79 groupes de quatre sauts, la sauterelle se trouve à $79 \times 2 = 158$ cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale.
La sauterelle a fait $4 \times 79 = 316$ sauts jusqu'à présent.
Après le 317e saut (1 cm vers l'est), la sauterelle se trouve à 157 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale.
Après le 318e saut (2 cm vers le nord), la sauterelle se trouve à 157 cm à l'ouest et 156 cm au sud de sa position initiale.
Après le 319e saut (3 cm vers l'ouest), la sauterelle se trouve à 160 cm à l'ouest et 156 cm au sud de sa position initiale.
Après le 320e saut (4 cm vers le sud), la sauterelle se trouve à 160 cm à l'ouest et 160 cm au sud de sa position initiale.
Après le 321e saut (1 cm vers l'est), la sauterelle se trouve à 159 cm à l'ouest et 160 cm au sud de sa position initiale.
Après le 322e saut (2 cm vers le nord), la sauterelle se trouve à 159 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale.
Après le 323e saut (3 cm vers l'ouest), la sauterelle se trouve à 162 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale, ce qui correspond à la position souhaitée.
À mesure que la sauterelle continue de sauter, chacune de ses positions sera toujours située au moins 160 cm au sud de sa position initiale. On voit donc que ceci est la seule fois qu'elle se trouvera à cette position.
Donc, $n = 323$. La somme des carrés des chiffres de n est égale à $3^2 + 2^2 + 3^2 = 9 + 4 + 9 = 22$.

Réponse : (A)

19. Si x et y vérifient $2x^2 + 8y = 26$, alors $x^2 + 4y = 13$, d'où $4y = 13 - x^2$.
Puisque x et y sont des entiers, alors $4y$ est pair, d'où $13 - x^2$ est donc pair, ce qui signifie que x est impair.
Puisque x est impair, on peut écrire $x = 2q + 1$, q étant un entier quelconque.
Donc, $4y = 13 - x^2 = 13 - (2q + 1)^2 = 13 - (4q^2 + 4q + 1) = 12 - 4q^2 - 4q$.
Puisque $4y = 12 - 4q^2 - 4q$, alors $y = 3 - q^2 - q$.
Donc, $x - y = (2q + 1) - (3 - q^2 - q) = q^2 + 3q - 2$.
Lorsque $q = 4$, on obtient $x - y = q^2 + 3q - 2 = 4^2 + 3 \cdot 4 - 2 = 26$.
Remarquons également que lorsque $q = 4$, $x = 2q + 1 = 9$ et $y = 3 - q^2 - q = -17$, ce qui vérifie $x^2 + 4y = 13$.
On peut aussi vérifier qu'il n'existe aucun entier q tel que $q^2 + 3q - 2$ soit égal à l'un de -8, -16, 22 ou 30. (Par exemple, si $q^2 + 3q - 2 = -16$, alors $q^2 + 3q + 14 = 0$ et cette équation quadratique n'admet aucune solution entière)

Réponse : (B)

20. Si $n!$ se termine par exactement m zéros, alors $n!$ est divisibe par 10^m mais n'est pas divisible par 10^{m+1}. (Si $n!$ était divisible par 10^{m+1}, alors $n!$ se terminerait par au moins $m + 1$ zéros.)
Dans ce cas, on peut écrire $n! = 10^m \cdot q$, q n'étant pas divisible par 10. Cela signifie que q n'est pas divisible par 2 ou n'est pas divisible par 5 ou les deux.
Puisque $2 < 5$, alors lorsque $n \geq 2$, le produit $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n - 1) \cdot n$ comprend plus de multiples de 2 que de multiples de 5 parmi les n entiers dans son produit. Donc, $n!$ comprend plus de facteurs 2 que de facteurs 5.
Cela signifie que si $n!$ se termine par exactement m zéros, alors $n! = 10^m \cdot q$, q n'étant pas divisible par 5. Donc, $n!$ se termine par un nombre de zéros qui est exactement égal au nombre de facteurs 5 dans la factorisation première de $n!$.
On remarque également qu'à mesure que n augmente, le nombre de zéros à la fin de $n!$ ne diminue jamais puisque le nombre de facteurs 5 demeure constant ou augmente à mesure que n augmente.
Pour $n = 1$ à $n = 4$, le produit $n!$ comprend 0 multiple de 5. Donc, $n!$ se termine par 0 zéros.
Pour $n = 5$ à $n = 9$, le produit $n!$ comprend 1 multiple de 5 (à savoir 5), donc $n!$ se termine par 1 zéro.
Pour $n = 10$ à $n = 14$, le produit $n!$ comprend 2 multiples de 5 (à savoir 5 et 10), donc $n!$ se termine par 2 zéros.
Pour $n = 15$ à $n = 19$, le produit $n!$ comprend 3 multiples de 5 (à savoir 5, 10 et 15), donc $n!$ se termine par 3 zéros.
Pour $n = 20$ à $n = 24$, le produit $n!$ comprend 4 multiples de 5 (à savoir 5, 10, 15 et 20), donc $n!$ se termine par 4 zéros.
Pour $n = 25$ à $n = 29$, le produit $n!$ comprend 5 multiples de 5 (à savoir 5, 10, 15, 20 et 25) et comprend 6 facteurs 5 (puisque 25 contribue 2 facteurs 5), donc $n!$ se termine par 6 zéros.
Pour $n = 30$ à $n = 34$, $n!$ se termine par 7 zéros. Pour $n = 35$ à $n = 39$, $n!$ se termine par 8 zéros.
Pour $n = 40$ à $n = 44$, $n!$ se termine par 9 zéros. Pour $n = 45$ à $n = 49$, $n!$ se termine par 10 zéros.
Pour $n = 50$ à $n = 54$, $n!$ se termine par 12 zéros, puisque le produit $n!$ comprend 10 multiples de 5, dont deux comprennent 2 facteurs 5.
Pour $n = 55$ à $n = 74$, $n!$ se termine par 13, 14, 15, 16 zéros à mesure que n augmente.
Pour $n = 75$ à $n = 79$, $n!$ se termine par 18 zéros.
Pour $n = 80$ à $n = 99$, $n!$ se termine par 19, 20, 21, 22 zéros à mesure que n augmente.
Pour $n = 100$ à $n = 104$, $n!$ se termine par 24 zéros.
Pour $n = 105$ à $n = 124$, $n!$ se termine par 25, 26, 27, 28 zéros.

Pour $n = 125$, $n!$ se termine par 31 zéros puisque 125 comprend 3 facteurs 5, donc 125! se termine par 3 zéros de plus que 124!.
Parmi les entiers m avec $1 \leq m \leq 30$, il n'y a aucune valeur de n pour laquelle $n!$ se termine par m zéros lorsque $m = 5, 11, 17, 23, 29, 30$. Cela signifie que $30 - 6 = 24$ des valeurs de m sont possibles.

Réponse : (D)

21. D'après les données de l'énoncé, si a et b se trouvent dans deux carrés consécutifs, alors $a + b$ se trouve dans le cercle qui les sépare.
Comme tous les entiers que l'on peut utiliser sont positifs, alors $a + b$ est supérieur à a et à b.
Cela signifie que le plus grand entier de la liste, soit 13, ne peut être ni x ni y (et ne peut être placé dans un carré) car l'entier dans le cercle à côté doit être inférieur à 13 (qui est le plus grand entier de la liste) et ne peut donc pas être égal à la somme de 13 et d'un autre entier positif de la liste.
Donc, pour que la valeur de $x + y$ soit aussi grande que possible, il faudrait que x et y soient égaux à 10 et 11 dans un certain ordre. Or, on est confronté au même problème : il n'y a qu'un seul entier de la liste supérieur à 10 et à 11 (soit 13) qui pourrait aller dans les cercles à côté de 10 et 11 ; cependant, puisque chaque entier ne peut être utilisé qu'une seule fois, alors les cercles à côté de 10 et 11 ne peuvent contenir tous deux l'entier 13.
Donc, la plus grande valeur possible de $x + y$ se produit lorsque $x = 9$ et $y = 11$ (ou lorsque $y = 9$ et $x = 11$).
Dans ce cas, on pourrait avoir $13 = 11 + 2$ et $10 = 9 + 1$, d'où on aurait la liste partielle suivante :

11	13	2				1	10	9

Afin de remplir les conditions du problème, les entiers restants (4, 5 et 6) peuvent être placés dans les cercles et les carrés de la manière suivante :

11	13	2	6	4	5	1	10	9

On voit donc que la plus grande valeur possible de $x + y$ est 20.

Réponse : 20

22. *Solution 1*
On manipule l'équation donnée pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\ xy &= (x+y)y - (x+y)x \qquad \text{(en multipliant par } xy(x+y)) \\ xy &= xy + y^2 - x^2 - xy \\ x^2 + xy - y^2 &= 0 \\ \frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} - 1 &= 0 \qquad \text{(en divisant par } y^2 \text{, dont la valeur est non-nulle)} \\ t^2 + t - 1 &= 0 \end{aligned}$$

t étant égal à $\dfrac{x}{y}$.

Puisque $x > 0$ et $y > 0$, alors $t > 0$. À l'aide de la formule quadratique,

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Puisque $t > 0$, alors $\dfrac{x}{y} = t = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Donc,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 \\
&= (\sqrt{5})^2 \\
&= 5
\end{aligned}$$

Solution 2
Puisque $x{,}y > 0$, les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+y} &= \frac{1}{x}-\frac{1}{y} \\
1 &= \frac{x+y}{x}-\frac{x+y}{y} \\
1 &= \frac{x}{x}+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}-\frac{y}{y} \\
1 &= 1+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}-1 \\
1 &= \frac{y}{x}-\frac{x}{y} \\
-1 &= \frac{x}{y}-\frac{y}{x}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2 &= \frac{x^2}{y^2}+2\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2} \\
&= \frac{x^2}{y^2}+2+\frac{y^2}{x^2} \\
&= \frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2}+4 \\
&= \frac{x^2}{y^2}-2\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}+4 \\
&= \left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+4 \\
&= (-1)^2+4 \\
&= 5
\end{aligned}$$

Réponse : 05

23. On exprime un entier n ($100 \leq n \leq 999$) sous la forme $n = 100a + 10b + c$, a, b et c étant des chiffres.
Autrement dit, n a a pour chiffre des centaines, b pour chiffre des dizaines et c pour chiffre des unités.
Pour chaque tel entier n, on a $s(n) = a + b + c$.
On veut compter le nombre de tels entiers n avec $7 \leq a + b + c \leq 11$.
Lorsque $100 \leq n \leq 999$, on sait que $1 \leq a \leq 9$, que $0 \leq b \leq 9$ et que $0 \leq c \leq 9$.

On compte d'abord le nombre de n avec $a + b + c = 7$.
Si $a = 1$, alors $b + c = 6$ et il y a 7 paires de valeurs possibles de b et de c. Ces paires sont $(b, c) = (0, 6)$,$(1, 5)$,$(2, 4)$,$(3, 3)$,$(4, 2)$,$(5, 1)$,$(6, 0)$.
Si $a = 2$, alors $b + c = 5$ et il y a 6 paires de valeurs possibles de b et de c.
De même, lorsque $a = 3, 4, 5, 6, 7$, il y a respectivement 5, 4, 3, 2, 1 paires de valeurs possibles de b et c.
Autrement dit, le nombre d'entiers n avec $a + b + c = 7$ est égal à $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$.

En utilisant le même processus, on peut déterminer que le nombre de tels entiers n avec $s(n) = 8$ est égal à $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ et que le nombre de tels entiers n avec $s(n) = 9$ est égal à $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$.

On doit être plus prudents en comptant le nombre d'entiers n avec $s(n) = 10$ et $s(n) = 11$, car aucun des chiffres ne peut être supérieur à 9.
Considérons les entiers n avec $a + b + c = 10$.
Si $a = 1$, alors $b + c = 9$ et il y a 10 paires de valeurs possibles de b et de c. Ces paires sont $(b, c) = (0, 9)$,$(1, 8)$,$\ldots$,$(8, 1)$,$(9, 0)$.
Si $a = 2$, alors $b + c = 8$ et il y a 9 paires de valeurs possibles de b et de c.
À mesure que a augmente de 1 à 9, on trouve qu'il y a $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 54$ tels entiers n.
(Remarquons que lorsque $a = 9$, on a $b+c = 1$ et il y a 2 paires de valeurs possibles de b et de c.)
Enfin, on considère les entiers n avec $a + b + c = 11$.
Si $a = 1$, alors $b + c = 10$ et il y a 9 paires de valeurs possibles de b et de c. Ces paires sont $(b, c) = (1, 9)$,$(2, 8)$,$\ldots$,$(8, 2)$,$(9, 1)$.
Si $a = 2$, alors $b + c = 9$ et il y a 10 paires de valeurs possibles de b et de c.
Si $a = 3$, alors $b + c = 8$ et il y a 9 paires de valeurs possibles de b et de c.
En continuant de cette façon, on trouve qu'il y a $9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 61$ tels entiers n.

Ayant considéré tous les cas, on voit que le nombre de tels entiers n est égal à

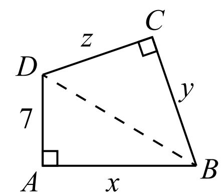
$$S = 28 + 36 + 45 + 54 + 61 = 224$$

Donc, l'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de S est 24.

Réponse : 24

24. *Solution 1*

Supposons que $AB = x$, que $BC = y$, que $CD = z$ et que $DA = 7$. (On peut attribuer cette longueur de 7 à n'importe lequel des côtés de $ABCD$.)
On sait que x, y et z sont des entiers.
Puisque $ABCD$ a un périmètre de 224, on a $x + y + z + 7 = 224$ ou $x + y + z = 217$.
On joint B et D.



L'aire de $ABCD$ est égale à la somme des aires des triangles DAB et BCD.
Puisque ces triangles sont rectangles, alors $2205 = \frac{1}{2} \cdot DA \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD$.
On multiplie par 2 pour obtenir $4410 = 7x + yz$.
Enfin, remarquons également qu'en utilisant deux fois le théorème de Pythagore, on obtient

$$DA^2 + AB^2 = DB^2 = BC^2 + CD^2$$

d'où $49 + x^2 = y^2 + z^2$.
On doit déterminer la valeur de $S = x^2 + y^2 + z^2 + 7^2$.
Puisque $x + y + z = 217$, alors $x = 217 - y - z$.
Lorsqu'on reporte $x = 217 - y - z$ dans l'équation $4410 = 7x + yz$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
4410 &= 7x + yz \\
4410 &= 7(217 - y - z) + yz \\
4410 &= 1519 - 7y - 7z + yz \\
2891 &= yz - 7y - 7z \\
2891 &= y(z - 7) - 7z \\
2891 &= y(z - 7) - 7z + 49 - 49 \\
2940 &= y(z - 7) - 7(z - 7) \\
2940 &= (y - 7)(z - 7)
\end{aligned}$$

Donc, $y - 7$ et $z - 7$ forment une paire de diviseurs complémentaires positifs de 2940. (Puisque leur produit est positif, ils sont soit tous deux positifs, soit tous deux négatifs. Puisque y et z sont positifs, si $y - 7$ et $z - 7$ sont tous deux négatifs, on aurait $0 < y < 7$ et $0 < z < 7$, ce qui n'est pas assez grand pour que l'on puisse obtenir une valeur admissible de x.)
On remarque que $y + z = 217 - x$, donc $y + z < 217$, ce qui signifie que $(y - 7) + (z - 7) < 203$.
Puisque

$$2940 = 20 \cdot 147 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7^2$$

alors les diviseurs de 2940 sont les entiers strictement positifs de la forme $2^r \cdot 3^s \cdot 5^t \cdot 7^u$ avec $0 \le r \le 2$, $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 1$ et $0 \le u \le 2$.
Donc, ces diviseurs sont

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 28, 30, 35, 42, 49,$$

$$60, 70, 84, 98, 105, 140, 147, 196, 210, 245, 294, 420, 490, 588, 735, 980, 1470, 2940$$

On peut supprimer de cette liste les paires de diviseurs complémentaires dont la somme est supérieure à 203. On a donc la liste :

$$20, 21, 28, 30, 35, 42, 49, 60, 70, 84, 98, 105, 140, 147$$

Cela signifie qu'il reste 7 paires de diviseurs à considérer. On peut supposer que $y < z$. En utilisant le fait que $x + y + z = 217$, on peut isoler x dans chaque cas. Ces valeurs de x, y et z satisferont les conditions du périmètre et de l'aire, mais on doit vérifier la condition pythagoricienne. On dresse le tableau suivant :

$y-7$	$z-7$	y	z	$x = 217 - y - z$	$y^2 + z^2 - x^2$
20	147	27	154	36	23 149
21	140	28	147	42	20 629
28	105	35	112	70	8869
30	98	37	105	75	6769
35	84	42	91	84	2989
42	70	49	77	91	49
49	60	56	67	94	-1211

Puisqu'il faut que $y^2 + z^2 - x^2 = 49$, alors on doit avoir $y = 49$ et $z = 77$ et $x = 91$.
Cela signifie que $S = x^2 + y^2 + z^2 + 7^2 = 91^2 + 49^2 + 77^2 + 7^2 = 16\,660$.
Donc, l'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de S est 60.

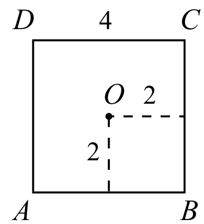
Solution 2
Comme dans la Solution 1, on a $x + y + z = 217$ et $4410 = 7x + yz$ et $x^2 + 49 = y^2 + z^2$.
En réécrivant et en élevant au carré la première équation et en utilisant les deuxième et troisième équations, on obtient

$$\begin{aligned}
y + z &= 217 - x \\
y^2 + z^2 + 2yz &= x^2 - 434x + 217^2 \\
(x^2 + 49) + 2(4410 - 7x) &= x^2 - 434x + 217^2 \\
49 + 8820 - 14x &= -434x + 217^2 \\
420x &= 217^2 - 8820 - 49 \\
420x &= 38\,220 \\
x &= 91
\end{aligned}$$

Donc, $y + z = 217 - 91 = 126$ et $yz = 4410 - 7 \cdot 91 = 3773$.
On a donc, $y(126 - y) = 3773$, d'où $y^2 - 126y + 3773 = 0$ ou $(y - 49)(y - 77) = 0$.
Donc, $y = 49$ (ce qui signifie que $z = 77$) ou $y = 77$ (ce qui signifie que $z = 49$).
On remarque que $y^2 + z^2 = 49^2 + 77^2 = 8330 = 91^2 + 7^2 = x^2 + 7^2$ ce qui vérifie l'équation restante.
Cela signifie que $S = x^2 + y^2 + z^2 + 7^2 = 91^2 + 49^2 + 77^2 + 7^2 = 16\,660$.
Donc, l'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de S est 60.

Réponse : 60

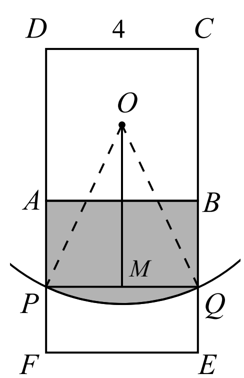
25. Toutes longueurs et aires présentées dans cette solution sont, respectivement, en mètres et en mètres carrés. Par souci de simplicité, les unités ont été omises.
Soit $ABCD$ la face carrée supérieure du cube. Soit O le centre de $ABCD$.
Puisque les arêtes du cube ont une longueur de 4, alors les côtés du carré $ABCD$ ont également une longueur de 4.
Cela signifie que la distance entre le centre O et chacun des côtés du carré $ABCD$ est égale à 2. Donc, la distance entre le centre O et chacun des sommets du carré $ABCD$ est égale à $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.



Les sommets de $ABCD$ sont les points les plus éloignés de O.
Puisque $\sqrt{8} \approx 2{,}8$, alors l'extrémité libre de la corde de longueur 5 peut atteindre tout point situé sur $ABCD$, dont l'aire est égale à 16.

Ensuite, la corde ne peut pas atteindre la face inférieure du cube car la distance la plus courte le long de la surface du cube de O à la face inférieure est égale à 6. Or, la corde a une longueur de 5. On va confirmer cela d'une autre manière sous peu.
De plus, comme la corde est ancrée au centre de la face supérieure et que toutes les faces sont carrées, la corde peut atteindre la même surface sur chacune des quatre faces latérales.
Soit a l'aire de l'une des faces latérales que la corde peut atteindre. Puisque la corde peut atteindre tout point situé sur la face supérieure du cube, alors l'aire totale que la corde peut atteindre est égale à $16 + 4a$.
On doit donc déterminer la valeur de a.

Soit le carré $ABEF$ l'une des faces latérales du cube. Comme on l'a indiqué précédemment, les carrés qui forment les faces du cube ont des côtés de longueur 4. Considérons la figure créée par le carré $ABCD$ et le carré $ABEF$. On peut considérer celle-ci comme étant un « dépliement » d'une partie du cube.



Lorsque la corde est tendue, son extrémité libre trace sur le carré $ABEF$ un arc de cercle de centre O et de rayon 5.
Remarquons que sur le carré $ABEF$, le point le plus bas que la corde peut atteindre est situé à une distance de 3 du côté AB puisque le point O où la corde est ancrée est situé à une distance de 2 du côté AB. Cela confirme que la corde ne peut pas atteindre la face inférieure du cube

puisqu'il faudrait qu'elle puisse traverser le côté FE pour ce faire.
Supposons que cet arc coupe AF en P et coupe BE en Q.
On doit déterminer la partie de l'aire du carré $ABEF$ qui est située au-dessus de l'arc PQ (soit la région ombrée). Comme on l'a indiqué précédemment, a représente l'aire de cette région.

On va calculer la valeur de a en déterminant l'aire du rectangle $ABQP$ et en y ajoutant l'aire de la région comprise entre l'arc de cercle et le segment de droite PQ.
On va calculer l'aire de la région comprise entre l'arc de cercle et le segment de droite PQ en déterminant l'aire du secteur OPQ et en soustrayant l'aire du triangle OPQ.
On remarque que $PQ = 4$. Soit M le milieu de PQ ; donc $PM = MQ = 2$.
Puisque le triangle OPQ est isocèle avec $OP = OQ = 5$, alors OM est perpendiculaire à PQ.
D'après le théorème de Pythagore, $OM = \sqrt{OP^2 - PM^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$.
Donc, l'aire du triangle OPQ est égale à $\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{21} = 2\sqrt{21}$.
De plus, puisque la distance entre O et AB est égale à 2 et que $OM = \sqrt{21}$, alors la hauteur du rectangle $ABQP$ est égale à $\sqrt{21} - 2$.
Donc, l'aire du rectangle $ABQP$ est égale à $4 \cdot (\sqrt{21} - 2) = 4\sqrt{21} - 8$.
Pour déterminer l'aire du secteur OPQ, on remarque que l'aire d'un cercle de rayon 5 est égale à $\pi \cdot 5^2$. Donc, l'aire du secteur est égale à $\dfrac{\angle POQ}{360^\circ} \cdot 25\pi$.
Puisque le triangle POM est rectangle en M, alors $\sin(\angle POM) = \dfrac{PM}{OP}$.
Donc, $\angle POQ = 2\angle POM = 2\sin^{-1}(2/5)$.
Donc, l'aire du secteur est égale à $\dfrac{2\sin^{-1}(2/5)}{360^\circ} \cdot 25\pi$.

On a donc

$$\begin{aligned}
100A &= 100(16 + 4a) \\
&= 1600 + 400a \\
&= 1600 + 400\left((4\sqrt{21} - 8) + \frac{2\sin^{-1}(2/5)}{360^\circ} \cdot 25\pi - 2\sqrt{21}\right) \\
&= 1600 + 400\left(2\sqrt{21} - 8 + \frac{2\sin^{-1}(2/5)}{360^\circ} \cdot 25\pi\right) \\
&= 800\sqrt{21} - 1600 + \frac{800\sin^{-1}(2/5) \cdot 25\pi}{360^\circ} \\
&\approx 6181{,}229
\end{aligned}$$

(Remarquons que l'on n'a pas utilisé les approximations décimales avant la dernière étape afin d'éviter toute erreur d'arrondi.)
Donc, l'entier le plus près de $100A$ est 6181, dont les deux chiffres les plus à droite sont 81.

Réponse : 81

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2022

(11^{e} année – Secondaire V)

le mercredi 23 février 2022
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 24 février 2022
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $6 + (3 \times 6) - 12 = 6 + 18 - 12 = 12$.

Réponse : (C)

2. *Solution 1*

Puisque les deux nombres ont une moyenne de 7, alors ils ont une somme de $2 \times 7 = 14$.
Puisque l'un des nombres est 5, l'autre est donc $14 - 5 = 9$.

Solution 2

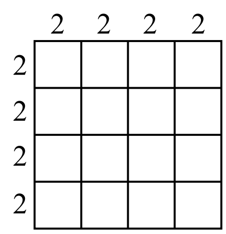
Deux nombres ont une moyenne de 7 et l'un d'eux est 5.
Puisque 5 est 2 de moins que 7, alors l'autre nombre doit être 2 de plus que 7, soit 9.

Réponse : (E)

3. Entre le jour où elle parcourt 500 m et le jour où elle parcourt 4500 m, Gauravi augmente sa distance parcourue de $(4500 \text{ m}) - (500 \text{ m}) = 4000$ m.
À chaque jour, Gauravi augmente sa distance parcourue de 500 m par rapport au jour précédent.
Donc, il lui faut $\dfrac{4000 \text{ m}}{500 \text{ m}} = 8$ jours pour passer de 500 m à 4500 m.
Si l'on compte huit jours après lundi (soit 1 semaine et 1 jour), on arrive à mardi. Donc, Gauravi parcourra exactement 4500 m un mardi.

Réponse : (C)

4. On peut disposer 4 rangées de 4 carrés chacune (ces derniers ayant des côtés de longueur 2) les unes à côté des autres pour former un grand carré ayant des côtés de longueur 8.



On peut donc placer $4 \cdot 4 = 16$ carrés de cette manière. Puisque ces petits carrés recouvrent complètement le grand carré, il est impossible d'utiliser plus de carrés de dimensions 2×2. Donc, 16 est le plus grand nombre possible de carrés de dimensions 2×2 que l'on peut placer, sans chevauchement, à l'intérieur du grand carré de dimensions 8×8.

Réponse : (C)

5. Puisque la liste comprend 15 entiers, alors la probabilité pour qu'on choisisse un entier qui parait cinq fois dans la liste est égale à $\frac{1}{3}$ (car $\frac{1}{3} \cdot 15 = 5$).
Puisque l'entier 5 parait cinq fois dans la liste et qu'aucun autre entier ne parait cinq fois, alors $n = 5$.

Réponse : (E)

6. Supposons que le triangle PQR a pour base PQ (soit le segment de droite vertical situé sur la droite d'équation $x = 2$) et une hauteur correspondant à la distance horizontale entre R et PQ.
Le segment de droite reliant $P(2, 6)$ et $Q(2, 2)$ a une longueur de 4.
Le point $R(8, 5)$ est situé 6 unités à droite de la droite d'équation $x = 2$.
Donc, l'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$.

Réponse : (D)

7. On a : $(1+2+3)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = 6(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = 6+\frac{6}{2}+\frac{6}{3} = 6+3+2 = 11$.

Réponse : (B)

8. Puisque $10x+y=75$ et $10y+x=57$, alors

$$(10x+y)+(10y+x) = 75+57$$

d'où

$$11x+11y = 132$$

On divise les deux membres de l'équation par 11 pour obtenir $x+y=12$.
(Par ailleurs, on aurait pu remarquer que $(x,y)=(7,5)$ est un couple qui vérifie les deux équations, d'où on a donc $x+y=12$.)

Réponse : (A)

9. Puisque Pascale met 7 jours pour creuser 4 trous et que $\frac{21}{7}=3$, alors elle creusera $3\cdot 4=12$ trous en 21 jours.

Puisque Miguel met 2 jours pour creuser 2 trous et que $\frac{21}{3}=7$, alors il creusera $7\cdot 2=14$ trous en 21 jours.

En tout, ils creuseront $12+14=26$ trous en 21 jours.

Réponse : (D)

10. En manipulant algébriquement le membre de gauche, on obtient :

$$2^{11}\times 6^5 = 2^{11}\times(2\times 3)^5 = 2^{11}\times 2^5\times 3^5 = 2^{16}\times 3^5$$

Puisque $4^x\times 3^y = 2^{16}\times 3^5$ et que x et y sont des entiers strictement positifs, alors $y=5$ (car 4^x n'admet pas 3 comme diviseur).
Cela signifie également que $4^x = 2^{16}$.
Puisque $4^x=(2^2)^x=2^{2x}$, alors $4^x=2^{16}$ donne $2^{2x}=2^{16}$, d'où $2x=16$ ou $x=8$.
Donc, $x+y=8+5=13$.

Réponse : (D)

11. Les lettres A, B, C, D et E représentent respectivement André, Bev, Cao, Dhruv et Elcim.
Soit $D>B$ la représentation du fait que « Dhruv est plus âgé que Bev ».
D'après l'énoncé du problème, on a donc $D>B$, $B>E$, $A>E$, $B>A$ et $C>B$. On voit donc que Dhruv et Cao sont plus âgés que Bev tandis qu'Elcim et André sont plus jeunes qu'elle.
Cela signifie que deux personnes sont plus âgées que Bev tandis que deux personnes sont plus jeunes qu'elle. Donc, Bev est la troisième plus âgée.

Réponse : (B)

12. Puisque d est un entier impair, alors $d+d$ est pair et $d\times d$ est impair.
Puisque e est un entier pair, alors $e+e$ est pair, ce qui signifie que $(e+e)\times d$ est pair.
De plus, $e+d$ est impair, ce qui signifie que $d\times(e+d)$ est impair.
Donc, parmi les 4 expressions, 2 sont égales à un entier impair.

Réponse : (C)

13. Supposons que les côtés les plus courts des petits rectangles ont une mesure de x.
Donc, le rectangle de la Figure A a une hauteur de $2x$. Cela signifie que les côtés les plus longs des petits rectangles ont une mesure de $2x$.
Donc, le rectangle de la Figure A a une hauteur de $2x$, une largeur de $2x + x = 3x$ et a donc un périmètre de $2(3x + 2x) = 10x$. De plus, le rectangle de la Figure B a une hauteur de $2x$, une largeur de $x + 2x + x = 4x$ et a donc un périmètre de $2(4x + 2x) = 12x$.

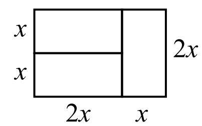


Figure A

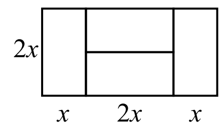


Figure B

Donc, le rapport du périmètre de la Figure A au périmètre de la Figure B est égal à $10x : 12x$, ce qui est égal à $5 : 6$, puisque $x \neq 0$.

Réponse : (E)

14. Zebadiah doit retirer au moins 3 chemises.
S'il retire 3 chemises, 2 d'entre elles pourraient être rouges et 1 pourrait être bleue.
S'il retire 4 chemises, 2 d'entre elles pourraient être rouges et 2 pourraient être bleues.
Par conséquent, s'il retire moins de 5 chemises, il n'est pas certain qu'il puisse retirer 3 chemises de la même couleur ou 3 chemises de couleurs différentes.
Supposons qu'il retire 5 chemises. Si 3 sont de la même couleur, les conditions sont remplies.
S'il n'y a pas 3 chemises de la même couleur parmi les 5 chemises, alors on a au plus 2 de chaque couleur (par exemple, 2 chemises rouges, 2 chemises bleues et 1 chemise verte). Cela signifie qu'il doit retirer des chemises de 3 couleurs, car s'il ne retirait que des chemises de 2 couleurs, il retirerait au plus $2 + 2 = 4$ chemises.
Autrement dit, en retirant 5 chemises, il est garanti d'obtenir soit 3 chemises de la même couleur, soit 3 chemises de couleurs différentes.
Donc, Zebediah doit retirer au moins 5 chemises.

Réponse : (D)

15. Si a est impair, la sortie $a + 3$ est paire car elle est égale à la somme de deux entiers impairs.
Si a est pair, la sortie $a + 5$ est impaire car elle est égale à la somme d'un entier pair et d'un entier impair.
Si on présente $a = 15$ comme entrée initiale et qu'on utilise la machine 2 fois, on obtient $15 \to 15 + 3 = 18 \to 18 + 5 = 23$.
Si on présente 23 comme entrée suivante et qu'on utilise la machine 2 fois, on obtient $23 \to 23 + 3 = 26 \to 26 + 5 = 31$.
On remarque que si l'on présente un entier impair comme entrée et qu'on utilise la machine 2 fois, le résultat net est 8 de plus que l'entrée initiale ; l'entrée initiale impaire produit une première sortie qui est 3 de plus que l'entrée initiale (et qui est donc paire) et produit une seconde sortie qui est 5 de plus que la première sortie.
Le résultat net est donc $3 + 5$ de plus que l'entrée initiale.
Donc, en utilisant la machine 46 fois de plus, on répète ces deux étapes à 23 reprises. Puisque 8 est le résultat net de 2 étapes, alors on multiplie 8 par 23 (soit le nombre de fois qu'on répète les 2 étapes) et on ajoute ce produit à 31 pour obtenir la sortie : $31 + 23 \cdot 8 = 215$.
Jusque-là, on a utilisé la machine 50 fois.
En utilisant la machine une 51$^{\text{e}}$ fois, on obtient $215 \to 215 + 3 = 218$. Donc, on obtient une sortie finale de 218.

Réponse : (B)

16. Puisqu'on obtient un reste de 6 lorsqu'on divise 111 par n, alors $111 - 6 = 105$ est un multiple de n et $n > 6$ (puisque, par définition, le reste doit être inférieur au diviseur).
Puisque $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, les diviseurs positifs de 105 sont $1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105$.
Donc, les valeurs possible de n sont 7, 15, 21, 35, 105. Il y a donc 5 valeurs possibles de n.
Réponse : (A)

17. Supposons que la canette avait initialement un rayon de r cm et une hauteur de h cm.
Puisque la canette a une aire totale de 300 cm^2, alors $2\pi r^2 + 2\pi rh = 300$.
Si l'on double le rayon initial, on obtient un rayon de $2r$ cm. On peut donc représenter l'aire totale de cette canette, en cm^2, par l'expression $2\pi(2r)^2 + 2\pi(2r)h$ ou $8\pi r^2 + 4\pi rh$. On a donc $8\pi r^2 + 4\pi rh = 900$.
Si l'on double la hauteur initiale, on obtient une hauteur de $2h$ cm. On peut donc représenter l'aire totale de cette nouvelle canette, en cm^2, par l'expression $2\pi r^2 + 2\pi r(2h)$ ou $2\pi r^2 + 4\pi rh$.
On multiplie $2\pi r^2 + 2\pi rh = 300$ par 3 pour obtenir $6\pi r^2 + 6\pi rh = 900$.
Puisque $8\pi r^2 + 4\pi rh = 900$, on obtient $6\pi r^2 + 6\pi rh = 8\pi r^2 + 4\pi rh$, alors $2\pi rh = 2\pi r^2$ d'où $\pi rh = \pi r^2$.
Puisque $2\pi r^2 + 2\pi rh = 300$ et $\pi rh = \pi r^2$, alors $2\pi r^2 + 2\pi r^2 = 300$, d'où $4\pi r^2 = 300$ ou $\pi r^2 = 75$.
Puisque $\pi rh = \pi r^2 = 75$, alors $2\pi r^2 + 4\pi rh = 6 \cdot 75 = 450$. Donc, si l'on doublait la hauteur de la canette, son aire totale serait égale à 450 cm^2.
Réponse : (A)

18. Soit A le point de départ d'Arianne, B le point de départ de Béatrice et M leur point de rencontre.
Arianne parcourt la distance entre A et M en 42 minutes et celle entre M et B en 28 minutes.
(Remarquons que 9 h est 18 minutes après 8 h 42 et que 9 h 10 est 10 minutes après 9 h.)
Puisque Arianne marche à une vitesse constante, alors le rapport entre la distance AM et la distance MB est égal au rapport des temps de parcours, soit 42 : 28, ce qui est équivalent à 3 : 2.
Puisque Béatrice parcourt la distance entre B et M en 42 minutes, le rapport entre la distance AM et la distance MB est égal à 3 : 2. Puisque Béatrice marche à une vitesse constante, alors il lui faut $\frac{3}{2} \times 42 = 63$ minutes pour parcourir la distance entre M et A.
Donc, Béatrice arrive au point de départ d'Arianne à 9 h 45.
(Remarquons que 9 h est 18 minutes après 8 h 42 et que 9 h 45 est 45 minutes après 9 h.)
Réponse : (D)

19. Puisque le triangle PQR est rectangle en R, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$$

Puisque $PQ > 0$, alors $PQ = 20$.
Puisque M est le milieu de PQ, alors $MQ = \frac{1}{2}PQ = 10$.
Les triangles NMQ et PRQ sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'il partagent un angle aigu Q.
Donc, $\dfrac{NQ}{PQ} = \dfrac{MQ}{RQ}$, alors $\dfrac{NQ}{20} = \dfrac{10}{16}$, d'où $NQ = \dfrac{20 \cdot 10}{16} = \dfrac{25}{2}$.
Donc, $RN = RQ - NQ = 16 - \dfrac{25}{2} = \dfrac{32}{2} - \dfrac{25}{2} = \dfrac{7}{2}$.
Puisque le triangle PNR est rectangle en R, son aire est égale à $\dfrac{1}{2} \cdot PR \cdot RN = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot \dfrac{7}{2} = 21$.
Réponse : (A)

20. On remarque que

$$t_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$$

$$t_1 + t_2 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12} \approx 0{,}92$$

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = 1{,}05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \approx 1{,}13 \end{aligned}$$

Cela signifie que la somme des k premiers termes est inférieure à 1,499 lorsque $k = 1, 2, 3, 4$.
Lorsque $k > 4$, on peut prolonger la régularité que l'on a constaté pour $k = 3$ et $k = 4$ afin de remarquer que

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{k-1} + t_k &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots \\ &\qquad + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \\ &= 1{,}500 - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \end{aligned}$$

Cela signifie que la somme des k premiers termes est inférieure à 1,499 uniquement lorsque $\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2}$ est supérieur à 0,001.

Au fur et à mesure que k augmente à partir de 4, $\dfrac{1}{k+1}$ et $\dfrac{1}{k+2}$ diminuent tous deux, ce qui signifie que leur somme diminue également.

Lorsque $k = 1998$, $\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2} = \dfrac{1}{1999} + \dfrac{1}{2000} > \dfrac{1}{2000} + \dfrac{1}{2000} = \dfrac{1}{1000} = 0{,}001$.

Lorsque $k = 1999$, $\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2} = \dfrac{1}{2000} + \dfrac{1}{2001} < \dfrac{1}{2000} + \dfrac{1}{2000} = \dfrac{1}{1000} = 0{,}001$.

Cela signifie que $\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2}$ est supérieur à 0,001 uniquement lorsque $k \leq 1998$, et inférieur à 0,001 lorsque $k \geq 1999$.

Autrement dit, la somme des k premiers termes est inférieure à 1,499 lorsque $k = 1, 2, 3, 4$ et lorsque $5 \leq k \leq 1998$. C'est-à-dire lorsque $1 \leq k \leq 1998$.
Donc, $k = 1998$ est le plus grand entier strictement positif pour lequel les k premiers termes ont une somme inférieure à 1,499.

Réponse : (E)

21. La masse totale des 6 barres d'acier dans les sacs est supérieure ou égale à $1+2+3+4+5+6 = 21$ kg et inférieure ou égale à $10+11+12+13+14+15 = 75$ kg car les 15 barres d'acier ont les masses suivantes : 1 kg, 2 kg, 3 kg, ..., 14 kg, 15 kg.
Puisque les six barres d'acier sont placées dans trois sacs de manière que les sacs contiennent chacun la même masse totale, alors la masse totale contenue dans chacun des sacs est supérieure ou égale à $21 \div 3 = 7$ kg et inférieure ou égale à $75 \div 3 = 25$ kg.
Il existe $25 - 7 + 1 = 19$ masses qui sont des nombres entiers dans cet intervalle (soit 7 kg, 8 kg, 9 kg, ..., 23 kg, 24 kg, 25 kg).
Chacune de ces 19 masses est en effet possible. Pour le voir, on remarque que

$$1+6 = 2+5 = 3+4 = 7 \qquad 1+7 = 2+6 = 3+5 = 8 \qquad 1+8 = 2+7 = 3+6 = 9$$

d'où on voit donc que 7, 8 et 9 sont des valeurs possibles de M.
Si l'on augmente les valeurs les plus grandes jusqu'à 15, 14, 13, on obtient

$$1+15 = 2+14 = 3+13 = 16$$

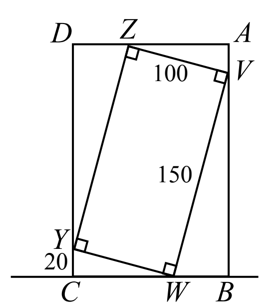
d'où l'on comprend donc que chacun des entiers de 10 à 16 est également une valeur possible de M. À partir des trois derniers couples, on augmente les valeurs les plus petites pour obtenir :

$$2{+}15 = 3{+}14 = 4{+}13 = 17 \qquad 3{+}15 = 4{+}14 = 5{+}13 = 18 \quad \cdots \quad 10{+}15 = 11{+}14 = 12{+}13 = 25$$

On voit donc que 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 et 25 sont également des valeurs possibles de M.
Donc, toute valeur entière de M dans l'intervalle $7 \leq M \leq 25$ est possible.
Il y a donc 19 valeurs possibles de M.

Réponse : 19

22. On trace un rectangle plus grand autour du rectangle de l'énoncé de sorte que le grand rectangle ait des côtés horizontaux et verticaux et que les sommets du petit rectangle soient situés sur les côtés du grand rectangle.
Par souci de simplicité, les unités seront omises de nos calculs.



Puisque $VWYZ$ est un rectangle, alors $YW = ZV = 100$ et $ZY = VW = 150$.
Puisque le triangle YCW est rectangle en C, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$CW^2 = YW^2 - YC^2 = 100^2 - 20^2 = 10\,000 - 400 = 9600$$

Puisque $CW > 0$, alors $CW = \sqrt{9600} = \sqrt{1600 \cdot 6} = \sqrt{1600} \cdot \sqrt{6} = 40\sqrt{6}$.
La hauteur à laquelle le sommet Z est situé au-dessus de la droite horizontale est égale à la longueur de DC, ce qui est égal à $DY + YC$ ou $DY + 20$.
Le triangle ZDY est rectangle en D tandis que le triangle YCW est rectangle en C.
De plus, $\angle DYZ + \angle ZYW + \angle WYC = 180°$, ce qui signifie que $\angle DYZ + \angle WYC = 90°$, puisque $\angle ZYW = 90°$.
Puisqu'on a également $\angle CWY + \angle WYC = 90°$ (en utilisant la somme des mesures des angles du triangle YCW), on obtient $\angle DYZ = \angle CWY$. On voit donc que les triangles ZDY et YCW sont semblables.
Donc, $\dfrac{DY}{ZY} = \dfrac{CW}{YW}$, d'où $DY = \dfrac{ZY \cdot CW}{YW} = \dfrac{150 \cdot 40\sqrt{6}}{100} = 60\sqrt{6}$.
On a donc $DC = DY + 20 = 60\sqrt{6} + 20 \approx 166{,}97$. À l'entier près, on a $DC = 167$.
Puisque $DC = 167$ et que cette longueur est égale à $100 + x$, alors $x = 67$.

Réponse : 67

23. Soit k un entier strictement positif fixe mais inconnu.
Supposons que les droites d'équations $9x + 4y = 600$ et $kx - 4y = 24$ se coupent en (x, y), x et y étant des entiers strictement positifs.
Puisque $9x + 4y = 600$ et $kx - 4y = 24$, on additionne ces équations, membre par membre, pour obtenir $9x + kx = 624$, d'où $(9 + k)x = 624$.
Puisque x et y sont des entiers strictement positifs et $k > 0$, alors $9 + k$ et x sont un couple de facteurs positifs de 624 avec $9 + k > 9$.
Puisque $624 = 6 \cdot 104 = 6 \cdot 8 \cdot 13 = 2^4 3^1 13^1$, alors les diviseurs positifs de 624 sont :

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 13, 16, 24, 26, 39, 48, 52, 78, 104, 156, 208, 312, 624$$

On veut également que la valeur de y soit un entier strictement positif.
Puisque le point (x, y) est situé sur la droite d'équation $9x + 4y = 600$, alors $4y = 600 - 9x$, d'où $y = 150 - \frac{9}{4}x$; la valeur de y étant un entier uniquement lorsque x est un multiple de 4.
Donc, on veut que x soit un diviseur positif de 624 qui est un multiple de 4.
Donc, les valeurs possibles de x sont $4, 8, 12, 16, 24, 48, 52, 104, 156, 208, 312, 624$.
Les valeurs correspondantes de $9 + k$ sont $156, 78, 52, 39, 26, 13, 12, 6, 4, 3, 2, 1$.
Puisque $9 + k > 9$, on peut donc éliminer $6, 4, 3, 2, 1$ de cette liste.
Donc, les valeurs possibles de $9 + k$ sont $156, 78, 52, 39, 26, 13, 12$.
Les valeurs correspondantes de k sont $147, 69, 43, 30, 17, 4, 3$.
Ces dernières correspondent aux valeurs suivantes de x : $4, 8, 12, 16, 24, 48, 52$.
On reporte ces valeurs dans $y = 150 - \frac{9}{4}x$ une à la fois pour obtenir les valeurs suivantes de y : $141, 132, 123, 114, 96, 42, 33$. Ces valeurs sont effectivement positives.
Cela signifie qu'il y a 7 valeurs de k ayant les propriétés requises.

Réponse : 07

24. Puisque $f(p) = 17$, alors $ap^2 + bp + c = 17$.
Puisque $f(q) = 17$, alors $aq^2 + bq + c = 17$.
On soustrait ces deux équations, membre par membre, pour obtenir $a(p^2 - q^2) + b(p - q) = 0$.
Puisque $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$, alors on a $a(p - q)(p + q) + b(p - q) = 0$.
Puisque $p < q$, alors $p - q \neq 0$. Donc, on divise par $p - q$ pour obtenir $a(p + q) + b = 0$.
Puisque $f(p + q) = 47$, alors $a(p + q)^2 + b(p + q) + c = 47$, d'où $(p + q)(a(p + q) + b) + c = 47$.
Puisque $a(p + q) + b = 0$, alors $(p + q)(0) + c = 47$. Donc, $c = 47$.
Puisque $ap^2 + bp + c = 17$, alors $ap^2 + bp = -30$, d'où $p(ap + b) = -30$.
De même, $q(aq + b) = -30$.
Puisque p et q sont des nombres premiers et que a et b sont des entiers, alors p et q doivent être des diviseurs premiers de -30. On remarque que $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ et on rémarque également que p et q doivent être distincts.
Puisque $p < q$, alors $p = 2$ et $q = 3$, ou $p = 2$ et $q = 5$, ou $p = 3$ et $q = 5$.

On pourrait aussi remarquer que puisque $f(p) = f(q) = 17$, alors $f(p) - 17 = f(q) - 17 = 0$.
Donc, $f(x) - 17$ est un polynôme quadratique ayant pour racines p et q. On peut donc écrire $f(x) - 17 = a(x - p)(x - q)$, puisque le polynôme quadratique a pour coefficient dominant a.
Puisque $f(p + q) = 47$, alors $f(p + q) - 17 = a(p + q - p)(p + q - q)$, d'où $47 - 17 = aqp$ ou $apq = 30$.
Comme précédemment, $p = 2$ et $q = 3$, ou $p = 2$ et $q = 5$, ou $p = 3$ et $q = 5$.

Si $p = 2$ et $q = 3$, l'équation $p(ap + b) = -30$ devient $2(2a + b) = -30$ (ou $2a + b = -15$) et l'équation $q(aq + b) = -30$ devient $3(3a + b) = -30$ (ou $3a + b = -10$).
On soustrait l'équation $2a + b = -15$ de l'équation $3a + b = -10$, membre par membre, pour obtenir $a = 5$ (remarquons que $a > 0$), d'où on a donc $b = -15 - 2 \cdot 5 = -25$.
Donc, $f(x) = 5x^2 - 25x + 47$.
Puisque $pq = 6$, alors $f(pq) = 5(6^2) - 25(6) + 47 = 77$.

Si $p = 2$ et $q = 5$, on obtient $2a + b = -15$ et $5a + b = -6$.
On soustrait la première équation de la seconde, membre par membre, pour obtenir $3a = 9$ ou $a = 3$ (remarquons que $a > 0$), d'où on a donc $b = -15 - 2 \cdot 3 = -21$.
Donc, $f(x) = 3x^2 - 21x + 47$.
Puisque $pq = 10$, alors $f(pq) = 3(10^2) - 21(10) + 47 = 137$.

Si $p = 3$ et $q = 5$, on obtient $3a + b = -10$ et $5a + b = -6$.
On soustrait la première équation de la seconde, membre par membre, pour obtenir $2a = 4$ ou $a = 2$ (remarquons que $a > 0$), d'où on a donc $b = -10 - 3 \cdot 2 = -16$.
Donc, $f(x) = 2x^2 - 16x + 47$.
Puisque $pq = 15$, alors $f(pq) = 2(15^2) - 16(15) + 47 = 257$.

Ces valeurs de $f(pq)$ ont une somme de $77 + 137 + 257 = 471$.
Les deux chiffres les plus à droite de cet entier sont 71.

Réponse : 71

25. Considérons la grille de l'énoncé :

a	b	c
d	5	e
f	g	h

On sait que les entiers le long de chaque rangée, de chaque colonne et de chacune des deux diagonales principales ont des sommes qui sont toutes divisibles par 5.
On retire tous les entiers de la grille sauf 5, a, c, f et h.

a		c
	5	

Pour chacun de a et c, on a 9 choix.
Puisque la somme des entiers le long de chaque diagonale est égale à un multiple de 5, alors $a+5+h$ est un multiple de 5, ce qui revient à dire que $a+h$ est un multiple de 5.
Remarquons que chacun de a et h est un entier de 1 à 9.
Si $a=1$, alors $h=4$ ou $h=9$. Si $a=6$, alors $h=4$ ou $h=9$.
Si $a=2$, alors $h=3$ ou $h=8$. Si $a=7$, alors $h=3$ ou $h=8$.
Si $a=3$, alors $h=2$ ou $h=7$. Si $a=8$, alors $h=2$ ou $h=7$.
Si $a=4$, alors $h=1$ ou $h=6$. Si $a=9$, alors $h=1$ ou $h=6$.
Si $a=5$, alors $h=5$.
On écrit $h=\overline{a}$ pour exprimer le fait que h dépend de a. (Remarquons que h ne dépend pas de c.) Gardons en tête qu'il peut y avoir 1 ou 2 valeurs possibles pour h, selon la valeur de a.

De même, $c+5+f$ est un multiple de 5. Donc, $c+f$ est également un multiple de 5. Donc, c et f ont les mêmes combinaisons de valeurs possibles que a et h.
On écrit $f=\overline{c}$. On a donc

a		c
	5	
$\overline{c}$		$\overline{a}$

Puisque $a+b+c$ est un multiple de 5, alors $b+(a+c)$ est un multiple de 5. On écrit donc $b=\overline{a+c}$, puisque b dépend de $a+c$.
On a donc

a	$\overline{a+c}$	c
	5	
$\overline{c}$		$\overline{a}$

Puisque chacun de a et c est un entier de 1 à 9, alors $a+c$ est un entier de 2 à 18. Rappelons que $b=\overline{a+c}$ est également un entier de 1 à 9.
Si $a+c$ est l'un de 2, 7, 12 et 17, alors les valeurs possibles de $b=\overline{a+c}$ sont 3 et 8.
Si $a+c$ est l'un de 3, 8, 13 et 18, alors les valeurs possibles de $b=\overline{a+c}$ sont 2 et 7.
Si $a+c$ est l'un de 4, 9 et 14, alors les valeurs possibles de $b=\overline{a+c}$ sont 1 et 6.
Si $a+c$ est l'un de 5, 10 et 15, alors $b=\overline{a+c}=5$.
Si $a+c$ est l'un de 6, 11 et 16, alors les valeurs possibles de $b=\overline{a+c}$ sont 4 et 9.

On peut maintenant commencer à considérer les cas. Puisque l'on a vu ci-dessus que le nombre de possibilités pour certaines des entrées dépend de si a et c sont égaux à 5 ou non, alors on considère les cas (i) $a = c = 5$, (ii) $a = 5$ et $c \neq 5$, (iii) $c = 5$ et $a \neq 5$, et (iv) $a \neq 5$ et $c \neq 5$.

<u>1^er cas : $a = c = 5$</u>
D'après ce qui précède, il n'y a qu'un seul choix possible pour chacun de $\overline{a}$ et $\overline{c}$: soit chacun doit être égal à 5.
De plus, $a + c = 10$. Donc $\overline{a + c}$ doit aussi égaler 5, d'où on a donc la grille :

5	5	5
	5	
5		5

De même, on ne peut placer que l'entier 5 dans chacune des cases restantes. Il n'y a donc qu'une seule façon de compléter la grille dans ce cas.

<u>2^e cas : $a = 5$ et $c \neq 5$</u>
Puisque $a = 5$, alors $\overline{a} = 5$.
De plus, puisque $a = 5$, alors $a + c = 5 + c$. Cela signifie que $\overline{a + c}$ est égal à $\overline{c}$, d'où on a donc la grille :

5	$\overline{c}$	c
	5	
$\overline{c}$		5

Dans ce cas, il y a 8 choix pour c (tout sauf 5) et 2 choix pour chaque $\overline{c}$ (puisque c n'est pas égal à 5). De plus, les possibilités pour les 3 cases vides sont déterminées soit par la valeur de c soit par la valeur de $\overline{c}$, aucune des deux ne pouvant être un multiple de 5.
Il y a donc 2 possibilités pour chacune de ces 3 cases vides.
Donc, dans ce cas, il y a $1^2 \cdot 8 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 2^8$ grilles en tout.

<u>3^e cas : $c = 5$ et $a \neq 5$</u>
Si $c = 5$ et $a \neq 5$, alors il y a aussi 2^8 grilles.

On considère par la suite la situation où $a \neq 5$ et $c \neq 5$.
On sait qu'il y a deux valeurs possibles pour chacun de $\overline{a}$ et $\overline{c}$. Cependant, le nombre de valeurs possibles de $\overline{a + c}$ dépend de si $a+c$ est un multiple de 5 ou non. De plus, le nombre de possibilités pour les 3 cases non nommées dépend également des valeurs des combinaisons de a, c, $\overline{a}$ et $\overline{c}$. D'où on a donc trois cas supplémentaires où $a \neq 5$ et $c \neq 5$.

<u>4^e cas : $a \neq 5$, $c \neq 5$ et $a + c$ est un multiple de 5</u>
Il y a 8 choix pour a (tout sauf 5).
Il y a donc 2 choix pour c (celui qui fera de sorte que $a + c$ soit un multiple de 5).
Il y a 2 choix pour chacun de $\overline{a}$ et $\overline{c}$, puisque ni a ni c n'est égal à 5.
De plus, $\overline{a + c} = 5$ puisque $a + c$ est un multiple de 5.
On a donc la grille suivante :

a	5	c
	5	
$\overline{c}$		$\overline{a}$

Pour que la somme de la colonne du milieu soit égale à un multiple de 5, on doit placer un 5 dans la case vide de la rangée du bas.

En examinant les première et troisième colonnes, on constate que ni $a+\overline{c}$ ni $c+\overline{a}$ ne peut être égal à un multiple de 5.
On peut le justifier en remarquant que puisque $a+c$ est un multiple de 5, les restes que l'on obtient lorsque a et c sont divisés par 5 doivent avoir une somme de 5.
Cela signifie que a et $\overline{c}$ ont le même reste non nul lorsqu'ils sont divisés par 5, ce qui signifie que leur somme ne peut admettre 5 comme diviseur.
Par conséquent, les 2 cases vides restantes ont chacune 2 entrées possibles pour que leurs colonnes aient des sommes qui soient égales à des multiples de 5.
Il y a 8 choix pour a, 2 choix pour c, 2 cases dans lesquelles on doit placer 5, et 2 choix pour chacune des 4 cases restantes..
Dans ce cas, il y a donc $8 \cdot 2 \cdot 1^2 \cdot 2^4 = 2^8$ grilles.

Enfin, on examine les grilles où $a \neq 5$, $c \neq 5$ et $a+c$ n'est pas un multiple de 5, tout en considérant séparément les situations où $a-c$ est un multiple de 5 et $a-c$ n'est pas un multiple de 5.

<u>5^e cas : $a \neq 5$, $c \neq 5$, $a+c$ n'est pas un multiple de 5 et $a-c$ est un multiple de 5</u>
Il y a 8 choix pour a.
Il y a alors 2 choix pour c : celui qui fera de sorte que l'on obtienne le même reste que a lorsqu'on le divise par 5.
Il y a 2 choix pour chacun de $\overline{a}$, $\overline{c}$ et $\overline{a+c}$ puisqu'aucun de a, c et $a+c$ n'est un multiple de 5.

a	$\overline{a+c}$	c
	5	
$\overline{c}$		$\overline{a}$

Puisque $a-c$ est un multiple de 5, alors $a+\overline{c}$ et $c+\overline{a}$ sont tous deux des multiples de 5.
Pour le voir, remarquons que $\overline{c} = 5-c$ ou $\overline{c} = 10-c$ ou $\overline{c} = 15-c$. Donc, $a+\overline{c}$ est égal à l'un de $5+a-c$ ou $10+a-c$ ou $15+a-c$, qui sont tous des multiples de 5 puisque $a-c$ l'est.
Cela signifie que l'on doit placer un 5 dans chacune des cases vides dans la colonne de gauche et celle de droite.
Enfin, il y a 2 choix possibles pour la case vide du bas (puisque $\overline{a+c}$ n'est pas un multiple de 5).
Dans ce cas, il y a donc $8 \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot 1^2 \cdot 2 = 2^8$ grilles.

<u>6^e cas : $a \neq 5$, $c \neq 5$, $a+c$ n'est pas un multiple de 5 et $a-c$ n'est pas un multiple de 5</u>
Il y a 8 choix pour a.
Il y a alors 4 choix pour c (soit les choix qui ne sont pas : 5, les deux choix qui font de $a+c$ un multiple de 5, les deux choix qui font de $a-c$ un multiple de 5).
Il y a 2 choix pour chacun de $\overline{a}$, $\overline{c}$ et $\overline{a+c}$.
Il y a également 2 choix pour chacune des 3 entrées restantes de la grille puisque les deux entrées de la première colonne, celles de la troisième colonne et celles de la troisième rangée n'ont pas des sommes qui admettent 5 comme diviseur.
Dans ce cas, il y a $8 \cdot 4 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{11}$ grilles.

En combinant tous les cas, on peut compléter la grille de

$$N = 1 + 2^8 + 2^8 + 2^8 + 2^8 + 2^{11} = 1 + 4 \cdot 2^8 + 2^{11} = 3073 \text{ façons.}$$

Les deux chiffres les plus à droite de N sont 73.

Réponse : 73

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2021

(11e année – Secondaire V)

le mardi 23 février 2021

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 24 février 2021

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Un rectangle ayant une largeur de 2 cm et une longueur de 3 cm a une aire de 2 cm$\times$3 cm $=$ 6 cm^2.

Réponse : (E)

2. On a $2 + 3 \times 5 + 2 = 2 + 15 + 2 = 19$.

Réponse : (A)

3. Exprimé sous forme de fraction, 25 % est équivalent à $\frac{1}{4}$.
Puisque $\frac{1}{4}$ de 60 est égal à 15, alors 25 % de 60 est égal à 15.

Réponse : (B)

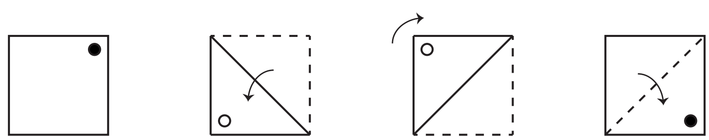
4. Lorsque $x \neq 0$, on obtient $\dfrac{4x}{x+2x} = \dfrac{4x}{3x} = \dfrac{4}{3}$.
Donc, lorsque $x = 2021$, on a $\dfrac{4x}{x+2x} = \dfrac{4}{3}$.
Par ailleurs, on pourrait poser $x = 2021$ pour obtenir $\dfrac{4x}{x+2x} = \dfrac{8084}{2021+4042} = \dfrac{8084}{6063} = \dfrac{4}{3}$.

Réponse : (B)

5. Remarquons que $6 = 2 \times 3$, que $27 = 3 \times 9$, que $39 = 3 \times 13$ et que $77 = 7 \times 11$. Donc, 6, 27, 39 et 77 peuvent chacun être exprimés sous la forme d'un produit de deux entiers (ces derniers étant chacun supérieur à 1).
Donc, 53 est l'entier qui ne peut pas être exprimé comme produit de deux entiers, chacun étant supérieur à 1. On peut vérifier que 53 est bien un nombre premier.

Réponse : (C)

6. On dessine un point non ombré pour représenter l'emplacement du point lorsqu'il se trouve de l'autre côté de la feuille de papier. Donc, le point se déplace comme suit :



Remarquons que le fait de plier et de déplier le papier n'a aucun effet net sur la figure. Donc, on peut tout simplement déterminer la figure résultante en faisant subir au carré initial une rotation autour de son centre de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

Réponse : (E)

7. Lorsque $x = -2$, on a $x^2 = 4$. Dans ce cas, $x < x^2$.
Lorsque $x = -\frac{1}{2}$, on a $x^2 = \frac{1}{4}$. Dans ce cas, $x < x^2$.
Lorsque $x = 0$, on a $x^2 = 0$. Dans ce cas, $x = x^2$.
Lorsque $x = \frac{1}{2}$, on a $x^2 = \frac{1}{4}$. Dans ce cas, $x > x^2$.
Lorsque $x = 2$, on a $x^2 = 4$. Dans ce cas, $x < x^2$.
Donc, $x = \frac{1}{2}$ est le seul choix vérifiant $x > x^2$.

Réponse : (D)

8. Supposons que a est le chiffre des dizaines de l'entier initial et que b est le chiffre des unités de l'entier initial.
Cet entier est égal à $10a + b$.
Lorsqu'on renverse l'ordre des chiffres, le nouvel entier a b pour chiffre des dizaines et a pour chiffre des unités.
Ce nouvel entier est égal à $10b + a$.
Sachant qu'on obtient 54 lorsqu'on soustrait l'entier initial du nouvel entier de deux chiffres, alors $(10b + a) - (10a + b) = 54$, d'où $9b - 9a = 54$ ou $b - a = 6$.
Donc, la différence positive entre les deux chiffres de l'entier initial est 6. Un exemple d'un tel couple d'entiers sont les entiers 71 et 17.

Réponse : (C)

9. La droite d'équation $y = 2x - 6$ a une pente de 2. Lorsque cette droite subit une translation, la pente demeure inchangée.
La droite d'équation $y = 2x - 6$ a une ordonnée à l'origine de -6. Lorsque cette droite subit une translation de 4 unités vers le haut, son ordonnée à l'origine subit cette translation, d'où l'image a donc une ordonnée à l'origine de -2.
Donc, l'équation de la nouvelle droite est $y = 2x - 2$.
Pour déterminer l'abscisse à l'origine de cette droite, on pose $y = 0$ pour obtenir $0 = 2x - 2$ ou $2x = 2$, soit $x = 1$.
Donc, la nouvelle droite a une abscisse à l'origine de 1.

Réponse : (D)

10. D'après les lois des exposants, on a $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 3^x \cdot 9$.
Puisque $3^x = 5$, alors $3^{x+2} = 3^x \cdot 9 = 5 \cdot 9 = 45$.

Réponse : (E)

11. Étant donné que le deuxième nombre que l'on additionne est supérieur à 300 et que la somme a R pour chiffre des centaines, alors R ne peut être égal à 0.
Dans la colonne des unités, on voit que $R + R$ a 0 pour chiffre des unités. Puisque $R \neq 0$, alors $R = 5$.
L'addition devient donc :

$$\begin{array}{cccc} & & {}^{1} & \\ & P & 7 & 5 \\ + & 3 & 9 & 5 \\ \hline & 5 & Q & 0 \end{array}$$

Puisque $1+7+9 = 17$, alors $Q = 7$, d'où on a donc $1+P+3 = 5$, soit $P = 1$. L'addition devient donc :

$$\begin{array}{cccc} & {}^{1} & {}^{1} & \\ & 1 & 7 & 5 \\ + & 3 & 9 & 5 \\ \hline & 5 & 7 & 0 \end{array}$$

On a donc $P + Q + R = 1 + 7 + 5 = 13$.

Réponse : (A)

12. Un carré parfait est divisible par 9 uniquement lorsque sa racine carrée est divisible par 3.
Autrement dit, n^2 est divisible par 9 uniquement lorsque n est divisible par 3.
Il y a 6 multiples de 3 dans la liste $1, 2, 3, \ldots, 19, 20$.
Donc, il y a 6 multiples de 9 dans la liste $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 19^2, 20^2$.

Réponse : (E)

13. Dans un triangle rectangle isocèle, le rapport entre la longueur de l'hypoténuse et la longueur de chacun des côtés les plus courts est de $\sqrt{2} : 1$.
Considérons le triangle WZX. Ce dernier est isocèle et rectangle en Z.
Dans ce cas, $WX : WZ = \sqrt{2} : 1$. Puisque $WX = 6\sqrt{2}$, alors $WZ = \dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6$.
Puisque le triangle WZX est isocèle, alors $XZ = WZ = 6$.
Considérons le triangle XYZ. Ce dernier est isocèle et rectangle en Y.
Dans ce cas, $YZ = \dfrac{XZ}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.
Puisque le triangle XYZ est isocèle, alors $XY = YZ = 3\sqrt{2}$.
Donc, $WXYZ$ a un périmètre de

$$WX + XY + YZ + WZ = 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6 = 12\sqrt{2} + 6 \approx 22.97$$

Parmi les choix de réponse, 23 est le choix le plus près.

Réponse : (C)

'

14. Soit r km/h la vitesse de Natasha en courant.
Puisque Natasha avance 3 fois plus vite en vélo qu'en courant, alors sa vitesse à vélo est égale à $3r$ km/h.
En courant pendant une heure, Natasha parcourt $(1 \text{ h}) \cdot (r \text{ km/h}) = r$ km.
En faisant du vélo pendant quatre heures, Natasha parcourt $(4 \text{ h}) \cdot (3r \text{ km/h}) = 12r$ km.
Donc, le rapport entre la distance parcourue à vélo et celle parcourue en courant est équivalent au rapport $12r$ km : r km, ce qui est équivalent à $12 : 1$.

Réponse : (A)

15. *Solution 1*
Puisque a est un entier strictement positif, alors $45a$ est un entier strictement positif.
Puisque b est un entier strictement positif, alors $45a$ est inférieur à 2021.
Le plus grand multiple de 45 inférieur à 2021 est $45 \times 44 = 1980$. (Remarquons que $45 \cdot 45 = 2025$, ce qui est supérieur à 2021.)
Si $a = 44$, alors $b = 2021 - 45 \cdot 44 = 41$.
Dans ce cas, $a + b = 44 + 41 = 85$.
Si a est diminué de 1, la valeur de $45a + b$ est diminué de 45, d'où b doit donc être augmenté de 45 pour conserver la même valeur de $45a+b$, ce qui augmente la valeur de $a+b$ par $-1+45 = 44$.
Donc, si $a < 44$, la valeur de $a + b$ sera toujours supérieure à 85.
Si $a > 44$, alors $45a > 2021$, d'où la valeur de b est donc négative, ce qui est impossible.
Donc, 85 est la valeur minimale possible de $a + b$.

Solution 2
On peut écrire $45a + b = 2021$ sous la forme $44a + (a + b) = 2021$.
Puisque a et b sont des entiers strictement positifs, alors $44a$ et $a+b$ sont des entiers strictement positifs.
En particulier, on a donc que $44a$ (qui est un multiple de 44) est inférieur à 2021.
Puisque $44a$ et $a + b$ ont une somme constante, alors pour minimiser la valeur de $a + b$, on peut essayer de maximiser la valeur de $44a$.
Puisque $44 \cdot 45 = 1980$ et $44 \cdot 46 = 2024$, le plus grand multiple de 44 inférieur à 2021 est 1980.
On a donc $a + b \geq 2021 - 1980 = 41$.

Or, $a+b$ ne peut être égal à 41 car il faudrait que $44a = 1980$ ou $a = 45$ (ce qui fait de sorte que $b = -4$) afin que cela soit possible.
Le prochain multiple de 44 inférieur à 1980 est $44 \cdot 44 = 1936$.
Si $a = 44$, alors $a + b = 2021 - 44a = 85$.
Si $a = 44$ et $a + b = 85$, alors $b = 41$, ce qui est possible.
Puisque $a + b = 41$ est impossible et que 85 est la plus petite valeur suivante possible de $a + b$, alors 85 est la valeur minimale possible de $a + b$.

Réponse : (C)

16. Les quelques premières valeurs de $n!$ sont :

$$\begin{aligned}
1! &= 1\\
2! &= 2(1) = 2\\
3! &= 3(2)(1) = 6\\
4! &= 4(3)(2)(1) = 24\\
5! &= 5(4)(3)(2)(1) = 120
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}
2! - 1! &= 1\\
4! - 1! &= 23\\
3! - 1! &= 5\\
5! - 1! &= 119
\end{aligned}$$

Cela signifie que si a et b sont des entiers strictement positifs tels que $b > a$, alors 1, 3, 5 et 9 sont tous des chiffres des unités possibles de $b! - a!$.
Cela signifie que la seule réponse possible est le choix (D), soit 7.

Pour fin de précision, on doit expliquer pourquoi $b! - a!$ ne peut avoir 7 pour chiffre des unités.
Pour que $b! - a!$ soit impair, l'un de $b!$ et $a!$ est pair tandis que l'autre est impair.
Le seule factorielle impaire est $1!$, puisque tout autre factorielle a un facteur 2.
Puisque $b > a$, alors si l'un de a et b vaut 1, on doit avoir $a = 1$.
Pour que $b! - 1$ ait 7 pour chiffre des unités, $b!$ doit avoir 8 pour chiffre des unités.
Cela est impossible car les quelques premières factorielles sont présentées ci-dessus et tout factorielle supérieure a 0 pour chiffre des unités (car étant un multiple et de 2 et de 5).

Réponse : (D)

17. Puisque les deux entiers les plus petits de l'ensemble S ont une moyenne de 5, leur somme est égale à $2 \cdot 5 = 10$.
Puisque les deux entiers les plus grands de l'ensemble S ont une moyenne de 22, leur somme est égale $2 \cdot 22 = 44$.
Soit $p < q < r < t < u$ les cinq autres entiers strictement positifs distincts de l'ensemble S.
Les neuf entiers de l'ensemble S ont donc une moyenne égale à $\dfrac{10 + 44 + p + q + r + t + u}{9}$ ou $6 + \dfrac{p + q + r + t + u}{9}$.
On veut que cette moyenne soit aussi grande que possible.
Pour que cette moyenne soit aussi grande que possible, $\dfrac{p + q + r + t + u}{9}$ doit être aussi grand que possible, d'où $p + q + r + t + u$ doit donc être aussi grand que possible.

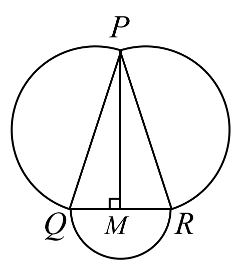
Quelle est la valeur maximale possible de u ?
Soit x et y les deux entiers les plus grands de l'ensemble S tels que $x < y$. Puisque x et y sont les deux entiers les plus grands, alors $u < x < y$.
Puisque $x + y = 44$, que $x < y$ et que x et y sont des entiers, alors $x \leq 21$.
Pour que u soit aussi grand que possible (ce qui assurera que p, q, r et t soient aussi grands que possible), on pose $x = 21$.
Dans ce cas, on peut avoir $u = 20$.
Pour que p, q, r et t soient aussi grands que possible, on pose $p = 16$, $q = 17$, $r = 18$ et $t = 19$.
Dans ce cas, $p + q + r + t + u = 90$.
Si $x < 21$, alors $p + q + r + t + u$ sera plus petit et n'aura donc pas la valeur maximale possible.
Donc, $6 + \dfrac{90}{9} = 16$ est la plus grande moyenne possible de tous les entiers de l'ensemble S.

Réponse : (B)

18. Supposons que $PQ = PR = 2x$ et que $QR = 2y$.
Les demi-cercles de diamètres PQ et PR ont donc chacun un rayon de x tandis que le demi-cercle de diamètre QR a un rayon de y.
Chaque demi-cercle de rayon x a une aire égale à $\frac{1}{2}\pi x^2$ tandis que le demi-cercle de rayon y a une aire égale à $\frac{1}{2}\pi y^2$.
Puisque les aires des trois demi-cercles ont une somme égale à 5 fois l'aire du demi-cercle de diamètre QR, alors

$$\tfrac{1}{2}\pi x^2 + \tfrac{1}{2}\pi x^2 + \tfrac{1}{2}\pi y^2 = 5 \cdot \tfrac{1}{2}\pi y^2$$

On a donc $x^2 + x^2 + y^2 = 5y^2$, d'où $2x^2 = 4y^2$ ou $x^2 = 2y^2$, soit $x = \sqrt{2}y$.
Soit M le milieu de QR et joignons P à M.



Puisque le triangle PQR est isocèle et $PQ = PR$, alors PM et QR sont perpendiculaires.
Autrement dit, le triangle PMQ est rectangle en M.
Donc, $\cos(\angle PQR) = \cos(\angle PQM) = \dfrac{QM}{PQ} = \dfrac{\frac{1}{2}QR}{PQ} = \dfrac{y}{2x} = \dfrac{y}{2\sqrt{2}y} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4 \cdot 2}} = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$.

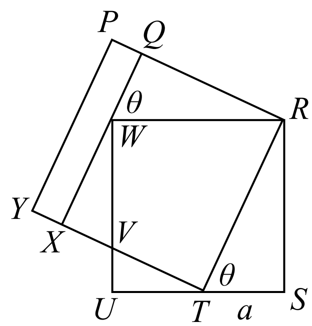
Réponse : (B)

19. Puisque $x + y = 7$, alors $x + y + z = 7 + z$.
Donc, l'équation $(x + y + z)^2 = 4$ devient $(7 + z)^2 = 4$.
Puisque le carré de $7 + z$ est égal à 4, alors $7 + z = 2$ ou $7 + z = -2$.
Si $7 + z = 2$, alors $z = -5$.
Dans ce cas, puisque $xz = -180$, alors on a $x = \dfrac{-180}{-5} = 36$, d'où $y = 7 - x = -29$.
Si $7 + z = -2$, alors $z = -9$.
Dans ce cas, puisque $xz = -180$, alors on a $x = \dfrac{-180}{-9} = 20$, d'où $y = 7 - x = -13$.
On peut confirmer par substitution que $(x, y, z) = (36, -29, -5)$ et $(x, y, z) = (20, -13, -9)$ vérifient bel et bien le système d'équations de l'énoncé.

Puisque S est la somme des valeurs possibles de y, alors $S = (-29) + (-13) = -42$, d'où $-S = 42$.

Réponse : (E)

20. Soit $ST = a$ et $\angle STR = \theta$.
Puisque le triangle RST est rectangle en S, alors $\angle TRS = 90° - \theta$.
Puisque $PRTY$ et $WRSU$ sont des carrés, alors $\angle PRT = \angle WRS = 90°$.
Donc, $\angle QRW + \angle WRT = \angle WRT + \angle TRS$, d'où $\angle QRW = \angle TRS = 90° - \theta$.
Puisque $PQXY$ est un rectangle, alors $\angle PQX = 90°$, d'où le triangle WQR est donc rectangle en Q.
On a donc $\angle QWR = 90° - \angle QRW = 90° - (90° - \theta) = \theta$.



On considère le triangle RST.
Puisque $ST = a$ et que $\angle STR = \theta$, alors $\cos\theta = \dfrac{a}{RT}$, d'où $RT = \dfrac{a}{\cos\theta}$.
De plus, $\tan\theta = \dfrac{RS}{a}$, d'où $RS = a\tan\theta$.
Puisque $PRTY$ est un carré, alors $PY = PR = RT = \dfrac{a}{\cos\theta}$.
Puisque $WRSU$ est un carré, alors $RW = RS = a\tan\theta$.
On considère ensuite le triangle QRW.
Puisque $RW = a\tan\theta$ et que $\angle QWR = \theta$, alors $\sin\theta = \dfrac{QR}{a\tan\theta}$, d'où $QR = a\tan\theta\sin\theta$.
On a donc

$$\begin{aligned}
PQ &= PR - QR \\
&= \frac{a}{\cos\theta} - a\tan\theta\sin\theta \\
&= \frac{a}{\cos\theta} - a\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\sin\theta \\
&= \frac{a}{\cos\theta} - \frac{a\sin^2\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{a(1-\sin^2\theta)}{\cos\theta} \\
&= \frac{a\cos^2\theta}{\cos\theta} \qquad (\text{car } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1) \\
&= a\cos\theta \qquad (\text{car } \cos\theta \neq 0)
\end{aligned}$$

Puisque le rectangle $PQXY$ a une aire de 30, alors $PQ \cdot PY = 30$, d'où $a\cos\theta \cdot \dfrac{a}{\cos\theta} = 30$ ou $a^2 = 30$.
Puisque $a > 0$, alors on a $a = \sqrt{30} \approx 5{,}48$. Parmi les choix de réponse, 5,5 est le choix le plus près de $ST = a$.

Réponse : (C)

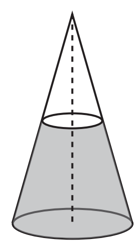
21. Puisque $f(2) = 5$ et que $f(mn) = f(m) + f(n)$, alors $f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 10$.
Puisque $f(3) = 7$, alors $f(12) = f(4 \cdot 3) = f(4) + f(3) = 10 + 7 = 17$.

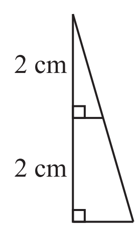
Bien que cela réponde à la question, existe-t-il réellement une fonction qui répond aux critères ? La réponse est oui.
Une fonction qui répond aux critères de l'énoncé est la fonction f définie par $f(1) = 0$ et $f(2^p 3^q r) = 5p + 7q$ pour tous les entiers non négatifs p et q et pour tous les entiers strictement positifs r qui ne sont pas divisibles par 2 ou par 3. Pouvez-vous voir pourquoi cette fonction répond aux critères ?

Réponse : (A)

22. L'aire totale du cône comprend l'aire de la base circulaire et l'aire de la surface latérale.
La base circulaire du cône non peint a une aire de $\pi r^2 = \pi(3 \text{ cm})^2 = 9\pi \text{ cm}^2$ tandis que sa surface latérale a une aire de $\pi rs = \pi(3 \text{ cm})(5 \text{ cm}) = 15\pi \text{ cm}^2$.
Donc, le cône non peint a une aire totale de $9\pi \text{ cm}^2 + 15\pi \text{ cm}^2 = 24\pi \text{ cm}^2$.
Puisque la hauteur et la base sont perpendiculaires, les longueurs s, h et r forment un triangle rectangle avec s pour hypoténuse.
Donc, d'après le théorème de Pythagore, $h^2 = s^2 - r^2 = (5 \text{ cm})^2 - (3 \text{ cm})^2 = 16 \text{ cm}^2$, d'où $h = 4$ cm.

Lorsqu'on place le cône non peint dans le seau de peinture de manière que la base circulaire du cône repose à plat sur le fond du seau, la profondeur de la peinture dans le seau est de 2 cm. Évidemment, la base circulaire (dont l'aire est de $9\pi \text{ cm}^2$) est donc recouverte de peinture.
De plus, la partie inférieure de la surface latérale du cône est également recouverte de peinture.





La partie non peinte du cône est elle-même un cône de hauteur 2.
Lorsque l'on effectue une coupe transversale verticale passant par l'apex du cône et par un diamètre de la base, le triangle formé au-dessus de la peinture est semblable au triangle initial et a la moitié de ses dimensions. Les triangles sont semblables car les deux sont rectangles et possèdent un sommet (le sommet supérieur) en commun. Le rapport est de 2 : 1 puisqu'ils ont 4 cm et 2 cm pour hauteurs.
Donc, le cône non peint est de rayon 1,5 cm (la moitié du rayon initial de 3 cm) et a une génératrice (apothème) de longueur 2,5 cm (la moitié de la longueur de la génératrice initiale, soit 5 cm).
Donc, la surface latérale non peinte est la surface latérale d'un cône de rayon 1,5 cm et dont la génératrice a une longueur de 2,5 cm ; l'aire de la surface latérale d'un tel cône est donc égale à $\pi(1{,}5 \text{ cm})(2{,}5 \text{ cm}) = 3{,}75\pi \text{ cm}^2$.
Cela signifie que la surface latérale qui est recouverte de peinture a une aire de $15\pi \text{ cm}^2 - 3{,}75\pi \text{ cm}^2 = 11{,}25\pi \text{ cm}^2$. (Cela représente en fait les trois quarts de l'aire totale. Pouvez-vous expliquer pourquoi cela est vrai d'une manière différente ?)
Donc, la fraction de la surface totale du cône qui est recouverte de peinture est égale à

$$\frac{9\pi \text{ cm}^2 + 11{,}25\pi \text{ cm}^2}{24\pi \text{ cm}^2} = \frac{20{,}25}{24} = \frac{81}{96} = \frac{27}{32}$$

Puisque la fraction $\dfrac{27}{32}$ est irréductible, alors $p + q = 27 + 32 = 59$.

Réponse : (A)

23. Étant donné que chaque figure est formée en plaçant deux copies de la figure précédente côte à côte le long de la base, puis en ajoutant d'autres parties au-dessus, le nombre de points dans la base de chaque figure est deux fois plus grand que dans la figure précédente.
Puisque chaque figure est un triangle équilatéral, le nombre de points dans la figure est égal à la somme des entiers strictement positifs allant de 1 jusqu'au nombre de points dans la base inclusivement. Autrement dit, si la base d'une figure comprend b points, alors la figure comprend $1 + 2 + 3 + \cdots + (b - 1) + b$ points. Cette somme est égale à $\frac{1}{2}b(b + 1)$. (Si cette formule pour la somme vous semble peu familière, pouvez-vous démontrer sa validité ?)
Puisque chaque figure est formée à l'aide de trois copies de la figure précédente et que tout espace vide résultant est rempli avec des points ombrés, alors le nombre de points non ombrés dans chaque figure est exactement trois fois le nombre de points non ombrés dans la figure précédente.
Puisque chaque point est soit ombré soit non ombré, le nombre de points ombrés est égal au nombre total de points moins le nombre de points non ombrés.
On peut donc construire le tableau suivant :

Figure	Points dans la base	Points dans la figure	Points non ombrés	Points ombrés
1	2	3	3	0
2	4	10	9	1
3	8	36	27	9
4	16	136	81	55
5	32	528	243	285
6	64	2080	729	1351
7	128	8256	2187	6069
8	256	32 896	6561	26 335
9	512	131 328	19 683	111 645

Donc, la plus petite valeur de n telle que la Figure n comprend au moins 100 000 points est $n = 9$.

Remarquons que puisque la Figure 1 a 2 points dans sa base et que le nombre de points dans la base de chaque figure subséquente est le double du nombre de points dans la figure précédente, alors la Figure n a 2^n points dans sa base.
Étant donné que la Figure 1 a 3 points non ombrés et que le nombre de points non ombrés dans chaque figure subséquente est trois fois le nombre de points non ombrés dans la figure précédente, alors la Figure n comprend 3^n points non ombrés.
Donc on peut développer une formule représentant le nombre de points non ombrés dans la Figure n ; soit la formule $\frac{1}{2}2^n(2^n + 1) - 3^n$ que l'on peut écrire sous la forme $2^{2n-1} + 2^{n-1} - 3^n$, ce qui correspond aux nombres dans le tableau ci-dessus.

Réponse : (B)

24. Les courbes définies par les équations $y = ax^2 + 2bx - a$ et $y = x^2$ se coupent exactement lorsque l'équation
$$ax^2 + 2bx - a = x^2$$
admet au moins une solution réelle.
Cette équation admet au moins une solution réelle lorsque l'équation quadratique
$$(a - 1)x^2 + 2bx - a = 0$$

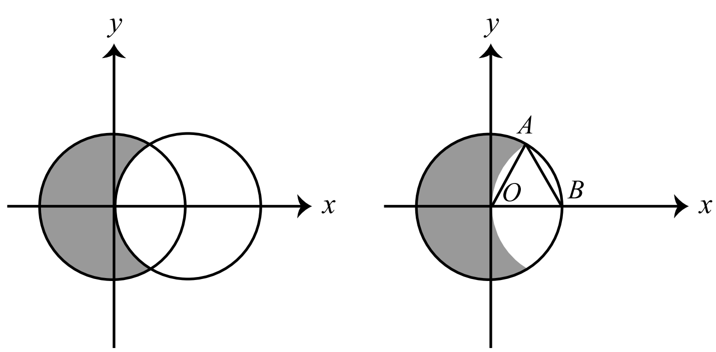
admet au moins une solution réelle.
(Remarquons que lorsque $a = 1$, cette équation est linéaire tant que $b \neq 0$ et admettra donc au moins une solution réelle.)
Cette équation quadratique admet au moins une solution réelle lorsque son discriminant est non négatif ; c'est-à-dire lorsque

$$(2b)^2 - 4(a-1)(-a) \geq 0$$

À l'aide de manipulations algébriques, on obtient les inéquations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} 4a^2 - 4a + 4b^2 &\geq 0 \\ a^2 - a + b^2 &\geq 0 \\ a^2 - a + \tfrac{1}{4} + b^2 &\geq \tfrac{1}{4} \\ a^2 - 2a(\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2})^2 + b^2 &\geq \tfrac{1}{4} \\ (a - \tfrac{1}{2})^2 + b^2 &\geq (\tfrac{1}{2})^2 \end{aligned}$$

Donc, il faut déterminer la probabilité pour qu'un point (a, b) vérifie $(a - \frac{1}{2})^2 + b^2 \geq (\frac{1}{2})^2$ étant donné qu'il vérifie $a^2 + b^2 \leq (\frac{1}{2})^2$.
L'équation $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$ représente un cercle de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
L'inéquation $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq (\frac{1}{2})^2$ représente la région en dehors de ce cercle.
L'équation $x^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$ représente un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
L'inéquation $x^2 + y^2 \leq (\frac{1}{2})^2$ représente la région à l'intérieur de ce cercle.
En reformulant le problème d'une manière géométrique équivalente, on veut déterminer la probabilité pour qu'un point (a, b) soit situé *à l'extérieur* du cercle de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ étant donné qu'il est situé *à l'intérieur* du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
Remarquons que que chacun de ces deux cercles passe par le centre de l'autre cercle.



En d'autres termes, on veut déterminer la fraction de l'aire du cercle ayant pour centre l'origine qui est en dehors du cercle ayant $(\frac{1}{2}, 0)$ pour centre. Cette région est ombrée dans la première figure ci-dessus.
Soit $r = \frac{1}{2}$.
Chaque cercle a une aire de πr^2.
Pour déterminer l'aire de la région ombrée, on soustrait l'aire de la région non ombrée de l'aire du cercle. Par symétrie, l'aire de la région non ombrée située en dessous de l'axe des abscisses est égale à l'aire de la région ombrée située au-dessus de l'axe des abscisses.
Dans la deuxième figure ci-dessus, l'origine est représentée par O, le point où le cercle de centre O coupe l'axe des abscisses est représenté par B tandis que le point où les deux cercles se coupent dans le premier quadrant est représenté par A. La région non ombrée située au-dessus de l'axe des abscisses est composée du triangle AOB et de deux régions curvilignes.
Puisque OA et OB sont des rayons du cercle de centre O, alors $OA = OB = r$.

Puisque AB est un rayon du cercle de centre B, alors $AB = r$.
Cela signifie que le triangle OAB est équilatéral et a donc trois angles dont chacun a une mesure de 60°.
Lorsqu'on combine le triangle OAB avec la région curviligne située au-dessus et à la droite du triangle OAB, on obtient un secteur du cercle de centre O et un angle au centre mesurant 60°.
Puisque 60° est $\frac{1}{6}$ de 360°, ce secteur est $\frac{1}{6}$ du cercle entier et a donc une aire égale à $\frac{1}{6}\pi r^2$.
De même, lorsqu'on combine le triangle OAB avec la région curviligne située au-dessus et à la gauche du triangle OAB, on obtient un secteur du cercle de centre B et un angle au centre mesurant 60° ; l'aire de ce secteur est donc égale à $\frac{1}{6}\pi r^2$.
Si K est l'aire du triangle équilatéral OAB, chaque région curviligne a donc une aire égale à $\frac{1}{6}\pi r^2 - K$. On a donc que l'aire de la région non ombrée située au-dessus de l'axe des abscisses est égale à $2(\frac{1}{6}\pi r^2 - K) + K$, soit $\frac{1}{3}\pi r^2 - K$.
Donc, l'aire totale de la région non ombrée située à l'intérieur du cercle ayant une aire de πr^2 est égale à $\frac{2}{3}\pi r^2 - 2K$, d'où on a donc que l'aire de la région ombrée située à l'intérieur du cercle est égale à $\pi r^2 - (\frac{2}{3}\pi r^2 - 2K)$, soit $\frac{1}{3}\pi r^2 + 2K$.
Pour terminer, on doit utiliser l'aire d'un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur r. Cette aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$. (Pour le voir, on peut diviser le triangle équilatéral en deux triangles remarquables 30°-60°-90° à l'aide d'un segment de droite. En utilisant le rapport entre les longueurs des côtés des triangles remarquables, on a que le segment de droite a une longueur égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}r$, d'où on a donc que le triangle équilatéral a une aire égale à $\frac{1}{2}r(\frac{\sqrt{3}}{2})$ ou $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$.)
Donc, la fraction du cercle qui est ombrée est égale à

$$\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r^2}{\pi r^2} = \frac{\frac{1}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\pi} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6\pi} \approx 0{,}609$$

Donc, la probabilité, p, pour qu'un point (a, b) remplisse les conditions données est à peu près égale à 0,609. Donc, $100p \approx 60{,}9$.
Parmi les choix de réponse, 61 est le choix le plus près.

Réponse : (E)

25. Soit a, b et c des entiers strictement positifs tels que $abc = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2$.
On détermine le nombre de triplets (a, b, c) ayant cette propriété. (Pour l'instant, on ignore la relation entre les grandeurs des entiers dans l'énoncé du problème.)
Puisque le produit abc a deux facteurs 2, alors a, b et c ont un total de deux facteurs 2.
Ceci peut se produire de 6 manières : a admet les deux facteurs, b admet les deux facteurs, c admet les deux facteurs, a admet l'un des facteurs tandis que b admet l'autre, a admet l'un des facteurs tandis que c admet l'autre ou b admet l'un des facteurs tandis que c admet l'autre.
De même, on peut distribuer chacun des autres carrés de facteurs premiers de 6 manières.
Puisque abc comprend exactement 8 carrés de facteurs premiers et que chacun peut être distribué de 6 manières, alors il y a 6^8 manières par lesquelles on peut construire des triplets (a, b, c) à l'aide des facteurs premiers. Donc, 6^8 triplets (a, b, c) ont le produit désiré.

On inclut ensuite la condition qu'aucun couple de a, b et c ne devrait être égal. (Remarquons que a, b et c ne peuvent pas tous être égaux car leur produit n'est pas un cube parfait.)
On compte le nombre de triplets ayant un couple égal et on soustrait ce nombre de 6^8.
On effectue cette étape en comptant le nombre de ces triplets ayant $a = b$. Par symétrie, le nombre de triplets ayant $a = c$ et $b = c$ sera égal à ce total.
Afin d'avoir $a = b$, $a \neq c$ et $b \neq c$, alors pour chacun des facteurs premiers au carré p^2 de abc, soit p^2 est distribué en tant que p et p dans chacun de a et b, soit p^2 est distribué à c.
Donc, on peut distribuer chacun des 8 facteurs premiers au carré p^2 de 2 manières, d'où on a

donc 2^8 triplets (a, b, c) tels que $a = b$, que $a \neq c$ et que $b \neq c$.
De même, il y a 2^8 triplets tels que $a = c$ et 2^8 triplets tels que $b = c$.
Donc, il y a $6^8 - 3 \cdot 2^8$ triplets (a, b, c) ayant le produit désiré et qui sont tels qu'aucun deux de a, b, c ne sont égaux.

Le problème initial voulait que l'on détermine le nombre de triplets (x, y, z) d'entiers strictement positifs tels que $abc = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2$ et que $x < y < z$.
Pour convertir les triplets (a, b, c) n'ayant pas une ordre de taille aux triplets (x, y, z) ayant $x < y < z$, on divise par 6. (Chaque triplet (x, y, z) correspond à 6 triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs distincts sans ordre de taille.)
Donc, le nombre total de triplets (x, y, z) ayant les propriétés requises est égal à

$$N = \tfrac{1}{6}(6^8 - 3 \cdot 2^8) = 6^7 - 2^7 = 279\,808$$

Lorsqu'on divise N par 100, on obtient 8 comme reste.

Réponse : (C)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2020

(11e année – Secondaire V)

le mardi 25 février 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 26 février 2020
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Puisque $OPQR$ est un rectangle dont deux côtés sont situés sur les axes, ses côtés sont donc verticaux et horizontaux.
Puisque PQ est horizontal, Q et P ont la même ordonnée, soit 3.
Puisque QR est vertical, Q et R ont la même abscisse, soit 5.
Donc, les coordonnées de Q sont $(5, 3)$.

Réponse : (B)

2. On a :

$$3 \times 2020 + 2 \times 2020 - 4 \times 2020 = 2020 \times (3 + 2 - 4) = 2020 \times 1 = 2020$$

Par ailleurs :

$$3 \times 2020 + 2 \times 2020 - 4 \times 2020 = 6060 + 4040 - 8080 = 10\,100 - 8080 = 2020$$

Réponse : (E)

3. On développe et simplifie pour obtenir $(x + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 2x + 1) - x^2 = 2x + 1$.

Réponse : (A)

4. La suite d'Ewan commence par 3 et chaque nombre subséquent est 11 de plus que le nombre précédent.
Puisque chaque nombre dans la suite est égal à un multiple de 11 de plus que 3, alors, par la commutativité, chaque nombre dans la suite est 3 de plus qu'un multiple de 11. De plus, chaque tel entier strictement positif parait dans la suite d'Ewan.
Puisque $110 = 11 \times 10$ est un multiple de 11, alors $113 = 110 + 3$ est 3 de plus qu'un multiple de 11 et parait donc dans la suite d'Ewan.
Par ailleurs, on peut dresser la liste des termes de la suite d'Ewan de manière à atteindre la fourchette dans laquelle sont situés les choix de réponse :

$$3, 14, 25, 36, 47, 58, 69, 80, 91, 102, 113, 124, \ldots$$

Réponse : (A)

5. On a $\sqrt{\dfrac{\sqrt{81} + \sqrt{81}}{2}} = \sqrt{\dfrac{9 + 9}{2}} = \sqrt{9} = 3$.

Réponse : (A)

6. Puisque 12 et 21 sont des multiples de 3 ($12 = 4 \times 3$ et $21 = 7 \times 3$), donc ni (A) ni (D) n'est le bon choix de répoonse.
16 est un carré parfait ($16 = 4 \times 4$) donc (C) n'est pas le bon choix de réponse.
Les chiffres de 26 ont une somme de 8. Ce dernier n'étant pas un nombre premier, (E) n'est donc pas le bon choix de réponse.
Puisque 14 n'est pas un multiple de trois, puisqu'il n'est pas un carré parfait et puisque la somme de ses chiffres est égale à un nombre premier ($1 + 4 = 5$), alors (B) est le bon choix de réponse.

Réponse : (B)

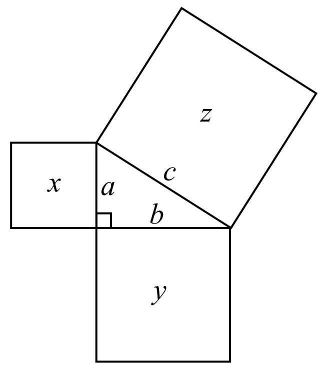
7. Puisque WXY est un angle plat, alors $p^\circ + q^\circ + r^\circ + s^\circ + t^\circ = 180^\circ$. Donc, $p + q + r + s + t = 180$.
Afin de calculer la moyenne des nombres p, q, r, s et t, on additionne les cinq nombres et on divise par 5.
Donc, la moyenne de p, q, r, s, et t est égale à $\dfrac{p + q + r + s + t}{5} = \dfrac{180}{5} = 36$.

Réponse : (B)

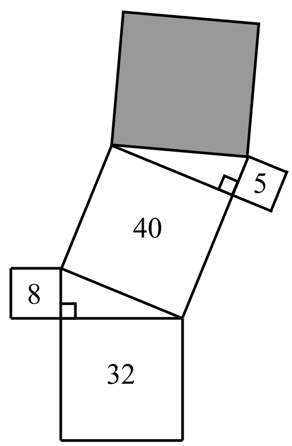
8. Puisque $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$, alors $8^{20} = (2^3)^{20} = 2^{3\times 20} = 2^{60}$.
Donc, si $2^n = 8^{20}$, alors $n = 60$.

Réponse : (B)

9. On sait d'après le théorème de Pythagore qu'il existe une relation entre les mesures a, b et c des côtés d'un triangle rectangle telle que $a^2 + b^2 = c^2$, c étant la mesure de l'hypoténuse.
Puisqu'un carré ayant des côtés de longueur a a une aire de a^2, le théorème de Pythagore peut être reformulé de la manière suivante : la somme des aires des carrés que l'on peut dessiner sur les deux côtés les plus courts est égale à l'aire du carré que l'on peut dessiner sur l'hypoténuse. (Donc, dans la figure ci-dessous, $x + y = z$, x, y et z étant les aires des carrés.)



Dans la figure donnée, cela signifie que l'aire du carré vide et non ombré est égale à $8 + 32 = 40$.



Donc, l'aire du carré ombré est égale à $40 + 5 = 45$.

Réponse : (B)

10. Selon le problème, s et t sont des entiers strictement positifs tels que $s(s - t) = 29$.
Puisque s et t sont positifs, alors $s - t$ est inférieur à s.
Puisque s et 29 sont positifs et $s(s - t) = 29$, alors $s - t$ doit également être positif.
Puisque 29 est un nombre premier, on peut l'écrire sous la forme d'un produit de deux entiers strictement positifs d'une seule manière, soit $29 = 29 \cdot 1$.
Puisque $s(s - t) = 29$ et $s > s - t$, donc on doit avoir $s = 29$ et $s - t = 1$.
Puisque $s = 29$ et $s - t = 1$, alors $t = 28$.
Donc, $s + t = 29 + 28 = 57$.

Réponse : (C)

11. Chacune des première et deuxième colonnes contient 4 X, donc on doit déplacer au moins 2 X. On peut atteindre cet objectif en déplaçant 2 X.
Chacune des première et deuxième rangées contient 4 X, donc en déplaçant les 2 X situés sur la diagonale principale, on enlève simultanément des X des première et deuxième colonnes et des première et deuxième rangées.
Puisque la cinquième colonne ne contient qu'un seul X au départ, on met les deux X que l'on a déplacé dans les rangées de cette colonne qui ne contiennent que 2 X. On a donc :

O	X	X	X	
X	O	X		X
X	X			X*
X	X		X	
		X	X	X*

(Les cases dont les X ont été enlevés sont indiquées par des O tandis que les cases vers lesquelles les X ont été déplacés sont indiquées par des X*.)
Donc, afin que chaque rangée et chaque colonne contienne exactement trois X, il faut déplacer au minimum 2 X.

Réponse : (B)

12. Harriet a parcouru les 720 premiers mètres de la piste à une vitesse constante de 3 m/s, elle a donc parcouru cette distance en $\dfrac{720 \text{ m}}{3 \text{ m/s}} = 240$ s.
Sachant que Harriet a parcouru en tout 1000 m en 380 s, alors elle a parcourue le deuxième segment de la piste, soit une distance de 1000 m $-$ 720 m $=$ 280 m, en 380 s $-$ 240 s $=$ 140 s.
Sachant qu'elle a parcouru ce deuxième segment de la piste à une vitesse constante de v m/s, alors $\dfrac{280 \text{ m}}{140 \text{ s}} = v$ m/s, d'où $v = 2$.

Réponse : (A)

13. Puisque tous les couples de nombres adjacents ont la même somme, alors $2 + x = x + y$.
Donc, $y = 2$. On a donc la liste $2, x, 2, 5$.
On a donc que tous les couples de nombre adjacents ont une somme de $2 + 5 = 7$, donc $x = 5$.
Ainsi, $x - y = 5 - 2 = 3$.

Réponse : (C)

14. Si les roses jaunes doivent représenter $\frac{2}{7}$ du nombre total de roses, alors les roses rouges représentent $\frac{5}{7}$ du nombre total de roses.
Puisque 30 roses rouges représentent $\frac{5}{7}$ du nombre total de roses, alors $\frac{1}{7}$ du nombre total de roses est égal à $30 \div 5 = 6$. Donc, on a un nombre total de $6 \times 7 = 42$ roses.
Puisqu'il y a 42 roses dont 30 sont rouges et dont les restantes sont jaunes, alors on a $42 - 30 = 12$ roses jaunes.
Puisqu'il y avait 19 roses jaunes au départ, Rad a dû enlever $19 - 12 = 7$ roses jaunes.

Réponse : (E)

15. Lorsque $N = 3x+4y+5z$, x, y et z étant chacun égal à 1 ou à -1, il y a 8 combinaisons possibles des valeurs de x, y et z :

x	y	z	N
1	1	1	12
1	1	-1	2
1	-1	1	4
1	-1	-1	-6
-1	1	1	6
-1	1	-1	-4
-1	-1	1	-2
-1	-1	-1	-12

D'après le tableau ci-dessus, N ne peut être égal à 0, N ne peut être un nombre impair, N peut être égal à 4 et N est toujours un nombre pair.
Donc, parmi les quatre énoncés, un seul est vrai.

Réponse : (B)

16. On remarque que $\dfrac{x+y}{x} = \dfrac{x}{x} + \dfrac{y}{x} = 1 + \dfrac{y}{x}$.
La plus grande valeur possible de $\dfrac{x+y}{x} = 1+\dfrac{y}{x}$ se produit lorsque $\dfrac{y}{x}$ est aussi grand que possible.
Puisque la valeur de x est toujours négative et que celle de y est toujours positive, alors $\dfrac{y}{x}$ aura une valeur négative.
Donc, afin que $\dfrac{y}{x}$ soit aussi grand que possible, sa valeur négative doit être aussi près de 0 que possible.
Puisque la valeur de x est négative et que celle de y est positive, cela se produit lorsque x est aussi négatif que possible et lorsque y est aussi petit que possible ; c'est-à-dire lorsque $x = -4$ et $y = 2$.
Donc, $1 + \dfrac{2}{-4} = \dfrac{1}{2}$ est la plus grande valeur possible de $\dfrac{x+y}{x}$.

Réponse : (E)

17. Puisque le triangle PQR est rectangle en Q, l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot QR$.
Puisque le triangle a une aire de 30 et que $PQ = 5$, alors $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot QR = 30$, d'où $QR = 30 \cdot \frac{2}{5} = 12$.
D'après le théorème de Pythagore,

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

Puisque $PR > 0$, alors $PR = \sqrt{169} = 13$.
Si on considère que le triangle PQR a pour base PR et pour hauteur QS, l'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2} \cdot PR \cdot QS$.
Puisque le triangle a une aire de 30 et que $PR = 13$, alors $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot QS = 30$, d'où $QS = 30 \cdot \frac{2}{13} = \frac{60}{13}$.

Réponse : (A)

18. Soit W, X, Y, et Z les quatre équipes qui participent au tournoi.
Donc, il y eut un total de 6 matchs :

W contre X, W contre Y, W contre Z, X contre Y, X contre Z, Y contre Z

À la fin de chaque match, soit une équipe obtient 3 points pour une victoire et l'autre 0 point pour une défaite (soit un total de de 3 points), soit chaque équipe obtient 1 point pour un match nul (soit un total de 2 points)).
Puisqu'il y eut un total de 6 matchs, alors théoriquement le nombre maximal de points pouvant être attribués est $6 \cdot 3 = 18$ tandis que le nombre minimal de points pouvant être attribués est $6 \cdot 2 = 12$.
En particulier, cela signifie qu'il n'est pas possible que le nombre total de points soit égal à 11.
On peut montrer que chacune des possibilités de pointage, de 12 à 18 points, est possible.
Donc, S ne peut pas être égal à 11.

Réponse : (C)

19. Lorsqu'on développe $(3 + 2x + x^2)(1 + mx + m^2x^2)$, on obtient les termes contenant x^2 de la multiplication d'une constante avec un terme contenant x^2 ou de la multiplication de deux termes contenant chacun x.
Autrement dit, le terme contenant x^2 sera

$$3 \cdot m^2x^2 + 2x \cdot mx + x^2 \cdot 1 = 3m^2x^2 + 2mx^2 + x^2 = (3m^2 + 2m + 1)x^2$$

D'après l'énoncé, le coefficient de x^2 est égal à 1. On a donc $3m^2+2m+1 = 1$, d'où $3m^2+2m = 0$ ou $m(3m + 2) = 0$. Cela signifie que $m = 0$ ou $m = -\frac{2}{3}$.
Ces valeurs possibles de m ont une somme de $-\frac{2}{3}$.

Réponse : (B)

20. Si Harry efface un point d'une face qui porte un nombre pair de points, cette face portera alors un nombre impair de points.
Si Harry efface un point d'une face qui porte un nombre impair de points, cette face portera alors un nombre pair de points.
Au départ, 3 faces portaient un nombre pair de points tandis que 3 faces portaient un nombre impair de points.
Si Harry efface un point d'une face qui porte un nombre pair de points, alors 4 faces porteront un nombre impair de points et 2 faces porteront un nombre pair de points. Dans ce cas, après un lancer, la probabilité que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points est égale à $\frac{4}{6}$.
Si Harry efface un point d'une face qui porte un nombre impair de points, alors 2 faces porteront un nombre impair de points et 4 faces porteront un nombre pair de points. Dans ce cas, après un lancer, la probabilité que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points est égale à $\frac{2}{6}$.
Puisque les 6 faces du cube portent un total de $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$ points, alors la probabilité que Harry efface un point de la face à 2 points est égale à $\frac{2}{27}$. De même, la probabilité qu'il efface un point de la face à 3 points est égale à $\frac{3}{27}$ et ainsi de suite.
Donc, on peut obtenir la probabilité que Harry efface un point de la face à 2 points puis que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points à la suite d'un lancer en multipliant les probabilités des deux événements, soit $\frac{2}{27} \cdot \frac{2}{3}$ (puisque 4 faces portent un nombre impair de points et 2 faces portent un nombre pair de points).
De même, la probabilité que Harry efface un point de la face à 3 points puis que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points à la suite d'un lancer est égale à $\frac{3}{27} \cdot \frac{1}{3}$.

On continue de la même façon pour obtenir la probabilité que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points à la suite d'un lancer après que Harry ait effacé un point :
$\frac{2}{27} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{27} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{27} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{27} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{27} \cdot \frac{2}{3} + \frac{7}{27} \cdot \frac{1}{3}$
Ceci est égal à $\frac{2}{3} \cdot (\frac{2}{27} + \frac{4}{27} + \frac{6}{27}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{27} + \frac{5}{27} + \frac{7}{27}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{27} + \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{27} = \frac{8}{27} + \frac{5}{27} = \frac{13}{27}$.

RÉPONSE : (C)

21. Si les trois nombres x, 36 et y ont un produit de 2592, alors $x \cdot 36 \cdot y = 2592$, d'où $xy = \dfrac{2592}{36} = 72$.
Si x et y sont des entiers strictement positifs qui vérifient $xy = 72$, alors on a les possibilités suivantes :

x	y	$x+y$
72	1	73
36	2	38
24	3	27
18	4	22
12	6	18
9	8	17

N'ayant attribué aucun ordre à x, 36 and y, on suppose que $x > y$.
Dans le problème donné, on veut écrire quatre couples de nombres dans les cercles vides de manière que les 9 entiers dans les cercles soient tous différents les uns des autres et qu'ils aient une somme qui soit aussi grande que possible.
Autrement dit, on veut choisir 4 des 6 couples dans le tableau ci-dessus (sachant qu'on ne peut pas choisir le couple 36 et 2 puisque 36 est déjà dans le cercle du milieu) afin que la somme soit aussi grande que possible.
Puisqu'on a les sommes de chaque couple, on choisit les 4 couples dont les sommes sont les plus grandes.
Cela signifie que les 9 entiers auront une somme de $(72+1)+(24+3)+(18+4)+(12+6)+36$, soit $73+27+22+18+36$ ou 176.

RÉPONSE : (B)

22. Puisque $x^2 + 3xy + y^2 = 909$ et $3x^2 + xy + 3y^2 = 1287$, alors

$$\begin{aligned}(x^2 + 3xy + y^2) + (3x^2 + xy + 3y^2) &= 909 + 1287 \\ 4x^2 + 4xy + 4y^2 &= 2196 \\ x^2 + xy + y^2 &= 549\end{aligned}$$

Puisque $x^2 + 3xy + y^2 = 909$ et $x^2 + xy + y^2 = 549$, alors

$$\begin{aligned}(x^2 + 3xy + y^2) - (x^2 + xy + y^2) &= 909 - 549 \\ 2xy &= 360 \\ xy &= 180\end{aligned}$$

Puisque $x^2 + 3xy + y^2 = 909$ et $xy = 180$, alors

$$\begin{aligned}(x^2 + 3xy + y^2) - xy &= 909 - 180\\ x^2 + 2xy + y^2 &= 729\\ (x + y)^2 &= 27^2\end{aligned}$$

Donc, $x + y = 27$ ou $x + y = -27$. On voit donc que $x + y$ ne peut être égal à 39, à 29, à 92 ou à 41.
(Par ailleurs, on peut résoudre le système d'équations $x + y = 27$ et $xy = 180$ en isolant x et y afin de montrer qu'il existe des nombres réels x et y qui vérifient le système d'équations initial.)
Donc, (A) 27 est une valeur possible de $x + y$.

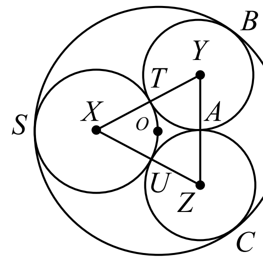
Réponse : (A)

23. *Solution 1*
Puisque $f(x) = ax + b$ pour tous les nombres réels x, alors $f(t) = at + b$, t étant un nombre réel quelconque.
Lorsque $t = bx + a$, on obtient $f(bx + a) = a(bx + a) + b = abx + (a^2 + b)$.
De plus, on sait que $f(bx + a) = x$ pour tous les nombres réels x.
Cela signifie que $abx + (a^2 + b) = x$ pour tous les nombres réels x. Donc $(ab - 1)x + (a^2 + b) = 0$ pour tous les nombres réels x.
Pour que cela soit vrai, on doit donc avoir $ab = 1$ et $a^2 + b = 0$.
De la seconde équation, $b = -a^2$. On pose cette dernière dans la première équation pour obtenir $a(-a^2) = 1$ ou $a^3 = -1$, d'où $a = -1$.
Puisque $b = -a^2$, alors $b = -1$, d'où $a + b = -2$.

Solution 2
Puisque $f(x) = ax+b$ pour tous les nombres réels x, donc lorsque $x = a$, on obtient $f(a) = a^2+b$.
Puisque $f(bx + a) = x$ pour tous les nombres réels x, donc lorsque $x = 0$, on obtient $f(a) = 0$.
Lorsqu'on pose la seconde équation de $f(a)$ dans la première, on obtient $a^2 + b = 0$ ou $b = -a^2$.
D'où $f(x) = ax - a^2$ pour tous les nombres réels x et $f(-a^2x + a) = x$ pour tous les nombres réels x.
Puisque $f(-a^2x + a) = x$ pour tous les nombres réels x, donc lorsque $x = -1$, on obtient $f(a^2 + a) = -1$.
Puisque $f(x) = ax - a^2$ pour tous les nombres réels x, donc lorsque $x = a^2 + a$, on obtient $f(a^2 + a) = a(a^2 + a) - a^2$.
Lorsqu'on pose la seconde équation de $f(a^2+a)$ dans la première, on obtient $a(a^2+a)-a^2 = -1$ ou $a^3 = -1$.
Puisque a est un nombre réel, alors $a = -1$.
Puisque $b = -a^2$, alors $b = -1$, d'où $a + b = -2$.
On peut vérifier : si $f(x) = -x - 1$, alors $f(-x - 1) = -(-x - 1) - 1 = x$, ce qu'il fallait démontrer.

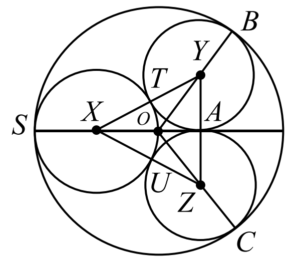
Réponse : (E)

24. Soit O le centre du grand cercle.
Supposons que le cercle de centre X touche : le grand cercle au point S, le cercle de centre Y au point T et le cercle de centre Z au point U.
Supposons que les cercles de centres Y et Z se touchent au point A et qu'ils touchent le grand cercle respectivement aux points B et C.
On joint X à Y, X à Z, et Y à Z.



(Remarquez qu'on a redessiné le diagramme afin que le cercle de centre X semble réellement passer par le centre du grand cercle.)
Puisque les cercles sont tangents en points T et U, les segments de droite XY et XZ passent respectivement aux points T et U.
De plus, $XY = XT + TY = 1 + r$ puisque les cercles de centres X et Y ont pour rayons respectifs 1 et r.
De même, $XZ = 1 + r$.
De plus, $YA = ZA = YB = ZC = r$ puisque ces derniers sont les rayons des deux cercles.
Lorsqu'un cercle est situé à l'intérieur d'un autre cercle et que les deux cercles se touchent en un point, alors les rayons des deux cercles qui passent par ce point sont confondus car les cercles ont une tangente commune au point où ils se touchent et cette tangente commune est perpendiculaire à chacun des rayons.
Puisque le cercle de centre X touche le grand cercle au point S, alors X est situé sur OS.
Considérons le diamètre du grand cercle qui passe au point X.
Puisque le cercle de centre X passe au point O, alors le rayon du grand cercle est deux fois plus grand que celui du cercle de centre X. Donc le grand cercle a un rayon de 2.
De plus, sachant que le cercle de centre X a un rayon de 1, $XO = 1$.
On joint ensuite O à B. Puisque les cercles de centres O et Y se touchent au point B, alors OB passe au point Y. Cela signifie que $OY = OB - BY = 2 - r$. De même, $OZ = 2 - r$.
De plus, par symétrie, le diamètre du grand cercle qui passe au point X passe aussi au point A, soit le point où les deux petits cercles se touchent :

> De manière plus formelle, on trace la tangente commune aux cercles de centres Y et Z au point de contact A.
> Étant tangente aux deux cercles, cette droite est donc perpendiculaire à YZ.
> Puisque le triangle OYZ est isocèle avec $OY = OZ$ et que A est le milieu de sa base YZ, sa hauteur est la droite menée de A jusqu'à O.
> De même, puisque le triangle XYZ est isocèle avec $XY = XZ$ et que A est le milieu de sa base YZ, sa hauteur est la droite menée de A jusqu'à X.
> Puisque la droite perpendiculaire à YZ qui passe au point A passe aussi aux points O et X, on la considère comme étant le diamètre du grand cercle qui passe au point X.



On considère les triangles XYA et OYA, chacun étant rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore,

$$OA = \sqrt{OY^2 - YA^2} = \sqrt{(2-r)^2 - r^2} = \sqrt{4 - 4r + r^2 - r^2} = \sqrt{4 - 4r}$$

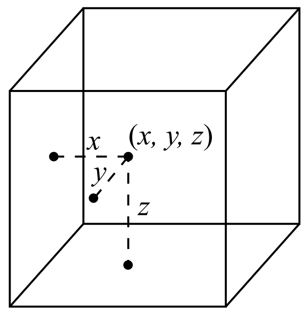
De nouveau, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}
XA^2 + YA^2 &= XY^2 \\
(XO + OA)^2 + r^2 &= (1 + r)^2 \\
(1 + \sqrt{4-4r})^2 &= 1 + 2r + r^2 - r^2 \\
1 + 2\sqrt{4-4r} + (4 - 4r) &= 1 + 2r \\
2\sqrt{4-4r} &= 6r - 4 \\
\sqrt{4-4r} &= 3r - 2 \\
4 - 4r &= (3r-2)^2 \qquad \text{(on a elevé chaque membre au carré)} \\
4 - 4r &= 9r^2 - 12r + 4 \\
8r &= 9r^2
\end{aligned}$$

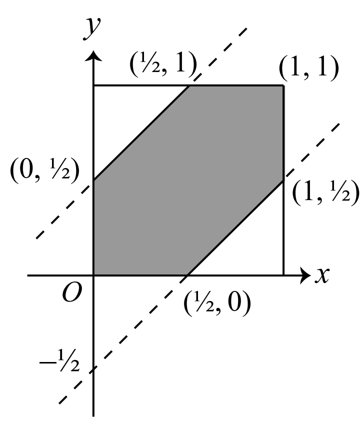
Puisque $r \neq 0$, alors $9r = 8$, d'où $r = \frac{8}{9} \approx 0{,}889$.
Parmi les choix de réponse, 0,889 est plus près de (E) 0,89.

Réponse : (E)

25. On considère un cube de dimensions $1 \times 1 \times 1$.
On associe un triplet (x, y, z) de nombres réels qui vérifient $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et $0 \leq z \leq 1$ à un point à l'intérieur du cube ; x étant la longueur du segment de droite qui est perpendiculaire à la face de gauche du cube et qui joint le point à cette face, y étant la longueur du segment de droite qui est perpendiculaire à la face de devant du cube et qui joint le point à cette face et z étant la longueur du segment de droite qui est perpendiculaire à la face de dessous du cube et qui joint le point à cette face.
Ce point a donc pour coordonnées (x, y, z). Donc, l'action de choisir trois nombres réels x, y et z de 0 à 1 au hasard et indépendamment les uns des autres est équivalente à l'action de choisir au hasard et uniformément un point (x, y, z) à l'intérieur du cube ou sur ce dernier.



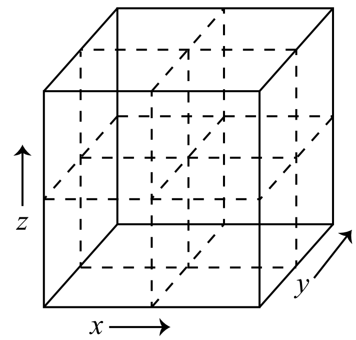
Afin de choisir des valeurs de x, de y et de z qui vérifient les conditions $-\frac{1}{2} < x - y < \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} < x - z < \frac{1}{2}$, on doit imposer des restrictions sur les points à l'intérieur du cube. Ces restrictions délimitent donc une région à l'intérieur du cube.
La probabilité qu'un point choisi au hasard à l'intérieur de ce cube remplisse les conditions données sera égale au volume de la région définie par les conditions divisée par le volume du cube entier.
Puisque le cube a un volume de 1, alors la probabilité sera égale au volume de la région définie par ces conditions.
Considérons la région dans le plan cartésien (le plan xy) définie par $-\frac{1}{2} < x - y < \frac{1}{2}$.
On peut réarranger les termes de l'inégalité pour obtenir $x - \frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2}$. Cela signifie qu'un point (x, y) qui vérifie ces conditions est situé au-dessus de la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ et en dessous de la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$.
En imposant les restrictions $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$, on obtient la région :



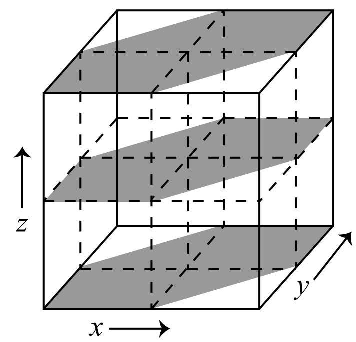
Puisqu'un point (x, y, z) dans la région vérifie $-\frac{1}{2} < x - y < \frac{1}{2}$, ces conditions nous permettent de « découper » le cube de la même manière que celle dans la figure ci-dessus tout en gardant la partie qui ressemble à la région ci-dessus. Les points restants sont exactement ceux qui remplissent cette condition.

De même, on réarrange les termes de l'inégalité $-\frac{1}{2} < x - z < \frac{1}{2}$ pour obtenir $x - \frac{1}{2} < z < x + \frac{1}{2}$, qui a la même forme dans le plan xz.
Par conséquent, on peut couper le cube d'avant en arrière de manière à ressembler à cette forme. On doit maintenant déterminer le volume de la région restante.

Afin de déterminer le volume de la région, on sépare le cube $1 \times 1 \times 1$ en huit cubes chacun de dimensions $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.



Lorsqu'on découpe ce cube selon les restrictions de l'inégalité $x - \frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2}$, les deux cubes de l'arrière gauche et les deux cubes de l'avant droit sont coupés en deux.



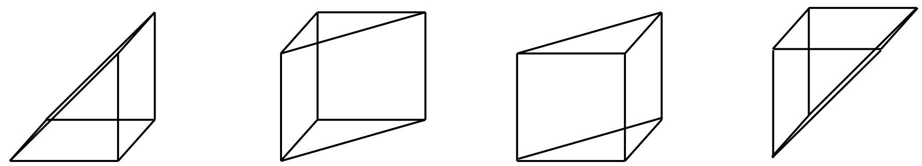
Lorsqu'on découpe ce cube selon les restrictions de l'inégalité $x - \frac{1}{2} < z < x + \frac{1}{2}$, les deux cubes supérieurs de gauche et les deux cubes inférieurs de droite sont coupés en deux.
Les huit petits cubes sont coupés comme suit :

Petit cube	Coupé par $x - \frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2}$	Coupé par $x - \frac{1}{2} < z < x + \frac{1}{2}$
Avant inférieur gauche	Non	Non
Avant inférieur droit	Oui	Oui
Arrière inférieur gauche	Oui	Non
Arrière inférieur droit	Non	Oui
Avant supérieur gauche	Non	Oui
Avant supérieur droit	Oui	Non
Arrière supérieur gauche	Oui	Oui
Arrière supérieur droit	Non	Non

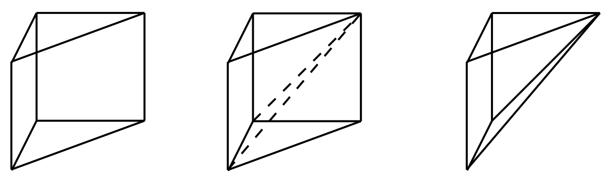
On peut donc considérer les petits cubes comme suit :

- Les cubes avant inférieur gauche et arrière supérieur droit : ces cubes ne sont coupés par aucune restriction et contribuent donc $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ au volume du solide.

- Les cubes arrière inférieur gauche, arrière inférieur droit, avant supérieur gauche et avant supérieur droit : ces cubes ne sont coupés que par l'une des deux restrictions. Donc ces cubes contribuent $\frac{1}{2}$ de leur volume (soit $\frac{1}{16}$ chacun) au volume du solide.



- Les cubes arrière supérieur gauche et avant inférieur droit : Chacun de ces cubes est coupé en deux par les deux restrictions. La première restriction coupe le cube en un prisme triangulaire dont le volume est la moitié de celui du petit cube, soit $\frac{1}{16}$. La seconde restriction coupe ce prisme triangulaire de manière à en créer une pyramide à base carrée. La base carrée de la pyramide a des côtés de longueur $\frac{1}{2}$ tandis que la hauteur de la pyramide est de $\frac{1}{2}$. La pyramide a donc un volume de $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.



Donc, le volume du solide est égal à $2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$.

Ainsi, la probabilité requise est égale à $\frac{7}{12}$.

Réponse : (B)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2019

(11^{e} année – Secondaire V)

le mardi 26 février 2019
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 27 février 2019
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Puisque 10 est le plus grand multiple de 5 qui est aussi inférieur à 14, alors $14 - 10 = 4$, ainsi lorsqu'on divise 14 par 5, il y a un reste de 4.

Réponse : (E)

2. On développe l'expression afin d'obtenir $20(x + y) - 19(y + x) = 20x + 20y - 19y - 19x = x + y$ pour toutes les valeurs de x et de y.

Réponse : (B)

3. On évalue afin d'obtenir $8 - \dfrac{6}{4-2} = 8 - \dfrac{6}{2} = 8 - 3 = 5$.

Réponse : (A)

4. Le segment de la droite numérique qui se trouve entre les valeurs de 3 et de 33 a une longueur égale à $33 - 3 = 30$.
Puisque ce segment est divisé en six parties égales, la longueur de chaque partie est égale à $30 \div 6 = 5$.
Le segment PS comprend trois telles parties et a donc une longueur égale à $3 \times 5 = 15$.
Le segment TV comprend deux telles parties et a donc une longueur égale à $2 \times 5 = 10$.
Ainsi la somme des longueurs de PS et TV est de $15 + 10$, soit 25.

Réponse : (A)

5. Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure, alors 20 minutes représentent $\frac{1}{3}$ d'une heure.
Puisque Mike fait du vélo à une vitesse constante de 30 km/h, il va donc parcourir $\frac{1}{3} \times 30$ km ou 10 km en $\frac{1}{3}$ d'une heure.

Réponse : (E)

6. Supposons que $SU = UW = WR = b$ et que $PS = h$.
Puisque la largeur du rectangle $PQRS$ est égale à $3b$ et que sa hauteur est égale à h, donc son aire est égale à $3bh$.
Puisque $SU = b$ et que la distance qui sépare les côtés parallèles PQ et SR est égale à h, donc l'aire du triangle STU est égale à $\frac{1}{2}bh$. De même, les triangles UVW et WXR ont tous les deux des aires égales à $\frac{1}{2}bh$.
Ainsi, la fraction de l'aire du rectangle $PQRS$ qui est ombrée est égale à $\dfrac{3 \times \frac{1}{2}bh}{3bh}$, soit $\dfrac{1}{2}$.

Réponse : (C)

7. Puisque la ville de Cans est située au nord de la ville d'Ernie, donc la ville d'Ernie n'est pas celle qui est située la plus au nord.
Puisque la ville de Dundee est située au sud de la ville de Cans, donc la ville de Dundee n'est pas celle qui est située la plus au nord.
Puisque la ville d'Arva est située au sud de la ville de Blythe, donc la ville d'Arva n'est pas celle qui est située la plus au nord.
Puisque la ville d'Arva est située au nord de la ville de Cans, donc la ville de Cans n'est pas celle qui est située la plus au nord.
La seule possibilité qui reste est que Blythe soit la ville la plus au nord.

L'arrangement suivant est le seul qui satisfait les conditions énoncées dans le problème :

Blythe
Arva
Cans
Dundee
Ernie

RÉPONSE : (B)

8. On remarque que $8 \times 48 \times 81 = 2^3 \times (2^4 \times 3) \times 3^4 = 2^7 \times 3^5 = 2^2 \times 2^5 \times 3^5 = 2^2 \times (2 \times 3)^5 = 2^2 \times 6^5$.
Après que $8 \times 48 \times 81$ soit divisé par 6^5, le quotient ne contient aucun facteur de 3 et donc aucun facteur de 6 ne peut être retiré à partir d'une division ultérieure.
Ainsi, la plus grande valeur entière possible de k qui admettrait 6^k comme diviseur de $8 \times 48 \times 81$ est $k = 5$.

RÉPONSE : (C)

9. La moyenne de $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{6}$ est égale à $\dfrac{\frac{1}{8} + \frac{1}{6}}{2} = \dfrac{\frac{3}{24} + \frac{4}{24}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{24} = \frac{7}{48}$.

RÉPONSE : (E)

10. Il faut déterminer le plus petit nombre entier qui est supérieur à 30 000 ainsi que le plus grand nombre entier qui est inférieur à 30 000. Ensuite, il faut déterminer lequel des deux est le plus proche de 30 000.
Soit M le plus petit nombre entier que l'on peut créer à partir des chiffres 2, 3, 5, 7 et 8 qui serait supérieur à 30 000 et dans lequel chaque chiffre ne parait qu'une seule fois.
Puisque M est supérieur à 30 000, son chiffre des dizaines de milliers ne peut être inférieur à 3.
Afin que M soit aussi petit que possible (tout en restant supérieur à 30 000), on lui attribue le 3 comme chiffre des dizaines de milliers.
Afin que M soit aussi petit que possible, son chiffre des milliers devrait être aussi petit que possible, on lui attribue donc la valeur de 2.
En suivant ce raisonnement, on lui attribue le 5 comme chiffre des centaines, le 7 comme chiffre des dizaines, et le 8 comme chiffre des unités. Donc $M = 32\,578$.
Soit m le plus grand nombre entier que l'on peut créer à partir des chiffres 2, 3, 5, 7 et 8 qui serait inférieur à 30 000 et dans lequel chaque chiffre ne parait qu'une seule fois.
Puisque m est inférieur à 30 000, son chiffre des dizaines de milliers doit être inférieur à 3. Donc, ce dernier doit être un 2.
Afin que m soit aussi grand que possible (tout en restant inférieur à 30 000), son chiffre des milliers devrait être aussi grand que possible, on lui attribue donc la valeur de 8.
En suivant ce raisonnement, on lui attribue le 7 comme chiffre des centaines, le 5 comme chiffre des dizaines, et le 3 comme chiffre des unités. Donc $m = 28\,753$.
Puisque $M - 30\,000 = 2578$ et que $30\,000 - m = 1247$, alors m est le plus proche de 30 000.
Donc, $N = m = 28\,753$. Ce dernier a un 5 comme chiffre des dizaines.

RÉPONSE : (B)

11. La droite d'équation $y = x - 3$ a une pente de 1.
Afin de déterminer l'abscisse à l'origine de la droite d'équation $y = x - 3$, on pose $y = 0$ et on résout afin d'obtenir $x - 3 = 0$ ou $x = 3$. Donc la droite ℓ a aussi une abscisse à l'origine de 3.
De plus, puisque les deux droites sont perpendiculaires l'une à l'autre, leurs pentes doivent avoir un produit égal à -1. Cela signifie que la pente de la droite ℓ est égale à -1.

La droite ℓ a une pente de -1 et le point (3,0) est situé sur la droite.
Cela signifie que l'équation de la droite ℓ est $y - 0 = -1(x - 3)$ ou $y = -x + 3$.
Donc, l'ordonnée à l'origine de la droite ℓ est égale à 3.

Réponse : (C)

12. Alberto a bien répondu à 70 % des 30 questions de la première partie.
Donc Alberto a bien répondu à $\frac{70}{100} \times 30 = 21$ questions de la première partie.
Alberto a bien répondu à 40 % des 50 questions de la deuxième partie.
Donc Alberto a bien répondu à $\frac{40}{100} \times 50 = 20$ questions de la deuxième partie.
En tout, Alberto a bien répondu à $21 + 20 = 41$ questions parmi $30 + 50 = 80$ questions.
Cela représente un pourcentage de $\frac{41}{80} \times 100\ \% = 51{,}25\ \%$.
Parmi les choix de réponse, (D) 51 % est le choix le plus proche.

Réponse : (D)

13. Au moment où Tanis vérifia l'heure, $8x$ minutes s'étaient écoulées depuis 7h00 et il ne restait plus que $7x$ minutes avant 8h00.
De 7h00 à 8h00, il y a 60 minutes. Donc, $8x + 7x = 60$ d'où $15x = 60$ ou $x = 4$.
Étant donné que $8x$ minutes s'étaient écoulées depuis 7h00, donc $8x = 32$ minutes s'étaient écoulées depuis 7h00. Tanis a donc vérifié l'heure à 7h32. (On remarque d'ailleurs qu'à 7h32, il ne restait plus que $28 = 7x$ minutes avant 8h00.)

Réponse : (C)

14. Chacune des lettres A, B, C, D et E ne parait qu'une seule fois dans chaque colonne et dans chaque rangée.
La lettre qui se trouve dans la deuxième rangée de la première colonne ne peut pas être un A, un E, ou un B (car ces lettres se trouvent déjà dans la colonne). Elle n'est aussi pas un C ou un A (car ces lettres se trouvent déjà dans la rangée).
La lettre qui se trouve dans la deuxième rangée de la première colonne est donc un D.
Cela signifie que la lettre qui se trouve dans la quatrième rangée de la première colonne doit être un C.
La lettre qui se trouve dans la deuxième rangée de la cinquième colonne ne peut pas être un D, un C, un A ou un E et doit donc être un B.
Cela signifique que la lettre dans la deuxième rangée de la deuxième colonne doit être un E.
En suivant le même raisonnement, les lettres qui se trouvent dans la première rangée des 3^{e} et 4^{e} colonnes sont respectivement D et B.
Cela signifie que la lettre qui se trouve dans la première rangée de la deuxième colonne doit être un C.
En suivant le même raisonnement, la lettre qui se trouve dans la cinquième rangée de la deuxième colonne doit être un A.
De plus, la lettre qui se trouve dans la troisième rangée de la deuxième colonne doit être un D.
Donc, la lettre qui va dans la case indiquée par le $*$ doit être un B.
On peut remplir le quadrillage de la manière suivante :

A	C	D	B	E
D	E	C	A	B
E	D	B	C	A
C	B	A	E	D
B	A	E	D	C

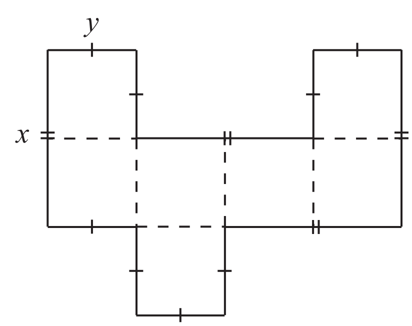
Réponse : (B)

15. Étant donné qu'il y a six boules rouges et trois boules vertes et qu'on en sélectionne quatre au hasard, ces quatre boules pourraient être :
   - 4 boules rouges, ou
   - 3 boules rouges et 1 boule verte, ou
   - 2 boules rouges et 2 boules vertes, ou
   - 1 boule rouge et 3 boules vertes.

   Un groupe de 4 boules rouges n'a qu'un seul arrangement visiblement différent.
   Un groupe composé de 3 boules rouges et d'une boule verte n'a que quatre arrangements visiblement différents : dans les arrangements, la boule verte peut être dans la 1re, 2e, 3e ou 4e position.
   Un groupe composé de 2 boules rouges et de 2 boules vertes n'a que six arrangements visiblement différents car les boules rouges peuvent se trouver dans les couples de positions suivantes : 1re/2e, 1re/3e, 1re/4e, 2e/3e, 2e/4e ou 3e/4e.
   Un groupe composé d'une boule rouge et de 3 boules vertes n'a que quatre arrangements visiblement différents : dans les arrangements, la boule rouge peut être dans la 1re, 2e, 3e ou 4e position.
   En tout, il y a $1 + 4 + 6 + 4 = 15$ arrangements visiblement différents.

   Réponse : (A)

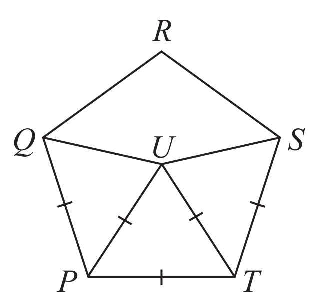
16. Puisque $x = 2y$, on peut diviser la figure en 7 carrés qui mesurent y par y en traçant des lignes pointillées qui sont parallèles aux divers côtés de la figure :

   Étant donné que la figure a une aire de 252, alors $7y^2 = 252$ ou $y^2 = 36$.
   Puisque $y > 0$, donc $y = 6$.
   Le périmètre de la figure est composé de 16 segments dont la longueur de chacun est égale à y.
   Ainsi le périmètre est égal à $16 \times 6 = 96$.

   Réponse : (A)

17. On relie QU et SU.
   Puisque PUT est un triangle équilatéral, alors $PU = UT = TP$.
   Puisque $PQRST$ est un pentagone régulier, alors $QP = PT = TS$.
   Donc, $PU = QP$ et $UT = TS$. Cela signifie que QPU et STU sont des triangles isocèles.

   Les angles intérieurs d'un pentagone régulier ont tous la même mesure de $108°$.
   Puisque $\angle UPT = 60°$, donc $\angle QPU = \angle QPT - \angle UPT = 108° - 60° = 48°$.

Puisque QPU est un triangle isocèle où $QP = PU$, donc $\angle PQU = \angle PUQ$.
Ainsi, $\angle PUQ = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle QPU) = \frac{1}{2}(180^\circ - 48^\circ) = 66^\circ$.
À l'aide de la symétrie, $\angle TUS = 66^\circ$.
Enfin, $\angle QUS = 360^\circ - \angle PUQ - \angle PUT - \angle TUS = 360^\circ - 66^\circ - 60^\circ - 66^\circ = 168^\circ$.

Réponse : (B)

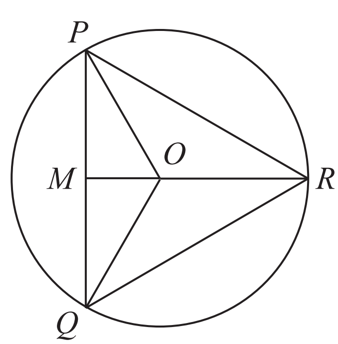
18. Soit n un entier positif à 7 chiffres qui comprend uniquement les chiffres 0 et 1 et qui est divisble par 6.
Le premier chiffre de n (soit le chiffre tout à gauche) ne peut pas être un 0, il doit donc être un 1.
Puisque n est divisible par 6, donc n est un nombre pair. Cela signifie que le dernier chiffre de n (soit le chiffre le plus à droite) ne peut pas être un 1, il doit donc être un 0.
Ainsi, n prend la forme $1\,pqr\,st0$ où les valeurs de p, de q, de r, de s et de t sont soit 0, soit 1.
n est divisible par 6 uniquement lorsqu'il est divisible à la fois par 2 et par 3.
Puisque n a un 0 comme chiffre des unités, il est donc divisible par 2.
n est divisible par 3 uniquement lorsque la somme de ses chiffres est divible par 3.
Les chiffres de n ont une somme qui est égale à $1 + p + q + r + s + t$.
Puisque les valeurs de p, de q, de r, de s et de t sont soit 0, soit 1, donc $1 \leq 1+p+q+r+s+t \leq 6$.
Ainsi, n est divisible par 3 uniquement lorsque $1 + p + q + r + s + t$ est égal à 3 ou à 6.
C'est-à-dire, n est divisble par 3 quand exactement 2 valeurs parmi les valeurs de p, q, r, s et t sont des 1 ou quand toutes les 5 valeurs de p, q, r, s, t sont des 1.
Les valeurs de p, q, r, s et t peuvent contenir deux 1 de dix façons différentes : soit les couples $pq, pr, ps, pt, qr, qs, qt, rs, rt, st$.
Par contre, si toutes les valeurs de p, q, r, s, t sont des 1, ceci ne peut se produire que d'une seule façon.
Donc, il y a $1 + 10 = 11$ entiers positifs à 7 chiffres qui comprennent uniquement les chiffres 0 et 1 et qui sont divisbles par 6.

Réponse : (B)

19. On utilise l'équation fonctionnelle $f(2x + 1) = 3f(x)$ de manière répétée :
On pose $x = 1$ afin d'obtenir $f(3) = 3f(1) = 3 \times 6 = 18$.
On pose $x = 3$ afin d'obtenir $f(7) = 3f(3) = 3 \times 18 = 54$.
On pose $x = 7$ afin d'obtenir $f(15) = 3f(7) = 3 \times 54 = 162$.
On pose $x = 15$ afin d'obtenir $f(31) = 3f(15) = 3 \times 162 = 486$.
On pose $x = 31$ afin d'obtenir $f(63) = 3f(31) = 3 \times 486 = 1458$.

Réponse : (D)

20. Supposons que le cercle de centre O a un rayon de 2 et que les sommets du triangle équilatéral PQR sont situés sur le cercle.
On relie OP, OQ et OR. On relie O à M, ce dernier étant le point milieu du segment PQ.



Puisque le rayon du cercle est égal à 2, donc $OP = OQ = OR = 2$.
À l'aide de la symétrie, $\angle POQ = \angle QOR = \angle ROP$.
Puisque les trois angles ont des mesures dont la somme est égale à 360°, alors $\angle POQ = \angle QOR = \angle ROP = 120°$.
Puisque POQ est un triangle isocèle où $OP = OQ$ et que M est le point milieu du segment PQ, donc OM est non seulement une altitude mais est aussi une bissectrice.
Donc, $\angle POM = \frac{1}{2}\angle POQ = 60°$. Cela signifie que POM est un triangle dont les angles ont des mesures de 30°-60°-90°.
Puisque $OP = 2$ et est le côté opposé à l'angle de 90°, donc $OM = 1$ et $PM = \sqrt{3}$.
Puisque $PM = \sqrt{3}$, donc $PQ = 2PM = 2\sqrt{3}$.
Ainsi, le triangle POQ a une aire égale à $\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}$.
Puisque les triangles POQ, QOR et ROP sont congruents, leurs aires sont pareilles.
Cela signifie que l'aire du triangle PQR est égale à trois fois l'aire du triangle POQ, soit $3\sqrt{3}$.

Réponse : (A)

21. *Solution 1*

On commence par les chiffres des unités.
Puisque $4 \times 4 = 16$, donc $T = 6$, on reporte ensuite le 1 à la colonne des dizaines.
Dans la colonne des dizaines, puisque $4 \times 6 + 1 = 25$, donc $S = 5$, on reporte ensuite le 2 à la colonne des centaines.
Dans la colonne des centaines, puisque $4 \times 5 + 2 = 22$, donc $R = 2$, on reporte ensuite le 2 à la colonne des milliers.
Dans la colonne des milliers, puisque $4 \times 2 + 2 = 10$, donc $Q = 0$, on reporte ensuite le 1 à la colonne des dizaines de milliers.
Dans la colonne des dizaines de milliers, puisque $4 \times 0 + 1 = 1$, donc $P = 1$, on reporte ensuite le 0 à la colonne des centaines de milliers.
Dans la colonne des centaines de milliers, $4 \times 1 + 0 = 4$, comme prévu.
Voici donc la multiplication :

$$\begin{array}{r} 1\,0\,2\,5\,6\,4 \\ \times \qquad\quad 4 \\ \hline 4\,1\,0\,2\,5\,6 \end{array}$$

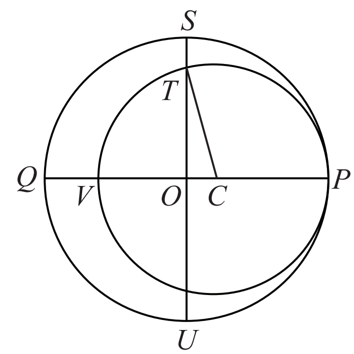
Enfin, $P + Q + R + S + T = 1 + 0 + 2 + 5 + 6 = 14$.

Solution 2

Soit x l'entier à cinq chiffres $PQRST$.
Cela signifie que $PQRST0 = 10x$, ainsi $PQRST4 = 10x + 4$.
De plus, $4PQRST = 400\,000 + PQRST = 400\,000 + x$.
À partir de la multiplication, $4(10x + 4) = 400\,000 + x$, d'où $40x + 16 = 400\,000 + x$ ou $39x = 399\,984$.
Donc, $x = \dfrac{399\,984}{39} = 10\,256$.
Puisque $PQRST = 10\,256$, alors $P + Q + R + S + T = 1 + 0 + 2 + 5 + 6 = 14$.

Réponse : (A)

22. Soit D la longueur du diamètre du grand cercle. Soit d la longueur du diamètre du petit cercle. Puisque QP et VP sont respectivement les diamètres du grand cercle et du petit cercle, alors $QV = QP - VP = D - d$.
Puisque $QV = 9$, alors $D - d = 9$.
Soit C le centre du petit cercle et relions C à T. Puisque $D > d$, C se trouve à la droite de O le long de QP.



Puisque CT est un segment qui représente le rayon du petit cercle, donc $CT = \frac{1}{2}d$.
De plus, $OC = OP - CP$. Puisque OP et CP sont les rayons des deux cercles, donc $OC = \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}d$.
Puisque SO est un segment qui représente le rayon du grand cercle et que $ST = 5$, donc $TO = SO - ST = \frac{1}{2}D - 5$.
Puisque QP et SU sont perpendiculaires l'un à l'autre, alors le triangle TOC est rectangle en O.
À l'aide du théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}
TO^2 + OC^2 &= CT^2 \\
\left(\tfrac{1}{2}D - 5\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}d\right)^2 &= \left(\tfrac{1}{2}d\right)^2 \\
4\left(\tfrac{1}{2}D - 5\right)^2 + 4\left(\tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}d\right)^2 &= 4\left(\tfrac{1}{2}d\right)^2 \\
(D - 10)^2 + (D - d)^2 &= d^2 \\
(D - 10)^2 + 9^2 &= d^2 \\
81 &= d^2 - (D - 10)^2 \\
81 &= (d - (D - 10))(d + (D - 10)) \\
81 &= (d - D + 10)(d + (D - 10)) \\
81 &= (10 - (D - d))(d + D - 10) \\
81 &= (10 - 9)(d + D - 10) \\
81 &= d + D - 10 \\
91 &= d + D
\end{aligned}$$

ainsi, les deux cercles ont des longueurs de diamètres dont la somme est égale à 91.

Réponse : (B)

23. Considérons avant tout les entiers qui peuvent être exprimés par la somme de quatre entiers positifs consécutifs.
Le plus petit de ces entiers est donc $1+2+3+4 = 10$ tandis que celui d'après est $2+3+4+5 = 14$.
On remarque qu'en passant de $k+(k+1)+(k+2)+(k+3)$ à $(k+1)+(k+2)+(k+3)+(k+4)$, la somme a augmenté de 4 (puisque les trois autres termes n'ont pas changé, on peut attribuer ce changement à la différence entre le terme $k+4$ et le terme k).
Ainsi, les entiers positifs qui peuvent être exprimés par la somme de 4 entiers positifs consécutifs sont les entiers de la suite arithmétique dont le premier terme est égal à 10 et dont la raison est égale à 4.
Puisque $n \leq 100$, ces entiers sont

$$10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, 62, 66, 70, 74, 78, 82, 86, 90, 94, 98$$

Donc, il y a 23 tels entiers.
Considérons maintenant les entiers positifs $n \leq 100$ qui peuvent être exprimés par la somme de cinq entiers positifs consécutifs.
Le plus petit de ces entiers est donc $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ tandis que celui d'après est $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$.
En suivant le même raisonnement que ci-dessus, ces entiers forment une suite arithmétique dont le premier terme est égal à 15 et dont la raison est égale à 5.
Puisque $n \leq 100$, ces entiers sont $15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100$.
Quand on exclut les entiers qui paraissent déjà dans la liste d'avant (30, 50, 70, 90), on obtient

$$15, 20, 25, 35, 40, 45, 55, 60, 65, 75, 80, 85, 95, 100$$

Donc, il y a 14 tels entiers.
Considérons maintenant les entiers positifs $n \leq 100$ qui peuvent être exprimés par la somme de six entiers positifs consécutifs.
Ces entiers forment une suite arithmétique dont le premier terme est égal à 21 et dont la raison est égale à 6.
Puisque $n \leq 100$, ces entiers sont $21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99$.
Quand on exclut les entiers qui paraissent déjà dans la liste d'avant (45, 75), on obtient

$$21, 27, 33, 39, 51, 57, 63, 69, 81, 87, 93, 99$$

Donc, il y a 12 tels entiers.
Puisque $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 105$ et que ce dernier est le plus petit entier qui puisse être exprimé par la somme de 14 entiers positifs consécutifs, donc aucun $n \leq 100$ n'est la somme d'au moins 14 entiers positifs consécutifs (car toute somme de 15 entiers positifs consécutifs sera forcément supérieure à 105 - cette somme ne fera qu'augmenter au fur et à mesure qu'augmente le nombre d'entiers positifs consécutifs.)
Ainsi, si un entier $n \leq 100$ peut être exprimé par la somme de $s \geq 4$ entiers consécutifs, alors $s \leq 13$.
On dresse un tableau afin d'énumérer les $n \leq 100$ qu'on n'a pas encore énoncé et qui proviennent des valeurs de s où $7 \leq s \leq 13$:

s	Le n le plus petit	Les $n \leq 100$ possibles	Nouveau n
7	28	$28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98$	$28, 49, 56, 77, 84, 91$
8	36	$36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100$	$36, 44, 52, 68, 76, 92$
9	45	$45, 54, 63, 72, 81, 90, 99$	72
10	55	$55, 65, 75, 85, 95$	Aucun
11	66	$66, 77, 88, 99$	88
12	78	$78, 90$	Aucun
13	91	91	Aucun

Il y a en tout $23 + 14 + 12 + 6 + 6 + 1 + 1 = 63$ telles valeurs de n.
Que remarquez-vous à propos des valeurs de n qui ne peuvent pas être exprimées de cette manière ?

Réponse : (B)

24. Une équation quadratique a deux solutions réelles distinctes uniquement lorsque son discriminant est positif.
Le discriminant de l'équation quadratique $x^2 - (r + 7)x + r + 87 = 0$ est

$$\Delta = (r + 7)^2 - 4(1)(r + 87) = r^2 + 14r + 49 - 4r - 348 = r^2 + 10r - 299$$

Puisque $\Delta = r^2 + 10r - 299 = (r + 23)(r - 13)$ d'où les racines $r = -23$ et $r = 13$, alors $\Delta > 0$ lorsque $r > 13$ ou $r < -23$. (On pourrait aussi examiner l'emplacement de la parabole de l'équation $y = x^2 + 10x - 299 = (x + 23)(x - 13)$ afin de déterminer les intervalles où elle serait située au-dessus de l'axe des abscisses.)

De plus, les deux solutions de l'équation quadratique d'origine doivent être négatives.
Si $r > 13$, donc l'équation $x^2 - (r + 7)x + r + 87 = 0$ est de la forme $x^2 - bx + c = 0$ où b et c sont tous les deux positifs.
Dans ce cas, si $x < 0$, donc $x^2 > 0$, $-bx > 0$ et $c > 0$ d'où $x^2 - bx + c > 0$.
Ainsi, il n'y a pas de solutions négatives si $r > 13$.
Donc logiquement, $r < -23$. Cette condition est nécessaire quoiqu'elle ne garantit pas des solutions négatives.
On considère alors $x^2 - (r + 7)x + r + 87 = 0$ avec la condition $r < -23$.
Cette équation quadratique est de la forme $x^2 - bx + c = 0$ où $b < 0$ et où la valeur de c est toujours inconnue (celle-ci pourrait être positive, négative, ou égale à 0).
On sait par contre que cette équation a deux solutions réelles distinctes.
Soient s et t les solutions réelles de l'équation quadratique $x^2 - bx + c = 0$.
Cela signifie que les facteurs de $x^2 - bx + c$ doivent être $x - s$ et $x - t$.
Autrement dit, $(x - s)(x - t) = x^2 - bx + c$.
Donc,

$$(x - s)(x - t) = x^2 - tx - sx + st = x^2 - (s + t)x + st$$

Puisque $(x-s)(x-t) = x^2-bx+c$, donc, pour toutes valeurs de x, $x^2-(s+t)x+st = x^2-bx+c$.
Cela signifie que $b = (s + t)$ et que $c = st$.
Puisque $b < 0$, donc s et t ne peuvent pas être tous les deux positifs car $b = s + t$.
Si $c = 0$, donc soit $s = 0$, soit $t = 0$.
Si $c < 0$, donc soit s est positif et t est négatif, soit s est négatif et t est positif.
Si $c = st$ est positif, alors s et t sont soit tous les deux positifs, soit tous les deux négatifs. Par contre, puisque $b < 0$, donc s et t ne peuvent pas être tous les deux positifs et doivent donc être tous les deux négatifs.
Sachant que l'équation $x^2 - bx + c = 0$ a deux racines réelles distinctes et que $b < 0$, la condition que les deux racines soient négatives équivaut à la condition que $c > 0$.
Donc $c = r + 87$ d'où $c > 0$ seulement quand $r > -87$.
Enfin, cela signifie que l'équation $x^2 - (r + 7)x + r + 87 = 0$ a deux racines réelles distinctes négatives quand $-87 < r < -23$.
Cela signifie que $p = -87$ et que $q = -23$ d'où $p^2 + q^2 = 8098$.

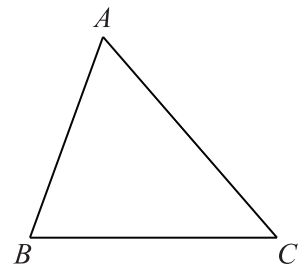
Réponse : (E)

25. On utilisera dans cette solution deux résultats géométriques :

(i) *L'inégalité triangulaire*

Ce résultat stipule que chacune des inégalités suivantes est vraie pour le triangle ABC :

$$AB + BC > AC \qquad AC + BC > AB \qquad AB + AC > BC$$

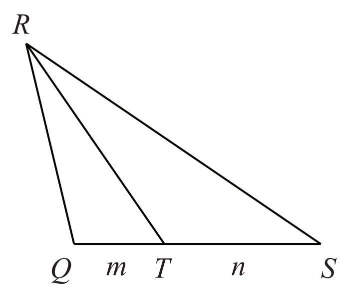


Ce résultat provient de l'idée que la distance la plus courte entre deux points est la longueur du segment de droite qui relierait ces deux points.

Par exemple, la distance la plus courte entre le point A et le point C est égale à la longueur du segment de droite qui relierait ces deux points, soit le segment AC. Donc, la longueur d'un chemin qui mène du point A au point C mais qui passe par le point B (qui lui n'est pas situé sur le segment AC) peut être exprimée par $AB + BC$. Logiquement ce chemin est plus long que le chemin en ligne droite AC, donc $AB + BC > AC$.

(ii) *Le théorème de la bissectrice*

Étant donné que $\angle QRT = \angle SRT$ dans le triangle du problème, on en déduit que RT est la bissectrice de l'angle QRS. Puisque RT est la bissectrice de l'angle QRS, le théorème de la bissectrice soutient que $\dfrac{QT}{TS} = \dfrac{RQ}{RS}$.



On peut vérifier le théorème de la bissectrice à l'aide de la loi des sinus :

Dans le triangle RQT, on a $\dfrac{RQ}{\sin(\angle RTQ)} = \dfrac{QT}{\sin(\angle QRT)}$.

Dans le triangle RST, on a $\dfrac{RS}{\sin(\angle RTS)} = \dfrac{TS}{\sin(\angle SRT)}$.

On divise la première équation par la deuxième afin d'obtenir :

$$\frac{RQ\sin(\angle RTS)}{RS\sin(\angle RTQ)} = \frac{QT\sin(\angle SRT)}{TS\sin(\angle QRT)}$$

Puisque $\angle QRT = \angle SRT$, alors $\sin(\angle QRT) = \sin(\angle SRT)$.

Puisque $\angle RTQ = 180^\circ - \angle RTS$, alors $\sin(\angle RTQ) = \sin(\angle RTS)$.

À partir de ces trois égalités, on obtient $\dfrac{RQ}{RS} = \dfrac{QT}{TS}$ comme voulu.

On procède maintenant à la résolution du problème.

À l'aide du théorème de la bissectrice, $\dfrac{RQ}{RS} = \dfrac{QT}{TS} = \dfrac{m}{n}$.
Donc, on pose $RQ = km$ et $RS = kn$, k étant un un nombre réel où $k > 0$.
À l'aide de l'inégalité triangulaire , $RQ + RS > QS$.
Cela équivaut à l'inégalité $km + kn > m + n$ ou $k(m + n) > m + n$.
Puisque $m + n > 0$, cela équivaut à $k > 1$.
On se sert de l'inégalité triangulaire une deuxième fois afin de stipuler que $RQ + QS > RS$.
Ceci équivaut à $km + m + n > kn$, d'où $k(n - m) < n + m$.
Puisque $n > m$, alors $n - m > 0$ d'où on obtient $k < \dfrac{n + m}{n - m}$.
(Puisqu'on est déjà conscient du fait que $RS > RQ$, une troisième application de l'inégalité triangulaire ne fournira aucune information supplémentaire. Voyez-vous pourquoi ?)

Le périmètre, p, du triangle QRS est égal à $RQ+RS+QS = km+kn+m+n = (k+1)(m+n)$.
Puisque $k > 1$, donc $p > 2(m + n)$.
Puisque $2(m + n)$ est un entier, alors la plus petite valeur entière possible de p est égale à $2m + 2n + 1$.
Puisque $k < \dfrac{n + m}{n - m}$, alors $p < \left(\dfrac{n + m}{n - m} + 1\right)(n + m)$.
Puisque $n + m$ est un multiple de $n - m$, alors $\left(\dfrac{n + m}{n - m} + 1\right)(n + m)$ est un entier. Donc la plus grande valeur entière possible de p est égale à $\left(\dfrac{n + m}{n - m} + 1\right)(n + m) - 1$.
On peut atteindre toute valeur possible de p dans l'intervalle de $2m + 2n + 1$ à $\left(\dfrac{n + m}{n - m} + 1\right)(n + m) - 1$. On peut constater ceci en commençant par le point R (qui lui se trouve presque au point T) et en l'éloigant doucement de QS tout en préservant le rapport $\dfrac{RQ}{RS}$ jusqu'à ce que le triangle soit presque plat de manière que RS soit situé le long de RQ et de QS.
On sait que la plus petite valeur entière possible de p est égale à $2m + 2n + 1$ et que la plus grande valeur entière possible de p est égale à $\left(\dfrac{n + m}{n - m} + 1\right)(n + m) - 1$.
Le nombre d'entiers dans cet intervalle est égal à

$$\left(\left(\frac{n + m}{n - m} + 1\right)(n + m) - 1\right) - (2m + 2n + 1) + 1$$

À partir des informations fournies dans le problème, le nombre de valeurs entières possibles de p est égal à $m^2 + 2m - 1$.

On obtient donc les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\left(\left(\frac{n+m}{n-m}+1\right)(n+m)-1\right)-(2m+2n+1)+1 &= m^2+2m-1\\
\left(\left(\frac{n+m}{n-m}+1\right)(n+m)\right)-(2m+2n) &= m^2+2m\\
\left(\left(\frac{n+m}{n-m}+\frac{n-m}{n-m}\right)(n+m)\right)-(2m+2n) &= m^2+2m\\
\left(\frac{2n}{n-m}\right)(n+m)-2m-2n &= m^2+2m\\
\frac{2n^2+2nm}{n-m}-2m-2n &= m^2+2m\\
\frac{2n^2+2nm}{n-m}-\frac{2(n+m)(n-m)}{n-m} &= m^2+2m\\
\frac{2n^2+2nm}{n-m}-\frac{2n^2-2m^2}{n-m} &= m^2+2m\\
\frac{2m^2+2nm}{n-m} &= m^2+2m\\
\frac{2m+2n}{n-m} &= m+2 \qquad \text{(since } m\neq 0\text{)}\\
2m+2n &= (m+2)(n-m)\\
2m+2n &= nm+2n-m^2-2m\\
0 &= nm-m^2-4m\\
0 &= m(n-m-4)
\end{aligned}$$

Puisque $m > 0$, alors $n - m - 4 = 0$ d'où $n - m = 4$.

Dans le but d'élaborer l'exemple d'un tel triangle, supposons que $m = 2$ et que $n = 6$.

Dans ce cas, $\dfrac{n+m}{n-m} = 2$, d'où $2n + 2m + 1 = 17$ représenterait le plus petit périmètre et d'où $\left(\dfrac{n+m}{n-m}+1\right)(n+m)-1 = 23$ représenterait le plus grand périmètre.

De 17 à 23, il y a 7 entiers. Cela équivaut à $m^2 + 2m - 1$ or $2^2 + 2(2) - 1$ comme prévu.

Réponse : (A)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2018

(11^{e} année – Secondaire V)

le mardi 27 février 2018

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 28 février 2018

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a :

$$\begin{aligned} 2016 - 2017 + 2018 - 2019 + 2020 &= 2016 + (2018 - 2017) + (2020 - 2019) \\ &= 2016 + 1 + 1 \\ &= 2018 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (D)

2. Puisque la températire maximale était de 14 °C et que la température minimale était de −11 °C, l'étendue des températures était de 14 °C − (−11 °C), ou 25 °C.

RÉPONSE : (B)

3. L'expression $(3x + 2y) - (3x - 2y)$ est égale à $3x + 2y - 3x + 2y$, ou $4y$.
Lorsque $x = -2$ et $y = -1$, cette expression a une valeur de $4(-1)$, ou -4.

RÉPONSE : (A)

4. La fraction $\frac{5}{7}$ est entre 0 et 1.
La fraction $\frac{28}{3}$ est équivalente à $9\frac{1}{3}$. Elle est donc entre 9 et 10.
Les entiers supérieurs à $\frac{5}{7}$ et inférieurs à $\frac{28}{3}$ sont donc $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et 9. Il y en a 9.

RÉPONSE : (B)

5. Si $\heartsuit = 1$, alors $\nabla = \heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = 1 \times 1 \times 1 = 1$, ce qui est impossible puisque ∇ et $\heartsuit$ sont deux entiers différents strictement positifs.
Si $\heartsuit = 2$, alors $\nabla = \heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = 2 \times 2 \times 2 = 8$, ce qui est possible.
Si $\heartsuit = 3$, alors $\nabla = \heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = 3 \times 3 \times 3 = 27$, ce qui est impossible puisque ∇ doit être inférieur à 20.
Si $\heartsuit$ est supérieur à 3, alors ∇ sera supérieur à 27, ce qui est impossible. Donc, $\heartsuit$ ne peut être supérieur à 3.
On a donc $\heartsuit = 2$ et $\nabla = 8$. Donc $\nabla \times \nabla = 8 \times 8$, ou $\nabla \times \nabla = 64$.

RÉPONSE : (D)

6. Puisque $\angle QRT = 158°$, et que $\angle QRP = 180° - \angle QRT$, alors $\angle QRP = 180° - 158°$, ou $\angle QRP = 22°$.
Puisque $\angle PRS = \angle QRS$ et que $\angle QRP = \angle PRS + \angle QRS$, alors $\angle QRS = \frac{1}{2}\angle QRP$.
Donc $\angle QRS = \frac{1}{2}(22°)$, ou $\angle QRS = 11°$.
Puisque le triangle QSR est rectangle en Q, alors $\angle QSR = 180° - 90° - \angle QRS$.
Donc $\angle QSR = 90° - 11°$, ou $\angle QSR = 79°$.

RÉPONSE : (E)

7. Puisque Bev a parcouru 312 km et qu'il lui reste 858 km à parcourir, la distance de Waterloo à Marathon est de 312 km + 858 km, ou 1170 km.
Le point à mi-chemin entre Waterloo et Marathon est à $\frac{1}{2}$(1170 km) de Waterloo, ou 585 km de Waterloo.
Pour atteindre ce point, il lui reste 273 km à parcourir (585 km − 312 km = 273 km).

RÉPONSE : (B)

8. Un segment est parallèle à l'axe des abscisses lorsque ses extrémités ont la même ordonnée. La droite est donc parallèle à l'axe des abscisses lorsque $2k+1=4k-5$, ou $6=2k$, ou $k=3$. (On peut vérifier que lorsque $k=3$, les points ont pour coordonnées $(3,7)$ et $(8,7)$.)

Réponse : (A)

9. Puisque le rectangle $PQRS$ a une aire de 180 et que $SR=15$, alors $PS=12$ ($PS=\dfrac{180}{15}=12$). Puisque $PS=12$, que $US=4$ et que $PU=PS-US$, alors $PU=12-4$, ou $PU=8$. Le triangle PUT est rectangle en U. D'après le théorème de Pythagore,

$$TU=\sqrt{PT^2-PU^2}=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{36}=6$$

puisque $TU>0$. Dans le triangle PTS, soit PS la base et TU la hauteur correspondante. L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(PS)(TU)$, ou $\frac{1}{2}(12)(6)$, ou 36.

Réponse : (B)

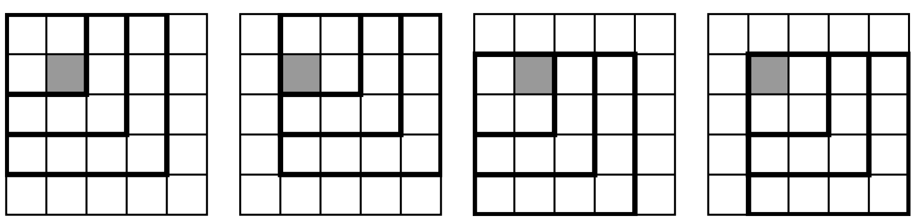
10. Pour tout nombre réel x non nul, on a $x^2>0$. Puisque $-1<x<0$, alors $x^2<(-1)^2$, d'où $x^2<1$. Donc $0<x^2<1$. Parmi les choix de réponse, C est le seul nombre entre 0 et 1.

Réponse : (C)

11. Puisque $\frac{5}{6}$ des boules dans le sac sont blanches et que toutes les autres boules sont rouges, alors $\frac{1}{6}$ des boules sont rouges. Puisque 8 boules rouges représentent $\frac{1}{6}$ de toutes les boules du sac et que $\frac{5}{6}=5\cdot\frac{1}{6}$, alors le nombre de boules blanches dans le sac est égal à $5\cdot 8$, ou 40.

Réponse : (C)

12. Il y a 1 carré 1×1 qui contient le carré ombré, soit ce carré lui-même. Il y a 4 carrés 2×2, 4 carrés 3×3 et 4 carrés 4×4 qui contiennent le carré ombré.



Il y a 1 carré 5×5 qui contient le carré ombré, soit le quadrillage 5×5 lui-même. En tout, il y a 14 carrés qui contiennent le carré ombré ($1+4+4+4+1=14$).

Réponse : (E)

13. On cherche la première fois, après 4:56, où les chiffres de l'heure seront consécutifs en ordre croissant.
Il serait bon d'essayer 5:67, mais il ne s'agit pas d'une heure valable.
De même, l'heure ne peut pas commencer par un 6, un 7, un 8 ou un 9.
Une heure qui commence par 10 ou par 11 n'a pas ses chiffres consécutifs en ordre croissant.
Si l'heure commence par 12, on obtient l'heure 12:34. Il s'agit bien de la première fois après 4:56.
On doit déterminer le nombre de minutes entre 4:56 et 12:34.
De 4:56 à 11:56, il y a 7 heures, c'est-à-dire 7×60 minutes, ou 420 minutes.
De 11:56 à 12:00, il y a 4 minutes. De 12:00 à 12:34, il y a 34 minutes.
Donc de 4:56 à 12:34, il y a 458 minutes ($420+4+34=458$).

Réponse : (A)

14. La droite d'équation $y = x$ a une pente de 1 et elle passe au point $(0, 0)$.
Lorsqu'on lui fait subir une translation, la pente n'est pas changée.
Lorsque la droite subit une translation de 3 unités vers la droite et de 2 unités vers le bas, tous les points de la droite subissent cette translation. L'image du point $(0, 0)$ est donc $(3, -2)$.
L'image de la droite a donc une pente de 1 et elle passe au point $(3, -2)$.
Elle a donc pour équation $y - (-2) = 1(x - 3)$, ou $y + 2 = x - 3$, ou $y = x - 5$.
Cette droite a pour ordonnée à l'origine -5.

Réponse : (C)

15. Chaque nombre dans une case doit être un diviseur du produit des nombres de sa rangée et un diviseur du produit des nombres de sa colonne.

			56
			135
	N		48
21	108	160	

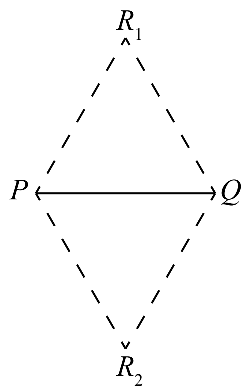
Deux seuls produits sont des multiples de 5, soit 160 et 135.
Donc, 5 doit paraitre dans la 3ᵉ case de la 2ᵉ rangée.
Donc, les deux autres nombres de la 2ᵉ rangée ont un produit de 27 $(135 \div 5 = 27)$.
Puisque tous les nombres dans les cases sont des entiers de 1 à 9, les deux autres nombres de la 2ᵉ rangée doivent être 3 et 9.
Puisque 9 n'est pas un diviseur 21, 9 doit être placé dans la 2ᵉ colonne.
Donc, les deux autres nombres de la colonne du milieu doivent avoir un produit de 12 $(108 \div 9 = 12)$.
Donc, les deux autres nombres de cette colonne doivent être 3 et 4, ou 2 et 6. (Ce sont les deux paires de nombres de la liste qui ont un produit de 12.)
Puisque 3 parait déjà dans le tableau, les nombres doivent être 2 et 6.
Puisque 6 n'est pas un diviseur de 56, alors 6 ne peut pas paraitre dans la 1ʳᵉ rangée.
Donc, 6 doit paraitre dans la 3ᵉ rangée. Donc $N = 6$.
On peut alors remplir le quadrillage comme suit :

7	2	4	56
3	9	5	135
1	6	8	48
21	108	160	

Réponse : (D)

16. *Solution 1*

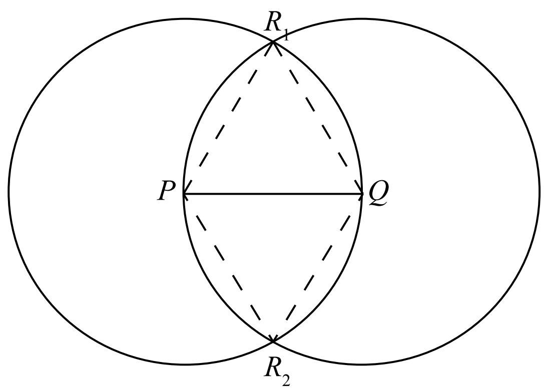
Si on place un point R de manière que $PQ = QR = PR$, on obtient un triangle équilateral PQR. Puisque les points P et Q sont fixes, il n'y a que deux triangles équilatéraux possibles avec PQ comme côté PQ, soit un de chaque côté de PQ.



On peut aussi le voir en constatant qu'il n'y a que deux droites possibles qui passent au point P et qui forment un angle de $60°$ avec PQ.

Solution 2

On considère le segment PQ. On trace un cercle de centre P qui passe au point Q et un cercle de centre Q qui passe au point P.



Supposons que le point R satisfait à $PQ = QR = PR$.
Puisque $PQ = QR$, alors P et R sont à la même distance du point Q. Donc, R est situé sur le cercle de centre Q qui passe au point P.
Puisque $PQ = PR$, alors R est situé sur le cercle de centre P qui passe au point Q.
En d'autres mots, le point R est situé sur les deux cercles.
Puisque ces deux cercles se coupent en exactement deux points, il y a deux seuls endroits possibles pour R.

Réponse : (C)

17. Le carré a des côtés de longueur 2 et M et N sont des milieux de côtés.
Donc $SM = MR = QN = NR = 1$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PSM, $PM = \sqrt{PS^2 + SM^2}$.
Donc $PM = \sqrt{2^2 + 1^2}$ ou $PM = \sqrt{5}$ puisque $PM > 0$.
De même, $PN = \sqrt{5}$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle MNR, $MN = \sqrt{MR^2 + NR^2}$.
Donc $MN = \sqrt{1^2 + 1^2}$, ou $MN = \sqrt{2}$ puisque $MN > 0$.
D'après la loi du cosinus dans le triangle PMN :

$$\begin{aligned} MN^2 &= PM^2 + PN^2 - 2(PM)(PN)\cos(\angle MPN) \\ 2 &= 5 + 5 - 2(\sqrt{5})(\sqrt{5})\cos(\angle MPN) \\ 2 &= 10 - 10\cos(\angle MPN) \\ 10\cos(\angle MPN) &= 8 \\ \cos(\angle MPN) &= \tfrac{8}{10} = \tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

Réponse : (A)

18. Supposons que $\sqrt{7 + \sqrt{48}} = m + \sqrt{n}$.
On élève chaque membre au carré pour obtenir $7 + \sqrt{48} = (m + \sqrt{n})^2$.
Puisque $(m + \sqrt{n})^2 = m^2 + 2m\sqrt{n} + n$, l'équation devient $7 + \sqrt{48} = (m^2 + n) + 2m\sqrt{n}$.
On suppose que $m^2 + n = 7$ et que $2m\sqrt{n} = \sqrt{48}$.
On élève au carré chaque membre de cette dernière équation pour obtenir $4m^2n = 48$, ou $m^2n = 12$.
On a donc $m^2 + n = 7$ et $m^2n = 12$.
On voit peut-être que $m = 2$ et $n = 3$ est une solution.
Sinon, on peut reporter $n = 7 - m^2$ dans la dernière équation pour obtenir $m^2(7 - m^2) = 12$, ou $m^4 - 7m^2 + 12 = 0$.
On factorise le membre de gauche pour obtenir $(m^2 - 3)(m^2 - 4) = 0$.
Puisque m est un entier, alors $m^2 \neq 3$.
Donc $m^2 = 4$, d'où $m = \pm 2$. Puisque m est un entier positif, alors $m = 2$.
Puisque $m = 2$ et $n = 7 - m^2$, alors $n = 3$.
On a donc $m = 2$ et $n = 3$, d'où $m^2 + n^2 = 13$.
On peut vérifier que $m + \sqrt{n} = 2 + \sqrt{3}$ et que $(2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + \sqrt{48}$, ce qui vérifie la condition du problème. Ceci confirme que même si la supposition que l'on a faite au début n'est pas appuyée, elle a tout de même mené à une réponse.

Réponse : (E)

19. *Solution 1*
Pendant les 3 premières minutes de la course, Pierre a parcouru 48 m de plus que Radford.
Voici pourquoi :

Au temps 0 minute, Radford était à la ligne de 30 m.
En parcourant d m pendant ces 3 minutes, Radford arrive à la ligne de $(d + 30)$ m après 3 minutes.
Puisque Pierre est à 18 m devant Radford après 3 minutes, il est à la ligne de $(d + 30 + 18)$ m.
Pendant ces 3 minutes, Pierre a donc parcouru $(d + 48)$ m, c'est-à-dire 48 m de plus que les d m de Radford.

Puisque chacun court à une vitesse constante, Pierre court 16 m/min plus vite que Radford $(\dfrac{48 \text{ m}}{3 \text{ min}} = 16 \text{ m/min})$.

Puisque Pierre termine la course après exactement 7 minutes, Pierre a couru 4 minutes de plus. Pendant ces 4 minutes, il a parcouru 64 m de plus que Radford ($(4 \text{ min}) \cdot (16 \text{ m/min}) = 64$ m). Après 3 minutes, Pierre était 18 m devant Radford.
Donc, après 7 minutes, Pierre était 82 m devant Radford (18 m + 64 m = 82 m). Donc lorsque Pierre a terminé, Radford était à 82 m de la ligne d'arrivée.

Solution 2
Comme dans la solution 1, on suppose que Radford a parcouru d m pendant les 3 premières minutes et que Pierre a donc parcouru $(d + 48)$ m pendant ces 3 minutes.
Puisque sa vitesse est constante, Pierre parcourt $\frac{4}{3}(d + 48)$ m pendant les 4 minutes suivantes.
Puisque sa vitesse est constante, Radford parcourt $\frac{4}{3}d$ m pendant ces 4 minutes.
Pierre parcourt donc un total de $(d + 48)$ m + $\frac{4}{3}(d + 48)$ m, ou $\frac{7}{3}(d + 48)$ m.
Radford est à $(30 + d + \frac{4}{3}d)$ m de la ligne de départ après 7 minutes, puisqu'il avait une avance de 30 m au départ.
Donc lorsque Pierre a gagné, Radford était à la distance suivante de la ligne d'arrivée, en mètres :

$$\tfrac{7}{3}(d + 48) - (30 + d + \tfrac{4}{3}d) = \tfrac{7}{3}d + 112 - 30 - d - \tfrac{4}{3}d = 82$$

Réponse : (D)

20. On comptera séparément le nombre de valeurs entières de x pour lesquelles le produit x

$$(x - 2)(x - 4)(x - 6) \cdots (x - 2016)(x - 2018) \qquad (*)$$

est égal à 0 et pour lesquelles le produit est inférieur à 0.
Le produit $(*)$ est égal à 0 lorsque l'un des facteurs est égal à 0 et seulement dans ce cas.
Cela se produit lorsque x est égal à $2, 4, 6, \ldots, 2016$ ou 2018.
Ces valeurs de x sont les entiers pairs de 2 à 2018. Il y a 1009 telles valeurs ($\frac{2018}{2} = 1009$).
Le produit $(*)$ est inférieur à 0 lorsqu'aucun de ses facteurs n'est nul et qu'un nombre impair de ses facteurs ont des valeurs négatives.
On remarque que pour toute valeur entière de x, on a :

$$x - 2 > x - 4 > x - 6 > \cdots > x - 2016 > x - 2018$$

Lorsque $x = 1$, on a $x - 2 = -1$ et tous les 1009 autres facteurs sont négatifs, ce qui rend l'expression $(*)$ négative.
Lorsque $x = 3$, on a $x - 2 = 1$, $x - 4 = -1$ et tous les 1008 autres facteurs sont négatifs, ce qui donne un produit positif.
Lorsque $x = 5$, on a $x - 2 = 3$, $x - 4 = 1$ et $x - 6 = -1$ et les 1007 autres facteurs sont négatifs, ce qui donne un produit négatif.
Cette régularité continue, donnant une valeur négative à l'expression $(*)$ lorsque $x = 1, 5, 9, 13, \ldots,$ $2013, 2017$.
Il y a 505 telles valeurs de x ($1 + \frac{2017-1}{4} = 505$). (Elles commencent à 1 et se présentent à tous les 4 entiers).
Lorsque $x \geq 2019$, chaque facteur et positif et l'expression $(*)$ est positive.
Il y a donc 1514 valeurs positives de x ($1009 + 505 = 1514$) pour lesquelles la valeur de l'expression $(*)$ est inférieure ou égale à 0.

On peut justifier davantage la régularité mentionnée ci-haut.
Supposons que $x = 4n + 1$ lorsque $n = 0, 1, 2, \ldots, 504$. (Il s'agit des entiers $1, 5, 9, 13, \ldots, 2017$.)
L'expression $(*)$ devient :

$$(4n - 1)(4n - 3)(4n - 5) \cdots (4n - 2015)(4n - 2017)$$

Le $2k^{\text{ième}}$ facteur est $(n-(4k-1))$. Lorsque $n=4k$, ce facteur est positif et le facteur suivant est négatif.
En d'autres mots, lorsque $n=2k$, les $2k$ premiers facteurs sont positifs et les autres sont négatifs.
Lorsque $n=2k$, il y a donc un nombre pair de facteurs positifs.
Puisqu'il y a un nombre impair de facteurs en tout, soit 1009, le nombre de facteurs négatifs est impair et le produit est négatif.
De même, on peut démontrer que lorsque $x=4n+3$ $(n=0,1,2,\ldots,503)$, le produit est positif.
Il s'agit des valeurs de x égales à $3,7,11,\ldots,2011,2015)$.
Ceci confirme que la régularité continue.

Réponse : (C)

21. On reporte $n=1$ dans l'équation $a_{n+1}=a_n+a_{n+2}-1$ pour obtenir $a_2=a_1+a_3-1$.
Puisque $a_1=x$ et $a_3=y$, alors $a_2=x+y-1$.
On récrit l'équation donnée sous forme $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+1$ $(n\geq 1)$.
Donc :

$$\begin{aligned}
a_4&=a_3-a_2+1=y-(x+y-1)+1=2-x\\
a_5&=a_4-a_3+1=(2-x)-y+1=3-x-y\\
a_6&=a_5-a_4+1=(3-x-y)-(2-x)+1=2-y\\
a_7&=a_6-a_5+1=(2-y)-(3-x-y)+1=x\\
a_8&=a_7-a_6+1=x-(2-y)+1=x+y-1
\end{aligned}$$

Puisque $a_7=a_1$ et $a_8=a_2$ et que chaque terme dépend seulement des deux termes précédents, les termes de la suite se répètent à tous les 6 termes.
(Par exemple, $a_9=a_8-a_7+1=a_2-a_1+1=a_3$ et ainsi de suite.)
Or

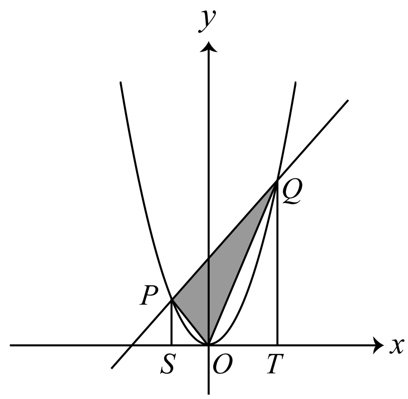
$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=x+(x+y-1)+y+(2-x)+(3-x-y)+(2-y)=6$$

et ainsi, la somme des 6 termes suivants est aussi égale à 6 et ainsi de suite.
Puisque $2016=6\cdot 336$ et que le 2016^e^ terme est le dernier d'un groupe de 6 termes, alors la somme des 2016 premiers termes de la suite est égale à $6\cdot 336$, ou 2016.
On a $a_{2017}=a_1=x$ et $a_{2018}=a_2=x+y-1$.
La somme des 2018 premiers termes de sa suite est égale à $2016+x+(x+y-1)$, ou $2x+y+2015$.

Réponse : (E)

22. On détermine d'abord les coordonnées des points P et Q en fonction de k. Puisque les coordonnées des points d'intersection de la droite et de la parabole satisfont aux équations $y=x^2$ et $y=3kx+4k^2$, la valeur de y à ces points est la même pour les deux équations.
On a donc $x^2=3kx+4k^2$, ou $x^2-3kx-4k^2=0$.
On récrit le membre de gauche sous la forme $x^2-4kx+kx+(-4k)(k)=0$, ce qui nous permet de le factoriser. On obtient $(x-4k)(x+k)=0$, d'où $x=4k$ ou $x=-k$.
Puisque $k>0$, P est situé dans le deuxième quadrant et Q est situé dans le premier quadrant.
Donc P a pour abscisse $-k$ (un nombre négatif).
Puisque P est situé sur la parabole d'équation $y=x^2$, son ordonnée est égale à $(-k)^2$, ou k^2.
P a donc pour coordonnées $(-k,k^2)$.
Puisque Q a pour abscisse $4k$ et qu'il est situé sur la parabole d'équation $y=x^2$, son ordonnée est égale à $(4k)^2$, ou $16k^2$. Q a donc pour coordonnées $(4k,16k^2)$.
On détermine maintenant l'aire du triangle OPQ en fonction de k.

Puisque l'aire du triangle OPQ est égale à 80, ceci nous donnera une équation en fonction de k. Sa solution nous donnera la pente de la droite.
Pour déterminer l'aire du triangle OPQ en fonction de k, on abaisse des perpendiculaires à l'axe des abscisses aux points P et Q jusqu'aux points respectifs S et T.



L'aire du triangle OPQ est égale à l'aire du trapèze $PSTQ$ moins l'aire des triangles PSO et QTO.
Le trapèze $PSTQ$ a pour bases parallèles SP et TQ et pour hauteur ST.
Puisque P a pour coordonnées $(-k, k^2)$, alors $SP = k^2$.
Puisque Q a pour coordonnées $(4k, 16k^2)$, alors $TQ = 16k^2$.
De plus, $ST = 4k - (-k)$, ou $ST = 5k$.
L'aire du trapèze $PSTQ$ est égale à $\frac{1}{2}(SP + TQ)(ST)$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}(k^2 + 16k^2)(5k)$, ou $\frac{85}{2}k^3$.
Le triangle PSO est rectangle en S et son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(SP)(SO)$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}(k^2)(0 - (-k))$, ou $\frac{1}{2}k^3$.
Le triangle QTO est rectangle en T et son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(TQ)(TO)$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}(16k^2)(4k - 0)$, ou $32k^3$.
L'aire du triangle POQ est égale à $\frac{85}{2}k^3 - \frac{1}{2}k^3 - 32k^3$, ou $10k^3$.
Puisque cette aire est égale à 80, alors $10k^3 = 80$, ou $k^3 = 8$, ou $k = 2$.
Puisque la droite a une pente de $3k$, cette pente est égale à 6.

Réponse : (D)

23. On doit avoir $(x - a)(x - 6) + 3 = (x + b)(x + c)$ pour tous les nombres réels x.
En particulier, cela doit être vrai lorsque $x = 6$.
On reporte $x = 6$ dans l'équation pour obtenir $(6-a)(6-6)+3 = (6+b)(6+c)$, ou $3 = (6+b)(6+c)$.
Puisque b et c sont des entiers, alors $6 + b$ et $6 + c$ sont des entiers. Donc, $6 + b$ est un diviseur de 3.
Les valeurs possibles de $6 + b$ sont $3, 1, -1$ et -3.
Les valeurs correspondantes de b sont $-3, -5, -7$ et -9.
On doit vérifier si ces valeurs de b donnent des valeurs entières de a et de c.
Si $b = -3$, alors $6 + b = 3$. D'après l'équation $3 = (6 + b)(6 + c)$, on a $6 + c = 1$, d'où $c = -5$.
Lorsque $b = -3$ et $c = -5$, l'équation initiale devient $(x - a)(x - 6) + 3 = (x - 3)(x - 5)$.
On développe le membre de droite pour obtenir $(x - a)(x - 6) + 3 = x^2 - 8x + 15$, ou $(x - a)(x - 6) = x^2 - 8x + 12$.
Le membre de droite $x^2 - 8x + 12$ se factorise pour devenir $(x - 2)(x - 6)$. Puisque cette équation est une identité pour toutes valeurs réelles de x, alors $a = 2$.
De même, si $b = -5$, alors $c = -3$ et $a = 2$. (Il fallait s'y attendre, puisque b et c peuvent être changés l'un pour l'autre dans l'équation initiale.)

De même, lorsque $b = -7$, alors $c = -9$ et $a = 10$.
De même, lorsque $b = -9$, alors $c = -7$ et $a = 10$.
Les valeurs possibles de b sont $b = -3, -5, -7$ et -9.
Leur somme est égale à $(-3) + (-5) + (-7) + (-9)$, ou -24.

Réponse : (B)

24. On utilise la notation $a/b/c$ pour représenter a rondelles dans un seau, b rondelles dans un deuxième seau et c rondelles dans le troisième seau, tout en omettant l'ordre des seaux.

Seaux jaunes
1/0/0 : Puisqu'on ne distribue qu'une rondelle, la distribution sera toujours 1/0/0.

Seaux bleus
On distribue 2 rondelles dans 3 seaux. Il y a 9 façons de le faire ($3^2 = 9$). (On peut placer une rondelle dans n'importe quel seau et dans chaque cas, la deuxième rondelle peut être placée dans n'importe quel seau.)
2/0/0 : Il y a 3 façons de distribuer les rondelles dans un même seau (1 façon par seau). La probabilité de le faire est de $\frac{3}{9}$.
1/1/0 : Il y a 6 façons ($9 - 3 = 6$) de distribuer 1 rondelle dans un seau et 1 rondelle dans un autre seau. La probabilité de le faire est de $\frac{6}{9}$.

Seaux rouges
Il y a 27 façons ($3^3 = 27$) de distribuer 3 rondelles dans 3 seaux.
3/0/0 : Il y a 3 façons de distribuer les rondelles dans un même seau (1 façon par seau). La probabilité de le faire est de $\frac{3}{27}$.
1/1/1 : Il y a 6 façons ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$) de distribuer les 3 rondelles dans 3 seaux (3 façons pour la première, 2 façons pour la deuxième et 1 façon pour la troisième). La probabilité de le faire est de $\frac{6}{27}$.
2/1/0 : Il y a 18 façons ($27 - 3 - 6 = 18$) de distribuer les rondelles de manière qu'il y ait 2 rondelles dans un seau, 1 rondelle dans un autre seau et 0 rondelle dans un troisième seau. La probabilité de le faire est de $\frac{18}{27}$.

Seaux verts
Il y a 81 façons ($3^4 = 81$) de distribuer 4 rondelles dans 3 seaux.
4/0/0 : Il y a 3 façons de distribuer les rondelles dans un même seau (1 façon par seau). La probabilité de le faire est de $\frac{3}{81}$.
3/1/0 : Il y a 24 façons ($4 \times 3 \times 2 = 24$) de distribuer les rondelles de manière qu'il y ait 3 rondelles dans un seau et 1 rondelle dans un deuxième seau (4 façons de choisir la rondelle seule, 3 façons de choisir le seau pour cette rondelle et 2 façons de choisir le seau pour les 3 autres rondelles). La probabilité de le faire est de $\frac{24}{81}$.
2/1/1 : Il y a 6 façons de choisir 2 des 4 rondelles. (Si elles se nomment W, X, Y, Z, on peut choisir WX, WY, WZ, XY, XZ, ou YZ.) Il y a 36 façons ($6 \times 3 \times 2 = 36$) de distribuer les rondelles de manière qu'il y ait 2 rondelles dans un seau et 1 rondelle dans chaque autre seau (6 façons de choisir les 2 rondelles qui vont ensemble, 3 façons de choisir leur seau et 2 façons de placer les 2 autres rondelles dans les 2 autres seaux). La probabilité de le faire est de $\frac{36}{81}$.
2/2/0 : Il y a 18 façons ($81 - 3 - 24 - 36 = 18$) de distribuer les 4 rondelles de manière qu'il y ait 2 rondelles dans un seau et 2 rondelles dans un autre seau. La probabilité de le faire est de $\frac{18}{81}$.

Un seau vert contient plus de rondelles que chacun des 11 autres seaux si une des distributions existe. On indique la probabilité dans chaque cas :

Vert	Rouge	Bleu	Jaune	Probabilité
4/0/0 ($p = \frac{3}{81}$)	N'importe quelle ($p = 1$)	N'importe quelle ($p = 1$)	N'importe quelle ($p = 1$)	$\frac{3}{81}$
3/1/0 ($p = \frac{24}{81}$)	N'importe quelle sauf 3/0/0 ($p = 1 - \frac{3}{27}$)	N'importe quelle ($p = 1$)	N'importe quelle ($p = 1$)	$\frac{24}{81} \cdot \frac{24}{27}$
2/1/1 ($p = \frac{36}{81}$)	1/1/1 ($p = \frac{6}{27}$)	1/1/0 ($p = \frac{6}{9}$)	N'importe quelle ($p = 1$)	$\frac{36}{81} \cdot \frac{6}{27} \cdot \frac{6}{9}$

Une distribution 2/2/0 de rondelles parmi les seaux verts ne peut satisfaire aux conditions, puisqu'il n'y aurait pas un seul seau vert ayant plus de rondelles que n'importe quel autre seau, puisqu'il y aurait deux seaux verts avec le même nombre de rondelles.
La probabilité que l'on cherche est donc égale à $\frac{3}{81} + \frac{24}{81} \cdot \frac{24}{27} + \frac{36}{81} \cdot \frac{6}{27} \cdot \frac{6}{9}$, ou $\frac{1}{27} + \frac{8}{27} \cdot \frac{8}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3}$, ou $\frac{9}{243} + \frac{64}{243} + \frac{16}{243}$, ou $\frac{89}{243}$.

Réponse : (B)

25. Soit C un chiffre et k un entier strictement positif. Alors

$$C_{(k)} = \underbrace{CC\cdots CC}_{k \text{ fois}} = C \cdot \underbrace{11\cdots 11}_{k \text{ fois}} = C \cdot \tfrac{1}{9} \cdot \underbrace{99\cdots 99}_{k \text{ fois}} = C \cdot \tfrac{1}{9} \cdot (1\underbrace{00\cdots 00}_{k \text{ fois}} - 1) = C \cdot \tfrac{1}{9} \cdot (10^k - 1)$$

Les équations suivantes sont donc équivalentes :

$$\begin{aligned}
P_{(2k)} - Q_{(k)} &= \big(R_{(k)}\big)^2 \\
P \cdot \tfrac{1}{9} \cdot (10^{2k} - 1) - Q \cdot \tfrac{1}{9} \cdot (10^k - 1) &= \big(R \cdot \tfrac{1}{9} \cdot (10^k - 1)\big)^2 \\
P \cdot \tfrac{1}{9} \cdot (10^{2k} - 1) - Q \cdot \tfrac{1}{9} \cdot (10^k - 1) &= R^2 \cdot \tfrac{1}{81} \cdot (10^k - 1)^2 \\
9P \cdot (10^{2k} - 1) - 9Q \cdot (10^k - 1) &= R^2 \cdot (10^k - 1)^2 \\
9P \cdot (10^k - 1)(10^k + 1) - 9Q \cdot (10^k - 1) &= R^2 \cdot (10^k - 1)^2 \\
9P \cdot (10^k + 1) - 9Q &= R^2 \cdot (10^k - 1) \qquad \text{(puisque } 10^k - 1 \neq 0) \\
9P \cdot 10^k + 9K - 9Q &= R^2 \cdot 10^k - R^2 \\
9P - 9Q + R^2 &= 10^k(R^2 - 9P)
\end{aligned}$$

On considère trois cas : $3 \leq k \leq 2018$, $k = 1$ et $k = 2$.

1er cas : $3 \leq k \leq 2018$
Supposons que $R^2 - 9P \neq 0$.
Puisque $k \geq 3$, alors $10^k(R^2 - 9P) > 1000$ lorsque $R^2 - 9P > 0$ et $10^k(R^2 - 9P) < -1000$ lorsque $R^2 - 9P < 0$.
Puisque P, Q, R sont des chiffres, la valeur maximale possible de $9P - 9Q + R^2$ est égale à $9(9) - 9(0) + 9^2$, ou 162 et sa valeur minimale possible est égale à $9(0) - 9(9) + 0^2$, ou -81.
Ainsi si $R^2 - 9P \neq 0$, on ne peut pas avoir $9P - 9Q + R^2 = 10^k(R^2 - 9P)$ puisque les valeurs du membre de gauche sont entre -81 et 162, tandis que celles du membre de droite sont supérieures à 1000 ou inférieures à -1000.
Donc si $3 \leq k \leq 2018$, on doit avoir $R^2 - 9P = 0$ et l'équation devient $9P - 9Q + R^2 = 0$.
Puisque $R^2 = 9P$, alors R^2 est un multiple de 3 et R est alors un multiple de 3.
Puisque R est un chiffre strictement positif, alors $R = 3$ ou $R = 6$ ou $R = 9$.

Si $R = 3$, alors $9P = R^2 = 9$, d'où $P = 1$.
Puisque $9P - 9Q + R^2 = 0$, alors $9Q = 9(1) + 9$, ou $9Q = 18$, d'où $Q = 2$.
Si $R = 6$, alors $9P = R^2$, ou $9P = 36$, d'où $P = 4$.
Puisque $9P - 9Q + R^2 = 0$, alors $9Q = 9(4) + 36$, ou $9Q = 72$, d'où $Q = 8$.
Si $R = 9$, alors $9P = R^2$, d'où $9P = 81$, ou $P = 9$.
Puisque $9P - 9Q + R^2 = 0$, alors $9Q = 9(9) + 81$, ou $9Q = 162$ et Q ne peut donc pas être un chiffre.
Donc dans le cas où $3 \leq k \leq 2018$, on obtient les quadruplets $(P, Q, R, k) = (1, 2, 3, k)$ et $(P, Q, R, k) = (4, 8, 9, k)$.
Puisqu'il existe 2016 valeurs possibles de k $(2018 - 3 + 1 = 2016)$, il y a 4032 quadruplets dans ce 1^{er} cas $(2 \cdot 2016 = 4032)$.

<u>2^{e} cas : $k = 1$</u>
L'équation $9P-9Q+R^2 = 10^k(R^2-9P)$ devient $9P-9Q+R^2 = 10R^2-90P$, ou $99P = 9R^2+9Q$, ou $11P = R^2 + Q$.
Pour chaque valeur possible de P de 1 à 9, on détermine les valeurs possibles de Q et de R en cherchant des carrés parfaits qui sont au plus 9 de moins que $11P$.
$P = 1$: On a $11P = 11$, ce qui est près des carrés 4 et 9. On obtient $(R, Q) = (2, 7)$ et $(R, Q) = (3, 2)$.
$P = 2$: On a $11P = 22$, ce qui est près du carré 16. On obtient $(R, Q) = (4, 6)$.
$P = 3$: On a $11P = 33$, ce qui est près du carré 25. On obtient $(R, Q) = (5, 8)$.
$P = 4$: On a $11P = 44$, ce qui est près du carré 36. On obtient $(R, Q) = (6, 8)$.
$P = 5$: On a $11P = 55$, ce qui est près du carré 49. On obtient $(R, Q) = (7, 6)$.
$P = 6$: On a $11P = 66$, ce qui est près du carré 64. On obtient $(R, Q) = (8, 2)$.
$P = 7$: Il n'y a aucun carré parfait de 68 à 76.
$P = 8$: On a $11P = 88$, ce qui est près du carré 81. On obtient $(R, Q) = (9, 7)$.
$P = 9$: Il n'y a aucun carré parfait de 90 à 98.
Puisque $k = 1$ dans chacun de ces cas, on obtient 8 quadruplets de plus.

<u>3^{e} cas : $k = 2$</u>
L'équation $9P - 9Q + R^2 = 10^k(R^2 - 9P)$ devient $9P - 9Q + R^2 = 100R^2 - 900P$, ou $909P = 99R^2 + 9Q$, ou $101P = 11R^2 + Q$.
Lorsque P prend des valeurs de 1 à 9, les valeurs de $101P$ sont $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808$ et 909.
Lorsque R prend des valeurs de 1 à 9, les valeurs de $11R^2$ sont $11, 44, 99, 176, 275, 396, 539, 704$ et 891.
Les éléments des deux listes qui diffèrent de 9 ou moins sont :

(i) 101 et 99 (qui donnent $(P, Q, R) = (1, 2, 3)$),
(ii) 404 et 396 (qui donnent $(P, Q, R) = (4, 8, 6)$) et
(iii) 707 et 704 (qui donnent $(P, Q, R) = (7, 3, 8)$).

Puisque $k = 2$ dans chacun de ces cas, on obtient 3 quadruplets de plus.

En tout, il y a 4043 quadruplets $(N = 4032 + 8 + 3 = 4043)$.
La somme des chiffres de N est égale à 11 $(4 + 0 + 4 + 3 = 11)$.

Réponse : (C)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2017

(11e année – Secondaire V)

le mardi 28 février 2017

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 1er mars 2017

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $6 \times 2017 - 2017 \times 4 = 2017(6-4) = 2017(2) = 4034$

Réponse : (D)

2. Dans la figure, il y a 7 rangées qui contiennent des carrés ombrés et chacune de ces rangées contient 7 carrés ombrés.
Il y a donc 49 carrés ombrés ($7 \cdot 7 = 49$).

Réponse : (E)

3. Les nombres 2, 3 et 6 ont une somme de 11. Leur produit est égal à $2 \cdot 3 \cdot 6$, ou 36.

Réponse : (C)

4. Puisque le réservoir perd 300 litres en 25 heures, l'eau sort du réservoir au taux de $\dfrac{300\text{ L}}{25\text{ h}}$, ou 12 L/h.

Réponse : (A)

5. La représentation graphique de l'équation $y = -2x^2 + 4$ est une parabole.
Puisque le coefficient de x^2 est négatif, la parabole est ouverte vers le bas.
Puisque le terme constant de l'équation est positif, l'ordonnée à l'origine de la parabole (la valeur de y lorsque $x = 0$) est positive.
Seul le choix de réponse (D) correspond à ces caractéristiques. (Puisque le coefficient de x est 0 dans l'équation, la courbe doit être symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, comme il l'est dans le choix (D).)

Réponse : (D)

6. Puisque la moyenne de 5 et de 9 est égale à 7 ($\frac{5+9}{2} = 7$), la moyenne de x et de 5 doit être 10 et la moyenne de x et de 9 doit être 12. (Les deux autres moyennes étaient 9 et 12 et 5 est plus grand que 9.)
Donc $\dfrac{x+5}{2} = 10$ et $\dfrac{x+9}{2} = 12$, d'où $x + 5 = 20$ et $x + 9 = 24$.
Chaque équation a pour solution $x = 15$.

Réponse : (B)

7. Puisque $x = 1$ est une solution de l'équation $x^2 + ax + 1 = 0$, alors $1^2 + a(1) + 1 = 0$.
Donc $2 + a = 0$, ou $a = -2$.

Réponse : (E)

8. On peut simplifier le membre de gauche de l'équation : $\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{4n} = \dfrac{2}{4n} + \dfrac{1}{4n} = \dfrac{3}{4n}$.
L'équation devient $\dfrac{3}{4n} = \dfrac{3}{12}$, d'où $4n = 12$.
Donc $n = 3$.

Réponse : (E)

9. On doit déterminer l'heure qu'il était 100 heures avant 17 heures vendredi.
Puisqu'il y a 24 heures dans une journée et que $100 = 4(24) + 4$, alors 100 heures correspondent à 4 jours et 4 heures.
À partir de 17 heures vendredi, on recule de 4 jours jusqu'à 17 heures lundi, puis on recule 4 heures de plus jusqu'à 13 heures lundi.
Kamila avait donc allumé son ordinateur à 13 h 00 lundi.

Réponse : (D)

10. On considère quatre entiers strictement positifs, a, b, c et n tels que $a < b < c < n$ et $a + b + c + n = 100$.
Puisque $a < b < c < n$, alors $a+b+c+n < n+n+n+n$, ou $a+b+c+n < 4n$. Donc $100 < 4n$, ou $n > 25$. Puisque n est un entier, n est égal à 26 ou plus.
Est-il possible que n soit égal à 26 ? Si oui, on aurait $a + b + c = 100 - 26$, ou $a + b + c = 74$.
Avec $n = 26$, alors $a + b + c$ ne pourrait être supérieur à $23 + 24 + 25$, ou 72, ce qui contredit la conclusion précédente. Donc, on ne peut avoir $a + b + c = 74$.
Donc, n ne peut être égal à 26.
Est-il possible que n soit égal à 27 ? Si oui, on aurait $a + b + c = 100 - 27$, ou $a + b + c = 73$.
Avec $n = 27$, on pourrait avoir $a + b + c = 23 + 24 + 26$, ou $a + b + c = 73$. Donc, $n = 27$ est possible, ce qui fait que la plus petite valeur possible de n est 27. (D'autres valeurs de a, b, c sont possibles avec $n = 27$.)

Réponse : (D)

11. Chaque élève a apporté soit une pomme, une banane ou une orange.
Or, 20 % des élèves ont apporté une pomme et 35 % des élèves ont apporté une banane. Donc, 45 % des élèves ($100\,\% - 20\,\% - 35\,\% = 45\,\%$) ont apporté une orange.
Donc, les 9 élèves qui ont apporté une orange représentent 45 % de la classe.
Donc, 1 élève représente $45\,\% \div 9$ de la classe, ou 5 % de la classe.
Donc, il y a 20 élèves ($100\,\% \div 5\,\% = 20$) dans la classe.

Réponse : (D)

12. Cette question équivaut à demander combien il y a d'entiers de trois chiffres qui commencent par un 2 et qui sont supérieurs à 217.
Il s'agit des entiers de 218 à 299.
Il y a 82 tels entiers ($299 - 217 = 82$).

Réponse : (B)

13. La droite qui passe aux points $R(2, 4)$ et $Q(4, 0)$ a pour pente $\frac{4-0}{2-4}$, ou -2.
Puisqu'elle passe aussi au point $(4, 0)$, la droite a pour équation $y-0 = -2(x-4)$, ou $y = -2x+8$.
D'après cette équation, la droite une ordonnée à l'origine de 8 et P a donc pour coordonnées $(0, 8)$.
Le triangle OPQ est rectangle en O. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(OQ)(OP)$, ou $\frac{1}{2}(4)(8)$, ou 16.

Réponse : (E)

14. L'expression

$$\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{4}\right)\left(1+\tfrac{1}{5}\right)\left(1+\tfrac{1}{6}\right)\left(1+\tfrac{1}{7}\right)\left(1+\tfrac{1}{8}\right)\left(1+\tfrac{1}{9}\right)$$

est égale à

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{5}{4}\right)\left(\tfrac{6}{5}\right)\left(\tfrac{7}{6}\right)\left(\tfrac{8}{7}\right)\left(\tfrac{9}{8}\right)\left(\tfrac{10}{9}\right),$$

ce qui est égal à

$$\tfrac{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}.$$

En annulant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, on obtient $\frac{10}{2}$, ou 5.

Réponse : (A)

15. Puisque $\angle XMZ = 30^\circ$ et $\angle XMY = 180^\circ - \angle XMZ$, alors $\angle XMY = 150^\circ$.
Puisque les mesures des angles du triangle XMY ont une somme de 180°, alors :

$$\angle YXM = 180^\circ - \angle XYZ - \angle XMY = 180^\circ - 15^\circ - 150^\circ = 15^\circ$$

(OU : Puisque l'angle XMZ est un angle extérieur du triangle XMY, alors $\angle XMZ = \angle YXM + \angle XYM$, d'où $\angle YXM = 15^\circ$.)
Puisque $\angle XYM = \angle YXM$, le triangle XMY est isocèle et $MX = MY$.
Puisque M est le milieu de YZ, alors $MY = MZ$.
Puisque $MX = MY$ et $MY = MZ$, alors $MX = MZ$.
Le triangle XMZ est donc isocèle et $\angle XZM = \angle ZXM$.
Donc $\angle XZY = \angle XZM$, d'o'u $\angle XZY = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle XMZ)$, ou $\angle XZY = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ)$, ou $\angle XZY = 75^\circ$.

Réponse : (A)

16. Puisque $x + 2y = 30$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{5} + \frac{2y}{3} + \frac{2y}{5} + \frac{x}{3} &= \frac{x}{5} + \frac{2y}{5} + \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} \\
&= \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}(2y) + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}(2y) \\
&= \frac{1}{5}(x+2y) + \frac{1}{3}(x+2y) \\
&= \frac{1}{5}(30) + \frac{1}{3}(30) \\
&= 6 + 10 \\
&= 16
\end{aligned}$$

Réponse : (B)

17. On suppose que la base du prisme mesure a cm sur b cm et que le prisme a une hauteur de h cm.
Puisque Aaron a 144 cubes dont les arêtes mesurent 1 cm, le prisme a un volume de 144 cm^3.
Donc $abh = 144$.
Puisque la base du prisme a un périmètre de 20 cm, alors $2a + 2b = 20$, ou $a + b = 10$.
Puisque a et b sont des entiers strictement positifs, on peut construire un tableau des valeurs possibles de a et de b et des valeurs de h qui en résultent, où $h = \dfrac{144}{ab}$. Par symétrie, on peut s'en tenir aux valeurs pour lesquelles $a \leq b$:

a	b	h
1	9	16
2	8	9
3	7	$\frac{48}{7}$
4	6	6
5	5	$\frac{144}{25}$

Puisque h doit être un entier, les seules valeurs possibles de h sont 16, 9 et 6.
La somme de ces hauteurs est égale à 16 cm + 9 cm + 6 cm, ou 31 cm.

Réponse : (A)

18. Pour tout nombre réel strictement positif x, $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x. Donc $\lfloor x \rfloor \leq x$.
Donc $\lfloor x \rfloor \cdot x \leq x \cdot x$, c'est-à-dire que $\lfloor x \rfloor \cdot x \leq x^2$.
Si $\lfloor x \rfloor \cdot x = 36$, alors $36 \leq x^2$.
Puisque $x > 0$, alors $x \geq 6$.
Lorsque $x = 6$, alors $\lfloor x \rfloor = \lfloor 6 \rfloor = 6$. Donc, $x = 6$ est une solution de l'équation $\lfloor x \rfloor \cdot x = 36$.
Si $x > 6$, alors $\lfloor x \rfloor \cdot x > 6 \cdot 6$ et x ne peut donc pas être une solution de l'équation $\lfloor x \rfloor \cdot x = 36$.
L'équation $\lfloor x \rfloor \cdot x = 36$ admet donc une seule solution, soit $x = 6$.
De même, si $\lfloor y \rfloor \cdot y = 71$, alors $y^2 \geq 71$.
Puisque $y > 0$, alors $y \geq \sqrt{71} \approx 8{,}43$.
Puisque $y \geq \sqrt{71} \approx 8{,}43$, alors $\lfloor y \rfloor \geq 8$.
Supposons que $\lfloor y \rfloor = 8$.
L'équation $\lfloor y \rfloor \cdot y = 71$ devient $8y = 71$, d'où $y = \dfrac{71}{8}$. Donc $y = \dfrac{71}{8}$ est une solution de l'équation $\lfloor y \rfloor \cdot y = 71$.
Si $\lfloor y \rfloor > 8$, alors $\lfloor y \rfloor \geq 9$, donc $y \geq 9$ et $\lfloor y \rfloor \cdot y \geq 9 \cdot 9$. Dans ce cas, y ne peut donc pas être une solution de l'équation $\lfloor y \rfloor \cdot y = 71$.
L'équation $\lfloor y \rfloor \cdot y = 71$ admet donc une seule solution, soit $y = \dfrac{71}{8}$.
Donc $x + y = 6 + \dfrac{71}{8}$, ou $x + y = \dfrac{119}{8}$.

Réponse : (B)

19. Si $a > 0$, la distance de la droite verticale d'équation $x = a$ à l'axe des ordonnées est égale à a.
Si $a < 0$, cette distance est égale à $-a$.
Dans chaque cas, il y a exactement deux points sur cette droite verticale d'équation $x = a$ qui sont aussi à une distance a ou $-a$ (selon le cas) de l'axe des abscisses : (a, a) et $(a, -a)$. Ces points sont situés sur les droites horizontales respectives d'équations $y = a$ et $y = -a$.
(Si $a = 0$, la droite d'équation $x = a$ représente l'axe des ordonnées et le seul point sur cette droite qui est équidistant des deux axes est l'origine $(0, 0)$ qui n'est pas située sur la droite d'équation $3x + 8y = 24$.)
Si le point (a, a) est situé sur la droite d'équation $3x + 8y = 24$, alors $3a + 8a = 24$, d'où $a = \frac{24}{11}$.
Si le point $(a, -a)$ est situé sur la droite d'équation $3x + 8y = 24$, alors $3a - 8a = 24$, d'où $a = -\frac{24}{5}$.
La somme de ces deux valeurs de a est égale à $\frac{24}{11} + \left(-\frac{24}{5}\right)$, ou $\frac{120-264}{55}$, ou $-\frac{144}{55}$.

Réponse : (B)

20. Puisque m et n sont des entiers supérieurs à 1 et que $m^n = 2^{25} \times 3^{40}$, alors 2 et 3 sont des facteurs premiers de m (puisqu'ils sont des facteurs premiers de m^n) et ils doivent être les seuls facteurs premiers de m (s'il y en avait d'autres, ceux-ci seraient aussi des facteurs premiers de m^n).
Donc, $m = 2^a \times 3^b$, a et b étant des entiers strictement positifs quelconques.
Donc $m^n = (2^a \times 3^b)^n = 2^{an} \times 3^{bn}$.
Puisque $m^n = 2^{25} \times 3^{40}$, on a donc $an = 25$ et $bn = 40$.
Puisque a, b et n sont des entiers strictement positifs, alors n est un diviseur commun de 25 et 40.
Puisque $n > 1$, alors $n = 5$, d'où $a = 5$ et $b = 8$.
On a donc $m = 2^5 \times 3^8$, ou $m = 32 \times 6561$, ou $m = 209\,952$.
Donc $m + n = 209\,952 + 5$, ou $m + n = 209\,957$.

Réponse : (C)

21. Puisque $WXYZ$ est un entier positif de quatre chiffres, alors $WXYZ \leq 9999$. (De fait, $WXYZ$ est encore plus petit, car ses chiffres sont distincts.)
Puisque $WXYZ \leq 9999$, alors $TWUYV \leq 2(9999) = 19998$.
Puisque $T \neq 0$, alors $T = 1$.
On remarque que toute retenue d'une colonne à une autre ne peut être supérieure à 1. (Puisque $Z \leq 9$, alors $Z + Z \leq 18$. Ainsi lorsqu'on additionne les unités, la retenue dans la colonne des dizaines doit être 0 ou 1. De même, puisque $Y + Y \leq 18$, alors lorsqu'on additionne les dizaines, la valeur maximale que l'on puisse obtenir est 19 et la retenue dans la colonne des centaines est 1 ou 0. On peut répéter ce raisonnement avec les autres colonnes.)
Dans le tableau suivant, on examine les résultats possibles lorsqu'on additionne un chiffre c avec lui-même, avec ou sans une retenue de 1 :

c	$c + c$ sans retenue	$c + c$ plus une retenue de 1
0	0	1
1	2	3
2	4	5
3	6	7
4	8	9
5	10	11
6	12	13
7	14	15
8	16	17
9	18	19

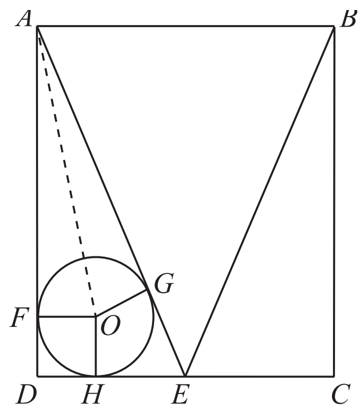
On utilise ce tableau pour déterminer W et Y.
Puisque les trois chiffres de la colonne des milliers sont les mêmes, le chiffre W doit être un 0 ($0 + 0 = 0$) ou un 9 ($9 + 9 + 1 = 1\underline{9}$). Puisqu'il produit une retenue dans la colonne des dix milliers, il doit être un 9 (dans l'énoncé du problème, on a aussi $W \neq 0$). On remarque aussi que $X \geq 5$ pour produire une retenue dans la colonne des milliers.
Puisque les trois chiffres de la colonne des dizaines sont les mêmes, le chiffre Y doit être un 0 ($0 + 0 = 0$) ou un 9 ($9 + 9 + 1 = 1\underline{9}$). Puisque $W = 9$ et que les chiffres T, U, V, W, X, Y, Z sont distincts, alors $Y = 0$.
Lorsqu'on additionne les chiffres de la colonne des unités, il n'y a donc aucune retenue.
Voici ce qu'on a à ce point-ci :

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & X & 0 & Z \\ + & & 9 & X & 0 & Z \\ \hline & 1 & 9 & U & 0 & V \end{array}$$

et $X \geq 5$ et $Z \leq 4$.
Puisque $T = 1$ et $W = 9$, alors Z peut être un 2, un 3 ou un 4 et X peut être un 5, un 6, un 7 ou un 8.
Si $X = 5$, alors $U = 0 = Y$, ce qui est impossible car les chiffres doivent être distincts. Donc $X \neq 5$.
Si $Z = 2$, alors $V = 4$. Dans ce cas, on ne peut avoir $X = 6$ (ce qui donnerait $U = 2 = Z$) ou $X = 7$ (ce qui donnerait $U = 4 = V$). On a donc $X = 8$, d'où $U = 6$.
Si $Z = 3$, alors $V = 6$. Dans ce cas, on ne peut avoir $X = 6$ ou $X = 8$. Donc $X = 7$, d'où $U = 4$.
Si $Z = 4$, alors $V = 8$. Dans ce cas, on ne peut avoir $X = 7$ ou $X = 8$. Donc $X = 6$, d'où $U = 2$.
Il y a donc trois valeurs possibles de U, soit 2, 4 et 6.
On peut vérifier que les trois additions possibles, $9802 + 9802 = 19604$, $9703 + 9703 = 19406$ et $9604 + 9604 = 19208$ vérifient les données du problème.

Réponse : (C)

22. On tranche le cylindre, le cône et la sphère au moyen d'un plan vertical qui passe par les centres des faces supérieure et inférieure du cylindre et par le centre de la sphère.
Les sections transversales respectives obtenues à partir du cylindre, du cône et de la sphère sont un rectangle, un triangle et un cercle.
Puisque la sphère touche au cylindre et au cône, la section qui en résulte donne un cercle qui est tangent à deux côtés du rectangle (en F et H) et à un côté du triangle (en G).
On joint O à F, à G et à H. Puisque les rayons sont perpendiculaires aux tangentes aux points de contact, OF est perpendiculaire à AD, OG est perpendiculaire à AE et OH est perpendiculaire à DE.



Soit r le rayon de la sphère (et donc du cercle). Donc $OF = OG = OH = r$.
Puisque le cylindre a un rayon de 12, alors $DE = 12$.
Puisque le cylindre a une hauteur de 30, alors $AD = 30$.
Puisque $FOHD$ a des angles droits en F, D et H, il doit avoir quatre angles droits. Il est donc un rectangle.
Puisque $OF = OH = r$, alors $FOHD$ est un carré avec $DH = DF = r$.
Puisque $DE = 12$ et $DH = r$, alors $EH = 12 - r$.
Puisque $AD = 30$ et $DF = r$, alors $AF = 30 - r$.
Puisque AG et AF sont des tangentes menées à partir d'un même point, alors $AG = AF = 30-r$. (En effet, les triangles AFO et AGO sont rectangles, ils ont un côté commun AO et deux côtés égaux FO and GO. Ils sont donc isométriques.)
De même, $EG = EH = 12 - r$.
De plus, $AE = AG + GE$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADE, $AE = \sqrt{12^2 + 30^2}$, ou $AE = \sqrt{1044}$.
Donc $\sqrt{1044} = (30 - r) + (12 - r)$, d'où $2r = 42 - \sqrt{1044}$, ou $r = 21 - \frac{1}{2}\sqrt{1044}$, ou $r \approx 4{,}8445$.
Le choix de réponse le plus près de la valeur du rayon est 4,84.

Réponse : (A)

23. Puisque a est un entier strictement positif et que $a + \dfrac{b}{c}$ est un entier strictement positif, alors $\dfrac{b}{c}$ est un entier strictement positif. Donc, b est un multiple de c.
De même, puisque $\dfrac{a}{c} + b$ et b sont des entiers strictement positifs, alors a est un multiple de c.
On a donc $a = Ac$ et $b = Bc$, A et B étant des entiers strictement positifs quelconques.
L'équation $a + \dfrac{b}{c} = 101$ devient donc $Ac + B = 101$ et l'équation $\dfrac{a}{c} + b = 68$ devient $A + Bc = 68$.
On additionne les nouvelles équations, membre par membre, pour obtenir
$Ac + B + A + Bc = 101 + 68$, ou $A(c + 1) + B(c + 1) = 169$, ou $(A + B)(c + 1) = 169$.
Puisque $(A + B)(c + 1) = 169$, alors $c + 1$ est un diviseur 169.
Puisque $169 = 13^2$, les diviseurs positifs de 169 sont 1, 13 et 169.
Puisque A, B et c sont des entiers strictement positifs, alors $A + B \geq 2$ et $c + 1 \geq 2$.
Puisque ni $A + B$ ni $c + 1$ ne peut égaler 1, alors $A + B = c + 1 = 13$.
Donc $\dfrac{a + b}{c} = \dfrac{Ac + Bc}{c} = A + B = 13$. Donc $k = 13$.

Réponse : (A)

24. On nomme les équipes F, G, H, J, K, L, M et N.
On détermine d'abord le nombre total de matchs.
Puisque chaque paire d'équipes joue exactement un match l'une contre l'autre, chaque équipe joue 7 matchs (un match contre chacune des 7 autres équipes). Puisqu'il y a 8 équipes, il semble y avoir $8 \cdot 7$ matchs, mais chaque match a été compté deux fois dans ce total (par exemple, on a compté G contre K et K contre G). Le nombre de matchs est donc égal à $\frac{8 \cdot 7}{2}$, ou 28.
Le problème porte sur l'ensemble des 28 matchs du tournoi. On doit déterminer le nombre de résultats équiprobables que le tournoi peut envisager, ainsi que le nombre de ces résultats dans lesquels chaque équipe perd au moins un match et gagne au moins un match.
Puisqu'il y a 28 matchs et 2 résultats équiprobables par match, il y a 2^{28} résultats équiprobables pour le tournoi au complet. (On peut considérer que les matchs sont numérotés de 1 à 28 et que F rencontre G dans le match 1, F rencontre H dans le match 2 et ainsi de suite jusqu'au match 28 dans lequel M rencontre N. Un résultat possible pour le tournoi serait ainsi un « mot » de 28 lettres dont la 1re lettre est un F si F gagne ou un G si G gagne, la 2e lettre est un F ou un H, et ainsi de suite jusqu'à la dernière lettre qui est un M ou un N. Chaque mot possible correspond à un résultat possible pour le tournoi. Le nombre total de mots possibles, c'est-à-dire le nombre total de résultats équiprobables possibles pour le tournoi, est donc égal à $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$, ou 2^{28}.)
Pour déterminer la probabilité pour que chaque équipe perde au moins un match et gagne au moins un match, on déterminera la probabilité pour qu'il y ait une équipe qui perde 0 match ou qui gagne 0 match et on la soustraira de 1.
On comptera le nombre de résultats du tournoi dans lesquels une équipe gagne 0 match (c.-à-d. perd tous ses matchs) ou une équipe perd 0 match (c.-à-d. gagne tous ses matchs), ou les deux.
Pour déterminer le nombre de résultats du tournoi dans lesquels une équipe gagne tous ses matchs, on remarque qu'il y a 8 façons de choisir cette équipe (qu'on appelle X). Une fois cette équipe choisie, on sait qu'elle a gagné 7 matchs et il qu'il y a 21 matchs ($28 - 7 = 21$) dont le résultat n'importe pas. (On a des mots de 28 lettres dont 7 lettres sont déterminées et 21 lettres qui peuvent prendre une de deux valeurs.)
Puisque chacun de ces 21 matchs a 2 résultats équiprobables possibles, il y a $8 \cdot 2^{21}$ résultats de tournoi possibles dans lesquels une équipe a gagné tous ses matchs. (Il est impossible pour deux équipes de gagner tous ses matchs puisqu'elles doivent se rencontrer.) De même, il y a $8 \cdot 2^{21}$ résultats de tournoi dans lesquels une équipe a perdu tous ses matchs. (Pouvez-vous l'expliquer ?)
Y a-t-il des résultats de tournoi dans lesquels une équipe a gagné tous ses matchs *et* une autre équipe a perdu tous ses match ?
S'il y en a, il faudra soustraire leur nombre une fois du nombre total, puisqu'il aura été compté dans chaque total de $8 \cdot 2^{21}$ résultats de tournoi.
Pour déterminer le nombre de résultats de tournoi dans ce cas, on choisit une équipe X qui gagne tous ses matchs et une équipe Y qui perd tous ses matchs.
Une fois que X est choisi, les résultats de ses 7 matchs sont déterminés (7 victoires de X).
Une fois que Y est choisi, les résultats de ses 6 autres matchs sont déterminés (6 défaites plus le match que Y a perdu aux mains de X et qui a déjà été compté).
Donc les résultats de 15 matchs ($28 - 7 - 6 = 15$) doivent être déterminés.
Le nombre de résultats de tournoi possibles est égal à $8 \cdot 7 \cdot 2^{15}$, puisqu'il y a 8 façons de choisir X, puis 7 façons de choisir Y (n'importe quelle équipe à l'exception de X), puis 2^{15} façons de choisir les résultats des 15 autres matchs.
Le nombre de résultats de tournoi dans lesquels une équipe perd 0 match ou une équipe perd 0 match ou les deux est égal à $8 \cdot 2^{21} + 8 \cdot 2^{21} - 8 \cdot 7 \cdot 2^{15}$.

La probabilité pour qu'une équipe perde 0 match ou qu'une équipe gagne 0 match est égale à :

$$\frac{8 \cdot 2^{21} + 8 \cdot 2^{21} - 8 \cdot 7 \cdot 2^{15}}{2^{28}} = \frac{2^{15}(8 \cdot 2^6 + 8 \cdot 2^6 - 8 \cdot 7)}{2^{28}} = \frac{2^3 \cdot 2^6 + 2^3 \cdot 2^6 - 2^3 \cdot 7}{2^{13}} = \frac{2^6 + 2^6 - 7}{2^{10}}$$

La probabilité pour que chaque équipe perde au moins un match et gagne au moins un match est égale à $1 - \frac{64+64-7}{1024}$, ou $1 - \frac{121}{1024}$, ou $\frac{903}{1024}$.

Réponse : (D)

25. Soit $r = \sqrt{\frac{\sqrt{53}}{2} + \frac{3}{2}}$.
Donc $r^2 = \frac{\sqrt{53}}{2} + \frac{3}{2}$, ou $2r^2 = \sqrt{53} + 3$, ou $2r^2 - 3 = \sqrt{53}$.
En prenant le carré de chaque membre de cette dernière équation, on obtient $(2r^2 - 3)^2 = 53$, ou $4r^4 - 12r^2 + 9 = 53$, ou $4r^4 - 12r^2 - 44 = 0$, ou $r^4 - 3r^2 - 11 = 0$, ou $r^4 = 3r^2 + 11$.

Supposons que

$$r^{100} = 2r^{98} + 14r^{96} + 11r^{94} - r^{50} + ar^{46} + br^{44} + cr^{40}, \qquad (*)$$

a, b et c étant des entiers quelconques strictement positifs.
Puisque $r \neq 0$, on peut diviser chaque membre par r^{40} :

$$r^{60} = 2r^{58} + 14r^{56} + 11r^{54} - r^{10} + ar^6 + br^4 + c$$

Sachant que $r^4 = 3r^2 + 11$, on a :

$$\begin{aligned} r^{60} - 2r^{58} - 14r^{56} - 11r^{54} &= r^{54}(r^6 - 2r^4 - 14r^2 - 11) \\ &= r^{54}(r^2(3r^2 + 11) - 2r^4 - 14r^2 - 11) \\ &= r^{54}(3r^4 + 11r^2 - 2r^4 - 14r^2 - 11) \\ &= r^{54}(r^4 - 3r^2 - 11) \\ &= r^{54}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'équation $(*)$ est donc équivalente à l'équation suivante qui est beaucoup plus simple :

$$r^{10} = ar^6 + br^4 + c$$

On exprime maintenant r^{10} et r^6 en fonction de r^2 et d'une constante. (Pour ce faire, il faudra aussi exprimer r^8 en fonction de r^2 et d'une constante. On fait appel au résultat $r^4 = 3r^2 + 11$ obtenu précédemment.)

$$r^6 = r^2r^4 = r^2(3r^2 + 11) = 3r^4 + 11r^2 = 3(3r^2 + 11) + 11r^2 = 20r^2 + 33$$
$$r^8 = r^2r^6 = r^2(20r^2 + 33) = 20r^4 + 33r^2 = 20(3r^2 + 11) + 33r^2 = 93r^2 + 220$$
$$r^{10} = r^2r^8 = r^2(93r^2 + 220) = 93r^4 + 220r^2 = 93(3r^2 + 11) + 220r^2 = 499r^2 + 1023$$

L'équation

$$r^{10} = ar^6 + br^4 + c$$

est donc équivalente à

$$499r^2 + 1023 = a(20r^2 + 33) + b(3r^2 + 11) + c$$

ou à :

$$0 = r^2(20a + 3b - 499) + (33a + 11b + c - 1023)$$

Si $20a + 3b = 499$ et $33a + 11b + c = 1023$, l'équation est vérifiée. (Si l'équation est vérifiée, on peut aussi conclure que $20a + 3b = 499$ et $33a + 11b + c = 1023$. Cela découle du fait que r^2 est un nombre irrationnel.)

Le problème est équivalent à celui de déterminer des entiers strictement positifs a, b et c tels que $20a + 3b = 499$ et $33a + 11b + c = 1023$.

On cherche d'abord des couples (a, b) d'entiers strictement positifs qui vérifient $20a + 3b = 499$, puis on vérifiera si les valeurs correspondantes de $c = 1023 - 33a - 11b$ sont strictement positives.

Puisqu'on ne cherche qu'un triplet (a, b, c) d'entiers strictement positifs, il n'est pas nécessaire de justifier que l'on a déterminé toutes les solutions.

Puisque $20a$ a un chiffre des unités égal à 0 et que $20a + 3b = 499$, le chiffre des unités de $3b$ doit être un 9, ce qui signifie que le chiffre des unités de b doit être un 3.

Si $b = 3$, alors $20a = 499 - 3b$, d'où $20a = 490$. Dans ce cas, a n'est pas un entier.

Si $b = 13$, alors $20a = 499 - 3b$, d'où $20a = 460$, ou $a = 23$.

À partir de $(a, b) = (23, 13)$, on peut obtenir d'autres solutions en remarquant que $20(3) = 3(20)$. Ainsi en diminuant a de 3 et en augmentant b de 20, la somme $20a + 3b$ ne change pas.

Or à partir de $(a, b) = (23, 13)$, on obtient $c = 1023 - 33(23) - 11(13)$, ou $c = 121$.

Puisqu'on ne cherche qu'un triplet (a, b, c), alors $(a, b, c) = (23, 13, 121)$.

Enfin, $a^2 + b^2 + c^2 = 23^2 + 13^2 + 121^2 = 15\,339$.

Réponse : (D)

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2016

(11^e année – Secondaire V)

le mercredi 24 février 2016

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 25 février 2016

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Puisque $x = 3$ et $y = 2x$, alors $y = 2 \cdot 3$, ou $y = 6$.
Puisque $y = 6$ et $z = 3y$, alors $z = 3 \cdot 6$, ou $z = 18$.

Réponse : (D)

2. Une pyramide à base carrée a 4 arêtes qui forment la base carrée et 4 arêtes inclinées qui relient les sommets de la base au sommet supérieur pour un total de 8 arêtes.

Réponse : (C)

3. On a : $\dfrac{20 + 16 \times 20}{20 \times 16} = \dfrac{20 + 320}{320} = \dfrac{340}{320} = \dfrac{17}{16}$
On peut aussi remarquer que 20 est un multiple du numérateur et du dénominateur.
Donc : $\dfrac{20 + 16 \times 20}{20 \times 16} = \dfrac{20(1 + 16)}{20 \times 16} = \dfrac{1 + 16}{16} = \dfrac{17}{16}$

Réponse : (E)

4. Le 7$^{\text{e}}$ nombre oblong est le nombre de points dans un tableau rectangulaire de points formé de 7 colonnes et 8 rangées.
Le 7$^{\text{e}}$ nombre oblong est donc égal à 7×8, ou 56.

Réponse : (C)

5. *Solution 1*
Soit (a, b) les coordonnées de R.
Puisque Q est le milieu de PR, le déplacement horizontal de P à Q est égal à celui de Q à R. De même, le déplacement vertical de P à Q est égal à celui de Q à R.
On a donc $4-1 = a-4$ et $7-3 = b-7$, d'où $a = 7$ et $b = 11$. Donc, R a pour coordonnées $(7, 11)$.

Solution 2
Soit (a, b) les coordonnées de R.
Puisque P a pour coordonnées $(1, 3)$, le milieu de PR a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(1 + a), \frac{1}{2}(3 + b)\right)$.
Puisque $Q(4, 7)$ est le milieu de PR, alors $4 = \frac{1}{2}(1 + a)$ et $14 = \frac{1}{2}(3 + b)$. Donc $7 = 1 + a$ et $14 = 3 + b$, d'où $a = 7$ et $b = 11$.
Donc, R a pour coordonnées $(7, 11)$.

Réponse : (B)

6. Le samedi et le dimanche, Carrine envoie à son frère un total de 10 messages $(5 + 5)$.
Les cinq autres jours de la semaine, elle envoie 2 messages par jour à son frère pour un total de 10 messages (5×2).
Elle lui envoie donc $(10 + 10)$ messages, ou 20 messages par semaine.
En 4 semaines, elle lui envoie $4 \cdot 20$ messages, ou 80 messages.

Réponse : (D)

7. On a : $(-2)^3 - (-3)^2 = -8 - 9 = -17$

Réponse : (A)

8. Puisque $\sqrt{25 - \sqrt{n}} = 3$, alors $25 - \sqrt{n} = 9$.
Donc $\sqrt{n} = 16$. Donc $n = 16^2$, ou $n = 256$.

Réponse : (E)

9. *Solution 1*

On sait que $\dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5} = \dfrac{20}{100} = 20\,\%$.

Donc, 12 correspond à $20\,\%$ de 60, d'où $x = 20$.

Donc $15\,\%$ de x est égal à $15\,\%$ de 20, ou $0{,}15 \cdot 20$, ou 3.

Solution 2

Puisque $x\,\%$ de 60 est égal à 12, alors $\dfrac{x}{100} \cdot 60 = 12$, d'où $x = \dfrac{12 \cdot 100}{60}$, ou $x = 20$.

Donc $15\,\%$ de x est égal à $15\,\%$ de 20, ou $0{,}15 \cdot 20$, ou 3.

Solution 3

Puisque $x\,\%$ de 60 est égal à 12, alors $\dfrac{x}{100} \cdot 60 = 12$, ou $\dfrac{60x}{100} = 12$.

Or, $15\,\%$ de x correspond à $\dfrac{15}{100}x$, ou $\dfrac{15x}{100}$.

Puisque $\dfrac{60x}{100} = 12$, alors : $\dfrac{15x}{100} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{60x}{100}\right) = \dfrac{1}{4} \cdot 12 = 3$

Réponse : (D)

10. *Solution 1*

Puisque le carré $PQRS$ a des côtés de longueur 2, alors $PQ = QR = RS = SP = 2$.

Puisque W, X, Y et Z sont les milieux des côtés du carré $PQRS$, alors $PW = PZ = 1$.

Puisque $\angle ZPW = 90^\circ$, alors d'après le théorème de Pythagore, $WZ = \sqrt{PW^2 + PZ^2}$, ou $WZ = \sqrt{1^2 + 1^2}$, ou $WZ = \sqrt{2}$.

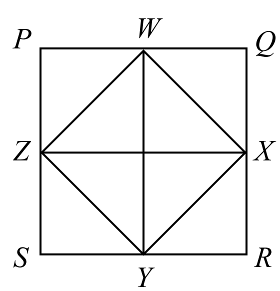
Le carré $WXYZ$ a donc des côtés de longueur $\sqrt{2}$.

L'aire du carré $WXYZ$ est donc égale à $(\sqrt{2})^2$, ou 2. L'aire du carré $PQRS$ est égale à 2^2, ou 4.

Le rapport de ces deux aires est donc de 2 : 4, ou 1 : 2.

Solution 2

On trace les segments WY et ZX.



Puisque $PQRS$ est un carré et que W, X, Y et Z sont les milieux de ses côtés, alors WY et ZX divisent le carré en 4 carrés identiques.

Chacun de ces quatre carrés est divisé en deux triangles de même aire par les diagonales. (Les diagonales sont WZ, WX, XY et YZ.)

Le carré $WXYZ$ est formé de 4 de ces triangles de même aire.

Le carré $PQRS$ est formé de 8 de ces triangles de même aire.

Le rapport de ces deux aires est donc de 4 : 8, ou 1 : 2.

Réponse : (A)

11. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PRS,

$$PS = \sqrt{RS^2 - PR^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5,$$

puisque $PS > 0$.
Puisque $PQ = PS + SQ$, alors $PQ = 5 + 11$, ou $PQ = 16$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PRQ,

$$RQ = \sqrt{PR^2 + PQ^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20,$$

puisque $RQ > 0$.
Le périmètre du triangle QRS est égal à $RS + SQ + RQ$, ou $13 + 11 + 20$, ou 44.

Réponse : (B)

12. Puisque $128 = 2^7$, ses diviseurs positifs sont :

$$2^0 = 1 \qquad 2^1 = 2 \qquad 2^2 = 4 \qquad 2^3 = 8 \qquad 2^4 = 16 \qquad 2^5 = 32 \qquad 2^6 = 64 \qquad 2^7 = 128$$

Parmi ces diviseurs, $1, 4, 16$ et 64 sont des carrés parfaits.
Donc, 128 admet trois diviseurs qui sont des carrés parfaits supérieurs à 1.

Réponse : (D)

13. Puisque $4x, 2x-3, 4x-3$ forment une suite arithmétiqe, alors la différence entre deux termes consécutifs est constante. On a donc $(2x-3) - 4x = (4x-3) - (2x-3)$.
Donc $-2x - 3 = 2x$, d'où $4x = -3$, ou $x = -\frac{3}{4}$.

Réponse : (E)

14. Puisque les quatre nombres $4, a, b$ et 22 ont une moyenne de 13, ils ont une somme de 4×13, ou 52. Donc $4 + a + b + 22 = 52$, d'où $a + b = 26$.
Puisque $a > 4$ et que a est un entier, alors $a \geq 5$.
Puisque $a + b = 26$ et que $a < b$, les valeurs de a ne pourront pas égaler ou dépasser 13.
Donc $a < 13$. Puisque a est un entier, alors $a \leq 12$.
On a donc $5 \leq a \leq 12$.
Donc a peut prendre 8 valeurs dans cet intervalle, soit 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. (On remarque que $12 - 4 = 8$ ou $12 - 5 + 1 = 8$.)
Les valeurs de (a, b) sont $(5, 21), (6, 20), (7, 19), (8, 18), (9, 17), (10, 16), (11, 15)$ et $(12, 14)$.
Il y a donc 8 couples possibles.

Réponse : (B)

15. Lorsque Hichem parcourt les 10 premiers kilomètres à une vitesse moyenne de 12 km/h, il met $\frac{10}{12}$ heure, ou $\frac{5}{6}$ heure pour le faire.
Puisqu'il met 1,5 heure pour parcourir 16 km, le temps qu'il met pour parcourir les derniers 6 km est égal à : $\frac{3}{2} - \frac{5}{6} = \frac{9}{6} - \frac{5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ heure.
Puisqu'il parcourt 6 km en $\frac{2}{3}$ heure, sa vitesse moyenne dans les 6 derniers kilomètres est égale à $\frac{6}{2/3}$ km/h, ou 9 km/h.

Réponse : (B)

16. *Solution 1*
Puisque $x = 18$ est une solution de l'équation $x^2 + 12x + c = 0$, alors 18 vérifie l'équation.
On a donc $18^2 + 12(18) + c = 0$, ou $324 + 216 + c = 0$, ou $c = -540$.
L'équation initiale devient donc $x^2 + 12x - 540 = 0$, ou $(x - 18)(x + 30) = 0$.
L'autre solution est donc -30.

Solution 2
On sait que la somme des racines d'une équation de la forme $x^2 + bx + c = 0$ est égale à $-b$.
La somme des racines de l'équation $x^2 + 12x + c = 0$ est égale à -12. .
Soit r l'autre racine. La somme des racines est donc égale à $r + 18$. On a donc $r + 18 = -12$, ou $r = -30$.
L'autre solution est donc -30.

Réponse : (C)

17. Le nombre de points sur le cercle est le même que le nombre d'espaces entre les points.
Pour passer du point 7 au point 35, il faut parcourir 28 espaces autour du cercle, car $35 - 7 = 28$.
Puisque les points 7 et 35 sont diamétralement opposés, alors il faut parcourir le même nombre d'espaces pour continuer autour du cercle de 35 jusqu'à 7.
Il y a donc $2 \cdot 28$ espaces, ou 56 espaces entre les nombres autour du cercle.
Il y a donc 56 points autour du cercle. Donc $n = 56$.

Réponse : (C)

18. On peut récrire la première équation $\dfrac{x-y}{x+y} = 9$ sous la forme $x - y = 9x + 9y$, ou $-8x = 10y$, ou $-4x = 5y$.
On peut récrire la deuxième équation $\dfrac{xy}{x+y} = -60$ sous la forme $xy = -60x - 60y$.
On multiplie chaque membre de cette dernière équation par 5 pour obtenir $5xy = -300x - 300y$, ou $x(5y) = -300x - 60(5y)$.
Puisque $5y = -4x$, alors $x(-4x) = -300x - 60(-4x)$, ou $-4x^2 = -60x$, ou $4x^2 - 60x = 0$, ou $4x(x - 15) = 0$.
Donc $x = 0$ ou $x = 15$.
Puisque $y = -\frac{4}{5}x$, alors $y = 0$ ou $y = -12$.
D'après la première équation, on ne peut avoir $x = y = 0$.
On peut vérifier que le couple $(15, -12)$ vérifie les deux équations.
Donc $(x + y) + (x - y) + xy = 3 + 27 + (-180) = -150$.

Réponse : (B)

19. *Solution 1*
Lorsque les n élèves sont placés en groupes de 2, soit g le nombre de groupes complets et il y a un groupe incomplet.
Puisque ce sont des groupes de 2, le groupe incomplet doit donc avoir 1 élève.
Donc $n = 2g + 1$.
Puisque le nombre de groupes complets de 2 élèves est 5 de plus que le nombre de groupes complets de 3 élèves, il y avait $g - 5$ groupes complets de 3 élèves.
Après que les élèves sont en groupes de 3, il reste un groupe incomplet qui doit comprendre 1 ou 2 élèves.
On a donc $n = 3(g - 5) + 1$ ou $n = 3(g - 5) + 2$.
Si $n = 2g + 1$ et $n = 3(g - 5) + 1$, alors $2g + 1 = 3(g - 5) + 1$, ou $2g + 1 = 3g - 14$, d'où $g = 15$.

Dans ce cas, puisque $n = 2g + 1$, alors $n = 31$. Il y avait donc 15 groupes complets de 2 élèves et 10 groupes complets de 3 élèves.
Si $n = 2g+1$ et $n = 3(g-5)+2$, alors $2g+1 = 3(g-5)+2$, ou $2g+1 = 3g-13$, d'où $g = 14$.
Dans ce cas, puisque $n = 2g + 1$, alors $n = 29$. Il y avait donc 14 groupes complets de 2 élèves et 9 groupes complets de 3 élèves.
Si $n = 31$, on pourrait diviser 31 élèves en 7 groupes complets de 4 élèves et 1 groupe incomplet.
Si $n = 29$, on pourrait diviser 29 élèves en 7 groupes complets de 4 élèves et 1 groupe incomplet.
Or, l'énoncé indique que le nombre de groupes complets de 3 élèves est 3 de plus que le nombre de groupes complets de 4 élèves. On doit donc avoir $n = 31$.
Dans ce cas, on a $n^2 - n = 31^2 - 31$, ou $n^2 - n = 930$.
La somme des chiffres de l'entier égal à $n^2 - n$ est donc égale à 12.

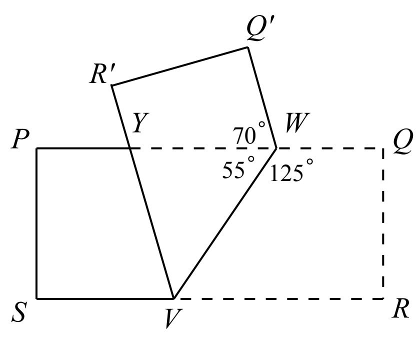
Solution 2
Puisque les n élèves ne peuvent pas être placés en groupes complets de 2, 3 ou 4 élèves, alors n n'est pas un multiple de 2, 3 ou 4.
Voici les premiers entiers supérieurs à 1 qui ne sont pas divisibles par 2, 3 ou 4 : 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35.
Dans chaque cas, on indique le nombre de groupes complets de chaque grandeur :

n	5	7	11	13	17	19	23	25	29	31	35
N$^{\text{bre}}$ de groupes complets de 2 élèves	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17
N$^{\text{bre}}$ de groupes complets de 3 élèves	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N$^{\text{bre}}$ de groupes complets de 4 élèves	1	1	2	3	4	4	5	6	7	7	8

Puisque le nombre de groupes complets de 2 élèves est 5 de plus que le nombre de groupes complets de 3 élèves qui est lui-même 3 de plus que le nombre de groupes complets de 4 élèves, on voit que parmi ces résultats, $n = 31$ satisfait aux conditions.
Dans ce cas, on a $n^2 - n = 31^2 - 31$, ou $n^2 - n = 930$. La somme des chiffres de l'entier égal à $n^2 - n$ est donc égale à 12.
(Puisqu'il s'agit d'un problème à choix multiple et qu'on a trouvé une valeur de n qui vérifie les condidions données, cette réponse doit être bonne. La solution 1 indique pourquoi 31 est la seule valeur de n qui satisfait aux conditions données.)

Réponse : (B)

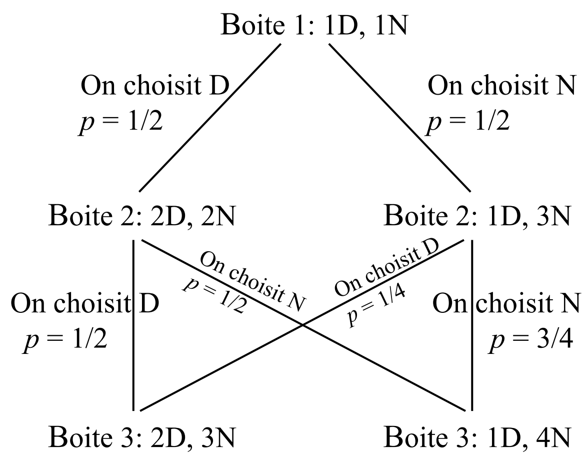
20. Puisque les points Y, W et Q sont alignés, alors $\angle YWV = 180° - \angle VWQ$.
Donc $\angle YWV = 180° - 125°$, ou $\angle YWV = 55°$.
Puisque Q' est la position finale du point Q après le pli, alors l'angle $Q'WV$ est la position finale l'angle QWV après le pli. Donc $\angle Q'WV = \angle QWV$.
Donc $\angle Q'WV = \angle QWV = 125°$. Donc $\angle Q'WY = \angle Q'WV - \angle YWV$, ou $\angle Q'WY = 125° - 55°$, ou $\angle Q'WY = 70°$.



Puisque $Q'W$ et $R'Y$ sont des côtés parallèles de la feuille , alors $\angle R'YW + \angle Q'WY = 180°$. Donc $\angle R'YW = 180° - \angle Q'WY$, ou $\angle R'YW = 180° - 70°$, ou $\angle R'YW = 110°$.
Puisque les angles PYV et $R'YW$ sont opposés par le sommet, alors $\angle PYV = \angle R'YW = 110°$.

Réponse : (A)

21. Lorsqu'on prend une bille au hasard de la boite 1, il y a une probabilité de $\frac{1}{2}$ de choisir une bille dorée et une probabilité de $\frac{1}{2}$ de choisir une bille noire.
Après ce choix, il y a donc une probabilité de $\frac{1}{2}$ pour que la boite 2 contienne 2 billes dorées et 2 billes noires et une probabilité de $\frac{1}{2}$ pour que la boite 2 contienne 1 bille dorée et 3 billes noires.
Dans le premier cas (qui survient avec une probabilité de $\frac{1}{2}$), il y a une probabilité de $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$ de choisir une bille dorée dans la boite 2 et une probabilité de $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$, de choisir une bille noire soit dans la boite 2.
Dans le deuxième cas (qui survient avec une probabilité de $\frac{1}{2}$), il y a une probabilité de $\frac{1}{4}$ de choisir une bille dorée dans la boite 2 et une probabilité de $\frac{3}{4}$ de choisir une bille noire dans la boite 2.



Donc, la probabilité de choisir une bille dorée dans la boite 2 est égale à $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$, ou $\frac{3}{8}$ et la probabilité de choisir une bille noire dans la boite 2 est égale à $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$, ou $\frac{5}{8}$.
Donc après ce choix, il y a une probabilité de $\frac{3}{8}$ pour que la boite 3 contienne 2 billes dorées et 3 billes noires et une probabilité de $\frac{5}{8}$ pour que la boite 3 contienne 1 bille dorée et 4 billes noires.
La probabilité de choisir une bille dorée dans la boite 3 est égale au produit de la probabilité pour que la boite 3 contienne 2 billes dorées et 3 billes noires et de la probabilité de choisir une bille dorée dans cette situation (c'est-à-dire $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5}$) plus le produit de la probabilité pour que la boite 3 contienne 1 bille dorée et 4 billes noires et de la probabilité de choisir une bille dorée dans cette situation.
La probabilité est donc égale à $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{5}$, ou $\frac{11}{40}$.

Réponse : (A)

22. *Solution 1*
On développe l'expression pour obtenir :

$$(x^2 + 6x + 9) + 2(y^2 - 4y + 4) + 4(x^2 - 14x + 49) + (y^2 + 8y + 16)$$

On développe davantage pour obtenir :

$$x^2 + 6x + 9 + 2y^2 - 8y + 8 + 4x^2 - 56x + 196 + y^2 + 8y + 16$$

On simplifie pour obtenir :

$$5x^2 - 50x + 3y^2 + 229$$

On met en évidence le facteur 5 dans les deux premiers termes :

$$5(x^2 - 10x) + 3y^2 + 229$$

On complète le carré pour obtenir :

$$5(x^2 - 10x + 5^2 - 5^2) + 3y^2 + 229$$

On obtient

$$5(x - 5)^2 - 125 + 3y^2 + 229$$

ou :

$$5(x - 5)^2 + 3y^2 + 104$$

Puisque $(x - 5)^2 \geq 0$ pour tout nombre réel x et que $3y^2 \geq 0$ pour tout nombre réel y, la valeur minimale de $5(x-5)^2 + 3y^2 + 104$ (et donc de l'expression initiale) est égale à $5(0) + 3(0) + 104$, ou 104.
On obtient cette valeur minimale lorsque $x = 5$ (ce qui donne $(x - 5)^2 = 0$) et $y = 0$ (ce qui donne $3y^2 = 0$).

Solution 2
On développe l'expression pour obtenir :

$$(x^2 + 6x + 9) + 2(y^2 - 4y + 4) + 4(x^2 - 14x + 49) + (y^2 + 8y + 16)$$

On développe davantage pour obtenir :

$$x^2 + 6x + 9 + 2y^2 - 8y + 8 + 4x^2 - 56x + 196 + y^2 + 8y + 16$$

On regroupe les termes qui contiennent x, ainsi que les constantes associées à ces termes :

$$x^2 + 6x + 9 + 4x^2 - 56x + 196 = 5x^2 - 50x + 205 = 5x^2 - 50x + 125 + 80 = 5(x - 5)^2 + 80$$

On regroupe les termes qui contiennent y, ainsi que les constantes associées à ces termes :

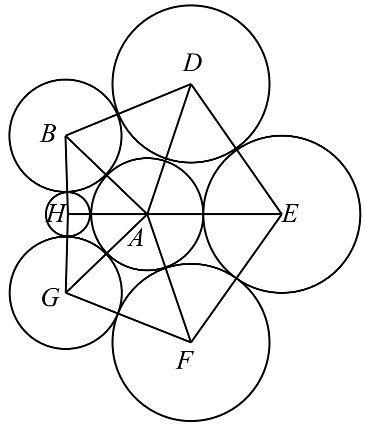
$$2y^2 - 8y + 8 + y^2 + 8y + 16 = 3y^2 + 24$$

Puisque $(x - 5)^2 \geq 0$ pour tout nombre réel x, l'expression $5(x-5)^2 + 80$ a une valeur minimale de 80.

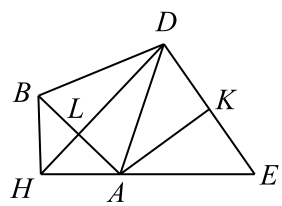
Puisque $y^2 \geq 0$ pour tout nombre réel y, l'expression $3y^2 + 24$ a une valeur minimale de 24.
Puisque l'expression $(x - 3)^2 + 4(x - 7)^2$ a une valeur minimale de 80 et que l'expression $2(y - 2)^2 + (y + 4)^2$ a une valeur minimale de 24, alors l'expression
$(x - 3)^2 + 2(y - 2)^2 + 4(x - 7)^2 + (y + 4)^2$ a une valeur minimale de $80 + 24$, ou 104.

Réponse : (E)

23. On nomme les centres des pièces de monnaie A, B, D, E, F, G et F, comme dans la figure suivante et on trace les segments AB, AD, AE, AF, AG, AH, BD, DE, EF, FG, GH et HB.



Les cercles de centres D, E et F ont un rayon de 3 cm et les cercles de centres A, B et G ont un rayon de 2 cm. (D'ici la fin de la solution, on ne mentionnera pas les unités qui sont des centimètres.)
Soit r le rayon du cercle de centre H. On cherche la valeur de r.
Lorsqu'on joint par un segment les centres de deux cercles qui se touchent, le segment passe par le point de contact des cercles et sa longueur est la somme des rayons des deux cercles.
On a donc $AB = 2 + 2$, ou $AB = 4$. De même, $AG = 4$, $BD = AD = AE = AF = GF = 5$, $DE = EF = 6$ et $HA = HB = HG = r + 2$.
Les triangles ADE et AFE ont tous deux des côtés de longueurs 5, 5 et 6. Ces triangles sont donc isométriques.
De même, les triangles ADB et AFG sont isométriques et les triangles ABH et AGH sont isométriques.
Puisque deux angles correspondants de deux triangles isométriques sont égaux, alors
$\angle HAB + \angle BAD + \angle DAE$ est égal à $\angle HAG + \angle GAF + \angle FAE$.
Or, ces six angles forment un angle plein au point A. Leurs mesures ont donc une somme de 360°.
Donc, $\angle HAB + \angle BAD + \angle DAE = \angle HAG + \angle GAF + \angle FAE = 180°$.
On retire les cercles de la figure et on porte attention à la partie supérieure de ce qui reste de la figure.
On joint A au milieu K du segment DE et on joint chacun des points D et H au milieu L du segment AB.



On considère le triangle ADE.
Puisque $DE = 6$ et que K est le milieu de DE, alors $DK = KE = 3$.
Puisque $AD = AE = 5$, le triangle ADE est isocèle. Donc AK est perpendiculaire à DE et AK est la bissectrice de l'angle DAE.
De même, les triangles AHB et ABD sont isocèles (avec $HA = HB$ et $DA = DB$).
Puisque L est le milieu de AB et que $AB = 4$, alors $AL = LB = 2$ et les segments DL et HL sont perpendiculaires à AB au point L.
On sait que $\angle HAB + \angle BAD + \angle DAE = \angle HAL + \angle LAD + 2\angle EAK = 180°$.
Or $\sin(\angle EAK) = \dfrac{EK}{AE} = \dfrac{3}{5}$. Donc $\angle EAK \approx 36{,}87°$.

De plus, $\cos(\angle LAD) = \dfrac{AL}{AD} = \dfrac{2}{5}$. Donc $\angle LAD \approx 66{,}42°$.

Donc : $\angle HAL = 180° - \angle LAD - 2\angle EAK \approx 180° - 66{,}42° - 2(36{,}87°) \approx 39{,}84°$

On sait aussi que : $\cos(\angle HAL) = \dfrac{AL}{HA} = \dfrac{2}{r+2}$

Puisque $\cos(39{,}84°) \approx 0{,}7679$, alors $\dfrac{2}{r+2} \approx 0{,}7679$.

On a donc $r \approx \dfrac{2}{0{,}7679} - 2$.

Puisque $\dfrac{2}{0{,}7679} - 2 \approx 0{,}60451$, alors parmi les choix de réponse, le rayon de la pièce X est plus près de 0,605 cm.

(Si on utilise un plus grand nombre de décimales dans les calculs, on obtient $r \approx 0{,}60466$, ce qui est encore plus près de 0,605 cm.)

Réponse : (D)

24. On explique d'abord l'expression $\lfloor\sqrt{k}\rfloor$ d'une autre façon pour augmenter sa compréhension.
Chaque entier strictement positif k peut être placé entre deux carrés parfaits consécutifs. C'est-à-dire qu'étant donné k, il existe exactement un entier strictement positif n de manière que $n^2 \leq k < (n+1)^2$.
Puisque $n^2 \leq k < (n+1)^2$, alors $n^2 \leq k < n^2 + 2n + 1$, d'où $n \leq \sqrt{k} < n+1$.
Puisque n et $n+1$ sont des entiers consécutifs, alors $\lfloor\sqrt{k}\rfloor = n$.
En d'autres mots, n est le plus grand entier inférieur ou égal à $\sqrt{k}$.
On cherche donc la somme de tous les entiers k ($1 \leq k \leq 999\,999$) pour lesquels k est un multiple du n correspondant.
Or, $n^2 = n \cdot n$ et $n^2 + 2n + 1 = n(n+2) + 1$.
Donc, les valeurs possibles de k ($n^2 \leq k < n^2 + 2n + 1$) sont les multiples de n dans cet intervale, soit $k = n \cdot n$, $k = n(n+1)$ et $k = n(n+2)$.
Puisque $k \leq 999\,999$, alors $k < 1000^2 = 1\,000\,000$, d'où $n \leq 999$.
Le problème est donc équivalent à celui de déterminer la somme de n^2, $n(n+1)$ et $n(n+2)$ pour toutes les valeurs de n de 1 à 999.
Puisque $n^2 + n(n+1) + n(n+2) = 3n^2 + 3n$, on cherche la somme des valeurs de l'expression $3n^2 + 3n$ pour toutes les valeurs de n de 1 à 999. Donc :

$$\begin{aligned} S &= (3(1^2) + 3(1)) + (3(2^2) + 3(2)) + \cdots + (3(998^2) + 3(998)) + (3(999^2) + 3(999)) \\ &= 3(1^2 + 2^2 + \cdots + 998^2 + 999^2) + 3(1 + 2 + \cdots + 998 + 999) \end{aligned}$$

Puisque $1+2+\cdots+(m-1)+m = \dfrac{m(m+1)}{2}$ et $1^2+2^2+\cdots+(m-1)^2+m^2 = \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ pour tout entier strictement positif m, alors :

$$\begin{aligned} S &= 3 \cdot \frac{999(1000)(1999)}{6} + 3 \cdot \frac{999(1000)}{2} \\ &= \frac{3(999)(1000)}{6}(1999 + 3) \\ &= \frac{999(1000)}{2}(2002) \\ &= 999(1000)(1001) \end{aligned}$$

Donc $S = 999\,999\,000$.

Réponse : (C)

25. On forme d'abord une partition de l'ensemble A en sous-ensembles disjoints de la forme

$$P_b = \{b, 3b, 9b, \ldots, 3^k b\},$$

b étant un entier tel que $1 \leq b \leq 2045$ et k étant le plus grand entier non négatif tel que $3^k b \leq 2045$.
Les deux premiers de ces sous-ensembles sont $P_1 = \{1, 3, 9, 27, 81, 243, 729\}$ et $P_2 = \{2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458\}$. On a formé ces ensembles avec $b = 1$ et $b = 2$, d'où $k = 6$.
On montre que chaque élément de A est un élément d'exactement un de ces sous-ensembles.
Puisque $3^7 = 2187$, alors $3^7 b \geq 2187 > 2045$ pour chaque entier strictement positif b. Donc, la plus grande valeur possible de k est 6.
Pour chaque valeur de k dans l'intervalle $0 \leq k \leq 6$, on détermine l'intervalle des valeurs de b qui correspondent à cette valeur de k :

- $k = 6 : 1 \leq b \leq 2$, puisque $2 \cdot 3^6 = 1458 < 2045$ et $3 \cdot 3^6 = 2187 > 2045$
- $k = 5 : 3 \leq b \leq 8$, puisque $8 \cdot 3^5 = 1944 < 2045$ et $9 \cdot 3^5 = 2187 > 2045$
- $k = 4 : 9 \leq b \leq 25$, puisque $25 \cdot 3^4 = 2025 < 2045$ et $26 \cdot 3^4 = 2106 > 2045$
- $k = 3 : 26 \leq b \leq 75$, puisque $75 \cdot 3^3 = 2025 < 2045$ et $76 \cdot 3^3 = 2052 > 2045$
- $k = 2 : 76 \leq b \leq 227$, puisque $227 \cdot 3^2 = 2043 < 2045$ et $228 \cdot 3^2 = 2052 > 2045$
- $k = 1 : 228 \leq b \leq 681$, puisque $681 \cdot 3^1 = 2043 < 2045$ et $682 \cdot 3^1 = 2046 > 2045$
- $k = 0 : 682 \leq b \leq 2045$, puisque $2045 \cdot 3^0 = 2045$ et $2046 \cdot 3^0 = 2046 > 2045$

Puisqu'on veut créer des ensembles disjoints P_b dont la réunion est l'ensemble $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2044, 2045\}$, on exclut toutes les valeurs de b qui sont des multiples de 3.
(Si b était un multiple de 3, il serait un élément d'un ensemble P_r où $r \leq b$.)
Dans chacun des intervalles précédents, on compte le nombre de multiples de 3 qu'il faut exclure :

k	Intervalles de b	N$^{\text{bre}}$ de multiples de 3	N$^{\text{bre}}$ de valeurs de b qui restent	N$^{\text{bre}}$ d'éléments dans chaque P_b
6	$1 \leq b \leq 2$	0	$2 - 0 = 2$	7
5	$3 \leq b \leq 8$	2	$6 - 2 = 4$	6
4	$9 \leq b \leq 25$	6	$17 - 6 = 11$	5
3	$26 \leq b \leq 75$	17	$50 - 17 = 33$	4
2	$76 \leq b \leq 227$	50	$152 - 50 = 102$	3
1	$228 \leq b \leq 681$	152	$454 - 152 = 302$	2
0	$682 \leq b \leq 2045$	454	$1364 - 454 = 910$	1

Par exemple, l'intervalle $26 \leq b \leq 75$ contient 50 entiers $(75 - 25 = 50)$ y compris les multiples de 3 à partir de $9 \cdot 3$ jusqu'à $25 \cdot 3$, c'est-à-dire 17 multiples de 3 $(25 - 8 = 17)$. L'intervalle $228 \leq b \leq 681$ contient 454 entiers $(681 - 227 = 454)$ y compris les multiples de 3 à partir de $76 \cdot 3$ jusqu'à $227 \cdot 3$, c'est-à-dire 152 multiples de 3 $(227 - 75 = 152)$.
Un entier b dans A qui n'est pas un multiple de 3 produit un ensemble P_b et ne peut pas paraitre dans un autre ensemble P_r. N'importe quel multiple de 3, par exemple m, va paraitre dans exactement un ensemble P_b dont la valeur de b (qui n'est pas un multiple de 3) est obtenue en enlevant par division tous les facteurs 3 de m.
On remarque que $2 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 11 \cdot 5 + 33 \cdot 4 + 102 \cdot 3 + 302 \cdot 2 + 910 \cdot 1 = 2045$. Donc, la réunion des ensembles P_b inclut suffisamment d'éléments pour produire l'ensemble A au complet. Aucun élément de A ne parait dans plus d'un ensemble P_b. Donc, la réunion de tous ces ensembles P_b est égale à l'ensemble A.

Pourquoi ces ensembles sont-ils utiles pour résoudre ce problème ? Un sous-ensemble de A est

sans-triple s'il ne contient pas deux éléments dont un est le triple de l'autre.
Un sous-ensemble de A est donc sans-triple exactement s'il ne contient pas deux éléments consécutifs de n'importe quel P_b.
Un sous-ensemble sans-triple T de A qui contient autant d'éléments que possible contiendra autant d'éléments que possible de chacun des P_b définis ci-haut.
Puisque deux éléments consécutifs de P_b ne peuvent paraitre dans T, alors un P_b de 7 éléments peut contribuer au plus 4 éléments à T (le 1er, le 3e, le 5e et le 7e), un P_b de 6 éléments peut contribuer au plus 3 éléments à T (la moitié de ses éléments), et ainsi de suite.
Pour chaque valeur de k, de $k = 7$ jusqu'à $k = 0$, chaque P_b ci-dessus peut contribuer le nombre suivant d'éléments à T :

k	Nbre d'éléments dans chaque P_b	Nbre d'éléments qui peuvent être choisis
6	7	4
5	6	3
4	5	3
3	4	2
2	3	2
1	2	1
0	1	1

Ainsi T peut contenir au plus $2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 11 \cdot 3 + 33 \cdot 2 + 102 \cdot 2 + 302 \cdot 1 + 910 \cdot 1$ éléments, ou 1535 éléments. Ce résultat est conforme au renseignement donné dans l'énoncé.
Y a-t-il des choix lorsqu'on crée T ?
Si un P_b contient 1 élément, cet élément doit être choisi pour T.
Si un P_b contient 3 éléments, il y a 1 façon de choisir 2 éléments pour T, puisque les 1er et 3e éléments (en ordre croissant) doivent être choisis.
Si un P_b contient 5 éléments, il y a 1 façon de choisir 3 éléments pour T, puisque les 1er, 3e et 5e éléments (en ordre croissant) doivent être choisis.
Si un P_b contient 7 éléments, il y a 1 façon de choisir 3 éléments pour T, puisque les 1er, 3e, 5e et 7e éléments (en ordre croissant) doivent être choisis..
Si un P_b contient 2 éléments, il y a 2 façons de choisir 1 élément pour T.
Si un P_b contient 4 éléments, il y a 3 façons de choisir 2 éléments pour T. (Pour choisir 2 éléments de $\{A, B, C, D\}$ sans choisir deux éléments consécutifs, on peut choisir A et C, A et D, ou B et D.)
Si un P_b contient 6 éléments, il y a 4 façons de choisir 3 éléments pour T. (Pour choisir 3 éléments de $\{A, B, C, D\}$ sans choisir deux éléments consécutifs, on peut choisir A et C et E, ou A et C et F, ou A et D et F, ou B et D et F.)
Le nombre de façons de choisir un sous-ensemble sans-triple T de A qui contient autant d'éléments que possible est donc égal à $1^2 \cdot 4^4 \cdot 1^{11} \cdot 3^{33} \cdot 1^{102} \cdot 2^{302} \cdot 1^{910}$.
En effet, il y a 2 ensembles P_b avec $k = 6$ et 1 façon de choisir 4 éléments de chacun (ce qui donne 1^2 choix en tout), 4 ensembles P_b avec $k = 5$ et 4 façons de choisir 3 éléments de chacun (ce qui donne 4^4 choix en tout, et ainsi de suite.
Les sept facteurs de ce produit, de $k = 6$ jusqu'à $k = 0$, donnent le nombre de façons de choisir le nombre maximum d'éléments d'un ensemble P_b qui correspond à cette valeur de k, élevé à la puissance égale au nombre de tels ensembles P_b.
Le nombre de façons est égal à $4^4 \cdot 3^{33} \cdot 2^{302}$, ou $2^{310} \cdot 3^{33}$.
D'après l'énoncé du problème, on a $N = 2^2 + 3^2 + 310^2 + 33^2$, ou $N = 97\,202$.
Les trois derniers chiffres de N sont 202.

Réponse : (A)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2015

(11^{e} année – Secondaire V)

le mardi 24 février 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 25 février 2015
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. La moyenne des cinq nombres est égale à : $\dfrac{8+9+10+11+12}{5} = \dfrac{50}{5} = 10$

OU Puisque les cinq nombres sont des entiers consécutifs, la moyenne est égale au nombre du milieu, soit 10.

Réponse : (E)

2. On a : $\dfrac{2 \times 3 + 4}{2+3} = \dfrac{6+4}{5} = \dfrac{10}{5} = 2$

Réponse : (A)

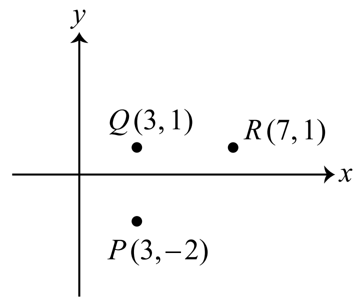
3. Soit d la distance entre deux points consécutifs sur la droite.
En marchant de P à U, Eva parcourt une distance de $5d$.
En revenant de U à P, elle parcourt encore une distance de $5d$. La distance totale est de $10d$.
Puisque 70 % de 10 est 7, Eva a complété 70 % de son trajet lorsqu'elle a parcouru une distance de $7d$ (c.-à-d. après avoir parcouru 7 segments).
Elle a complété une distance de $7d$ après avoir parcouru une distance de $2d$ à son retour du point U, c'est-à-dire au point S.

Réponse : (D)

4. On a : $(x-3)^2 = (-3-3)^2 = (-6)^2 = 36$

Réponse : (B)

5. D'après la figure ci-contre, l'ordre des sommets doit être $PQRS$. (Si l'ordre était différent, l'angle QRP ou l'angle QPR serait un angle du rectangle, ce qui est impossible, car ces angles ne sont pas droits.)
Puisque P et Q ont la même abscisse, le côté PQ du rectangle est vertical.
Donc, le côté SR doit être vertical. Le point S a donc la même abscisse que R, soit 7.

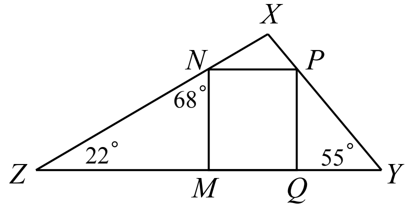


Puisque Q et R ont la même ordonnée, le côté QR du rectangle est horizontal.
Donc, le côté PS doit être horizontal. Le point S a donc la même ordonnée que P, soit -2.
Les coordonnés de S sont donc $(7,\,-2)$.

Réponse : (B)

6. Puisque $MNPQ$ est un rectangle, l'angle NMQ est droit, de même que l'angle NMZ.
Les mesures des angles du triangle NMZ ont une somme de 180°. Donc :

$$\angle NZM = 180^\circ - \angle ZNM - \angle ZMN = 180^\circ - 68^\circ - 90^\circ = 22^\circ$$



Puisque les mesures des angles du triangle ZXY ont aussi une somme de 180°, alors :

$$\angle YXZ = 180^\circ - \angle XZY - \angle XYZ = 180^\circ - 22^\circ - 55^\circ = 103^\circ$$

Réponse : (E)

7. Au départ, Valérie a la moitié de l'argent qu'il faut pour acheter le collier.
Après que sa soeur lui a remis 30 \$, Valérie a les trois quarts de l'argent qu'il lui faut. Donc, sa soeur lui a remis un quart de la somme requise, car $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Il lui faut encore un quart de la somme requise, soit le même montant que sa soeur lui a donné, c'est-à-dire 30 \$.
Donc, son père lui donnera 30 \$.

Réponse : (D)

8. Puisque $15^2 = 225$ et $15 = 3 \cdot 5$, alors $225 = 15^2 = (3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$.
Donc $x = 2$ et $y = 2$, d'où $x + y = 4$.

Réponse : (B)

9. *Solution 1*
Les deux équipes ont un total de de $(25 + 19)$ joueurs, ou 44 joueurs.
Or, il y a exactement 36 élèves qui font partie d'une ou l'autre équipe.
Puisque $44 - 36 = 8$, 8 élèves ont été comptés deux fois.
Il y a donc 8 élèves qui font partie des deux équipes.

Solution 2
Soit x le nombre d'élèves qui font partie des deux équipes.
Puisque 25 élèves jouent au baseball, il y a $25 - x$ élèves qui jouent au baseball et qui ne jouent pas au hockey.
Puisque 19 élèves jouent au hockey, il y a $19 - x$ élèves qui jouent au hockey et qui ne jouent pas au baseball.
Puisque 36 élèves font partie de l'équipe de baseball, de l'équipe de hockey ou des deux, alors :

$$(25 - x) + (19 - x) + x = 36$$

(Les trois expressions du membre de gauche représentent respectivement le nombre d'élèves qui jouent au baseball mais pas au hockey, le nombre d'élèves qui jouent au hockey mais pas au baseball et le nombre d'élèves qui jouent au baseball et au hockey.)
Donc $44 - x = 36$, d'où $x = 8$.
Donc 8 élèves font partie des deux équipes.

Réponse : (B)

10. Puisque Boris a parcouru 200 km à une vitesse de 50 km/h, il a mis 4 heures pour le faire, car $\frac{200}{50} = 4$. Anca a parcouru les mêmes 200 km à une vitesse de 60 km/h, avec un arrêt en chemin.
Puisqu'Anca a parcouru 200 km à une vitesse de 60 km/h, le temps qu'elle a mis pour conduire sur la route est de $3\frac{1}{3}$ heures, car $\frac{200}{60} = 3\frac{1}{3}$.
Le temps d'arrêt d'Anca est égal à la différence entre les deux temps sur la route. Il est donc égal à $4\,\text{h} - 3\frac{1}{3}\,\text{h}$, ou $\frac{2}{3}\,\text{h}$.
Puisque $\frac{2}{3}$ d'une heure vaut 40 minutes, Anca s'est arrêtée 40 minutes pour se reposer.

Réponse : (A)

11. Pour chaque valeur positionnelle (unité, dizaine, centaine) d'un tel nombre, il y a 3 chiffres possibles (7, 8 ou 9). Le nombre d'entiers positifs de trois chiffres qui n'utilisent aucun autre chiffre que 7, 8 et 9 est donc égal à $3 \cdot 3 \cdot 3$, ou 27.
(On remarque qu'il y a 9 tels entiers qui commencent par un 7, 9 qui commencent par un 8 et 9 qui commencent par un 9. Les 9 entiers qui commencent par un 7 sont 777, 778, 779, 787, 788, 789, 797, 798 et 799.)

Réponse : (E)

12. Puisque $\cos 60° = \frac{1}{2}$ et $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors l'équation donnée, $\cos 60° = \cos 45° \cos\theta$, devient $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$. Donc $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Puisque $0° \leq \theta \leq 90°$, alors $\theta = 45°$.

Réponse : (D)

13. On remplit un tableau qui indique l'argent que Steve et Wilfrid ont à la fin de chaque année. Après l'année 2000, la donnée dans la colonne de Steve est le double de celle de l'année précédente, tandis que la donnée dans la colonne de de Wilfrid est la moitié de celle de l'année précédente. On s'arrête lorsque la donnée dans la colonne de Steve est plus grande que celle dans la colonne de Wilfrid :

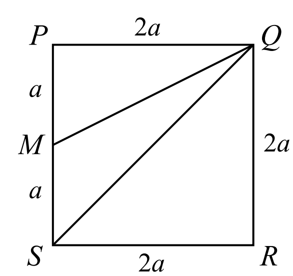
Année	Steve	Wilfrid
2000	100 \$	10 000 \$
2001	200 \$	5000 \$
2002	400 \$	2500 \$
2003	800 \$	1250 \$
2004	1600 \$	625 \$

Donc à la fin de 2004, Steve a plus d'argent que Wilfrid pour la première fois.

Réponse : (C)

14. *Solution 1*
Puisque $PQRS$ est un carré, sa diagonale SQ coupe le carré en deux régions de même aire.
Le rapport de l'aire du triangle PQS à l'aire du carré $PQRS$ est donc de 1 : 2.
On considère la base PS et la hauteur correspondante PQ du triangle PQS.
De même, on considère la base MS et la hauteur correspondante PQ du triangle MQS. (PQ est perpendiculaire à la droite qui contient MS.)
Puisque $MS = \frac{1}{2}PS$, l'aire du triangle MQS est la moitié de l'aire du triangle PQS.
Puisque le rapport de l'aire du triangle PQS à l'aire du carré $PQRS$ est de 1 : 2, alors le rapport de l'aire du triangle QMS à l'aire du carré $PQRS$ est de 1 : 4.

Solution 2
Soit $2a$ la longueur d'un côté du carré $PQRS$.
L'aire du carré $PQRS$ est donc égale à $(2a)^2$, ou $4a^2$.
Puisque M est le milieu du côté PS, alors $PM = MS = a$.
On considère la base MS et la hauteur correspondante PQ du triangle QMS. (PQ est perpendiculaire à la droite qui contient MS.)
Puisque $MS = a$ et $PQ = 2a$, l'aire du triangle QMS est égale à $\frac{1}{2}(MS)(PQ)$, ou $\frac{1}{2}a(2a)$, ou a^2.
Donc, le rapport de l'aire du triangle QMS à l'aire du carré $PQRS$ est de $a^2 : 4a^2$, ce qui est égal à 1 : 4.



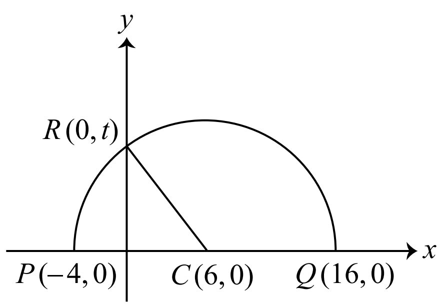
Réponse : (B)

15. *Solution 1*
Zoltan a répondu à 45 questions. Si toutes ses réponses avaient été bonnes, il aurait reçu 45(4) points, ou 180 points. Or, il a reçu 135 points. Il a donc perdu 45 points $(180 - 135 = 45)$.
Pour chaque réponse erronée, Zoltan perd 5 points par rapport à une bonne réponse, car une bonne réponse lui aurait rapporté 4 points et il perd 1 autre point pour la réponse erronée.
Puisque $45 \div 5 = 9$, Zoltan a donc 9 réponses erronées. (On peut vérifier qu'avec 36 bonnes réponses, 9 réponses erronées et 5 questions sans réponse, Zoltan obtient $36(4) - 9(1) + 5(0)$ points, ou 135 points.)

Solution 2
Soit x le nombre de réponses erronées.
Puisque Zoltan a répondu à 45 questions en tout, il a $45 - x$ bonnes réponses.
Puisque l'examen est composé de 50 questions et que Zoltan a répondu à 45 questions, 5 questions sont restées sans réponse.
D'après le barême de correction, Zoltan obtient $4(45 - x) - 1(x) + 0(5)$ points.
Or, on sait qu'il a obtenu un total de 135 points.
Donc $4(45 - x) - 1(x) + 0(5) = 135$, d'où $180 - 4x - x = 135$, ou $5x = 45$, ou $x = 9$.
Zoltan a donc 9 réponses erronées.
(On peut vérifier qu'avec 36 bonnes réponses, 9 réponses erronées et 5 questions sans réponse, Zoltan obtient $36(4) - 9(1) + 5(0)$ points, ou 135 points.)

Réponse : (A)

16. Puisque $P(-4, 0)$ et $Q(16, 0)$ sont les extrémités du diamètre du demi-cercle, le diamètre a une longueur de $16 - (-4)$, ou 20.
Puisque le demi-cercle a un diamètre de 20, il a un rayon de $\frac{1}{2}(20)$, ou 10.
Puisque le centre C est le milieu du diamètre PQ, il a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(-4 + 16), \frac{1}{2}(0 + 0)\right)$, ou $(6, 0)$.



Puisque CR est un rayon, il y a une distance de 10 entre les points $C(6, 0)$ et $R(0, t)$. Donc :

$$\begin{aligned}\sqrt{(6-0)^2 + (0-t)^2} &= 10 \\ 36 + t^2 &= 100 \\ t^2 &= 64\end{aligned}$$

(On aurait pu indiquer que le triangle ROC est rectangle, puisque les axes sont perpendiculaires, puis utiliser le théorème de Pythagore, avec $RO = t$, $RC = 10$ et $OC = 6$, pour obtenir $t^2 + 6^2 = 10^2$, d'où $t^2 = 64$.)
Puisque $t > 0$, alors $t = 8$.

Réponse : (C)

17. Puisque $\dfrac{a+b}{a-b} = 3$, alors $a + b = 3(a - b)$, ou $a + b = 3a - 3b$.
Donc $4b = 2a$, ou $2b = a$, d'où $2 = \dfrac{a}{b}$.
(On remarque que $b \neq 0$, autrement l'équation initiale serait $\dfrac{a}{a} = 3$, ce qui est faux.)

Réponse : (D)

18. L'équation $x^2+2kx+7k-10=0$ admet deux racines réelles égales lorsque son discriminant est égal à 0. Le discriminant, Δ, est égal à :

$$\Delta=(2k)^2-4(1)(7k-10)=4k^2-28k+40$$

Le discriminant est égal à 0 lorsque $4k^2-28k+40=0$, ou $k^2-7k+10=0$, ou $(k-2)(k-5)=0$, c'est-à-dire lorsque $k=2$ ou $k=5$. On vérifie :
Lorsque $k=2$, l'équation initiale devient $x^2+4x+4=0$, ou $(x+2)^2=0$. Cette équation admet une seule solution réelle, soit -2.
Lorsque $k=5$, l'équation initiale devient $x^2+10x+25=0$, ou $(x+5)^2=0$. Cette équation admet une seule solution réelle, soit -5.
La somme des deux valeurs de k est $2+5$, ou 7.

Réponse : (E)

19. Soit m la pente des trois droites parallèles.
La droite de pente m et d'ordonnée à l'origine 2 a pour équation $y=mx+2$.
Pour déterminer l'abscisse à l'origine de cette droite en fonction de m, on pose $y=0$ pour obtenir $mx+2=0$, ou $x=-\dfrac{2}{m}$. La droite a donc pour abscisse à l'origine $-\dfrac{2}{m}$.
De même, la droite de pente m et d'ordonnée à l'origine 3 a pour abscisse à l'origine $-\dfrac{3}{m}$.
Aussi, la droite de pente m et d'ordonnée à l'origine 4 a pour abscisse à l'origine $-\dfrac{4}{m}$.
Les trois abscisses à l'origine ont une somme de 36. Donc $\left(-\dfrac{2}{m}\right)+\left(-\dfrac{3}{m}\right)+\left(-\dfrac{4}{m}\right)=36$.
On multiplie chaque membre par m pour obtenir $-2-3-4=36m$, ou $36m=-9$, ou $m=-\dfrac{1}{4}$.

Réponse : (E)

20. On factorise l'expression $a^{2014}+a^{2015}$ pour obtenir $a^{2014}(1+a)$.
Si $a=5$ ou $a=10$, le facteur a^{2014} est un multiple de 5 et l'expression initiale est donc divisible par 5.
Si $a=4$ ou $a=9$, le facteur $(1+a)$ est un multiple de 5 et l'expression initiale est donc divisible par 5.
Si $a=1,2,3,6,7,8$, alors ni a^{2014} ni $(1+a)$ n'est un multiple de 5. Puisqu'aucun facteur n'est un multiple du nombre premier 5, alors le produit $a^{2014}(1+a)$ n'est pas divisible par 5.
Donc dans l'intervalle $1\le a\le 10$, il y a 4 entiers a pour lesquels $a^{2014}+a^{2015}$ est divisible par 5.

Réponse : (C)

21. Amina peut gagner à son premier tour, à son deuxième tour ou à son troisième tour.
Elle gagne à son premier tour si elle obtient pile. La probabilité pour que cela se produise est de $\frac{1}{2}$.
Amina gagne à son deuxième tour si elle obtient face à son premier tour, si Ben obtient face à son premier tour et si elle obtient pile à son deuxième tour, c'est-à-dire si les joueurs obtiennent la suite FFP. La probabilité pour que cela se produise est de $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{8}$. (On remarque qu'il n'y a qu'une seule suite de lettres F et/ou P qui permette à Amina de gagner à son second tour et et que chacun des trois résultats de cette suite a une probabilité de $\frac{1}{2}$.)
De même, Amina gagne à son troisième tour si les deux joueurs obtiennent la suite FFFFP. La probabilité pour que cela se produise est de $\left(\frac{1}{2}\right)^5$, ou $\frac{1}{32}$.
La probabilité pour qu'Amina gagne est donc égale à $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}$, ou $\frac{16+4+1}{32}$, ou $\frac{21}{32}$.

Réponse : (A)

22. Puisque a, b et c, dans cet ordre, forment une suite arithmétique alors il existe un nombre réel d pour lequel $a = b - d$ et $c = b + d$.
On doit avoir $d \neq 0$, autrement on aurait $a = b = c$ et avec $abc = 17\,955$, on aurait $b^3 = 17\,955$, d'où $b = \sqrt[3]{17\,955}$, qui n'est pas un entier.
On écrit les les termes de la suite géométrique en fonction de b et de d.

$$3a+b = 3(b-d)+b = 4b-3d \qquad 3b+c = 3b+(b+d) = 4b+d \qquad 3c+a = 3(b+d)+(b-d) = 4b+2d$$

Puisque $3a + b$, $3b + c$ et $3c + a$, dans cet ordre, forment une suite géométrique, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{3b+c}{3a+b} &= \frac{3c+a}{3b+c} \\
(3b+c)^2 &= (3a+b)(3c+a) \\
(4b+d)^2 &= (4b-3d)(4b+2d) \\
16b^2 + 8bd + d^2 &= 16b^2 - 4bd - 6d^2 \\
12bd &= -7d^2 \\
12b &= -7d \qquad \text{(puisque } d \neq 0\text{)} \\
d &= -\tfrac{12}{7}b
\end{aligned}$$

Donc $a = b - d = b - (-\frac{12}{7}b) = \frac{19}{7}b$ et $c = b + d = b + (-\frac{12}{7}b) = -\frac{5}{7}b$.
Puisque $abc = 17\,955$, alors $(\frac{19}{7}b)(b)(-\frac{5}{7}b) = 17\,955$, ou $-\frac{95}{49}b^3 = 17\,955$, ou $b^3 = -9261$, d'où $b = -21$.
Donc $a = \frac{19}{7}b = \frac{19}{7}(-21) = -57$ et $c = -\frac{5}{7}b = -\frac{5}{7}(-21) = 15$.
On peut vérifier que $a = -57$, $b = -21$ et $c = 15$ ont un produit de $17\,955$, que $-57, -21, 15$ est une suite arithmétique (avec une raison de 36), et que $3a + b$, $3b + c$ et $3c + a$ (c.-à-d. -192, -48 et -12) forment une suite géométrique (avec une raison de $\frac{1}{4}$).
Donc $a + b + c = (-57) + (-21) + 15 = -63$.

Réponse : (A)

23. On transforme l'équation donnée en équations équivalentes :

$$\begin{aligned}
5x^2 - 4xy + 2x + y^2 &= 624 \\
5x^2 - 4xy + 2x + y^2 + 1 &= 625 \\
4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + 2x + 1 &= 625 \\
(2x - y)^2 + (x+1)^2 &= 625
\end{aligned}$$

On sait que $625 = 25^2$.
Puisque x et y sont des entiers, alors le membre de gauche est la somme de deux carrés parfaits.
Puisqu'un carré parfait est non négatif, alors chacun de ces carrés parfaits est au plus égal à 625, ou 25^2.
Les carrés parfaits de 0^2 à 25^2 sont :

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144,$$

$$169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625$$

Les paires de carrés parfaits dans cette liste qui ont une somme de 625 sont :

$$625 + 0 = 576 + 49 = 400 + 225$$

(On peut le vérifier assez rapidement en calculant la différence entre 625 et chacun des carrés parfaits pour voir si cette différence est un carré parfait. De plus, il n'est pas nécessaire de vérifier les nombres inférieurs à 324, puisque 625 est impair et un des deux carrés parfaits qui ont une somme de 625 doit être plus grand que l'autre. Il doit donc être plus grand que la moitié de 625.)
Donc $(2x-y)^2$ et $(x+1)^2$ doivent égaler 25^2 et 0^2 dans un certain ordre, ou ils doivent égaler 24^2 et 7^2 dans un certain ordre, ou ils doivent 20^2 et 15^2 dans un certain ordre.
Donc $2x-y$ et $x+1$ égalent ± 25 et 0 dans un certain ordre, ou ± 24 et ± 7 dans un certain ordre ou ± 20 et ± 15 dans un certain ordre.
Puisque $x \geq 0$, alors $x+1 \geq 1$. Il suffit donc de considérer les cas où $x+1 = 25, 24, 7, 20, 15$:

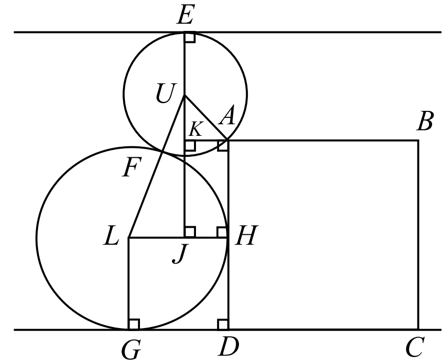
- Si $x+1=25$, alors $x=24$. Si $2x-y=0$ et $x=24$, alors $y=48$.
- Si $x+1=24$, alors $x=23$. Si $2x-y=7$ et $x=23$, alors $y=39$; si $2x-y=-7$ et $x=23$, alors $y=53$.
- Si $x+1=7$, alors $x=6$. Si $2x-y=24$ et $x=6$, alors $y=-12$; si $2x-y=-24$ et $x=6$, alors $y=36$.
- Si $x+1=20$, alors $x=19$. Si $2x-y=15$ et $x=19$, alors $y=23$; si $2x-y=-15$ et $x=19$, alors $y=53$.
- Si $x+1=15$, alors $x=14$. Si $2x-y=20$ et $x=14$, alors $y=8$; si $2x-y=-20$ et $x=14$, alors $y=48$.

D'après cette liste, les couples (x, y) d'entiers non négatifs, tels que $0 \leq x \leq y$, qui vérifient l'équation donnée sont $(x, y) = (24, 48), (23, 39), (23, 53), (6, 36), (19, 23), (19, 53), (14, 48)$.
Il y a 7 couples. (On peut vérifier que chaque couple vérifie l'équation donnée.)

Réponse : (E)

24. Soit r le rayon du cercle inférieur.
On nomme le carré $ABCD$, le centre du cercle supérieur U et le centre du cercle inférieur L. De plus, soit E le point de contact du cercle supérieur avec la droite supérieure, G le point de contact du cercle inférieur avec la droite inférieure, F le point de contact des deux cercles et H le point de contact du cercle inférieur et du carré.
On trace les segments EU, UF, FL, LG, LH et UA.
On utilisera deux propriétés de des cercles :

- Lorsqu'on joint le centre d'un cercle et le point de contact d'une tangente au cercle, le segment de droite obtenu est perpendiculaire à la tangente. Donc UE est perpendiculaire à la droite supérieure, LG est perpendiculaire à la droite inférieure et LH est perpendiculaire à AD.
- Lorsque deux cercles sont tangents l'un à l'autre, le segment de droite qui joint leurs centres passe par le point de contact des cercles. Donc, UFL est un segment de droite.



On prolonge EU vers le bas pour qu'il rejoigne LH en J.
Puisque EU et AD sont perpendiculaires aux deux droites parallèles et que LH est perpendiculaire à AD, alors EJ est perpendiculaire à LH.
On prolonge BA pour qu'il rejoigne EJ en K. Comme dans l'argument précédent, AK est perpendiculaire à EJ.
On considère le triangle UJL qui est rectangle en J.
Puisque le cercle supérieur a un rayon de 65, alors $EU = UA = UF = 65$.
Puisque le cercle inférieur a un rayon de r, alors $FL = LH = LG = r$.
Donc $UL = UF + FL = 65 + r = r + 65$.

Puisque les deux droites sont parallèles, que EJ et LG sont perpendiculaires à ces droites et que LJ est parallèle à ces droites, $EU + UJ + LG$ est égal à la distance entre ces droites.
Donc $65 + UJ + r = 400$, d'où $UJ = 335 - r$.
Puisque $AKJH$ est un rectangle, alors $LJ = LH - JH = r - JH = r - AK$.
Or, le triangle UKA est rectangle et $UA = 65$.
De plus, $UK = EK - EU = EK - 65$.
EK est égal à la distance entre les droites parallèles moins la longueur des côtés du carré, soit $400 - 279$, ou 121.
Donc $UK = 121 - 65$, ou $UK = 56$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle UKA, on a $AK^2 = UA^2 - UK^2$, d'où $AK^2 = 65^2 - 56^2$, ou $AK^2 = 1089$, ou $AK^2 = 33^2$.
Puisque $AK > 0$, alors $AK = 33$.
Donc $LJ = r - 33$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle UJL, On a :

$$\begin{aligned} UJ^2 + LJ^2 &= UL^2 \\ (335 - r)^2 + (r - 33)^2 &= (r + 65)^2 \\ r^2 - 670r + 335^2 + r^2 - 66r + 33^2 &= r^2 + 130r + 65^2 \\ r^2 - 866r + 109089 &= 0 \end{aligned}$$

Donc $r = \dfrac{866 \pm \sqrt{866^2 - 4(1)(109089)}}{2}$, ou $r = \dfrac{866 \pm 560}{2}$. Donc $r = 153$ ou $r = 713$.
Puisque r doit être inférieur à la distance entre les deux droites, c'est-à-dire à 400, alors $r = 153$.
Le choix de réponse le plus près est 153.

Réponse : (C)

25. Cette solution se veut aussi complète que possible. Dans un concours de questions à choix multiple, ceux qui tentent de résoudre un tel problème ne se préoccuperaient probablement pas de tous les détails.

1re étape : On récrit les fractions en utilisant les renseignements donnés
On considère un nombre réel x dont l'écriture décimale est de la forme $0{,}g_1g_2\ldots g_p\overline{r_1r_2\ldots r_q}$, p et q étant des entiers tels que $p \geq 0$ et $q > 0$ et $g_1, g_2, \ldots, g_p, r_1, r_2, \ldots, r_q$ étant des chiffres.
(On remarque que si $p = 0$, alors $0{,}g_1g_2\ldots g_p\overline{r_1r_2\ldots r_q} = 0{,}\overline{r_1r_2\ldots r_q}$.)
Donc $x = \dfrac{c}{10^p(10^q - 1)}$, c étant un entier strictement positif quelconque.
On le démontre avec un cas particulier, la démonstration générale étant donnée à la fin de la solution. Si $x = 0{,}12\overline{745}$, alors :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}12\overline{745} \\ 100x &= 12{,}\overline{745} \\ 10^2x - 12 &= 0{,}\overline{745} \\ 1000(10^2x - 12) &= 745{,}\overline{745} \\ 10^3(10^2x - 12) - 745 &= 0{,}\overline{745} \\ 10^3(10^2x - 12) - 745 &= 10^2x - 12 \\ 10^3(10^2x - 12) - (10^2x - 12) &= 745 \\ (10^3 - 1)(10^2x - 12) &= 745 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}10^2x - 12 &= \frac{745}{10^3-1}\\ 10^2x &= 12 + \frac{745}{10^3-1}\\ x &= \frac{12}{10^2} + \frac{745}{10^2(10^3-1)}\\ x &= \frac{(10^3-1)12+745}{10^2(10^3-1)}\end{aligned}$$

On considère une fraction $\frac{m}{n}$, m et n étant des entiers strictement positifs et $m < n$. Alors $0 < \frac{m}{n} < 1$.
On considère maintenant une fraction $\frac{m}{n}$, m et n étant des entiers strictement positifs et $0 < \frac{m}{n} < 1$, dont l'écriture décimale comporte une séquence de 6 chiffres qui se répète indéfiniment.
C'est-à-dire on suppose que $\frac{m}{n} = 0{,}g_1g_2\ldots g_p\overline{r_1r_2\ldots r_6}$, p étant un entier supérieur ou égal à 0 et $g_1, g_2, \ldots, g_p, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ étant des chiffres.
D'après ce qui précède on a, $\frac{m}{n} = \frac{c}{10^p \cdot 999999}$, c étant un entier quelconque strictement positif.
(On remarque que $10^6 - 1 = 999999$.)

2e étape : On analyse n par rapport aux conditions données
D'après la 1re étape, on a $cn = 10^p \cdot 999999m$.
Puisque $\frac{m}{n}$ est irréductible, alors m et n n'admettent aucun diviseur commun supérieur à 1.
Donc, n doit être un diviseur de $10^p \cdot 999999$.
Or, $10^p \cdot 999999 = 2^p \cdot 5^p \cdot 999 \cdot 1001 = 2^p \cdot 5^p \cdot (3^3 \cdot 37) \cdot (11 \cdot 91) = 2^p \cdot 5^p \cdot 3^3 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13$.
Puisque n est un diviseur de $2^p \cdot 5^p \cdot 3^3 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13$, alors n ne peut admettre de diviseurs premiers autres que $2, 3, 5, 7, 11, 13, 37$.
Puisque n n'est pas divisible par le carré de n'importe quel entier strictement positif supérieur à 1, alors il ne peut être divisible par le carré de n'importe quel nombre premier.
Donc, n doit être un diviseur de $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13$, ou 1 111 110.

3e étape : On consolide ce qu'on a
On sait que toute fraction $\frac{m}{n}$ qui satisfait aux propriétés

- m et n sont des entiers strictement positifs tels que $m < n$,
- $\frac{m}{n}$ est une fraction irréductible,
- n n'est pas divisible par le carré de n'importe quel entier strictement positif supérieur à 1, et
- l'écriture décimale de $\frac{m}{n}$ comporte une séquence de 6 chiffres qui se répète indéfiniment

peut être écrite sous la forme $\frac{m}{n} = \frac{s}{1111110}$, s étant un entier positif tel que $1 \leq s \leq 1111109$.
(On n'a pas encore déterminé si la séquence *la plus courte* d'entiers qui se répète indéfiniment a une longueur de 6.)

4e étape : Chaque fraction $\dfrac{s}{1111110}$, $1 \le s \le 1111109$, *peut être écrite sous la forme d'une fraction qui satisfait aux quatre propriétés précédentes*

Chaque fraction $\dfrac{s}{1111110}$ est entre 0 et 1, elle peut être écrite sous forme irréductible et son dénominateur n'est pas divisible par le carré de n'importe quel entier positif supérieur à 1. Donc, n'importe quelle forme réduite (ou irréductible) de cette fraction satisfait aussi à cette propriété, puisque les diviseurs du dénominateur seront éliminés et non pas ajoutés.

De plus,

$$\frac{s}{1111110} = \frac{1}{10} \cdot \frac{9s}{999999} = \frac{1}{10}\left(y + \frac{z}{999999}\right)$$

y et z étant des entiers non négatifs tels que $0 \le y < 10$ et $0 \le z < 999998$. (y et z sont respectivement le quotient et le reste lorsque $9s$ est divisé par 999999.)

Soit $z = r_1r_2r_3r_4r_5r_6$, $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ étant des chiffres, (certains de ces chiffres, ou tous, sont possiblement 0), alors :

$$\frac{s}{1111110} = \frac{1}{10}\left(y + \frac{r_1r_2r_3r_4r_5r_6}{999999}\right) = \frac{1}{10}\left(y{,}\overline{r_1r_2r_3r_4r_5r_6}\right) = 0{,}y\overline{r_1r_2r_3r_4r_5r_6}$$

Chaque $\dfrac{s}{1111110}$ peut être écrit sous forme décimale comportant une séquence de 6 chiffres qui se répète indéfiniment.

De plus, chaque $\dfrac{s}{1111110}$ est différent des autres et produira une fraction $\dfrac{m}{n}$ différente.

Donc, le nombre de telles fractions $\dfrac{s}{1111110}$ (qui est égal à 1111109) est égal au nombre de fractions $\dfrac{m}{n}$ qui satisfont aux quatre propriétés ci-haut.

On n'a pas encore vérifié si la séquence de 6 chiffres est la *plus courte*.

5e étape : On considère des longueurs plus courtes possibls

Si la plus courte séquence de chiffres qui se répète est de longueur 6, il ne peut pas y en avoir de longueur 1, 2, 3, 4 ou 5.

En utilisant une démarche semblable à la première utilisée précédemment, on voit que $\dfrac{m}{n}$ ne peut être écrit sous une des formes $\dfrac{c}{10^p \cdot 9}$ ou $\dfrac{c}{10^p \cdot 99}$ ou $\dfrac{c}{10^p \cdot 999}$ ou $\dfrac{c}{10^p \cdot 9999}$ ou $\dfrac{c}{10^p \cdot 99999}$.

En utilisant une démarche semblable à l'analyse des diviseurs premiers utilisée précédemment, on voit que $\dfrac{m}{n}$ ne peut être écrit sous une des formes $\dfrac{t}{2\cdot5\cdot3} = \dfrac{t}{30}$ ou $\dfrac{t}{2\cdot5\cdot3\cdot11} = \dfrac{t}{330}$ ou $\dfrac{t}{2\cdot5\cdot3\cdot37} = \dfrac{t}{1110}$ ou $\dfrac{t}{2\cdot5\cdot3\cdot11\cdot101} = \dfrac{t}{33330}$ ou $\dfrac{t}{2\cdot5\cdot3\cdot41\cdot271} = \dfrac{t}{333330}$.

Il est possible qu'une fraction $\dfrac{m}{n}$ qui vérifie les propriétés précédentes, y compris une séquence de 6 chiffres qui se répète indéfiniment, puisse aussi être écrite avec une séquence de 1, 2 ou 3 chiffres qui se répète indéfiniment.

Par exemple,

$$0{,}\overline{r_1} = 0{,}\overline{r_1r_1r_1r_1r_1r_1} \qquad 0{,}\overline{r_1r_2} = 0{,}\overline{r_1r_2r_1r_2r_1r_2} \qquad 0{,}\overline{r_1r_2r_3} = 0{,}\overline{r_1r_2r_3r_1r_2r_3}$$

ont toutes une séquence de 6 chiffres qui se répète indéfiniment.

Il est impossible pour une fraction $\dfrac{m}{n}$ donc l'écriture décimale comprend une séquence de 6 chiffres qui se répète indéfiniment d'avoir aussi une séquence de 4 ou 5 chiffres qui se répète

indéfiniment, sans avoir une séquence de 1 ou 2 chiffres qui se répète indéfiniment.
En effet, s'il existe une séquence de 4 chiffres qui se répète indéfiniment, alors

$$\frac{s}{1111110} = \frac{s}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{t}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101}$$

t étant entier strictement positif quelconque. Donc $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101 \cdot s = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13 \cdot t$, d'où $101 \cdot s = 37 \cdot 7 \cdot 13 \cdot t$. Donc 101 est un diviseur de t et on a donc $\dfrac{s}{1111110} = \dfrac{t'}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 11} = \dfrac{t'}{330}$, t' étant un entier strictement positif quelconque.

Donc, l'écriture décimale de $\dfrac{s}{1111110} = \dfrac{t'}{330}$ comprend une séquence de 2 chiffres qui se répète indéfiniment. Donc, toute fraction dont l'écriture décimale a une séquence de 4 chiffres qui se répète indéfiniment sera traitée avec celles dont l'écriture décimale comprend des séquences de longueur 1, 2 ou 3.
De la même manière, on peut éliminer les fractions dont l'écriture décimale a une séquence de 5 chiffres qui se répète indéfiniment.
On doit donc éliminer les fractions dont l'écriture décimale a une séquence de 1, 2 ou 3 chiffres qui se répète indéfiniment.

6e étape : On considère les chevauchements
On doit considérer 1111109 fractions $\dfrac{m}{n}$ qui satisfont aux quatre propriétés.
Puisque l'écriture décimale de $\dfrac{m}{n}$ ne peut avoir une séquence de 1, 2 ou 3 chiffres qui se répète indéfiniment, $\dfrac{m}{n}$ ne peut être écrite sous l'une des formes $\dfrac{u}{1110}$ ou $\dfrac{v}{330}$ ou $\dfrac{w}{30}$, u, v et w étant des entiers strictement positifs tels que $u < 1110$, $v < 330$ et $w < 30$.
Soit U l'ensemble des 1009 fractions de la forme $\dfrac{u}{1110}$, V l'ensemble des 329 fractions de la forme $\dfrac{v}{330}$, et W l'ensemble des 29 fractions de la forme $\dfrac{w}{30}$.
N'importe quelle fraction de la forme $\dfrac{w}{30}$ est aussi de la forme $\dfrac{u}{1110}$ (puisque $\dfrac{w}{30} = \dfrac{37w}{1110}$) et de la forme $\dfrac{v}{330}$ (puisque $\dfrac{w}{30} = \dfrac{11w}{330}$).
Donc, toute fraction dans W est aussi dans U et dans V. Dans la notation d'ensembles, on écrit $W \subseteq U$ et $W \subseteq V$.
De plus, toute fraction qui est dans U et dans V est aussi dans W :

> On considère une fraction qui peut être écrite de la forme $\dfrac{u}{1110}$ et de la forme $\dfrac{v}{330}$.
> On a donc $\dfrac{u}{1110} = \dfrac{v}{330}$, ou $\dfrac{u}{37} = \dfrac{v}{11}$. Donc $11u = 37v$.
> Puisque $37v$ est un multiple de 11 et que 37 n'est pas divisible par le nombre premier 11, alors v est un multiple de 11.
> Donc $\dfrac{v}{330} = \dfrac{11f}{330} = \dfrac{f}{30}$, f étant un entier strictement positif quelconque et cette fraction est donc dans W.

Dans la notation d'ensembles, on écrit $U \cap V \subseteq W$.
Puisque $W \subseteq U$ et $W \subseteq V$ et $U \cap V \subseteq W$, alors $U \cap V = W$; en d'autres mots, l'ensemble des fractions qui sont dans U et dans V est précisément l'ensemble W.

7e étape : Compte final
On commence par les 1111109 fractions mentionnées précédemment et on veut omettre les fractions dans U, V et W.
Puisque chaque fraction dans W est aussi dans U et dans V, il suffit d'omettre les fractions dans U et V.
Le nombre total de fractions qui sont dans U ou dans V (c.-à-d. dans $U \cup V$) est égal au nombre de fractions dans U plus le nombre de fractions dans V moins le nombre de fractions qui chevauchent (c.-à-d. dans $U \cap V = W$). En effet, les fractions qui chevauchent sont comptées deux fois lorsqu'on compte les fractions dans U et les fractions dans V.
On doit donc omettre $1009 + 329 - 29$ fractions des 1111109 fractions initiales.
Donc F, le nombre de fractions qui satisfont aux propriétés, est égal à :

$$F = 1111109 - (1009 + 329 - 29) = 1109700$$

Puisque F a 7 chiffres, alors $G = F + 7 = 1109707$. La somme des carrés des chiffres de G est égale à $1^2 + 1^2 + 0^2 + 9^2 + 7^2 + 0^2 + 7^2$, ou $1 + 1 + 81 + 49 + 49$, ou 181.

8e étape : Démonstration générale de la 1re étape
On considère un nombre rationnel x ayant l'écriture décimale $0{,}g_1g_2\ldots g_p\overline{r_1r_2\ldots r_q}$, p et q étant des entiers tels que $p \geq 0$ et $q > 0$ et $g_1, g_2, \ldots, g_p, r_1, r_2, \ldots, r_q$ étant des chiffres. Donc :

$$\begin{aligned}
x &= 0{,}g_1g_2\ldots g_p\overline{r_1r_2\ldots r_q} \\
10^p x &= g_1g_2\ldots g_p{,}\overline{r_1r_2\ldots r_q} \\
10^p x - g_1g_2\ldots g_p &= 0{,}\overline{r_1r_2\ldots r_q} \\
10^q(10^p x - g_1g_2\ldots g_p) &= r_1r_2\ldots r_q{,}\overline{r_1r_2\ldots r_q} \\
10^q(10^p x - g_1g_2\ldots g_p) - r_1r_2\ldots r_q &= 0{,}\overline{r_1r_2\ldots r_q} \\
10^q(10^p x - g_1g_2\ldots g_p) - r_1r_2\ldots r_q &= 10^p x - g_1g_2\ldots g_p \\
10^q(10^p x - g_1g_2\ldots g_p) - (10^p x - g_1g_2\ldots g_p) &= r_1r_2\ldots r_q \\
(10^q - 1)(10^p x - g_1g_2\ldots g_p) &= r_1r_2\ldots r_q \\
10^p x - g_1g_2\ldots g_p &= \frac{r_1r_2\ldots r_q}{10^q - 1} \\
10^p x &= g_1g_2\ldots g_p + \frac{r_1r_2\ldots r_q}{10^q - 1} \\
x &= \frac{g_1g_2\ldots g_p}{10^p} + \frac{r_1r_2\ldots r_q}{10^p(10^q - 1)} \\
x &= \frac{(10^q - 1)g_1g_2\ldots g_p + r_1r_2\ldots r_q}{10^p(10^q - 1)}
\end{aligned}$$

Réponse : (E)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2014

(11^{e} année – Secondaire V)

le jeudi 20 février 2014

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 21 février 2014

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On évalue d'abord le numérateur pour obtenir $\dfrac{15-3^2}{3}=\dfrac{15-9}{3}=\dfrac{6}{3}=2$.

RÉPONSE : (A)

2. Puisque $10^0=1$, $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, $10^4=10\,000$ et $10^5=100\,000$, alors 2014 est entre 10^3 et 10^4.

RÉPONSE : (D)

3. Lorsque $x=2$, on a $(x+2-x)(2-x-2)=(2+2-2)(2-2-2)=(2)(-2)=-4$.
On aurait pu simplifier $(x+2-x)(2-x-2)$ pour obtenir $(2)(-x)$, ou $-2x$, puis reporter $x=2$ dans cette expression pour obtenir $-2(2)$, ou -4.

RÉPONSE : (E)

4. Les diviseurs positifs de 24 sont $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ et 24.
Les paires de diviseurs qui donnent un produit de 24 sont 24×1, 12×2, 8×3 et 6×4.
On cherche deux entiers positifs x et y ayant un produit de 24 et une différence de 5.
Puisque $8\times 3=24$ et $8-3=5$, alors $x=8$ et $y=3$.
Donc $x+y=8+3$, ou $x+y=11$.

RÉPONSE : (B)

5. Puisque le carré de $WXYZ$ a une aire de 9, ses côtés ont une longueur de $\sqrt{9}$, ou 3.
Puisque W est le centre du cercle et que X est situé sur le cercle, alors WX est un rayon.
Le cercle a donc un rayon de 3.
Il a donc une aire de $\pi(3^2)$, ou 9π.

RÉPONSE : (C)

6. On sait que $50\,\%$ correspond à $\frac{1}{2}$, tandis que $75\,\%$ correspond à $\frac{3}{4}$.
Puisque $50\,\%$ de N est égal à 16, alors la moitié de N est égal à 16. Donc $N=2(16)$, ou $N=32$.
Donc $75\,\%$ de N est égal à $\frac{3}{4}N$, ou $\frac{3}{4}(32)$, ce qui est égal à 24.

RÉPONSE : (D)

7. *Solution 1*
L'angle SRP est un angle extérieur du triangle PQR.
Donc $\angle SRP=\angle RPQ+\angle RQP$, d'où $(180-x)^\circ=30^\circ+2x^\circ$.
Donc $180-x=30+2x$, d'où $3x=150$, ou $x=50$.

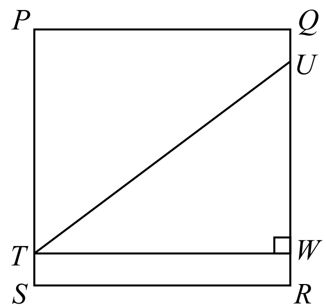
Solution 2
Puisque QRS est un segment de droite et que $\angle SRP=(180-x)^\circ$, alors l'angle PRQ est l'angle supplémentaire de l'angle SRP. Donc $\angle PRQ=x^\circ$.
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°,
alors $\angle PRQ+\angle PQR+\angle RPQ=180^\circ$. Donc $x^\circ+2x^\circ+30^\circ=180^\circ$.
D'après cette dernière équation, on a $3x=150$, ou $x=50$.

RÉPONSE : (E)

8. On représente Alexa, Boris, Carla, Dan et Éric par les lettres A, B, C, D et E, respectivement.
On utilise le signe ($>$) pour représenter « est plus grand que » et le signe ($<$) pour représenter « est plus court que ».
D'après le premier boulet, $A>C$.
D'après le deuxième boulet, $D<E$ et $D>B$, d'où $E>D>B$.
D'après le troisième boulet, $E<C$, ou $C>E$.
Puisque $A>C$ et $C>E$ et $E>D>B$, alors $A>C>E>D>B$, ce qui indique que Boris est la personne la plus courte.

RÉPONSE : (B)

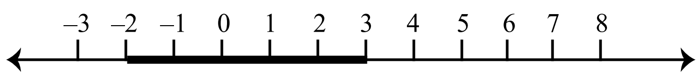
9. Au point T, on abaisse une perpendiculaire TW au côté QR.



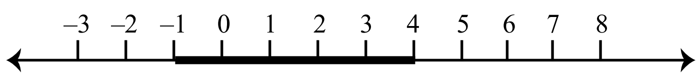
Puisque le quadrilatère $TWRS$ a trois angles droits (en W, R et S), il est un rectangle.
Donc $WR = TS = 1$ et $TW = SR = 8$.
Puisque $QU = 1$, alors $UW = QR - QU - WR$, d'où $UW = 8 - 1 - 1$, ou $UW = 6$.
Le triangle TWU est rectangle en W.
D'après le théorème de Pythagore, on a $TU^2 = TW^2 + UW^2$.
Donc $TU^2 = 8^2 + 6^2$, ou $TU^2 = 64 + 36$, ou $TU^2 = 100$.
Puisque $TU > 0$, alors $TU = \sqrt{100}$, ou $TU = 10$.

Réponse : (C)

10. Après la première rotation, l'image du segment est située entre -2 et 3.



Cette image subit une rotation de centre au point 1.
Puisque l'extrémité droite de cette image est à 2 unités à la droite de 1, son image, après la deuxième rotation sera à 2 unités à la gauche de 1.
L'extrémité gauche de cette dernière image est donc au point -1.
Puisque le segment a une longueur de 5, son extrémité droite sera au point $-1 + 5$, ou 4.



L'image, après la deuxième rotation, est située entre -1 et 4.

Réponse : (B)

11. Puisque $a = \frac{2}{3}b$, alors $3a = 2b$. Puisque $b \neq 0$, alors $a \neq 0$.

Donc $\dfrac{9a + 8b}{6a} = \dfrac{9a + 4(2b)}{6a} = \dfrac{9a + 4(3a)}{6a} = \dfrac{21a}{6a} = \dfrac{7}{2}$ (puisque $a \neq 0$).

On aurait pu écrire $\dfrac{9a + 8b}{6a} = \dfrac{3(3a) + 8b}{2(3a)} = \dfrac{3(2b) + 8b}{2(2b)} = \dfrac{14b}{4b} = \dfrac{7}{2}$ (puisque $b \neq 0$).

Réponse : (A)

12. Puisque $100 = 10^2$, alors $100^4 = (10^2)^4 = 10^8$.
On veut donc résoudre l'équation $10^x \cdot 10^5 = 10^8$, qui est équivalente à l'équation $10^{x+5} = 10^8$.
On a donc $x + 5 = 8$, ou $x = 3$.

Réponse : (E)

13. On remarque que la somme des chiffres du nombre 1000 n'est pas égale à 3. Tous les autres entiers dans l'intervalle donné ont deux ou trois chiffres.
Si la somme des chiffres d'un entier est égale à 3, aucun des chiffres ne peut être supérieur à 3.
Si un entier de deux chiffres est tel que la somme de ses chiffres est égale à 3, ses chiffres doivent être 1, 2 ou 3. Les entiers possibles sont 12, 21 et 30.
Si un entier de trois chiffres est tel que la somme de ses chiffres est égale à 3, alors son chiffre des centaines doit être 1, 2 ou 3.
Si le chiffre des centaines est 3, l'entier doit être 300, car la somme de ses chiffres est égale à 3.
Si le chiffre des centaines est 2, l'entier doit être 210 ou 201, car la somme de ses chiffres est égale à 3.
Si le chiffre des centaines est 1, les deux autres chiffres ont une somme de 2. Ces deux chiffres doivent donc être 2 et 0, 1 et 1, ou 0 et 2, ce qui donne les entiers 120, 111 ou 102.
En tout, il y a 9 entiers, entre 10 et 1000, dont la somme des chiffres est égale à 3.

Réponse : (D)

14. Soit x le nombre de jours où Paul travaillait.
Pour chacun de ces jours, il gagnait 100 \$ et ne déboursait rien. Il a donc gagné un total de $100x$ dollars.
Puisque Paul a travaillé pendant x des 70 jours, il n'a pas travaillé pendant $70 - x$ jours.
Pour chacun de ces jours, il déboursait 20 \$ pour ses repas. Il a donc déboursé un total de $20(70 - x)$ dollars pour ses repas.
Après 70 jours, l'argent qu'il a gagné moins l'argent qu'il a déboursé totalisait 5440 \$.
Ceci correspond à $100x - 20(70 - x) = 5440$.
Donc $100x - 1400 + 20x = 5440$, d'où $120x = 6840$, ou $x = 57$.
Donc, Paul a travaillé pendant 57 des 70 jours.
(On aurait pu vérifier pour chacun des choix de réponse en calculant l'argent reçu et l'argent déboursé.)

Réponse : (D)

15. La première fois que la flèche tourne, il y a 4 résultats équiprobables, soit 1, 2, 3 et 4. Pour chacun de ces résultats, il y a 4 résultats équiprobables pour le deuxième tour, soit 1, 2, 3 et 4. Il y a donc 16 résultats équiprobables pour les deux tours de la flèche. Chacun de ces 16 résultats nous donne un produit, car Diane multiplie les deux numéros obtenus. On place les produits dans le tableau suivant. La colonne de gauche représente les résultats possibles lors du premier tour de la flèche et la rangée du dessus représente les résultats possibles lors du deuxième tour. Les produits correspondants se trouvent dans les cellules correspondantes du tableau :

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Puisque les 16 résultats possibles sont équiprobables, les 16 produits le sont aussi.
Or, le produit 4 survient le plus souvent, soit trois fois. Il est donc le plus probable.

Réponse : (B)

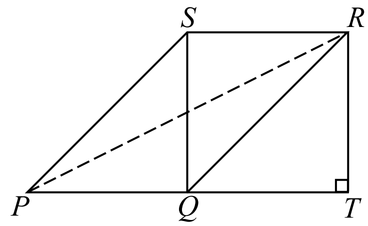
16. Puisque Jade n'a jamais dépassé la vitesse de 80 km/h pendant son voyage de 5 heures, alors la distance parcourue ne peut être supérieure à 5×80 km, ou 400 km.
Puisque le compteur kilométrique indiquait 13 831 km au départ, alors à l'arrivée, il ne peut indiquer plus de $(13\,831 + 400)$ km, ou 14 231 km.
Pour connaitre la vitesse moyenne maximale que Jade a pu atteindre, on déterminera la plus grande distance qu'elle a pu parcourir en 5 heures.
Puisque le compteur kilométrique indique un palindrome à l'arrivée, on cherche le plus grand palindrome inférieur à 14 231. Il s'agit de 14 141. (Pour le trouver, on cherche les palindromes supérieurs à 14 000 et inférieurs à 14 231. Ces palindromes doivent se terminer par les chiffres 41. Ils sont donc de la forme $14\,x41$. Le plus grand palindrome de cette forme, inférieur à 14 231, est 14 141.)
Puisque le compteur kilométrique ne peut dépasser 14 141, alors la distance maximale que Jade a pu parcourir en 5 heures est de $(14\,141 - 13\,831)$ km, ou 310 km. La vitesse moyenne maximale qu'elle a pu atteindre est de $\frac{310}{5}$ km/h, ou 62 km/h.

Réponse : (A)

17. Soit n le nombre d'employés dans le magasin de Sergio.
D'après le premier calcul, Sergio a déterminé que ses n employés avaient vendu en moyenne 75 items par employé, soit un total de $75n$ items.
Le lendemain, un employé a vendu 6 items, un employé a vendu 5 items, une employée a vendu 4 items et les $(n - 3)$ autres employés ont vendu 3 items.
À la fin de cette journée, le nombre total d'items vendus est de $75n + (6 + 5 + 4 + (n - 3)3)$, ou $75n + 15 + 3n - 9$, ou $78n + 6$.
Puisque la moyenne d'items vendus par employé est maintenant de 78,3, alors $\dfrac{78n + 6}{n} = 78{,}3$, ou $78n + 6 = 78{,}3n$. Donc $0{,}3n = 6$, d'où $n = 20$.
Il y a donc 20 employés en tout.

Réponse : (C)

18. Soit x mm la longueur des côtés du carré initial.
On prolonge PQ. Au point R, on abaisse une perpendiculaire à PQ, de manière qu'elle coupe le prolongement de PQ au point T.



Le quadrilatère $SRTQ$ est un carré, puisqu'il a des angles droits en S, Q et T (ce qui en fait un rectangle) et puisque $SR = SQ$ (ce qui fait du rectangle un carré).
Or, $RT = SQ = x$ mm et $PT = PQ + QT = 2x$ mm.
D'après le théorème de Pythagore, on a $PR^2 = PT^2 + RT^2$, d'où $90^2 = x^2 + (2x)^2$.
Donc $5x^2 = 8100$, ou $x^2 = 1620$.
L'aire du carré initial est de x^2 mm^2, ou 1620 mm^2.

Réponse : (B)

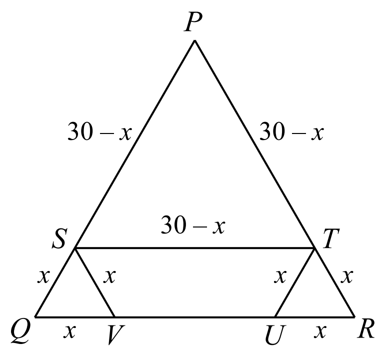
19. On considère trois entiers de trois chiffres, RST, UVW et XYZ.
L'entier RST a une valeur de $100R + 10S + T$, l'entier UVW a une valeur de $100U + 10V + W$ et l'entier XYZ a une valeur de $100X + 10Y + Z$.
Donc :

$$\begin{aligned} RST + UVW + XYZ &= 100R + 10S + T + 100U + 10V + W + 100X + 10Y + Z \\ &= 100(R + U + X) + 10(S + V + Y) + (T + W + Z) \end{aligned}$$

On remarque que les chiffres $R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ peuvent être n'importe quel chiffre de 0 à 9, à l'exception de R, U et X qui ne peuvent être 0.
Max veut que $100(R+U+X)+10(S+V+Y)+(T+W+Z)$ soit aussi grand que possible. Pour ce faire, il place les plus grands chiffres (9, 8 et 7) comme chiffres des centaines, les plus grands chiffres suivants (6, 5 et 4) comme chiffres des dizaines et les chiffres suivants (3, 2 et 1) comme chiffres des unités. On remarque que les chiffres doivent être différents et que la distribution des trois chiffres dans une même valeur positionnelle (centaines, dizaines ou unités) n'importe pas, puisqu'elle ne change pas la somme.
La somme de Max est donc de $100(9 + 8 + 7) + 10(6 + 5 + 4) + (3 + 2 + 1)$, ou $2400 + 150 + 6$, ou 2556.
Min Hee veut que $100(R + U + X) + 10(S + V + Y) + (T + W + Z)$ soit aussi petit que possible. Pour ce faire, elle place les plus petits chiffres permis (1, 2 et 3) comme chiffres des centaines, les plus petits chiffres suivants (0, 4 et 5) comme chiffres des dizaines et les chiffres suivants (6, 7 et 8) comme chiffres des unités.
La somme de Min Hee est donc de $100(1 + 2 + 3) + 10(0 + 4 + 5) + (6 + 7 + 8)$, ou $600 + 90 + 21$, ou 711.
La différence entre ces sommes est de $2556 - 711$, ou 1845.

Réponse : (C)

20. Puisque $PQ = QR = RP$, le triangle PQR est équilatéral et tous ses angles mesurent $60°$. Puisque ST est parallèle à QR, que SV est parallèle à PR et que TU est parallèle à PQ, alors tous les angles des triangles PST, SQV et TUR mesurent $60°$. Ces triangles sont donc équilatéraux.
Soit $SQ = x$.
Puisque le triangle SQV est équilatéral, alors $QV = VS = SQ = x$.
Puisque $PQ = 30$, alors $PS = 30 - x$.
Puisque le triangle PST est équilatéral, alors $ST = TP = PS = 30 - x$.
Puisque $PR = 30$, alors $TR = 30 - (30 - x) = x$.
Puisque le triangle TUR est équilatéral, alors $TU = UR = TR = x$.



Puisque $VS + ST + TU = 35$, alors $x + (30 - x) + x = 35$, d'où $30 + x = 35$, ou $x = 5$.
Donc $VU = QR - QV - UR$, d'où $VU = 30 - x - x$, ou $VU = 30 - 5 - 5$, ou $VU = 20$.

Réponse : (D)

21. Lorsqu'on retire 2 kg d'arachides de la boite qui contenait 10 kg d'arachides, il reste 8 kg d'arachides dans la boite.
Puisqu'on ajoute 2 kg de raisins secs, il y a 2 kg de raisins secs dans la boite.
On mélange bien les raisins secs et les arachides.
On retire ensuite 2 kg de ce mélange, ce qui représente un cinquième de la masse, on retire donc un cinquième de la masse d'arachides (c.-à-d. $\frac{8}{5}$ kg) et un cinquième de la masse des raisins secs (c.-à-d. $\frac{2}{5}$ kg).
Dans la boite, il reste $(8 - \frac{8}{5})$ kg, ou $\frac{32}{5}$ kg d'arachides et $(2 - \frac{2}{5})$ kg, ou $\frac{8}{5}$ kg de raisins secs.
Lorsqu'on ajoute 2 kg de raisins secs, la masse de raisins secs dans la boite est de $(\frac{8}{5} + 2)$ kg, ou $\frac{18}{5}$ kg. Il y a donc $\frac{32}{5}$ kg d'arachides et $\frac{18}{5}$ kg de raisins secs dans la boite.
Le rapport des masses est donc de $\frac{32}{5} : \frac{18}{5}$, ou 32 : 18, ou 16 : 9.

Réponse : (E)

22. Lorsque Julie se déplace de J à G, soit x km la distance parcourue en montant, y km la distance parcourue sur terrain plat et z km la distance parcourue en descendant.
Donc en se déplaçant de G à J, elle parcourt z km en montant, y km sur terrain plat et x km en descendant. En effet, ce qu'elle parcourt en montant à l'aller est parcouru en descendant au retour et ce qu'elle parcourt en descendant à l'aller est parcouru en montant au retour.
On sait que Julie se déplace à une vitesse de 77 km/h sur terrain plat, de 63 km/h en montant et de 99 km/h en descendant.
Lorsque la distance est constante, on a vitesse $= \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$ ou distance $=$ vitesse $\times$ temps ou temps $= \dfrac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$. D'après cette dernière formule, en se déplaçant de J à G, Julie met $\dfrac{x}{63}$ heures à se déplacer en montant, $\dfrac{y}{77}$ heures à se déplacer sur terrain plat et $\dfrac{z}{99}$ heures à se déplacer en descendant.
On sait qu'elle met 3 heures et 40 minutes (c.-à-d. $3\frac{2}{3}$ heures ou $\dfrac{11}{3}$ heures) pour se rendre de J à G. Donc :

$$\frac{x}{63} + \frac{y}{77} + \frac{z}{99} = \frac{11}{3}$$

De la même façon, lorsque Julie revient de G à J, on a :

$$\frac{x}{99} + \frac{y}{77} + \frac{z}{63} = \frac{13}{3}$$

On cherche la distance totale de J à G, qui est égale à $(x+y+z)$ km. On doit donc déterminer la valeur de $x+y+z$.
On additionne les deux équations précédentes, membre par membre, et on simplifie pour obtenir :

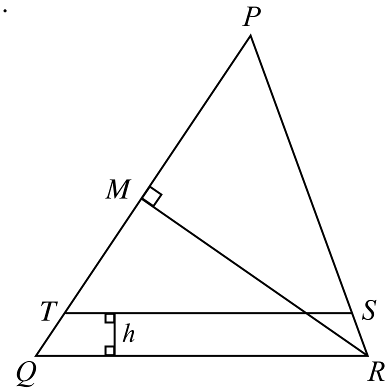
$$\begin{aligned}
\frac{x}{63} + \frac{x}{99} + \frac{y}{77} + \frac{y}{77} + \frac{z}{99} + \frac{z}{63} &= \frac{24}{3} \\
x\left(\frac{1}{63} + \frac{1}{99}\right) + y\left(\frac{1}{77} + \frac{1}{77}\right) + z\left(\frac{1}{99} + \frac{1}{63}\right) &= 8 \\
x\left(\frac{1}{7\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 11}\right) + \frac{2}{77}y + z\left(\frac{1}{9\cdot 11} + \frac{1}{7\cdot 9}\right) &= 8 \\
x\left(\frac{11}{7\cdot 9\cdot 11} + \frac{7}{7\cdot 9\cdot 11}\right) + \frac{2}{77}y + z\left(\frac{7}{7\cdot 9\cdot 11} + \frac{11}{7\cdot 9\cdot 11}\right) &= 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x\left(\frac{18}{7\cdot 9\cdot 11}\right) + \frac{2}{77}y + z\left(\frac{18}{7\cdot 9\cdot 11}\right) &= 8 \\
x\left(\frac{2}{7\cdot 11}\right) + \frac{2}{77}y + z\left(\frac{2}{7\cdot 11}\right) &= 8 \\
\frac{2}{77}(x+y+z) &= 8
\end{aligned}$$

Donc $x+y+z = \dfrac{77}{2} \cdot 8$, ou $x+y+z = 77 \cdot 4$, ou $x+y+z = 308$.
La distance de J à G est donc de 308 km.

Réponse : (C)

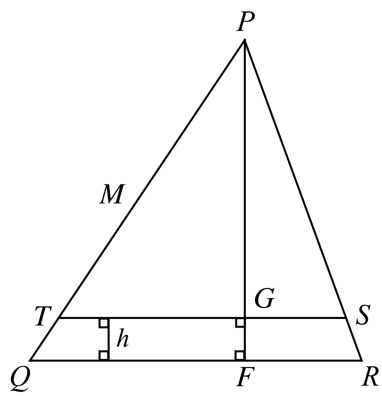
23. Soit S et T les deux sommets indiqués dans la figure ci-dessous.
On calcule d'abord l'aire du triangle PQR.
Au point R, on abaisse une perpendiculaire à PQ.
Puisque $PR = QR$, le triangle PQR est isocèle et la perpendiculaire de R à PQ coupe PQ en son milieu M.
Donc, $PM = MQ = \frac{1}{2}(150) = 75$.



D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$RM^2 = RQ^2 - MQ^2 = 125^2 - 75^2 = 15\,625 - 5625 = 10\,000$$

Puisque $RM > 0$, alors $RM = \sqrt{10\,000}$, ou $RM = 100$.
Le triangle PQR a donc une aire de $\frac{1}{2}(RM)(PQ)$, ou $\frac{1}{2}(100)(150)$, ou 7500.
Soit F le pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur QR. Soit G le point où PF coupe TS (à un angle de 90°).

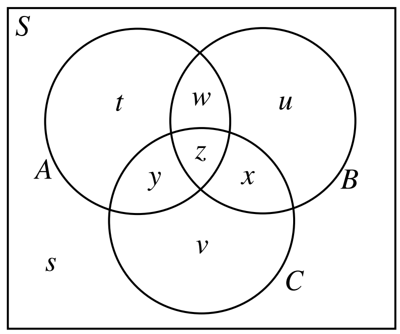


L'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2}(QR)(PF)$ également.
Donc $\frac{1}{2}(125)(PF) = 7500$, d'où $PF = \frac{15\,000}{125}$, ou $PF = 120$.
Puisque TS est parallèle à QR, alors $\angle PTS = \angle PQR$ et $\angle PST = \angle PRQ$.
Les triangles PTS et PQR sont donc semblables.
Puisque les quatre sections du triangle PQR ont la même aire, chacune a une aire égale à un quart de l'aire du triangle. Donc, l'aire du triangle PTS est égale à trois quarts de l'aire du triangle PQR.
Les dimensions du triangle PTS sont donc $\sqrt{\frac{3}{4}}$, ou $\frac{\sqrt{3}}{2}$ de celles du triangle PQR. (De façon générale, si les aires de deux triangles semblables ont un rapport de $k : 1$, alors les longueurs de deux côtés correspondants ont un rapport de $\sqrt{k} : 1$.)
Donc $PG = \frac{\sqrt{3}}{2}PF$, d'où $PG = \frac{\sqrt{3}}{2}(120)$, ou $PG = 60\sqrt{3}$.
Puisque TS est parallèle à QR, alors $h = GF = PF - PG$, d'où $h = 120 - 60\sqrt{3}$, ou $h \approx 16{,}077$.
Parmi les choix de réponse, la hauteur est plus près de 16,1.

Réponse : (E)

24. Si on doit placer n boules dans n boites, une boule par boite sans restrictions, alors le nombre de façons de le faire est égal à $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$. (En effet, il y a n choix pour la boule qui ira dans la boite 1 ; pour chaque choix, il y a $n-1$ choix pour la boule qui ira dans la boite 2 ; pour chacune de ces paires de choix, il y a $n-2$ choix pour la boule qui ira dans la boite 3, et ainsi de suite. En tout, il y a $n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$ choix.)

    On trace un diagramme de Venn dans lequel S représente toutes les façons de placer 8 boules dans 8 boites sans restrictions, le cercle A représente les façons de placer les boules lorsque la boule 1 est dans la boite 1, le cercle B représente les façons de placer les boules lorsque la boule 2 est dans la boite 2 et le cercle C représente les façons de placer les boules lorsque la boule 3 est dans la boite 3.



    Dans le diagramme, s représente le nombre de façons de placer les boules lorsque la boule 1 n'est pas dans la boite 1 (s est à l'extérieur du cercle A), la boule 2 n'est pas dans la boite 2 (s est à l'extérieur du cercle B) et la boule 3 n'est pas dans la boite 3 (s est à l'extérieur du cercle C). On cherche la valeur de s.
    Le nombre de façons dans S est égal à $8!$.
    Le cercle A représente les façons de placer les boules lorsque la boule 1 est dans la boite 1 et les 7 autres boules sont placées sans restrictions. Il y a $7!$ façons de le faire.
    De même, il y a $7!$ façons dans le cercle B et $7!$ façons dans le cercle C.
    Donc $t + w + y + z = u + w + x + z = v + x + y + z = 7!$.
    La partie commune aux cercles A et B représente les façons de placer les boules lorsque la boule 1 est dans la boite 1, la boule 2 est dans la boite 2 et les 6 autres boules sont placées sans restrictions. Il y a $6!$ façons de le faire.
    De même, il y a $6!$ façons dans l'intersection des cercles A et C, et $6!$ façons dans l'intersection des cercles B et C.
    Donc $w + z = y + z = x + z = 6!$.
    L'intersection des trois cercles représente les façons de placer les boules lorsque la boule 1 est dans la boite 1, la boule 2 est dans la boite 2, la boule 3 est dans la boite 3 et les 5 autres boules sont placées sans restrictions. Il y a $5!$ façons de le faire.
    Donc $z = 5!$.
    Puisque $z = 5!$, alors $w = x = y = 6! - 5!$.
    De plus, $t = u = v$, d'où $t = 7! - 2(6! - 5!) - 5!$, ou $t = 7! - 2(6!) + 5!$.
    Donc :

$$\begin{aligned} s &= 8! - (t + u + v + w + x + y + z) \\ &= 8! - 3(7! - 2(6!) + 5!) - 3(6! - 5!) - 5! \\ &= 8! - 3(7!) + 6(6!) - 3(5!) - 3(6!) + 3(5!) - 5! \\ &= 8! - 3(7!) + 3(6!) - 5! \end{aligned}$$

    Or $5! = 5(4)(3)(2)(1) = 120$. Donc $6! = 6(5!) = 6(120) = 720$, $7! = 7(6!) = 7(720) = 5040$ et $8! = 8(7!) = 8(5040) = 40\,320$.

Donc $s = 40\,320 - 3(5040) + 3(720) - 120$, ou $s = 27\,240$.
Il y a donc 27 240 façons de placer les boules selon les restrictions données.

Voici une autre façon de calculer la valeur de s en simplifiant de façon algébrique :

$$\begin{aligned} s &= 8! - (t+u+v+w+x+y+z) \\ &= 8! - (t+w+y+z) - (u+w+x+z) - (v+x+y+z) + w+x+y+2z \\ &= 8! - (t+w+y+z) - (u+w+x+z) - (v+x+y+z) + (w+z) + (x+z) + (y+z) - z \\ &= 8! - 7! - 7! - 7! + 6! + 6! + 6! - 5! \\ &= 8! - 3(7!) + 3(6!) - 5! \end{aligned}$$

Cette expression donne la même valeur, 27 240.

Réponse : (A)

25. On traite d'abord des conditions données au sujet de la longueur et de la pente de PQ. On simplifiera ensuite l'expresssion $r+s+t+u=27$. On utilisera ensuite le fait que les points P et Q sont situés sur la parabole donnée.

Puisque la pente de PQ est positive, alors un des points est situé « à la droite » de l'autre point et « plus haut » que l'autre point.
On peut supposer que Q est situé « à la droite » de P et « plus haut » que P.
On a donc $u > s$ et $t > r$.
Puisque PQ a une pente de $\frac{12}{5}$, alors $\dfrac{u-s}{t-r} = \dfrac{12}{5}$. Il existe donc un nombre réel k ($k > 0$) tel que $u - s = 12k$ et $t - r = 5k$.
Puisque $PQ = 13$, alors $(u-s)^2 + (t-r)^2 = 13^2$, ou $(12k)^2 + (5k)^2 = 169$.
Donc $144k^2 + 25k^2 = 169$, d'où $169k^2 = 169$, ou $k^2 = 1$. Puisque $k > 0$, alors $k = 1$.
Donc $u - s = 12$ (ou $u = s + 12$) et $t - r = 5$ (ou $t = r + 5$).
P et Q ont donc pour coordonnées respectives (r, s) et $(r+5, s+12)$.
(On a donc éliminé deux inconnues du problème.)

Il faudra tôt ou tard utiliser l'équation $r+s+t+u=27$.
Puisque $t = r+5$ et $u = s+12$, l'équation devient $r+s+r+5+s+12 = 27$, ou $2r+2s = 10$, ou $r+s=5$.
On utilisera cette forme simplifiée un peu plus loin.

Puisque $P(r,s)$ et $Q(r+5, s+12)$ sont situés sur la parabole d'équation $y = x^2 - \frac{1}{5}mx + \frac{1}{5}n$, alors :

$$\begin{aligned} s &= r^2 - \tfrac{1}{5}mr + \tfrac{1}{5}n \\ s+12 &= (r+5)^2 - \tfrac{1}{5}m(r+5) + \tfrac{1}{5}n \end{aligned}$$

On traite m et n comme des constantes connues, tandis que l'on considère r et s comme des inconnues dont on cherche les valeurs.
On veut déterminer le nombre de couples (m,n) d'entiers strictement positifs ($n \le 1000$) pour lesquels une solution (r,s) du système d'équation satisfait à la condition $r+s=5$.
On résout le système d'équations.
On développe le membre de droite de la deuxième équation :

$$s + 12 = r^2 + 10r + 25 - \tfrac{1}{5}mr - m + \tfrac{1}{5}n$$

On soustrait la première équation, membre par membre, pour obtenir $12 = 10r + 25 - m$, d'où $r = \frac{1}{10}(m-13)$.

On reporte $r = \frac{1}{10}(m-13)$ dans la première équation pour obtenir :

$$\begin{aligned} s &= \left(\tfrac{1}{10}(m-13)\right)^2 - \tfrac{1}{5}m\left(\tfrac{1}{10}(m-13)\right) + \tfrac{1}{5}n \\ &= \tfrac{1}{100}(m^2-26m+169) - \tfrac{1}{50}(m^2-13m) + \tfrac{1}{5}n \\ &= \tfrac{1}{100}(m^2-26m+169-2(m^2-13m)+20n) \\ &= \tfrac{1}{100}(-m^2+169+20n) \end{aligned}$$

On remarque que chaque couple (m, n) donne une solution unique (r, s).

On détermine maintenant le nombre de couples (m, n) d'entiers strictement positifs ($n \leq 1000$) pour lesquels $r + s = 5$ ($r = \frac{1}{10}(m-13)$ et $s = \frac{1}{100}(-m^2+169+20n)$).

On reporte $r = \frac{1}{10}(m-13)$ et $s = \frac{1}{100}(-m^2+169+20n)$) dans l'équation $r+s = 5$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} r+s &= 5 \\ \tfrac{1}{10}(m-13) + \tfrac{1}{100}(-m^2+169+20n) &= 5 \\ 10m - 130 - m^2 + 169 + 20n &= 500 \\ 20n &= m^2 - 10m + 461 \\ 20n &= (m-5)^2 + 436 \qquad \text{(On a complété le carré)} \end{aligned}$$

Il reste donc à déterminer le nombre de couples (m, n) d'entiers strictement positifs ($n \leq 1000$) qui vérifient l'équation $20n = (m-5)^2 + 436$.
Puisque $20n$ et 436 sont tous deux des entiers pairs, alors $(m-5)^2$ est un entier pair. Donc, $m-5$ est un entier pair, ce qui indique que m est impair. (Si $m-5$ était impair, alors $(m-5)^2$ serait impair.)
Posons $m = 2M - 1$, M étant un entier strictement positif quelconque.
On reporte $m = 2M-1$ dans l'équation $20n = (m-5)^2+436$ pour obtenir $20n = (2M-6)^2+436$, ou $20n = 4(M-3)^2 + 436$, ou $5n = (M-3)^2 + 109$.
On veut donc déterminer le nombre de couples (M, n) d'entiers strictement positifs ($n \leq 1000$) qui vérifient l'équation $5n = (M-3)^2 + 109$.
Cela équivaut à déterminer le nombre de valeurs entières strictement positives de M pour lesquelles le membre de droite est un multiple de 5 inférieur ou égal à 5000, car chaque telle valeur de M donnera une valeur entière strictement positive de n inférieure ou égale à 1000.
Lorsque $M = 1$, le membre de droite est égal à 113, ce qui n'est pas un multiple de 5.
Lorsque $M = 2$, le membre de droite est égal à 110, ce qui est un multiple de 5. (On obtient $n = 22$.)
Lorsque $M \geq 3$, on considère le chiffre des unités de $M-3$, de $(M-3)^2$ et de $(M-3)^2+109$:

$M-3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(M-3)^2$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$(M-3)^2+109$	9	0	3	8	5	4	5	8	3	0

Toute valeur entière strictement positive de M pour laquelle $M-3$ a un chiffre des unités égal à 1, 4, 6, ou 9 produit un membre de droite qui est divisible par 5. En effet, dans chacun de ces cas, l'expression $(M-3)^2+109$ a un chiffre des unités égal à 0 ou à 5 et elle est donc divisible par 5.
On a $(M-3)^2 + 109 \leq 5000$ lorsque $(M-3)^2 \leq 4891$.
Puisque $\sqrt{4891} \approx 69{,}94$ et que $M-3$ est un entier strictement positif, alors $M-3 \leq 69$.
Les valeurs de M que nous cherchons sont $M = 2$ et chaque entier strictement positif M ($0 \leq M-3 \leq 69$) pour lequel $M-3$ a un chiffre des unités égal à 1, 4, 6 ou 9.

Il y a 28 entiers M dans cette dernière liste (quatre chacun lorsque $M - 3$ est dans l'intervalle de 0 à 9, de 10 à 19, de 20 à 29, de 30 à 39, de 40 à 49, de 50 à 59 et de 60 à 69). En tout, il y a donc 29 valeurs de M.

Il y a donc 29 couples (m, n) qui vérifient la condition donnée.

Réponse : (D)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2013

(11^{e} année – Secondaire V)

le jeudi 21 février 2013
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

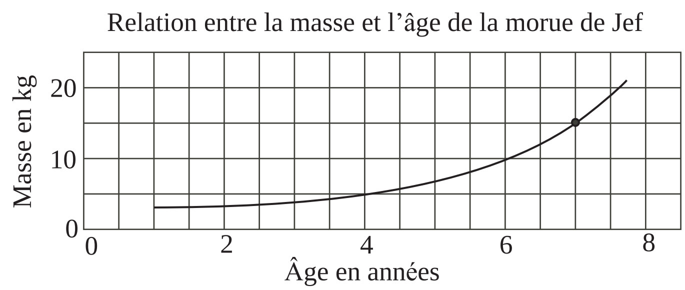
le vendredi 22 février 2013
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $\dfrac{10^2 + 6^2}{2} = \dfrac{100 + 36}{2} = \dfrac{136}{2} = 68$

Réponse : (D)

2. Sur l'axe vertical, une masse de 15 kg est à mi-chemin entre 10 kg et 20 kg.
La courbe atteint le niveau de 15 kg à un point situé à mi-chemin entre 6 et 8 sur l'axe horizontal.



Donc, la morue a 7 ans lorsqu'elle a une masse de 15 kg.

Réponse : (B)

3. Chaque angle intérieur d'un carré mesure 90°. Donc $\angle SPQ = 90°$.
Chaque angle intérieur d'un triangle équilatéral mesure 60°. Donc $\angle TPQ = 60°$.
La diagonale PR du carré $PQRS$ est la bissectrice de l'angle SPQ. Donc $\angle SPR = \angle RPQ = 45°$.
Donc $\angle TPR = \angle TPQ + \angle QPR$, d'où $\angle TPR = 60° + 45°$, ou $\angle TPR = 105°$.

Réponse : (B)

4. Puisque les coches indiquent que le cylindre est divisé en quatre parties de même volume, on voit que le niveau de lait est légèrement inférieur à $\frac{3}{4}$ de la hauteur, c'est-à-dire à $\frac{3}{4}$ du cylindre plein.
Or, $\frac{3}{4}$ du volume du cylindre est égal à $\frac{3}{4} \times 50$ L, ou 37,5 L.
Le choix de réponse qui est légèrement inférieur à 37,5 L est 36 L, soit le choix (D).

Réponse : (D)

5. Puisque $PQRS$ et $WXYZ$ sont des rectangles, alors $SR = PQ = 30$ et $WX = ZY = 15$.
Puisque $SX = 10$, alors $WS = WX - SX$, d'où $WS = 15 - 10$, ou $WS = 5$.
Donc $WR = WS + SR$, d'où $WR = 5 + 30$, ou $WR = 35$.

Réponse : (E)

6. Puisque $x = 11$ et $y = 8$, l'équation $2x + 3z = 5y$ devient $2 \times 11 + 3z = 5 \times 8$, d'où $3z = 40 - 22$, ou $3z = 18$. Donc $z = 6$.

Réponse : (A)

7. *Solution 1*
Puisque $(x+a)(x+8) = x^2+bx+24$ pour toutes valeurs de x, alors $x^2+ax+8x+8a = x^2+bx+24$ pour toutes valeurs de x et donc $x^2 + (a + 8)x + 8a = x^2 + bx + 24$ pour toutes valeurs de x.
Puisque l'égalité est vraie pour toutes valeurs de x, les coefficients correspondants doivent être égaux dans les deux membres de l'équation. Donc, $a + 8 = b$ et $8a = 24$.
Puisque $8a = 24$, alors $a = 3$. On reporte $a = 3$ dans l'équation $a + 8 = b$ pour obtenir $b = 11$.
Donc $a + b = 3 + 11$, ou $a + b = 14$.

Solution 2
Puisque $(x + a)(x + 8) = x^2 + bx + 24$ pour toutes valeurs de x, alors l'égalité est vraie pour les valeurs particulières $x = 0$ et $x = 1$.
Lorsque $x = 0$, l'équation devient $(0 + a)(0 + 8) = 0 + 0 + 24$, d'où $8a = 24$, ou $a = 3$.

Lorsque $x = 1$, l'équation devient $(1+3)(1+8) = 1 + b + 24$, d'où $36 = b + 25$, ou $b = 11$.
Donc $a + b = 3 + 11$, ou $a + b = 14$.

Réponse : (D)

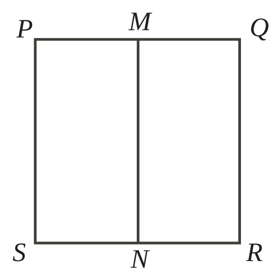
8. L'ensemble initial contient 11 nombres qui ont une somme de 66.
Si on enlève un nombre de l'ensemble, il restera 10 nombres dans l'ensemble.
Ces 10 nombres auront une moyenne de 6,1 s'ils ont une somme de $10 \times 6{,}1$, ou 61.
Puisque les 11 nombres de l'ensemble initial ont une somme de 66 et que les 10 nombres du nouvel ensemble ont une somme de 61, le nombre enlevé doit être 5, car $66 - 61 = 5$.

Réponse : (B)

9. Puisqu'il y a un rabais de 20 % sur le prix du vélo qui se vend normalement 320 \$, alors Sylviane épargne 20 % × 320 \$, ou 0,2 × 320 \$, ou 64 \$ dans l'achat du vélo.
Puisqu'il y a un rabais de 10 % sur le prix du casque qui se vend normalement 80 \$, alors Sylviane épargne 10 % × 80 \$, ou 0,1 × 80 \$, ou 8 \$ dans l'achat du casque.
Le coût total du vélo et du casque, au prix régulier, est de 320 \$ + 80 \$, ou 400 \$.
Le total des épargnes est de 64 \$ + 8 \$, ou 72 \$.
Or $\dfrac{72}{400} = 0{,}18 = 18\,\%$.
Sylviane obtient un rabais de 18 % sur l'achat total.

Réponse : (A)

10. Soit x la longueur des côtés du carré $PQRS$.
Donc $PQ = QR = RS = SP = x$.
Puisque M est le milieu de PQ, alors $PM = \frac{1}{2}x$.
Le périmètre du rectangle $PMNS$, en fonction de x, est égal à :



$$2(PM + PS) = 2(\tfrac{1}{2}x + x) = 3x$$

(On sait que $SN = PM = \frac{1}{2}x$, puisque N est le milieu de RS.)

De plus, $MN = PS = x$, puisque MN est parallèle à PS et qu'il joint deux segments parallèles.)
Puisque le rectangle $PMNS$ a un périmètre de 36, alors $3x = 36$, ou $x = 12$.
L'aire du carré $PQRS$ est égale à x^2, ou 144.

Réponse : (D)

11. Lundi, Ramya a lu $\frac{1}{5}$ de 300 pages, c'est-à-dire $\frac{1}{5} \times 300$ pages, ou 60 pages.
Après lundi, il lui restait $(300 - 60)$ pages, ou 240 pages à lire.
Mardi, Ramya a lu $\frac{4}{15}$ de ces 240 pages, c'est-à-dire $\frac{4}{15} \times 240$ pages, ou $\frac{960}{15}$ pages, ou 64 pages.
Lundi et mardi, elle a lu un total de $(60 + 64)$ pages, ou 124 pages.

Réponse : (A)

12. Il y a 10 nombres dans la liste. On remarque que :

$$(-1)^4 = 1^4 = 1 \qquad (-3)^4 = 3^4 = 81 \qquad (-5)^4 = 5^4 = 625$$

$$(-7)^4 = 7^4 = 2401 \qquad (-9)^4 = 9^4 = 6561$$

Donc, si $m = -3, -1, 1, 3$, alors $m^4 < 100$. Si $m = -9, -7, -5, 5, 7, 9$, alors $m^4 > 100$.
Il y a donc 6 nombres dans la liste dont la 4$^{\text{e}}$ puissance est supérieure à 100, c'est-à-dire 6 résultats favorables sur 10.
Donc, la probabilité pour que $m^4 > 100$ est de $\frac{6}{10}$, ou $\frac{3}{5}$.

Réponse : (E)

13. On remarque que $64 = 2^6$ et $512 = 2^9$.
On peut récrire l'équation $512^x = 64^{240}$ sous la forme $(2^9)^x = (2^6)^{240}$, ou $2^{9x} = 2^{6(240)}$.
Puisque les bases sont égales dans cette dernière équation, les exposants doivent être égaux.
Donc $9x = 6(240)$, ou $x = \frac{1440}{9}$, ou $x = 160$.

Réponse : (D)

14. Puisque 25 % de l'argent reçu provenait des parents et que 100 % − 25 % = 75 %, alors 75 % de l'argent provenait des enseignants et des élèves.
Puisque le rapport de la quantité d'argent provenant des enseignants à la quantité d'argent provenant des élèves était de 2 : 3, alors les élèves ont donné $\frac{3}{2+3}$, ou $\frac{3}{5}$ de ce 75 %.
Les élèves ont donc donné $\frac{3}{5} \times 75\,\%$, ou 45 % de tout l'argent reçu.
Donc, le rapport de la quantité d'argent provenant des parents à la quantité d'argent provenant des élèves était de 25 % : 45 %, ou 25 : 45, ou 5 : 9.

Réponse : (C)

15. Soit n le nombre de biscuits dans le bocal.
Soit r le nombre de raisins contenus dans chacun des $n-1$ petits biscuits identiques.
Il y a donc $r+1$ raisins dans le grand biscuit.
Si on enlevait un raisin du grand biscuit, il contiendrait r raisins et alors chacun des n biscuits aurait r raisins. Le nombre total de raisins serait alors égal à $100-1$, ou 99.
On aurait donc $nr = 99$.
(On aurait pu obtenir cette équation en constatant qu'il y a $n-1$ biscuits qui contiennent r raisins et 1 biscuit qui contient $r+1$ raisins. Puisqu'il y a 100 raisins en tout, alors $(n-1)r+(r+1) = 100$, d'où $nr - r + r + 1 = 100$, ou $nr = 99$.)
Puisque n et r sont des entiers positifs et qu'ils ont un produit de 99, les possibilités sont :

$$99 = 99 \times 1 = 33 \times 3 = 11 \times 9 = 9 \times 11 = 3 \times 33 = 1 \times 99$$

Puisque n peut varier de 5 à 10, on doit avoir $99 = 9 \times 11$. Donc $n = 9$ et $r = 11$.
Puisque les petits biscuits contiennent 11 raisins chacun et que le grand biscuit contient 1 raisin de plus, le grand biscuit contient 12 raisins.

Réponse : (E)

16. Soit c la longueur des côtés de chaque petit carreau.
On sait que chacun de ces carreaux a une diagonale de longueur 2. D'après le théorème de Pythagore, $c^2 + c^2 = 2^2$, ou $2c^2 = 4$, ou $c^2 = 2$. Donc $c = \sqrt{2}$, puisque $c > 0$.
Or, $PQ = 5c$ et $PS = 12c$. D'après le théorème de Pythagore, puisque $QS > 0$, on a :

$$QS = \sqrt{PQ^2 + PS^2} = \sqrt{(5c)^2 + (12c)^2} = \sqrt{25c^2 + 144c^2} = \sqrt{169c^2} = 13c$$

Puisque $QS = 13c$ et que $c = \sqrt{2}$, alors $QS = 13\sqrt{2}$, ou $QS \approx 18{,}38$.
Le choix de réponse le plus près est 18.

Réponse : (A)

17. *Solution 1*
Soit $n, n+1, n+2, n+3$ et $n+4$ les cinq entiers consécutifs représentés par p, q, r, s et t.
La somme des deux plus grands entiers est égale à $(n+3)+(n+4)$, ou $2n+7$. La somme de n'importe quels deux autres entiers est donc inférieure à $2n+7$.
La somme des deux plus petits entiers est égale à $n+(n+1)$, ou $2n+1$. La somme de n'importe quels deux autres entiers est donc supérieure à $2n+1$.

Donc, la plus grande différence possible entre les sommes de deux paires d'entiers est égale à $(2n+7)-(2n+1)$, ou 6.
Selon l'énoncé, $p+q=63$ et $s+t=57$, d'où $(p+q)-(s+t)=6$. Il s'ensuit que p et q sont les plus grands nombres de la liste et que s et t sont les deux plus petits nombres de la liste.
Donc $p+q=(n+3)+(n+4)=63$, d'où $2n+7=63$, ou $2n=56$, ou $n=28$.
Puisque r doit être l'entier du milieu, alors $r=n+2$, d'où $r=30$.

Solution 2
Soit $n, n+1, n+2, n+3$ et $n+4$ les cinq entiers consécutifs représentés par p, q, r, s et t.
La somme des cinq entiers est égale à $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)$, ou $5n+10$.
Selon l'énoncé, $p+q=63$ et $s+t=57$.
La somme des cinq entiers est donc égale à $p+q+r+s+t$, ou $63+r+57$, ou $120+r$.
On compare les deux expressions pour la somme des cinq entiers. On obtient $5n+10=120+r$, ou $r=5n-110$.
Or, cette équation peut s'écrire sous la forme $r=5(n-22)$, ce qui indique que r est un multiple de 5.
Selon les choix de réponse, on a donc $r=20$ ou $r=30$.
Si $r=20$, alors $20=5(n-22)$, d'où $n-22=4$, ou $n=26$. Dans ce cas, r n'est pas un entier de n à $n+4$. Donc, r ne peut pas être égal à 20.
Si $r=30$, alors $30=5(n-22)$, d'où $n-22=6$, ou $n=28$. Les cinq entiers sont donc $28, 29, 30, 31$ et 32. Si on pose $p=31$ et $q=32$ (ou $p=32$ et $q=31$) et $t=28$ et $s=29$ (ou $t=29$ et $s=28$), les conditions de l'énoncé sont vérifiées.
Donc $r=30$.

Réponse : (E)

18. Puisque p est un entier strictement positif, alors $p \geq 1$, d'où $0 < \dfrac{1}{p} \leq 1$.

Puisque n est un entier strictement positif, alors $n \geq 1$, d'où $n+\dfrac{1}{p} > 1$. Donc $0 < \dfrac{1}{n+\frac{1}{p}} < 1$.

Donc $m < m+\dfrac{1}{n+\frac{1}{p}} < m+1$. Puisque $m+\dfrac{1}{n+\frac{1}{p}} = \dfrac{17}{3}$, ou $m+\dfrac{1}{n+\frac{1}{p}} = 5\frac{2}{3}$, et que m est un entier, alors $m=5$.
L'équation $m+\dfrac{1}{n+\frac{1}{p}} = \dfrac{17}{3}$ devient donc $\dfrac{1}{n+\frac{1}{p}} = \dfrac{2}{3}$, ou $n+\dfrac{1}{p}=\dfrac{3}{2}$, ou $n+\dfrac{1}{p}=1\frac{1}{2}$.
Puisque $n < n+\dfrac{1}{p} \leq n+1$ et que n est un entier, alors $n=1$.
L'équation $n+\dfrac{1}{p}=\dfrac{3}{2}$ devient $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{2}$, d'où $p=2$.
Donc $n=1$.

Réponse : (C)

19. On récrit les nombres de la liste en factorisation première :

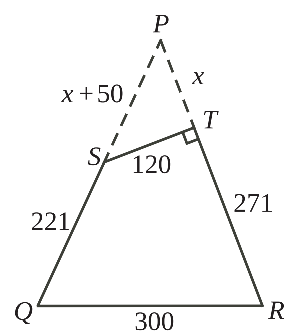
$$1, 2^1, 3^1, 2^2, 5^1, 2^1 3^1, 7^1, 2^3, 3^2$$

Un entier strictement positif supérieur à 1 est un carré parfait si et seulement si chacun de ses facteurs premiers parait un nombre pair de fois.

Puisque les facteurs 5 et 7 ne paraissent qu'une fois chacun dans cette liste de facteurs premiers, on ne peut pas choisir 5 ou 7 pour former un produit qui est un carré parfait.
Il reste sept entiers, soit $1, 2^1, 3^1, 2^2, 2^1 3^1, 2^3$ et 3^2, parmi lesquels on doit choisir six entiers.
Le produit des sept entiers est égal à $2^{1+2+1+3}3^{1+1+2}$, ou $2^7 3^4$.
Pour choisir les six entiers, on peut multiplier tous les sept entiers, puis diviser par l'entier que l'on ne choisira pas.
On veut donc diviser $2^7 3^4$ par un entier de la liste, de manière que la réponse ait un nombre pair de facteurs 2 et un nombre pair de facteurs 3, ce qui formera un carré parfait. Or, on remarque que le nombre $2^7 3^4$ a un nombre impair de facteurs 2 et un nombre pair de facteurs 3. Si on divise par 2^1 ou par 2^3, il restera un nombre pair de facteurs 2 et un nombre pair de facteurs 3. Ce sont les deux seuls nombres de la liste par lesquels on peut diviser pour obtenir ce résultat. (On aurait pu diviser le produit des sept entiers successivement par chacun des sept entiers pour vérifier si le quotient est un carré parfait.)
Donc, les deux ensembles de six nombres dont le produit est un carré parfait sont $1, 3^1, 2^2, 2^1 3^1, 2^3, 3^2$ (dont le produit est $2^6 3^4$) et $1, 2^1, 3^1, 2^2, 2^1 3^1, 3^2$ (dont le produit est $2^4 3^4$).
Donc $m^2 = 2^6 3^4$ et $n^2 = 2^4 3^4$, d'où $m = 2^3 3^2$ et $n = 2^2 3^2$, ou $m = 72$ et $n = 36$.
Donc $m + n = 72 + 36$, ou $m + n = 108$.

Réponse : (A)

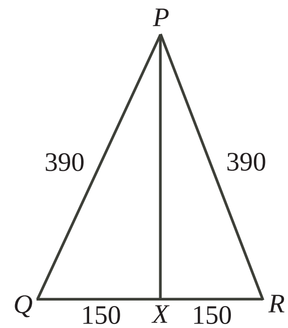
20. On calculera l'aire du quadrilatère $STRQ$ en soustrayant l'aire du triangle PTS de celle du triangle PQR.
Soit $PT = x$.
Donc $PR = PT + TR$, ou $PR = x + 271$.
Puisque $PQ = PR = x + 271$ et $SQ = 221$, alors $PS = PQ - SQ$, ou $PS = (x + 271) - 221$, ou $PS = x + 50$.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PTS :

$$\begin{aligned} PT^2 + TS^2 &= PS^2 \\ x^2 + 120^2 &= (x+50)^2 \\ x^2 + 14\,400 &= x^2 + 100x + 2500 \\ 11\,900 &= 100x \\ x &= 119 \end{aligned}$$

Dans le triangle PTS, on a donc $PT = x = 119$, $TS = 120$ et $PS = x + 50$, ou $PS = 169$.
Puisque le triangle PTS est rectangle en T, son aire est égale à $\frac{1}{2}(PT)(TS)$, ou $\frac{1}{2}(119)(120)$, ou 7140.
Dans le triangle PQR, on a $PR = PQ = x + 271$, d'où $PR = PQ = 390$.
Puisque le triangle PQR est isocèle, la médiane PX, de P au milieu X de QR, est perpendiculaire à QR.



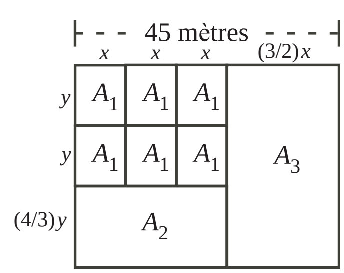
Puisque X est le milieu de QR et que $QR = 300$, alors $QX = \frac{1}{2}QR$, ou $QX = 150$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PXQ :

$$PX = \sqrt{PQ^2 - QX^2} = \sqrt{390^2 - 150^2} = \sqrt{21\,600} = 360$$

puisque $PX > 0$.
Dans le triangle PQR, PX est la hauteur qui correspond à la base QR. L'aire du triangle PQR est donc égale à $\frac{1}{2}(QR)(PX)$, ou $\frac{1}{2}(300)(360)$, ou $54\,000$.
L'aire du quadrilatère $STRQ$ est égale à la différence entre l'aire de ces triangles. Elle est donc égale à $54\,000 - 7140$, ou $46\,860$.

Réponse : (C)

21. Partout, les distances mesurées à l'horizontale seront appelées largeurs et celles mesurées à la verticale seront appelées longueurs.
Soit x m la largeur et y m la longueur de chaque enclos A_1.
Chacun de ces rectangles a donc une aire de xy m^2.
On exprime les dimensions des autres enclos en fonction de ces mêmes variables.
L'enclos A_2 a une largeur égale à $(x + x + x)$ m, ou $3x$ m.
Puisque l'aire de l'enclos A_2 est 4 fois l'aire d'un enclos A_1, son aire est égale à $4xy$ m^2.
La longueur de l'enclos A_2 est égale à son aire divisée par sa largeur. Elle est donc égale à $\dfrac{4xy}{3x}$ m, ou $\dfrac{4}{3}y$ m. (Elle est notée $(4/3)y$ dans la figure suivante.)
L'enclos A_3 a donc une longueur égale à $(y + y + \frac{4}{3}y)$ m, ou $\frac{10}{3}y$ m.
Puisque l'aire de l'enclos A_3 est 5 fois l'aire d'un enclos A_1, soit $5xy$ m^2, alors la largeur de l'enclos A_3 est égale à $\dfrac{5xy}{\frac{10}{3}y}$ m, ou $\dfrac{3}{2}x$ m. (Elle est notée $(3/2)x$ dans la figure.)



Le champ au complet a une largeur de 45 m. D'après la clôture horizontale au haut de la figure, elle est aussi égale à $(x + x + x + \frac{3}{2}x)$ m, ou $\frac{9}{2}x$ m.
On a donc $\frac{9}{2}x = 45$, d'où $x = \frac{2}{9}(45)$, ou $x = 10$.
On exprime en fonction de x la longueur totale des clôtures qui paraissent à l'horizontale dans la figure. On procède de gauche à droite pour chaque rangée du haut jusqu'en bas :

$$(x + x + x + \tfrac{3}{2}x) + (x + x + x) + (x + x + x) + (x + x + x + \tfrac{3}{2}x) = 15x$$

On exprime en fonction de y la largeur totale des clôtures qui paraissent à la verticale dans la figure. On procède du haut vers le bas pour chaque colonne de gauche à droite :

$$(y+y+\tfrac{4}{3}y)+(y+y)+(y+y)+(y+y+\tfrac{4}{3}y)+(y+y+\tfrac{4}{3}y)=14y$$

Puisque les clôtures ont une longueur totale de 360 m, alors $15x+14y=360$.
Puisque $x=10$, alors $150+14y=360$, d'où $14y=210$, ou $y=15$.
L'aire de l'enclos A_1 est donc égale à xy m^2, ou $(10)(15)$ m^2, ou 150 m^2.
Parmi les choix de réponse, elle est plus près de (elle est égale à) 150,0.

Réponse : (B)

22. Soit n le nombre de courses dans lesquelles Magda et Sara étaient adversaires.
Puisque Sara a remporté exactement 2 courses, alors Magda a remporté $n-2$ courses.
Puisque Sara a gagné 2 fois et perdu $n-2$ fois, elle a remporté $2x+(n-2)y$ pièces d'or.
Donc $2x+(n-2)y=35$.
Puisque Magda a gagné $n-2$ fois et perdu 2 fois, elle a remporté $(n-2)x+2y$ pièces d'or.
Donc $(n-2)x+2y=42$.
On additionne les deux équations, membre par membre.
On obtient $(2x+(n-2)y)+((n-2)x+2y)=35+42$, ou $nx+ny=77$, ou $n(x+y)=77$.
Puisque n, x et y sont des entiers strictement positifs, alors n est un diviseur positif de 77. Donc, n est égal à 1, 7, 11 ou 77.
Si on soustrait les deux mêmes équations, membre par membre, on obtient :

$$((n-2)x+2y)-(2x+(n-2)y)=42-35$$

ou $(n-4)x+(4-n)y=7$, ou $(n-4)(x-y)=7$.
Puisque n, x et y sont des entiers strictement positifs et que $x>y$, alors $n-4$ est un diviseur positif de 7. Donc $n-4=1$ ou $n-4=7$, d'où $n=5$ ou $n=11$.
On compare les deux listes de possibilités pour conclure que n doit être égal à 11.
On a donc $11(x+y)=77$, d'où $x+y=7$.
On a aussi $7(x-y)=7$, d'où $x-y=1$.
On additionne ces deux dernières équations, membre par membre, pour obtenir

$$(x+y)+(x-y)=7+1$$

d'où $2x=8$, ou $x=4$.
(On vérifie : Puisque $x=4$, alors $y=3$. Puisque $n=11$, Magda a remporté 9 courses et Sara a remporté 2 courses. Donc, le nombre de pièces d'or que Magda doit recevoir est égal à $9(4)+2(3)$, ou 42, tandis que le nombre de pièces d'or que Sara doit recevoir est égal à $2(4)+9(3)$, ou 35, ce qui est en accord avec l'énoncé.)

Réponse : (E)

23. On considère le premier sac qui contient 2 billes rouges et 2 billes bleues pour un total de 4 billes. Il y a 4 choix possibles pour la première bille. Pour chacun de ces choix, il y a 3 choix possibles pour la deuxième bille. En tout, il y a 4×3 façons, ou 12 façons, de choisir deux billes l'une après l'autre.
Pour obtenir deux billes rouges : Il y a 2 choix possibles (l'une ou l'autre bille rouge) pour que la première bille soit rouge. Dans chaque cas, il y a 1 choix possible (l'autre bille rouge) pour que la deuxième bille soit rouge. En tout, il y a 2×1 façons, ou 2 façons, de choisir 2 billes rouges.
Pour obtenir deux billes bleues : Il y a 2 choix possibles (l'une ou l'autre bille bleue) pour que la première bille soit bleue. Dans chaque cas, il y a 1 choix possible (l'autre bille bleue) pour que la deuxième bille soit bleue. En tout, il y a 2×1 façons, ou 2 façons, de choisir 2 billes bleues.
Il y a donc $2 + 2$ façons, ou 4 façons de choisir deux billes de la même couleur.
La probabilité de choisir deux billes de la même couleur est égale au nombre de choix favorables, soit 4, divisé par le nombre de choix possibles, soit 12. Elle est donc égale à $\frac{4}{12}$, ou $\frac{1}{3}$.

On considère le deuxième sac qui contient 2 billes rouges, 2 billes bleues et v billes vertes, soit $v + 4$ billes en tout.
Il y a $v + 4$ choix possibles pour la première bille. Il reste alors $v + 3$ billes dans le sac. Pour chacun des $v + 4$ choix, il y a donc $v + 3$ choix possibles pour la deuxième bille. En tout, il y a $(v + 4)(v + 3)$ façons de choisir deux billes l'une après l'autre.
Comme pour le premier sac, il y a 2×1 façons, ou 2 façons de choisir 2 billes rouges.
Comme pour le premier sac, il y a 2×1 façons, ou 2 façons de choisir 2 billes bleues.
Pour deux billes vertes : Il y a v façons de choisir une première bille verte. Il reste alors $v - 1$ billes vertes dans le sac. Pour chacun de ces v choix, il y a $v - 1$ façons de choisir une deuxième bille verte. En tout, il y a donc $v(v - 1)$ façons de choisir deux billes vertes du sac.
Il y a donc $(2 + 2 + v(v - 1))$ façons, ou $(v^2 - v + 4)$ façons de choisir deux billes de la même couleur.
La probabilité de choisir deux billes de la même couleur est égale au nombre de choix favorables, soit $(v^2 - v + 4)$, divisé par le nombre de choix possibles, soit $(v + 4)(v + 3)$. Elle est donc égale à $\frac{v^2 - v + 4}{(v + 4)(v + 3)}$.

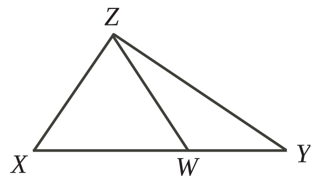
Puisque les deux probabilités sont égales et que $v \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= \frac{v^2 - v + 4}{(v + 4)(v + 3)} \\
(v + 4)(v + 3) &= 3v^2 - 3v + 12 \\
v^2 + 7v + 12 &= 3v^2 - 3v + 12 \\
10v &= 2v^2 \\
0 &= 2v^2 - 10v \\
0 &= 2v(v - 5)
\end{aligned}$$

Donc $v = 0$ ou $v = 5$. On rejette la première valeur, car v est strictement positif. Donc, $v = 5$

Réponse : (B)

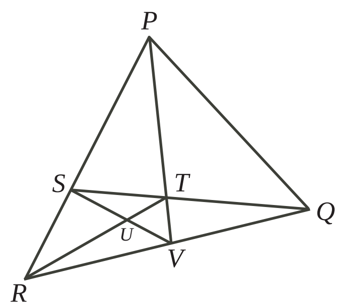
24. On utilise la notation $|\triangle XYZ|$ pour représenter l'aire du triangle XYZ.
On utilisera souvent la propriété suivante au sujet d'un triangle (qu'on appelle ici XYZ) qui est divisé par un segment de droite (ZW) :



$$\frac{|\triangle ZXW|}{|\triangle ZWY|} = \frac{XW}{WY}$$

Cette propriété sera nommée $(*)$. $(*)$ est vraie, puisque les triangles ZXW et ZWY ont une même hauteur par rapport à leur base respective XW et WY. La longueur h de cette base est la longueur de la perpendiculaire abaissée du sommet Z à la droite XY.
Donc $\dfrac{|\triangle ZXW|}{|\triangle ZWY|} = \dfrac{\frac{1}{2}(XW)h}{\frac{1}{2}(WY)h} = \dfrac{XW}{WY}$.

On retrace la figure de l'énoncé, en omettant les segments PU et QU :

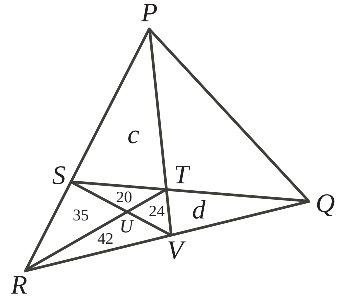


Soit $|\triangle SUT| = a$.
Puisque $|\triangle RST| = 55$, alors $|\triangle RSU| = |\triangle RST| - |\triangle SUT|$, ou $|\triangle RSU| = 55 - a$.
Puisque $|\triangle RSV| = 77$, alors $|\triangle RUV| = |\triangle RSV| - |\triangle RSU|$, ou $|\triangle RUV| = 77 - (55-a) = 22+a$.
Puisque $|\triangle RTV| = 66$, alors $|\triangle TUV| = |\triangle RTV| - |\triangle RUV|$, ou $|\triangle TUV| = 66 - (22+a)$, ou $|\triangle TUV| = 44 - a$.
D'après $(*)$, $\dfrac{|\triangle SUT|}{|\triangle RSU|} = \dfrac{TU}{UR} = \dfrac{|\triangle TUV|}{|\triangle RUV|}$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{55-a} &= \frac{44-a}{22+a} \\
a(22+a) &= (44-a)(55-a) \\
a^2 + 22a &= 2420 - 99a + a^2 \\
121a &= 2420 \\
a &= 20
\end{aligned}$$

On a donc $|\triangle SUT| = 20$, $|\triangle RSU| = 35$, $|\triangle RUV| = 42$ et $|\triangle TUV| = 24$.

Soit $|\triangle PST| = c$ et $|\triangle QTV| = d$. On a la situation suivante :



D'après $(*)$, $\dfrac{|\triangle PST|}{|\triangle RST|} = \dfrac{PS}{SR} = \dfrac{|\triangle PSV|}{|\triangle RSV|}$.

Donc $\dfrac{c}{55} = \dfrac{c+44}{77}$, d'où $77c = 55c + 55(44)$, ou $22c = 2420$, ou $c = 110$.

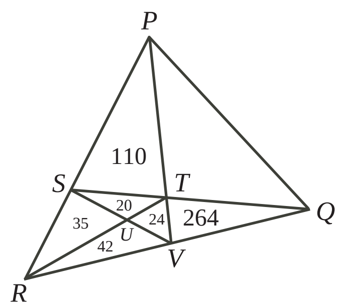
Donc $\dfrac{PS}{SR} = \dfrac{|\triangle PST|}{|\triangle RST|} = \dfrac{110}{55} = 2$. (Ce résultat sera utilisé plus loin.)

De même, d'après $(*)$, $\dfrac{|\triangle QTV|}{|\triangle RTV|} = \dfrac{QV}{VR} = \dfrac{|\triangle SVQ|}{|\triangle RSV|}$.

Donc $\dfrac{d}{66} = \dfrac{d+44}{77}$, d'où $77d = 66d + 66(44)$, ou $11d = 2904$, ou $d = 264$.

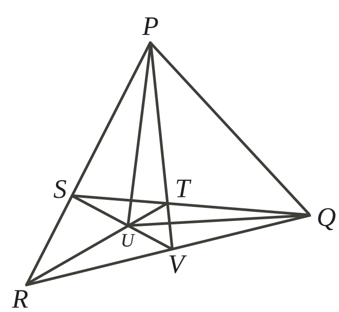
Donc $\dfrac{QV}{VR} = \dfrac{|\triangle QTV|}{|\triangle RTV|} = \dfrac{264}{66} = 4$. (Ce résultat sera utilisé plus loin.)

On a la donc situation suivante :



D'après $(*)$, $\dfrac{|\triangle PTQ|}{|\triangle PST|} = \dfrac{TQ}{ST} = \dfrac{|\triangle QTV|}{|\triangle STV|}$. Donc $\dfrac{|\triangle PTQ|}{110} = \dfrac{264}{44}$, d'où $|\triangle PTQ| = \dfrac{110(264)}{44}$, ou $|\triangle PTQ| = 660$.

Pour calculer l'aire du triangle PQU, on rajoute les segments PU et QU à la figure.



On utilise :

$$|\triangle PQU| = |\triangle PTQ| + |\triangle PST| + |\triangle QTV| + |\triangle STV| - |\triangle PSU| - |\triangle QVU|$$

D'après $(*)$ et les résultats $\dfrac{PS}{SR} = 2$ et $\dfrac{QV}{VR} = 4$ obtenus précédemment, on a :

$$|\triangle PSU| = \frac{PS}{SR}|\triangle RSU| = 2(35) = 70$$

et

$$|\triangle QVU| = \frac{QV}{VR}|\triangle VRU| = 4(42) = 168$$

Donc $|\triangle PQU| = 660 + 110 + 264 + 44 - 70 - 168$, ou $|\triangle PQU| = 840$.

Réponse : (C)

25. <u>1^{re} étape : On simplifie l'équation en utilisant la parité et les propriétés des puissances de 2</u>

On sait que si $2^x = 2^y$, x et y étant des nombres réels, alors $x = y$. En effet, si $2^x = 2^y$, alors $\dfrac{2^x}{2^y} = 1$, ou $2^{x-y} = 1$. Donc $x - y = 0$, ou $x = y$.

On étudie d'abord les équations de la forme $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$, a, b, c et d étant des entiers. (Cette équation est plus générale, mais plus simple, que l'équation donnée. Elle nous permettra d'en tirer des conclusions plus facilement.)
On peut supposer que $a \le b$ et $c \le d$ et $a \le c$. (On peut récrire l'équation pour que ce soit vrai.)
On factorise les deux membres de l'équation pour obtenir $2^a(1 + 2^{b-a}) = 2^c(1 + 2^{d-c})$. On divise ensuite chaque membre par 2^a pour obtenir $1 + 2^{b-a} = 2^{c-a}(1 + 2^{d-c})$.
On démontre, par contradiction, que $c = a$:

> Supposons, au contraire, que $c \ne a$. L'inégalité $c \ge a$ devient donc $c > a$.
> Puisque $c > a$, alors $c - a > 0$. Puisque $c - a$ est un entier, alors $c - a \ge 1$.
> Puisque le membre de droite de la dernière équation a un facteur égal à 2^{c-a}, le membre de droite est pair.
> Le membre de gauche doit aussi être pair. Donc, 2^{b-a} doit être un entier impair.
> Or, 2^{b-a} est un entier impair si et seulement il est égal à 1. On a donc $b - a = 0$, ou $b = a$.
> Le membre de gauche de l'équation est donc égal à 2, tandis que le membre de droite est supérieur à 2, car $2^{c-a} \ge 2$, d'où $1 + 2^{d-c} > 1$. On a donc une contradiction.
> La supposition est donc fausse et on a donc $c = a$.

Puisque $a = c$, l'équation $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$ devient $2^b = 2^d$, d'où $b = d$.
Étant donné une équation $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$, a, b, c et d étant des entiers, il y a trois possibilités : ou bien $a = b = c = d$, ou bien $a = c$ et $b = d$ (avec $a \ne b$), ou bien $a = d$ et $b = c$ (avec $a \ne b$).

On examine ces trois possibilités par rapport à l'équation de l'énoncé, tout en notant que m, n et k sont tous des entiers strictement positifs :

- <u>*1er cas :* $4m^2 = m^2 - n^2 + 4 = k + 4 = 3m^2 + n^2 + k$</u>
  Puisque $k + 4 = 3m^2 + n^2 + k$, alors $3m^2 + n^2 = 4$.
  Puisque m et n sont des entiers strictement positifs, alors $m^2 \ge 1$ et $n^2 \ge 1$.
  Puisque $3m^2 + n^2 = 4$, alors il faut que $m = n = 1$.
  L'égalité $4m^2 = k + 4$ implique donc que $4 = k + 4$, ou $k = 0$.
  On rejette cette possibilité, car on sait que k est strictement positif.
- <u>*2e cas :* $4m^2 = k + 4$ et $m^2 - n^2 + 4 = 3m^2 + n^2 + k$ et $4m^2 \ne m^2 - n^2 + 4$</u>
  D'après la deuxième égalité, on a $2m^2 + 2n^2 + k = 4$. Or, puisque $m, n, k > 0$, on a $2m^2 + 2n^2 + k \ge 5$, ce qui contredit l'égalité précédente.
  On rejette donc cette possibilité.
- <u>*3e cas :* $4m^2 = 3m^2 + n^2 + k$ et $m^2 - n^2 + 4 = k + 4$ et $4m^2 \ne m^2 - n^2 + 4$</u>
  On peut récrire la première égalité sous la forme $m^2 - n^2 = k$.
  On peut récrire la deuxième égalité sous la forme $m^2 - n^2 = k$.
  On peut récrire l'inégalité sous la forme $3m^2 + n^2 \ne 4$. D'après le 1er cas, le couple (m, n) ne peut pas être le couple $(1, 1)$, ce qui est cohérent avec les conditions $m^2 - n^2 = k$ et $k > 0$.

Après avoir examiné ces trois possibilités, on a réduit le problème donné au problème suivant : Déterminer le nombre de valeurs entières impaires de k, de 0 à 100, pour lesquelles l'équation $m^2 - n^2 = k$ admet exactement deux couples (m, n) d'entiers strictement positifs qui sont des solutions.

2^{e} étape : On relie les solutions de $m^2 - n^2 = k$ à des factorisations de k

On factorise le membre de gauche de l'équation pour obtenir $(m+n)(m-n) = k$.
Puisque m, n et k sont des entiers strictement positifs, alors $m+n > 0$ et $k > 0$, d'où $m-n > 0$, ou $m > n$.
Puisque k est impair et que les facteurs $m+n$ et $m-n$ sont des entiers, alors $m+n$ et $m-n$ sont tous deux impairs (si l'un d'eux était pair, le produit serait pair).
Puisque $n > 0$, alors $m+n > m-n$.
Supposons que (m,n) est une solution de l'équation $m^2 - n^2 = k$. Soit $m+n = a$ et $m-n = b$. Alors a et b sont des entiers impairs et $a > b$.
On a alors $ab = k$ et ab est donc une factorisation particulière de k.
Donc, une solution (m,n) de l'équation correspond à une factorisation particulière de k.
On considère maintenant la situation à rebours. On considère que $k = AB$, A et B étant des entiers positifs impairs et $A \geq B$.
Si on pose $m+n = A$ et $m-n = B$, on peut additionner ces équations, membre par membre, pour obtenir $2m = A+B$ (ou $m = \frac{1}{2}(A+B)$) et les soustraire, membre par membre, pour obtenir $2n = A-B$ (ou $n = \frac{1}{2}(A-B)$). On remarque que puisque $n > 0$, alors $A > B$.
Donc, chaque factorisation de k comme produit de deux entiers impairs A et B, $A > B$, donne une solution de l'équation $m^2 - n^2 = k$.
Puisque chaque solution donne une factorisation et que chaque factorisation donne une solution, on peut conclure que le nombre de solutions est égal au nombre de factorisations.
On a réduit le problème donné au problème suivant : Déterminer le nombre d'entièrs impairs k, de 0 à 100, qui admettent exactement deux factorisations comme produits de deux entiers impairs distincts a et b, $a > b$.

3^{e} étape : On compte les valeurs de k

Puisque k est impair, tous ses diviseurs premiers sont impairs.
Puisque $k < 100$, alors k ne peut admettre trois diviseurs premiers impairs ou plus, car le produit des trois plus petits nombres premiers impairs est égal à $3 \cdot 5 \cdot 7$, ou 105.
Donc, k admet au plus deux diviseurs premiers impairs.

Si $k = pq$, p et q étant deux nombres premiers impairs distincts et $p < q$, alors les diviseurs de k sont $1, p, q$ et pq. Dans ce cas, k admet exactement deux factorisations du type que l'on recherche, soit $1 \cdot pq$ et $p \cdot q$.
Puisque $k < 100$ et $p \geq 3$, alors $q < \frac{100}{3}$. Puisque q est un entier, alors $q \leq 33$.
Les nombres premiers impairs inférieurs à 33 sont $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ et 31.
Si $p \geq 11$, alors $pq > 11^2 = 121$, ce qui est supérieur à 100.
Donc, p doit être inférieur à 11. Donc, p peut seulement égaler 3, 5 ou 7.
Si $p = 3$, il y a 9 valeurs possibles de q, soit les nombres premiers de 5 à 31.
Si $p = 5$, il y a 5 valeurs possibles de q soit les nombres premiers de 7 à 19.
Si $p = 7$, il y a 2 valeurs possibles de q, soit 11 et 13.
Le nombre de valeurs de k, de cette forme, est donc égal à $9+5+2$, ou 16.

Si $k = p^r q^s$, r et s étant des entiers strictement positifs et r ou s (ou les deux) étant supérieur à 1, alors k admet trois factorisations. (Par exemple, si $r > 1$, alors $k = 1 \cdot p^r q^s = p \cdot p^{r-1} q^s = p^r \cdot q^s$, ces trois factorisations étant distinctes.) Cette forme de k n'apporte donc aucune solution.

Si $k = p$ ou $k = p^2$, p étant un nombre premier impair, alors k n'admet qu'une seule factorisation ($1 \cdot p$ ou $1 \cdot p^2$, selon le cas). Cette forme de k n'apporte donc aucune solution.

Si $k = p^3$, p étant un nombre premier impair, alors les diviseurs de k sont $1, p, p^2$ et p^3.
Donc, k admet exactement deux factorisations du type que l'on recherche, soit $1 \cdot p^3$ et $p \cdot p^2$.

Puisque $k < 100$, alors p doit être égal à 3 (car $5^3 > 100$).
Il y a donc 1 valeur de k de cette forme.

Si $k = p^4$, p étant un nombre premier impair, alors les diviseurs de k sont $1, p, p^2, p^3$ et p^4. Donc, k admet exactement deux factorisations du type que l'on recherche, soit $1 \cdot p^4$ et $p \cdot p^3$. On remarque que k admet une autre factorisation, mais elle est rejetée, car les deux facteurs sont égaux.
Puisque $k < 100$, alors p doit être égal à 3 (car $5^4 > 100$).
Il y a donc 1 valeur de k de cette forme.

Si k admet plus de 4 facteurs p, alors k admet au moins trois factorisations du type voulu. Cette forme de k n'apporte donc aucune solution. (Par exemple, si $k = p^n$ et $n > 4$, alors $k = 1 \cdot p^n = p \cdot p^{n-1} = p^2 \cdot p^{n-2}$ et chaque factorisation est distincte puisque $n - 2 > 2$.)

Ayant épuisé les cas possibles, on voit qu'il y a $16 + 1 + 1$ valeurs, ou 18 de k admissibles. Il y a donc 18 couples d'entiers strictement positifs qui sont des solutions de l'équation donnée.

Réponse : (D)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2012

(11e année – Secondaire V)

le jeudi 23 février 2012
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 24 février 2012
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

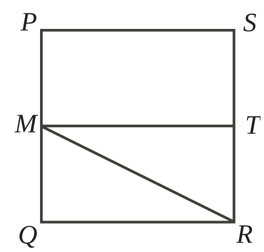
1. Puisque $\frac{60}{8} = 60 \div 8 = 7{,}5$, ce choix de réponse n'est pas un entier.
On remarque les autres choix sont des entiers : $\frac{60}{12} = 5$, $\frac{60}{5} = 12$, $\frac{60}{4} = 15$ ey $\frac{60}{3} = 20$
Réponse : (B)

2. On simplifie le membre de gauche pour obtenir $5 = 6 - x$, d'où $x = 1$.
Réponse : (C)

3. Puisque l'angle JFG est plat, alors $\angle HFG = 180° - \angle HFJ$, d'où $\angle HFG = 180° - 110°$, ou $\angle HFG = 70°$.
Puisque le triangle FGH est isocèle et que $HF = HG$, alors $\angle HGF = \angle HFG = 70°$.
Puisque les mesures d'angles du triangle FGH ont une somme de $180°$, alors $70° + 70° + x° = 180°$, d'où $140 + x = 180$, ou $x = 40$.
Réponse : (E)

4. On simplifie d'abord les parenthèses : $(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4}) = (\frac{4}{3})(\frac{5}{4}) = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$
Réponse : (A)

5. *Solution 1*
Au point M, on trace un segment MT parallèle à QR jusqu'au point T sur SR. Donc, $MTRQ$ est un rectangle. L'aire du triangle MQR est donc la moitié de celle du rectangle $MTRQ$.
Donc, l'aire du rectangle $MTRQ$ est égale à 2×100, ou 200.
Puisque M est le milieu de PQ et que $PQRS$ est un carré, alors T est le milieu de SR.
Donc, l'aire de $MTRQ$ est la moitié de celle de $PQRS$.
Donc, l'aire du carré $PQRS$ est égale à 2×200, ou 400.



Solution 2
Soit $2x$ la longueur d'un côté du carré $PQRS$.
Puisque M est le milieu de PQ, alors $MQ = \frac{1}{2}(2x)$, ou $MQ = x$.
Puisque $PQRS$ est un carré, alors le triangle MQR est rectangle en Q.
L'aire du triangle MQR est donc égale à $\frac{1}{2}(MQ)(QR)$, ou $\frac{1}{2}(x)(2x)$, ou x^2.
Puisque le triangle MQR a une aire de 100, alors $x^2 = 100$, d'où $x = 10$, car $x > 0$.
Puisque les côtés du carré $PQRS$ ont une longueur de $2x$ et que $2x = 20$, le carré $PQRS$ a une aire de 20^2, ou 400.
Réponse : (D)

6. Supposons que Jean a mangé x arachides le 4e soir.
Puisque chaque soir il a mangé 6 arachides de plus que le soir précédent, il a mangé $x - 6$ arachides le 3e soir, $x - 12$ arachides le 2e soir (car$(x - 6) - 6 = x - 12$) et $x - 18$ arachides le 1er soir (car $(x - 12) - 6 = x - 18$) .
Puisqu'il a mangé 120 arachides en tout, alors $x + (x - 6) + (x - 12) + (x - 18) = 120$, d'où $4x - 36 = 120$, ou $4x = 156$, ou $x = 39$.
Donc, Jean a mangé 39 arachides le 4e soir.
Réponse : (B)

7. Soit x la longueur de chaque côté des carrés identiques. Donc $PS = QR = x$ et $PQ = SR = 5x$.
Puisque le rectangle $PQRS$ a un périmètre de 48, alors $5x + x + 5x + x = 48$, d'où $12x = 48$, ou $x = 4$.
Donc $PS = QR = 4$ et $PQ = SR = 5 \cdot 4 = 20$.
Le rectangle $PQRS$ a donc une aire de $20 \cdot 4$, ou 80.
Réponse : (C)

8. Puisque $v = 3x$ et $x = 2$, alors $v = 3 \cdot 2$, ou $v = 6$.
Donc : $(2v - 5) - (2x - 5) = (2 \cdot 6 - 5) - (2 \cdot 2 - 5) = 7 - (-1) = 8$

Réponse : (B)

9. Soit s cm la taille initiale de Sylvie.
Puisque Sylvie a gandi de 20 %, sa taille actuelle est de 1,2s cm.
Puisque Sylvie mesure maintenant 180 cm, alors $1{,}2s = 180$, d'où $s = \frac{180}{1{,}2}$, ou $s = 150$.
Donc, Sylvie a grandi de 30 cm (car $180 - 150 = 30$).
Puisque l'augmentation de la taille de Marie est la moitié de celle de Sylvie, alors sa taille a augmenté de $\frac{1}{2} \cdot 30$ cm, ou 15 cm.
Puisque Marie et Sylvie avaient la même taille au départ, soit 150 cm, la taille actuelle de Marie est de 165 cm (car $150 + 15 = 165$).

Réponse : (B)

10. Puisque $(2^a)(2^b) = 64$, alors selon une loi des exposants, on a $2^{a+b} = 64$.
Puisque $64 = 2^6$, alors en comparant à l'équation précédente, on a $a + b = 6$.
Donc, la moyenne de a et de b est égale à $\frac{1}{2}(a + b)$, ou $\frac{1}{2}(6)$, ou 3.

Réponse : (D)

11. Puisque N est divisible par 5 et par 11, il est divisible par 5×11, ou 55, car 5 et 11 n'admettent aucun diviseur commun supérieur à 1.
On cherche donc un multiple impair de 55 entre 400 et 600.
Pour le trouver, on peut utiliser un multiple connu de 55 dans cet intervalle, par exemple 550. Il s'agit d'un multiple pair.
On peut ensuite ajouter ou soustraire 55 de ce nombre et obtenir un autre multiple de 55.
Or $550 + 55 = 605$, ce qui donne un multiple impair à l'extérieur de l'intervalle.
On calcule $550 - 55 = 495$ et on obtient un multiple impair dans l'intervalle.
L'énoncé nous dit qu'il n'y a qu'un multiple impair de 55 dans l'intervalle. Donc $N = 495$.
La somme des chiffres de N est égale à $4 + 9 + 5$, ou 18.

Réponse : (E)

12. Puisque les triangles QUR et SUR sont équilatéraux, alors $\angle QUR = \angle SUR = 60°$.
Puisque $QU = PU = TU = SU$ et que $QP = PT = TS$, alors les triangles QUP, PUT et TUS sont isométriques.
Donc $\angle QUP = \angle PUT = \angle TUS$.
Les angles autour du point U forment un angle plein, c'est-à-dire de 360°.
Donc $\angle SUR + \angle QUR + \angle QUP + \angle PUT + \angle TUS = 360°$, d'où $60° + 60° + 3\angle TUS = 360°$, ou $3\angle TUS = 240°$, ou $\angle TUS = 80°$.
Puisque le triangle TUS est isocèle et que $TU = SU$, alors $\angle UST = \angle UTS$.
Puisque les mesures d'angles du triangle TUS ont une somme de 180°, alors
$\angle TUS + \angle UST + \angle UTS = 180°$.
Donc $80° + 2\angle UST = 180°$, d'où $2\angle UST = 100°$, ou $\angle UST = 50°$.

Réponse : (A)

13. La courtepointe est formée de 25 carrés identiques.
On voit que 4 des 25 carrés sont entièrement ombrés, 8 contiennent un triangle ombré qui couvre la moitié du carré et 4 contiennent deux petits triangles qui couvrent chacun un quart d'un carré.
Cela est égal à un nombre équivalent de carrés ombrés, soit $4 + 8 \times \frac{1}{2} + 4 \times 2 \times \frac{1}{4}$, ou 10.
Pour obtenir le pourcentage de la courtepointe qui est ombrée, on a $\frac{10}{25} = \frac{40}{100} = 40\,\%$.
Donc, 40 % de la courtepointe est ombrée.

Réponse : (B)

14. *Solution 1*
Puisque les deux termes ont un facteur commun, on peut écrire $(x-2)((x-4)+(x-6))=0$, d'où $(x-2)(2x-10)=0$.
Donc $x-2=0$ (d'où $x=2$) ou $2x-10=0$ (d'où $x=5$).
Les deux racines de l'équation sont donc 2 et 5. Elles ont un produit de 10.

Solution 2
On développe et on simplifie le membre de gauche :

$$\begin{aligned}(x-4)(x-2)+(x-2)(x-6) &= 0\\ (x^2-6x+8)+(x^2-8x+12) &= 0\\ 2x^2-14x+20 &= 0\end{aligned}$$

Les racines d'une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) ont un produit égal à $\dfrac{c}{a}$. Donc, les racines de l'équation $2x^2-14x+20=0$ ont un produit de $\dfrac{20}{2}$, ou 10.

Réponse : (C)

15. À cause de la façon dont les oranges sont empilées, chaque couche est un rectangle qui contient une orange de moins, dans chaque rangée et dans chaque colonne, que le rectangle de la couche en dessous.
La couche inférieure est un rectangle de 5 sur 7, pour un total de 35 oranges.
La couche suivante est un rectangle de 4 sur 6, pour un total de 24 oranges.
La couche suivante est un rectangle de 3 sur 5, pour un total de 15 oranges.
La couche suivante est un rectangle de 2 sur 4, pour un total de 8 oranges.
La couche suivante est un rectangle de 1 sur 3, pour un total de 3 oranges. Cette couche est la dernière couche, car elle est formée d'une seule rangée d'oranges.
Le nombre total d'oranges dans la pile est égal à $35+24+15+8+3$, ou 85.

Réponse : (D)

16. Puisqu'il y a 30 personnes dans la salle et que 60 % d'entre elles sont des hommes, le nombre d'hommes est égal à $\frac{6}{10}\times 30$, ou 18. Il y a donc 12 femmes dans la salle.
Puisqu'aucun homme n'entre dans la salle ou ne quitte la salle, ces 18 hommes représentent 40 % de toutes les personnes à la fin.
Donc, 9 hommes représentent 20 % de toutes les personnes à la fin. Le nombre total de personnes dans la salle à la fin est donc égal à 5×9, ou 45.
Puisqu'il y avait 30 personnes dans la salle au départ et que seules des femmes sont entrées, alors 15 femmes sont entrées.

Réponse : (E)

17. Puisque $3^{2011}=3^1\cdot 3^{2010}=3\cdot 3^{2010}$ et que $3^{2012}=3^2\cdot 3^{2010}=9\cdot 3^{2010}$, alors :

$$\frac{3^{2011}+3^{2011}}{3^{2010}+3^{2012}}=\frac{3\cdot 3^{2010}+3\cdot 3^{2010}}{3^{2010}+9\cdot 3^{2010}}=\frac{3^{2010}(3+3)}{3^{2010}(1+9)}=\frac{3+3}{1+9}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Réponse : (A)

18. Pour déterminer N, le plus petit entier positif dont les chiffres ont un produit fixe, il faut d'abord déterminer le nombre minimal de chiffres qui pourraient donner ce produit. En effet, moins il y a de chiffres, plus le nombre est petit.
On déterminera ensuite les chiffres qui ont un produit de 1728 et on les placera en ordre croissant pour former les chiffres de N. (Plus le premier chiffre d'un nombre formé de ces chiffres est petit, plus le nombre est petit. Ensuite, plus le deuxième chiffre est petit, plus le nombre est petit et ainsi de suite.)
On remarque que N ne peut avoir un chiffre 0, sinon le produit des chiffres serait égal à 0.
De plus, N ne peut avoir un chiffre 1, sinon on obtiendrait le même produit des chiffres si on enlevait le 1 et on aurait alors un nombre plus petit. Or, N est *le plus petit nombre* dont les chiffres ont un produit de 1728.

Puisque les chiffres de N ont un produit de 1728, on écrit 1728 en factorisation première pour faciliter la recherche des chiffres de N :

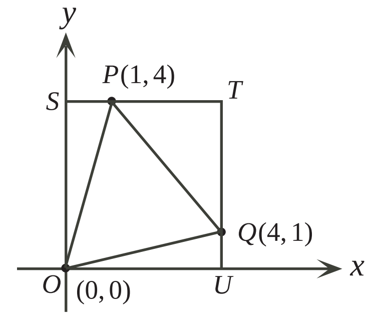
$$1728 = 9 \times 192 = 3^2 \times 3 \times 64 = 3^3 \times 2^6$$

On cherche d'abord le nombre minimal de chiffres qui pourraient donner un produit de 1728.
Il est impossible d'avoir trois chiffres qui ont un produit de 1728, car le plus grand produit possible de trois chiffres est $9 \times 9 \times 9$, ou 729.
Est-il possible d'avoir quatre chiffres qui ont un produit de 1728 ?
Pour que N soit le plus petit possible, il faut que son premier chiffre, le chiffre des milliers, soit aussi petit que possible.
On a vu que ce chiffre ne peut pas être un 1.
Ce chiffre ne peut être un 2, car $1728 \div 2 = 864$, et le produit des trois autres chiffres serait donc égal à 864. Or ce nombre est supérieur à 729, le produit maximal de trois chiffres.
Le chiffre des milliers peut-il être un 3 ? Puisque $1728 \div 3 = 576$, les trois autres chiffres devront avoir un produit de 576.
Si un des chiffres était un 6 (ou moins), alors puisque $576 \div 6 = 96$, les deux autres chiffres auraient un produit de 96 (ou plus), ce qui est impossible.
Donc si on a trois chiffres qui ont un produit de 576, chaque chiffre doit être un 8 ou un 9.
Puisque 576 est pair, il faut qu'au moins des chiffres soit un 8. Puisque $576 \div 8 = 72$, les deux autres chiffres sont 8 et 9.
Donc, il existe trois chiffres qui ont un produit de 576, et il existe quatre chiffres, dont le plus petit est 3, qui ont un produit de 1728.
Les chiffres de N sont donc 3, 8, 8 et 9. On obtient le plus petit nombre que l'on peut former avec ces chiffres en plaçant les chiffres en ordre croissant. Donc $N = 3889$.
Les chiffres de N ont donc une somme de $3 + 8 + 8 + 9$, ou 28.

Réponse : (A)

19. Soit $O(0, 0)$, $P(1, 4)$ et $Q(4, 1)$.
Il y a trois positions possibles pour le quatrième sommet R du parallélogramme. La première est l'image de Q par une réflexion dans l'axe OP, la deuxième est l'image de P par une réflexion dans l'axe OQ et la troisième est l'image de O par une réflexion dans l'axe PQ.
Dans chaque cas, le triangle OPQ forme la moitié du parallélogramme. Donc, l'aire du parallélogramme est le double de l'aire du triangle OPQ.
Il y a plusieurs façons de déterminer l'aire du triangle.

On choisit d'encadrer le triangle dans un carré formé par les deux axes et par les droites d'équations $x = 4$ et $y = 4$ (ce qu'on pourrait appeler « compléter le carré ! »).
Soit les points $S(0, 4)$, $T(4, 4)$ et $U(4, 0)$.
L'aire du triangle OPQ est égale à l'aire du carré $OSTU$ moins l'aire des triangles OSP, PTQ et QUO.
Le carré $OSTU$ a une aire de $4 \cdot 4$, ou 16, puisqu'il a des côtés de longueur 4.



Le triangle OSP est rectangle en S. De plus, $OS = 4$ et $SP = 1$.
Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(OS)(SP)$, ou $\frac{1}{2}(4)(1)$, ou 2.
Le triangle PTQ est rectangle en T. De plus, $PT = TQ = 3$.
Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(PT)(TQ)$, ou $\frac{1}{2}(3)(3)$, ou $\frac{9}{2}$.
Le triangle QUO est rectangle en U. De plus, $OU = 4$ et $UQ = 1$.
Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(OU)(UQ)$, ou $\frac{1}{2}(4)(1)$, ou 2.
Donc, l'aire du triangle OPQ est égale à $16 - 2 - \frac{9}{2} - 2$, ou $\frac{15}{2}$.
Donc, l'aire du parallélogramme est égale à $2 \cdot \frac{15}{2}$, ou 15.

RÉPONSE : (A)

20. Dans la première course, Karine a parcouru 100 m pendant que Sarah a couru 95 m.
Le rapport de leurs vitesses est donc de 100 : 95, ou 20 : 19.
Donc pendant que Sarah parcourt 1 m, Karine parcourt $\frac{20}{19}$ m, ou environ 1,053 m.
De l'autre point de vue, pendant que Karine parcourt 1 m, Sarah parcourt $\frac{19}{20}$ m, ou 0,95 m.
Dans la deuxième course, Karine doit parcourir 105 m et Sarah doit parcourir 100 m.
Si Sarah finit première, Karine n'aura pas parcouru 105 m dans le temps que Sarah a mis pour parcourir 100 m.
Or, pendant que Sarah parcourt 1 m, Karine parcourt 1,053 m. Donc pendant que Sarah parcourt 100 m, Karine parcourt 105,3 m. Donc, Karine a terminé avant Sarah.
Pendant que Karine a parcouru 105 m, Sarah a parcouru $105 \times \frac{19}{20}$ m, ou $\frac{1995}{20}$ m, ou $\frac{399}{4}$ m, ou $99\frac{3}{4}$ m.
Puisque $100 - 99\frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$, Sarah finit 0,25 m derrière Karine.
Donc, Karine a gagné et lorsqu'elle a traversé la ligne d'arrivée, Sarah était 0,25 m derrière.

RÉPONSE : (B)

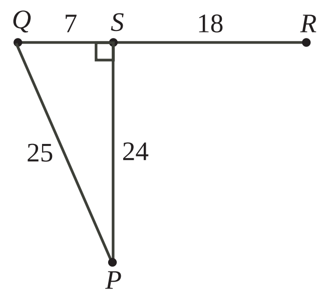
21. Puisque $x^2 = 8x + y$ et $y^2 = x + 8y$, alors $x^2 - y^2 = (8x + y) - (x + 8y) = 7x - 7y$.
On factorise chaque membre pour obtenir $(x + y)(x - y) = 7(x - y)$.
Puisque $x \neq y$, alors $x - y \neq 0$. On peut donc diviser chaque membre par $x - y$ pour obtenir $x + y = 7$.
Puisque $x^2 = 8x + y$ et $y^2 = x + 8y$, alors

$$x^2 + y^2 = (8x + y) + (x + 8y) = 9x + 9y = 9(x + y) = 9 \cdot 7 = 63$$

RÉPONSE : (C)

22. D'après le tableau, on voit que $QR = 25$, $QS = 7$ et $SR = 18$.
Puisque $QR = QS + SR$ et que QR est la plus grande des trois longueurs, alors S doit être situé sur le segment QR.
On a donc la situation suivante par rapport à ces trois villes :

Il reste à utiliser $PQ = 25$ et $PS = 24$.
On remarque que $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$. Donc $QS^2 + PS^2 = PQ^2$.
Puisque la relation de Pythagore est satisfaite, les points P, S et Q forment un triangle rectangle en S.
On a donc la situation suivante :



(On aurait pu placer le point P au-dessus du segment QR.)
Puisque $\angle PSQ = 90^\circ$, alors $\angle PSR = 90^\circ$.
Donc $PR^2 = PS^2 + SR^2$, d'où $PR^2 = 24^2 + 18^2$, ou $PR^2 = 576 + 324$, ou $PR^2 = 900$.
Puisque $PR > 0$, alors $PR = \sqrt{900}$, ou $PR = 30$.
Donc, il y a une distance de 30 entre la ville P et la ville R.

Réponse : (A)

23. Au départ, le bol contenait 320 g de sucre blanc et 0 g de cassonade.
Le mélange Y contient $(320 - x)$ g de sucre blanc et x g de cassonade.
Le mélange Z (le mélange final) contient 320 g de sucre mélangé (sucre blanc et cassonade).
Puisque dans le mélange Z le rapport de la masse de sucre blanc à la masse de cassonade est de 49 : 15, alors la masse de sucre blanc dans le mélange Z est égale à $\frac{49}{49+15} \cdot 3204$, ou $\frac{49}{64} \cdot 320$, ou $49 \cdot 5$, ou 245 g et la masse de cassonade dans le mélange Z est égale à $(320 - 245)$ g, ou 75 g.
Pour déterminer la valeur de x (et de là, celles de b et de c), il faut déterminer la masse de chaque sorte de sucre dans le mélange Z en fonction de x.
Or, dans le mélange Y, il y a $(320 - x)$ g de sucre blanc et x g de cassonade et le mélange est uniforme.
Donc, dans chaque gramme du mélange Y, il y a $\dfrac{320 - x}{320}$ g de sucre blanc et $\dfrac{x}{320}$ g de cassonade.
Pour former le mélange Z, on enlève x g de mélange Y.
La quantié de mélange Y qui est enlevée contient $x \cdot \dfrac{x}{320}$ g de cassonade, ou $\dfrac{x^2}{320}$ g de cassonade.
On forme le mélange Z en enlevant x g de mélange Y (qui contient $\dfrac{x^2}{320}$ g de cassonade) et en ajoutant x g de cassonade.
Donc la masse de cassonade, en g, dans le mélange Z est égale à $x - \dfrac{x^2}{320} + x$.
Puisque le mélange Z contient 75 g de cassonade, alors :

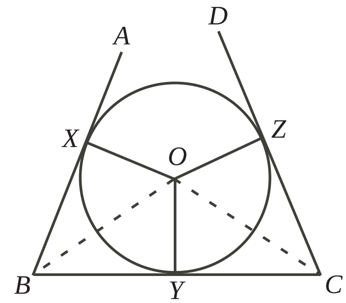
$$\begin{aligned} 2x - \frac{x^2}{320} &= 75 \\ 0 &= x^2 - 2(320)x + 75(320) \\ 0 &= x^2 - 640x + 24000 \\ 0 &= (x - 40)(x - 600) \end{aligned}$$

Donc $x = 40$ ou $x = 600$.
Puisqu'il n'y a jamais plus de 320 g de sucre dans le bol, la deuxième racine est rejetée.

Donc $x = 40$.
Donc, le mélange Y contient 40 g de cassonade et 280 g de sucre blanc (car $320 - 40 = 280$). Le rapport de ces masses est de 280 : 40. Le rapport irréductible est de 7 : 1. Donc $b = 7$ et $c = 1$.
Donc $x + b + c$ est égal à $40 + 7 + 1$, ou 48.

Réponse : (A)

24. On utilise le résultat bien connu que si un cercle de centre O et de rayon r est tangent aux segments AB, BC et CD aux points respectifs X, Y et Z, alors $\angle OBX = \angle OBY = \frac{1}{2}(\angle ABC)$ et $\angle OCY = \angle OCZ = \frac{1}{2}(\angle BCD)$.

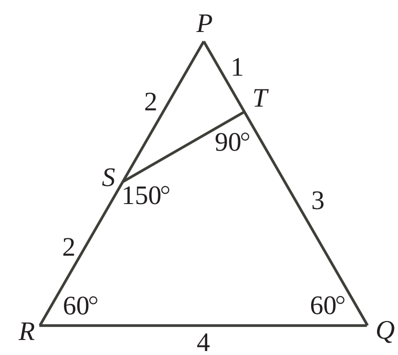


Soit $\angle ABC = \theta$ et $\angle BCD = \alpha$.
Puisque OY est perpendiculaire à BC, alors $\tan(\angle OBY) = \dfrac{OY}{BY}$ et $\tan(\angle OCY) = \dfrac{OY}{YC}$.

Donc $BY = \dfrac{OY}{\tan(\angle OBY)} = \dfrac{r}{\tan(\theta/2)}$ et $YC = \dfrac{OY}{\tan(\angle OCY)} = \dfrac{r}{\tan(\alpha/2)}$.
Puisque $BC = BY + YC$, alors :

$$\begin{aligned}
BC &= \frac{r}{\tan(\theta/2)} + \frac{r}{\tan(\alpha/2)} \\
BC &= r\left(\frac{1}{\tan(\theta/2)} + \frac{1}{\tan(\alpha/2)}\right) \\
BC &= r\left(\frac{\tan(\theta/2) + \tan(\alpha/2)}{\tan(\theta/2)\tan(\alpha/2)}\right) \\
r &= \frac{BC\tan(\theta/2)\tan(\alpha/2)}{\tan(\theta/2) + \tan(\alpha/2)}
\end{aligned}$$

On considère le quadrilatère $QRST$. On sait que $TQ = 3$. Puisque le triangle PQR est équilatéral, alors $QR = PQ$, d'où $QR = PT + TQ$, ou $QR = 4$.
Puisque $PR = QR = 4$ et que S est le milieu de PR, alors $RS = 2$.
Dans le triangle PST, on a $PT = 1$ et $PS = \frac{1}{2}PR$, ou $PS = 2$ et $\angle SPT = 60°$. Il s'agit donc d'un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $ST = \sqrt{3}$, $\angle PTS = 90°$ et $\angle PST = 30°$.
Donc $\angle STQ = 90°$ et $\angle RST = 150°$.
Donc dans le quadrilatère $QRST$, on a $QR = 4$, $RS = 2$, $ST = \sqrt{3}$, $TQ = 3$, $\angle TQR = 60°$, $\angle QRS = 60°$, $\angle RST = 150°$ et $\angle STQ = 90°$.



On détermine d'abord le rayon du cercle qui est tangent à trois côtés consécutifs du quadrilatère, sans prendre en considération l'effet du quatrième côté du quadrilatère sur le rayon. On recommence pour chaque ensemble de trois côtés consécutifs. On traitera de l'effet du quatrième côté sur le cercle à la fin.
On considère un cercle qui est tangent aux segments TQ, QR et RS.
D'après la formule ci-haut, , le rayon de ce cercle est égal à :

$$\frac{4\tan(60°/2)\tan(60°/2)}{\tan(60°/2) + \tan(60°/2)} = \frac{4\tan(30°)\tan(30°)}{\tan(30°) + \tan(30°)} \approx 1{,}1547$$

On considère un cercle qui est tangent aux segments QR, RS and ST.
D'après la formule ci-haut, , le rayon de ce cercle est égal à

$$\frac{2\tan(60^\circ/2)\tan(150^\circ/2)}{\tan(60^\circ/2)+\tan(150^\circ/2)} = \frac{2\tan(30^\circ)\tan(75^\circ)}{\tan(30^\circ)+\tan(75^\circ)} = 1$$

On considère un cercle qui est tangent aux segments RS, ST and TQ.
D'après la formule ci-haut, , le rayon de ce cercle est égal à

$$\frac{\sqrt{3}\tan(150^\circ/2)\tan(90^\circ/2)}{\tan(150^\circ/2)+\tan(90^\circ/2)} = \frac{\sqrt{3}\tan(75^\circ)\tan(45^\circ)}{\tan(75^\circ)+\tan(45^\circ)} \approx 1{,}3660$$

On considère un cercle qui est tangent aux segments ST, TQ and QR.
D'après la formule ci-haut, , le rayon de ce cercle est égal à

$$\frac{3\tan(90^\circ/2)\tan(60^\circ/2)}{\tan(90^\circ/2)+\tan(60^\circ/2)} = \frac{3\tan(45^\circ)\tan(30^\circ)}{\tan(45^\circ)+\tan(30^\circ)} \approx 1{,}0981$$

Il reste à déterminer le rayon du plus grand cercle qui peut être tracé à l'intérieur du quadrilatère $QRST$.
Le plus grand tel cercle doit toucher à au moins deux côtés consécutifs de $QRST$. En effet, si un cercle ne touchait à aucun côté ou à un seul côté de $QRST$, on pourrait le déplacer jusqu'à ce qu'il touche à deux côtés adjacents (comme dans un coin) et ensuite, on pourrait le faire grossir un peu. Si un cercle touchait à deux côtés opposés de $QRST$, on pourrait le déplacer jusqu'à ce qu'il touche à un côté adjacent à un des deux côtés, possiblement en perdant contact avec un des côtés opposés.
Dans les quatre cas suivants, considèrera un cercle qui touche à deux côtés adjacents du quadrilatère $QRST$. On peut agrandir un tel cercle, tout en le gardant tangent aux deux côtés, jusqu'à ce que le cercle touche à un troisième côté. Une fois que le cercle touche aux trois côtés, on ne peut plus l'agrandir, sinon une partie du cercle sortirait du quadrilatère. Donc, le plus grand cercle doit toucher à trois côtés du quadrilatère $QRST$.

On considère chaque paire de côtés adjacents (il y a quatre telles paires) et on détermine le plus grand cercle que l'on peut tracer à l'intérieur du quadrilatère et qui est tangent aux côtés adjacents.

- On considère un cercle tangent à ST et à TQ. On agrandit le cercle, qui reste toujours tangent à ST et à TQ, jusqu'à ce qu'il touche au côté QR ou au côté RS. Or d'après les calculs précédents, le cercle qui touche aussi à QR a un rayon d'environ 1,0981, tandis que celui qui touche aussi à RS a un rayon d'environ 1,3660. C'est donc le côté QR que le cercle touchera en premier. Dans ce cas, le plus grand cercle qui est complètement à l'intérieur du quadrilatère a un rayon d'environ 1,0981.
- On considère un cercle tangent à TQ et à QR. On agrandit le cercle, qui reste toujours tangent à TQ et à QR, jusqu'à ce qu'il touche au côté ST ou au côté RS. Or d'après les calculs précédents, le cercle qui touche aussi à ST a un rayon d'environ 1,0981, tandis que celui qui touche aussi à RS a un rayon d'environ 1,1547. C'est donc le côté ST que le cercle touchera en premier. Dans ce cas, le plus grand cercle qui est complètement à l'intérieur du quadrilatère a un rayon d'environ 1,0981.
- On considère un cercle tangent à QR et à RS. On agrandit le cercle, qui reste toujours tangent à QR et à RS, jusqu'à ce qu'il touche au côté ST ou au côté TQ. Or d'après les calculs précédents, le cercle qui touche aussi à ST a un rayon de 1, tandis que celui

qui touche aussi à TQ a un rayon d'environ 1,1547. C'est donc le côté ST que le cercle touchera en premier. Dans ce cas, le plus grand cercle qui est complètement à l'intérieur du quadrilatère a un rayon de 1.

- On considère un cercle tangent à RS et à ST. On agrandit le cercle, qui reste toujours tangent à RS et à ST, jusqu'à ce qu'il touche au côté QR ou au côté TQ. Or d'après les calculs précédents, le cercle qui touche aussi à QR a un rayon de 1, tandis que celui qui touche aussi à TQ a un rayon d'environ 1,3660. C'est donc le côté QR que le cercle touchera en premier. Dans ce cas, le plus grand cercle qui est complètement à l'intérieur du quadrilatère a un rayon de 1.

En comparant les quatre cas, on voit que le plus grand cercle que l'on pourrait obtenir a un rayon d'environ 1,0981, ce qui est plus près de 1,10.

Réponse : (B)

25. Soit N un entier strictement positif quelconque qui satisfait aux trois propriétés données.
Soit $S(N)$ la somme des chiffres du nombre N et soit $S(2N)$ la somme des chiffres du nombre $2N$.
Dans le tableau ci-dessous, on indique comment chaque chiffre de N contribue à $S(2N)$. Le contenu du tableau sera justifié à la toute fin.

Chiffre de N	$2\times$Chiffre	Contribution à $S(2N)$
3	6	6
4	8	8
5	10	$1+0=1$
6	12	$1+2=3$

Supposons que N est composé de w fois le chiffre 3, x fois le chiffre 4, y fois le chiffre 5 et z fois le chiffre 6. On sait que $w, x, y, z \geq 1$.

1re étape : Ce que l'on sait de $S(N)$ et de $S(2N)$

Puisque $S(N) = 900$, alors $3w + 4x + 5y + 6z = 900$.
Puisque chaque chiffre 3 de N contribue une valeur de 6 dans $S(2N)$, chaque chiffre 4 de N contribue une valeur de 8 dans $S(2N)$, chaque chiffre 5 de N contribue une valeur de 1 dans $S(2N)$, chaque chiffre 6 de N contribue une valeur de 3 dans $S(2N)$ et puisque $S(2N) = 900$, alors $6w + 8x + y + 3z = 900$.

2e étape : Quelles valeurs de N seront la plus grande possible ou la plus petite possible ?

La plus grande valeur possible de N sera l'entier N^+ qui satisfait aux propriétés données, qui contient le plus grand nombre possible de chiffres (c.-à-d. dont la valeur de $w + x + y + z$ est la plus grande possible), qui est formé des plus grands chiffres possibles, tenant compte de ce nombre fixe de chiffres, et dont les chiffres sont écrits en ordre décroissant de gauche à droite (car les plus grands chiffres correspondront à une plus grande valeur de position).
La plus petite valeur possible de N sera l'entier N^- qui satisfait aux propriétés données, qui contient le plus petit nombre possible de chiffres (c.-à-d. dont la valeur de $w + x + y + z$ est la plus petite possible), qui est formé des plus petits chiffres possibles, tenant compte de ce nombre fixe de chiffres, et dont les chiffres sont écrits en ordre croissant de gauche à droite.
Puisqu'on veut déterminer le nombre de chiffres du produit N^+N^-, on se préoccupera davantage des nombres de chiffres de N^+ et de N^- (c.-à-d. des valeurs maximale et minimale de $w + x + y + z$), de même que des premiers chiffres de chacun.

3e étape : Simplification d'équations

On sait que w, x, y et z sont des entiers strictement positifs qui vérifient les équations $3w + 4x + 5y + 6z = 900$ et $6w + 8x + y + 3z = 900$.
On multiplie chaque membre de la 1re équation par 2 pour obtenir $6w + 8x + 10y + 12z = 1800$.
On soustrait la 2e équation de cette dernière équation, membre par membre, pour obtenir $9y + 9z = 900$, ou $y + z = 100$.
Puisque $y + z = 100$, l'équation $3w + 4x + 5y + 6z = 900$ devient $3w + 4x + 5(y + z) + z = 900$, ou $3w + 4x + 500 + z = 900$, ou $3w + 4x + z = 400$.
Puisque $y + z = 100$, l'expression $w + x + y + z$ devient $w + x + 100$. Donc pour maximiser ou minimiser $w + x + y + z$, il faut maximiser ou minimiser $w + x$.

4e étape : Réflexion sur le but à atteindre

On cherche les valeurs maximale et minimale de l'expression $w + x + y + z$, sachant que w, x, y et z sont des entiers strictement positifs qui vérifient les équations $3w + 4x + 5y + 6z = 900$ et $6w + 8x + y + 3z = 900$.
D'après la 3e étape, ces équations sont vérifiées si et seulement si les équations $y + z = 100$ et $3w + 4x + z = 400$ le sont (puisqu'on peut procéder à partir d'une paire d'équations pour obtenir l'autre paire).
On cherche les valeurs maximale et minimale de l'expression $w+x+y+z$, sachant que $y+z = 100$ et $3w + 4x + z = 400$.
Puisque la valeur de l'expression $y + z$ est fixe, on cherche donc les valeurs maximale et minimale de l'expression $w + x$, sachant que $y + z = 100$ et $3w + 4x + z = 400$.

5e étape : Caractéristiques de N^+

On détermine d'abord la valeur maximale possible de $w + x$.
On récrit l'équation $3w + 4x + z = 400$ sous la forme $3(w + x) = 400 - x - z$.
Pour que $w + x$ prenne une valeur aussi grande que possible, il faut que le membre de droite prenne une valeur aussi grande que possible. Il faut donc que x et z prennent des valeurs aussi petites que possible.
Or $x \geq 1$ et $z \geq 1$. Donc $400 - x - z \leq 398$.
De plus, puisque le membre de gauche de l'équation $3(w + x) = 400 - x - z$ est divisible par 3, le membre de droite doit l'être aussi.
Or, le plus grand multiple de 3 qui est inférieur ou égal à 398 est le nombre 396.
On doit donc avoir $3(w + x) \leq 396$, d'où $w + x \leq 132$.
La valeur maximale possible de $w + x$ est donc 132 et puisque $x + y = 100$, la valeur maximale possible de $w + x + y + z$ est $132 + 100$, ou 232.
Pour atteindre cette valeur maximale, il faut que $400 - x - z = 396$ (c.-à-d. que $x + z = 4$). Les valeurs $w = 129$, $x = 3$, $y = 99$ et $z = 1$ donnent cette valeur maximale (et elles vérifient les équations $y + z = 100$ et $3w + 4x + z = 400$).
Donc le nombre N^+, qui est la plus grande valeur possible de N, est composé de 232 chiffres (tous des 3, des 4, des 5 ou des 6, mais avec au moins un de chaque sorte) placés en ordre décroissant.
Le nombre N^+ vérifie donc l'inéquation $6 \times 10^{231} < N^+ < 7 \times 10^{231}$.
(Comme on le verra, il ne sera pas nécessaire de déterminer les chiffres de N^+ de façon plus précise.)

6e étape : Caractéristiques de N^-

On détermine d'abord la valeur minimale possible de $w+x$.
On récrit l'équation $3w+4x+z=400$ sous la forme $4(w+x)=400+w-z$.
Pour que $w+x$ prenne une valeur aussi petite que possible, il faut que le membre de droite prenne une valeur aussi petite que possible. Il faut donc que w prenne une valeur aussi petite que possible et que z prenne une valeur aussi grande que possible.
Or $w \geq 1$, $y+z=100$ et $y \geq 1$. Donc $z \leq 99$.
Donc $400+w-z \geq 302$.
Puisque le membre de gauche de l'équation $4(w+x)=400+w-z$ est divisible par 4, le membre de droite doit l'être aussi.
Le plus petit multiple de 4 qui est supérieur ou égal à 302 est le nombre 304.
On doit donc avoir $4(w+x) \geq 304$, d'où $w+x \geq 76$.
La valeur minimale possible de $w+x$ est 76 et puisque $y+z=100$, la valeur minimale possible de $w+x+y+z$ est $76+100$, ou 176.
Pour atteindre cette valeur minimale, il faut que $400+w-z=304$ (c.-à-d. que $z-w=96$).
Les valeurs $w=3$, $x=73$, $y=1$ et $z=99$ donnent cette valeur minimale (et elles vérifient les équations $y+z=100$ et $3w+4x+z=400$).
Donc le nombre N^-, qui est la plus petite valeur possible de N, est composé de 176 chiffres (tous des 3, des 4, des 5 ou des 6, mais avec au moins un de chaque sorte) placés en ordre croissant.
Le nombre N^- vérifie donc l'inéquation $3 \times 10^{175} < N^- < 4 \times 10^{175}$, puisque cette valeur de N commence par un 3 et est composée de 176 chiffres.
(De même, il ne sera pas nécessaire de déterminer les chiffres de N^- de façon plus précise.)

7e étape : Le nombre de chiffres du nombre $N^- \cdot N^+$

Puisque $6 \times 10^{231} < N^+ < 7 \times 10^{231}$ et $3 \times 10^{175} < N^- < 4 \times 10^{175}$, alors :

$$18 \times 10^{406} = (3 \times 10^{175}) \cdot (6 \times 10^{231}) < N^- \cdot N^+ < (4 \times 10^{175}) \cdot (7 \times 10^{231}) = 28 \times 10^{406}$$

Donc, le nombre $N^- \cdot N^+$ est composé de 408 chiffres.

Justification du contenu du tableau

Supposons que N se termine par les chiffres $abcd$. Donc $N = \cdots dcba$.
On a donc $N = \cdots + 1000d + 100c + 10b + a$.
Donc $2N = \cdots + 1000(2d) + 100(2c) + 10(2b) + (2a)$. Or, les valeurs $2d$, $2c$, $2b$ et $2a$ peuvent être formées d'un ou deux chiffres.
Soit $u(2a)$ le chiffre des unités de $2a$ et soit $g(2a)$ le chiffre des dizaines de $2a$.
On sait que $u(2a)$ peut égaler 0, 2, 4, 6 ou 8, tandis que $g(2a)$ peut égaler 0 ou 1.
On définit $u(2b), g(2b), u(2c), g(2c), u(2d), g(2d)$ de la même façon.
On remarque que $2a = 10 \cdot t(2a) + u(2a)$, $2b = 10 \cdot t(2b) + u(2b)$, $2c = 10 \cdot t(2c) + u(2c)$ et $2d = 10 \cdot t(2d) + u(2d)$.
Donc :

$$\begin{aligned} 2N &= \cdots + 1000(10 \cdot t(2d) + u(2d)) + 100(10 \cdot t(2c) + u(2c)) \\ &\qquad + 10(10 \cdot t(2b) + u(2b)) + (10 \cdot t(2a) + u(2a)) \\ &= \cdots + 1000(u(2d) + t(2c)) + 100(u(2c) + t(2b)) + 10(u(2b) + t(2a)) + u(2a) \end{aligned}$$

Puisque $u(2a), u(2b), u(2c), u(2d) \leq 8$ et $t(2a), t(2b), t(2c), t(2d) \leq 1$, alors chacune des expressions $u(2d)+t(2c)$, $u(2c)+t(2b)$, $u(2b)+t(2a)$ et $u(2a)$ représente un seul chiffre. Elles représentent respectivement le chiffre des milliers, des centaines, des dizaines et des unités de $2N$.

La somme des chiffres de $2N$ est donc égale à :

$$\begin{aligned} u(2a) + (u(2b) + t(2a)) + (u(2c) + t(2b)) + (u(2d) + t(2c)) + \cdots &= \\ &(t(2a) + u(2a)) + (t(2b) + u(2b)) + (t(2c) + u(2c)) + \cdots \end{aligned}$$

Cet argument peut aussi être utilisé pour les autres chiffres de N.
Donc si m est un chiffre de N, alors la somme des chiffres des unités et des dizaines de $2m$ contribue à la somme des chiffres de $2N$.
Donc, les chiffres de N contribuent à la somme des chiffres de $2N$ comme dans le tableau ci-haut.

RÉPONSE : (A)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Concours Fermat 2011

(11e année – Secondaire V)

le jeudi 24 février 2011

Solutions

1. On a : $\dfrac{2+3\times 6}{23+6} = \dfrac{2+18}{29} = \dfrac{20}{29}$

Réponse : (D)

2. Si $y = 77$, alors : $\dfrac{7y+77}{77} = \dfrac{7y}{77} + \dfrac{77}{77} = \dfrac{7(77)}{77} + 1 = 7 + 1 = 8$

Réponse : (A)

3. Le rectangle a une aire de 192 et une base de 24. Puisque $192 \div 24 = 8$, il a une hauteur de 8. Il a donc un périmètre de $2 \times 24 + 2 \times 8$, ou 64.

Réponse : (A)

4. Puisque $\sqrt{n+9} = 25$, alors $n + 9 = 25^2$, ou $n + 9 = 625$.
Donc $n = 616$.

Réponse : (D)

5. Puisque le triangle PRS est équilatéral, ses angles mesurent tous $60°$. Donc $\angle RSP = 60°$.
Puisque $QS = QT$, le triangle QST est isocèle. Donc $\angle TSQ = \angle STQ = 40°$.
Puisque RST est un angle plat, alors $\angle RSP + \angle PSQ + \angle TSQ = 180°$.
Donc $60° + x° + 40° = 180°$, d'où $x = 180 - 60 - 40$, ou $x = 80$.

Réponse : (C)

6. Puisque la somme de trois entiers consécutifs est égale à 27, les entiers sont 8, 9 et 10. (On peut le démontrer de façon algébrique en nommant les entiers x, $x + 1$ et $x + 2$, puis en résolvant l'équation $x + (x + 1) + (x + 2) = 27$.)
Leur produit est égal à $8 \times 9 \times 10$, ou 720.

Réponse : (C)

7. Le nombre qui est à mi-chemin entre deux nombres est la moyenne de ces deux nombres.
Le nombre qui est à mi-chemin entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{12}$ est donc égal à :

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{12}{120} + \tfrac{10}{120}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{22}{120}) = \tfrac{11}{120}$$

Réponse : (D)

8. Le secteur qui représente le pourcentage d'élèves qui préfèrent les biscuits a un angle de $90°$. Le secteur représente donc $\frac{1}{4}$ du disque. Donc, 25 % des élèves préfèrent les biscuits.
Le pourcentage des élèves qui préfèrent les sandwichs est donc égal à $100\,\% - 30\,\% - 25\,\% - 35\,\%$, ou 10 %.
Puisqu'il y a 200 élèves en tout et que 10 % de 200 est égal à $\frac{1}{10}$ de 200, c'est-à-dire à 20, il y a 20 élèves qui préfèrent les sandwichs.

Réponse : (B)

9. L'ensemble S contient 25 multiples de 2, soit les entiers pairs.
Lorsqu'on a enlevé ces nombres, il ne reste plus dans l'ensemble S que les entiers impairs de 1 à 49. L'ensemble S ne contient plus que 25 nombres, car on en a enlevé 25.
On doit aussi enlever les multiples de 3 de l'ensemble S.
Puisque S ne contient plus que des entiers impairs, il faut enlever les multiples impairs de 3 situés entre 1 et 49, soit 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39 et 45. Il y en a 8.
Il reste 17 entiers dans l'ensemble S, car $25 - 8 = 17$.

Réponse : (D)

10. *Solution 1*
On a $QR = 2 + 9$. Puisque $PQRS$ est un carré, alors $PQ = QR = SR = PS = 11$.
La hauteur du rectangle ombré est égale à celle du rectangle supérieur gauche (6) moins celle du rectangle supérieur droit (2). Elle est donc égale à 4.
La largeur du rectangle ombré est égale à celle du rectangle supérieur droit (8) moins celle du rectangle inférieur droit $(11 - 10 = 1)$. Elle est donc égale à 7.
Le rectangle ombré a donc une aire de 4×7, ou 28.

Solution 2
On a $QR = 2 + 9$. Puisque $PQRS$ est un carré, alors $PQ = QR = SR = PS = 11$.
Le carré a donc une aire de 11^2, ou 121.
Puisque $PQ = 11$, le rectangle supérieur gauche a une base de $11 - 8$, ou 3. Puisqu'il a une hauteur de 6, son aire est égale à 3×6, ou 18.
Puisque $PS = 11$, le rectangle inférieur gauche a une hauteur de $11 - 6$, ou 5. Puisqu'il a une base de 10, son aire est égale à 5×10, ou 50.
Puisque $SR = 11$, le rectangle inférieur droit a une base de $11 - 10$, ou 1. Puisqu'il a une hauteur de 9, son aire est égale à 1×9, ou 9.
Le rectangle supérieur droit a une aire de 8×2, ou 16.
L'aire du rectangle ombré est égale à l'aire du carré $PQRS$ moins celle des quatre rectangles non ombrés. Elle est donc égale à $121 - 18 - 50 - 9 - 16$, ou 28.

Réponse : (B)

11. Après avoir acheté 7 boules de gomme, il est possible que Xavier ait reçu 2 boules rouges, 2 boules bleues, 1 boule noire et 2 boules vertes.
Il ne pourrait pas avoir plus de boules sans avoir au moins 3 boules d'une même couleur.
Si Xavier achète une boule de plus, ce sera une boule bleue, verte ou rouge.
Quel que soit le résultat, il aura au moins 3 boules d'une même couleur.
Pour résumer, si Xavier achète 7 boules de gomme, il n'est pas certain d'avoir 3 boules d'une même couleur, mais s'il achète 8 boules de gomme, il est certain d'avoir au moins 3 boules d'une même couleur.
Donc, pour s'assurer de recevoir 3 boules d'une même couleur, Xavier doit acheter un minimum de 8 boules.

Réponse : (E)

12. *Solution 1*
La parabole est symétrique par rapport à son axe de symétrie.
Puisqu'elle coupe l'axe des abscisses en $x = -1$ et en $x = 4$, l'axe de symétrie a pour équation $x = \frac{-1+4}{2}$, ou $x = \frac{3}{2}$.
Or, le point $(3, w)$ est à $\frac{3}{2}$ unité de l'axe de symétrie. Son ordonnée w est donc la même que celle du point qui est à $\frac{3}{2}$ unité à gauche de l'axe de symétrie, soit celle du point $(0, 8)$.
Donc $w = 8$.
(On aurait pu remarquer que $x = 3$ est 1 unité à la gauche de l'abscisse à l'origine de droite et que l'ordonnée du point $(3, w)$ est la même que celle du point dont l'abscisse est 1 unité à la droite de l'abscisse à l'origine de gauche.)

Solution 2

Puisque la parabole a pour abscisses à l'origine -1 et 4, elle a une équation de la forme $y = a(x + 1)(x - 4)$, a étant un nombre non nul quelconque.

Puisque le point $(0, 8)$ est situé sur la parabole, alors $8 = a(1)(-4)$, d'où $a = -2$.

La parabole a donc pour équation $y = -2(x + 1)(x - 4)$.

Puisque le point $(3, w)$ est situé sur la parabole, alors $w = -2(4)(-1)$, d'où $w = 8$.

Réponse : (E)

13. Puisque Xavier, Yolande et Zinedine ont un total de 50 \$ et que le rapport de la quantité d'argent de Xavier à la quantité totale de Yolande et de Zinedine est de 3 : 2, alors Xavier a $\frac{3}{5}$ du total, soit $\frac{3}{5} \times 50$ \$, ou 30 \$.

Donc, Yolande et Zinedine se partagent 50 \$ − 30 \$, ou 20 \$.

Or, on sait que Yolande a 4 \$ de plus que Zinedine. On doit donc séparer les 20 \$ en deux parties de manière que l'une soit 4 \$ de plus que l'autre. Donc, Yolande a 12 \$ et Zinedine a 8 \$.

Donc, Zinedine a 8 \$.

Réponse : (B)

14. La moyenne de deux multiples de 4 doit être paire. En effet, soit $4m$ et $4n$ les deux entiers pairs, m et n étant des entiers quelconques. Leur moyenne est donc égale à $\frac{1}{2}(4m + 4n)$, ce qui est égal à $2m + 2n$, ou $2(m + n)$. Or, cette dernière expression est 2 fois un entier, ce qui représente un nombre pair.

Chacune des autres expressions peut donner un entier impair à l'occasion. Par exemple :

(A) La moyenne de 2 et de 4 est égale à 3, ce qui n'est pas un entier pair.

(B) La moyenne de 3 et de 7 est égale à 5, ce qui n'est pas un entier pair.

(C) La moyenne de 1 et de 9 est égale à 5, ce qui n'est pas un entier pair.

(E) La moyenne de 2, 3 et 4 est égale à 3, ce qui n'est pas un entier pair.

La bonne réponse est donc (D).

Réponse : (D)

15. Puisque m et n sont des entiers consécutifs strictement positifs et que $n^2 - m^2 > 20$, alors n est supérieur à m. On pose donc $n = m + 1$.

Puisque $n^2 - m^2 > 20$, alors $(m + 1)^2 - m^2 > 20$, ou $m^2 + 2m + 1 - m^2 > 20$, ou $2m > 19$, ou $m > \frac{19}{2}$. Puisque m est un entier, alors $m \geq 10$.

On cherche la valeur minimale de $n^2 + m^2 = (m + 1)^2 + m^2 = 2m^2 + 2m + 1$ lorsque $m \geq 10$.

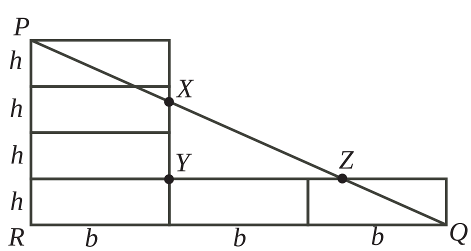
L'expression $2m^2 + 2m + 1$ admet une valeur minimale lorsque $m = 10$. (En effet, les deux premiers termes augmentent à mesure que m augmente.)

La valeur minimale est donc égale à $2(10^2) + 2(10) + 1$, ou 221.

Réponse : (E)

16. *Solution 1*

Soit R le coin inférieur gauche. On a donc :



Puisque la figure est formée de rectangles, alors XY est parallèle à PR. Donc $\angle YXZ = \angle RPQ$.

De plus, YZ est parallèle à RQ. Donc $\angle XZY = \angle PQR$.

Les triangles PRQ et XYZ sont donc semblables.
Donc $\dfrac{RQ}{PR} = \dfrac{YZ}{XY}$.
Or $YZ = 2XY$, $RQ = 3b$ et $PR = 4h$.
Donc $\dfrac{3b}{4h} = \dfrac{2XY}{XY}$, d'où $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{b}{h} = 2$, ou $\dfrac{h}{b} = \dfrac{3}{8}$.

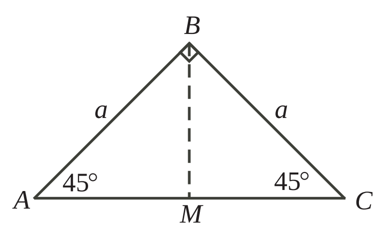
Solution 2
Somme dans la Solution 1, R représente le coin inférieur gauche.
Puisque $YZ = 2XY$, le segment XZ a une pente de $\dfrac{XY}{YZ} = \dfrac{XY}{2XY}$, ou $\dfrac{1}{2}$.
Puisque $PR = 4h$ et $RQ = 3b$, le segment PQ a une pente de $\dfrac{PR}{RQ}$, ou $\dfrac{4h}{3b}$.
Puisque le segment XZ fait partie du segment PQ, les deux segments ont la même pente. Donc $\dfrac{4h}{3b} = \dfrac{1}{2}$, d'où $\dfrac{h}{b} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4}$, ou $\dfrac{h}{b} = \dfrac{3}{8}$.

Réponse : (C)

17. Puisque $3^{2x} = 64$ et que $3^{2x} = (3^x)^2$, alors $(3^x)^2 = 64$, d'où $3^x = \pm 8$.
Puisque $3^x > 0$, alors $3^x = 8$.
Or $3^{-x} = \dfrac{1}{3^x}$. Donc $3^{-x} = \dfrac{1}{8}$.

Réponse : (E)

18. On parlera des étapes suivantes : Étape 0 (1 carré), Étape 1 (2 triangles), Étape 2 (4 triangles), Étape 3 (8 triangles), and Étape 4 (16 triangles).
On cherche la longueur du plus grand côté d'un des 16 triangles de l'Étape 4.
À l'Étape 1, on a deux triangles isocèles rectangles ayant des cathètes de longueur 4.
De façon générale, soit un triangle isocèle rectangle ABC avec des cathètes AB et CB de longueur a. Il s'agit d'un triangle remarquable 45°-45°-90° et son hypoténuse a donc une longueur de $\sqrt{2}a$.
On abaisse une perpendiculaire BM au point B.



Puisque le triangle ABC est isocèle, BM est une hauteur et une médiane, de même que la bissectrice de l'angle ABC. M est donc le milieu de AC.
Les triangles AMB et CMB sont donc des triangles remarquables 45°-45°-90° congruents. Le plus grand côté de chaque triangle a une longueur de a.
Or, le plus grand côté du triangle précédent a une longueur de $\sqrt{2}a$. Donc, la longueur du côté le plus long des nouveaux triangles est égale à la longueur du côté le plus long du triangle précédent divisé par $\sqrt{2}$.
On utilise ce résultat général à chaque étape du problème.
À l'Étape 1, le côté le plus long a une longueur de $4\sqrt{2}$.
Donc, à l'Étape 2, le côté le plus long a une longueur de $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, ou 4.
À l'Étape 3, le côté le plus long a une longueur de $\frac{4}{\sqrt{2}}$, ou $\frac{2\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, ou $2\sqrt{2}$.
À l'Étape 4, le côté le plus long a une longueur de $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, ou 2.

Réponse : (B)

19. Soit r le rayon du grand cercle.
On joint O à P. Donc $OP = OS = r$.
Puisque Q est le milieu de PR et que $PR = 12$, alors $PQ = 6$.
Puisque $OS = r$ et $QS = 4$, alors $OQ = r - 4$.
Puisque le triangle OPQ est rectangle en Q, alors selon le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} OQ^2 + PQ^2 &= OP^2 \\ (r-4)^2 + 6^2 &= r^2 \\ r^2 - 8r + 16 + 36 &= r^2 \\ 52 &= 8r \\ r &= \tfrac{52}{8} \end{aligned}$$

Le rayon du grand cercle a donc une longueur de $\frac{52}{8}$, ou 6,5.

Réponse : (C)

20. Puisque $b = ar$, $c = ar^2$ et que a, b et c ont un produit de 46 656, alors $a(ar)(ar^2) = 46\,656$, ou $a^3r^3 = 46\,656$, ou $(ar)^3 = 46\,656$, d'où $ar = \sqrt[3]{46\,656}$, ou $ar = 36$.
Donc $b = ar = 36$.
Puisque a, b et c ont une somme de 114, alors $a+c = 114-b$, d'où $a+c = 114-36$, ou $a+c = 78$.

Réponse : (A)

21. Dans le tableau de forme triangulaire, la rangée r contient r entiers.
Donc dans un tableau de n rangées, le nombre de nombres dans le tableau est égal à :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

Cette somme est toujours égale à $\frac{1}{2}n(n+1)$.
(Si cette formule n'est pas connue, on peut essayer de la démontrer !)
On peut conclure que le dernier nombre de la rangée n est égal à $\frac{1}{2}n(n+1)$.
Pour déterminer la rangée dans laquelle le nombre 400 est situé, on déterminera la plus petite valeur de n pour laquelle $\frac{1}{2}n(n+1) \geq 400$, ou $n(n+1) \geq 800$.
La valeur de n doit être près de $\sqrt{800}$, ou 28,28 ...
Si $n = 28$, alors $n(n+1) = 812$.
Si $n = 27$, alors $n(n+1) = 756$.
Donc, 400 est situé dans la 28^e rangée. Or, le dernier nombre de la rangée 27 est égal à $\frac{1}{2}(27 \times 28)$, ou 378. Le dernier nombre de la rangée 28 est égal à $\frac{1}{2}(28 \times 29)$, ou 406.
La rangée qui contient le nombre 400 commence donc par le nombre 379 et se termine par le nombre 406. On cherche la somme des nombres de cette rangée.
Cette somme est égale à la somme des entiers de 1 à 406 moins la somme des entiers de 1 à 378.
Puisque la somme des entiers de 1 à m est égale à $\frac{1}{2}m(m+1)$, alors la somme des entiers de 379 à 406 est égale à $\frac{1}{2}(406)(407) - \frac{1}{2}(378)(379)$, ou 10 990.

Réponse : (A)

22. Puisque $\dfrac{p+q^{-1}}{p^{-1}+q} = 17$, alors $\dfrac{p+\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}+q} = 17$, ou $\dfrac{\frac{pq+1}{q}}{\frac{1+pq}{p}} = 17$ ou $\dfrac{p(pq+1)}{q(pq+1)} = 17$.
Puisque p et q sont des entiers strictement positifs, alors $pq+1 > 0$. Le facteur commun $(pq+1)$ n'étant pas nul, on peut simplifier l'équation pour obtenir $\dfrac{p}{q} = 17$, ou $p = 17q$.

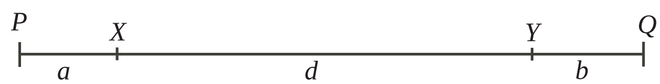
Puisque p et q sont des entiers strictement positifs, alors $q \geq 1$.
Puisque $p + q \leq 100$, alors $17q + q \leq 100$, ou $18q \leq 100$, ou $q \leq \frac{100}{18}$, ou $q \leq 5\frac{5}{9}$.
Puisque q est un entier strictement positif, alors $q \leq 5$.
Selon ces deux restrictions, on a $1 \leq q \leq 5$. Il y a donc 5 valeurs possibles et 5 couples possibles.
(On peut vérifier que les couples (p, q) possibles sont $(17, 1)$, $(34, 2)$, $(51, 3)$, $(68, 4)$ et $(85, 5)$.)

Réponse : (E)

23. On remarque que l'on peut changer des personnes l'une pour l'autre. Il n'est pas important de spécifier qui marche et qui se promène en moto. On nomme les trois personnes A, D et E.
Le point de départ est nommé P et le point d'arrivée est nommé Q.
Voici une stratégie dans laquelle les trois personnes avancent à tous moments et arrivent au point P en même temps :

A et D montent en moto, tandis que E marche.
A et D se rendent en moto à un point Y situé avant le point Q.
A laisse D et retourne en moto, tandis que D et E marchent vers le point Q.
A rencontre E au point X.
E monte sur la moto et avec A, se déplace vers le point Q de manière à arriver au point Q en même temps que D.
Le point Y est choisi de manière que A, D et E arrivent en même temps au point Q.

Soit a km la distance de P à X, d km la distance de X à Y et b km la distance de Y à Q.



Pendant que E marche de P à X à une vitesse de 6 km/h, A se déplace en moto de P à Y et de retour jusqu'à X à une vitesse de 90 km/h. Or, la distance de P à X est de a km, tandis que la distance de P à Y, puis de Y à X est de $(a + d + d)$ km, ou $(a + 2d)$ km.
Puisque E et A mettent le même temps pour effectuer ces trajets, alors $\dfrac{a}{6} = \dfrac{a + 2d}{90}$, d'où $15a = a + 2d$, ou $7a = d$.

Pendant que D marche de Y à Q à une vitesse de 6 km/h, A se rend de Y à X et de X à Q à une vitesse de 90 km/h.
Or, la distance de Y à Q est de b km, tandis que la distance de Y à X et de X à Q est de $(d + d + b)$ km, ou $(b + 2d)$ km.
Puisque D et A mettent le même temps pour effectuer ces trajets, alors $\dfrac{b}{6} = \dfrac{b + 2d}{90}$, d'où $15b = b + 2d$, ou $7b = d$.

Donc $d = 7a = 7b$. On peut conclure que $b = a$.
La distance totale de P à Q est égale à $(a + d + b)$ km, ou $(a + 7a + a)$ km, ou $9a$ km.
Or, on sait que cette distance est de 135 km. Donc $9a = 135$, ou $a = 15$.
On rappelle que A se déplace de P à Y à X à Q, une distance de $[(a + 7a) + 7a + (7a + a)]$ km, ou $23a$ km.
Puisque $a = 15$ km et que A se déplace à une vitesse de 90 km/h, le temps qu'elle met pour effectuer cette stratégie est égal à $\frac{23 \times 15}{90}$ h, ou $\frac{23}{6}$ h, ou environ 3,83 h.
Puisque cette stratégie prend 3,83 h, alors la plus petite valeur possible de t ne peut dépasser 3,83 h. Peux-tu expliquer pourquoi il s'agit bien de la plus petite valeur possible de t ?

Si on n'avait pas pensé à la stratégie précédente, on aurait pu penser à la suivante :

A et D montent en moto, tandis que E marche.
A et D se rendent jusqu'au point Q.
A laisse D au point Q et retourne rencoutrer E qui marche toujours.
D laisse E monter sur la moto et les deux se rendent à Q. (D se repose au point Q.)

Cette stratégie met 4,125 h, ce qui est supérieur au temps requis par la stratégie précédente, car D ne bouge pas pendant un certain temps.

Réponse : (A)

24. Les six sommes possibles sont $w + x$, $w + y$, $w + z$, $x + y$, $x + z$ et $y + z$.
Puisque $x < y$, alors $w + x < w + y$.
Puisque $w < x$, alors $w + y < x + y$.
Puisque $y < z$, alors $x + y < x + z$.
Puisque $x < y$, alors $x + z < y + z$.
On a donc $w + x < w + y < x + y < x + z < y + z$.
Cette inégalité contient toutes les sommes possibles à l'exception de $w + z$.
Or puisque $y < z$ et $w < x$, alors $w + y < w + z < x + z$, mais on ne peut savoir laquelle des expressions $x + y$ et $w + z$ est la plus grande.
On sait donc que $w + x$ est toujours la plus petite somme et que $w + y$ est toujours la deuxième plus petite somme. On sait aussi que les troisième et quatrième plus petites sommes sont $w + z$ et $x + y$ dans un ordre quelconque.
Donc $w + x = 1$ et $w + y = 2$. De plus, $w + z = 3$ et $x + y = 4$ ou bien $w + z = 4$ et $x + y = 3$.
D'après les deux premières équations, on a $(w + y) - (w + x) = 2 - 1$, d'où $y - x = 1$.

1er cas : $w + z = 3$ et $x + y = 4$
Puisque $y - x = 1$ et $x + y = 4$, on obtient par addition $2y = 5$, ou $y = \frac{5}{2}$.
Puisque $w + y = 2$, alors $w = 2 - y$, d'où $w = 2 - \frac{5}{2}$, ou $w = -\frac{1}{2}$.
Puisque $w + z = 3$, alors $z = 3 - w$, d'où $z = 3 - (-\frac{1}{2})$, ou $z = \frac{7}{2}$.
Puisque $x + y = 4$, alors $x = 4 - y$, d'où $x = 4 - \frac{5}{2}$, ou $x = \frac{3}{2}$.
On a donc $w = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{5}{2}$ et $z = \frac{7}{2}$.
On peut vérifier que les six sommes sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$ et qu'elles sont toutes différentes.

2e cas : $w + z = 4$ et $x + y = 3$
Puisque $y - x = 1$ et $x + y = 3$, on obtient par addition $2y = 4$, ou $y = 2$.
Puisque $w + y = 2$, alors $w = 2 - y$, d'où $w = 2 - 2$, ou $w = 0$.
Puisque $w + z = 4$, alors $z = 4 - w$, d'où $z = 4 - 0$, ou $z = 4$.
Puisque $x + y = 3$, alors $x = 3 - y$, d'où $x = 3 - 2$, ou $x = 1$.
On a donc $w = 0$, $x = 1$, $y = 2$ et $z = 4$.
On peut vérifier que les six sommes sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$ et qu'elles sont toutes différentes.

Les deux valeurs possibles de z sont donc 4 et $\frac{7}{2}$.
Leur somme est égale à $4 + \frac{7}{2}$, ou $\frac{15}{2}$.

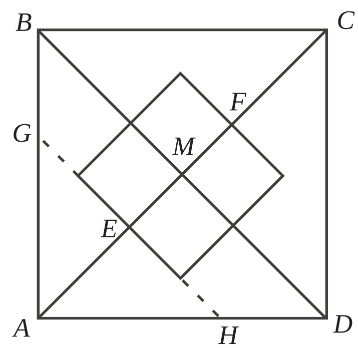
Réponse : (D)

25. On obtient la plus petite hauteur possible de la pyramide lorsque ses quatre faces latérales touchent les cercles qui forment les bases du cylindre. (On peut imaginer que l'apex (le sommet opposé à la base) de la pyramide était plutôt élevé et qu'on le baisse graduellement. Éventuellement, chaque face latérale toucherait une des extrémités circulaires du cylindre. L'apex de la pyramide ne pourrait pas baisser davantage sans qu'une partie du cylindre ne soit à

l'extérieur de la pyramide. La pyramide aurait donc atteint la hauteur minimale.) On détermine donc cette hauteur.

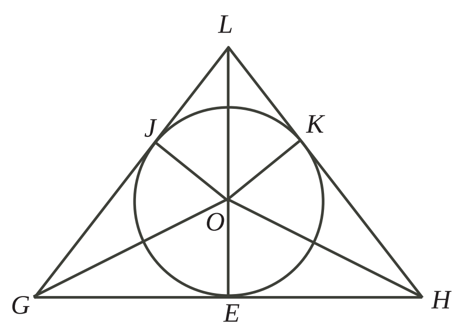
Soit $ABCD$ la base carré de la pyramide et T son apex.
On trace les diagonales AC et BD de la base. Soit M leur point d'intersection. Ce point est donc le centre de la base
Puisque la base a des côtés de longueur 20, alors $AC = BD = 20\sqrt{2}$.
Puisque les diagonales se coupent en leur milieu, alors $AM = BM = CM = DM = 10\sqrt{2}$.
On sait que T est situé directement au-dessus de M.
Soit t la hauteur de la pyramide. Donc $t = TM$. On veut déterminer la valeur de t.

On suppose que l'axe central du cylindre est situé au-dessus de AC.
Puisque le milieu de cet axe central est situé au-dessus de M, alors l'axe central s'étend de part et d'autre de M sur une distance de 5.
Soit E et F les points sur AC aux extrémités du cylindre. Puisque $AM = CM = 10\sqrt{2}$ et que $EM = MF = 5$, alors $AE = CF = 10\sqrt{2} - 5$.



Vu du dessus, le cylindre a l'apparence d'un carré, car il a une hauteur et un diamètre de 10.

On imagine le plan vertical qui contient la base du cylindre au point E. Ce plan coupe la pyramide pour former un triangle :

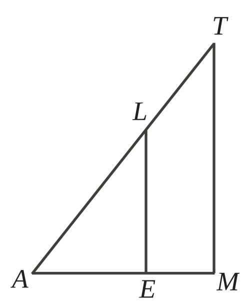


Soit L le point où le plan coupe l'arête AT et soit G et H les points respectifs où le plan coupe AB et AD. Ces points G et H correspondent à ceux de la première figure.
Puisque $\angle BAM = 45^\circ$ et que la base du cylindre est perpendiculaire à la diagonale de la base carrée, alors le triangle GEA est isocèle et rectangle (tout comme le triangle HEA). Donc $GE = HE = AE = 10\sqrt{2} - 5$.
Soit O le centre de la base du cylindre.
On sait que les segments GL et HL sont situés sur les faces latérales respectives ABT et ADT de la pyramide.
Puisque ces faces ABT et ADT touchent le cercle qui forme la base du cylindre, GL et HL sont tangents à ce cercle aux points respectifs J et K.
On joint O aux points G, H et L.

De plus, on joint O aux points J, K et E. Les segments OJ, OK et OE sont des rayons du cercle qui forme la base. Chacun a donc une longueur de 5.
Puisque le cercle est tangent à des faces de la pyramide à ces points, chacun des segments OJ, OK et OE est perpendiculaire à un côté du triangle GHL.
On cherche la longueur de LE.
Puisque GE et GJ sont des tangentes à un cercle menées d'un même point, alors $GJ = GE = 10\sqrt{2} - 5$.
Soit $LE = h$. Donc $LO = h - 5$. Soit $LJ = x$.
Les triangles LJO et LEG sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils partagent un angle aigu L.
Donc $\dfrac{LJ}{JO} = \dfrac{LE}{EG}$, d'où $\dfrac{x}{5} = \dfrac{h}{10\sqrt{2}-5}$, ou $x = \dfrac{5h}{10\sqrt{2}-5}$, ou $x = \dfrac{h}{2\sqrt{2}-1}$.
Puisque les triangles sont semblables, on a aussi $\dfrac{LG}{GE} = \dfrac{LO}{OJ}$.
Donc $\dfrac{x + (10\sqrt{2}-5)}{10\sqrt{2}-5} = \dfrac{h-5}{5}$, ou $x + (10\sqrt{2}-5) = (2\sqrt{2}-1)(h-5)$.
On reporte $x = \dfrac{h}{2\sqrt{2}-1}$ dans cette dernière équation pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{h}{2\sqrt{2}-1} + (10\sqrt{2}-5) &= (2\sqrt{2}-1)(h-5) \\
h + 5(2\sqrt{2}-1)^2 &= (2\sqrt{2}-1)^2(h-5) \\
h + 5(2\sqrt{2}-1)^2 &= (9-4\sqrt{2})h - 5(2\sqrt{2}-1)^2 \\
10(2\sqrt{2}-1)^2 &= (8-4\sqrt{2})h \\
h &= \frac{10(2\sqrt{2}-1)^2}{8-4\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Pour déterminer la valeur de t, on considère le triangle AMT.



On sait que E est situé sur AM et que L est situé sur AT.
De plus, TM est perpendiculaire à AM et LE est perpendiculaire à AE. Les triangles AEL et AMT sont donc semblables.
Donc $\dfrac{TM}{AM} = \dfrac{LE}{AE}$, ou $\dfrac{t}{10\sqrt{2}} = \dfrac{h}{10\sqrt{2}-5}$. Donc :

$$t = \frac{10\sqrt{2}}{5(2\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{10(2\sqrt{2}-1)^2}{8-4\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)}{8-4\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)}{2-\sqrt{2}} \approx 22{,}07$$

Parmi les choix de réponse, la plus petite hauteur possible de la pyramide est plus près de 22,1.

Réponse : (B)

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat 2010

(11e année – Secondaire V)

le jeudi 25 février 2010

Solutions

1. L'expression est formée de deux demis et de trois tiers, ce qui vaut deux unités. Donc, la somme est égale à 2.

RÉPONSE : (A)

2. La quantité 2 % est équivalente à la fraction $\frac{2}{100}$. Donc, « 2 % de 1 » est égal à $\frac{2}{100}$.

RÉPONSE : (A)

3. *Solution 1*
Puisque $PQ = 1$ et $QR = 2PQ$, alors $QR = 2$.
Puisque $QR = 2$ et $RS = 3QR$, alors $RS = 3(2) = 6$.
Donc $PS = PQ + QR + RS$, d'où $PS = 1 + 2 + 6$, ou $PS = 9$.

Solution 2
D'après les renseignements donnés, on a :

$$PS = PQ + QR + RS = PQ + QR + 3QR = PQ + 4QR = PQ + 4(2PQ) = 9PQ$$

Donc $PS = 9(1)$, ou $PS = 9$.

RÉPONSE : (C)

4. On reporte $u = -6$ dans l'expression $x = \frac{1}{3}(3 - 4u)$, pour obtenir $x = \frac{1}{3}(3 - 4(-6))$, ou $x = \frac{1}{3}(3 + 24)$, ou $x = \frac{1}{3}(27)$, ou $x = 9$.

RÉPONSE : (C)

5. *Solution 1*
Puisque $2^x = 16$, alors $2^{x+3} = 2^3 2^x$, ou $2^{x+3} = 8(16)$, ou $2^{x+3} = 128$.

Solution 2
Puisque $2^x = 16$ et $2^4 = 16$, alors $x = 4$.
Puisque $x = 4$, alors $2^{x+3} = 2^7$, ou $2^{x+3} = 128$.

RÉPONSE : (D)

6. Un quadrillage 12 sur 12 contiendra 11 lignes verticales intérieures et 11 lignes horizontales intérieures. (Dans le quadrillage 4 sur 4 donné, il y a 3 lignes verticales intérieures et 3 lignes horizontales intérieures.)
Chacune des 11 lignes verticales intérieures coupe chacune des 11 lignes horizontales intérieures pour créer un point d'intersection intérieur.
Ainsi chaque ligne intérieure verticale produit 11 points d'intersection intérieurs.
Le nombre de points d'intersection intérieurs est donc égal à 11×11, ou 121.

RÉPONSE : (B)

7. Puisque PQS est un segment de droite et que $\angle PQR = 110^\circ$, alors $\angle RQS = 180^\circ - \angle PQR$, d'où $\angle RQS = 70^\circ$.
Puisque la somme des mesures d'angles du triangle QRS est égale à 180°, alors :

$$\begin{aligned} 70^\circ + (3x)^\circ + (x+14)^\circ &= 180^\circ \\ 70 + 3x + x + 14 &= 180 \\ 4x &= 96 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (D)

8. Chaque bande verticale correspond à $\frac{1}{2}$ de la surface du rectangle.
La bande de gauche est divisée en trois parties égales. Donc, $\frac{2}{3}$ de la bande de gauche est ombrée, ce qui correspond à $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ de la surface, ou $\frac{1}{3}$ de la surface du grand rectangle.
La bande de droite est divisée en quatre parties égales. Donc, $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$ de la bande de droite est ombrée, ce qui correspond à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ de la surface, ou $\frac{1}{4}$ de la surface du grand rectangle.
Donc, la fraction du rectangle initial qui est ombrée est égale à $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, ou $\frac{4}{12} + \frac{3}{12}$, ou $\frac{7}{12}$.
Réponse : (E)

9. D'après la définition, $(5\nabla 1) + (4\nabla 1)$ est égal à $5(5-1) + 4(4-1)$, ou $5(4) + 4(3)$, ou $20 + 12$, ou 32.
Réponse : (D)

10. Puisque $2x^2 = 9x - 4$, alors $2x^2 - 9x + 4 = 0$.
Donc $(2x-1)(x-4) = 0$, d'où $2x = 1$, ou $x = 4$.
Puisque $x \neq 4$, alors $2x = 1$.
Réponse : (B)

11. Puisque les pièces de 1 \$, dans le sac, ont une valeur totale de 400 \$, alors il y a 400 pièces de 1 \$ dans le sac.
Puisqu'une pièce de 1 \$ a la même masse que 4 pièces de 10 ¢, alors 400 pièces de 1 \$ ont la même masse que 1600 pièces de 10 ¢ (car $4(400) = 1600$).
Donc, le sac qui contient les pièces de 10 ¢ contient 1600 pièces. Les pièces de 10 ¢ dans ce sac ont une valeur totale de 160 \$.
Réponse : (C)

12. Supposons que la première fois, chacune des 7 personnes a reçu q bonbons.
Donc, $7q$ bonbons ont été distribués et il est resté 3 bonbons. Puisqu'on a distribué k bonbons, alors $k = 7q + 3$.
On multiplie chaque membre par 3 pour obtenir $3k = 21q + 9$.
Lorsqu'on distribue $21q+9$ bonbons à 7 personnes, chacune reçoit $3q+1$ bonbons, pour un total de $21q + 7$ bonbons. Il en reste donc 2. (Les 7 personnes ne peuvent pas recevoir plus de $3q + 1$ bonbons, puisque $7(3q + 2) = 21q + 14$, ce qui correspond à plus de bonbons qu'il n'y en a.)
Donc, il resterait 2 bonbons à la fin.
Réponse : (B)

13. Les 50 nombres, qui ont une moyenne de 76, ont une somme de $50(76)$, ou 3800.
Les 40 nombres qui ont une moyenne de 80 ont une somme de $40(80)$, ou 3200.
Donc, les 10 autres nombres ont une somme de $3800 - 3200$, ou 600.
La moyenne de ces 10 nombres est donc égale à $\frac{600}{10}$, ou 60.
Réponse : (A)

14. L'énoncé (A) n'est pas nécessairement vrai, puisque les amis auraient pu attraper 2, 3, 3 et 3 poissons.
L'énoncé (B) n'est pas nécessairement vrai, puisque les amis auraient pu attraper 1, 1, 1, et 8 poissons.
L'énoncé (C) n'est pas nécessairement vrai, puisque les amis auraient pu attraper 2, 3, 3, et 3 poissons.
L'énoncé (E) n'est pas nécessairement vrai, puisque les amis auraient pu attraper 1, 1, 1, et 8 poissons.
Donc, l'énoncé (D) est celui qui doit être vrai.

On peut le confirmer, puisque si les quatre amis avaient chacun attrapé au moins trois poissons, ils auraient attrapé au moins 12 poissons en tout. Or, ils n'ont attrapé que 11 poissons en tout.

Réponse : (D)

15. Si $-1 < \sqrt{p} - \sqrt{100} < 1$, alors $-1 < \sqrt{p} - 10 < 1$, d'où $9 < \sqrt{p} < 11$.
Puisque $\sqrt{p}$ est suérieur à 9, alors p est supérieur à 9^2, ou 81.
Puisque $\sqrt{p}$ est inférieur à 11, alors p est inférieur à 11^2, ou 121.
Donc $81 < p < 121$.
Puisque p est un entier, alors $82 \leq p \leq 120$.
Le nombre d'entiers p qui vérifient la condition est donc égal à $120 - 82 + 1$, ou 39.

Réponse : (D)

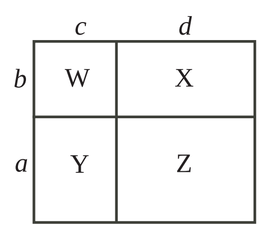
16. On remarque que $2010 = 10(201) = 2(5)(3)(67)$ et que 67 est un nombre premier.
Les diviseurs positifs de 2010 sont donc 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, 67, 134, 201, 335, 402, 670, 1005 et 2010.
Les couples (a, b) pour lesquels $ab = 2010$ et $a > b$ sont donc $(2010, 1)$, $(1005, 2)$, $(670, 3)$, $(402, 5)$, $(335, 6)$, $(201, 10)$, $(134, 15)$, $(67, 30)$.
Le couple $(a, b) = (67, 30)$ admet la plus petite valeur de $a - b$, soit $a - b = 37$.

Réponse : (A)

17. Puisque $PQRS$ est un rectangle, PQ est perpendiculaire à QR.
Donc, l'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2}(PQ)(QR)$, ou $\frac{1}{2}(5)(3)$, ou $\frac{15}{2}$.
Puisque $PT = TU = UR$, alors les triangles PTQ, TUQ et URQ ont la même aire. (Les bases respectives PT, TU et UR sont de même longueur et leur hauteur est égale à la distance du point Q au segment PR.)
Donc, l'aire du triangle TUQ est égale à $\frac{1}{3}(\frac{15}{2})$, ou $\frac{5}{2}$.
De même, l'aire du triangle TUS est égale à $\frac{5}{2}$.
L'aire du quadrilatère $STQU$ est égale à la somme de l'aire du triangle TUQ et de l'aire du triangle TUS. Elle est donc égale à $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}$, ou 5.

Réponse : (B)

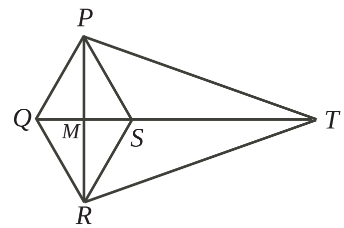
18. Soit a, b, c et d les longueurs des segments indiqués ci-dessous.



Le rectangle W mesure b sur c. Son périmètre $2b + 2c$ est égal à 2.
Le rectangle X mesure b sur d. Son périmètre $2b + 2d$ est égal à 3.
Le rectangle Y mesure a sur c. Son périmètre $2a + 2c$ est égal à 5.
Le rectangle Z mesure a sur d. Son périmètre est égal à $2a + 2d$.
Donc $2a + 2d = (2a + 2b + 2c + 2d) - (2b + 2c)$, ou $2a + 2d = (2a + 2c) + (2b + 2d) - (2b + 2c)$, d'où $2a + 2d = 5 + 3 - 2$, ou $2a + 2d = 6$.

Réponse : (A)

19. *Solution 1*
On remarque que les triangles PQS et RQS sont équilatéraux.
On trace le segment PR. Puisque $PQRS$ est un losange, alors PR et QS sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu M.
De plus, on a $QM = MS = \frac{1}{2}QS = 3$.

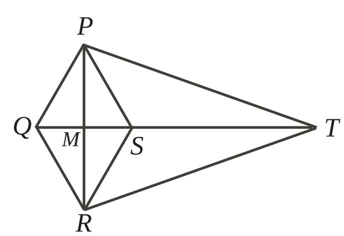


Puisque $\angle PSQ = 60°$ et $\angle PMS = 90°$, le triangle PMS est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $PM = \sqrt{3} \times MS$, ou $PM = 3\sqrt{3}$.
Puisque $PT = TR$, le triangle PRT est isocèle.
Puisque M est le milieu de PR, alors TM est perpendiculaire à PR.
Puisque SM est aussi perpendiculaire à PR, alors S est situé sur TM.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PMT et puisque $MT > 0$, on a :

$$MT = \sqrt{PT^2 - PM^2} = \sqrt{14^2 - (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{196 - 27} = \sqrt{169} = 13$$

Donc $ST = MT - MS$, d'où $ST = 13 - 3$, ou $ST = 10$.

Solution 2
On remarque que les triangles PQS et RQS sont équilatéraux.
On trace le segment PR. Puisque $PQRS$ est un losange, alors PR et QS sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu M.
Puisque $PT = TR$, le triangle PRT est isocèle.
Puisque M est le milieu de PR, alors TM est perpendiculaire à PR.
Puisque SM est aussi perpendiculaire à PR, alors S est situé sur TM.



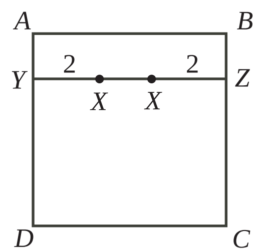
Puisque $\angle PSQ = 60°$, alors $\angle PST = 180° - 60°$, ou $\angle PST = 120°$.
Dans le triangle PST, on sait que $\angle PST = 120°$, que $PS = 6$ et que $PT = 14$.
D'après la loi du cosinus :

$$\begin{aligned}
PT^2 &= PS^2 + ST^2 - 2(PS)(ST)\cos(\angle PST) \\
14^2 &= 6^2 + ST^2 - 2(6)(ST)\cos(120°) \\
196 &= 36 + ST^2 + 6ST \qquad \text{(puisque } \cos(120°) = -\tfrac{1}{2}\text{)} \\
0 &= ST^2 + 6ST - 160 \\
0 &= (ST - 10)(ST + 16)
\end{aligned}$$

Donc $ST = 10$ ou $ST = -16$. Puisque $ST > 0$, alors $ST = 10$.

Réponse : (D)

20. Soit $ABCD$ le carré.
Supposons que le point X est situé à 1 unité du côté AB.
X est donc situé sur un segment de droite YZ à 1 unité au-dessous du côté AB.
Puisque X est situé sur YZ, il est automatiquement à 4 unités du côté DC.
Puisque X doit être à 2 unités du côté AD ou du côté BC, il y a deux positions possibles pour X sur le segment YZ :



Dans chaque cas, X est situé à 3 unités du quatrième côté. Il est donc à 1, 2, 3 et 4 unités des quatre côtés.
On peut recommencer en plaçant X à 2, 3 ou 4 unités du côté AB. Dans chaque cas, il y a deux positions possibles pour X.
En tout, le nombre de positions possibles pour le point X est égal à 4(2), ou 8. Ces positions sont différentes, puisqu'il y a deux positions différentes sur quatre segments parallèles.

Réponse : (D)

21. *Solution 1*
Puisqu'il faut déterminer *la* valeur de $\frac{x-z}{y-z}$, cette valeur doit être la même, quelles que soient les valeurs de x, y et z qui vérifient l'équation $\frac{x-y}{z-y} = -10$.
Par exemple si $x = 10$, $y = 0$ et $z = -1$, alors $\frac{x-y}{z-y} = -10$. Ces valeurs doivent donc donner la valeur recherchée.
Dans ce cas, on a $\frac{x-z}{y-z} = \frac{10-(-1)}{0-(-1)}$, d'où $\frac{x-z}{y-z} = \frac{11}{1}$, ou $\frac{x-z}{y-z} = 11$.

Solution 2
On procède par manipulations algébriques :

$$\frac{x-z}{y-z} = \frac{(x-y)+(y-z)}{y-z} = \frac{x-y}{y-z} + \frac{y-z}{y-z} = -\frac{x-y}{z-y} + 1$$

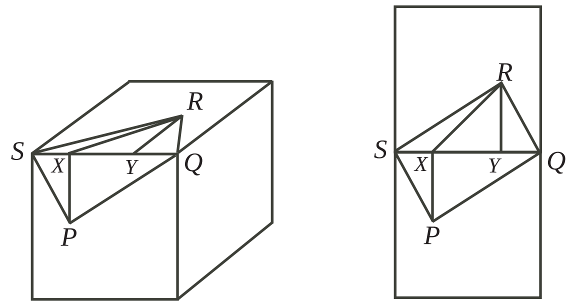
Puisque $\frac{x-y}{z-y} = -10$, alors $\frac{x-z}{y-z} = -(-10)+1$, ou $\frac{x-z}{y-z} = 11$.

Réponse : (A)

22. Puisque $PQRS$ est un rectangle, alors $\angle SRQ = \angle SPQ = 90^\circ$.
De plus, $SR = PQ = 20$ et $SP = QR = 15$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle SPQ, et puisque $QS > 0$, alors

$$QS = \sqrt{SP^2 + PQ^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25$$

Aux points P et R, on abaisse des perpendiculaires PX et RY au segment SQ. On trace le segment RX.



On cherche la longueur RP.
Puisque le triangle SPQ est rectangle en P, alors :

$$\sin(\angle PSQ) = \frac{PQ}{SQ} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \qquad \cos(\angle PSQ) = \frac{SP}{SQ} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Donc $XP = PS\sin(\angle PSQ)$, d'où $XP = 15(\frac{4}{5})$, ou $XP = 12$ et $SX = PS\cos(\angle PSQ)$, d'où $SX = 15(\frac{3}{5})$, ou $SX = 9$.
Puisque les triangles QRS et SPQ sont congruents (trois paires de côtés congrus deux à deux), alors $QY = SX = 9$ et $YR = XP = 12$.
Puisque $SQ = 25$, alors $XY = SQ - SX - QY$, d'où $XY = 25 - 9 - 9$, ou $XY = 7$.
Or, le triangle RYX est rectangle en Y. D'après le théorème de Pythagore :

$$RX^2 = YR^2 + XY^2 = 12^2 + 7^2 = 193$$

On considère ensuite le triangle PXR. Puisque RX est situé sur la face supérieure du cube et que PX est perpendiculaire à cette face, le triangle PXR est rectangle en X.
D'après le théorème de Pythagore et puisque $PR > 0$, alors :

$$PR = \sqrt{PX^2 + RX^2} = \sqrt{12^2 + 193} = \sqrt{144 + 193} = \sqrt{337} \approx 18{,}36$$

Parmi les choix de réponses, 18,4 est le plus près de cette longueur.

Réponse : (E)

23. On calcule quelques valeurs de t_n pour chercher une régularité possible :

n	$\sqrt{n}$	t_n	n	$\sqrt{n}$	t_n
1	1	1	11	3,32	3
2	1,41	1	12	3,46	3
3	1,73	2	13	3,61	4
4	2	2	14	3,74	4
5	2,24	2	15	3,87	4
6	2,45	2	16	4	4
7	2,65	3	17	4,12	4
8	2,83	3	18	4,24	4
9	3	3	19	4,36	4
10	3,16	3	20	4,47	4
			21	4,58	5

(Dans chaque cas, la colonne $\sqrt{n}$ donne une approximation de $\sqrt{n}$ au centième près.)
Donc, $t_n = 1$ pour 2 valeurs de n, $t_n = 2$ pour 4 valeurs de n, $t_n = 3$ pour 6 valeurs de n et $t_n = 4$ pour 8 valeurs de n.
On pose comme hypothèse que $t_n = k$ pour $2k$ valeurs de n. On prouvera l'hypothèse à la fin.

On remarque que $\sqrt{2010} \approx 44{,}83$. Donc $t_{2010} = 45$.
Donc, avant d'arriver à $t_{2010} = 45$, on a compté tous les termes $t_n \leq 44$.
D'après notre hypothèse, le nombre de termes t_n tels que $t_n \leq 44$ devrait être égal à :

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 86 + 88 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 43 + 44) = 2\left(\tfrac{1}{2}(44)(45)\right) = 44(45) = 1980$$

Or, $\sqrt{1980} \approx 44{,}497$ et $\sqrt{1981} \approx 44{,}508$. Donc $t_{1980} = 44$ et $t_{1981} = 45$.
Puisque $t_{1981} = t_{2010} = 45$, alors chacun des termes de t_{1981} à t_{2010} est égal à 45. Il y a donc 30 termes qui égalent 45.
Donc, la somme demandée est égale à :

$$2\left(\tfrac{1}{1}\right) + 4\left(\tfrac{1}{2}\right) + 6\left(\tfrac{1}{3}\right) + \cdots + 86\left(\tfrac{1}{43}\right) + 88\left(\tfrac{1}{44}\right) + 30\left(\tfrac{1}{45}\right) = 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 + 2 + \tfrac{2}{3}$$

Le terme 2 paraît 44 fois dans la somme précédente.
Donc, la somme est égale à $88\frac{2}{3}$.

On démontre maintenant l'hypothèse, soit que pour chaque entiers positif k, il y a $2k$ termes t_n qui égalent k :

Pour que $t_n = k$, il faut que $k - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$ (en d'autres mots, il faut que l'entier le plus près de $\sqrt{n}$ soit égal à k).
Puisque n et k sont positifs, alors l'inéquation $k - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n}$ est équivalente à l'inéquation $(k - \frac{1}{2})^2 \leq n$ et l'inéquation $\sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$ est équivalente à l'inéquation $n < (k + \frac{1}{2})^2$.
Il faut donc que $(k - \frac{1}{2})^2 \leq n < (k + \frac{1}{2})^2$, ou $k^2 - k + \frac{1}{4} \leq n < k^2 + k + \frac{1}{4}$.
Puisque n est un entier, alors $k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k$.
Le nombre de valeurs de n est donc égal à $(k^2 + k) - (k^2 - k + 1) + 1$, ou $2k$.

Réponse : (C)

24. On calcule les numéros des sphères dans les quatre couches supérieures.
La couche du dessus comporte une seule sphère qui porte le numéro 1.
Chaque sphère de la 2e couche ne touche qu'à une sphère de la couche au-dessus d'elle. Puisque cette sphère porte le numéro 1, chaque sphère de la 2e couche porte aussi le numéro 1 :

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

Dans la 3e couche, chaque sphère du coin ne touche qu'à une sphère de la 2e couche et chacune de ces dernières porte le numéro 1 ; chaque couche du coin porte donc le numéro 1. Les trois autres sphères de la 3e couche (chacune est au milieu d'un « côté du triangle ») touchent à deux sphères de la 2e couche, chacune portant le numéro 1. Ces trois autres sphères de la 3e couche portent donc le numéro 2. Voici donc les numéros de la 3e couche :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array}$$

On complète la 4e couche de la même façon pour obtenir :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 3 & & \\ & 3 & & 6 & & 3 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

On appelle *sphère externe* toute sphère qui n'est pas une sphère interne. Dans les quatre couches supérieures, seule la sphère numéro 6, dans la 4e couche, est interne ; les autres sphères sont externes. On utilisera aussi s'expression « somme des sphères » pour représenter la somme des numéros sur les sphères.
On peut remarquer plusieurs régularités :

(i) Dans toutes les couches, les sphères du coin portent le numéro 1.

(ii) Dans les quatre premières couches, la somme respective des sphères sur un « côté de triangle » est égale à 1, 2, 4, 8. Il semble que la somme des sphères sur les « côtés de triangle » de la couche k est égale à 2^{k-1}.

(iii) Dans les quatre premières couches, la somme de toutes les sphères de la couche est égale à 1, 3, 9, 27. Il semble que la somme des sphères de la couche k est égale à 3^{k-1}.

On utilisera ces propriétés et on les prouvera à la fin.

Pour déterminer la somme des sphères internes, on calcule la somme de toutes les sphères et on soustrait la somme des sphères externes.
D'après la propriété (iii), la somme de toutes les sphères des 13 couches est égale à :

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{11} + 3^{12} = \frac{1(3^{13} - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^{13} - 1)$$

(Pour calculer la somme des puissances, on peut utiliser une calculatrice ou utiliser la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique.)
Pour calculer la somme de toutes les sphères externes, on considère une couche particulière k, ($k \geq 2$). (Dans la 1re couche, la somme des sphères externes est égale à 1.)
Les sphères externes sont situées sur les trois « côtés de triangle » et sur chaque côté, leur somme est égale à 2^{k-1}, selon la propriété (ii). La somme des sphères externes semble donc être égale à $3(2^{k-1})$. Or, chaque sphère à l'extrémité d'un côté a été comptée deux fois. Il faut donc soustraire 3. Dans la couche k, la somme des sphères externes est donc égale à $3(2^{k-1}) - 3$. (On peut vérifier que cette expression donne les sommes des sphères externes des quatre premières couches.)
Donc, la somme de toutes les sphères externes est égale à :

$$\begin{aligned} 1 + (3(2^1) - 3)) + (3(2^2) - 3) + \cdots + (3(2^{12}) - 3) &= 1 + 3(2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{12}) - 36 \\ &= 3\left(\frac{2(2^{12} - 1)}{2 - 1}\right) - 35 \\ &= 3(2^{13} - 2) - 35 \\ &= 3(2^{13}) - 41 \end{aligned}$$

Donc, la somme de toutes les sphères internes est égale à :

$$\tfrac{1}{2}(3^{13} - 1) - 3(2^{13}) + 41 = 772\,626$$

Il reste à démontrer les propriétés précédentes :

(i) Chaque sphère de coin dans la couche k touche à une seule sphère de la couche $k - 1$, soit une sphère de coin.
Donc, le numéro d'une sphère de coin de la couche k est égal au numéro de la sphère de coin de la couche $k - 1$.
Puisque les sphères de coin des quatre premières couches portent le numéro 1, toutes les sphères de coin portent le numéro 1.

(ii) On considère un « côté de triangle » dans la couche k ($k \geq 2$), de même que le côté parallèle dans la couche $k+1$.
On considère une sphère numéro x sur le côté de la couche k.
Cette sphère touche à deux sphères sur le côté correspondant de la couche $k+1$.
De plus, les sphères du côté de la couche $k+1$ ne touchent à aucune sphère de la couche k qui ne sont pas situées sur le côté correspondant.
La sphère que l'on considère contribue x à la somme des sphères du côté de la couche k. Elle contribue donc x au nombre sur chacune des deux sphères qu'elle touche sur le côté de la couche $k+1$.
Donc, cette sphère numéro x dans la couche k contribue $2x$ à la somme des sphères du côté correspondant dans la couche $k+1$.
Donc, la somme des sphères sur le côté de la couche $k+1$ est égale à deux fois la somme des sphères sur le côté correspondant de la couche k.
Puisque les sommes des sphères sur les côtés des premières couches sont des puissances de 2, cette régularité se poursuit, puisqu'on continue à multiplier par 2.

(iii) On considère une sphère numéro x dans la couche k.
Cette sphère touche à trois sphères dans la couche $k+1$.
Donc, cette sphère contribue x à la somme de la couche k,et $3x$ à la somme de la couche $k+1$ (c.-à-d. x à chacune de trois sphères).
Donc, la somme des sphères de la couche $k+1$ est trois fois la somme des sphères de la couche k, puisque chaque sphère de la couche k contribue trois fois dans la couche $k+1$.
Puisque les sommes des sphères des premières couches sont des puissances de 3, cette régularité se poursuit, puisqu'on continue à multiplier par 3.

Réponse : (E)

25. Soit $f(x) = (1-x)^a(1+x)^b(1-x+x^2)^c(1+x^2)^d(1+x+x^2)^e(1+x+x^2+x^3+x^4)^f$. On remarque plusieurs identités algébriques que l'on peut vérifier en développant et en simplifiant :

$$\begin{aligned}
1-x^5 &= (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4)\\
1-x^3 &= (1-x)(1+x+x^2)\\
1-x^4 &= (1-x^2)(1+x^2) = (1-x)(1+x)(1+x^2)\\
1+x^3 &= (1+x)(1-x+x^2)\\
1-x^6 &= (1-x^3)(1+x^3) = (1-x)(1+x)(1-x+x^2)(1+x+x^2)
\end{aligned}$$

Ceci nous permet de regrouper des termes, de façon successive :

$$\begin{aligned}
&f(x)\\
&= (1-x)^a(1+x)^b(1-x+x^2)^c(1+x^2)^d(1+x+x^2)^e(1+x+x^2+x^3+x^4)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f}(1+x)^b(1-x+x^2)^c(1+x^2)^d(1+x+x^2)^e(1-x)^e(1+x+x^2+x^3+x^4)^f(1-x)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f}(1+x)^b(1-x+x^2)^c(1+x^2)^d(1-x^3)^e(1-x^5)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f}(1+x)^{b-c}(1-x+x^2)^c(1+x)^c(1+x^2)^d(1-x^3)^e(1-x^5)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f}(1+x)^{b-c}(1+x^3)^c(1+x^2)^d(1-x^3)^e(1-x^5)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f}(1+x)^{b-c}(1+x^3)^c(1-x^3)^c(1+x^2)^d(1-x^3)^{e-c}(1-x^5)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f}(1+x)^{b-c}(1-x^6)^c(1+x^2)^d(1-x^3)^{e-c}(1-x^5)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f-d}(1+x)^{b-c-d}(1-x^6)^c(1+x^2)^d(1-x)^d(1+x)^d(1-x^3)^{e-c}(1-x^5)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f-d}(1+x)^{b-c-d}(1-x^6)^c(1-x^4)^d(1-x^3)^{e-c}(1-x^5)^f\\
&= (1-x)^{a-d-e-f}(1+x)^{b-c-d}(1-x^3)^{e-c}(1-x^4)^d(1-x^5)^f(1-x^6)^c
\end{aligned}$$

Puisque $a > d + e + f$, $e > c$ et $b > c + d$, alors les exposants $a - d - e - f$, $b - c - d$ et $e - c$ sont des entiers strictement positifs.
Soit $A = a - d - e - f$, $B = b - c - d$, $C = e - c$, $D = d$, $E = f$ et $F = c$.
On veut que le développement de

$$f(x) = (1-x)^A(1+x)^B(1-x^3)^C(1-x^4)^D(1-x^5)^E(1-x^6)^F$$

ne contienne que les termes $1 - 2x$ lorsqu'on enlève les termes affectés d'un exposant supérieur à 6. On utilise les identités

$$(1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{2}y^2 + \cdots \qquad (*)$$

et

$$(1-y)^n = 1 - ny + \frac{n(n-1)}{2}y^2 + \cdots \qquad (**)$$

que l'on peut démontrer en développant ou à l'aide du théorème du binôme.

Puisque le terme constant de chaque facteur est égal à 1, alors le terme constant de $f(x)$ est égal à 1, peu importe les valeurs de A, B, C, D, E et F.
On considère les deux premiers facteurs. Seuls ces facteurs ont une influence sur les coefficients de x et de x^2 dans le produit final. En effet, tout terme en x ou en x^2, dans le produit final, provient de ces facteurs qui sont ensuite multipliés par le terme constant 1 de chaque autre facteur.
On considère le produit des deux premiers facteurs, tout en laissant de côté les termes de degré supérieur à 2 :

$$\begin{aligned}
(1-x)^A(1+x)^B &= (1 - Ax + \frac{A(A-1)}{2}x^2 - \cdots)(1 + Bx + \frac{B(B-1)}{2}x^2 + \cdots) \\
&= 1 - Ax + \frac{A(A-1)}{2}x^2 + Bx - ABx^2 + \frac{B(B-1)}{2}x^2 + \cdots \\
&= 1 - (A-B)x + \left[\frac{A(A-1)}{2} + \frac{B(B-1)}{2} - AB\right]x^2 + \cdots
\end{aligned}$$

Ces trois termes sont le terme constant, le terme en x et le terme en x^2 du développement simplifié de $f(x)$.
Puisque $f(x)$ admet un terme $-2x$ et aucun terme en x^2, alors

$$A - B = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{A(A-1)}{2} + \frac{B(B-1)}{2} - AB = 0$$

Cette dernière équation devient $A^2 - A + B^2 - B - 2AB = 0$, ou $(A-B)^2 = A + B$.
Puisque $A - B = 2$, alors $A + B = 4$, d'où $2A = (A+B) + (A-B)$, ou $2A = 6$. Donc $A = 3$ et $B = 1$.
Les deux premiers facteurs de $f(x)$ sont donc $(1-x)^3(1+x)$.
On remarque que $(1-x)^3(1+x) = (1-3x+3x^2-x^3)(1+x)$, d'où $(1-x)^3(1+x) = 1-2x+2x^3-x^4$.
Donc $f(x) = (1 - 2x + 2x^3 - x^4)(1-x^3)^C(1-x^4)^D(1-x^5)^E(1-x^6)^F$.
Or, dans le produit final, il n'y a aucun terme en x^3. Puisque le premier facteur contient le terme « $+2x^3$ » et que ce terme paraîtrait dans le développement final, puisqu'il sera multiplié par chacun des termes constants des facteurs suivants, « $+2x^3$ » doit être annulé par un terme « $-2x^3$ ». Le seul autre facteur qui pourrait admettre un terme en x^3 est $(1-x^3)^C$. Pour annuler le terme « $+2x^3$ », le développement de $(1-x^3)^C$ doit inclure le terme « $-2x^3$ » qui sera multiplié par chacun des termes constants des facteurs suivants pour donner le terme « $-2x^3$ » dans le

développement final afin d'annuler le terme « $+2x^3$ ».
Pour que $(1-x^3)^C$ admette un terme $-2x^3$, il faut que $C=2$, d'après $(*)$.
Donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-2x+2x^3-x^4)(1-x^3)^2(1-x^4)^D(1-x^5)^E(1-x^6)^F \\ &= (1-2x+2x^3-x^4)(1-2x^3+x^6)(1-x^4)^D(1-x^5)^E(1-x^6)^F \\ &= (1-2x+3x^4-3x^6+\cdots)(1-x^4)^D(1-x^5)^E(1-x^6)^F \end{aligned}$$

Lorsqu'on simplifie à ce stade, on peut laisser de côté tout terme affecté d'un exposant supérieur à 6, puisqu'ils n'ont aucun effet sur les termes affectés d'un exposant plus petit dans les calculs qui suivent.
Pour annuler « $+3x^4$ », le facteur $(1-x^4)^D$ doit admettre le terme « $-3x^4$ », d'où $D=3$.
Donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-2x+3x^4-3x^6+\cdots)(1-x^4)^3(1-x^5)^E(1-x^6)^F \\ &= (1-2x+3x^4-3x^6+\cdots)(1-3x^4+\cdots)(1-x^5)^E(1-x^6)^F \\ &= (1-2x+6x^5-3x^6+\cdots)(1-x^5)^E(1-x^6)^F \end{aligned}$$

Pour annuler « $+6x^5$ », le facteur $(1-x^5)^E$ doit admettre le terme « $-6x^5$ », d'où $E=6$.
Donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-2x+6x^5-3x^6+\cdots)(1-x^5)^6(1-x^6)^F \\ &= (1-2x+6x^5-3x^6+\cdots)(1-6x^5+\cdots)(1-x^6)^F \\ &= (1-2x+9x^6+\cdots)(1-x^6)^F \end{aligned}$$

Pour annuler « $+9x^6$ », le facteur $(1-x^6)^F$ doit admettre le terme « $-9x^6$ », d'où $F=9$.

On a donc $A=3$, $B=1$, $C=2$, $D=3$, $E=6$ et $F=9$.
Puisque $D=d$, $E=f$ et $F=c$, alors $c=9$, $f=6$ et $d=3$.
Puisque $C=e-c$, $C=2$ et $c=9$, alors $e=11$.
Puisque $A=a-d-e-f$, $d=3$, $e=11$, $f=6$ et $A=3$, alors $a=3+3+11+6$, ou $a=23$.

Réponse : (E)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat 2009

(11^{e} année – Secondaire V)

le mercredi 18 février 2009

Solutions

1. On a : $3 + 3^3 = 3 + 27 = 30$

Réponse : (D)

2. Puisque $3 \times 2 + 8 = \nabla + 5$, alors $\nabla = 6 + 8 - 5 = 9$.

Réponse : (E)

3. Puisque $\angle TQR = 125°$, alors $\angle TQP = 180° - \angle TQR$, d'où $\angle TQP = 180° - 125°$, ou $\angle TQP = 55°$.
Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, alors :

$$\angle PSQ = 180° - \angle SPQ - \angle SQP = 180° - 30° - 55° = 95°$$

Puisque les angles TSU et PSQ sont opposés par le sommet, alors $\angle TSU = \angle PSQ$, ou $\angle TSU = 95°$. Donc $x = 95$.

Réponse : (C)

4. Puisque $w = 4$, $x = 9$ et $z = 25$, alors :

$$\sqrt{\frac{w}{x}} + \sqrt{\frac{x}{z}} = \sqrt{\frac{2^2}{3^2}} + \sqrt{\frac{3^2}{5^2}} = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15}$$

Réponse : (B)

5. Puisque $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, alors $1 - 4(3-1)^{-1} = 1 - 4(2)^{-1} = 1 - 4(\frac{1}{2}) = 1 - 2 = -1$.

Réponse : (A)

6. Au départ, les 64 cubes formaient une structure composée de 4 couches horizontales de 16 petits cubes. Si on examine la couche du dessous, on s'aperçoit qu'il y a 6 cubes qui qui n'ont aucun cube au-dessus. Il manque donc 3 cubes au-dessus de chacun de ces 6 cubes. Il ne manque aucun autre cube.
Le nombre de cubes manquants est égal à 6(3), ou 18. Le nombre de petits cubes qui restent dans la structure est donc égal à 64 − 18, ou 46.

Réponse : (A)

7. *Solution 1*
Puisque $\sqrt{n^2 + n^2 + n^2 + n^2} = 64$, alors $\sqrt{4n^2} = 64$, d'où $2n = 64$, puisque $n > 0$.
Donc $n = 32$.

Solution 2
Puisque $\sqrt{n^2 + n^2 + n^2 + n^2} = 64$, alors $\sqrt{4n^2} = 64$.
Donc $4n^2 = 64^2$, ou $4n^2 = 4096$, d'où $n^2 = 1024$.
Puisque $n > 0$, alors $n = \sqrt{1024}$, ou $n = 32$.

Réponse : (D)

8. Pour maximiser le nombre de chansons qu'elle peut jouer en 3 heures, Gabrielle devrait utiliser autant de chansons courtes que possible. (En remplaçant une chanson longue par une chanson courte, elle diminue le temps utilisé.)
Si Gabrielle utilise toutes les 50 chansons courtes de sa collection, elle utilisera 150 minutes.

Il lui reste 30 minutes ($180 - 150 = 30$). Elle peut donc jouer 6 chansons longues ($30 \div 5 = 6$) qui ont chacune une durée de 5 minutes.
En tout, elle peut jouer un maximum de 56 chansons ($50 + 6 = 56$).

Réponse : (C)

9. Il y a quatre ♠ dans chacune des trois premières colonnes. Il faut donc déplacer un ♠ de chacune de ces colonnes pour que chacune ne contienne que trois ♠.
Il faut donc déplacer au moins trois ♠ en tout.
Si on déplace le ♠ du coin supérieur gauche au coin inférieur droit,

	♠	♠	♠	
♠	♠	♠		♠
♠	♠			
♠	♠	♠	♠	
		♠		♠

le ♠ de la quatrième rangée, troisième colonne à la cinquième rangée, quatrième colonne

	♠	♠	♠	
♠	♠	♠		♠
♠	♠			
♠	♠		♠	
		♠	♠	♠

et le ♠ de la deuxième rangée, deuxième colonne à la troisième rangée, cinquième colonne,

	♠	♠	♠	
♠		♠		♠
♠	♠			♠
♠	♠		♠	
		♠	♠	♠

on obtient trois ♠ dans chaque rangée et chaque colonne.
Puisqu'il faut déplacer au moins trois ♠ et que l'on peut réussir en déplaçant trois ♠, alors le nombre de ♠ qu'il faut déplacer est bien 3.
(D'autres combinaisons de trois déplacements sont possibles.)

Réponse : (C)

10. Au départ, le bas de l'échelle de 25 m est à 7 m du mur.
Soit h m la hauteur initiale du haut de l'échelle.
D'après le théorème de Pythagore, $h^2 + 7^2 = 25^2$, ou $h^2 + 49 = 625$.
Donc $h^2 = 625 - 49$, ou $h^2 = 576$. Donc $h = \sqrt{576}$, ou $h = 24$, puisque $h > 0$.
Lorsque le haut de l'échelle a glissé vers le bas sur une distance de 4 m, il se trouve à 20 m au-dessus du sol ($24 - 4 = 20$).
Soit d m la nouvelle distance du bas de l'échelle jusqu'au mur.
D'après le théorème de Pythagore, $20^2 + d^2 = 25^2$, d'où $d^2 = 25^2 - 20^2$, ou $d^2 = 225$.
Puisque $d > 0$, alors $d = 15$.
Le bas de l'échelle a donc été déplacé sur une distance de 8 m ($15 - 7 = 8$).

Réponse : (E)

11. Puisque le résultat doit être vrai pour n'importe quelles valeurs strictement positives de m et de n telles que $m < n$, on choisit $m = 1$ et $n = 2$.
On obtient $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ et $\frac{m+3}{n+3} = \frac{4}{5}$.
Dans ce cas, on a $\frac{m+3}{n+3} > \frac{m}{n}$ et les autres choix de réponse ne conviennent pas. Donc, la réponse doit être (D).
(On aurait pu le démontrer de façon algébrique en partant de $m < n$, d'où $3m < 3n$, puis $mn + 3m < mn + 3n$, puis $m(n + 3) < n(m + 3)$, puis $\frac{m}{n} < \frac{m+3}{n+3}$.)

Réponse : (D)

12. De 5000 à 6000, tous les nombres, à l'exception de 6000, ont un chiffre des milliers égal à 5.
On remarque que pour le nombre 6000, le chiffre des milliers n'est pas égal à la somme des trois autres chiffres.
On cherche donc des entiers de la forme $5xyz$ de manière que $x + y + z = 5$.
Les choix possibles des trois chiffres x, y et z sont : 5, 0, 0 ; 4, 1, 0 ; 3, 2, 0 ; 3, 1, 1 ; 2, 2, 1.
Chaque choix de trois chiffres *différents* (par exemple, 4, 1, 0) nous donne 6 arrangements : 410, 401, 140, 104, 041, 014.
Chaque choix de trois chiffres dont *deux sont identiques* (par exemple, 5, 0, 0) nous donne 3 arrangements : 500, 050, 005.
Donc, le choix 5, 0, 0, le choix 3, 1, 1 et le choix 2, 2, 1 forment 3 entiers chacun, tandis que le choix 4, 1, 0 et le choix 3, 2, 0 forment 6 entiers chacun.
Donc, le nombre d'entiers qui vérifient la condition donnée est égal à $3(3) + 2(6)$, ou 21.

Réponse : (C)

13. Puisque x est un entier, alors $x + 1$ est un entier.
Puisque $\frac{-6}{x+1}$ doit être un entier, alors $x + 1$ doit être un diviseur de -6.
Il y a donc 8 valeurs possibles de $x + 1$, soit -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3 et 6.
Il y a donc 8 valeurs possibles de x, soit -7, -4, -3, -2, 0, 1, 2 et 5.

Réponse : (A)

14. Puisque les trois entiers sur n'importe quelle ligne droite ont un produit de 3240 et qu'ils incluent 45, les deux autres entiers sur chaque droite doivent donc avoir un produit de $\frac{3240}{45}$, ou 72.
Les paires d'entiers possibles sont 1 et 72, 2 et 36, 3 et 24, 4 et 18, 6 et 12, ainsi que 8 et 9.
Ces paires d'entiers ont pour sommes respectives 73, 38, 27, 22, 18 et 17.
Pour maximiser la somme des huit nombres qui entourent 45, on choisit les paires qui ont les plus grandes sommes. On choisit donc les quatre premières paires.
Donc, la plus grande somme possible des huit nombres qui entourent 45 est égale à $73+38+27+22$, ou 160.

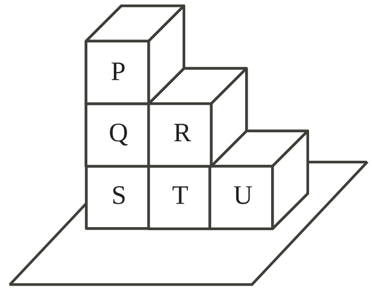
Réponse : (E)

15. Supposons que l'école Desloges compte 1000 élèves.
Lundi, 100 élèves étaient donc absents et 900 élèves étaient présents.
Mardi, 10 % des 900 élèves qui étaient présents lundi, soit 90 élèves ($0{,}1(900) = 90$), étaient absents. Les autres 810 élèves ($900 - 90 = 810$) qui étaient présents lundi sont présents mardi.
De même, 10 % des 100 élèves qui étaient absents lundi, soit 10 élèves ($0{,}1(100) = 10$), étaient présents mardi. Les autres 90 élèves ($100 - 10 = 90$) qui étaient absents lundi sont toujours absents mardi.

Donc, 820 élèves ($810 + 10 = 820$) étaient présents mardi. Donc, $\frac{820}{1000}$, ou $\frac{82}{100}$, ou 82 % des élèves de l'école étaient présents mardi.

Réponse : (B)

16. On nomme les six dés comme suit :



La somme maximale des numéros sur les 21 faces exposées se produit lorsque l'on maximise la somme des numéros sur les faces exposées de chaque dé.
Le dé P a 5 faces exposées. La somme des numéros sur ses faces exposées est maximisée lorsque la face 1 est cachée. La somme est égale à $2 + 3 + 4 + 5 + 6$, ou 20.
Les dés Q et S ont chacun 3 faces exposées. Deux de ces faces sont opposées et leurs numéros ont donc une somme de 7. Pour maximiser la somme des numéros sur les faces exposées de ces dés, on place les dés de manière que le numéro sur la face exposée non appariée soit un 6. (Ce numéro paraîtra du côté gauche de la pile.) La somme des numéros sur les faces exposées de chacun de ces dés est égale à $6 + 7$, ou 13.
Les dés R et U ont chacun 4 faces exposées. Deux de ces faces sont opposées et leurs numéros ont donc une somme de 7. Pour maximiser la somme des numéros sur les faces exposées de ces dés, on place les dés de manière que les numéros sur les faces non appariées soient un 5 et un 6 (sur le dessus et du côté droit de la pile). La somme des numéros sur les faces exposées de chacun de ces dés est égale à $5 + 6 + 7$, ou 18.
Le dé T a 2 faces exposées et ces faces sont opposées l'une à l'autre. Les numéros sur ces faces exposées ont donc une somme de 7.
Donc, la somme maximale des numéros sur les 21 faces exposées de ces dés est égale à $20 + 13 + 13 + 18 + 18 + 7$, ou 89.

Réponse : (C)

17. Soit r le rayon de la région ombrée.
La longueur du demi-cercle est égale à la moitié de la circonférence du cercle correspondant, soit $\frac{1}{2}(2\pi r)$, ou πr.
Donc, le périmètre de la région est égal à $\pi r + 2r$.
Puisque la région a un périmètre de 20, alors $\pi r + 2r = 20$, ou $r(\pi + 2) = 20$, ou $r = \dfrac{20}{\pi + 2}$.
L'aire de la région ombrée est égale la moitié de l'aire du cercle correspondant de même rayon.
Elle est donc égale à $\frac{1}{2}\pi\left(\dfrac{20}{\pi+2}\right)^2$, ou environ 23,768. Parmi les choix de réponse, le nombre 23,8 est la meilleure approximation de cette aire.

Réponse : (B)

18. Soit d km la longueur de sa route.
Puisque Hana arrive 1 minute en avance lorsqu'elle conduit à 75 km/h et 1 minute en retard lorsqu'elle conduit à 70 km/h, il y a une différence de 2 minutes, ou $\frac{1}{30}$ d'heure entre ces deux temps.

À une vitesse de 75 km/h, elle met $\frac{d}{75}$ heures pour faire le trajet, tandis qu'à 70 km/h, elle met $\frac{d}{70}$ heures pour le faire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{d}{70}-\frac{d}{75} &= \frac{1}{30}\\ 75d-70d &= \frac{75(70)}{30}\\ 5d &= 25(7)\\ d &= 35\end{aligned}$$

Le chemin suivi a une longueur de 35 km.

Réponse : (B)

19. Puisque $2^x = 15$ et $15^y = 32$, alors $(2^x)^y = 32$, ou $2^{xy} = 32$.
Puisque $2^5 = 32$, alors $xy = 5$.

Réponse : (A)

20. Puisque le cercle a un rayon de 1, son aire est égale à $\pi(1^2)$, ou π.
Puisque le carré et le cercle ont la même aire, le carré a des côtés de longueur $\sqrt{\pi}$.
Soit M le milieu du segment de droite PQ.
Puisque PQ est une corde du cercle, alors OM est perpendiculaire au segment PQ.
Puisque OM est perpendiculaire à PQ et que O est le centre du carré, alors la longueur de OM est la moitié de la longueur des côtés du carré. Donc $OM = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OPM, $PM^2 = OP^2 - OM^2$, d'où $PM^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2$, ou $PM^2 = 1 - \frac{1}{4}\pi$.
Puisque $PQ = 2PM$, alors $PQ = 2\sqrt{1-\frac{1}{4}\pi}$, ou $PQ = \sqrt{4(1-\frac{1}{4}\pi)}$, ou $PQ = \sqrt{4-\pi}$.

Réponse : (A)

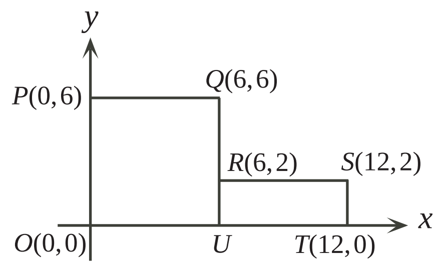
21. *Solution 1*
Puisqu'on cherche le nombre maximum de personnes, on examine si le choix de réponse le plus grand, soit 80, pourrait être le bon.
Est-il possible que 80 personnes aient mangé du gâteau et de la crème glacée ?
Si c'est possible, alors au moins 80 personnes ont mangé du gâteau et au moins 120 personnes ($\frac{3}{2}(80) = 120$) ont mangé de la crème glacée. (Il peut y avoir des gens qui ont été comptés deux fois.)
Est-ce possible ?
Oui c'est possible si exactement 120 personnes ont mangé de la crème glacée et exactement 80 personnes ont mangé du gâteau et si ces 80 personnes ont également mangé de la crème glacée. Donc, il est possible qui 80 personnes aient mangé du gâteau et de la crème glacée. Donc, la réponse doit être (D).

Solution 2
Soit x le nombre de personnes qui ont mangé du gâteau seulement, y le nombre de personnes qui ont mangé de la crème glacée, d le nombre de personnes qui ont mangé les deux et r le nombre de personnes qui n'ont rien mangé.
On sait que $x + y + d + r = 120$. Donc $x + y + d = 120 - r$.
On sait que le nombre total de personnes qui ont mangé du gâteau est égal à $x + d$ et que le

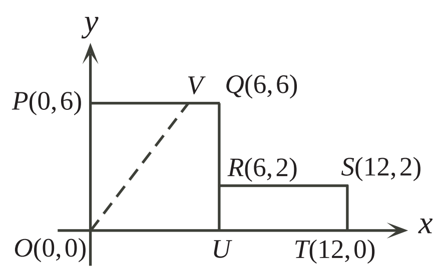
nombre total de personnes qui ont mangé de la crème glacée est égal à $y+d$. Donc $\dfrac{y+d}{x+d}=\dfrac{3}{2}$, d'où $2(y+d)=3(x+d)$, ou $2y=3x+d$, ou $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}d$.
Donc $x+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}d+d=120-r$, ou $\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}d=120-r$.
On multiplie chaque membre par 2 pour obtenir $5x+3d=240-2r$.
Puisque x, d et n sont non négatifs, alors le membre de gauche est inférieur ou égal à 240. Donc, d doit être inférieur ou égal à $\frac{1}{3}(240)$, ou 80. Il y a égalité lorsque $y=r=0$.
On a vu, dans la Solution 1, que $d=80$ est possible.

Réponse : (D)

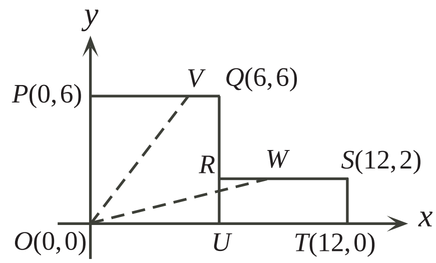
22. On prolonge le segment QR pour qu'il coupe l'axe des abscisses au point $U(6,0)$.



L'aire de la figure $OPQRST$ est égale à la somme de l'aire du carré $OPQU$ (qui a des côtés de longueur 6 et qui a donc une aire de 36) et de l'aire du rectangle $RSTU$ (qui a une base de 6 et une hauteur de 2 et qui a donc une aire de 12).
La figure $OPQRST$ a donc une aire de 48. Si on coupe cette figure en trois parties ayant une même aire, cette aire doit donc être égale à 16.
Soit V le premier point sur le contour (en partant de P et en allant vers la droite) de manière que la droite qui passe aux points O et V coupe la figure de manière à produire un morceau avec une aire de 16.
Puisque l'aire du triangle OPQ est la moitié de l'aire du carré $OPQU$, elle est égale à 18. Donc, V est situé à la gauche de Q sur le segment PQ.
Donc, V a pour coordonnées $(v,6)$, v étant un nombre quelconque.



On considère le triangle OPV. Sa base OP a une longueur de 6 et sa hauteur PV a pour longueur v.
Puisque le triangle OPV a une aire de 16, alors $\frac{1}{2}(6)(v)=16$, d'où $3v=16$, ou $v=\frac{16}{3}$.
Le segment OV a donc une pente de $\dfrac{6}{\frac{16}{3}}$, ou $\frac{9}{8}$.
Soit W le deuxième point sur le contour qui coupe la figure de manière à produire un morceau avec une aire de 16.
Puisque l'aire du triangle OTS est égale à $\frac{1}{2}(OT)(TS)$, ou $\frac{1}{2}(12)(2)$, ou 12 (ce qui est moins de $\frac{1}{3}$ de l'aire totale) et que l'aire du trapèze $ORST$ est égale à $\frac{1}{2}(RS+OT)(ST)$, ou $\frac{1}{2}(6+12)(2)$, ou 18 (ce qui est plus que $\frac{1}{3}$ de l'aire totale), alors le point W est situé sur le segment RS.



Soit $(w, 2)$ les coordonnées de W, w étant un nombre quelconque.
On veut que le trapèze $WSTO$ ait une aire de 16. Donc :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(WS + OT)(ST) &= 16\\ \tfrac{1}{2}(12 - w + 12)(2) &= 16\\ 24 - w &= 16\\ w &= 8\end{aligned}$$

Donc, le point W a pour coordonnées $(8, 2)$ et le segment OW a donc une pente de $\frac{2}{8}$, ou $\frac{1}{4}$.
La somme des deux pentes est égale à $\frac{9}{8} + \frac{1}{4}$, ou $\frac{11}{8}$.

Réponse : (E)

23. On additionne la deuxième et la troisième équation, membre par membre pour obtenir :

$$\begin{aligned}ac + bd + ad + bc &= 77\\ ac + ad + bc + bd &= 77\\ a(c + d) + b(c + d) &= 77\\ (a + b)(c + d) &= 77\end{aligned}$$

Puisque chacun des nombres a, b, c et d est un entier strictement positif, alors $a+b$ et $c+d$ sont des entiers positifs et chacun est au moins égal à 2.
Puisque le produit de $a + b$ et de $c + d$ est égal à $77 = 7 \times 11$ (7 et 11 étant premiers), alors un facteur doit être égal à 7 et l'autre doit être égal à 11.
Donc $a + b + c + d = 7 + 11$, ou $a + b + c + d = 18$.
(Il est possible de démontrer que $(a, b, c, d) = (5, 2, 4, 7)$ est une solution du système.)

Réponse : (D)

24. Les trois machines fonctionnent de manière que si les deux nombres de la sortie ont un diviseur commun supérieur à 1, alors les deux nombres de l'entrée doivent avoir un diviseur commun supérieur à 1.
Pour le vérifier, on considère chaque machine séparément. On utilise le fait que si deux nombres sont des multiples de d, alors leur somme et leur différence sont aussi des multiples de d.
Supposons que (m, n) est une entrée de la machine A. La sortie est donc (n, m). Si n et m ont un diviseur commun supérieur à 1, alors m et n en ont un aussi.
Supposons que (m, n) est une entrée de la machine B. La sortie est donc $(m + 3n, n)$. Si $m + 3n$ et n ont un diviseur commun d, alors d est un diviseur de $(m + 3n) - n - n - n$, c'est-à-dire de m, puisque chaque terme de la soustraction est un multiple de d. Donc, m et n ont un diviseur commun d.
Supposons que (m, n) est une entrée de la machine C. La sortie est donc $(m - 2n, n)$. Si $m - 2n$ et n ont un diviseur commun d, alors d est un diviseur de $(m - 2n) + n + n$, c'est-à-dire de m, puisque chaque terme de l'addition est un multiple de d. Donc, m et n ont un diviseur commun d.

Dans chaque cas, tout diviseur commun des nombres de l'entrée est un diviseur commun des nombres de la sortie.

On examine les nombres qui paraissent dans les choix de réponse. On écrit les six nombres en factorisation première :

$$\begin{aligned}
2009 &= 7(287) = 7(7)(41)\\
1016 &= 8(127) = 2(2)(2)(127)\\
1004 &= 4(251) = 2(2)(251)\\
1002 &= 2(501) = 2(3)(167)\\
1008 &= 8(126) = 8(3)(42) = 16(3)(3)(7) = 2(2)(2)(2)(3)(3)(7)\\
1032 &= 8(129) = 8(3)(43) = 2(2)(2)(3)(43)
\end{aligned}$$

Parmi les nombres 1002, 1004, 1008, 1016 et 1032, seul le nombre 1008 a un diviseur commun avec 2009, soit 7.
Puisque 2009 et 1008 ont un diviseur commun 7, alors quelle que soit l'entrée qui a produit la sortie $(2009, 1008)$, 7 doit être un diviseur commun des deux nombres de l'entrée. Il en est de même des deux nombres qui servent d'entrée à n'importe quelle étape, peu importe les machines utilisées.
Donc, $(2009, 1008)$ ne peut provenir du couple initial $(0, 1)$.

Remarques

- Cet argument ne nous dit pas que les autres couples peuvent être le résultat du couple initial $(0, 1)$. Il démontre seulement que $(2009, 1008)$ ne peut provenir de ce couple initial.
- Il est possible, avec un certain effort, de partir du couple initial $(0, 1)$ pour obtenir chacun des autres couples. (Le processus est plus facile à suivre qu'à décrire !)
  On remarque d'abord que si la sortie de la machine A est (a, b), alors l'entrée était (b, a), puisque la machine A intervertit l'ordre des nombres du couple.
  De plus, si la sortie de la machine B est (a, b), alors son entrée était $(a - 3b, b)$, puisque la machine B ajoute trois fois le deuxième nombre au premier.
  Enfin si la sortie de la machine C est (a, b), alors son entrée était $(a + 2b, b)$, puisque la machine C soustrait deux fois le deuxième nombre du premier.
  On considère le couple $(2009, 1016)$. On cherche une suite d'opérations qui nous permettent de reculer de $(2009, 1016)$ à $(0, 1)$. On cherche n'importe quelle suite qui fonctionne plutôt qu'une suite particulière.

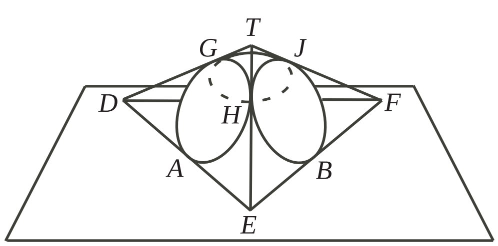
  Avant de procéder, on remarque que si le couple (m, n) est utilisé comme entrée dans la machine B et que la sortie est utilisée comme entrée dans la machine C, on a pour sortie $((m+3n)-2n, n)$, ou $(m+n, n)$. Donc, si l'utilisation de la machine B suivie de la machine C (on dira « machine BC ») donne une sortie (a, b), l'entrée devait être $(a-b, b)$. On utilisera cette combinaison pour travailler à rebours et en arriver à $(0, 1)$. Cela simplifiera les choses et évitera les nombres négatifs.
  On utilise un tableau et notre stratégie, à chaque étape, est d'obtenir des nombres de plus en plus petits :

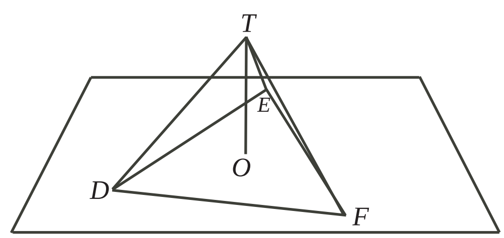
Sortie	Machine	Entrée
$(2009, 1016)$	BC	$(993, 1016)$
$(993, 1016)$	A	$(1016, 993)$
$(1016, 993)$	BC	$(23, 993)$
$(23, 993)$	A	$(993, 23)$
$(993, 23)$	BC, 43 fois	$(4, 23)$
$(4, 23)$	A	$(23, 4)$
$(23, 4)$	BC, 5 fois	$(3, 4)$
$(3, 4)$	A	$(4, 3)$
$(4, 3)$	BC	$(1, 3)$
$(1, 3)$	A	$(3, 1)$
$(3, 1)$	B	$(0, 1)$

En procédant à rebours dans ce tableau, on voit comment on peut commencer par le couple $(0, 1)$ pour en arriver au couple $(2009, 1016)$.
De façon semblable, il est possible d'en arriver à chacun des couples $(2009, 1004)$, $(2009, 1002)$ et $(2009, 1032)$.

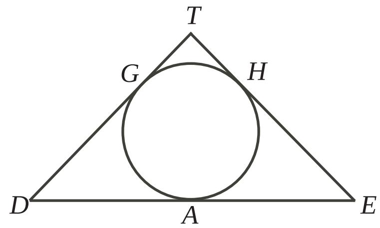
Réponse : (D)

25. Soit A, B et C les points où les cercles sont tangents au plan.
Chaque cercle est contenu dans un plan. Ce plan coupe le plan initial le long d'une droite qui passe à un des points A, B et C et il est tangent au cercle à ce point.
Soit D, E et F les points d'intersection de ces trois droites, A étant sur DE, B étant sur EF et C étant sur FD.
Par symétrie, $DE = EF = FD$. De plus, A, B et C sont les milieux de ces segments. (De façon plus formelle, on peut tirer ces conclusions puisque la configuration n'est pas changée lorsqu'on lui fait subir une rotation de 120° ou des réflexions par rapport aux plans verticaux qui passent par T et chacun des points D, E et F.)
Donc, le triangle DEF est équilatéral. Soit O le centre de son cercle inscrit. O est donc le point d'intersection des bissectrices du triangle DEF. Puisque ce triangle est équilatéral, ses bissectrices sont aussi ses médianes, ses médiatrices et ses hauteurs.
Soit G le point de contact des cercles contenant C et A, H le point de contact des cercles contenant A et B et J le point de contact des cercles contenant B et C. Par symétrie, on a $GH = HJ = JG$. On cherche le rayon du cercle qui passe par les points G, H et J.
On trace les droites DG, EH et FJ. Ces droites sont tangentes aux cercles initiaux aux points respectifs G, H et J. Elles sont aussi concourantes. Soit T leur point d'intersection. T est directement au-dessus du point O. (Ces conclusions proviennent aussi de la symétrie par rotation et par réflexion.) Le tétraèdre $TDEF$ a pour base le triangle équilatéral DEF et ses faces sont des triangles congruents.



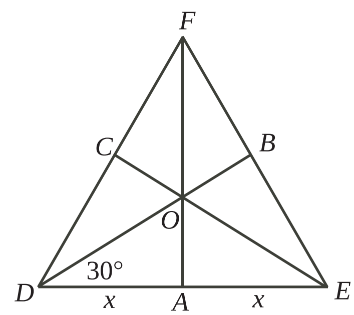


On considère le triangle DET qui est une face latérale du tétraèdre. Le cercle initial (de rayon 10) qui contient A est tangent aux trois côtés du triangle DET aux points de contact A, G et H.



De plus, le triangle DET est incliné à un angle de 45° par rapport au plan horizontal.
Puisque A est le milieu de DE, alors OA est perpendiculaire à DE. De plus, TA est perpendiculaire à DE.
Puisque le triangle DET est incliné à un angle de 45° par rapport à l'horizontale, alors $\angle TAO = 45°$.
Le triangle TAO est rectangle en O (puisque T est directement au-dessus de O). Donc puisque $\angle TAO = 45°$, le triangle TAO est un triangle remarquable 45°-45°-90°. Donc $TA = \sqrt{2}AO$.

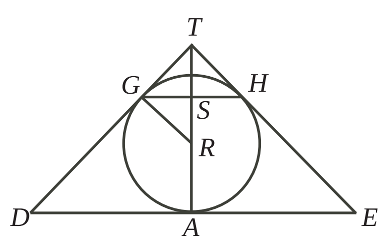
On se penche maintenant sur les dimensions du triangle DEF.
Soit $DE = 2x$. Donc, $DA = AE = x$ et le triangle DEF est équilatéral avec des côtés de longueur $2x$.



DO est la bissectrice de l'angle EDF. Donc $\angle ODA = 30°$ et OA est perpendiculaire à DE. Le triangle DOA est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $OA = \frac{1}{\sqrt{3}}DA$, ou $OA = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, et $OD = \frac{2}{\sqrt{3}}DA$, ou $OD = \frac{2}{\sqrt{3}}x$.
Puisque $TA = \sqrt{2}AO$, alors $TA = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle TAD, $TD = \sqrt{TA^2 + DA^2}$, d'où $TD = \sqrt{x^2 + \frac{2}{3}x^2}$, ou $TD = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x$, puisque $x > 0$.

Ainsi dans le triangle DET, on a $DE = 2x$, $DA = AE = x$, $TD = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x$ et $TA = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$.

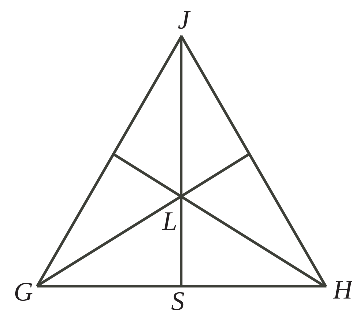
Soit R le centre du cercle inscrit dans le triangle DET. (Par symétrie, R est situé sur TA.)
On trace le segment RG. Puisque RG est un rayon du cercle, alors $RG = 10$ et RG est perpendiculaire à DT.
On trace le segment GH. Soit S le point d'intersection de GH et de TA. Par symétrie, GH est perpendiculaire à TA.



Les triangles TSG, TGR et TAD sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont un angle commun en T.
On cherche la longueur SG.
Puisque les triangles TSG et TAD sont semblables, $\dfrac{SG}{TG} = \dfrac{AD}{TD} = \dfrac{x}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x}$, d'où $SG = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}TG$.

Puisque les triangles TGR et TAD sont semblables, $\dfrac{TG}{GR} = \dfrac{TA}{AD} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x}{x}$, d'où $TG = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}GR$, ou $TG = 10\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
Donc $SG = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\left(10\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, ou $SG = 10\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, ou $SG = 2\sqrt{10}$.

On considère le triangle GHJ. Il est équilatéral. S est le milieu de GH et $SG = 2\sqrt{10}$. Soit L le centre du cercle inscrit dans ce triangle.



L est aussi le centre du cercle qui passe par les points G, H et J. En effet, $LG = LJ = LH$ et LG est donc le rayon de ce cercle.
Puisque $OD = \frac{2}{\sqrt{3}}AD$, alors $LG = \frac{2}{\sqrt{3}}SG$, car les triangles DEF et GHJ sont équilatéraux et les rapports $OD : AD$ et $LG : SG$ sont égaux. Donc $LG = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$, ou $LG = \frac{4}{3}\sqrt{30}$, ce qui est le rayon du cercle.
Puisque $\frac{4}{3}\sqrt{30} \approx 7{,}303$, le choix de réponse 7,3, est la meilleure approximation du rayon.

Réponse : (C)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat 2008

(11^{e} année – Secondaire V)

le mardi 19 février 2008

Solutions

1. On a : $\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2}{1\times 2\times 3} = \dfrac{1+4+9+16}{6} = \dfrac{30}{6} = 5$

Réponse : (D)

2. *Solution 1*
On a : $6\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right)+6\left(\frac{2}{3}\right) = 9+4 = 13$

Solution 2
On simplifie d'abord le contenu entre parenthèses : $6\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right) = 6\left(\frac{9}{6}+\frac{4}{6}\right) = 6\left(\frac{13}{6}\right) = 13$

Réponse : (A)

3. Puisque $1+2+3+4+5+x = 21+22+23+24+25$, alors :

$$x = 21-1+22-2+23-3+24-4+25-5 = 5(20) = 100$$

Réponse : (C)

4. Puisque le camion vide pèse 9600 kg et que le camion chargé pèse 38 000 kg, le poids total des 40 caisses est de (38 000 − 9600) kg, ou 28 400 kg.
Puisque 40 caisses identiques pèsent 28 400 kg, chacune pèse 28 400 kg ÷ 40, ou 710 kg.

Réponse : (E)

5. Puisque $\dfrac{18}{\sqrt{x}} = 2$, alors $\sqrt{x} = 9$, car le nombre par lequel il faut diviser 18 pour obtenir 2 est 9.
Puisque $\sqrt{x} = 9$, alors $x = 9^2$, ou $x = 81$.

Réponse : (A)

6. Puisque $RQ = RS$, alors $\angle RSQ = \angle RQS$.
Dans le triangle QRS, $\angle RQS + \angle QRS + \angle RSQ = 180^\circ$, ou $2(\angle RQS) + 60^\circ = 180^\circ$.
Donc $\angle RQS = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ)$, ou $\angle RQS = 60^\circ$.
Puisque $PQ = PS$, alors $\angle PSQ = \angle PQS$.
Dans le triangle QPS, $\angle PQS + \angle QPS + \angle PSQ = 180^\circ$, ou $2(\angle PQS) + 30^\circ = 180^\circ$.
Donc $\angle PQS = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ)$, ou $\angle PQS = 75^\circ$.
Donc $\angle PQR = \angle PQS - \angle RQS$, d'où $\angle PQR = 75^\circ - 60^\circ$, ou $\angle PQR = 15^\circ$.

Réponse : (E)

7. *Solution 1*
Puisque p est impair et que q est pair, alors $3p$ est impair (il est le produit de deux nombres impairs) et $2q$ est pair (il est le produit de deux nombres pairs).
Donc $3p + 2q$ est impair (il est la somme d'un nombre impair et d'un nombre pair).
(Puisqu'on a trouvé une réponse, il n'est pas nécessaire de vérifier les autres choix. On pourrait cependant vérifier que les autres choix sont pairs.)

Solution 2
On peut choisir des valeurs particulières de p et de q, puisque le problème implique que le résultat est vrai peu importe les valeurs choisies de p et de q.
On vérifie les cinq choix de réponse avec $p = 1$ et $q = 2$ (p est impair et q est pair).
On a $2p + 3q = 8$, $3p + 2q = 7$, $4p + q = 6$, $2(p + 3q) = 14$ et $pq = 2$.
Le seul choix impair est $3p + 2q$.

Réponse : (B)

8. *Solution 1*
L'énoncé du problème laisse entendre que la valeur de $a+b+c+d+e+f$ est la même, peu importe les nombres abc et def choisis qui vérifient les conditions données.
Voici un exemple qui vérifie les conditions données : $889+111=1000$
On a alors $a+b+c+d+e+f=8+8+9+1+1+1=28$, ce qui doit être la valeur constante.

Solution 2
On considère l'addition, colonne par colonne, en commençant par la colonne des unités.
Puisque $c+f$ se termine par un 0, alors $c+f=0$ ou $c+f=10$. (L'expression $c+f$ ne peut avoir une valeur supérieure ou égale à 20, puisque c et f prennent des valeurs de 1 à 9.)
Puisqu'aucun chiffre n'est égal à 0, on ne peut avoir $c+f=0+0$. Donc $c+f=10$. (Il y a donc une retenue de 1 dans la 2e colonne.)
Puisque le chiffre des dizaines de la somme est égal à 0 et qu'il y a une retenue de 1, alors $b+e$ se termine par un 9. On a donc $b+e=9$. (Puisque b et e sont des chiffres, $b+e$ ne peut prendre une valeur de 19 ou plus.)
Dans la colonne des dizaines, on a $b+e=9$ plus la retenue de 1, ce qui donne le chiffre 0 dans la somme, ainsi qu'une retenue de 1 dans la colonne des centaines.
On utilise un argument semblable pour conclure que $a+d=9$.
Donc, $a+b+c+d+e+f=(a+d)+(b+e)+(c+f)=9+9+10=28$.

Réponse : (D)

9. *Solution 1*
Puisque $\frac{1}{5}$ équivaut à 20 %, alors Beshmi un total de 20 % + 42 %, ou 62 % de ses économies dans les compagnies X et Y. Elle place donc 100 % − 62 %, ou 38 % de ses économies dans la compagnie Z.
Puisque 42 % de ses économies correspond à 10 500 \$, alors 38 % devrait correspondre à un peu moins, soit 9500 \$.

Solution 2
Puisque $\frac{1}{5}$ équivaut à 20 %, alors Beshmi un total de 20 % + 42 %, ou 62 % de ses économies dans les compagnies X et Y. Elle place donc 100 % − 62 %, ou 38 % de ses économies dans la compagnie Z.
Puisque 42 % de ses économies correspond à 10 500 \$, alors 1 % correspond à 10 500 \$ ÷ 42, soit 250 \$. Donc, 38 % correspond à 38 × 1 %, soit 38 × 250 \$, ou 9500 \$. Elle place donc 9500 \$ dans la compagnie Z.

Réponse : (D)

10. Le sommet inférieur gauche du triangle a pour coordonnées $(0,0)$, puisque la droite d'équation $y=x$ (celle qui a une pente positive) passe par l'origine.
Le sommet inférieur droit du triangle est le point où la droite d'équation $y=-2x+3$ coupe l'axe des abscisses. On pose $y=0$ pour obtenir $-2x+3=0$, ou $x=\frac{3}{2}$. Ce sommet a donc pour coordonnées $\left(\frac{3}{2},0\right)$.
Le sommet supérieur du triangle est le point d'intersection des deux droites. On l'obtient en comparant les y des deux équations. On obtient $x=-2x+3$, d'où $3x=3$, ou $x=1$.
Ce sommet a donc pour coordonnées $(1,1)$.
Le triangle a donc une base horizontale de $\frac{3}{2}$ et une hauteur correspondante de 1 (l'ordonnée du sommet supérieur).
L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)(1)$, ou $\frac{3}{4}$.

Réponse : (A)

11. Puisque $\dfrac{1}{x}=2$, on a $x=\frac{1}{2}$ et l'équation $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=3$ devient $2+\dfrac{3}{y}=3$, ou $\dfrac{3}{y}=1$. Donc $y=3$.
Donc $x+y=\frac{1}{2}+3$, ou $x+y=\frac{7}{2}$.

Réponse : (D)

12. Puisque Siobhan a une moyenne de 66 sur ses sept épreuves, la somme des sept notes est égale à 7×66, ou 462.
On a donc $69+53+69+71+78+x+y=462$, d'où $340+x+y=462$, ou $x+y=122$.
Puisque la valeur de $x+y$ est constante, la valeur de x est un minimum lorsque celle de y est un maximum. Donc $y=100$.
La plus petite valeur possible de x est donc $122-100$, ou 22.

Réponse : (A)

13. Puisque P et Q sont les centres de deux cercles tangents, le segment PQ passe par le point de contact de ces cercles. Donc, la longueur PQ est la somme des rayons de ces cercles. Donc $PQ=3+2$, ou $PQ=5$.
De même, $PR=3+1$ et $QR=2+1$, c'est-à-dire que $PR=4$ et $QR=3$.
Le triangle PQR a des côtés de longueurs 3, 4 et 5. Il est rectangle, puisque $3^2+4^2=5^2$.
Puisque les côtés de longueurs 3 et 4 sont perpendiculaires, l'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2}(3)(4)$, ou 6.

Réponse : (B)

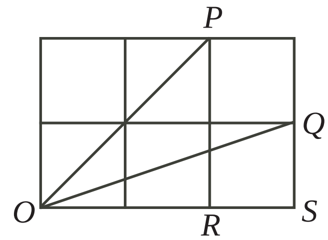
14. Le cercle de diamètre XZ a un rayon de 6, puisque $XZ=12$. Son aire est égale à $\pi(6^2)$, ou 36π.
Le cercle de diamètre ZY a un rayon de 4, puisque $ZY=8$. Son aire est égale à $\pi(4^2)$, ou 16π.
Donc, l'aire de la région non ombrée est égale à $36\pi+16\pi$, ou 52π.
Puisque XZY est un segment de droite, alors $XY=XZ+ZY$, d'où $XY=12+8$, ou $XY=20$.
Le cercle de diamètre XY a donc un rayon de 10. Son aire est égale à $\pi(10^2)$, ou 100π.
L'aire de la région ombrée est égale à celle du cercle de diamètre XY moins l'aire de la région non ombrée, soit $100\pi-52\pi$, ou 48π.
Donc, le rapport de l'aire de la région ombrée à l'aire de la région non ombrée est égal à $48\pi : 52\pi$, soit $48 : 52$, ou $12 : 13$.

Réponse : (B)

15. Puisque Brigitte parcourt le 2^{e} tour de piste à $\frac{9}{10}$ de la vitesse d'Alice, elle met $\frac{10}{9}$ du temps de celle-ci pour faire le tour, soit $\frac{10}{9}(72)$ secondes, ou 80 secondes.
(Si la piste a une longueur de d et si la vitesse d'Alice est de v, le temps qu'Alice met pour faire un tour de piste est égal à $t=\dfrac{d}{v}$; pour faire le 2^{e} tour de piste, le temps que Brigitte met est égal à $\dfrac{d}{\frac{9}{10}v}$, soit $\dfrac{10}{9}\dfrac{d}{v}$, ou $\dfrac{10}{9}t$.)
De même, pour faire le 3^{e} tour, Cécile met $\frac{3}{4}(80)$ secondes, ou 60 secondes. Pour faire le 4^{e} tour, Diane met $\frac{5}{6}(60)$ secondes, ou 50 secondes.
Pour la course au complet, elles ont mis $72+80+60+50$ secondes, soit 262 secondes, ou 4 minutes et 22 secondes.

Réponse : (B)

16. On nomme les points R et S comme dans la figure.



Puisque chaque petit carré a des côtés de longueur 2, alors $OR = RP = 2(2)$, ou $OR = RP = 4$. De plus, $\angle ORP = 90^\circ$.
Puisque le triangle ORP est isocèle et rectangle, $\angle ROP = 45^\circ$.
Dans le triangle OSQ, on a $QS = 2$, $OS = 3(2)$, ou $OS = 6$, et $\angle OSQ = 90^\circ$.
Donc $\tan(\angle QOS) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, d'où $\angle QOS \approx 18{,}43^\circ$.
Donc $\angle POQ = \angle POR - \angle QOS$, d'où $\angle POQ \approx 45^\circ - 18{,}43^\circ$, ou $\angle POQ = 26{,}57^\circ$. Au dixième de degré près, $\angle POQ = 26{,}6^\circ$.

Réponse : (C)

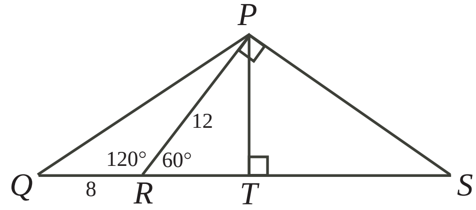
17. Soit x et $x + 1$ les deux entiers, puisqu'ils sont consécutifs.
Donc $(x + 1)^2 - x^2 = 199$, c'est-à-dire $(x^2 + 2x + 1) - x^2 = 199$, d'où $2x + 1 = 199$, ou $x = 99$.
Donc, les deux entiers sont 99 et 100.
La somme des carrés de ces nombres est égale à $99^2 + 100^2$, ou $9801 + 10\,000$, ou $19\,801$.

Réponse : (A)

18. Puisque chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant une même constante au terme précédent, la différence entre n'importe quels deux termes consécutifs est constante.
D'après les trois premiers termes, on a $2a - a = b - 2a$, ou $b = 3a$.
En fonction de a, les quatre premiers termes sont a, $2a$, $3a$ et $a-6-3a$, soit a, $2a$, $3a$ et $-6-2a$.
Puisque la différence constante (appelée *raison*) entre les trois premiers termes est égale à a (puisque $2a - a = a$ et $3a - 2a = a$), alors le 4$^{\text{e}}$ terme doit être égal à $4a$. Donc $4a = -6 - 2a$, d'où $6a = -6$, ou $a = -1$.
Les quatre premiers termes sont donc -1, -2, -3, -4.
Le 100$^{\text{e}}$ terme est donc égal à -100 (ce qui semble évident ; on peut aussi dire qu'on l'obtient en ajoutant 99 fois (-1) au premier terme pour obtenir $-1 + 99(-1)$, ou -100).

Réponse : (A)

19. Puisque $\angle QRP = 120^\circ$ et que QRS est un segment de droite, alors $\angle PRS = 180^\circ - 120^\circ$, ou $\angle PRS = 60^\circ$.
Puisque $\angle RPS = 90^\circ$, alors le triangle SRP est un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Donc $RS = 2PR$, d'où $RS = 2(12)$, ou $RS = 24$.
Au point P, on abaisse une perpendiculaire PT à RS.

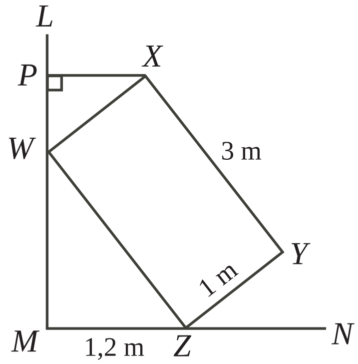


Puisque $\angle PRT = 60^\circ$ et $\angle PTR = 90^\circ$, alors le triangle PRT est aussi un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $PT = \frac{\sqrt{3}}{2}PR$, ou $PT = 6\sqrt{3}$.

On considère le triangle QPS. QS est une base et PT est sa hauteur correspondante.
Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(6\sqrt{3})(8+24)$, ou $96\sqrt{3}$.

Réponse : (E)

20. Au point X, on abaisse une perpendiculaire XP à LM.



Puisque $\angle XPM = \angle PMN = 90^\circ$, alors PX est parallèle à MN. La distance du point X au segment MN est égale à la longueur PM.
Puisque $WXYZ$ est un rectangle, alors $WZ = XY = 3$ m et $WX = ZY = 1$ m.
D'après le théorème de Pythagore, $WM = \sqrt{WZ^2 - MZ^2}$, d'où $WM = \sqrt{3^2 - 1{,}2^2}$, ou $WM = \sqrt{7{,}56}$ m.
PWM est un segment de droite et $\angle XWZ = 90^\circ$. Donc $\angle PWX + \angle XWZ + \angle ZWM = 180^\circ$, d'où $\angle PWX + \angle ZWM = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.
Or, puisque le triangle XPW est rectangle, alors :

$$\angle PXW = 90^\circ - \angle PWX = 90^\circ - (90^\circ - \angle ZWM) = \angle ZWM$$

Donc, les triangles XPW et WMZ sont semblables.
Donc $\dfrac{PW}{MZ} = \dfrac{XW}{WZ}$, d'où $PW = \dfrac{MZ(XW)}{WZ}$, ou $PW = \dfrac{1{,}2(1)}{3}$, ou $PW = 0{,}4$ m.
Donc $PM = PW + WM$, d'où $PM = 0{,}4 + \sqrt{7{,}56}$, ou $PM \approx 3{,}1495$ m. Au centième de mètre près, $PM \approx 3{,}15$ m.

Réponse : (C)

21. L'expression compte 52 termes, soit le nombre 1, le nombre 11 et les 50 nombres qui commencent et se terminent par un 1, avec de 1 à 50 zéros entre eux. Le dernier nombre a donc 52 chiffres (50 zéros et 2 uns).
La somme des chiffres des unités des 52 nombres est égale à 52. Le chiffre des unités de N est donc un 2 et il y a une retenue de 5 reportée à la colonne des dizaines.
Dans la colonne des dizaines, il y a un seul 1 (qui provient de 11), les autres chiffres étant 0. À cause de la retenue, le chiffre des dizaines de N est donc égal à $1 + 5$, ou 6.
Dans chacune des autres positions des nombres qu'il faut additionner, il n'y a qu'un chiffre 1, les autres étant 0. Donc, dans ces mêmes positions, le chiffre de N est aussi un 1. (Il n'y a aucune retenue.)
Donc $N = 11\cdots1162$, N contenant $(52-2)$ fois, ou 50 fois le chiffre 1.
La somme des chiffres de N est donc égale à $50(1) + 6 + 2$, ou 58.

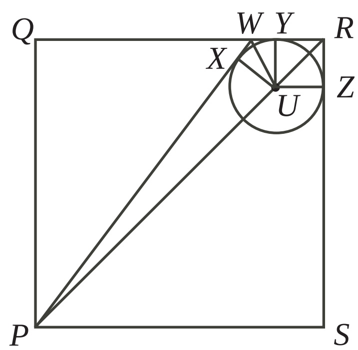
Réponse : (A)

22. Les paraboles d'équations $y = -\frac{1}{8}x^2 + 4$ et $y = x^2 - k$ se coupent aux endroits où x vérifie l'équation $-\frac{1}{8}x^2 + 4 = x^2 - k$, ou $\frac{9}{8}x^2 = 4 + k$.

Puisque $x^2 \geq 0$, alors $4 + k \geq 0$, d'où $k \geq -4$.
(Il s'agit de la condition pour que les courbes admettent au moins un point d'intersection.)
On veut aussi que les paraboles se coupent sur l'axe des abscisses ou au-dessus de cet axe.
Donc $y \geq 0$. Puisqu'on sait que $\frac{9}{8}x^2 = 4 + k$, alors $x^2 = \frac{8}{9}(4 + k)$.
Donc, aux points d'intersection, on a $y = x^2 - k$, d'où $y = \frac{8}{9}(4 + k) - k$, ou $y = \frac{32}{9} - \frac{1}{9}k$.
Or, on veut que $y \geq 0$. Donc $\frac{32}{9} - \frac{1}{9}k \geq 0$, d'où $k \leq 32$.
Donc, les paraboles se coupent sur l'axe des abscisses ou au-dessus de cet axe si $-4 \leq k \leq 32$.
Le nombre de valeurs entières de k, dans cet intervalle, est égal à $32 - (-4) + 1$, ou 37.

Réponse : (E)

23. Dans cette solution, les unités (soit les mètres) sont laissées de côté jusqu'à la fin.
Puisque le carré $PQRS$ a des côtés de longueur 4, sa diagonale PR a une longueur de $4\sqrt{2}$.
Puisque $PR = 4UR$, alors $PU = \frac{3}{4}PR$ et $UR = \frac{1}{4}PR$. Donc $PU = \frac{3}{4}(4\sqrt{2})$, ou $PU = 3\sqrt{2}$, et $UR = \sqrt{2}$.
Soit X, Y et Z les points de contact respectifs du cercle et des segments PW, WR et RS.



Puisque RS est tangent au cercle au point Z, alors $\angle UZR = 90°$.
Puisque $\angle PRS = 45°$ (puisque PR est la diagonale du carré), alors le triangle UZR est isocèle et rectangle.
Donc $UZ = \frac{1}{\sqrt{2}}UR$, d'où $UZ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2})$, ou $UZ = 1$. Le cercle a donc un rayon de 1.
Donc $UY = UX = UZ = 1$.
Puisque PW est tangent au cercle au point X, alors $\angle PXU = 90°$.
D'après le théorème de Pythagore, $PX = \sqrt{PU^2 - UX^2}$, d'où $PX = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 1^2}$, ou $PX = \sqrt{17}$.
De plus, $\sin(\angle UPX) = \dfrac{UX}{UP}$, d'où $\sin(\angle UPX) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$. Donc $\angle UPX \approx 13{,}63°$.
On connaît la longueur de PX. Donc pour déterminer la longueur de PW, il faut déterminer celle de XW.
Puisque WX et WY sont des tangentes au cercle issues d'un même point W, alors $WX = WY$.
Donc, les triangles UWX et UWY sont congruents. Donc $\angle UWX = \angle UWY$.
Dans le triangle PWR, on a :

$$\begin{aligned} \angle WPR + \angle PWR + \angle WRP &= 180° \\ 2(\angle UWX) &\approx 180° - 45° - 13{,}63° \\ 2(\angle UWX) &\approx 121{,}37° \\ \angle UWX &\approx 60{,}68° \end{aligned}$$

Dans le triangle UWX, $\tan(\angle UWX) = \dfrac{UX}{XW}$, d'où $XW \approx \dfrac{1}{\tan(60{,}68°)}$, ou $XW \approx 0{,}5616$.

Donc $PW = PX + XW$, d'où $PW \approx \sqrt{17} + 0{,}562$, ou $PW \approx 4{,}6847$ m.
Au millième de mètre près, $PW \approx 4{,}685$ m.

Réponse : (C)

24. On suppose d'abord que $a \leq b \leq c$. On considérera les autres cas à la fin.
Puisque a, b et c sont des entiers positifs non nuls (ils paraissent au dénominateur), alors $a \geq 1$.
Est-ce que $a = 1$ est possible ? Si $a = 1$, alors $\frac{1}{a} = 1$, d'où $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{1}{4}$, ce qui est impossible, puisque b et c sont positifs. Donc $a > 1$.
Puisque $a \leq b \leq c$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$. Donc $\frac{3}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{4}$, d'où $a \leq 4$.
Donc $a = 2$, 3 ou 4.

Si $a = 4$, alors $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$.
Puisque $b \leq c$, alors $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$. Donc $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, d'où $b \leq 4$.
Or, puisque $a \leq b$, alors $b \geq 4$. Donc $b = 4$.

Si $a = 3$, alors $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$, ou $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{12}$.
Puisque $b \leq c$, alors $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$. Donc $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{5}{12}\right) = \frac{5}{24}$, d'où $b \leq \frac{24}{5}$.
Donc $b \leq 4$, puisque b est un entier.
Puisque $a \leq b$, alors $b \geq 3$, d'où $b = 3$ ou $b = 4$.

Si $a = 2$, alors $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$.
Puisque $b \leq c$, alors $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$, d'où $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$. Donc $b \leq 8$.
Or $\frac{1}{b} < \frac{1}{4}$ (puisque $c > 0$). Donc $b > 4$.
Donc $b = 5$, 6, 7 ou 8.

On place les valeurs possibles dans un tableau.

a	$\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$	b	$\frac{1}{c}$	c
4	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	4
3	$\frac{5}{12}$	3	$\frac{1}{12}$	12
3	$\frac{5}{12}$	4	$\frac{1}{6}$	6
2	$\frac{1}{4}$	5	$\frac{1}{20}$	20
2	$\frac{1}{4}$	6	$\frac{1}{12}$	12
2	$\frac{1}{4}$	7	$\frac{3}{28}$	$\frac{28}{3}$
2	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$	8

Les triplets qui vérifient $a \leq b \leq c$ sont $(4, 4, 4)$, $(3, 3, 12)$, $(3, 4, 6)$, $(2, 5, 20)$, $(2, 6, 12)$ et $(2, 8, 8)$.
Si on retire la condition $a \leq b \leq c$, on voit que n'importe quelle permutation des éléments de ces triplets vérifie aussi l'équation donnée.
Un triplet de la forme (x, x, x) admet une seule permutation.
Un triplet de la forme (x, x, y) $(x \neq y)$ admet 3 permutations (les deux autres étant (x, y, x) et (y, x, x)).

Un triplet de la forme (x, y, z) (trois nombres différents) admet 6 permutations. (On suggère de les écrire.)
Si on fait subir toutes les permutations possibles aux six solutions ci-dessus, le nombre de solutions est égal à $1 + 3 + 6 + 6 + 6 + 3$, ou 25.

Réponse : (B)

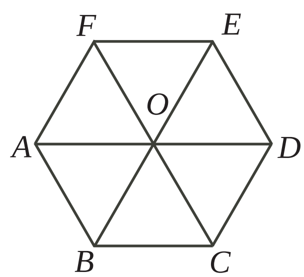
25. On considère d'abord quelques propriétés dont certaines sont connues de façon intuitive.
On considère la base $ABCDEF$ du deuxième solide. Il s'agit d'un hexagone régulier. Ses côtés sont congrus et ses angles intérieurs mesurent 120°. (La somme de la mesure des angles intérieurs d'un polygone de n côtés est égale à $(n-2)180°$. Lorsque $n = 6$, elle est égale à 720°, ou 6(120°).)
Soit O le centre de l'hexagone.
On joint chaque sommet à O.

Propriété 1 : Les 6 triangles formés sont équilatéraux.

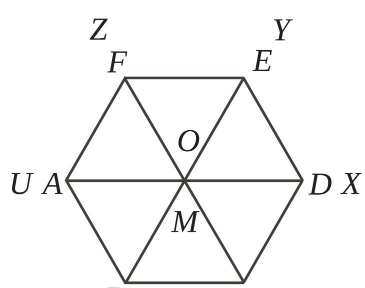
Par symétrie, chacun des segments AO, BO, ..., FO est la bissectrice de l'angle au sommet, ce qui crée deux angles de 60°. Chacun des triangles formés a deux angles de 60° ; le troisième angle doit donc mesurer 60° et le triangle est donc équilatéral. Les segments formés et les côtés de l'hexagone ont donc tous la même longueur.

Propriété 2 : AOD, BOE et COF sont des segments parallèles à des côtés de l'hexagone.

Chacun des six angles en O mesure 60°. Donc, trois de ces angles forment un angle de 180°. Donc AOD, BOE et COF sont des segments de droites. Ils sont respectivement parallèles aux côtés BC et EF, CD et FA, DE et AB. On peut le vérifier en considérant les angles alternes-internes entre les segments parallèles. Par exemple, puisque $\angle AOF = \angle OFE = 60°$, alors FE et AOD sont parallèles.



On considère la face supérieure $UVWXYZ$ du deuxième solide.
Soit M le point de cette face qui est situé directement au-dessus du point O.
Soit $s = AU + BV + CW + DX + EY + FZ$.
Soit $h(U)$ la hauteur de U au-dessus de A, $h(V)$ la hauteur de V au-dessus de B, et ainsi de suite. Donc $h(U) = AU$, $h(V) = BV$, et ainsi de suite.



Propriété 3 : $h(V) - h(U) = h(X) - h(Y)$

On remarque que les segments UV et YX sont situés directement au-dessus des segments AB et ED, et ainsi de suite.
Puisque AB et ED sont parallèles et congrus, alors $h(V) - h(U) = h(X) - h(Y)$. En effet, les faces $ABVU$ et $EDXY$ sont parallèles et de même largeur. Puisque les arêtes UV et YX ont été formées par la même tranche, elles sont parallèles et elles ont donc la même pente dans leur plan vertical. Puisque le changement horizontal est le même de U à V et de Y à X, le changement vertical doit aussi être le même.

Puisque AO et BC sont parallèles et congrus, alors $h(M)-h(U) = h(W)-h(V)$. D'autres telles égalités existent aussi.

Propriété 4 : $h(M) = \frac{1}{2}(h(U) + h(X))$

On sait que AO et OD sont parallèles et congrus.
Donc $h(M) - h(U) = h(X) - h(M)$, d'où $h(M) = \frac{1}{2}(h(U) + h(X))$.

De même, $h(M) = \frac{1}{2}(h(V) + h(Y)) = \frac{1}{2}(h(W) + h(Z))$.

Propriété 5 : $s = 6h(M)$

On additionne ces trois dernières équations, membre par membre :

$$3h(M) = \frac{1}{2}(h(U) + h(V) + h(W) + h(X) + h(Y) + h(Z))$$

Donc $s = 2(3h(M))$, ou $s = 6h(M)$.

Si on peut déterminer $h(M)$, on peut obtenir la somme des longueurs des arêtes verticales.

On peut maintenant résoudre le problème. On doit considérer un nombre de cas. Puisqu'on peut faire subir une rotation au solide, il suffit de considérer les positions relatives des longueurs connues.

1$^{\text{er}}$ cas : $h(U) = 7$, $h(V) = 4$, $h(W) = 10$

Puisque AB et OC sont parallèles et congrus, alors $h(M) - h(W) = h(U) - h(V) = 3$, d'où $h(M) = 10 + 3$, ou $h(M) = 13$. Donc $s = 6h(M)$, d'où $s = 6(13)$, ou $s = 78$.
On verra qu'il s'agit de la valeur maximale de s.

2$^{\text{e}}$ cas : Deux des nombres 4, 7 et 10 correspondent à des sommets opposés de $ABCDEF$.

Dans ce cas, $h(M)$ sera égal à la moyenne de deux des nombres 4, 7 et 10. Donc $h(M)$ est inférieur à 10, d'où $s = 6h(M) < 6(10) = 60$. On n'obtient donc pas une valeur maximale.

3$^{\text{e}}$ cas : Les hauteurs de 4, 7 et 10 correspondent à trois sommets consécutifs de $ABCDEF$.

Pour éviter une répétition du 1$^{\text{e}}$ cas, on a $h(U) = 4$, $h(V) = 7$ et $h(W) = 10$, ou $h(U) = 4$, $h(V) = 10$ et $h(W) = 7$.
D'après l'analyse du 1$^{\text{er}}$ cas, $h(M) = h(U) + h(W) - h(V)$.
On a donc $h(M) = 7$ ou $h(M) = 1$, d'où $s = 42$ ou $s = 6$. Aucune de ces valeurs n'est maximale.

4$^{\text{e}}$ cas : Les hauteurs de 4, 7 ou 10 correspondent à trois sommets alternatifs de $ABCDEF$.

Soit $h(U) = 4$, $h(W) = 7$ et $h(Y) = 10$. (Il n'y a aucune autre configuration à considérer.)
Soit $h(M) = x$.
Puisque $h(M)$ est égal à la moyenne des hauteurs au-dessus de sommets opposés, alors $h(V) = 2h(M) - h(Y)$, d'où $h(V) = 2x - 10$.

Puisque AB et OC sont parallèles et congrus, alors $h(V) - h(U) = h(W) - h(M)$, c'est-à-dire que $2x - 10 - 4 = 7 - x$, d'où $3x = 21$, ou $x = 7$.
Donc $s = 6h(M)$, d'où $s = 6x$, ou $s = 42$.

Puisqu'on a pris tous les cas en considération, on peut conclure que la valeur maximale de s est égale à 78.

Réponse : (D)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat 2007

(11^{e} année ou Secondaire V)

le mardi 20 février 2007

Solutions

1. On a : $\dfrac{36-12}{12-4} = \dfrac{24}{8} = 3$

Réponse : (E)

2. Puisque $7x = 28$, alors $x = 4$.
Puisque $x + w = 9$ et que $x = 4$, alors $w = 5$.
Puisque $x = 4$ et que $w = 5$, alors $xw = 20$.

Réponse : (B)

3. Pour déterminer la plus grande et la plus petite fraction, on écrit toutes les fractions avec un dénominateur commun de 16, soit $\frac{12}{16}$, $\frac{14}{16}$, $\frac{13}{16}$ et $\frac{8}{16}$.
La plus grande est $\frac{14}{16}$, soit $\frac{7}{8}$, et la plus petite est $\frac{8}{16}$, soit $\frac{1}{2}$.
La différence entre la plus grande et la plus petite est égale à $\frac{14}{16} - \frac{8}{16}$, soit $\frac{6}{16}$, ou $\frac{3}{8}$.

Réponse : (A)

4. Lorsque $x = -5$, on a $-2x^2 + \dfrac{5}{x} = -2(-5)^2 + \dfrac{5}{-5}$, ce qui est égal à $-2(25) + (-1)$, ou -51.

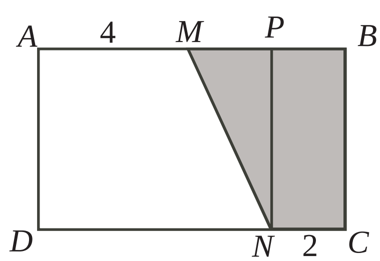
Réponse : (C)

5. On a : $1^{-2} + 2^{-1} = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

Réponse : (A)

6. *Solution 1*
Puisque le rectangle $ABCD$ a une aire de 40 et que $AB = 8$, alors $BC = 5$.
Donc, $MBCN$ est un trapèze ayant des bases de longueurs 2 et 4 et une hauteur de 5. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(5)(4+2)$, soit 15.

Solution 2
Puisque le rectangle $ABCD$ a une aire de 40 et que $AB = 8$, alors $BC = 5$.
Au point N, on abaisse une perpendiculaire NP au côté AB.



La figure $MBCN$ est ainsi divisée en un rectangle $PBCN$, qui a une largeur de 2 et une hauteur de 5, et un triangle MPN qui a une base MP de longueur 2 et une hauteur PN de longueur 5. L'aire de la figure $MBCN$ est égale à la somme de l'aire de ces parties, soit $2(5) + \frac{1}{2}(2)(5)$, soit $10 + 5$, ou 15.

Réponse : (A)

7. *Solution 1*
Puisque deux des entiers positifs ont une somme de 9, les possibilités sont 1 et 8, 2 et 7, 3 et 6, 4 et 5.
Un seul de ces choix est composé de deux diviseurs de 42, soit 2 et 7.
Puisque les trois entiers ont un produit de 42 et que deux des entiers sont 2 et 7, alors le troisième entier est 3, car $2 \times 3 \times 7 = 42$.

Solution 2
Voici les ensembles possibles de trois entiers positifs qui ont un produit de 42 : $\{1, 1, 42\}$, $\{1, 2, 21\}$, $\{1, 3, 14\}$, $\{1, 6, 7\}$ et $\{2, 3, 7\}$.
Un seul de ces ensembles contient deux entiers qui ont une somme de 9, soit $\{2, 3, 7\}$.
Donc, le troisième entier est 3.

Réponse : (D)

8. Supposons que Ivan a parcouru une distance de x km lundi.
Donc mardi, il a parcouru $2x$ km ; mercredi, il a parcouru x km ; jeudi, il a parcouru $\frac{1}{2}x$ km ; vendredi, il a parcouru x km.
La distance la plus courte parcourue en une journée est celle de jeudi. Donc $\frac{1}{2}x = 5$, d'où $x = 10$.
Les distances parcourues sont donc 10 km, 20 km, 10 km, 5 km et 10 km, pour un total de 55 km.

Réponse : (A)

9. Puisque $\dfrac{1}{x+3} = 2$, alors l'inverse du membre de gauche est égal à l'inverse du membre de droite.
Donc $x + 3 = \frac{1}{2}$.
Puisque $x + 3 = \frac{1}{2}$, alors $x + 5 = \frac{1}{2} + 2$, c'est-à-dire que $x + 5 = \frac{5}{2}$.
Puisque $x + 5 = \frac{5}{2}$, alors $\dfrac{1}{x+5} = \dfrac{2}{5}$.
(Remarquer qu'on n'a pas déterminé la valeur de x.)

Réponse : (C)

10. Les deux premiers disques DVD ont coûté 20 \$ chacun et le troisième a coûté 10 \$. Philippa a donc acheté 3 disques au prix total de 50 \$.
Puisque 50 \$ correspond au prix régulier de $2\frac{1}{2}$ disques, elle reçoit 3 disques pour le prix régulier de $2\frac{1}{2}$, ce qui est équivalent à 6 disques pour le prix de 5.

Réponse : (E)

11. Lorsqu'on présente cinq nombres en ordre ascendant, la médiane des nombres est le nombre du milieu, soit x.
Puisque la médiane est égale à 7, alors $x = 7$.
Les nombres, dans l'ordre, sont donc 2, 5, 7, 10 et y.
Puisque les cinq nombres ont une moyenne de 8, ils ont une somme de 5×8, soit 40.
Donc $2 + 5 + 7 + 10 + y = 40$, ou $24 + y = 40$, d'où $y = 16$.

Réponse : (A)

12. Puisque $\angle QSR = \angle QRS$, alors le triangle QSR est isocèle. Donc $QS = QR$, d'où $QS = x$.
Puisque $\angle SPQ = 90°$ et que $\angle PQS = 60°$, alors $\angle PSQ = 30°$. Le triangle PQS est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.
D'après le rapport des longueurs de côtés d'un tel triangle, $QS = 2PQ$.
Donc $x = QS = 2(10)$, ou $x = 20$.

Réponse : (B)

13. *Solution 1*
Si on tient compte des nombres manquants, on a $M + N + P + Q + R = 1 + 4 + 5 + 6 + 7$, ou $M + N + P + Q + R = 23$.
Pour déterminer la valeur de $M + N + P + Q$, il faut déterminer la valeur de R et la soustraire de 23.
R ne peut être égal à 1, car $0 + 1 = 1$ et 1 n'est pas premier. (Si R était égal à 1, la somme des deux nombres aux extrémités d'une arête ne serait pas un nombre premier.)
R ne peut être égal à 4, car $0 + 4 = 4$ et 4 n'est pas premier.
R ne peut être égal à 6, car $0 + 6 = 6$ et 6 n'est pas premier.
R ne peut être égal à 7, car $2 + 7 = 9$ et 9 n'est pas premier.
Par élimination, on a $R = 5$. Donc $M + N + P + Q = 23 - 5$, ou $M + N + P + Q = 18$.
(Dans la Solution 2, on verra que les autres nombres peuvent être placés de manière à satisfaire à la condition.)

Solution 2
Les nombres 1, 4, 5, 6 et 7 n'ont pas été placés.
Puisque $Q + 3$ doit être un nombre premier, alors Q doit être égal à 4 (puisque $1 + 3$, $5 + 3$, $6 + 3$ et $7 + 3$ ne sont pas premiers).
Puisque $M + 0$ et $M + 4$ doivent tous deux être premiers, alors M doit être égal à 7 (puisque $1 + 0$, $5 + 4$ et $6 + 4$ ne sont pas premiers).
Puisque $P + 2$ et $P + 4$ doivent tous deux être premiers, alors P doit être égal à 1 (puisque $5 + 4$ et $6 + 2$ ne sont pas premiers).
Puisque $N + 7$ et $N + 1$ doivent tous deux être premiers, alors N doit être égal à 6 (puisque $5 + 7$ n'est pas premier).
On peut vérifier que si $R = 5$, il satisfait à la condition.
Donc $M + N + P + Q = 23 - 5$, ou $M + N + P + Q = 18$.

Réponse : (C)

14. Lorsqu'on augmente de 25 % la valeur de a, on obtient $1{,}25a$, ou $\frac{5}{4}a$.
On veut donc que $\frac{5}{4}a > 5b$, c'est-à-dire que $5a > 20b$, ou $a > 4b$.
On cherche les plus petites valeurs positives de a et de b qui vérifient cette inégalité. (Si a et b sont aussi petits que possible, alors leur somme $a + b$ sera aussi petite que possible.)
Puisque b est un entier strictement positif, alors $4b \geq 4$. Puisque $a > 4b$, alors $a > 4$.
Donc, la plus petite valeur possible de a est 5, lorsque $b = 1$.
Puisque b ne peut prendre une valeur plus petite que 1, alors a ne peut pas prendre une valeur plus petite que 5.
Donc, la valeur minimale possible de $a + b$ est $5 + 1$, ou 6.

Réponse : (B)

15. *Solution 1*

Soit pqr l'expression de x en chiffres.

Puisque les chiffres de x sont pairs, alors p peut égaler 2, 4, 6 ou 8, tandis que q et r peuvent égaler 0, 2, 4, 6 ou 8.

Lorsque x est multiplié par 2, chacun de ses chiffres est multiplié par 2 et il peut y avoir des retenues.

Or $2 \times 0 = 0$, $2 \times 2 = 4$, $2 \times 4 = 8$, $2 \times 6 = 12$ et $2 \times 8 = 16$.

Lorsqu'on calcule $2x$, chacun des chiffres de x produit un chiffre pair et une retenue de 0 ou 1.

Avec une retenue de 0, cela ne change pas la parité du chiffre suivant de $2x$, à la gauche.

Avec une retenue de 1, le chiffre suivant de $2x$, sur la gauche, verra sa parité changée de pair à impair. (Remarquer que deux retenues de suite ne peuvent former une retenue supérieure à 1.)

Donc, x ne peut avoir un chiffre égal à 6 ou à 8, sinon $2x$ aura certainement un chiffre impair.

De plus, les chiffres 0, 2 et 4 peuvent paraître dans n'importe quelle position de x, à l'exception du 0 qui ne peut paraître dans la position des centaines. Ils produiront des chiffres pairs dans $2x$.

Donc, p peut prendre 2 valeurs. Pour chacune, q peut prendre 3 valeurs. Pour chacun de ces cas, r peut prendre 3 valeurs. Le nombre de valeurs possibles de x est donc égal à $2 \times 3 \times 3$, soit 18.

Solution 2

Soit pqr l'expression de x en chiffres. Donc $x = 100p + 10q + r$.

Puisque les chiffres de x sont pairs, p peut égaler 2, 4, 6 ou 8, tandis que q et r peuvent chacun égaler 0, 2, 4, 6 ou 8.

Lorsque x est multiplié par 2, chacun de ses chiffres est multiplié par 2 et il peut y avoir des retenues.

Or $2 \times 0 = 0$, $2 \times 2 = 4$, $2 \times 4 = 8$, $2 \times 6 = 12$ et $2 \times 8 = 16$.

Soit $2p = 10A + a$, $2q = 10B + b$ et $2r = 10C + c$, A, a, B, b, C, c étant des chiffres de manière que A, B et C égalent chacun 0 ou 1 et a, b et c soient tous pairs.

Donc :

$$\begin{aligned}
2x &= 2(100p + 10q + r) \\
&= 100(2p) + 10(2q) + 2r \\
&= 100(10A + a) + 10(10B + b) + 10C + c \\
&= 1000A + 100a + 100B + 10b + 10C + c \\
&= 1000A + 100(a + B) + 10(b + C) + c
\end{aligned}$$

Puisque a, b et c ont chacun une valeur maximale de 8 et que A, B et C ont chacun une valeur maximale de 1, alors $a + B$ et $b + C$ ont chacun une valeur maximale de 9. Donc A, $a + B$, $b + C$ et c sont des nombres de 1 chiffre.

Pour que tous les chiffres de $2x$ soient pairs, il faut que A soit pair (et donc égal à 0), que c soit pair (il l'est) et que $a + B$ et $b + C$ soient tous deux pairs.

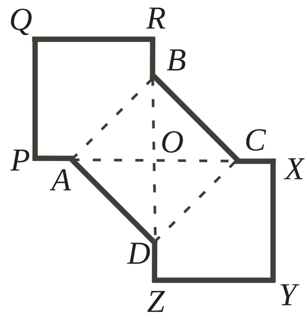
Puisque a et b sont pairs, il faut donc que B et C soient pairs, c'est-à-dire qu'ils égalent 0.

Puisque A, B et C égalent tous 0, alors aucun des chiffres p, q ou r ne peut égaler 6 ou 8. Chacun peut donc égaler 0, 2 ou 4 (avec $p \neq 0$).

Donc, p peut prendre 2 valeurs. Pour chacune, q peut prendre 3 valeurs. Pour chacun de ces cas, r peut prendre 3 valeurs. Le nombre de valeurs possibles de x est donc égal à $2 \times 3 \times 3$, soit 18.

Réponse : (B)

16. On nomme les autres sommets de la figure.



Puisque chacun des carrés a des côtés de longueur 3, alors

$$PQ = QR = BC = XY = YZ = DA = 3$$

Le périmètre de la figure est donc égal à $18 + AP + RB + CX + ZD$.
Puisque O est le centre du carré $ABCD$, alors $OA = OB = OC = OD$.
Puisque $OP = OR = OX = OZ$, alors $AP = RB = CX = ZD$.
Le périmètre est donc égal à $18 + 4AP$.
Puisque O est le centre du carré $ABCD$, alors $OA = OB$ et $\angle AOB = 90°$. Le triangle AOB est donc isocèle rectangle. Ses angles mesurent donc 45°, 45° et 90°.
Donc $AO = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire que $AO = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, ou $AO = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Donc $AP = OP - AO$, d'où $AP = 3 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
Le périmètre est donc égal à $18 + 4\left(3 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, soit $18 + 12 - 6\sqrt{2}$, ou $30 - 6\sqrt{2}$, ou environ 21,515.

Réponse : (A)

17. *Solution 1*
Puisque $AB = BC$, alors B est situé sur la médiatrice du segment AC.
Puisque A et C ont pour coordonnés respectives $(2, 2)$ et $(8, 4)$, le milieu du segment AC a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(2 + 8), \frac{1}{2}(4 + 2)\right)$, soit $(5, 3)$. La pente de AC est égale à $\dfrac{4-2}{8-2}$, soit $\dfrac{1}{3}$.
La médiatrice a donc une pente de -3 (l'opposé de l'inverse de $\frac{1}{3}$) et elle passe au point $(5, 3)$.
Son équation est donc $y - 3 = -3(x - 5)$, ou $y = -3x + 18$.
Pour obtenir l'abscisse à l'origine de cette droite, on pose $y = 0$ et on obtient $x = 6$.
Puisque B est le point où la médiatrice de AC coupe l'axe des abscisses, alors l'abscisse de B est égale à 6.
(On peut vérifier que si B a pour coordonnées $(6, 0)$, alors AB est perpendiculaire à BC.)

Solution 2
Puisque le triangle ABC est isocèle et rectangle, alors $\angle ABC = 90°$ et AB est perpendiculaire à BC.
Soit $(b, 0)$ les coordonnées de B.
La pente de AB est donc égale à $\dfrac{2-0}{2-b}$ et celle de BC est égale à $\dfrac{4-0}{8-b}$.
Puisque AB est perpendiculaire à BC, la pente de l'une est l'opposé de l'inverse de la pente de

l'autre. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{2}{2-b} &= -\frac{8-b}{4}\\ -8 &= (2-b)(8-b)\\ -8 &= b^2-10b+16\\ b^2-10b+24 &= 0\\ (b-4)(b-6) &= 0\end{aligned}$$

Donc $b = 4$ ou $b = 6$.
On doit vérifier laquelle de ces valeurs de b nous donne $AB = BC$ (on a déjà traité de la perpendicularité).
Si $b = 4$, alors $AB = \sqrt{(4-2)^2 + (0-2)^2}$, ou $AB = \sqrt{8}$, et $BC = \sqrt{(8-4)^2 + (4-0)^2}$, ou $BC = \sqrt{32}$. Donc $AB \neq BC$.
L'abscisse de B donc être égale à 6.
(On peut vérifier que dans ce cas, AB est bien égal à BC.)

Solution 3
Pour se rendre de A à C, on se déplace de 6 unités vers la droite et de 2 unités vers le haut.
Supposons que pour se rendre de A à B, on se déplace de p unités vers la droite et de q vers le bas, $p, q > 0$.
Puisque BC est perpendiculaire à AB et que les deux segments ont la même longueur, alors pour se rendre de B à C, il faut se déplacer de q unités vers la droite et de p unités vers le haut. (On peut le vérifier en portant attention à la pente de AB et à celle de BC.)
Donc, pour se rendre de A à C en passant par B, on se déplace de $p + q$ unités vers la droite et de $q - p$ unités vers le haut. Or, ce résultat est le même que si on se rendait directement de C à A. Donc $p + q = 6$ et $q - p = 2$.
Puisque $p+q = 6$ et $q-p = 2$, alors $2q = 8$ (on a additionné les équations, membre par membre), d'où $q = 4$ et $p = 2$.
Puisque A a pour coordonnées $(2, 2)$, alors B a pour coordonnées $(6, 0)$ et ce point est bien situé sur l'axe des abscisses.

Réponse : (D)

18. Supposons que Katrina et Alphonse ont chacun n pommes au départ.
Après que Katrina a donné 12 pommes à Alphonse, elle a $n - 12$ pommes et Alphonse en a $n + 12$.
Après que Katrina a donné la moitié des pommes qui lui restaient (soit $\frac{1}{2}(n - 12)$ pommes) à Alphonse, il lui reste $\frac{1}{2}(n-12)$ pommes, soit $\frac{1}{2}n-6$ pommes, tandis qu'Alphonse a $n+12+\frac{1}{2}(n-12)$ pommes, soit $\frac{3}{2}n + 6$ pommes.
Puisque Alphonse a maintenant quatre fois autant de pommes que Katrina, alors $4(\frac{1}{2}n - 6) = \frac{3}{2}n + 6$, c'est-à-dire que $2n - 24 = \frac{3}{2}n + 6$, d'où $\frac{1}{2}n = 30$, ou $n = 60$.
Katrina a présentement $\frac{1}{2}(60 - 12)$ pommes, soit 24 pommes.

Réponse : (B)

19. On utilise l'*inégalité du triangle*, qui affirme que dans un triangle, la longueur d'un côté doit être inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. (Par exemple, dans le triangle ABC, on a $AC < AB + BC$, d'où $AC < 19$.) L'inégalité du triangle est une façon d'exprimer que le plus court chemin entre deux points est la ligne droite et que si on prend un détour en passant par un autre point, le trajet est plus long.
Dans le triangle ABC, on a $AC < AB + BC$, d'où $AC < 19$.
Dans le triangle ACD, on a $DC < DA + AC$, c'est-à-dire $19 < 5 + AC$, ou $AC > 14$.
Parmi les choix de réponse, seul 15 est situé entre 14 et 19. Donc, la réponse doit être 15. (On peut vérifier que si $AC = 15$, il est possible de construire chaque triangle.)

Réponse : (D)

20. *Solution 1*
On peut choisir une parabole particulière qui a les mêmes caractéristiques, soit la parabole d'équation $y = -(x+2)(x-1)$, ou $y = -x^2 - x + 2$. Elle a une ordonnée à l'origine positive ; elle est orientée vers le bas ; son abscisse à l'origine négative est plus éloignée de l'origine que ne l'est son abscisse à l'origine positive.
Pour cette parabole, on a $a = -1$, $b = -1$, $c = 2$.
Pour ces valeurs, seul le choix $c - a$ est positif.
Donc, la réponse doit être $c - a$.

Solution 2
Puisque la parabole est orientée vers le bas, on a $a < 0$. Donc, le choix (A) est éliminé. Puisque l'expression ab^2 a une valeur négative, le choix (C) est éliminé.
L'ordonnée à l'origine de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est c. (On l'obtient en posant $x = 0$.) Puisque l'ordonnée à l'origine est positive dans la figure, alors $c > 0$.
Puisque a est négatif, alors $c - a$ est positif. Cette expression doit être la réponse, puisqu'un seul des choix est correct.
(On peut vérifier que b doit être négatif, puisque a est négatif et que le sommet est situé à la gauche de l'axe des ordonnées. Donc bc et $b - c$ doivent être négatifs.)

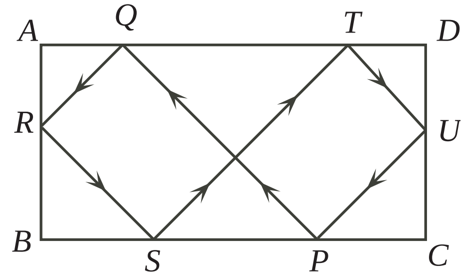
Réponse : (E)

21. Puisque m est le troisième nombre, alors les cinq entiers sont, dans l'ordre, $m-2$, $m-1$, m, $m+1$ et $m+2$.
La somme des cinq nombres est donc égale à $(m-2)+(m-1)+m+(m+1)+(m+2)$, ou $5m$.
La somme des trois nombres au milieu est égale à $(m-1)+m+(m+1)$, ou $3m$.
On cherche donc la plus petite valeur de m pour laquelle $3m$ est un carré parfait et $5m$ est un cube parfait.
On considère écrire m, $3m$ et $5m$ en factorisation première.
Pour que $3m$ soit un carré parfait, chacun des nombres premiers dans sa factorisation première doit paraître un nombre pair de fois. Donc, le nombre premier 3 doit paraître un nombre impair de fois dans la factorisation première de m.
Pour que $5m$ soit un cube parfait, chacun des nombres premiers dans sa factorisation première doit paraître un nombre de fois qui est un multiple de 3. Donc, dans la factorisation première de m, le nombre premier 5 doit paraître un nombre de fois qui est 1 de moins qu'un multiple de 3.
Les nombres premiers 3 et 5 sont donc facteurs premiers de m, Pour minimiser la valeur de m, aucun autre nombre premier ne doit paraître dans sa factorisation première.
Pour que $3m$ soit un carré parfait, 5 doit paraître un nombre pair de fois dans $3m$.

Pour que $5m$ soit un cube parfait, le nombre de fois que 5 paraît dans $5m$ est un multiple de 3. Donc, m est un nombre qui comporte un nombre impair de facteurs 3 et un nombre pair de facteurs 5 (puisque c'est le cas de $3m$) ; en même temps, le nombre de facteurs 3 est un multiple de 3 (puisque c'est le cas de $5m$) et le nombre de facteurs 5 est 1 de moins qu'un multiple de 3. Pour minimiser la valeur de m, m doit comporter le moins de facteurs 3 et 5 possible, soit trois 3 et deux 5. Donc $m = 3^3 5^2$, ou $m = 675$.

Réponse : (D)

22. Soit A, B, C et D les sommets du rectangle et soit P, Q, R, S, T et U les points, dans l'ordre, où la balle frappe les bords de la table.

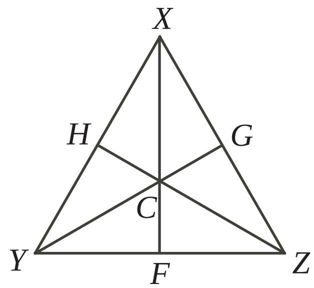


Chacun des segments du trajet de la balle forme un angle de 45° avec le bord de la table.
Donc $PQ = \sqrt{2}AB$. De même, $QR = \sqrt{2}AR$ et $RS = \sqrt{2}RB$. Donc $QR + RS = \sqrt{2}(AR + RB)$, ou $QR + RS = \sqrt{2}AB$.
De la même manière, $ST = \sqrt{2}CD$ et $TU + UP = \sqrt{2}CD$.
Puisque $AB = CD$, alors $PQ + QR + RS + ST + TU + UP = 4\sqrt{2}AB$.
Or, on sait que la balle parcourt une distance totale de 7 m. Donc $AB = \frac{7}{4\sqrt{2}}$ m.

De plus, $PQ = \sqrt{2} \times$ la distance horizontale de P à Q, $QR = \sqrt{2}QA$ et $PU = \sqrt{2}PC$.
Donc $PQ + QR + PU = \sqrt{2}AD$ (puisque QA plus PC plus la distance horizontale de P à Q est égal à la longueur du rectangle).
De même, $RS + ST + TU = \sqrt{2}BC = \sqrt{2}AD$.
Donc $PQ + QR + RS + ST + TU + UP = 2\sqrt{2}AD$, d'où $AD = \frac{7}{2\sqrt{2}}$ m.
Le périmètre de la table est donc égal à $2AD + 2AB$, soit $\left(\frac{7}{\sqrt{2}} + \frac{7}{2\sqrt{2}}\right)$ m, ou environ 7,425 m.
Parmi les choix, la meilleure approximation est 7,5 m.

Réponse : (B)

23. Puisque chaque fil a la même longueur et puisque la distance verticale de O à chacun des points M, N et P est la même, alors $OX = OY = OZ$.
Soit $x = OX = OY = OZ$.
Puisque chaque fil a une longueur de 100, alors $XM = YN = ZP = 100 - x$.
Donc, le point M est à une distance de $100 - x$ au-dessous de X. Puisque M est à une distance de 90 du plafond, donc la distance de X au plafond (c'est-à-dire la distance entre le triangle et le plafond) est égale à $90 - (100 - x)$, ou $x - 10$.
Soit C le centre du triangle XYZ.
Par symétrie, O est directement au-dessus de C et on a donc $OC = x - 10$.
On a aussi $OX = x$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OXC, $OX^2 = OC^2 + XC^2$.
Pour continuer, on a besoin de la longueur XC.
On trace les hauteurs XF, YG et ZH. On sait que C est le point d'intersection des hauteurs XF, YG et ZH.



Puisque le triangle XYZ est équilatéral, H est le milieu du côté XY et XF est la bissectrice de l'angle ZXY.
Puisque $XY = 60$, alors $XH = 30$ et $\angle CXH = 30°$.
Le triangle CXH est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $CX = \frac{2}{\sqrt{3}}XH$, c'est-à-dire que $CX = \frac{2}{\sqrt{3}}(30)$, ou $\frac{60\sqrt{3}}{3}$, ou $CX = 20\sqrt{3}$.
Puisque $OX^2 = OC^2 + XC^2$, alors :

$$\begin{aligned} x^2 &= (x-10)^2 + (20\sqrt{3})^2 \\ x^2 &= x^2 - 20x + 100 + 1200 \\ 20x &= 1300 \\ x &= 65 \end{aligned}$$

La distance verticale entre le triangle et le plafond est donc égale à $x - 10$, soit 55 cm.

Réponse : (D)

24. Soit b l'ordonnée à l'origine de la droite, $b > 0$.
Puisque la droite a une pente de 1, son abscisse à l'origine est égale à $-b$. P a donc pour coordonnées $(-b, 0)$.
Puisque P, Q et R sont alignés et que $PQ = QR$, alors le déplacement horizontal de P à Q est égal au déplacement horizontal de Q à R. Donc, la différence des abscisses de Q et de P est égale à celle de R et de Q.
Puisque la droite a une pente de 1 et une ordonnée à l'origine de b, elle a pour équation $y = x+b$.
On peut déterminer l'abscisse de Q et de R en déterminant les points d'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = x + b$. À ces points, pour une même valeur de x, on a une même valeur de y dans les deux équations. On a donc :

$$\begin{aligned} x^2 &= x + b \\ x^2 - x - b &= 0 \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-b)}}{2} \qquad \text{(d'après la formule)} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2} \end{aligned}$$

D'après la figure, l'abscisse de Q est égale à $\dfrac{1 - \sqrt{1+4b}}{2}$ et celle de R est égale à $\dfrac{1 + \sqrt{1+4b}}{2}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}-(-b) &= \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}-\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}\\
\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}+b &= \sqrt{1+4b}\\
1-\sqrt{1+4b}+2b &= 2\sqrt{1+4b}\\
1+2b &= 3\sqrt{1+4b}\\
(1+2b)^2 &= (3\sqrt{1+4b})^2\\
1+4b+4b^2 &= 9(1+4b)\\
4b^2-32b-8 &= 0\\
b^2-8b-2 &= 0\\
b &= \frac{8\pm\sqrt{8^2-4(1)(-2)}}{2}\\
b &= \frac{8\pm\sqrt{72}}{2}\\
b &= 4\pm 3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Puisque $b>0$, alors $b=4+3\sqrt{2}$, soit $b\approx 8{,}243$.
(Dans ce problème, il est possible de déterminer la réponse, parmi les choix, en traçant une figure à l'échelle.)

Réponse : (C)

25. On place les $n+r$ boules en choisissant une boule au hasard, en la plaçant dans la première position, en choisissant une deuxième boule au hasard, en la plaçant dans la dernière position, puis en choisissant les autres boules au hasard et en les plaçant l'une à la suite de l'autre.
On calcule la probabilité pour que les deux extrémités soient noires. La probabilité pour que la première boule soit noire est égale à $\frac{n}{n+r}$. Il reste alors $n+r-1$ boules dont $n-1$ sont noires. La probabilité de choisir une deuxième boule noire est donc égale à $\frac{n-1}{n+r-1}$. Les autres boules peuvent être choisies de n'importe quelle façon. La probabilité de choisir deux boules noires pour les extrémités est donc égale à $\frac{n}{n+r}\cdot\frac{n-1}{n+r-1}$.
De la même manière, la probabilité pour que les deux extrémités soient rouges est égale à $\frac{r}{n+r}\cdot\frac{r-1}{n+r-1}$.
Donc, la probabilité pour que la première boule et la dernière boule aient la même couleur est égale à

$$\frac{n}{n+r}\cdot\frac{n-1}{n+r-1}+\frac{r}{n+r}\cdot\frac{r-1}{n+r-1}$$

et on veut que cette expression soit égale à $\frac{1}{2}$.

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n+r}\cdot\frac{n-1}{n+r-1}+\frac{r}{n+r}\cdot\frac{r-1}{n+r-1} &= \frac{1}{2}\\
n(n-1)+r(r-1) &= \frac{1}{2}(n+r)(n+r-1)\\
2n^2-2n+2r^2-2r &= n^2+r^2+2nr-n-r\\
n^2-2nr+r^2 &= n+r\\
(r-n)^2 &= n+r
\end{aligned}$$

Soit $r-n=k$. (Puisque $r\geq n$, alors $k\geq 0$.)
Donc $n+r=k^2$.
On additionne ces deux équations, membre par membre, pour obtenir $2r=k^2+k$.
Donc $r=\frac{1}{2}(k^2+k)=\frac{1}{2}k(k+1)$.
On soustrait ces deux mêmes équations, membre par membre, pour obtenir $2n=k^2-k$. Donc $n=\frac{1}{2}k(k-1)$. (On voit donc que r et n sont des nombres triangulaires consécutifs.)
Puisque $n\geq 4$, alors $k(k-1)\geq 8$, d'où $k\geq 4$.
(Si $k=3$, le membre de gauche de l'inéquation, qui augmente en même temps que k, est égal à 6 ; si $k=4$, le membre de gauche est égal à 12.)
Puisque $r\leq 2007$, alors $k(k+1)\leq 4014$, d'où $k\leq 62$.
(Si $k=63$, le membre de gauche de l'inéquation, qui augmente en même temps que k, est égal à 4032 ; si $k=62$, le membre de gauche est égal à 3906.)
Donc $4\leq k\leq 62$. Le nombre de valeurs possibles de k est donc égal à $62-4+1$, ou 59.
Il y a donc 59 couples (n,r) possibles.

Réponse : (E)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat 2006

(11^e année ou Secondaire V)

le mercredi 22 février 2006

Solutions

1. On a : $\dfrac{1}{4 \times 5} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$

Réponse : (B)

2. Puisque $2x + 3x + 4x = 12 + 9 + 6$, alors $9x = 27$, d'où $x = 3$.

Réponse : (B)

3. Selon la priorité des opérations, $\dfrac{4^3}{10^2 - 6^2}$ est égal à $\dfrac{64}{100 - 36}$, c'est-à-dire à $\dfrac{64}{64}$, ou 1.

Réponse : (A)

4. On calcule de l'intérieur vers l'extérieur : $\left(\sqrt{\sqrt{9} + \sqrt{1}}\right)^4 = \left(\sqrt{3+1}\right)^4 = \left(\sqrt{4}\right)^4 = 2^4 = 16$

Réponse : (C)

5. Puisque les arêtes ont des longueurs de 4, 5 et 6, les volumes égalent 4^3, 5^3 et 6^3, c'est-à-dire 64, 125 et 216. La moyenne des volumes est égale à $\dfrac{64 + 125 + 216}{3}$, c'est-à-dire à $\dfrac{405}{3}$, ou 135.

Réponse : (E)

6. La réduction du prix du tee-shirt est égale à 30 % de 25 \$, soit $0{,}3 \times 25$ \$, ou 7,50 \$.
La réduction du prix du jean est égale à 10 % de 75 \$, soit $0{,}1 \times 75$ \$, ou 7,50 \$.
La réduction du prix total est égale à 7,50 \$ + 7,50 \$, ou 15 \$.

Réponse : (A)

7. Si $\sqrt{2^3 \times 5 \times p}$ est un entier, alors $2^3 \times 5 \times p$ est un carré parfait.
Pour que $2^3 \times 5 \times p$ soit un carré parfait, il faut que chaque facteur premier paraisse un nombre pair de fois. Donc, p doit être un multiple de 2 et de 5.
Pour que p soit aussi petit que possible, p doit donc être égal à 2×5, ou 10.
(On peut vérifier : $2^3 \times 5 \times 10 = 400$, ce qui est un carré parfait.)

Réponse : (C)

8. Selon les renseignements donnés, $P + Q = 16$ et $P - Q = 4$.
On additionne ces équations, membre par membre, pour obtenir $P + Q + P - Q = 16 + 4$, d'où $2P = 20$, ou $P = 10$.

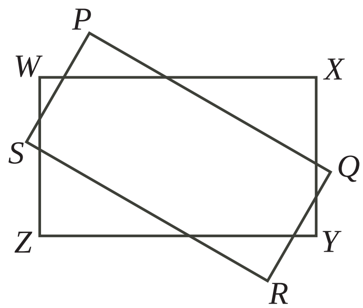
Réponse : (D)

9. *Solution 1*
Puisque $\angle FAB$ est un angle extérieur du triangle ABC, alors $\angle FAB = \angle ABC + \angle ACB$, ou $70^\circ = (x^\circ + 20^\circ) + (20^\circ + x^\circ)$. Donc $70 = 2x + 40$, d'où $x = 15$.

Solution 2
Puisque $\angle FAB = 70^\circ$, alors $\angle BAC = 110^\circ$.
Dans le triangle ABC, on a $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$, ou
$(x^\circ + 20^\circ) + (20^\circ + x^\circ) + 110^\circ = 180^\circ$. Donc $150 + 2x = 180$, d'où $x = 15$.

Réponse : (A)

10. On considère les rectangles $WXYZ$ et $PQRS$.
Chacun des quatre côtés de $PQRS$ peut couper un maximum de 2 côtés de $WXYZ$, puisqu'une droite peut couper un maximum de deux côtés d'un rectangle.
Il peut donc y avoir au plus 8 points d'intersection.
Or, 8 points d'intersection sont possibles, comme dans la figure suivante.



Donc, le nombre maximum de points d'intersection de n'importe quels deux rectangles est 8.

Réponse : (D)

11. *Solution 1*
Puisque $\frac{a}{b} = 3$, alors $a = 3b$. Puisque $\frac{b}{c} = 2$, alors $b = 2c$.
Puisque $a = 3b$ et $b = 2c$, alors $a = 6c$.
Donc $\frac{a-b}{c-b} = \frac{6c-2c}{c-2c} = \frac{4c}{-c} = -4$.

Solution 2
On divise le numérateur et le dénominateur de l'expression par b : $\frac{a-b}{c-b} = \frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{c}{b}-1}$

Puisque $\frac{b}{c} = 2$, alors $\frac{c}{b} = \frac{1}{2}$.
On a donc $\frac{a-b}{c-b} = \frac{3-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4$.

Solution 3
Posons $c = 1$. Puisque $\frac{b}{c} = 2$, alors $b = 2$. Puisque $\frac{a}{b} = 3$, alors $a = 6$.
On a donc $\frac{a-b}{c-b} = \frac{6-2}{1-2} = \frac{4}{-1} = -4$.

Réponse : (A)

12. *Solution 1*
Le membre de gauche de l'équation est égal à $(2^4)(3^6)$, c'est-à-dire à $16(729)$, ou $11\,664$.
Donc $9(6^x) = 11\,664$, d'où $6^x = 1296$.
Puisque $6^4 = 1296$, alors $x = 4$.

Solution 2
On transforme le membre de gauche : $(2^4)(3^6) = (2^4)(3^4)(3^2) = (2 \times 3)^4(3^2) = 6^4(9) = 9(6^4)$
On compare cette expression à $9(6^x)$ et on conclut que $x = 4$.

Réponse : (C)

13. Soit c le coût, en cents, du téléchargement d'une chanson en 2005.
En 2004, le coût du téléchargement d'une chanson était donc de $c + 32$ cents.
Le coût total des téléchargements était donc de $360c$ cents en 2005 et de $200(c + 32)$ cents en 2004. Donc $360c = 200(c + 32)$, d'où $160c = 6400$, ou $c = 40$.
Le coût total des téléchargements de 2005 était donc de $360(40)$ cents, soit 14 400 cents, ou 144,00 \$.

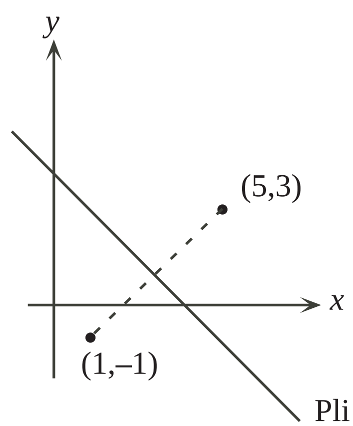
Réponse : (A)

14. *Solution 1*
On additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $px + 3x = 46$, ou $(p + 3)x = 46$. Puisque $(2, -4)$ est une solution du système, il vérifie l'èquation $(p + 3)x = 46$ (ou $(p + 3)x + 0y = 46$).
Donc $2(p + 3) = 46$, d'où $p + 3 = 23$, ou $p = 20$.

Solution 2
On reporte $(x,y) = (2, -4)$ dans la deuxième équation. On obtient $3(2) - q(-4) = 38$, d'où $6 + 4q = 38$, ou $q = 8$. La première équation devient donc $px + 8y = 8$.
On reporte $(x,y) = (2, -4)$ dans cette équation. On obtient $p(2) + 8(-4) = 8$, d'où $2p - 32 = 8$, ou $p = 20$.

Réponse : (B)

15. Puisque le point (5,3) est superposé au point $(1, -1)$, la droite qui représente le pli doit passer par le milieu du segment formé par les points, soit $\left(\frac{1}{2}(5 + 1), \frac{1}{2}(3 + (-1))\right)$, ou (3,1).



Parmi les choix de réponse, (3,1) vérifie seulement l'équation $y = -x + 4$. La réponse est (D).
(De fait, la droite est la médiatrice du segment formé par les points (5,3) et $(1, -1)$. La pente du segment est égale à $\dfrac{3-(-1)}{5-1}$, ou 1. La médiatrice a donc une pente de -1.
Puisqu'elle passe aussi par le point (3,1), elle a pour équation $y = -x + 4$.)

Réponse : (D)

16. Puisque l'aire du disque est égale à l'aire de la région ombrée, chaque aire est égale à la moitié de l'aire du rectangle. Chaque aire est donc égale à $\frac{1}{2}(8 \times 9)$, ou 36.
Soit r le rayon du disque. Donc $\pi r^2 = 36$, ou $r^2 = \frac{36}{\pi}$. Donc $r = \sqrt{\frac{36}{\pi}}$, ou $r = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{\pi}}$, ou $r = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$.

Réponse : (C)

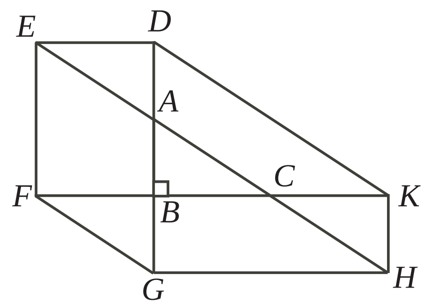
17. Puisque chaque terme, à partir du quatrième, est égal à la somme des trois termes précédents, alors d'après le quatrième terme, on a $13 = 5 + p + q$, d'où $p + q = 8$.
D'après le cinquième terme, on a $r = p + q + 13$, d'où $r = 8 + 13$, ou $r = 21$.
D'après le septième terme, on a $x = 13 + r + 40$, d'où $r = 13 + 21 + 40$, ou $r = 74$.

Réponse : (D)

18. Georgina se déplace pendant 6 minutes, soit $\frac{1}{10}$ d'heure. Puisqu'elle se déplace pendant $\frac{1}{10}$ d'heure à une vitesse de 24 km/h, elle parcourt 2,4 km, ou 2400 m.
Puisque la roue avant de son vélo a un diamètre de 0,75 m, elle a une circonférence de $0{,}75\pi$ m.
Donc, à chaque rotation de la roue, Georgina avance de $0{,}75\pi$ m.
Sur une longueur de 2400 m, le nombre de rotations effectuées par la roue est égal à $\dfrac{2400}{0{,}75\pi}$, soit environ 1018,59. Le choix de réponse le plus près est 1020.

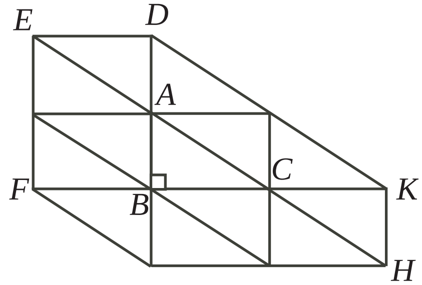
Réponse : (B)

19. *Solution 1*



Soit x l'aire du triangle ABC.
On subdivise l'hexagone $DEFGHK$ en morceaux et on exprimera l'aire de chaque morceau en termes de x.
On considère les triangles ADE et ABC. Puisque $AD = AB$, $AE = AC$ et $\angle DAE = \angle CAB$, les triangles sont congruents. L'aire du triangle ADE est donc égale à x.
De même, les triangles BGF et CKH ont chacun une aire de x.
On considère le quadrilatère $AEFB$. On peut le joindre au triangle ABC pour former le triangle CFE. Puisque $AE = AC$, alors $CE = 2CA$; de même, $CF = 2CB$.
Les triangles CFE et CBA ont un angle commun, soit C. De plus, les rapports $CA : CE$ et $CB : CF$ égalent chacun $1 : 2$. Les triangles sont donc semblables.
Puisque les côtés du triangle CFE sont 2 fois plus longs que ceux du triangle CBA, l'aire du triangle CFE est 4 fois celle du triangle CBA. Elle est donc égale à $4x$.
Donc, l'aire du quadrilatère $AEFB$ est égale à $3x$.
De même, les quadrilatères $ADKC$ et $BCHG$ ont chacun une aire de $3x$.
L'aire de l'hexagone $DEFGHK$ est égale à la somme de l'aire des triangles ABC, ADE, BGF, CKH et des quadrilatères $AEFB$, $ADKC$ et $BCHG$. Elle est donc égale à $4x + 3(3x)$, ou $13x$.
Le rapport de l'aire de l'hexagone $DEFGHK$ à l'aire du triangle ABC est égal à $13 : 1$.

Solution 2
On peut diviser l'hexagone $DEFGHK$ en triangles en traçant des segments verticaux ayant la même longueur que AB, des segments horizontaux ayant la même longueur que BC et des segments obliques ayant la même longueur que AC.



L'hexagone $DEFGHK$ est donc divisé en 13 triangles congruents. (On peut facilement démontrer que chaque triangle est congruent au triangle ABC en montrant que chacun est rectangle et qu'au moins deux des côtés de chaque triangle a la même longueur que ceux du triangle ABC.)
Donc, l'aire de l'hexagone $DEFGHI$ est 13 fois l'aire du triangle ABC. Le rapport des aires est donc de 13 : 1.

Réponse : (E)

20. *Solution 1*
Supposons que Igor enlève un nombre de billes du sac et que les billes qui restent dans le sac ne satisfont pas à la condition donnée. Quel est le nombre maximal de billes qui peuvent rester ?
Pour ne pas satisfaire à la condition donnée, ou bien il n'y a pas au moins quatre billes d'une couleur (et il y a alors au plus 9 billes dans le sac, soit 3 billes de chaque couleur) ou bien il y a au moins 4 billes d'une couleur et il n'y a pas 3 billes de chaque autre couleur.
Dans ce dernier cas, on pourrait avoir autant de billes que possible d'une couleur (soit 8 billes jaunes) et 2 billes de chaque autre couleur pour un total de 12 billes qui restent dans le sac.
Donc, si Igor enlève 8 billes ou plus, les boules qui restent dans le sac ne satisfont pas à la condition donnée.
Par contre, si Igor enlève 7 billes ou moins, les billes qui restent satisfont à la condition donnée.
La plus grande valeur possible de N est 7.

Solution 2
Puisqu'on cherche la plus grande valeur possible de N, on commence par le plus grand nombre parmi les choix de répones et on élimine les choix jusqu'à ce que l'on obtienne la bonne réponse.
Si Igor a enlevé 10 billes, il peut avoir enlevé 5 billes rouges et 5 billes noires, laissant 8 billes jaunes, 2 billes rouges et 0 bille noire dans le sac, ce qui ne satisfait pas à la condition donnée.
Donc, la réponse n'est pas 10.
Si Igor a enlevé 9 billes, il peut avoir enlevé 5 billes rouges et 4 billes noires, laissant 8 billes jaunes, 2 billes rouges et 1 bille noire dans le sac, ce qui ne satisfait pas à la condition donnée.
Donc, la réponse n'est pas 9.
Si Igor a enlevé 8 billes, il peut avoir enlevé 5 billes rouges et 3 billes noires, laissant 8 billes jaunes, 2 billes rouges et 2 billes noires dans le sac, ce qui ne satisfait pas à la condition donnée.
Donc, la réponse n'est pas 8.

La réponse est-elle 7 ?
Il y a 20 billes au départ. Si on en enlève 7, il en reste 13 dans le sac.
Puisqu'il reste 13 billes, il ne peut y en avoir 4 ou moins de chacune des trois couleurs (sinon il y aurait au plus 12 billes dans le sac). Il y a donc au moins 5 billes d'une couleur dans le sac.
Peut-il y avoir 2 billes ou moins de chacune des deux autres couleurs ? Si oui, il doit y avoir au moins 9 billes de la première couleur pour qu'il reste 13 billes dans le sac. Or, il y avait un maximum de 8 billes d'une même couleur au départ. Donc, il doit y avoir au moins 3 billes d'une des deux autres couleurs.

Donc, si on enlève 7 billes, il reste au moins 5 billes d'une couleur et 3 billes d'une autre couleur.
En choisissant $N = 7$, les billes qui restent dans le sac satisfont à la condition donnée.
La plus grande valeur possible de N est donc 7.

Réponse : (B)

21. Si n est un entier impair, alors les facteurs $n-1$ et $n+1$ sont des entiers pairs.
De plus, $n-1$ et $n+1$ sont des nombres pairs consécutifs. L'un est donc un multiple de 2, tandis que l'autre est un multiple de 4.
Le produit $(n-1)(n+1)$ admet donc 3 fois le diviseur 2. Il en est donc de même pour le produit $(n-1)(n)(n+1)$ qui est donc divisible par 8.
Donc, si n est un entier impair, l'expression $\dfrac{(n-1)(n)(n+1)}{8}$ prend une valeur entière.
(De 2 à 80, il y a 39 entiers impairs.)
Si n est un entier pair, alors les facteurs $n-1$ et $n+1$ sont des entiers impairs.
Donc, l'expression $(n-1)(n)(n+1)$ est seulement divisible par 8 lorsque n est divisible par 8.
(De 2 à 80, il y a 10 multiples de 8.)
Il y a donc $39 + 10$, ou 49 valeurs entières de n, dans l'intervalle $2 \leq n \leq 80$, pour lesquelles l'expression $\dfrac{(n-1)(n)(n+1)}{8}$ prend des valeurs entières.

Réponse : (E)

22. On procède d'abord par tâtonnements, tout en analysant les résultats.
Puisque Céline est plus rapide à déplacer les petites boîtes et que René est plus rapide à déplacer les grandes, on suppose que Céline déplace toutes les petites, ce qui prend 32 minutes, et que René déplace toutes les grandes, ce qui prend 50 minutes. Ils finissent donc en 50 minutes.
Si on laisse Céline déplacer 2 grandes boîtes, en plus des 16 petites, elle mettra 44 minutes pour le faire. René mettra alors 40 minutes à déplacer 8 grandes boîtes. Ils finissent donc en 44 minutes.
On peut donc éliminer le choix de réponse (E).
Si on laisse René déplacer 1 des petites boîtes, en plus des 8 grandes boîtes, il mettra 43 minutes pour le faire. Céline mettra alors 42 minutes pour déplacer 15 petites boîtes et 2 grandes boîtes.
Ils finissent donc en 43 minutes. On peut donc éliminer le choix de réponse (D).

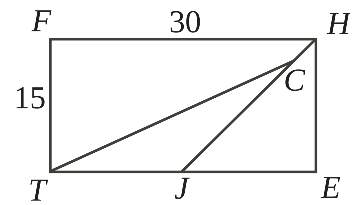
Pourquoi est-il impossible de finir en moins de 43 minutes ? Supposons qu'ils finissent en 42 minutes. Ils mettraient, en tout, un total d'au plus 84 minutes pour finir le travail.
Supposons que Céline déplace x petites boîtes et y grandes boîtes, ce qui lui prendrait $2x + 6y$ minutes. Alors René déplace $16 - x$ petites boîtes et $10 - y$ grandes boîtes, ce qui lui prendrait $3(16 - x) + 5(10 - y)$ minutes, ou $98 - 3x - 5y$ minutes.
Puisqu'ils mettent au plus 84 minutes de travail au total, alors $(2x + 6y) + (98 - 3x - 5y) \leq 84$, ou $14 \leq x - y$.
Puisque $0 \leq x \leq 16$ et $0 \leq y \leq 10$, alors les couples (x,y) qui vérifient l'inéquation $14 \leq x - y$ sont (16,0), (16,1), (16,2), (15,0), (15,1), (14,0). Ces valeurs donnent les résultats suivants :

x	y	Céline N$^{\text{bre}}$ de pet. boîtes	Céline N$^{\text{bre}}$ de gr. boîtes	Céline N$^{\text{bre}}$ de minutes	René N$^{\text{bre}}$ de pet. boîtes	René N$^{\text{bre}}$ de gr. boîtes	René N$^{\text{bre}}$ de minutes
16	0	16	0	32	0	10	50
16	1	16	1	38	0	9	45
16	2	16	2	44	0	8	40
15	0	15	0	30	1	10	53
15	1	15	1	36	1	9	48
14	0	14	0	28	2	10	56

Dans chacun de ces cas, bien que le temps total soit inférieur à 84 minutes, il faut plus de 43 minutes pour que les deux aient fini de déplacer les boîtes.
Il est donc impossible de finir en moins de 43 minutes. Ils peuvent donc finir à 9 h 43.

Réponse : (C)

23. *Solution 1*
Soit t le temps, en secondes, que met Tom pour attraper Jerry.

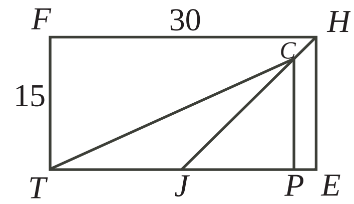


Puisque Tom court à une vitesse de 5 m/s pendant t secondes, alors $TC = 5t$.
De même, puisque Jerry court à une vitesse de 3 m/s pendant t secondes, alors $JC = 3t$.
Or, on sait que J est le milieu du segment TE. Donc $TJ = 15 = JE$.
Puisque $HE = 15$, le triangle HJE est rectangle isocèle. Donc $\angle HJE = 45°$, d'où $\angle TJC = 135°$.
D'après la loi du cosinus dans le triangle TCJ :

$$\begin{aligned} TC^2 &= TJ^2 + JC^2 - 2(TJ)(JC)\cos(\angle TJC) \\ (5t)^2 &= 15^2 + (3t)^2 - 2(15)(3t)\cos(135°) \\ 25t^2 &= 225 + 9t^2 - 90t\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ 16t^2 - 45\sqrt{2}t - 225 &= 0 \end{aligned}$$

Puisque t est positif, on a donc $t = \dfrac{45\sqrt{2} + \sqrt{(45\sqrt{2})^2 - 4(16)(-225)}}{2(16)}$, d'où $t = \dfrac{45\sqrt{2} + \sqrt{18\,450}}{32}$, ou $t \approx 6{,}23$ secondes. Tom met environ 6,2 secondes pour attraper Jerry.

Solution 2
Soit t le temps, en secondes, que met Tom pour attraper Jerry.
Puisque Tom court à une vitesse de 5 m/s pendant t secondes, alors $TC = 5t$.
De même, puisque Jerry court à une vitesse de 3 m/s pendant t secondes, alors $JC = 3t$.
Or, on sait que J est le milieu du segment TE. Donc $TJ = 15 = JE$.
Puisque $HE = 15$, le triangle HJE est rectangle isocèle. Donc $\angle HJE = 45°$.
Au point C, on abaisse une perpendiculaire CP à JE.



Puisque $CJ = 3t$, $\angle CJE = 45^\circ$ et $\angle CPJ = 90^\circ$, alors $JP = CP = \frac{1}{\sqrt{2}}(3t)$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle CPT :

$$\begin{aligned}
TC^2 &= (TJ + JP)^2 + CP^2 \\
(5t)^2 &= \left(15 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(3t)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(3t)\right)^2 \\
25t^2 &= 225 + 2(15)\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(3t)\right) + \tfrac{1}{2}(9t^2) + \tfrac{1}{2}(9t^2) \\
25t^2 &= 225 + 45\sqrt{2}t + 9t^2 \\
16t^2 - 45\sqrt{2}t - 225 &= 0
\end{aligned}$$

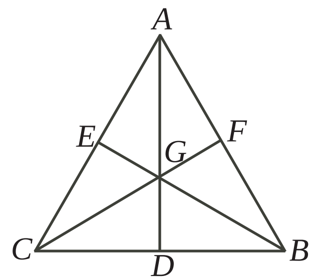
On résout l'équation comme dans la Solution 1. Tom met environ 6,2 secondes pour attraper Jerry.

Réponse : (E)

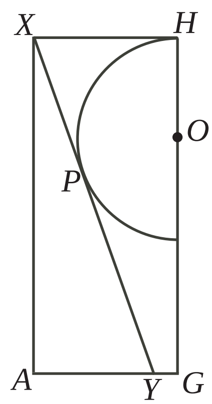
24. Puisque $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{3a} = \dfrac{1}{b^2 - 2b}$, alors $\dfrac{6}{6a} + \dfrac{3}{6a} + \dfrac{2}{6a} = \dfrac{1}{b^2 - 2b}$, ou $\dfrac{11}{6a} = \dfrac{1}{b^2 - 2b}$.
Le produit en croix donne $11(b^2 - 2b) = 6a$.
Puisque a et b sont des entiers, les deux membres de l'équation prennent des valeurs entières.
Puisque 11 est un facteur du membre de gauche, il doit être un facteur du membre de droite.
Il doit donc être un diviseur de a.
On a donc $a = 11A$, où A est un entier strictement positif.
La dernière équation devient donc $11(b^2 - 2b) = 6(11A)$, ou $b^2 - 2b = 6A$.
Puisque 6 est un facteur du membre de droite, il doit être un facteur du membre de gauche.
Quelle est la plus petite valeur entière positive de b pour laquelle 6 est un diviseur de $b^2 - 2b$?
On peut vérifier rapidement que si b est égal à 1, 2, 3, 4 ou 5, alors $b^2 - 2b$ n'est pas divisible par 6, alors que si $b = 6$, $b^2 - 2b$ est divisible par 6.
La plus petite valeur possible de b est 6. Donc $6A = 6^2 - 2(6)$, d'où $6A = 24$, ou $A = 4$. Puisque $a = 11A$, alors $a = 44$.
La plus petite valeur possible de $a + b$ est donc $44 + 6$, ou 50.

Réponse : (E)

25. Soit A, B et C les centres des bases des cônes. On trace le triangle ABC.
Puisque les cônes sont tangents l'un à l'autre, les côtés du triangle passent par les points de contact. Puisque les bases ont un rayon de 50, le triangle a des côtés de longueur 100. Il est donc équilatéral.
Par symétrie, la sphère est placée au milieu des cônes. Son centre est donc directement au-dessus du centre de gravité du triangle ABC.
Quelle est la distance du centre de gravité à chacun des sommets ?
On trace les médianes AD, BE et CF. (Chacune est aussi une hauteur, une médiatrice et une bissectrice.). Les médianes se coupent au centre de gravité G.



Puisque $BD = \frac{1}{2}BC = 50$ et $\angle GBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 30°$, alors le triangle BGD est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $BG = \frac{2}{\sqrt{3}}BD$, d'où $BG = \frac{100}{\sqrt{3}}$.
Donc, la distance du centre de gravité à chacun des sommets du triangle est égale à $\frac{100}{\sqrt{3}}$.
Donc, la distance entre l'axe de chaque cône et la droite verticale qui passe au centre de la sphère est aussi égale à $\frac{100}{\sqrt{3}}$.
On imagine un plan vertical qui coupe un cône et la sphère en passant par l'axe du cône et le centre de la sphère. La figure suivante représente l'intersection. On y voit la moitié de l'intersection avec le cône et la moitié de l'intersection avec la sphère.



A est donc le centre de la base du cône (un sommet du triangle), G est le centre de gravité du triangle ABC, O est le centre de la sphère, P est le point de contact de la sphère et du cône, X est l'apex du cône, Y est le point où le cône rencontre AG et H est le point de contact de la sphère et du plan horizontal qui passe par l'apex des cônes.
Soit r le rayon de la sphère.

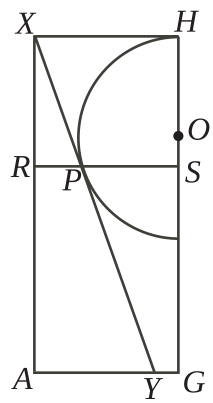
Méthode 1
On sait que $OH = OP = r$, $XH = AG = \frac{100}{\sqrt{3}}$ et $XA = HG = 120$.
Puisque P est le point de contact de la sphère et du cône, OP est perpendiculaire à XY.
Puisque les segments XH et XP sont tangents à la sphère, alors $XP = XH = \frac{100}{\sqrt{3}}$.
D'après le théorème du Pythagore dans le triangle AXY, $XY^2 = AY^2 + AX^2$, ou
$XY^2 = 50^2 + 120^2$, d'où $XY^2 = 16\,900 = 130^2$, ou $XY = 130$.
Donc $PY = XY - XP$, ou $PY = 130 - \frac{100}{\sqrt{3}}$.
De plus, $OG = 120 - r$ et $GY = AG - AY$, ou $GY = \frac{100}{\sqrt{3}} - 50$.

D'après le théorème de Pythagore dans les triangles OPY et GOY,
$OP^2 + PY^2 = OY^2 = GY^2 + GO^2$. Donc :

$$\begin{aligned}
r^2 + \left(130 - \tfrac{100}{\sqrt{3}}\right)^2 &= \left(\tfrac{100}{\sqrt{3}} - 50\right)^2 + (120 - r)^2 \\
r^2 + 130^2 - \frac{2(130)(100)}{\sqrt{3}} + \frac{10000}{3} &= \frac{10000}{3} - \frac{2(50)(100)}{\sqrt{3}} + 50^2 + 120^2 - 240r + r^2 \\
240r &= \frac{2(130-50)(100)}{\sqrt{3}} \qquad (\text{puisque } 130^2 = 50^2 + 120^2) \\
r &= \frac{200}{3\sqrt{3}} = \frac{200\sqrt{3}}{9}
\end{aligned}$$

Donc $r \approx 38{,}49$. Parmi les choix de réponse, le rayon est plus près de 38,5.
(On aurait pu calculer le rayon à l'aide de la trigonométrie. En effet, le rapport de AY à AX nous permet de connaître la mesure de l'angle YXA et de là, celle de l'angle PXH.
On aurait alors $\tan\left(\frac{1}{2}\angle PXH\right) = \tan(\angle OXH) = \dfrac{OH}{XH} = \dfrac{r}{\frac{100}{\sqrt{3}}}$.)

<u>Méthode 2</u>
On sait que $XH = AG = \frac{100}{\sqrt{3}}$.
Puisque $AX = 120$ et $AY = 50$, alors la pente de XY est égale à $\frac{-120}{50}$, ou $-\frac{12}{5}$.
Puisque P est le point de contact de la sphère et du cône, OP est perpendiculaire à XY. Dans un plan cartésien dont l'axe des abscisses est parallèle à AG et l'axe des ordonnées est parallèle à AX, OP a une pente de $\frac{5}{12}$.
Au point P, on trace une droite horizontale qui coupe AX en R et GH en S.



Puisque OP a une pente de $\frac{5}{12}$, alors $OS = 5t$ et $SP = 12t$ pour un nombre réel quelconque t.
Puisque le triangle OSP est rectangle en S, alors $OP = 13t$ d'après le théorème de Pythagore.
Puisque OH est un rayon du cercle, $OH = OP = 13t$. Puisque $XR = HS = HO + OS$, alors $XR = 18t$.
Or, XP a une pente de $-\frac{12}{5}$. Puisque $XR = 18t$, alors $RP = \frac{5}{12}(18t)$, ou $RP = \frac{15}{2}t$.
Puisque $RS = RP + PS$, alors $RS = \frac{15}{2}t + 12t$, ou $RS = \frac{39}{2}t$. Puisque $RS = AG$ et que $AG = \frac{100}{\sqrt{3}}$, alors $\frac{39}{2}t = \frac{100}{\sqrt{3}}$. Le rayon de la sphère, qui est égal à $13t$, est donc égal à $\frac{2}{3}\left(\frac{100}{\sqrt{3}}\right)$, c'est-à-dire à $\frac{200\sqrt{3}}{9}$, ou environ 38,49. Parmi les choix de réponse, le rayon est plus près de 38,5.

Réponse : (D)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat 2005

(11^{e} année ou Secondaire V)

Le mercredi 23 février 2005

Solutions

1. On calcule : $\dfrac{150+(150\div 10)}{15-5} = \dfrac{150+15}{10} = \dfrac{165}{10} = 16{,}5$

Réponse : (E)

2. Puisque $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, alors $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{9} = \frac{1}{2}$.

Réponse : (B)

3. *Solution 1*
Puisque $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{2}{3}$, alors $\dfrac{6a+18b}{12a+6b} = \dfrac{6(\frac{1}{2})+18(\frac{2}{3})}{12(\frac{1}{2})+6(\frac{2}{3})} = \dfrac{3+12}{6+4} = \dfrac{15}{10} = \dfrac{3}{2}$.

Solution 2
Puisque $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{2}{3}$, alors $\dfrac{6a+18b}{12a+6b} = \dfrac{6(a+3b)}{6(2a+b)} = \dfrac{a+3b}{2a+b} = \dfrac{\frac{1}{2}+3(\frac{2}{3})}{2(\frac{1}{2})+\frac{2}{3}} = \dfrac{2\frac{1}{2}}{1\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{3}} = \dfrac{3}{2}$.

Réponse : (E)

4. Puisque $\sqrt{4+9+x^2} = 7$, alors $4+9+x^2 = 7^2$, ou $13+x^2 = 49$, d'où $x^2 = 36$.
Les valeurs possibles de x sont donc 6 et -6. Donc, la réponse est (A).

Réponse : (A)

5. Pendant que la pièce de monnaie roule de P à Q, le F sur la face de la pièce subit une rotation de 270° dans le sens des aiguilles d'une montre.
Puisque la distance de Q à R est égale à la distance de P à Q, alors le F subit une autre rotation de 270° dans le sens des aiguilles d'une montre. La pièce est donc orientée comme suit : 

Réponse : (C)

6. Les quatre nombres, 1, 2, 3 et 4, se répètent à tous les quatre termes.
Combien de fois cette séquence 1,2,3,4 est-elle répétée dans les 2005 premiers termes ?
Puisque 2005 divisé par 4 donne un quotient de 501 et un reste de 1, alors la séquence $1, 2, 3, 4$ se répète 501 fois et le 2005e terme est donc 1.
La somme des 2005 premiers termes de la suite est donc égale à $501(1+2+3+4)+1$, c'est-à-dire à $501(10)+1$, ou 5011.

Réponse : (A)

7. On sait que $\angle A = \angle B + 21°$ et $\angle C = \angle B + 36°$.
Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, alors :

$$\begin{aligned}
\angle A + \angle B + \angle C &= 180° \\
\angle B + 21° + \angle B + \angle B + 36° &= 180° \\
3(\angle B) + 57° &= 180° \\
3(\angle B) &= 123° \\
\angle B &= 41°
\end{aligned}$$

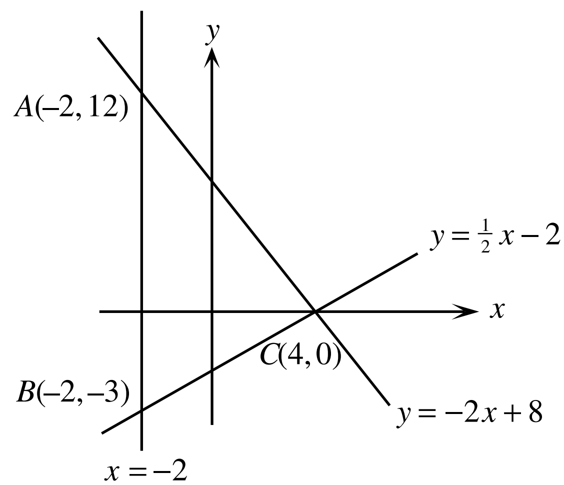
Réponse : (B)

8. *Solution 1*
On considère que les enfants sont placés en ordre, du plus jeune au plus vieux. Puisque les sept enfants sont nés sept années consécutives, le septième a 4 ans de plus que le troisième, le sixième a 4 ans de plus que le deuxième et le cinquième a 4 ans de plus que le premier.
Puisque la somme de l'âge des trois plus jeunes est égale à 42 ans, alors la somme de l'âge des trois plus vieux, en années, est égale à $42 + 4 + 4 + 4$, ou 54.

Solution 2
Puisque les âges sont des entiers consécutifs, soit x, $x + 1$ et $x + 2$ l'âge des trois plus jeunes enfants, en années.
Donc $x + x + 1 + x + 2 = 42$, ou $3x + 3 = 42$, d'où $x = 13$.
Les enfants ont donc 13 ans, 14 ans, 15 ans, 16 ans, 17 ans, 18 ans et 19 ans.
Donc, la somme de l'âge des trois plus vieux, en années, est égale à $17 + 18 + 19$, ou 54.

Réponse : (B)

9. On détermine d'abord les points où les droites obliques coupent la droite verticale. Aux points d'intersection, on a $x = -2$.
Pour l'intersection avec la droite d'équation $y = -2x + 8$, posons $x = -2$. On a $y = -2(-2) + 8$, d'où $y = 12$. Le point d'intersection a pour coordonnées $(-2{,}12)$.
Pour l'intersection avec la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$, posons $x = -2$. On a $y = \frac{1}{2}(-2) - 2$, ou $y = -3$. Le point d'intersection a pour coordonnées $(-2, -3)$.



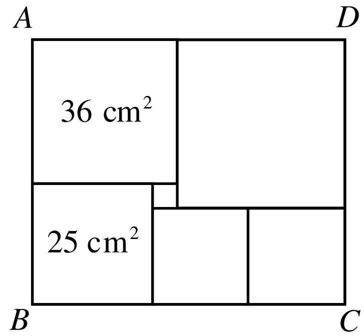
Le triangle ABC a donc une base AB de longueur $12 - (-3)$, ou 15. La hauteur correspondante est mesurée sur l'axe des abscisses, entre le sommet C et le segment AB. Sa longueur est de $4 - (-2)$, ou 6.
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(15)(6)$, ou 45.

Réponse : (E)

10. Si 50 % de P est égal à 20 % de Q, alors $\frac{1}{2}P = \frac{1}{5}Q$, d'où $P = \frac{2}{5}Q$.
Donc, P est égal à 40 % de Q.

Réponse : (C)

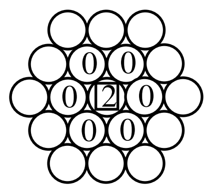
11. Puisque le carré supérieur gauche a une aire de 36 cm^2, ses côtés ont une longueur de 6 cm.
Puisque le carré inférieur gauche a une aire de 25 cm^2, ses côtés ont une longueur de 5 cm.
La hauteur AB du rectangle $ABCD$ est de $(5 + 6)$ cm, ou 11 cm.



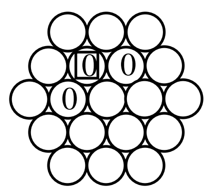
Puisque le carré supérieur gauche a des côés de 6 cm et que le carré inférieur gauche a des côtés de 5 cm, alors le petit carré, au milieu, a des côtés de 1 cm.
Le carré supérieur droit a donc des côtés de $(6 + 1)$ cm, ou 7 cm.
La longueur AD du rectangle $ABCD$ est donc égale à $(6 + 7)$ cm, ou 13 cm.
Le périmètre du rectangle $ABCD$ est égal à $[2(13) + 2(11)]$ cm, ou 48 cm.

Réponse : (E)

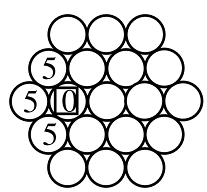
12. À partir du 2 au centre, on peut se déplacer vers six chiffres 0.



À partir de n'importe quel 0, on peut se déplacer vers deux chiffres 0.



À partir de n'importe quel 0, on peut se déplacer vers trois chiffres 5.

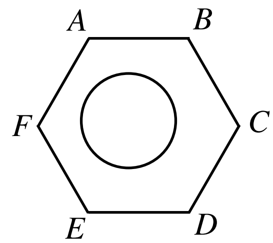


Pour chacun des 6 choix du premier chiffre 0, on peut choisir n'importe quel des 2 chiffres disponibles pour le deuxième 0 et dans chaque cas, on peut choisir n'importe quel des 3 chiffres 5 disponibles.
Le nombre de chemins disponibles est donc égal à $6 \times 2 \times 3$, ou 36.

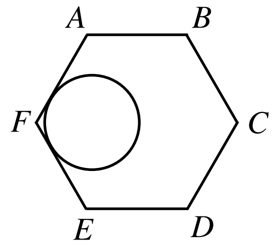
Réponse : (A)

13. Après plusieurs tâtonnements, on peut se convaincre que la réponse est 2 côtés. Peut-on justifier cette réponse de façon mathématique ? C'est plutôt compliqué.

On considère l'hexagone régulier $ABCDEF$ et un cercle situé complètement à l'intérieur de l'hexagone.



Il est évidemment possible pour le cercle de toucher à un ou deux côtés de l'hexagone.



Ensuite, on remarque que :

–si le cercle touche aux 6 côtés, alors son rayon est égal à la moitié de la distance entre deux côtés opposés (p. ex., AB et DE) ;

–si le cercle touche à deux côtés opposés, alors son rayon est égal à la moitié de la distance entre ces deux côtés ; pour être complètement situé à l'intérieur de l'hexagone, le cercle doit toucher aux 6 côtés ;

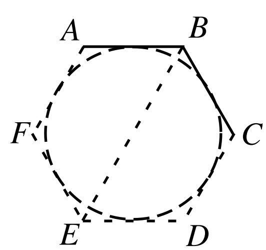
–si le cercle, à l'intérieur de l'hexagone, touche à au moins 4 côtés, il doit alors toucher à au moins une paire de côtés opposés. Il doit alors toucher aux 6 côtés. Si le cercle touche à moins de 6 côtés, il doit donc toucher à 1, 2 ou 3 côtés.

Est-il possible pour le cercle de toucher à 3 côtés sans toucher aux 6 côtés ?
Si c'est possible, il ne faut pas que le cercle touche à deux côtés opposés.
Il y a deux façons de le faire — le cercle touche à trois côtés consécutifs, (p. ex., AB, BC, CD) ou il touche à trois côtés dont aucuns deux ne sont consécutifs (p. ex., AB, CD, EF).

Pour compléter la justification, on examine ces deux possibilités, tout en utilisant la propriété suivante : si un cercle est tangent à deux droites sécantes, son centre est situé sur la bissectrice de l'angle formé par ces deux droites.

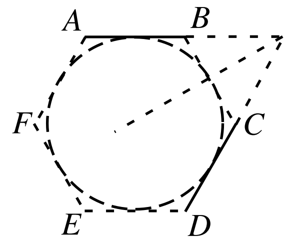
1$^{\text{er}}$ cas : Le cercle touche aux côtés AB, BC et CD.

Puisque le cercle est tangent à AB et à BC, son centre doit être situé sur la bissectrice de l'angle ABC. Or, cette bissectrice est la diagonale BE de l'hexagone.



Puisque le cercle est tangent à BC et à CD, son centre doit être situé sur la bissectrice de l'angle BCD. Or, cette bissectrice est la diagonale CF de l'hexagone.
Puisque le centre du cercle est situé sur BE et sur CF, il doit être situé au centre de l'hexagone. Le cercle doit donc toucher aux 6 côtés de l'hexagone.

2^e^ cas : Le cercle touche aux côtés AB, CD et EF.
Puisque le cercle est tangent à AB et à CD, son centre doit être situé sur la bissectrice de l'angle formé par le prolongement de AB et de DC . Par symétrie, cette bissectrice est la médiatrice de BC.



Puisque le cercle est tangent à CD et à EF, son centre doit être situé sur la bissectrice de l'angle formé par le prolongement de CD et de FE. Par symétrie, cette bissectrice est la médiatrice de DE.
Puisque le centre du cercle est situé sur la médiatrice de BC et sur celle de DE, il doit être situé au centre de l'hexagone. Le cercle doit donc toucher aux 6 côtés de l'hexagone.

Donc, si le cercle touche à trois côtés de l'hexagone, il doit toucher aux 6 côtés.
Si le cercle ne touche pas aux six côtés de l'hexagone, il peut toucher à un maximum de 2 côtés.

(Ce problème est un exemple d'un cas où la réponse est facile à obtenir, mais dont la justification est passablement complexe. Elle a été ajoutée par souci de précision.)

Réponse : (B)

14. *Solution 1*
Soit L le poids de la lionne, en kg.
Le poids du lionceau femelle, en kg, est donc égal à $\frac{1}{6}L$ et celui du lionceau mâle est égal à $\frac{1}{4}L$.
Donc $\frac{1}{4}L - \frac{1}{6}L = 14$, c'est-à-dire que $\frac{3}{12}L - \frac{2}{12}L = 14$, d'où $\frac{1}{12}L = 14$, ou $L = 168$.
Le poids de la lionne est de 168 kg.

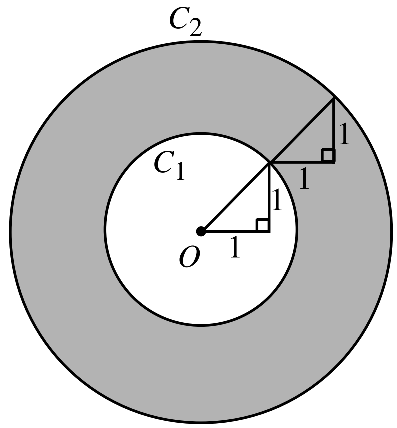
Solution 2
Soit F le poids du lionceau femelle, en kg.
Le poids du lionceau mâle est donc de $(F + 14)$ kg.
Le poids de la lionne, en kg, est égal à $6F$ et à $4(F + 14)$.
Donc $6F = 4F + 56$, d'où $2F = 56$, ou $F = 28$.
Le poids de la lionne est donc de $6(28)$ kg, ou 168 kg.

Réponse : (C)

15. Puisque $(x - 4)(5x + 2) = 0$, alors $x - 4 = 0$ ou $5x + 2 = 0$.
Si $x - 4 = 0$, alors $x = 4$ et l'expression $5x + 2$ a une valeur de 22.
Si $5x + 2 = 0$, alors l'expression $5x + 2$ a une valeur de 0. (Dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'obtenir la valeur de x, qui est de $-\frac{2}{5}$.)
L'expression $5x + 2$ peut donc admettre une valeur de 0 ou de 22.

Réponse : (C)

16. Dans chacun des triangles rectangles, la longueur de l'hypoténuse est égale à $\sqrt{1^2+1^2}$, ou $\sqrt{2}$. Le cercle C_1 a donc un rayon de $\sqrt{2}$ et le cercle C_2 a un rayon de $2\sqrt{2}$.



L'aire de la région ombrée est égale à la différence de l'aire des cercles C_2 et C_1.
Elle est égale à $\pi(2\sqrt{2})^2 - \pi(\sqrt{2})^2$, c'est-à-dire à $8\pi - 2\pi$, ou 6π.

Réponse : (D)

17. Un cylindre de rayon r et de hauteur h a un volume de $\pi r^2 h$.
Le cylindre qui a un rayon de 2 cm et une hauteur de 8 cm a un volume de $(\pi \times 2^2 \times 8)$ cm^3, ou 32π cm^3. Rempli, il contient 32π cm^3 d'eau.
Soit h la profondeur de l'eau dans le deuxième cylindre lorsque l'on y a versé l'eau du premier.
Donc $32\pi = \pi(4^2)h$, ou $16\pi h = 32\pi$, d'où $h = 2$ cm.
La profondeur de l'eau, dans le deuxième cylindre, est de 2 cm.

Réponse : (B)

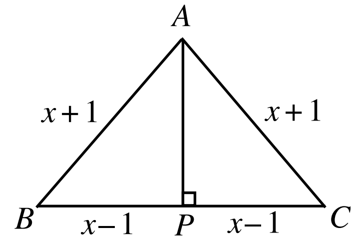
18. On peut obtenir un total de 11 points avec 3 bonnes réponses, 2 questions sans réponse et 5 réponses incorrectes.
On peut obtenir un total de 13 points avec 4 bonnes réponses, 1 question sans réponse et 5 réponses incorrectes.
On peut obtenir un total de 17 points avec 5 bonnes réponses, 2 questions sans réponse et 3 réponses incorrectes.
On peut obtenir un total de 23 points avec 7 bonnes réponses, 2 questions sans réponse et 1 réponse incorrecte.
Par élimination, il est impossible d'obtenir un total de 29 points.
(Pourquoi est-ce impossible ? Si on répond correctement aux 10 questions, on obtient un total de 30 points. Si on répond correctement à 9 questions, on obtient 27 points pour ces bonnes réponses. Si l'autre question est laissée sans réponse, on obtient un point de plus pour un total de 28 points. Si on donne une mauvaise réponse, on a un total de 27 points. Il est donc impossible d'obtenir un total de 29 points.)

Réponse : (E)

19. Puisque Vincent pédale à une vitesse de 24 km/h et que Samuel pédale à une vitesse de 16 km/h, alors Vincent se rapproche de Samuel à une vitesse de 8 km/h.
Puisque Samuel commence à une distance de 1 km au nord de Vincent, alors Vincent met $\frac{1}{8}$ d'une heure pour rattraper Samuel, ce qui est équivalent à $\frac{1}{8} \times 60$ min, c'est-à-dire à $\frac{60}{8}$ min, ou $7\frac{1}{2}$ min.

Réponse : (D)

20. On trace la hauteur AP.
Puisque le triangle ABC est isocèle, P est le milieu du côté BC. Donc $BP = PC = x - 1$.



D'après le théorème de Pythagore :

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{(x+1)^2 - (x-1)^2} = \sqrt{(x^2+2x+1) - (x^2-2x+1)} = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$$

Donc, l'aire du triangle ABC est égale à :

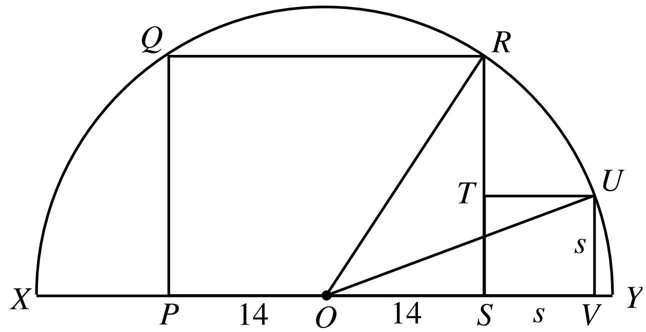
$$\frac{1}{2}(BC)(AP) = \frac{1}{2}(2x-2)(2\sqrt{x}) = 2(x-1)\sqrt{x}$$

Réponse : (E)

21. On considère d'abord l'expression a^b et on choisit des valeurs possibles distinctes de a et de b parmi les nombres -1, -2, -3, -4 et -5.
Quelle est la plus grande valeur possible de l'expression a^b ?
Puisque b est nécessairement négatif, on écrit $a^b = \dfrac{1}{a^{-b}}$, tout en remarquant que $-b > 0$.
Si b est impair, alors a^b sera négatif, car a est négatif.
Si b est pair, alors a^b sera positif.
Pour que l'expression a^b ait la plus grande valeur possible, on attribue à b une valeur paire, soit -2 ou -4.
De plus, pour que a^b, ou $\dfrac{1}{a^{-b}}$, ait une valeur aussi grande que possible, il faut que a^{-b} ait une valeur aussi petite que possible. Donc, a doit avoir une valeur de -1.
L'expression a^b admet donc la plus grande valeur possible lorsque $a = -1$ et que b est égal à -2 ou à -4. Dans chaque cas, $a^b = 1$, car $(-1)^{-2} = (-1)^{-4} = 1$.
Quelle est la deuxième plus grande valeur possible de a^b ?
Il faut encore que b ait une valeur paire pour que la valeur de a^b soit positive. On peut supposer que $a \neq -1$.
Pour s'assurer que a^b ait une valeur aussi grande que possible, on utilise la même logique pour choisir $b = -2$ et $a = -3$, ce qui donne $a^b = \dfrac{1}{(-3)^2}$, c'est-à-dire $a^b = \frac{1}{9}$.
Les deux plus grandes valeurs possibles de a^b sont 1 et $\frac{1}{9}$.
On considère maintenant l'expression $a^b + c^d$. Puisqu'une seule variable peut prendre la valeur -1, la plus grande valeur possible de l'expression est égale à la somme des deux plus grandes valeurs possibles de l'expression a^b, soit $1 + \frac{1}{9}$, ou $\frac{10}{9}$. On l'obtient en calculant $(-1)^{-4} + (-3)^{-2}$.

Réponse : (D)

22. Soit O le centre du cercle, r son rayon et s la longueur d'un côté du carré. On cherche la valeur de s^2.
Par symétrie, O est le milieu de PS. Donc $OP = OS = \frac{1}{2}QR$, d'où $OP = OS = 14$.
On trace les segments OR et OU qui sont des rayons du cercle. On a donc $OR = OU = r$.



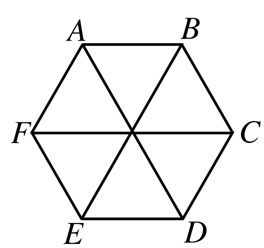
Puisque le triangle OSR est rectangle en S, alors selon le théorème de Pythagore, on a $OR^2 = OS^2 + SR^2$, c'est-à-dire $r^2 = 14^2 + 12^2$, d'où $r^2 = 196 + 144$, ou $r^2 = 340$.
Puisque le triangle OVU est rectangle en S, alors $OU^2 = OV^2 + VU^2$, ou $r^2 = (14 + s)^2 + s^2$.
Or $r^2 = 340$. Donc :

$$\begin{aligned} 340 &= s^2 + 28s + 196 + s^2 \\ 0 &= 2s^2 + 28s - 144 \\ 0 &= s^2 + 14s - 72 \\ 0 &= (s + 18)(s - 4) \end{aligned}$$

Puisque s doit être positif, alors $s = 4$. L'aire du carré $STUV$ est égale à s^2, ou 16.

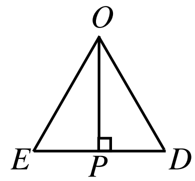
Réponse : (C)

23. Lorsque le cube est découpé de la sorte, chaque demi-cube a 7 faces, soit une face hexagonale formée par la découpure et 6 autres faces provenant chacune d'une des faces du cube.
Par symétrie, l'aire totale de ces 6 faces est égale à la moitié de l'aire totale du cube, soit $\frac{1}{2} \times 6 \times 4^2$ cm^2, ou 48 cm^2.
Il reste à calculer l'aire d'une face hexagonale. Par symétrie, il s'agit d'un hexagone régulier. La longueur d'un de ses côtés est égale à la longueur du segment qui joint le milieu de deux côtés adjacents d'un carré 4 sur 4, soit $\sqrt{2^2 + 2^2}$, ou $2\sqrt{2}$.
On cherche l'aire d'un hexagone régulier dont les côtés mesurent $2\sqrt{2}$.
On considère l'hexagone régulier $ABCDEF$. Chaque angle intérieur mesure 120°.
On trace les diagonales AD, BE et CF.



Par symétrie, ces diagonales divisent l'hexagone en 6 triangles équilatéraux ayant des côtés de longueur $2\sqrt{2}$.

On considère maintenant un de ces triangles, soit ODE.
On trace la hauteur OP.



Puisque le triangle ODE est équilatéral, P est le milieu du côté DE. Donc $EP = \sqrt{2}$.
Or, OPE est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $OP = \sqrt{3}EP$, d'où $OP = \sqrt{6}$.
L'aire du triangle ODE est égale à $\frac{1}{2}(ED)(OP)$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}(2\sqrt{2})(\sqrt{6})$ cm^2, c'est-à-dire à $\sqrt{12}$ cm^2, ou $2\sqrt{3}$ cm^2.
L'aire de l'hexagone $ABCDEF$ est donc égale à $6(2\sqrt{3})$ cm^2, ou $12\sqrt{3}$ cm^2.
L'aire totale de chaque moitié de cube est donc égale à $48 + 12\sqrt{3}$ cm^2, ou environ 69 cm^2.

Réponse : (A)

24. D'après la 1$^{\text{re}}$ propriété, il y a un nombre impair de termes. Après le 1$^{\text{er}}$ terme, le nombre de termes est donc un multiple de 2.
D'après la 2$^{\text{e}}$ propriété, après le 1$^{\text{er}}$ terme, le nombre de termes est un multiple de 3, car on saute toujours 3 termes pour arriver au dernier.
Donc, après le 1$^{\text{er}}$ terme, le nombre de termes doit être un multiple de 6. Le nombre total de termes peut donc être représenté par $6k + 1$.
On considère maintenant les sommes connues, sachant que $n = 6k + 1$.
Lorsqu'on additionne les termes suivants, soit les 1$^{\text{er}}$, 3$^{\text{e}}$, 5$^{\text{e}}$, ..., jusqu'au dernier, on additionne un total de $3k + 1$ termes.
On a donc $\frac{1}{2}(3k + 1)(a + a + 6kd) = 320$, ou $(3k + 1)(2a + 6kd) = 640$.
(En effet, la somme des termes d'une suite arithmétique est égale à la moitié du produit du nombres de termes et de la somme des premier et dernier termes. La suite formée des 1$^{\text{er}}$, 3$^{\text{e}}$, 5$^{\text{e}}$ termes, etc., est arithmétique, de même que celle formée des 1$^{\text{er}}$, 4$^{\text{e}}$, 7$^{\text{e}}$ termes, etc.)
Lorsqu'on additionne les termes suivants, soit les 1$^{\text{er}}$, 4$^{\text{e}}$, 7$^{\text{e}}$, ..., jusqu'au dernier, on additionne un total de $2k + 1$ termes.
On a donc $\frac{1}{2}(2k + 1)(a + a + 6kd) = 224$, ou $(2k + 1)(2a + 6kd) = 448$.
On divise la 1$^{\text{re}}$ équation par la 2$^{\text{e}}$, terme par terme, pour obtenir $\dfrac{3k+1}{2k+1} = \dfrac{640}{448}$, ou $\dfrac{3k+1}{2k+1} = \dfrac{10}{7}$, d'où $k = 3$.
Donc $(3(3) + 1)(2a + 6kd) = 640$, ou $2a + 6kd = 64$.
La somme de tous les termes de la suite est égale à $\frac{1}{2}(6k+1)(a+a+6kd)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(19)(64)$, ou 608.

Réponse : (C)

25. Malheureusement, cette question a causé un problème qui n'a été découvert qu'après la journée du concours. Nous remercions le Dr. Yongmoo Kim qui a signalé cette erreur.

Si la question avait été posée comme suit :

> Une *triligne* est une droite dont la somme de l'abscisse à l'origine et de l'ordonnée à l'origine est égale à trois fois la pente. Combien y a-t-il d'entiers q, $1 \leq q \leq 10\,000$, pour lesquels il existe au moins un entier positif p de manière qu'il y ait exactement une triligne qui passe par le point (p, q) ?

(incluant le mot souligné « positif »), alors la solution suivante aurait été correcte.

On considère une droite de pente m qui passe au point (p,q).
Cette droite a pour équation $y = m(x - p) + q$, ou $y = mx + (q - mp)$.
L'ordonnée à l'origine de cette droite est donc égale à $q - mp$. En posant $y = 0$, on obtient l'abscisse à l'origine, soit $\dfrac{mp - q}{m}$.
Pour que cette droite soit une triligne, il faut que $3m = (q - mp) + \dfrac{mp - q}{m}$, ou
$3m^2 = qm - pm^2 + mp - q$, ou $(3 + p)m^2 - (p + q)m + q = 0$.
Étant donné un point fixe (p,q), il y a exactement une triligne qui passe par (p,q) s'il y a une seule pente m qui vérifie l'équation $(3 + p)m^2 - (p + q)m + q = 0$. Cette équation du second degré ne peut donc admettre qu'une solution. (Il s'agit bien d'une équation du second degré, car le premier coefficient, soit $3 + p$, est positif, p étant positif.)
Donc, pour un point fixe (p,q), il y a exactement une triligne qui passe par (p,q) si le discriminant de l'équation $(3 + p)m^2 - (p + q)m + q = 0$ est égal à 0, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned}(p + q)^2 - 4(3 + p)q &= 0\\ p^2 + 2pq + q^2 - 12q - 4pq &= 0\\ p^2 - 2pq + q^2 - 12q &= 0\\ (p - q)^2 &= 12q\end{aligned}$$

Il faut maintenant déterminer combien il y a d'entiers q, $1 \leq q \leq 10\,000$, pour lesquels il existe au moins un entier p de maniére que $(p - q)^2 = 12q$.
Pour que cette dernière équation soit vérifiée, il faut que $12q$ soit un carré parfait. Il faut donc que $3q$ soit un carré parfait.
Pour que $3q$ soit un carré parfait, il faut que q soit 3 fois un carré parfait (en effet, la factorisation première de q doit avoir un nombre impair de facteurs 3 et un nombre pair de chaque autre facteur).
Si $q = 3k^2$, on peut alors résoudre l'équation $(p - q)^2 = 12q$ qui devient $(p - 3k^2)^2 = 36k^2$ et on a alors $p - 3k^2 = \pm 6k$, ou $p = 3k^2 \pm 6k$.
Combien y a-t-il d'entiers q, de 1 à 10 000, qui ont la forme $q = 3k^2$? La première valeur de k est 1 et la dernière est 57, car $3(58)^2 = 10\,092$, ce qui est à l'extérieur de l'intervalle.
Il y a donc 57 valeurs de q et la réponse serait (B).

Or, la question a été posée comme suit :

> Une *triligne* est une droite dont la somme de l'abscisse à l'origine et de l'ordonnée à l'origine est égale à trois fois la pente. Combien y a-t-il d'entiers q, $1 \leq q \leq 10\,000$, pour lesquels il existe au moins un entier p de manière qu'il y ait exactement une triligne qui passe par le point (p, q) ?

On procède comme dans la solution précédente pour conclure que m doit vérifier l'équation suivante :

$$(3 + p)m^2 - (p + q)m + q = 0$$

Cette équation admet exactement une solution si le premier coefficient $p + 3$ est égal à 0 ou si ce premier coefficient n'est pas égal à 0 et que le discriminant est égal à 0.
Si $p = -3$, l'équation $(q - 3)m + q = 0$, en m, doit admettre exactement une solution. Or, elle admet exactement une solution *pour chaque valeur de* q, sauf $q = 3$.
Si $q = 3$, alors pour $p = 9$, le discriminant de l'équation du second degré est égal à 0.
En d'autres mots, chaque valeur de q, de 1 à 10 000, admet au moins une valeur de p de manière

qu'il y a exactement une triligne qui passe par le point (p,q). Il y a donc 10 000 valeurs possibles de q.

Nous nous excusons d'avoir causé cette confusion.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre
en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo,

2004 Solutions
Concours Fermat (11e – année)

(Secondaire V au Québec)

pour les prix du

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. $$\frac{10}{10(11)-10^2}=\frac{10}{110-100}$$
$$=1$$

RÉPONSE : (D)

2. $$\sqrt{4^0+4^2+4^3}=\sqrt{1+16+64}$$
$$=\sqrt{81}$$
$$=9$$

RÉPONSE : (A)

3. On a $x=4$ et $y=3$. Donc $x-y=1$.

RÉPONSE : (B)

4. Le volume du gâteau est égal à $20\times 18\times 5\text{ cm}^3$, ou 1800 cm^3. Chacun des 25 morceaux a donc un volume de $1800\text{ cm}^3\div 25$, ou 72 cm^3.
Puisque le gâteau a une masse volumique de 2 g/cm^3, chaque morceau a une masse de $\left(2\text{ g}/\text{cm}^3\right)\times\left(72\text{ cm}^3\right)$ ou 144 g.

RÉPONSE : (D)

5. *Solution 1*
L'inverse du membre de gauche est égal à l'inverse du membre de droite.
$$\left(\frac{1}{2+3}\right)\left(\frac{1}{3+4}\right)=\frac{1}{x+5}$$
$$(2+3)(3+4)=x+5$$
$$35=x+5$$
$$x=30$$

Solution 2
$$\left(\frac{1}{2+3}\right)\left(\frac{1}{3+4}\right)=\frac{1}{x+5}$$
$$\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{x+5}$$
$$\frac{1}{35}=\frac{1}{x+5}$$
Les dénominateurs sont donc égaux, d'où $x+5=35$ et $x=30$.

RÉPONSE : (C)

6. Puisqu'il faut 3 boîtes de jus pour obtenir $\frac{2}{3}$ L, alors on obtient $\frac{2}{9}$ L avec une boîte de jus.

Pour obtenir 8 L, il faut donc $\dfrac{8}{\left(\frac{2}{9}\right)}$ boîtes, c'est-à-dire $8\times\frac{9}{2}$ boîtes, ou 36 boîtes.

RÉPONSE : (A)

7. *Solution 1*

On simplifie d'abord l'expression.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4}{x^2-2x}&=\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}\\&=\frac{x+2}{x}\\&=\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\\&=1+\frac{2}{x}\end{aligned}$$

On a pu annuler le facteur $x-2$, car $x\neq 2$.

Si $x=\frac{1}{5}$, l'expression est égale à $1+\dfrac{2}{\left(\frac{1}{5}\right)}$,

c'est-à-dire à $1+10$, ou 11.

Solution 2

On reporte $x=\frac{1}{5}$ dans l'expression.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4}{x^2-2x}&=\frac{\frac{1}{25}-4}{\frac{1}{25}-\frac{2}{5}}\\&=\frac{\frac{1}{25}-\frac{100}{25}}{\frac{1}{25}-\frac{10}{25}}\\&=\frac{-\frac{99}{25}}{-\frac{9}{25}}\\&=11\end{aligned}$$

RÉPONSE : (E)

8. D'après le graphique, Julie avait 10 L d'essence en arrivant au garage. En partant, elle avait 50 L d'essence. Elle a donc acheté 40 L d'essence au coût de 36,60 $. Un litre d'essence coûte donc $\dfrac{36{,}60\ \$}{40}$, c'est-à-dire 0,915 $, ou 91,5 ¢.

RÉPONSE : (A)

9. 4 % de 10 000 est égal à $\frac{4}{100}\times 10\,000$, ou 400. En 2004, la population de Cayleyville était donc de 10 400.

12 % de 25 000 est égal à $\frac{12}{100}\times 25\,000$, ou 3000. En 2004, la population de Pascalbourg était donc de 22 000.

En 2004, la différence entre la population des deux villes est égale à $22\,000-10\,400$, ou 11 600.

RÉPONSE : (B)

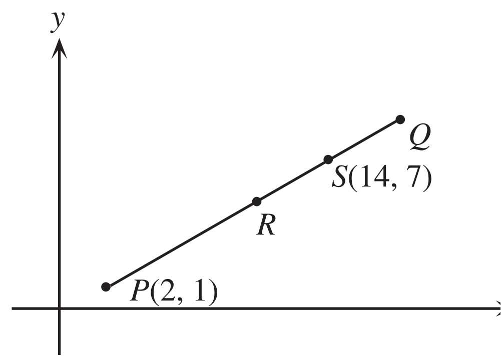
10. D'après la figure, il faut 3 ▲ pour équilibrer 5 ● et 1 ▲ pour équilibrer 2 ■ et 1 ●. Si on triple les quantités sur la deuxième balance, on a 3 ▲ pour équilibrer 6 ■ et 3 ●. En comparant cette balance à la première, on a 5 ● pour équilibrer 6 ■ et 3 ●. On enlève alors 3 ● de chaque plateau pour constater qu'on a 2 ● pour équilibrer 6 ■. Il faut donc 3 ■ pour équilibrer 1 ●.

RÉPONSE : (C)

11. Puisque x est situé entre –1 et 0, alors x^2 est situé entre 0 et 1. Donc, $-x^2$ est situé entre –1 et 0. Le choix est donc b ou c. Or, le carré x^2 d'un nombre x, situé entre –1 et 0, est plus près de 0 que ne l'est le nombre x. Donc, la lettre c représente le mieux la position de $-x^2$.

RÉPONSE : (C)

12. Puisque R est le milieu du segment PQ et que S est le milieu du segment QR, alors la position de S est aux $\frac{3}{4}$ du déplacement de P à Q.



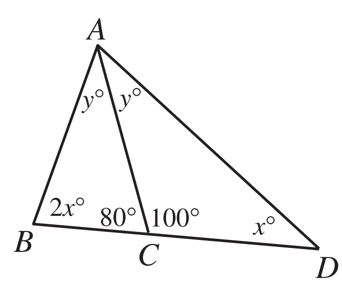
Puisque le déplacement horizontal de P à S est de 12 unités vers la droite, alors celui de P à Q est de $\frac{4}{3}\times 12$, ou 16 unités vers la droite.

Puisque le déplacement vertical de P à S est de 6 unités vers le haut, alors celui de P à Q est de $\frac{4}{3}\times 6$, ou 8 unités vers le haut.

Les coordonnées de S sont $(2+16,\ 1+8)$, ou $(18, 9)$.

RÉPONSE : (D)

13. Dans le triangle ACD, on a $x^\circ + y^\circ + 100^\circ = 180^\circ$, d'où $x + y = 80$ (*).



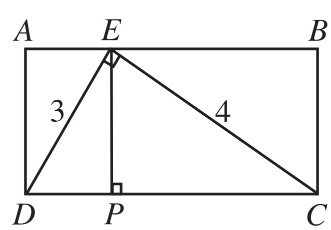
Puisque les angles ACB et ACD sont supplémentaires, alors $\angle ACB = 180^\circ - \angle ACD$, ou $\angle ACB = 80^\circ$.

Dans le triangle ACB, on a donc $2x^\circ + y^\circ + 80^\circ = 180^\circ$, d'où $2x + y = 100$ (**).

On soustrait l'équation (*) de l'équation (**), membre par membre, pour obtenir $x = 20$.

RÉPONSE : (E)

14. *Solution 1*



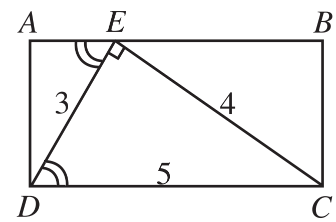
D'après le théorème de Pythagore, $DC^2 = DE^2 + EC^2$, d'où $DC = 5$. L'aire du triangle DEC est égale à $\frac{1}{2}(DE)(EC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(3)(4)$ ou 6.

Or, l'aire du rectangle *ABCD* est égale à deux fois l'aire du triangle *DEC*.
On a donc $(AD)(CD)=12$, c'est-à-dire $(AD)(5)=12$, d'où $AD=2{,}4$.

Solution 2

D'après le théorème de Pythagore, $DC^2 = DE^2 + EC^2$, d'où $DC=5$. Donc, $\sin(\angle EDC)=\dfrac{EC}{DC}=\dfrac{4}{5}$.

De plus, $\sin(\angle AED)=\dfrac{AD}{ED}=\dfrac{AD}{3}$.



Or, puisque *AB* et *DC* sont parallèles, alors $\angle AED = \angle EDC$ et $\sin(\angle AED)=\sin(\angle EDC)$.

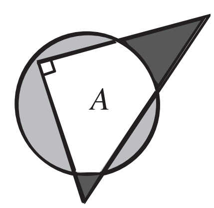
Donc, $\dfrac{AD}{3}=\dfrac{4}{5}$, d'où $AD=2{,}4$.

RÉPONSE : (B)

15. Puisque $x^2-y^2=0$, alors $(x-y)(x+y)=0$, d'où $y=x$ ou $y=-x$. Ce sont les équations de deux droites, chacune passant à l'origine.

RÉPONSE : (E)

16. Soit *A* l'aire de la partie du triangle qui est à l'intérieur du cercle et *B* l'aire de la partie du cercle qui est à l'extérieur du triangle. Donc, *B* est aussi égal à l'aire de la partie du triangle qui est à l'extérieur du cercle.
$A+B$ est donc égal à l'aire du cercle, de même qu'à l'aire du triangle. Le cercle et le triangle ont donc la même aire.
Soit *r* le rayon du cercle.
Donc $\pi r^2 = \frac{1}{2}(6)(8)$, c'est-à-dire que $\pi r^2 = 24$, d'où $r=\sqrt{\dfrac{24}{\pi}}$ ou $r \approx 2{,}8$.



RÉPONSE : (B)

17. Puisque la différence entre deux termes consécutifs est constante, alors la différence entre le 3^e^ et le 4^e^ terme est égale à la différence entre le 1^er^ et le 2^e^ terme. Donc :

$$\begin{aligned}(x+2y+2)-(3x+y) &= y-x\\ y-2x+2 &= y-x\\ 2 &= x\end{aligned}$$

Les quatre premiers termes de la suite sont donc 2, y, $y+6$ et $2y+4$.
Puisqu'il y a une différence de 6 entre les 2^e^ et 3^e^ termes, il doit y avoir une différence de 6 entre les 1^er^ et 2^e^ termes. Donc $y=8$.
Donc $y-x=6$.

RÉPONSE : (E)

18. *Solution 1*

On développe les deux expressions : $y = a(x-2)^2 + c$ et $y = (2x-5)(x-b)$

$$= a(x^2 - 4x + 4) + c \qquad = 2x^2 - (5+2b)x + 5b$$

$$= ax^2 - 4ax + (4a + c)$$

Les coefficients correspondants sont donc égaux. D'après les coefficients de x^2, on a $a = 2$.

D'après les coefficients de *x*, on a $-(5+2b) = -4a$, c'est-à-dire que $5 + 2b = 8$, d'où $b = \frac{3}{2}$.

Solution 2

D'après la première équation, l'abscisse du sommet de la parabole est égale à 2.

D'après la deuxième équation, les abscisses à l'origine de la parabole égalent $\frac{5}{2}$ et *b*.

Or, l'abscisse du sommet est égale à la moyenne des abscisses à l'origine.

Donc, $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + b\right) = 2$, d'où $\frac{5}{2} + b = 4$ ou $b = \frac{3}{2}$.

RÉPONSE : (B)

19. Soit *P* \$ le prix initial fixé par la gérante.

Elle prévoit que la moitié des 1200 copies initiales, soit 600 copies, seront vendues au prix de *P* \$, ce qui donnera des recettes de $600P$ \$.

Deux tiers des 600 copies qui resteront, soit 400 copies, seront vendues au prix de 0,6*P* \$ (c.-à-d. *P* moins 40 % de *P*), ce qui donnera des recettes de $400(0{,}6P)$ \$, ou $240P$ \$.

Les 200 dernières copies seront vendues au prix de 0,25*P* \$ (c.-à-d. *P* moins 75 % de *P*), ce qui donnera des recettes de $200(0{,}25P)$ \$, ou $50P$ \$.

Pour obtenir des recettes de 72 000 \$, il faut que : $600P + 240P + 50P = 72000$

$$890P = 72000$$

$$P \approx 80{,}90$$

Elle doit donc fixer un prix initial de 80,90 \$.

RÉPONSE : (D)

20. Le ballon roule vers Marcos à une vitesse de 4 m/s et celui-ci court en direction du ballon à une vitesse de 8 m/s. Marcos se rapproche donc du ballon à une vitesse de 12 m /s. Puisqu'il est à 30 m du ballon, au départ, il mettra $\frac{30}{12}$ s, ou 2,5 s pour atteindre le ballon.

Le ballon s'éloigne de Michel à une vitesse de 4 m/s, mais Michel court dans la direction du ballon à une vitesse de 9 m/s. Il gagne donc 5 m/s sur le ballon. Puisqu'il est à 15 m du ballon, au départ, il mettrait 3 s pour le rattraper si celui-ci continuait à rouler.

Marcos est donc le premier à toucher le ballon. Après 2,5 s, Michel a gagné $2{,}5 \times 5$ m ou 12,5 m sur le ballon. Au moment où Marcos touche le ballon, Michel est à 2,5 m de Marcos.

RÉPONSE : (C)

21. *Solution 1*

Dans une heure, Brigitte peint $\frac{1}{B}$ de la ligne et Jules peint $\frac{1}{J}$ de la ligne.

Soit t le nombre d'heures pendant lesquelles les deux travaillaient. Puisque Brigitte a travaillé une heure de plus que Jules et puisque la ligne est complètement peinte après les t heures pendant lesquelles les deux travaillaient, alors $\frac{1}{B}+t\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{J}\right)=1$, d'où $t=\dfrac{1-\frac{1}{B}}{\frac{1}{B}+\frac{1}{J}}$, c.-à-d.

$$t=\frac{\left[\frac{B-1}{B}\right]}{\left[\frac{B+J}{BJ}\right]} \text{ ou } t=\frac{J(B-1)}{B+J}.$$

Le nombre d'heures de travail de Brigitte est donc égal à $\frac{J(B-1)}{B+J}+1$, c.-à-d. à $\frac{BJ-J}{B+J}+\frac{B+J}{B+J}$ ou $\frac{B(J+1)}{B+J}$.

Solution 2

Supposons que Brigitte pouvait peindre la ligne au complet en 1 heure, c.-à-d. que $B=1$. Lorsque Jules arrive, il ne pourrait pas participer et le nombre total d'heures de travail de Brigitte serait égal à 1 heure, c.-à-d. que si $B=1$, alors peu importe la valeur de J, le nombre total d'heures de travail de Brigitte serait égal à 1. Or, si on reporte $B=1$ dans les cinq expressions, on obtient :

(A) $\frac{J+1}{J+1}$ (B) $J+1$ (C) $\frac{J}{J+1}+1$ (D) $\frac{J}{2}$ (E) $\frac{J-1}{J+1}$

Le seul choix qui est toujours égal à 1, peu importe la valeur de J, est (A).

RÉPONSE : (A)

22. Pour que le nombre $(2^k)(5^{300})$ comporte 303 chiffres, il doit être supérieur ou égal à 10^{302} et inférieur à 10^{303}.

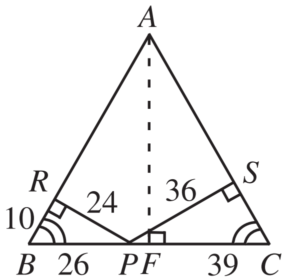
Si k était égal à 300, le nombre $(2^k)(5^{300})$ serait égal à $(2^{300})(5^{300})$, ou 10^{300}. Il faut donc que k soit supérieur à 300.

Chaque fois que la valeur de k augmente de 1, le produit est multiplié par 2. Pour que le produit final comporte 303 chiffres, il faut multiplier 10^{300} par une puissance de 2 qui se situe entre 100 et 1000. La première puissance de 2 qui vérifie cette condition est 2^7, ou 128.

On a donc $k=307$. Le nombre $(2^k)(5^{300})$ est donc égal à $(2^{307})(5^{300})$, c.-à-d. à $(2^7)(2^{300})(5^{300})$ ou 128×10^{300}.

En notation courante, ce nombre comporte les chiffres 1, 2, 8, suivis de 300 zéros.

La somme de ses chiffres est donc égale à 11. RÉPONSE : (A)



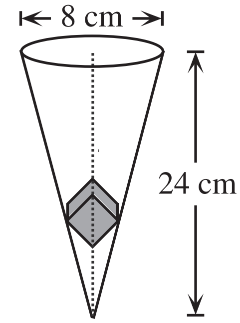
23. Puisque le triangle ABC est isocèle, $\angle ABC = \angle ACB$. Les triangles BRP et CSP sont rectangles et $\angle ABC = \angle ACB$. Les triangles sont donc semblables. Donc $\dfrac{BC}{CP} = \dfrac{24}{36}$ ou $\dfrac{BP}{CP} = \dfrac{2}{3}$.
Puisque BC a une longueur de 65 cm et que $BP + CP = 65$ cm, on a donc $BP = 26$ cm et $BP = 39$ cm. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BPR, $BR = 10$ cm.
On trace la hauteur AF. Puisque le triangle ABC est isocèle, la hauteur est une médiane et $BF = 32\frac{1}{2}$ cm.
Puisque les triangles BFA et BRP sont rectangles et qu'ils ont un angle commun, ils sont semblables. Donc $\dfrac{BR}{RP} = \dfrac{BF}{FA}$, d'où $FA = \dfrac{\left(32\frac{1}{2}\right)(24)}{10}$ cm ou $FA = 78$ cm.
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(65)(78)$ cm^2 ou 2535 cm^2.

RÉPONSE : (D)

24. Puisque $f(x) - f(x-2)$ est une expression du second degré, alors $f(x)$ doit être un polynôme du second degré ou plus. S'il était du second degré, le terme en x^2 de $f(x)$ et de $f(x-2)$ seraient annulés par la soustraction. (Le vérifier à l'aide d'un exemple.) Le degré de $f(x)$ doit donc être supérieur ou égal à 3.
Posons $f(x) = ax^3 + px^2 + qx + r$.
Donc :
$$\begin{aligned} f(x-2) &= a(x-2)^3 + p(x-2)^2 + q(x-2) + r \\ &= a\left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right) + p\left(x^2 - 4x + 4\right) + q(x-2) + r \\ &= ax^3 + (-6a + p)x^2 + (12a - 4p + q)x + (-8a + 4p - 2q + r) \end{aligned}$$
Puisque $f(x) - f(x-2) = (2x-1)^2$, alors :
$$\left[ax^3 + px^2 + qx + r\right] - \left[ax^3 + (-6a + p)x^2 + (12a - 4p + q)x + (-8a + 4p - 2q + r)\right] = 4x^2 - 4x + 1$$
$$6ax^2 + (-12a + 4p)x + (8a - 4p + 2q) = 4x^2 - 4x + 1$$
En comparant les coefficients, on a
$$\begin{aligned} 6a &= 4 \\ -12a + 4p &= -4 \\ 8a - 4p + 2q &= 1 \end{aligned}$$
D'après la 1re équation, on a $a = \frac{2}{3}$.
On reporte $6a = 4$ dans la 2e équation pour obtenir $-8 + 4p = -4$, d'où $p = 1$.
On reporte $a = \frac{2}{3}$ et $p = 1$ dans la 3e équation pour obtenir $8\left(\frac{2}{3}\right) - 4(1) + 2q = 1$, d'où $q = -\frac{1}{6}$.
Donc $p + q = \frac{5}{6}$.

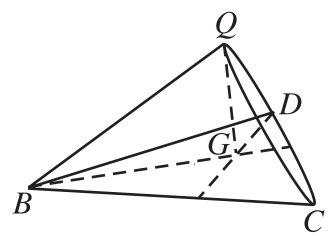
RÉPONSE : (B)

25. Il est difficile, au départ, de visualiser la position du cube dans le cône. Puisque le cube est en équilibre dans le cône et qu'une de ses diagonales coïncide avec l'axe du cône, il y a donc un sommet, A, qui pointe vers le bas, trois sommets, B, C et D, qui touchent à la surface du cône et un sommet, Q, qui pointe vers le haut. (On ne fera pas appel aux trois autres sommets.)



Par symétrie, les sommets B, C et D sont situés dans un plan parallèle à la base du cône et ils forment un triangle équilatéral.

La figure ci-contre indique la position des sommets B, C, D et Q. QB est la longueur de la diagonale d'une face du cube (pour le voir, il faut visualiser la situation avec attention). G est le point d'intersection des trois médianes. Par symétrie, le sommet A, le point G et le sommet Q sont alignés à la verticale, sur l'axe du cône.



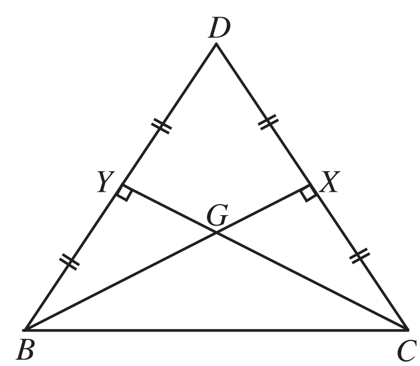
On pourra déterminer la distance entre le sommet T du cône et le sommet A du cube en déterminant

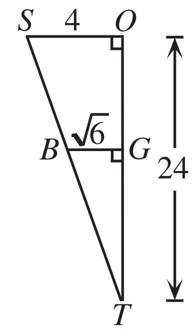
- la distance entre T et le plan formé par B, C et D,
- la distance entre A et le plan formé par B, C et D,

et en soustrayant une distance de l'autre.

Puisque chaque arête du tétraèdre est une diagonale d'une face du cube, chaque arête, BQ, BC, BD et CD, a une longueur de $\sqrt{3^2+3^2}$ ou $3\sqrt{2}$.

La figure ci-contre montre le triangle BCD et ses médianes BX et CY qui se coupent en G. Le triangle BGY est un triangle remarquable 30°–60°–90°. On a donc $BG = \frac{2}{\sqrt{3}}(BY)$, ou $BG = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}(BD)\right)$. Donc $BG = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(3\sqrt{2}\right)$, ou $BG = \sqrt{6}$. La distance entre l'axe du cône et les points où le cube touche au cône est donc égale à $\sqrt{6}$.





On détermine maintenant la distance du point T au plan formé par B, C et D. La figure ci-contre représente la moitié d'une coupe transversale du cône. Les points B, T et G sont indiqués. Le point O représente le centre de la base du cône et le point S représente le troisième sommet de la coupe transversale.

Les triangles TGB et TOS sont semblables. Puisque le rayon de la base du cône a une longueur de 4, alors $\dfrac{TG}{TO} = \dfrac{GB}{OS}$, d'où

$TG = 24\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$ ou $TG = 6\sqrt{6}$.

Il reste à calculer AG. Pour le faire, on calculera AQ et QG et on soustraira.

AQ est la grande diagonale du cube. Donc $AQ = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2}$ ou $AQ = 3\sqrt{3}$.

Puisque le triangle BGQ est rectangle, alors $QG = \sqrt{BQ^2 - BG^2}$, c.-à-d. que

$GQ = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2}$ ou $GQ = 2\sqrt{3}$.

Donc $AG = AQ - QG$, ou $AG = \sqrt{3}$.

La distance entre le sommet du cône et le sommet le plus rapproché du cube est donc égale à $TA = TG - AG$ ou $TA = 6\sqrt{6} - \sqrt{3}$.

RÉPONSE : (A)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre
en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo,

2003 Solutions
Concours Fermat (11e – année)

(Secondaire V au Québec)

pour les prix du

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. On calcule :
$3^3 - 3^2 + 3^1 - 3^0$ est égal à $27 - 9 + 3 - 1$, ou 20. RÉPONSE : (E)

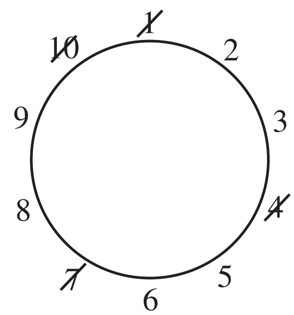
2. On reporte la valeur de a dans l'équation :

$$a^2 + ab = 60$$
$$25 + 5b = 60$$
$$5b = 35$$
$$b = 7$$

RÉPONSE : (A)

3. Puisque deux des mesures d'angles ont une somme de 180°, le diagramme contient une droite (horizontale). On a donc $4x^\circ + x^\circ = 90^\circ$ ou $5x^\circ = 90^\circ$, d'où $x = 18$.
RÉPONSE : (E)

4. En faisant le tour du cercle la première fois, Marie-Ève barre le 1, le 4, le 7 et le 10. Il reste alors le 2, le 3, le 5, le 6, le 8 et le 9.
À partir du 10, le troisième nombre qui n'est pas barré est le 5. Après le 5, le troisième nombre qui n'est pas barré est le 9.
Marie-Ève barre ainsi le 5, le 9, le 6 et le 3.



Il reste alors le 2 et le 8. Leur somme est 10. RÉPONSE : (B)

5. *Solution 1*
Puisque l'ours a perdu 20 % de sa masse initiale, alors 220 kg représentent 80 % de sa masse initiale. Donc 20 % de sa masse initiale correspond à 55 kg (un quart de 220 kg). Sa masse initiale est donc égale à $220 + 55$, ou 275 kg. (On remarquera que cette somme correspond à $\frac{5}{4} \times 220$.)

Solution 2
Soit x la masse initiale, en kilogrammes.
Puisque l'ours perd 20 % de sa masse initiale pendant l'hibernation :

$$\frac{80}{100}x = 220$$
$$x = \frac{100}{80}(220)$$
$$x = 275$$

Sa masse initiale était donc égale à 275 kg. RÉPONSE : (D)

6. *Solution 1*

Lorsque $\frac{5}{8}$ des participants seront des filles, $\frac{3}{8}$ des participants seront des garçons. Puisqu'il y a 6 garçons et que ce nombre ne change pas, il doit y avoir 16 participants en tout de manière que $\frac{6}{16}$, ou $\frac{3}{8}$ des participants soient des garçons. Puisqu'il y avait 8 participants au départ, il faut ajouter 8 filles.

Solution 2
Soit f le nombre de filles qu'il faut ajouter. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{2+f}{8+f} &= \frac{5}{8} \\ 16+8f &= 40+5f \\ 3f &= 24 \\ f &= 8 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (D)

7. Puisque l'aquarium a une hauteur de 30 cm, et qu'il est à moitié rempli, l'eau atteint une profondeur de 15 cm.
L'aire de la base de l'aquarium est égale à 20×40, ou 800 cm^2. La profondeur de l'eau qui est ajoutée est donc égale à $\frac{4000}{800}$, ou 5 cm.
La profondeur de l'eau dans l'aquarium est donc égale à $15+5$, ou 20 cm.

RÉPONSE : (C)

8. Puisque les segments AD et BC sont perpendiculaires, le produit de leur pente est égal à -1. Or la pente de BC est égale à $\frac{7-(-4)}{6-9}$, ou $-\frac{11}{3}$. La pente de AD est donc égale à $\frac{3}{11}$.
(On remarquera que l'on a pas employé les coordonnées de A!)

RÉPONSE : (A)

9. *Solution 1*
La moyenne de deux nombres correspond au nombre qui est à mi-chemin entre les deux.
Si on écrit $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$ et $\frac{1}{10} = \frac{2}{20}$, on voit que le nombre à mi-chemin entre eux est $\frac{3}{20}$.
Or $\frac{3}{20} = \frac{1}{\left(\frac{20}{3}\right)}$. Donc $x = \frac{20}{3}$.

Solution 2
Puisque la moyenne de $\frac{1}{5}$ et de $\frac{1}{10}$ est égale à $\frac{1}{x}$, alors :

$$\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}}{2}=\frac{1}{x}$$
$$\frac{\frac{3}{10}}{2}=\frac{1}{x}$$
$$x=\frac{2}{\left(\frac{3}{10}\right)}$$
$$x=\frac{20}{3}$$

RÉPONSE : (A)

10. Puisque Carla prend trois pas, alors que Jacob en prend quatre pour parcourir la même distance, Carla prend 18 pas pour parcourir la distance que Jacob parcourt en 24 pas. Puisqu'elle parcourt 0,5 m par pas, elle parcourt 9 m en 18 pas. Jacob parcourt donc 9 m en 24 pas. RÉPONSE : (B)

11. On détermine toutes les routes possibles :
    De A à X à B, il y a 2 routes, puisqu'il y a 2 arêtes de A à X.
    De A à X à Y à B, il y a 6 routes, puisqu'il y a 2 arêtes de A à X et 3 arêtes de Y à B.
    De A à Y à B, il y a 3 routes, puisqu'il y a 3 arêtes de Y à B.
    Il y a donc 11 routes de A à B, dont 8 passent par le point X.
    La probabilité pour que Maya choisisse une route qui passe par le point X est égale à $\frac{8}{11}$.
    RÉPONSE : (A)

12. Puisque le triangle ABC est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $AC^2=10^2+10^2$, d'où $AC=\sqrt{200}$, ou $AC=10\sqrt{2}$.
    Puisque $AD=AC-DC$, alors $AD=10\sqrt{2}-10$, ou $AD\approx 4{,}1$.
    À l'unité près, $AD\approx 4$. RÉPONSE : (E)

13. *Solution 1*
    Puisque $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, et que $(x+y)(x-y)=(1)(3)$, alors $x^2-y^2=3$.
    Donc $2^{x^2-y^2}=2^3$, ou $2^{x^2-y^2}=8$.

    Solution 2
    Puisque $x+y=1$ et $x-y=3$, on peut additionner les équations, membre par membre, pour obtenir $2x=4$, ou $x=2$. On reporte cette valeur dans la première équation pour obtenir $y=1$. Donc x^2-y^2 est égal à $4-1$, ou 3 et $2^{x^2-y^2}$ est égal à 2^3, ou 8.
    RÉPONSE : (B)

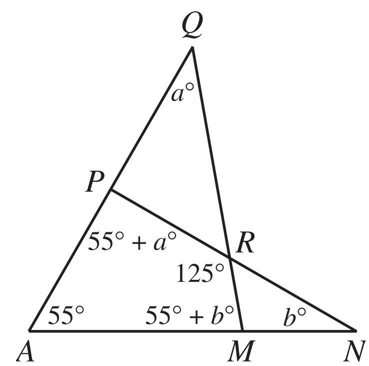
14. Puisque $\angle PRM = 125^\circ$, alors $\angle QRP = \angle NRM = 55^\circ$. Donc :

$$\angle APR = 180^\circ - \angle QPR$$
$$= 180^\circ - \left[180^\circ - a^\circ - 55^\circ\right]$$
$$= 55^\circ + a^\circ$$

De même, $\angle QPR = 55^\circ + b^\circ$. Il s'agit d'un angle extérieur du triangle PQR.

Puisque APQ est une droite :

$$\left(55^\circ + a^\circ\right) + \left(55^\circ + b^\circ\right) = 180^\circ$$
$$a^\circ + b^\circ + 110^\circ = 180^\circ$$
$$a + b = 70$$



RÉPONSE : (A)

15. Soit t la longueur d'un côté du triangle équilatéral. Le périmètre est donc égal à $3t$.
Les cinq choix donnent, pour le périmètre, les valeurs respectives 3, 30, 54, 60 et 75.
Puisque la longueur des côtés du carré est un entier, le périmètre doit être divisible par 4.
Parmi les périmètres possibles du triangle équilatéral, seul 60 est divisible par 4.
Donc $t = 20$.

RÉPONSE : (D)

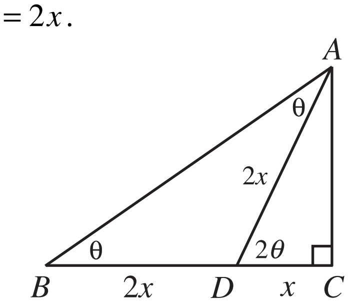
16. Soit a, b, c et d les chiffres du nombre. Donc $abcd = 810$.
On doit déterminer comment exprimer 810 comme produit de quatre chiffres non nuls *différents*. On écrit d'abord 810 en factorisation première. On a $810 = 81 \times 10$, d'où $810 = 2 \times 3^4 \times 5$.
Un des chiffres doit donc être un multiple de 5. Or le seul tel chiffre est 5. Un des chiffres du nombre est donc 5.

On doit donc déterminer trois autres chiffres distincts dont le produit est égal à $3^4 \times 2$.
Seuls les chiffres 3, 6 et 9 sont des multiples de 3. Or le produit de ces nombres est égal à $3^4 \times 2$. Les autres chiffres sont donc 3, 6 et 9.
Les chiffres du nombre sont donc 3, 5, 6 et 9. Leur somme est égale à 23.

RÉPONSE : (C)

17. *Solution 1*

Soit $\angle ABC = \theta$. Donc $\angle ADC = 2\theta$, d'où $\angle ADB = 180^\circ - 2\theta$ et $\angle BAD = \theta$.
Le triangle ADB est donc isocèle et $BD = DA$. Donc $DA = 2x$.
Puisque la longueur de AD est deux fois celle de DC et que le triangle ADC est rectangle, il s'agit d'un triangle 30°-60°-90°. Donc $\angle ADC = 60^\circ$, d'où $\angle ABC = 30^\circ$.
Le triangle ABC est donc lui aussi un triangle 30°-60°-90°. Donc $\angle BAC = 60^\circ$. Or cet angle est opposé au côté BC de longueur $3x$).

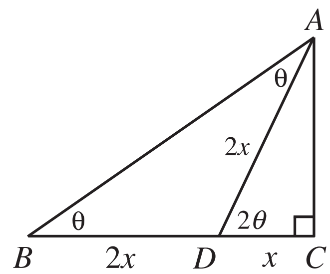


Donc $AB = \frac{2}{\sqrt{3}} BC$, c'est-à-dire que $AB = \frac{2}{\sqrt{3}}(3x)$, ou $AB = 2\sqrt{3}x$.

Solution 2

Soit $\angle ABC = \theta$. Donc $\angle ADC = 2\theta$, d'où $\angle ADB = 180^\circ - 2\theta$ et $\angle BAD = \theta$.
Le triangle ADB est donc isocèle et $BD = DA$. Donc $DA = 2x$.
Puisque les triangles ADC et ABC sont rectangles :

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 + AC^2 \\ &= BC^2 + \left(AD^2 - DC^2\right) \\ &= (3x)^2 + \left((2x)^2 - x^2\right) \\ &= 9x^2 + 3x^2 \\ &= 12x^2 \end{aligned}$$



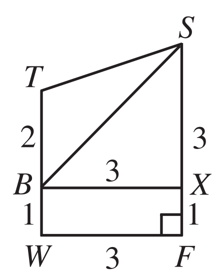
Donc $AB = \sqrt{12}x$, ou $AB = 2\sqrt{3}x$.

RÉPONSE : (C)

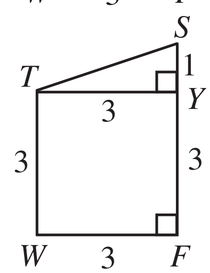
18. Le coût pour modifier le réglage du moteur, 400 \$, est équivalent au coût de $\frac{400}{0{,}80}$, ou 500 L d'essence. Pour recouvrer le coût de la modification, la propriétaire doit donc parcourir une distance qui épargnera 500 L d'essence.
Au départ, la voiture consomme 8,4 L d'essence aux 100 km. Après la modification, elle consomme 6,3 L aux 100 km, soit une épargne de 2,1 L aux 100 km.
Pour épargner 500 L d'essence, il faudrait parcourir $\frac{500}{2{,}1} \times 100$, ou $23\,809{,}52$ km.

RÉPONSE : (D)

19. Soit X le point sur SF, de manière que BX soit perpendiculaire à SF.
Donc $BX = 3$ m, $XF = 1$ m et $XS = 3$ m.
Le triangle BXS est donc un triangle rectangle isocèle et on a donc $\angle BSX = 45^\circ$.
Soit Y le point sur SF, de manière que TY soit perpendiculaire à SF.
Donc $TY = 3$ m et $SY = 1$ m.



Puisque le triangle STY est rectangle, $\tan(\angle TSY) = \frac{3}{1}$, d'où $\angle TSY \approx 71{,}6^\circ$.
Puisque $\angle TSB = \angle TSY - \angle BSF$, $\angle TSB = 71{,}6^\circ - 45^\circ$, ou $\angle TSB \approx 27^\circ$.



RÉPONSE : (A)

20. Puisque a, b et c sont les termes consécutifs d'une suite géométrique, on a $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, d'où $b^2 = ac$.

Soit Δ le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= ac - 4ac \\ &= -3ac \\ &< 0 \qquad \text{puisque } a \text{ et } c \text{ sont positifs}\end{aligned}$$

Puisque le discriminant est négatif, la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses. Puisque le coefficient a est positif, la parabole est située complètement au-dessus de l'axe des abscisses. RÉPONSE : (C)

21. Pour mieux comprendre la suite, il est préférable d'en écrire les premiers termes, tout en espérant y trouver une régularité. Soit t_n le $n$ième terme de la suite. Donc le premier terme est t_1, le deuxième terme est t_2 et ainsi de suite. On a donc :

$$t_1 = 6,\ t_2 = \frac{1}{2}t_1 = 3,\ t_3 = 3t_2 + 1 = 10,\ t_4 = \frac{1}{2}t_3 = 5,\ t_5 = 16,\ t_6 = 8,\ t_7 = 4,\ t_8 = 2,$$
$$t_9 = 1,\ t_{10} = 4,\ t_{11} = 2,\ t_{12} = 1,\ t_{13} = 4,\ \ldots$$

Puisque chaque terme de la suite ne dépend que du terme précédent, alors un terme répété, comme le 4 ici, engendrera un cycle répété, soit 4, 2, 1, 4, 2, 1, etc.

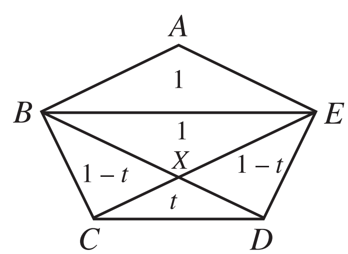
On remarque que le cycle a une longueur de 3 et que $t_9 = 1$. On aura donc $t_9 = 1$, $t_{12} = 1$, $t_{15} = 1$, $t_{18} = 1$, etc. Chaque terme dont l'indice est un multiple de 3 sera donc égal à 1.

Donc $t_{99} = 1$ et $t_{100} = 4$. RÉPONSE : (D)

22. *Solution 1*

On considère un pentagone qui vérifie la condition donnée. On démontrera que chaque diagonale est parallèle au côté opposé.

Puisque les triangles BCD et CDE ont la même base et la même aire, ils ont la même hauteur. Les points B et E sont donc à la même distance du côté CD.

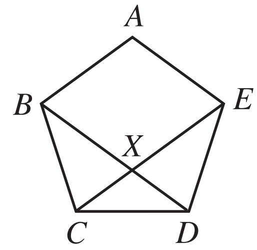


La diagonale BE est donc parallèle au côté CD. De même, les autres diagonales sont parallèles aux côtés opposés.

On trace BD, CE et BE. Puisque BD est parallèle à AE et que CE est parallèle à AB, alors $BAEX$ est un parallélogramme. L'aire du triangle BEX est donc égale à l'aire du triangle EAB, c'est-à-dire à 1.

Soit t l'aire du triangle CXD. L'aire du triangle CXB est donc égale à $1 - t$, de même que celle du triangle EXD.

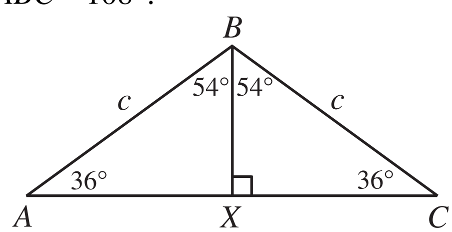
Puisque les triangles CXD et CXB ont une même hauteur, le rapport de l'aire de l'un à l'aire de l'autre est égal au rapport des longueurs des côtés correspondants.
Donc $\dfrac{DX}{BX} = \dfrac{t}{1-t}$. De même, $\dfrac{CX}{EX} = \dfrac{t}{1-t}$.
Or puisque BE est parallèle à CD, le triangle CXD est semblable au triangle EXB et le rapport de l'aire du premier à l'aire du second est égal au carré du rapport des longueurs des côtés. Donc :



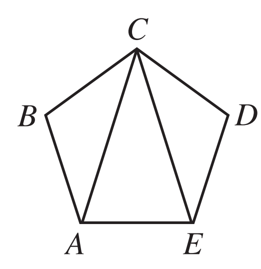
$$\frac{\text{Aire du triangle } EXB}{\text{Aire du triangle } CXD} = \frac{1}{t} = \left(\frac{1-t}{t}\right)^2$$

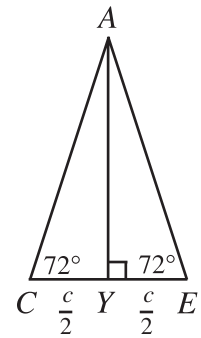
On développe et on réduit pour obtenir $t^2 - 3t + 1 = 0$, d'où $t = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, car t est inférieur à 1.
L'aire du pentagone est donc égale à $1 + 1 + t + (1-t) + (1-t)$, ou $4 - t$. Elle est donc égale à $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$, ou environ 3,62.

Solution 2
Le problème laisse croire que le pentagone n'a pas une forme particulière. On supposera donc que le pentagone est régulier.
Soit c la longueur de ses côtés. On déterminera d'abord la valeur de c.
On considère le triangle ABC. Puisque les angles intérieurs d'un pentagone régulier mesurent chacun 108°, le triangle ABC est isocèle et $\angle ABC = 108°$.
Soit X le milieu de AC. On trace BX, qui est perpendiculaire à AC, puisque le triangle ABC est isocèle. De plus, BX est une bissectrice, d'où $\angle ABX = \angle CBX = 54°$.
Donc $BX = c(\cos 54°)$ et $AX = CX = c(\sin 54°)$.



Puisque l'aire du triangle ABC est égale à 1, on a $1 = \frac{1}{2}[c(\cos 54°)][2c(\sin 54°)]$, d'où $c^2 = \dfrac{1}{\sin 54° \cos 54°}$.
L'aire du pentagone est égale à la somme de l'aire des triangles ABC, ACE et CDE. Or deux de ces triangles ont une aire de 1. Il reste à déterminer l'aire du triangle ACE.





On trace la médiane AY. Puisque le triangle ACE est isocèle, $CY = YE = \frac{1}{2}c$ et $\angle ACE = \angle AEC = 72°$.

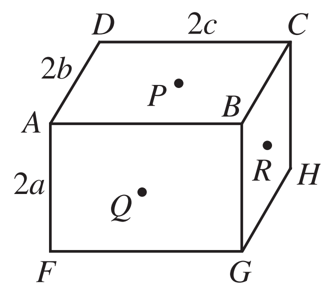
Donc $AY = \frac{1}{2}c(\tan 72°)$. On a donc :

$$\begin{aligned}\text{Aire du triangle } ACE &= \frac{1}{2}c\left[\frac{1}{2}c(\tan 72°)\right]\\ &= \frac{1}{4}c^2(\tan 72°)\\ &= \frac{\tan 72°}{4\sin 54°\cos 54°}\\ &\approx 1{,}618\end{aligned}$$

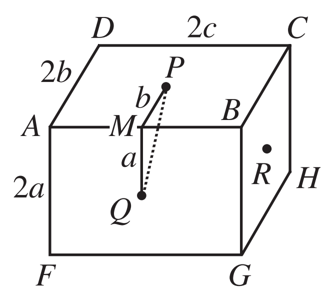
Selon le diagramme précédent, l'aire du pentagone est environ égale à 1,618 + 2, ou 3,62.

RÉPONSE : (A)

23. Soit $2a$, $2b$ et $2c$ les longueurs respectives des arêtes de la boîte. Soit A, B, C, D, E, F, G et H les sommets. Soit P, Q et R les centres respectifs de trois faces qui ont un sommet commun.



On a donc $PQ = 4$, $QR = 5$ et $PR = 6$.
On tentera d'exprimer chacune de ces distances en fonction de la longueur des arêtes de la boîte.
Soit M le milieu de l'arête AB. On joint P à M, Q à M et P à Q.
Puisque P est le centre de la face $ABCD$ et que PM est perpendiculaire à AB, alors $PM = \frac{1}{2}AD = b$. De même, $MQ = a$.
Puisque MP et MQ sont perpendiculaires à AB et qu'ils sont situés dans les plans perpendiculaires $ABCD$ et $ABGF$, alors MP est perpendiculaire à MQ et le triangle QMP est donc rectangle.



D'après le théorème de Pythagore, $PQ^2 = MP^2 + MQ^2$ ou $16 = a^2 + b^2$.
De même, en utilisant PR, on a $36 = a^2 + c^2$; en utilisant QR, on a $25 = b^2 + c^2$.
On a donc $16 = a^2 + b^2$, $36 = a^2 + c^2$ et $25 = b^2 + c^2$.
On veut déterminer le volume de la boîte, qui est égal à $(2a)(2b)(2c)$, ou $8abc$.
On additionne les trois équations, membre par membre, pour obtenir
$77 = 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, ou $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{77}{2}$.
On soustrait chacune des trois premières équations de cette dernière équation pour obtenir $c^2 = \frac{45}{2}$, $b^2 = \frac{5}{2}$ et $a^2 = \frac{27}{2}$.
Donc $a^2b^2c^2 = \frac{(27)(5)(45)}{8}$, d'où $abc = \sqrt{\frac{6075}{8}}$, ou $abc = \frac{45\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

On a donc $V = 8\left(\frac{45\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$, ou $V = \left(2\sqrt{2}\right)\left(45\sqrt{3}\right)$, d'où $V = 90\sqrt{6}$ cm^3.

RÉPONSE : (C)

24. On récrit l'expression comme suit :

$$\left[(1+x)\left(1+2x^3\right)\left(1+4x^9\right)\left(1+8x^{27}\right)\left(1+16x^{81}\right)\left(1+32x^{243}\right)\left(1+64x^{729}\right)\right]^2$$
$$=\left(1+2^0x^{3^0}\right)^2\left(1+2^1x^{3^1}\right)^2\left(1+2^2x^{3^2}\right)^2\left(1+2^3x^{3^3}\right)^2\left(1+2^4x^{3^4}\right)^2\left(1+2^5x^{3^5}\right)^2\left(1+2^6x^{3^6}\right)^2$$

Or le développement de $\left(1+2^rx^{3^r}\right)^2$ est $1+2^rx^{3^r}+2^rx^{3^r}+2^{2r}x^{2\cdot 3^r}$. On remarque que chacun de ces termes a la forme $2^{mr}x^{m3^r}$, où m égale 0, 1 ou 2.

Lorsqu'on multiplie le développement des sept parenthèses, chacun des quatre termes de chaque parenthèse est multiplié par chacun des quatre termes de chaque autre parenthèse. Chaque terme du produit aura donc la forme

$2^{0a+1b+2c+3d+4e+5f+6g}x^{a3^0+b3^1+c3^2+d3^3+e3^4+f3^5+g3^6}$, où a, b, c, d, e, f et g auront chacun une valeur de 0, 1 ou 2.

Pour déterminer le coefficient de x^{2003}, posons
$a3^0+b3^1+c3^2+d3^3+e3^4+f3^5+g3^6=2003$.

On rappelle que chaque coefficient est égal à 0, 1 ou 2.

On considère d'abord g. Supposons que g est égal à 0 ou à 1. La plus grande valeur possible du membre de gauche, $a3^0+b3^1+c3^2+d3^3+e3^4+f3^5+g3^6$, est donc $2\cdot 3^0+2\cdot 3^1+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+2\cdot 3^4+2\cdot 3^5+3^6$, ou 1457. Puisque cette valeur est inférieure à 2003, on doit avoir $g=2$.

On reporte cette valeur dans l'équation et on simplifie. L'équation devient

$$a3^0+b3^1+c3^2+d3^3+e3^4+f3^5=545.$$

On considère ensuite f. Supposons que f est égal à 0 ou à 1. La plus grande valeur possible du membre de gauche est donc $2\cdot 3^0+2\cdot 3^1+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+2\cdot 3^4+3^5$, ou 485. Puisque cette valeur est inférieure à 545, on doit avoir $f=2$.

De la même façon, on détermine que $e=0$, $d=2$, $c=0$, $b=1$ et $a=2$.

[On aurait pu considérer l'égalité $a3^0+b3^1+c3^2+d3^3+e3^4+f3^5+g3^6=2003$ comme l'expression du nombre 2003 à la base 3. Un calcul simple nous permet d'écrire $2003_{\text{dix}}=2202012_{\text{trois}}$, ce qui donne la même solution.]

Chaque terme qui contient x^{2003} est donc de la forme

$$2^{0(2)+1(1)+2(0)+3(2)+4(0)+5(2)+6(2)}x^{2003}, \text{ ou } 2^{29}x^{2003}.$$

Pour déterminer le coefficient de x^{2003}, on doit déterminer le nombre de termes $2^{29}x^{2003}$ avant la simplification du produit. Or chacune des sept parenthèses de la forme $(1+2^rx^{3^r}+2^rx^{3^r}+2^{2r}x^{2\cdot 3^r})$ a contribué au moins un terme pour former le produit $2^{29}x^{2003}$.

Puisque $a = 2$, le développement $1 + x + x + x^2$ de $(1+x)^2$ a contribué le terme x^2 au produit. De la même manière, puisque $d = 2$, $f = 2$ et $g = 2$, les développements de $\left(1+2^3x^{3^3}\right)^2$, de $\left(1+2^5x^{3^5}\right)^2$ et de $\left(1+2^6x^{3^6}\right)^2$ ont chacun contribué leur dernier terme.

Puisque $c = 0$ et $e = 0$, les développements de $\left(1+2^2x^{3^2}\right)^2$ et de $\left(1+2^4x^{3^4}\right)^2$ ont chacun contribué leur premier terme, 1.

Puisque $b = 1$, le développement de $\left(1+2^1x^{3^1}\right)^2$ a contribué les deux termes du milieu, $2^1x^{3^1}$ et $2^1x^{3^1}$. Il y aura donc 2 termes $2^{29}x^{2003}$ dans le produit. Leur somme est égale à $2 \cdot 2^{29}x^{2003}$, ou $2^{30}x^{2003}$.

Le coefficient de x^{2003} est 2^{30}. RÉPONSE : (C)

25. D'après l'énoncé, les nombres $4 + 2112$ (c.-à-d. 2116), $n + 2112$ et $4n + 2112$ doivent être des carrés parfaits.

On vérifie que $2116 = 46^2$. On cherche donc des entiers positifs, *x* et *y*, tels que $n + 2112 = x^2$ et $4n + 2112 = y^2$. Puisque *n* est un entier positif, *x* et *y* doivent être supérieurs à 46.

On a trois inconnues, mais on peut éliminer le *n* en manipulant les équations pour obtenir $4n + 4(2112) = 4x^2$ et $4n + 2112 = y^2$. On soustrait, membre par membre, pour obtenir $4x^2 - y^2 = 3(2112)$.

On factorise le membre de gauche et on écrit le membre de droite en factorisation première pour obtenir $(2x+y)(2x-y) = 2^6 3^2 11$.

On doit donc déterminer les valeurs possibles de *x* et de *y*, qui donneront les valeurs possibles de *n*. On peut procéder par tâtonnements, ce qui risque d'être long. On peut réduire le travail en procédant par analyse.

Soit $2x + y = A$ et $2x - y = B$, où $AB = 2^6 3^2 11$. On résout ce système pour obtenir $x = \dfrac{A+B}{4}$ et $y = \dfrac{A-B}{2}$.

Puisque *AB* est pair, *A* ou *B* doit être pair.

Puisque $y = \dfrac{A-B}{2}$ est un entier et que *A* ou *B* est pair, *A* et *B* doivent être pairs.

Puisque le produit de *A* et de *B*, $2^6 3^2 11$, admet six facteurs 2, alors *A* ou *B* doit admettre au moins trois diviseurs 2. Donc *A* ou *B* doit être divisible par 8 et de ce fait, par 4.

Puisque $x = \dfrac{A+B}{4}$ est un entier et que *A* ou *B* est divisible par 4, alors *A* et *B* sont divisibles par 4.

Soit $A = 4a$ et $B = 4b$. Donc $x = a + b$ et $y = 2a - 2b$ et $ab = 2^2 3^2 11$.

[On peut supposer que *y* est positif, car si *y* était négatif, les rôles de *a* et de *b* seraient renversés.]

Puisque *y* est positif, alors $a > b$. Combien y a-t-il de possibilités pour *a* et *b*, de sorte que $ab = 2^2 3^2 11$? L'entier $2^2 3^2 11$ admet $(2+1)(2+1)(1+1)$, ou 18 facteurs.

Il y a donc 9 couples (a, b) possibles, soit

$$(396,1),\ (198,2),\ (132,3),\ (99,4),\ (66,6),\ (44,9),\ (36,11),\ (33,12),\ (22,18).$$

Seuls les sept premiers couples donnent des valeurs de x et de y supérieures à 46, c'est-à-dire des valeurs positives de n.
Il y a donc 7 valeurs possibles de n.
[Pour compléter la démonstration, il est préférable de déterminer ces valeurs.
On a $n = x^2 - 2112$, d'où $n = (a+b)^2 - 2112$. Les valeurs correspondantes de n sont 155 497, 37 888, 16 113, 8497, 3072, 697 et 97.] RÉPONSE : (B)

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2002 Solutions

Concours Fermat (11e - Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. Si $x = 3$, alors : $5 - 2x^2 = 5 - 2(3)^2$
$= 5 - 18$
$= -13$
RÉPONSE : (C)

2. $\dfrac{3^3 + 3}{2^2 + 2} = \dfrac{27 + 3}{4 + 2}$
$= \dfrac{30}{6}$
$= 5$
RÉPONSE : (E)

3. On a $56 = 24 + 24 + 8$. Puisqu'il y a 24 heures dans une journée, 56 heures correspondent à deux journées complètes, plus 8 heures. Il faut donc ajouter 8 heures à 9 h 04. On obtient 17 h 04. RÉPONSE : (B)

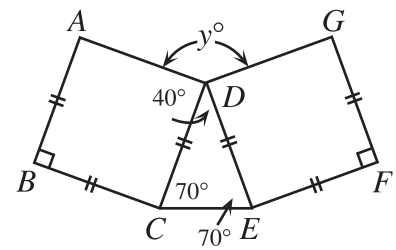
4. On examine chacun des cinq énoncés.
25 est un carré parfait, puisque $25 = 5^2$.
31 est un nombre premier, puisque ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 31.
3 n'est pas le plus petit nombre premier, car 2 est un nombre premier.
8 est un cube parfait, car $8 = 2^3$.
15 est le produit de deux nombres premiers, car $15 = 3 \times 5$. RÉPONSE : (C)

5. L'aire de l'affiche est égale à 50×100, ou 5000 cm^2.
L'aire du portrait de Pierre de Fermat est égale à 20×40, ou 800 cm^2.
Le pourcentage de la surface de l'affiche qui est recouverte par le portrait est égal à
$\dfrac{800}{5000} \times 100\,\%$, ou 16 % RÉPONSE : (B)

6. Soit G, H, Y, J et C l'âge respectif de Gisa, Henri, Yvan, Justine et Catherine. D'après la première phrase, $H < G < J$. D'après la deuxième phrase, $C < Y < G$. On voit que J est plus grand que G, H, Y et C. Justine est donc la plus grande. RÉPONSE : (D)

7. On peut déterminer la réponse en obtenant, par tâtonnements, les dimensions des divers rectangles. Si on suppose que le petit rectangle en haut à gauche, a une largeur de 2 et une hauteur de 3, alors le rectangle à sa droite, qui a lui aussi une hauteur de 3, doit avoir une largeur de 5. On conclut que le rectangle, en bas à droite, a une hauteur de 5, de même que le rectangle ombré. Celui-ci a une largeur de 2, comme le premier rectangle. Le rectangle ombré a donc une largeur de 2 et une hauteur de 5, ce qui donne une aire de 10. On peut aussi résoudre le problème de façon algébrique, mais la stratégie présentée est probablement la plus efficace. RÉPONSE : (E)

8. Puisque les carrés *ABCD* et *DEFG* ont les mêmes longueurs de côtés, alors $DC = DE$ et le triangle CDE est donc isocèle. Donc $\angle DEC = \angle DCE = 70^\circ$, d'où :



$\angle CDE = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$

et

$y^\circ = 360^\circ - \angle ADC - \angle CDE - \angle GDE$

$y^\circ = 360^\circ - 90^\circ - 40^\circ - 90^\circ$

$y^\circ = 140^\circ$

$y = 140$

RÉPONSE : (E)

9. Il y a 20 choix possibles, dont six sont des multiples de 3, soit 3, 6, 9, 12, 15 et 18. La probabilité pour que la balle choisie soit un multiple de 3 est égale à $\frac{6}{20}$.

RÉPONSE : (B)

10. Puisque *ABCD* est un carré, $AB = BC$. Donc :

$x + 16 = 3x$

$16 = 2x$

$x = 8$

Chaque côté a donc une longueur de $8 + 16$, ou 24. Le carré a donc un périmètre de 96.

RÉPONSE : (C)

11. La pente de la droite est égale à $\frac{-2-0}{0-1}$, ou 2.

D'après le premier point, l'ordonnée à l'origine de la droite est égale à –2. La droite a donc pour équation $y = 2x - 2$. Puisque le point $(7, b)$ est sur la droite, il vérifie l'équation. Donc $b = 2 \times 7 - 2$, ou $b = 12$.

RÉPONSE : (A)

12. On détermine d'abord le plus grand et le plus petit carré parfait de trois chiffres. Le plus petit carré parfait de trois chiffres est 100. En effet, $100 = 10^2$. Puisque $\sqrt{1000} \approx 31{,}6$ et que $31^2 = 961$, le plus grand carré parfait de trois chiffres est 961. Les seuls carrés parfaits de 100 à 961 sont les carrés des nombres 10, 11, …, 31. Il y en a 22.

RÉPONSE : (B)

13. Un nombre « double-singulier » est de la forme *aab*, *a* et *b* étant des chiffres différents. Il y a 9 possibilités pour *a* (puisque *a* ne peut égaler 0). Pour chacune de ces possibilités, il y a 9 possibilités pour *b* (puisque *b* peut égaler n'importe quel chiffre de 0 à 9, à l'exception de la valeur de *a*). Il y a donc 9×9, ou 81 nombres doubles-singuliers.

RÉPONSE : (A)

14. On divise 2002 par 7 pour obtenir 286, d'où $2002 = 7 \times 286$. Puisqu'il y a 7 entiers par rangée et que le dernier nombre de chaque rangée est le multiple de 7 qui correspond au numéro de la rangée, alors le nombre 2002 doit être situé dans la 7^e^ colonne et dans la 286^e^ rangée. Donc $m = 7$ et $n = 286$, d'où $m + n = 293$. RÉPONSE : (D)

15. D'après la règle, le troisième terme est égal à $a+2$ et le quatrième terme est égal à $a+2+(a+2)$, ou $2(a+2)$. De même, le cinquième terme est égal à $4(a+2)$ et le sixième terme est égal à $8(a+2)$. Puisque le sixième est égal à 56, on a $8(a+2) = 56$, d'où $a+2 = 7$ et $a = 5$. RÉPONSE : (E)

16. *Solution 1*

Par mise en évidence de facteurs communs, on a :

$$\begin{aligned} ac+ad+bc+bd &= 68 \\ a(c+d)+b(c+d) &= 68 \\ a(4)+b(4) &= 68 \\ 4(a+b) &= 68 \\ a+b &= 17 \end{aligned}$$

Puisque $c+d=4$, alors :

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= (a+b)+(c+d) \\ &= 17+4 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Solution 2

Puisque $c+d=4$, posons $c=d=2$. On reporte ces valeurs dans l'équation :

$$\begin{aligned} ac+ad+bc+bd &= 68 \\ 2a+2a+2b+2b &= 68 \\ a+b &= 17 \end{aligned}$$

Comme dans la solution précédente, $(a+b)+(c+d) = 21$. RÉPONSE : (D)

17. Soit F le nombre de femmes dans le groupe.

Puisque l'âge moyen des femmes est de 28 ans, l'âge total des femmes est égal à $28F$.

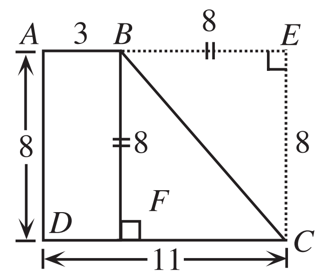
Il y a $140-F$ hommes dans le groupe. L'âge total des hommes est donc égal à $21(140-F)$.

Puisque l'âge moyen du groupe est de 24 ans, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Âge total du groupe}}{140} &= 24 \\ \frac{28F+21(140-F)}{140} &= 24 \\ 28F+21(140)-21F &= 24(140) \\ 7F &= 3(140) \\ F &= 60 \end{aligned}$$

Il y a 60 femmes dans le groupe. RÉPONSE : (D)

18. Puisque E coïncide avec F, Alors $BE = BF$ et $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$.
Donc $BECF$ est un rectangle. Puisque $EC = 8$ cm, alors $BF = 8$ cm. Donc $BE = FC = 8$ cm. Puisque $AB = AE - BE$, alors $AB = 3$ cm. D'après la relation de Pythagore :



$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{BF^2 + FC^2} \\ &= \sqrt{64+64} \\ &= \sqrt{128} \\ &\approx 11,31 \text{ cm} \end{aligned}$$

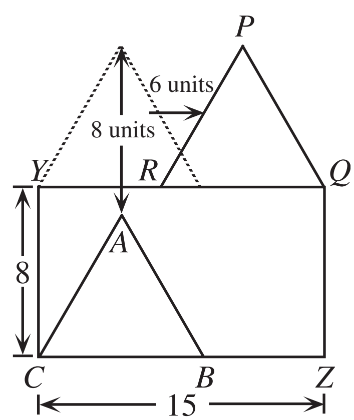
Le périmètre du trapèze $ABCD$ est à peu près égal à $3 + 11,31 + 11 + 8$, ou 33,31 cm. Il est donc plus près de 33,3 cm. RÉPONSE : (A)

19. On a :

$$\begin{aligned} 2^a 3^b &= 8\left(6^{10}\right) \\ 2^a 3^b &= 2^3\left(\left[(2)(3)\right]^{10}\right) \\ 2^a 3^b &= 2^3\left(2^{10}3^{10}\right) \\ 2^a 3^b &= 2^{13}3^{10} \end{aligned}$$

Donc $a = 13$ et $b = 10$, d'où $b - a = -3$. RÉPONSE : (E)

20. Puisque les triangles ABC et PQR sont équilatéraux avec des côtés de longueur 9, ils sont congruents.
On peut faire subir au triangle ABC une translation de 8 unités vers le haut, pour que le côté CB soit sur YQ, et de $15 - 9$, ou 6 unités vers la droite, pour que B coïncide avec Q. Le triangle ABC coïncide alors avec le triangle PQR.
Pour se rendre de A à P, on doit bouger de 8 unités vers le haut et de 6 unités vers la droite. Selon la relation de Pythagore, la distance de A à P est donc égale à $\sqrt{6^2 + 8^2}$, ou 10 unités.



RÉPONSE : (A)

21. Puisque $\sqrt{\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{5}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n+1}{2n-1}} = 9$, alors $\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{5}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n+1}{2n-1} = 81$.
Dans le membre de gauche, chaque numérateur, à l'exception du dernier, est annulé par le dénominateur de la fraction suivante. Il s'agit d'un produit téléscopé. L'équation devient donc $\frac{2n+1}{1} = 81$, ou $2n + 1 = 81$, d'où $n = 40$. RÉPONSE : (C)

22. On n'a guère de choix que de calculer la valeur de $f(2)$ à l'aide des renseignements donnés.

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1+1) \\ &= f(1)+f(1)+2(1)(1) \\ &= 4+4+2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} f(4) &= f(2+2) \\ &= f(2)+f(2)+2(2)(2) \\ &= 10+10+8 \\ &= 28 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(8) &= f(4+4) \\ &= f(4)+f(4)+2(4)(4) \\ &= 28+28+32 \\ &= 88 \end{aligned}$$

On aurait aussi pu utiliser $f(2)=f(1+1)$, $f(3)=f(2+1)$, $f(4)=f(3+1)$, … jusqu'à $f(8)$.

RÉPONSE : (C)

23. Lorsqu'on a ajouté m autres 8 et k autres 9 au tableau, on a un total de $9+m+k$ nombres et leur somme est égale à $1+2+3+4+5+6+7+8+9+8m+9k$, ou $45+8m+9k$.
Puisque leur moyenne est égale à 7,3, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Somme des nombres au tableau}}{\text{Nombre de nombres au tableau}} &= 7{,}3 \\ \frac{45+8m+9k}{9+m+k} &= \frac{73}{10} \\ 450+80m+90k &= 657+73m+73k \\ 7m+17k &= 207 \end{aligned}$$

Puisque m et k sont des entiers strictement positifs et que $17(13)=221>207$, alors $k<13$.
Par tâtonnements, on accorde à k les valeurs entières de 1 à 12 et on vérifie si m prend des valeurs entières selon l'équation. La seule possibilité est $k=6$, ce qui donne $m=15$.
Donc $k+m=21$.

RÉPONSE : (B)

24. On calcule d'abord le volume de chaque contenant de forme cylindrique :

$$\begin{aligned} V_{\text{grand}} &= \pi(6)^2(20) \\ &= 720\pi \ \text{cm}^3 \\ V_{\text{petit}} &= \pi(5)^2(18) \\ &= 450\pi \ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

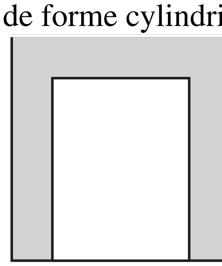


Figure 3

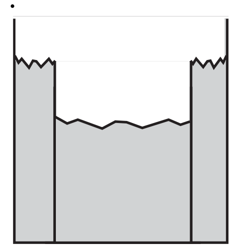


Figure 4

Le volume initial d'eau dans le grand cylindre est égal à :

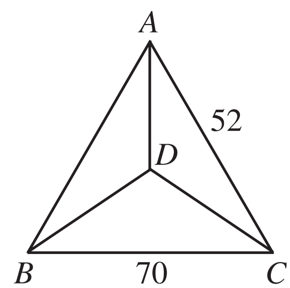
$$\begin{aligned} V_{\text{initial d'eau}} &= \pi(6)^2(17) \\ &= 612\pi \ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Si le petit contenant était fermé à l'aide d'un couvercle et qu'on le baissait jusqu'au fond du grand contenant, comme dans la Figure 3, il serait complètement recouvert d'eau et une partie de l'eau aurait été versée à l'extérieur du grand contenant. De plus, le niveau de l'eau irait jusqu'au haut du grand contenant, puisque le volume initial d'eau et le volume du petit contenant dépassent le volume du grand contenant.

Si on enlevait le couvercle, toute l'eau qui est au-dessus du petit contenant s'écoulerait dans le petit contenant. Cette eau est au départ dans une région de forme cylindrique de rayon 6 cm et de hauteur 2 cm. Son volume est égal à $\pi(6)^2(2)$, ou 72π cm^3. Il s'agit donc du volume d'eau dans le petit contenant à la toute fin, lorsque celui-ci repose au fond du grand. On a donc $72\pi = \pi(5)^2 h$, où h représente la profondeur d'eau dans le petit contenant. Donc $h = \frac{72\pi}{25\pi}$, ou $h = 2{,}88$ cm. RÉPONSE : (D)

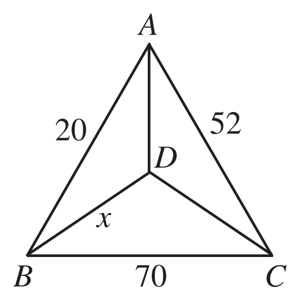
25. Pour résoudre ce problème, il faut bien comprendre que si a, b et c représentent les longueurs des côtés d'un triangle, alors $a + b > c$, $a + c > b$ et $b + c > a$. Cette relation est appelée l'*inégalité du triangle*. On peut l'énoncer d'une autre façon : Si a, b et c représentent les longueurs des côtés d'un triangle et si $a \le b \le c$, alors il faut que $a + b > c$ soit vrai, sinon les côtés de longueurs a et b ne seraient pas assez longs pour former un triangle. Les deux autres inégalités doivent être vraies, puisque c représente la plus grande longueur.

Soit x la longueur de la sixième arête.
Le diagramme représente le tétraèdre. Le triangle ABC représente la base du tétraèdre et le sommet D représente l'apex. Le diagramme indique aussi que le tétraèdre est formé de quatre triangles, ABC, ABD, ADC et BDC.



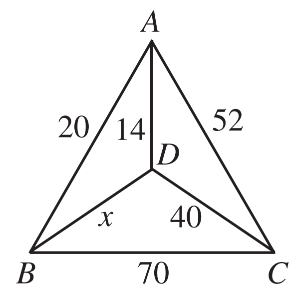
Soit $BC = 70$. Puisque l'arête BC est un côté de deux triangles, ABC et BDC, un de ces triangles est formé de côtés de longueurs données. Selon l'inégalité du triangle, les seules possibilités pour les longueurs des deux autres côtés de ce triangle sont 40 et 52, ou 20 et 52. Soit $AC = 52$.

Si $AB = 40$, les longueurs 14, 20 et x n'ont pas encore été utilisées. Or des côtés de longueurs 14 et 20 ne peuvent former un triangle avec un troisième côté de longueur 40, 52 ou 70. Donc AB ne peut égaler 40.
Si $AB = 20$, les longueurs 14, 40 et x n'ont pas encore été utilisées. Or des côtés de longueurs 14 et 40 ne peuvent former un triangle avec un troisième côté de longueur 70. On a donc $BD = x$ ou $DC = x$.
Si $DC = x$, le triangle ABD doit avoir des côtés de longueurs 20, 14 et 40, ce qui est impossible. Donc $BD = x$.



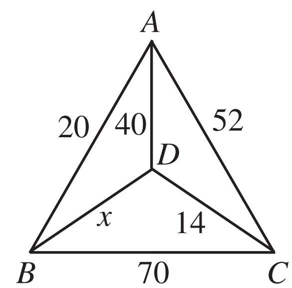
1er cas : $AD = 14$ et $DC = 40$

Dans le triangle ABD, on a $20 + 14 > x$ et $14 + x > 20$.
Puisque x est un entier, alors $7 \le x \le 33$.
Dans le triangle BDC, $40 + 70 > x$ et $x + 40 > 70$.
Puisque x est un entier, alors $31 \le x \le 109$.
Ces deux inéquations donnent $31 \le x \le 33$.



2e cas : $DC = 14$ et $AD = 40$

Dans le triangle ABD, on a $20 + 40 > x$ et $20 + x > 40$.
Puisque x est un entier, alors $21 \le x \le 59$.
Dans le triangle BDC, $14 + 70 > x$ et $x + 14 > 70$.
Puisque x est un entier, alors $57 \le x \le 83$.
Ces deux inéquations donnent $57 \le x \le 59$.



Il y a donc 6 valeurs possibles de x, soit 31, 32, 33, 57, 58 et 59.
[Remarque : Chacune des six possibilités permet de former un tétraèdre. En composant ce problème, nous avons découvert qu'il est possible de trouver des longueurs de côtés qui permettent de former 4 triangles sans qu'il soit possible de les assembler pour former un tétraèdre. Cela mérite une exploration.] RÉPONSE : (E)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2001 Solutions
Concours Fermat (11^{e} - Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Partie A

1. Si $x + 2x + 3x + 4x = 5$, alors x est égal à :

   (**A**) 10 (**B**) $\frac{1}{2}$ (**C**) $\frac{5}{4}$ (**D**) 2 (**E**) $\frac{5}{9}$

   Solution

   $$\begin{aligned} x + 2x + 3x + 4x &= 5 \\ 10x &= 5 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   RÉPONSE : (B)

2. Si $x = \frac{1}{4}$, laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur?

   (**A**) x (**B**) x^2 (**C**) $\frac{1}{2}x$ (**D**) $\frac{1}{x}$ (**E**) $\sqrt{x}$

   Solution

   On calcule la valeur de chaque expression.

   (**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ (**C**) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$ (**D**) $\frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 \times 4 = 4$ (**E**) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

   RÉPONSE : (D)

3. Dans une école, 20 filles et 30 garçons se sont inscrits au concours Fermat. Des certificats ont été remis à 20 % des filles et à 10 % des garçons. Quel pourcentage des élèves inscrits ont reçu un certificat?

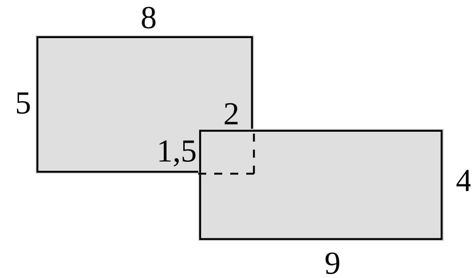
   (**A**) 14 (**B**) 15 (**C**) 16 (**D**) 30 (**E**) 50

   Solution

   Puisque 30 garçons se sont inscrits et que 10 % d'entre eux ont reçu un certificat, alors $(0,1)(30)$, ou 3 garçons ont reçu un certificat. De même, des 20 filles qui se sont inscrites, $(0,2)(20)$, ou 4 filles ont reçu un certificat. Il y a donc 7 élèves sur 50, ou 14 % des élèves qui ont reçu un certificat.

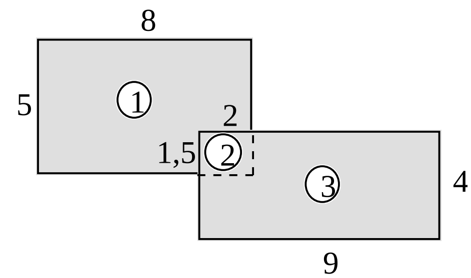
   RÉPONSE : (A)

4. Deux rectangles sont partiellement superposés comme dans le diagramme. La partie commune forme un rectangle. L'aire totale de la région ombrée est égale à :



(**A**) 45 (**B**) 70 (**C**) 52
(**D**) 76 (**E**) 73

Solution 1



Aire de 1 = aire du grand rectangle – aire du rectangle 2
$= 40 - 3$
$= 37$

Aire de 3 = aire du grand rectangle – aire du rectangle 2
$= 36 - 3$
$= 33$

L'aire de la région ombrée est égale à : 1 + 2 + 3
$= 37 + 3 + 33$
$= 73$

Solution 2

Aire de la région ombrée
= (aire du rectangle 5×8) + (aire du rectangle 4×9) – (aire du chevauchement)
$= 40 + 36 - 3$
$= 73$

RÉPONSE : (E)

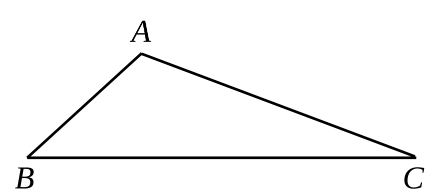
5. Dans le triangle ABC, $\angle A = 3\angle B$ et $\angle B = 2\angle C$. La mesure de l'angle B est égale à :

(**A**) 10° (**B**) 20° (**C**) 30° (**D**) 40° (**E**) 60°

Solution

Puisqu'il s'agit d'un triangle, on a :

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$
$$3(\angle B) + \angle B + \frac{1}{2}(\angle B) = 180°$$
$$\frac{9}{2}(\angle B) = 180°$$
$$\angle B = 40°$$



RÉPONSE : (D)

6. Patrick remet la moitié de ses billes à son meilleur ami, puis il remet un tiers des billes qu'il lui reste à sa sœur. Si sa sœur reçoit 9 billes, alors le nombre de billes que Patrick garde pour lui est :

(**A**) 27 (**B**) 54 (**C**) 18 (**D**) 36 (**E**) 9

Solution

Soit x le nombre initial de billes que Patrick avait en sa possession.

Il donne donc $\frac{1}{2}x$ billes à son meilleur ami et $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}x$, ou $\frac{1}{6}x$ billes à sa sœur.

Donc : $\frac{1}{6}x = 9$

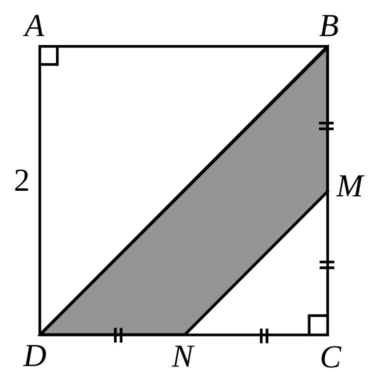
$x = 54$

Patrick a donc remis 27 billes à son ami et 9 billes à sa sœur.

Le nombre de billes que Patrick garde pour lui est égal à $54-27-9$, ou 18.

RÉPONSE : (C)

7. Dans le diagramme, le carré $ABCD$ a des côtés de longueur 2, M est le milieu de BC et N est le milieu de CD. L'aire de la région ombrée $BMND$ est égale à :



(**A**) 1 (**B**) $2\sqrt{2}$ (**C**) $\frac{4}{3}$

(**D**) $\frac{3}{2}$ (**E**) $4-\frac{3}{2}\sqrt{2}$

Solution

L'aire du triangle MNC est égale à $\frac{1}{2}(1)(1)$, ou $\frac{1}{2}$. Puisque le triangle BDC est la moitié du carré, son aire est égale à 2.

L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du triangle BDC moins celle du triangle MNC.

Elle est donc égale à $2-\frac{1}{2}$, ou $\frac{3}{2}$.

RÉPONSE : (D)

8. Si $\sqrt{5+11-7} = \sqrt{5+11} - \sqrt{x}$, alors la valeur de x est :

(**A**) 1 (**B**) 7 (**C**) -7 (**D**) 49 (**E**) 4

Solution

$$\sqrt{5+11-7} = \sqrt{5+11} - \sqrt{x}$$
$$\sqrt{9} = \sqrt{16} - \sqrt{x}$$
$$3 = 4 - \sqrt{x}$$
$$\sqrt{x} = 1$$
$$x = 1$$

RÉPONSE : (A)

9. Un sac contient 20 bonbons : 4 au chocolat, 6 à la menthe et 10 au caramel. Des bonbons sont retirés du sac, au hasard, et mangés. Quel est le nombre minimum de bonbons qu'il faut retirer du sac pour être *certain* qu'au moins deux bonbons de chaque sorte ont été mangés?

(**A**) 6 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 16 (**E**) 18

Solution
Au plus, on pourrait retirer 17 bonbons avant de retirer un deuxième bonbon au chocolat, soit tous les 6 bonbons à la menthe, les 10 bonbons au caramel et un bonbon au chocolat.
Il faut donc retirer au moins 18 bonbons du sac pour être certain qu'au moins deux bonbons de chaque sorte ont été mangés. RÉPONSE : (E)

10. Lorsqu'un entier positif *N* est divisé par 60, le reste est égal à 49. Lorsque *N* est divisé par 15, le reste est égal à :

(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 8

Solution
Il y a plusieurs façons de résoudre ce problème. Voici une façon facile. Puisque *N* donne un reste de 49 lorsqu'on le divise par 60, *N* doit être un nombre de la forme $60k+49$, $k=0,1,2,...$
Les premières valeurs possibles de *N* sont 49, 109, 169, 229, … Si on divise ces nombres par 15, on obtient toujours un reste de 4. RÉPONSE : (C)

Partie B

11. La racine quatrième de 2001200120012001 (c'est-à-dire $\sqrt[4]{2001200120012001}$) est plus près de :

(**A**) 2 001 (**B**) 6 700 (**C**) 21 000 (**D**) 12 000 (**E**) 2 100

Solution
2001200120012001 est à peu près égal à 2×10^{15}, ou 2000×10^{12}.
La racine quatrième du nombre est donc à peu près égale à $\sqrt[4]{2000\times10^{12}}$, c'est-à-dire à $\sqrt[4]{2000}\times10^{3}$, ou $6,7\times1000$. Elle est donc plus près de 6700. RÉPONSE : (B)

12. Combien y a-t-il de valeurs entières de *x* qui vérifient $\frac{x-1}{3}<\frac{5}{7}<\frac{x+4}{5}$?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

Solution
Si on multiplie les trois fractions par $3(5)(7)$, les inégalités sont conservées et on a :

$$\cancel{(3)}(5)(7)\frac{(x-1)}{\cancel{3}}<(3)(5)\cancel{(7)}\frac{5}{\cancel{7}}<(3)\cancel{(5)}(7)\frac{x+4}{\cancel{5}}$$

$$35(x-1)<75<21(x+4)$$

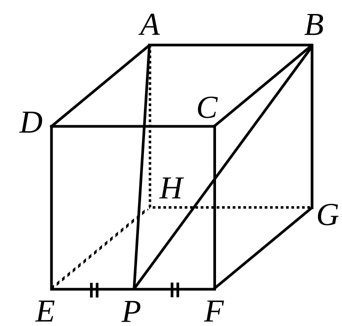
On doit donc avoir :

$$\begin{array}{rcr} 35(x-1)<75 & \text{et} & 21(x+4)>75 \\ 35x-35<75 & \text{et} & 21x+84>75 \\ 35x<110 & & 21x>-9 \\ x<3\frac{1}{7} & & x>-\frac{9}{21} \end{array}$$

Les seules valeurs entières de x qui vérifient les deux inéquations simultanément sont 0, 1, 2 et 3. Il y en a quatre. RÉPONSE : (E)

13. $ABCDEFGH$ est un cube ayant des côtés de longueur 2. P est le milieu de EF. L'aire du triangle APB est égale à :

(**A**) $\sqrt{8}$ (**B**) 3 (**C**) $\sqrt{32}$
(**D**) $\sqrt{2}$ (**E**) 6



Solution
La base AB du triangle APB a une longueur de 2. La hauteur correspondante du triangle est égale à BF. D'après le théorème de Pythagore, $BF=\sqrt{2^2+2^2}$, c'est-à-dire que $BF=\sqrt{8}$.
L'aire du triangle APB est égale à $\dfrac{2\times\sqrt{8}}{2}$, ou $\sqrt{8}$. RÉPONSE : (A)

14. Le dernier chiffre (c'est-à-dire le chiffre des unités) du nombre $(2002)^{2002}$ est :

(**A**) 4 (**B**) 2 (**C**) 8 (**D**) 0 (**E**) 6

Solution
Le chiffre des unités du nombre $(2002)^{2002}$ est le même que celui du nombre 2^{2002}, puisque les trois autres chiffres de 2002 n'ont aucun effet sur le chiffre des unités de la réponse.
On écrit les premières puissances de 2 et on cherche une régularité dans le chiffre des unités.

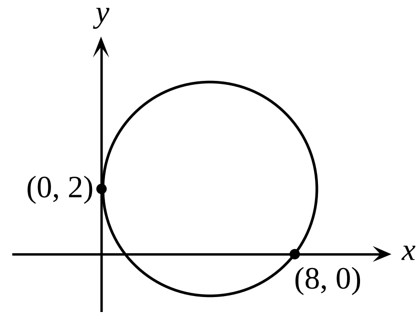
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512

On voit que les chiffres des unités se répètent à toutes les quatre puissances. Celui de 2^{2000} est 6 et celui de 2^{2002} est 4. Le chiffre des unités de $(2002)^{2002}$ est donc 4. RÉPONSE : (A)

15. Un cercle est tangent à l'axe des y au point $(0, 2)$ et la plus grande de ses abscisses à l'origine est 8. Le rayon du cercle est égal à :

(A) $\frac{9}{2}$ **(B)** $\sqrt{17}$ **(C)** $\frac{17}{4}$

(D) $\frac{15}{4}$ **(E)** $\frac{\sqrt{17}}{2}$



Solution

Soit C le centre du cercle et r son rayon.

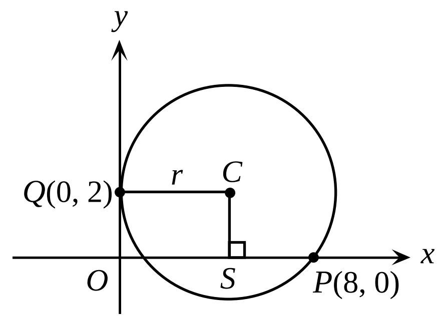
Alors CQ est perpendiculaire à l'axe des y et sa longueur est r.

L'abscisse de C est donc r et son ordonnée est 2.

On a donc $C(r, 2)$.

On abaisse une perpendiculaire CS à l'axe des x.

Dans le triangle rectangle CSP, on a $CP = r$, $CS = 2$ et $SP = 8 - r$.



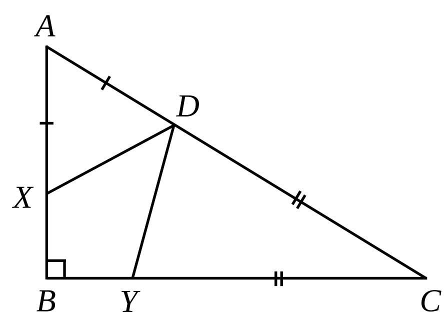
D'après le théorème de Pythagore, on a $r^2 = (8-r)^2 + 2^2$, d'où $r^2 = 64 - 16r + r^2 + 4$, $16r = 68$ et $r = \frac{17}{4}$.

RÉPONSE : (C)

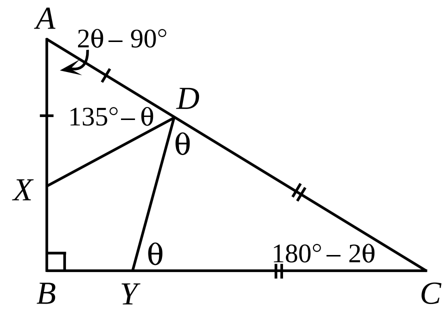
16. Dans un triangle rectangle ABC, $AX = AD$ et $CY = CD$, comme l'indique le diagramme. La mesure de l'angle XDY est :

(A) 35° **(B)** 40° **(C)** 45°

(D) 50° **(E)** indéterminée par ces données



Solution



Soit $\angle DYC = \theta$. Puisque le triangle YDC est isocèle, $\angle YDC = \theta$.

Donc $\angle YCD = 180° - 2\theta$ (somme des angles du triangle YDC).

Donc $\angle CAB = 2\theta - 90°$ (somme des angles du triangle ABC).

Dans le triangle AXD, $\angle AXD = \angle ADX$, d'où $2\theta - 90° + 2\angle AXD = 180°$.

Donc $\angle AXD = 135° - \theta$.

Or : $\angle ADX + \angle XDY + \angle YDC = 180°$

$$\angle XDY = 45°$$

Réponse : (C)

17. Trois nombres différents sont choisis tels que lorsqu'on additionne tour à tour un des nombres à la moyenne des deux autres, on obtient 65, 69 et 76. La moyenne des trois nombres choisis est égale à :

(**A**) 34 (**B**) 35 (**C**) 36 (**D**) 37 (**E**) 38

Solution

Soit a, b et c les trois nombres.

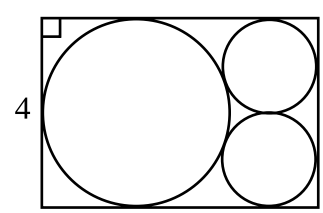
Selon l'énoncé, on a $a + \frac{b+c}{2} = 65$, $b + \frac{c+a}{2} = 69$ et $c + \frac{a+b}{2} = 76$.

On multiplie chaque membre de chaque équation par 2 pour obtenir $2a + b + c = 130$, $a + 2b + c = 138$ et $a + b + 2c = 152$.

On additionne les trois équations, membre par membre, pour obtenir $4a + 4b + 4c = 420$, ou $a + b + c = 105$.

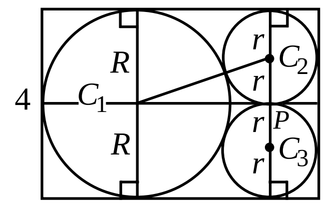
La moyenne des trois nombres est égale à $\frac{a+b+c}{3}$, ou 35. Réponse : (B)

18. Les deux petits cercles du diagramme ont le même rayon. Chacun des trois cercles est tangent aux deux autres cercles et chacun est tangent à des côtés du rectangle. Si le rectangle a une largeur de 4, sa longueur est égale à :



(**A**) $2 + \sqrt{8}$ (**B**) $3 + \sqrt{8}$ (**C**) $3 + \sqrt{10}$
(**D**) $\sqrt{32}$ (**E**) $4 + \sqrt{3}$

Solution



Soit R le rayon du grand cercle et r celui des petits cercles.
Puisque les cercles sont tangents aux côtés du rectangle, les rayons sont perpendiculaires aux côtés du rectangle. On a donc $2R = 4$, d'où $R = 2$. De plus, $4r = 4$, d'où $r = 1$.
Soit C_1, C_2 et C_3 les centres des cercles et P le point de tangence des petits cercles.
On trace le segment C_1P et on le prolonge jusqu'aux côtés du rectangle.
La longueur du rectangle est égale à $R + C_1P + r$, ou $3 + C_1P$.
Le segment C_1C_2 passe par le point de tangence de deux cercles. Sa longueur est donc égale à $R + r$, c'est-à-dire à 3.
Puisque C_1P est perpendiculaire à C_2P, le triangle C_1C_2P est rectangle. D'après le théorème de Pythagore, on a $3^2 = (C_1P)^2 + 1^2$, d'où $(C_1P)^2 = 8$ et $C_1P = 2\sqrt{2}$.
La longueur du rectangle est donc égale à $3 + 2\sqrt{2}$. RÉPONSE : (B)

19. À chaque jour, Carla quitte l'école à la même heure. Si elle pédale à une vitesse de 20 km/h, elle arrive à la maison à 16 h 30. Si elle pédale à une vitesse de 10 km/h, elle arrive à la maison à 17 h 15. À quelle vitesse, en km/h, doit-elle pédaler pour arriver à la maison à 17 h?

(**A**) $16\frac{2}{3}$ (**B**) 15 (**C**) $13\frac{1}{3}$ (**D**) 12 (**E**) $18\frac{3}{4}$

Solution
On sait que la distance à parcourir est la même dans tous les cas. On a donc une équation :
Distance parcourue à 20 km/h = Distance parcourue à 10 km/h

Soit t le temps, en heures, que prend Carla lorsqu'elle pédale à une vitesse de 20 km/h.
Lorsqu'elle pédale à une vitesse de 10 km/h, elle prend 45 minutes de plus et le temps qu'elle prend est donc égal à $t + \frac{3}{4}$. L'équation devient donc :

$$20t = 10\left(t + \frac{3}{4}\right)$$
$$20t = 10t + \frac{30}{4}$$
$$10t = \frac{15}{2}$$
$$t = \frac{15}{20} \text{ ou } \frac{3}{4}$$

Donc $d = 20 \times \frac{3}{4}$, ou $d = 15$ km.

Si elle arrive à 17 h, alors $t = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$, ou $t = \frac{5}{4}$. Soit v sa vitesse lorsqu'elle arrive à cette heure.

Donc $v = \dfrac{d}{t}$.

$$v = \frac{15}{\frac{5}{4}}$$

$$v = 15 \times \frac{4}{5}$$

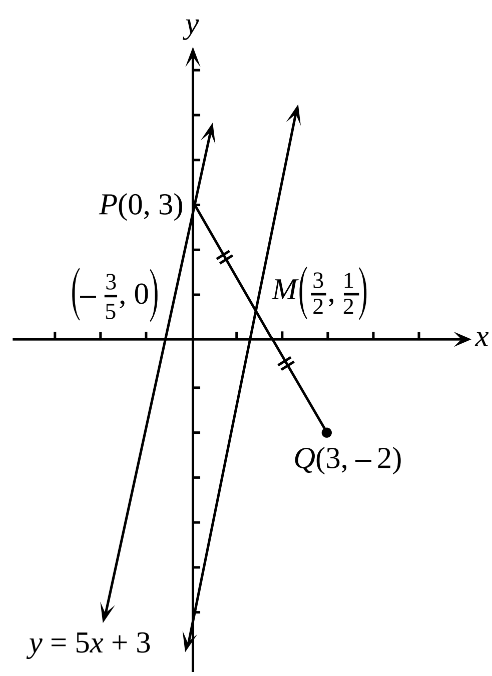
$$v = 12 \text{ km/h}$$

Carla doit pédaler à une vitesse de 12 km/h pour arriver à 17 h. RÉPONSE : (D)

20. On considère un point P sur la droite d'équation $y = 5x + 3$ et le point Q dont les coordonnées sont $(3, -2)$. Si M est le milieu du segment PQ, alors M doit être situé sur la droite d'équation :

(A) $y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$ **(B)** $y = 5x + 1$ **(C)** $y = -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$ **(D)** $y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ **(E)** $y = 5x - 7$

On trace la droite donnée, définie par $y = 5x + 3$. Elle passe par le point $(0, 3)$.



Solution 1

On choisit le point $P(0, 3)$ sur la droite.

Le milieu du segment PQ est le point $M\left(\frac{3+0}{2}, \frac{-2+3}{2}\right)$, ou $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

La droite que l'on cherche doit passer par le point M et doit passer par le milieu de n'importe quel segment joignant un point de la droite donnée et le point Q. La seule droite qui satisfait à cette condition est la droite de pente 5, passant par $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Son équation est :

$$y - \tfrac{1}{2} = 5\left(x - \tfrac{3}{2}\right)$$

ou $$y = 5x - 7$$

Solution 2

Soit $P(a, 5a + 3)$ un point sur la droite d'équation $y = 5x + 3$ et soit $M(x, y)$ le milieu du segment PQ. On cherche une équation de la droite qui contient tous les points M. Puisque $M(x, y)$ est le milieu de PQ :

$$M(x, y) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{(5a+3)+(-2)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{a+3}{2}, \frac{5a+1}{2}\right)$$

On a donc $x = \dfrac{a+3}{2}$ et $y = \dfrac{5a+1}{2}$. On isole a dans chaque équation pour obtenir $a = 2x - 3$ et

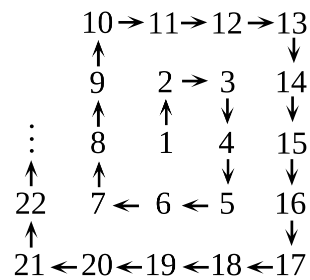
$a = \dfrac{2y-1}{5}$. Puisqu'il s'agit du même a, alors $2x - 3 = \dfrac{2y-1}{5}$.

$$10x - 15 = 2y - 1$$
$$y = 5x - 7$$

L'équation est $y = 5x - 7$. RÉPONSE : (E)

Partie C

21. On forme une spirale de nombres, en commençant par 1, comme dans le diagramme. Si la spirale est prolongée de la même façon, dans laquelle des configurations suivantes retrouvera-t-on les nombres 399, 400 et 401?



(**A**) $399 \rightarrow 400 \rightarrow 401$ (**B**) $401 \leftarrow 400 \leftarrow 399$

(**C**) $\begin{array}{c}401\\ \uparrow\\ 400\\ \uparrow\\ 399\end{array}$ (**D**) $\begin{array}{c}399\\ \downarrow\\ 400\\ \downarrow\\ 401\end{array}$ (**E**) $\begin{array}{ll}400 & \rightarrow 401\\ \uparrow & \\ 399 & \end{array}$

Solution

On remarque les configurations suivantes :

2	3
1	4
	5

et

10	11	12	13
9	2	3	14
8	1	4	15
7	6	5	16
			17

Si on ajoute un tour de la spirale, on a :

26	27	28	29	30	31
25	10	11	12	13	32
24	9	2	3	14	33
23	8	1	4	15	34
22	7	6	5	11	35
21	20	19	18	17	36
					37

On voit donc que tous les carrés parfaits pairs paraissent dans la configuration suivante.

$$(2k)^2 - 1$$
$$\downarrow$$
$$(2k)^2$$
$$\downarrow$$
$$(2k)^2 + 1$$

Le nombre $400 = (20)^2$ paraît donc dans la configuration :

$$399$$
$$\downarrow$$
$$400$$
$$\downarrow$$
$$401$$

RÉPONSE : (D)

22. Une bouteille fermée, contenant de l'eau, a été construite en attachant un cylindre de rayon 1 cm à un cylindre de rayon 3 cm, comme dans la Figure A. Lorsque la bouteille est tenue à l'endroit, le niveau de l'eau est à une hauteur de 20 cm, comme l'illustre la vue de face dans la Figure B. Lorsque la bouteille est tenue à l'envers, le niveau de l'eau est à une hauteur de 28 cm, comme l'illustre la Figure C. Quelle est la hauteur totale de la bouteille, en centimètres?

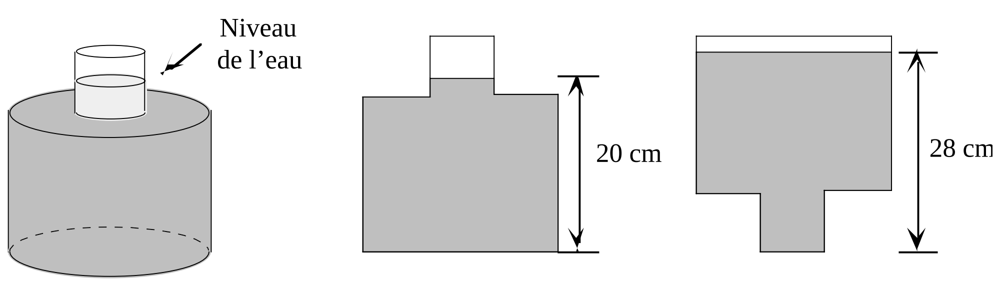


Figure A Figure B Figure C

(**A**) 29 (**B**) 30 (**C**) 31 (**D**) 32 (**E**) 48

Solution

Soit h la hauteur totale de la bouteille, en centimètres.

Le volume de l'eau est le même dans les deux positions. De même, le volume de la partie vide est le même dans les deux positions. Or il est plus facile de calculer le volume des deux parties vides.

Dans la figure B, la partie vide a une hauteur égale à $h - 20$.

Son volume est donc égal à $\pi \times 1^2 \times (h - 20)$, ou $\pi(h - 20)$.

Dans la figure C, la partie vide a une hauteur égale à $h - 28$.

Son volume est donc égal à $\pi \times 3^2 \times (h-28)$, ou $9\pi(h-28)$.

Puisque ces volumes sont égaux, on a :

$$\begin{aligned} \pi(h-20) &= 9\pi(h-28) \\ h-20 &= 9h-252 \\ 8h &= 232 \\ h &= 29 \end{aligned}$$

La hauteur totale de la bouteille est de 29 cm. RÉPONSE : (A)

23. On définit une suite $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ comme suit :

$$t_1 = 14$$
$$t_k = 24 - 5t_{k-1}, \text{ lorsque } k \geq 2.$$

Pour chaque entier strictement positif *n*, on peut exprimer t_n comme suit : $t_n = p \cdot q^n + r$, où *p*, *q* et *r* sont des constantes. La valeur de $p+q+r$ est :

(**A**) -5 (**B**) -3 (**C**) 3 (**D**) 17 (**E**) 31

Solution 1

Puisque $t_n = p \cdot q^n + r$, pour chaque entier $n \geq 1$, alors :

$$t_1 = pq + r$$
$$t_2 = pq^2 + r$$
$$t_3 = pq^3 + r.$$

Or $t_1 = 14$, $t_2 = 24 - 5(t_1) = 24 - 5(14) = -46$ et $t_3 = 24 - 5t_2 = 24 - 5(-46) = 254$.

Donc : $pq + r = 14$ (1)

$pq^2 + r = -46$ (2)

$pq^3 + r = 254$ (3)

En soustrayant (2) – (1), membre par membre, on a $pq^2 - pq = -60$, ou $pq(q-1) = -60$ (4).

En soustrayant (3) – (2), membre par membre, on a $pq^3 - pq^2 = 300$, ou $pq^2(q-1) = 300$ (5).

En divisant (5) par (4), membre par membre, on obtient $q = -5$.

On reporte $q = -5$ dans (1) et dans (2) pour obtenir :

$-5p + r = 14$ (6)

$25p + r = -46$ (7)

En additionnant $5\times$ (6) à (7), membre par membre, on obtient $6r = 24$, ou $r = 4$, d'où $p = -2$.

Donc $p + q + r = -2 - 5 + 4$, ou -3 et $t_n = -2(-5)^n + 4$.

Solution 2

On reporte $t_n = p \cdot q^n + r$ et $t_{n-1} = p \cdot q^{n-1} + r$ dans l'équation $t_n = 24 - 5t_{n-1}$ pour obtenir :

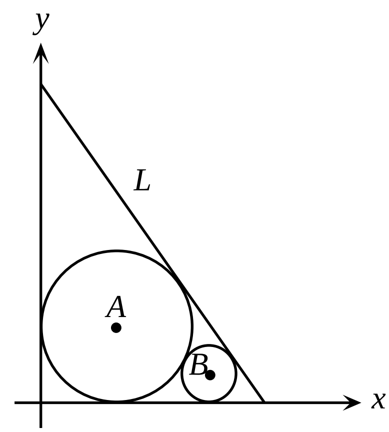
$$p \cdot q^n + r = 24 - 5\left(p \cdot q^{n-1} + r\right)$$
$$p \cdot q^n + 5pq^{n-1} = 24 - 5r - r$$
$$p \cdot q^{n-1}(q+5) = 24 - 6r.$$

Puisque le membre de droite est indépendant de *n*, le membre de gauche doit l'être aussi.

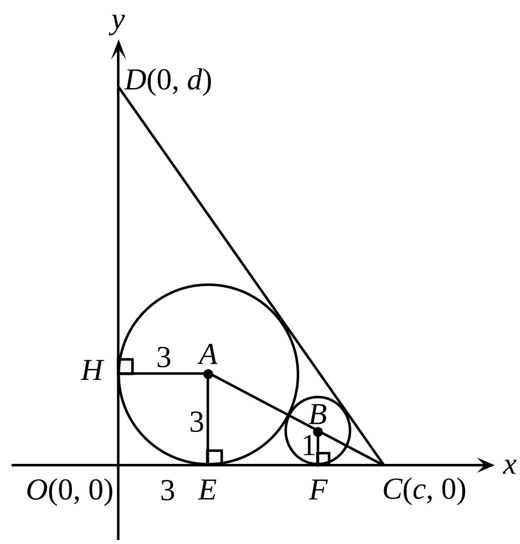
Donc $q+5=0$, d'où $q=-5$. (On sait que $p\neq 0$, sinon t_n serait une constante.)
Donc $24-6r=0$, d'où $r=4$.
L'équation $t_n = p(-5)^n + 4$ devient, pour $n=1$, $14=-5p+4$, d'où $p=-2$.
Donc $p+q+r=-3$. RÉPONSE : (B

24. Le cercle de centre A a un rayon de 3. Il est tangent à la partie positive de l'axe des x et à la partie positive de l'axe des y. Le cercle de centre B a un rayon de 1 et il est tangent à la partie positive de l'axe des x et au cercle de centre A. La droite L est tangente au deux cercles. L'ordonnée à l'origine de la droite L est :

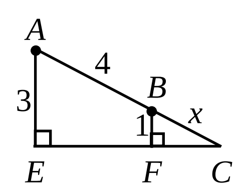
(**A**) $3+6\sqrt{3}$ (**B**) $10+3\sqrt{2}$ (**C**) $8\sqrt{3}$
(**D**) $10+2\sqrt{3}$ (**E**) $9+3\sqrt{3}$



Solution
Soit $C(c, 0)$ et $D(0, d)$ les points d'intersection respectifs de la droite et des axes des x et des y.
On trace le segment AC qui passe par le point B, car AC est la bissectrice de l'angle OCD.
Aux points A et B, on abaisse des perpendiculaires à l'axe des x, jusqu'aux points respectifs E et F.
On abaisse aussi une perpendiculaire AH à l'axe des y.
On a donc $AH = AE = 3$.



Le diagramme ci-contre illustre les triangles ACE et BCF qui sont semblables, puisque leurs angles sont congrus deux à deux.



Soit $x = BC$. Donc :

$$\frac{x}{1} = \frac{x+4}{3}$$
$$x = 2$$

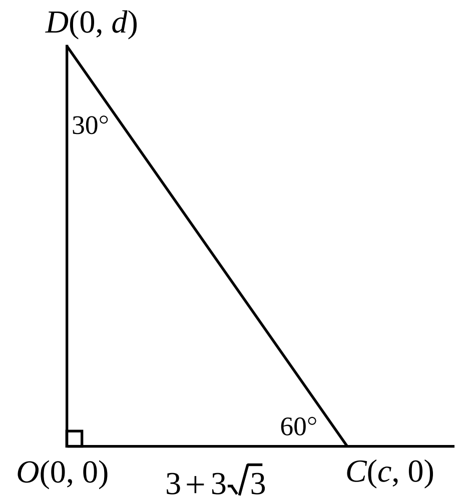
Dans le triangle BCF, $FC^2 = 2^2 - 1^2$, ou $FC^2 = 3$.

$$FC = \sqrt{3}, \quad (FC > 0).$$

Le triangle est donc un triangle $30°-60°-90°$ et on a $\angle BCF = 30°$ et $\angle OCD = 60°$.

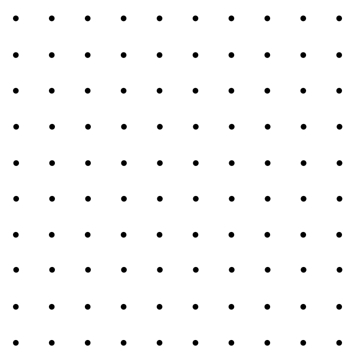
D'après les triangles semblables, on a donc $EF = 2\sqrt{3}$.

On a donc le diagramme ci-contre.
Donc : $d = \sqrt{3}\left(3 + 3\sqrt{3}\right)$
$= 3\sqrt{3} + 9$



RÉPONSE : (E)

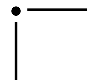
25. On considère un tableau formé de 10 rangées de 10 points, comme dans le diagramme. Chaque point est rouge ou bleu. Lorsque deux points d'une même couleur sont en positions adjacentes dans la même rangée ou la même colonne, ils sont joints par un segment de la même couleur que les points. Lorsque deux points de couleurs différentes sont en positions adjacentes, ils sont joints par un segment vert. En tout, il y a 52 points rouges. Il y a 2 points rouges dans les coins et 16 autres points rouges sur les côtés formant l'extérieur du tableau. Les autres points rouges sont à l'intérieur du tableau. Il y a 98 segments verts. Le nombre de segments bleus est égal à :



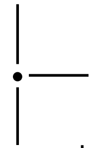
(**A**) 36 (**B**) 37 (**C**) 38
(**D**) 39 (**E**) 40

Solution
On remarque d'abord qu'il y a 9 segments dans chaque ligne et chaque colonne, pour un total de $9(10) + 9(10)$, ou 180 segments.
Soit B le nombre de segments bleus et R le nombre de segments rouges. On a donc $B + R + 98 = 180$, d'où $B + R = 82$, puisqu'il y a 98 segments verts.
Un segment qui arrive à un point rouge peut être rouge ou vert. On veut compter le *nombre total* de segments qui arrivent à des points rouges. Dans ce total, les segments verts seront comptés une fois chacun, tandis que les segments rouges seront comptés deux fois, puisqu'un segment rouge relie deux points rouges.

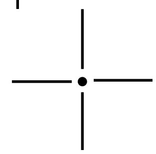
Il y a 2 segments qui arrivent à un point rouge de coin.



Il y a 3 segments qui arrivent à un point rouge situé sur un côté formant l'extérieur du tableau



Il y a 4 segments qui arrivent à un point rouge situé à l'intérieur du tableau.



Le nombre total de segments qui arrivent à des points rouges est donc égal à :

$$2(2)+3(16)+4(34)=188$$

Puisque 98 de ces segments sont verts, les autres $188-98$, ou 90 segments sont rouges, mais ils ont été comptés deux fois. Il y a donc vraiment 45 segments rouges. Donc $R=45$.
Donc $B=82-R$, d'où $B=37$. RÉPONSE : (B)

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2000 Solutions
Concours Fermat (11e - Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Partie A

1. La somme de $29+12+23$ est égale à :

   (**A**) 6^2 (**B**) 4^4 (**C**) 8^8 (**D**) 64^0 (**E**) 2^6

   Solution

   $29+12+23=64$

   $\quad\quad\quad\quad\quad\ =2^6$

   RÉPONSE : (E)

2. Si la suite de cinq flèches, illustrée ci-dessous, se répète sans cesse, quelle flèche sera située dans la 48^e^ position?

   $\longrightarrow$, $\nearrow$, $\nwarrow$, $\longleftarrow$, $\downarrow$

   (**A**) $\longrightarrow$ (**B**) $\nearrow$ (**C**) $\nwarrow$ (**D**) $\longleftarrow$ (**E**) $\downarrow$

   Solution

   Puisque la suite se répète, après neuf cycles, la cinquième flèche sera dans la 45^{e} position.
   La troisième flèche sera donc dans la 48^{e} position. RÉPONSE : (C)

3. Un fermier possède 7 vaches, 8 brebis et 6 chèvres. Combien d'autres chèvres devrait-il acheter pour que la moitié de ses animaux soient des chèvres?

   (**A**) 18 (**B**) 15 (**C**) 21 (**D**) 9 (**E**) 6

   Solution 1

   Puisqu'il y a 15 animaux qui ne sont pas des chèvres, il faut 15 chèvres pour que la moitié des animaux soient des chèvres. Le fermier devrait donc en acheter neuf.

   Solution 2

   Soit x le nombre de chèvres qu'il faut ajouter.
   Le nombre total de chèvres est donc égal à $6+x$, tandis que le nombre d'animaux est égal à $21+x$. Donc :

$$\begin{aligned} 2(6+x) &= 21+x \\ 12+2x &= 21+x \\ 12+x &= 21 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Comme dans la solution 1, le fermier devrait acheter neuf chèvres. RÉPONSE : (D)

4. On divise le carré de 9 par la racine cubique de 125. Quel est le reste?

(**A**) 6 (**B**) 3 (**C**) 16 (**D**) 2 (**E**) 1

Solution

Le carré de 9 est 81 et la racine cubique de 125 est 5.

Lorsqu'on divise 81 par 5, le quotient est 16 et le reste est 1.

En effet, $81 = 5 \times 16 + 1$. RÉPONSE : (E)

5. La somme et le produit de 2, 3, 5 et y sont égaux. Quelle est la valeur de y?

(**A**) $\frac{1}{3}$ (**B**) $\frac{10}{31}$ (**C**) $\frac{10}{29}$ (**D**) $\frac{3}{10}$ (**E**) $\frac{10}{3}$

Solution

On a : $(2)(3)(5)(y) = 2+3+5+y$

$$\begin{aligned} 30y &= 10+y \\ 29y &= 10 \\ y &= \frac{10}{29} \end{aligned}$$

RÉPONSE : (C)

6. Un élève utilise une calculatrice pour obtenir une réponse, mais au lieu d'utiliser la touche $\boxed{x^2}$, il utilise la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ par erreur. Sa réponse est 9. Quelle réponse aurait-il dû obtenir?

(**A**) 243 (**B**) 81 (**C**) 729 (**D**) 3 (**E**) 6561

Solution 1

Puisque $\sqrt{x} = 9$, $x = 81$.

Donc $x^2 = 81^2$, ou 6561.

Solution 2

Puisque la racine carrée du nombre affiché est 9, le nombre affiché était 81. Il aurait dû obtenir 81^2, ou 6561. RÉPONSE : (E)

7. La somme de $(-300)+(-297)+(-294)+ ... +306+309$ est :

(**A**) 309 (**B**) 927 (**C**) 615 (**D**) 918 (**E**) 18

Solution

On peut montrer quelques termes de plus de cette expression :

$(-300)+(-297)+(-294)+...+(-3)+0+3+...+294+297+300+303+306+309$

La somme de –300 à 300 est égale à 0. La somme recherchée est donc égale à $303+306+309$, ou 918. RÉPONSE : (D)

8. Lors d'un référendum à l'école, $\frac{3}{5}$ des élèves ont voté « oui » et 28 % ont voté « non ». Si aucun bulletin de vote n'a été annulé, quel pourcentage des élèves n'ont pas voté?

(**A**) 72 % (**B**) 40 % (**C**) 32 % (**D**) 12 % (**E**) 88 %

Solution

Puisque $\frac{3}{5}$ des élèves, ou 60 %, ont voté « oui » et que 28 % ont voté « non », 88 % des élèves ont voté. Donc $100\ \% - 88\ \%$, ou 12 % des élèves n'ont pas voté. RÉPONSE : (D)

9. Les nombres 6, 14, x, 17, 9, y et 10 ont une moyenne de 13. Quelle est la valeur de $x+y$?

(**A**) 20 (**B**) 21 (**C**) 23 (**D**) 25 (**E**) 35

Solution

Puisque les sept nombres ont une moyenne de 13, leur somme est égale à 7×13, ou 91. Donc $6+14+x+17+9+y+10=91$, ou $x+y+56=91$.

Donc $x+y=35$. RÉPONSE : (E)

10. Si $x(x(x+1)+2)+3=x^3+x^2+x-6$, alors x est égal à :

(**A**) 11 (**B**) -9 (**C**) -4 ou 3 (**D**) -1 ou 0 (**E**) -2

Solution

On peut exprimer le membre de gauche de l'équation comme suit :

$$\begin{aligned} x\left(x(x+1)+2\right)+3 &= x\left(x^2+x+2\right)+3 \\ &= x^3+x^2+2x+3 \end{aligned}$$

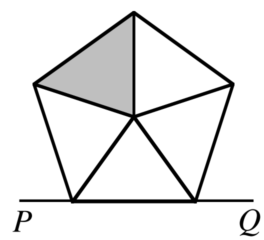
L'équation devient : $\quad x^3+x^2+2x+3 = x^3+x^2+x-6$

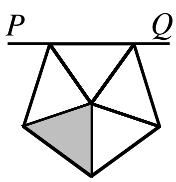
$$\begin{aligned} 2x+3 &= x-6 \\ x &= -9 \end{aligned}$$

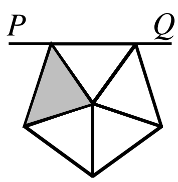
RÉPONSE : (B)

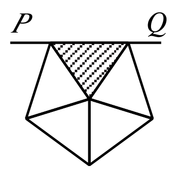
Partie B

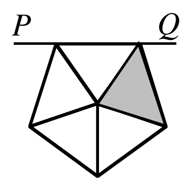
11. Lorsqu'on fait subir au pentagone régulier une réflexion par rapport à la droite PQ, suivie d'une rotation de 144° *dans le sens des aiguilles d'une montre*, dont le centre de rotation est le centre du pentagone, on obtient :

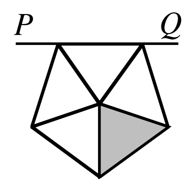


(**A**) 

(**B**) 

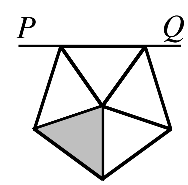
(**C**) 

(**D**) 

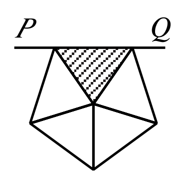
(**E**) 

Solution

Après la réflexion, l'image correspond à la figure ci-contre.



Chacun des angles au centre du pentagone mesure $360° \div 5$, ou 72°. Une rotation de 144° (c'est-à-dire $2 \times 72°$) dans le sens des aiguilles d'une montre placera l'image dans la position ci-contre.



RÉPONSE : (C)

12. Si on évaluait l'expression $15^6 \times 28^5 \times 55^7$, la réponse se terminerait par une série de zéros consécutifs. Combien de zéros y aurait-il dans cette série?

(**A**) 10 (**B**) 18 (**C**) 26 (**D**) 13 (**E**) 5

Solution

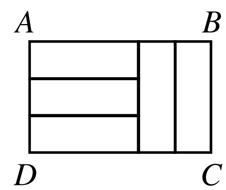
Chaque zéro à la fin du produit provient du produit de 2 et de 5. Il faut donc compter le nombre de fois que ce produit survient dans l'expression.

Or : $15^6 \times 28^5 \times 55^7 = (3 \cdot 5)^6 \left(2^2 \cdot 7\right)^5 (5 \cdot 11)^7$

$$= 3^6 \cdot 5^6 \cdot 2^{10} \cdot 7^5 \cdot 5^7 \cdot 11^7$$
$$= 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^5 \cdot 11^7 \cdot (2 \cdot 5)^{10}$$

Il y a aura dix zéros. RÉPONSE : (A)

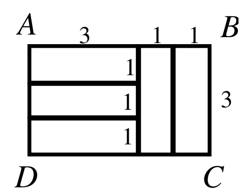
13. On divise le rectangle $ABCD$ en cinq rectangles congruents comme dans le diagramme. Le rapport $AB:BC$ est égal à :



(**A**) 3:2 (**B**) 2:1 (**C**) 5:2
(**D**) 5:3 (**E**) 4:3

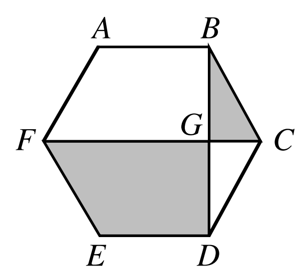
Solution

Si chaque petit rectangle a une largeur de 1 unité, chacun a une longueur de 3 unités comme l'indique le diagramme.
On voit que $AB:BC = 5:3$.



RÉPONSE : (D)

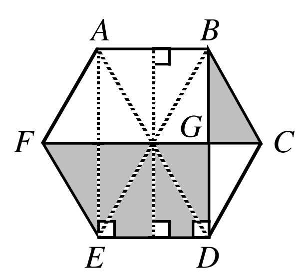
14. $ABCDEF$ est un hexagone régulier dont les diagonales FC et BD se croisent au point G. Le rapport de l'aire du quadrilatère $FEDG$ à celle du triangle BCG est égal à :



(**A**) $3\sqrt{3}:1$ (**B**) 4:1 (**C**) 6:1
(**D**) $2\sqrt{3}:1$ (**E**) 5:1

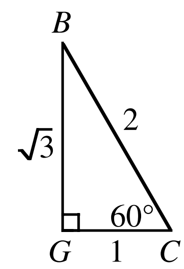
Solution 1

On trace les diagonales AD, BE et AE. On trace un segment parallèle à AE, passant par le point d'intersection de BE et de AD. Le quadrilatère $FEDG$ est formé de cinq triangles identiques au triangle BCG. Le rapport des aires est égal à 5:1.



Solution 2

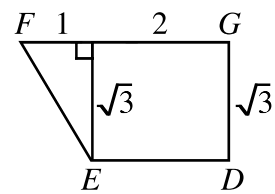
Supposons que les côtés de l'hexagone ont chacun une longueur de 2 unités. Puisque chaque angle de l'hexagone mesure 120°, $\angle BCG = \frac{1}{2}(120^\circ)$ ou 60°. Le triangle BCG est un triangle 30° - 60° - 90°. Donc $BG = \sqrt{3}$ et $GC = 1$. (Il s'agit d'un résultat bien connu. On peut l'obtenir en considérant le triangle BCG comme la moitié d'un triangle équilatéral et en utilisant le théorème de Pythagore.)



L'aire du triangle BCG est égale à $\frac{1}{2}(1)\sqrt{3}$, ou $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'après le diagramme ci-contre, l'aire du quadrilatère $FGDE$ est égale à $2\left(\sqrt{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$, ou $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Le rapport des aires est égal à $\frac{5\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}$, ou 5:1.



RÉPONSE : (A)

15. Dans une suite, chaque terme, à partir du troisième, est le double de la somme des deux termes précédents. Le septième terme de la suite est 8 et le neuvième terme est 24. Quel est le onzième terme de la suite?

(**A**) 160 (**B**) 304 (**C**) 28 (**D**) 56 (**E**) 64

Solution

Soit t_7, t_8, t_9, t_{10} et t_{11} les termes numéros 7 à 11.

Puisque $t_9 = 2(t_7 + t_8)$, alors $24 = 2(8 + t_8)$, d'où $t_8 = 4$.

Donc : $$\begin{aligned} t_{10} &= 2(t_8 + t_9) \\ &= 2(4 + 24) \\ &= 56 \end{aligned}$$

et $$\begin{aligned} t_{11} &= 2(t_9 + t_{10}) \\ &= 2(24 + 56) \\ &= 160 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

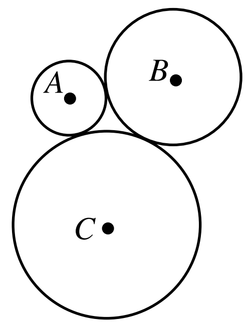
16. On place les chiffres 2, 2, 3 et 5 au hasard l'un à côté de l'autre pour former un nombre de quatre chiffres. Quelle est la probabilité pour que la somme du premier et du dernier chiffre soit paire?

(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{1}{6}$ (**D**) $\frac{1}{2}$ (**E**) $\frac{2}{3}$

Solution
Les nombres de quatre chiffres que l'on peut former avec les chiffres 2, 2, 3 et 5 sont 2235, 2253, 2325, 2352, 2523, 2532, 3225, 3252, 3522, 5223, 5232 et 5322. Il y en a douze. Pour que la somme du premier et du dernier chiffre soit paire, il faut que les deux chiffres soient pairs ou que les deux soient impairs. Les nombres qui vérifient cette condition sont 2352, 2532, 3225 et 5223. Il y en a quatre. La probabilité pour que la somme du premier et du dernier chiffre soit paire est égale à $\frac{4}{12}$, ou $\frac{1}{3}$.

RÉPONSE : (B)

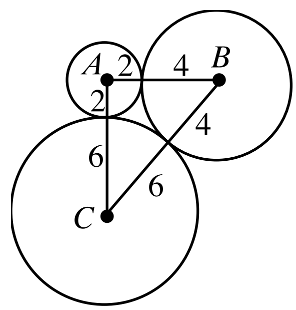
17. Les trois cercles de centres A, B et C ont des rayons respectifs de 2, 4 et 6 unités. Comme l'indique le diagramme, les cercles sont tangents l'un à l'autre. Dans le triangle ABC :



(**A**) $\angle A$ est obtus (**B**) $\angle B = 90°$ (**C**) $\angle A = 90°$

(**D**) tous les angles sont aigus (**E**) $\angle B = \angle C$

Solution
Puisque les cercles sont tangents l'un à l'autre, les segments qui joignent leurs centres passent par les points de tangence. Les côtés du triangle ABC ont pour longueurs 6, 8 et 10 comme l'indique le diagramme.
Puisque $10^2 = 6^2 + 8^2$, le triangle est rectangle en A.



RÉPONSE : (C)

18. Soit $P = 3^{2000} + 3^{-2000}$ et $Q = 3^{2000} - 3^{-2000}$. Alors $P^2 - Q^2$ est égal à :

(**A**) 3^{4000} (**B**) 2×3^{-4000} (**C**) 0 (**D**) 2×3^{4000} (**E**) 4

Solution 1

$$\begin{aligned}
P^2 - Q^2 &= (P+Q)(P-Q) \\
&= \left[\left(3^{2000} + 3^{-2000}\right) + \left(3^{2000} - 3^{-2000}\right)\right]\left[\left(3^{2000} + 3^{-2000}\right) - \left(3^{2000} - 3^{-2000}\right)\right] \\
&= \left(2 \cdot 3^{2000}\right)\left(2 \cdot 3^{-2000}\right) \\
&= 2^2 \cdot 3^0 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Solution 2

$$\begin{aligned} P^2 - Q^2 &= \left(3^{2000} + 3^{-2000}\right)^2 - \left(3^{2000} - 3^{-2000}\right)^2 \\ &= 3^{4000} + 2 \cdot 3^{2000} \cdot 3^{-2000} + 3^{-4000} - 3^{4000} + 2 \cdot 3^{2000} \cdot 3^{-2000} - 3^{-4000} \\ &= 4 \cdot 3^0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

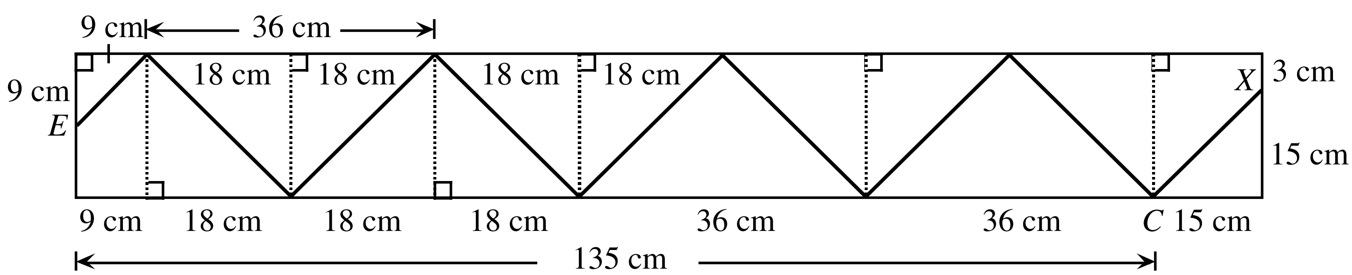
RÉPONSE : (E)

19. Une fourmi se promène à l'intérieur d'un rectangle mesurant 18 cm sur 150 cm. La fourmi parcourt des chemins droits qui forment tous des angles de $45°$ avec les côtés du rectangle. La fourmi commence à un point X situé sur un des petits côtés du rectangle. La première fois que la fourmi atteint le côté opposé, elle arrive au milieu du côté. Quelle est la distance, en centimètres, du point X jusqu'au coin le plus proche?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

Solution

Si on filmait la fourmi et que l'on visionnait le film à rebours, on la verrait partir du point E pour terminer son trajet au point X. Comme l'indique le diagramme, lorsque la fourmi se rend du point E au point B, elle parcourt une distance horizontale de 9 cm car le triangle BAE est un triangle rectangle isocèle. De même, elle parcourt une distance horizontale de 18 cm lorsqu'elle traverse le rectangle. Il en est de même jusqu'au point C. Au point C, la fourmi a parcouru une distance horizontale de $9+18+3\times 36$, ou 135 cm. Il lui reste une distance horizontale de 15 cm à parcourir. Le point X est donc situé à 15 cm d'un coin et à 3 cm de l'autre. Le point X est donc à 3 cm du coin le plus proche.



RÉPONSE : (A)

20. Soit $a+2b+3c+4d+5e=k$ et $5a=4b=3c=2d=e$. Quel est le plus petit entier strictement positif, k, pour lequel a, b, c, d et e sont tous des entiers strictement positifs?

(**A**) 87 (**B**) 522 (**C**) 10 (**D**) 120 (**E**) 60

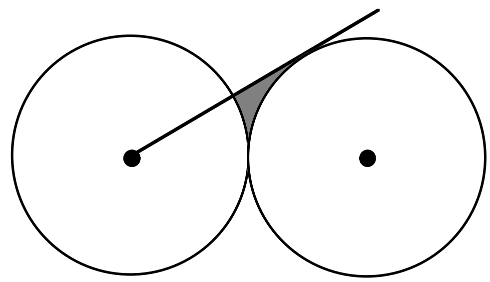
Solution

Puisque $5a = 4b = 3c = 2d = e,$ e est le plus grand et a est le plus petit des entiers. De plus e est divisible par 5, 4, 3 et 2. Donc la plus petite valeur possible de e est 60. Les valeurs respectives de a, b, c et d qui correspondent à cette valeur de e sont 12, 15, 20 et 30. Le plus petit entier strictement positif, k, est donc $12 + 2(15) + 3(20) + 4(30) + 5(60)$, ou 522.

RÉPONSE : (B)

Partie C

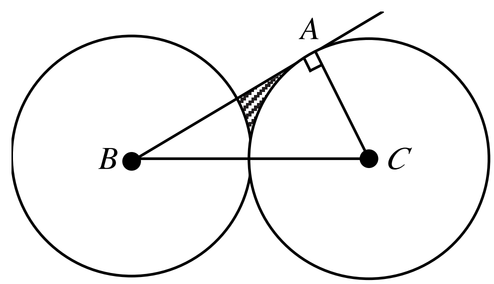
21. Deux cercles, ayant chacun un rayon de 10 unités, sont tangents l'un à l'autre. On trace une droite, tangente à un des cercles, à partir du centre de l'autre cercle. Quelle est l'aire de la région ombrée, à l'unité près?



(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8
(**D**) 9 (**E**) 10

Solution

Soit B et C les centres des cercles et soit A le point de contact de la tangente du point B au cercle de centre C. Puisque la tangente est perpendiculaire au rayon au point de contact, le triangle ABC est rectangle.
Puisque $AC:BC = 1:2$, alors $AC:BC:AB = 1:2:\sqrt{3}$ selon le théorème de Pythagore. (Voir la solution 2 du numéro 14.)



On a donc $\angle B = 30°$, $\angle C = 60°$, $AC = 10$, $BC = 20$ et $AB = 10\sqrt{3}$. L'aire de la partie ombrée est égale à l'aire du triangle ABC moins l'aire des deux secteurs. Puisque $\angle B = 30°$ et $\angle C = 60°$, l'aire des deux secteurs est égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire d'un cercle de rayon 10.

L'aire de la partie ombrée est égale à : $\frac{1}{2}(10)\left(10\sqrt{3}\right) - \frac{1}{4}\pi(10)^2$

$$= 50\sqrt{3} - 25\pi$$
$$\approx 8{,}063$$

Arrondie à l'entier près, elle est égale à 8. RÉPONSE : (C)

22. On considère un entier de 2000 chiffres dont le premier chiffre, à l'extrême gauche, est un 3. Les chiffres de l'entier sont placés de manière que n'importe quels deux chiffres consécutifs forment un nombre divisible par 17 ou par 23. Le 2000e chiffre peut être a ou b. Quelle est la

valeur de $a+b$?

(**A**) 3 (**B**) 7 (**C**) 4 (**D**) 10 (**E**) 17

Solution
On remarque que les multiples de 17 formés de deux chiffres sont 17, 34, 51, 68 et 85. De même, les multiples de 23 formés de deux chiffres sont 23, 46, 69 et 92. Puisque le premier chiffre de l'entier est un 3 et que seul le nombre 34 dans la liste des multiples commence par un 3, le deuxième chiffre de l'entier doit être un 4. De même, le troisième chiffre doit être un 6. Le quatrième chiffre peut être un 8 ou un 9. On considère deux cas.

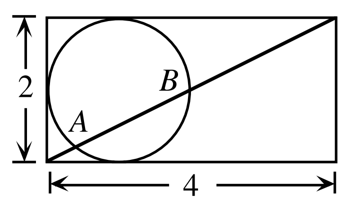
1^er^ cas
Le quatrième chiffre est un 8. Les chiffres suivants sont 5, 1 et 7. Puisqu'il n'y aucun multiple dans la liste qui commence par un 7, l'entier est 3468517.

2^e^ cas
Le quatrième chiffre est un 9. On obtient alors 34692 34692 34… Les cinq chiffres '34692' se répéteront à l'infini tant que l'on choisit le chiffre 9 après le chiffre 6.

Un entier de 2000 chiffres doit contenir 399 groupes des chiffres '34692'. Les cinq derniers chiffres peuvent être 34692 ou 34685. Le 2000^e^ chiffre peut donc être un 2 ou un 5. Donc $a+b=2+5=7$.

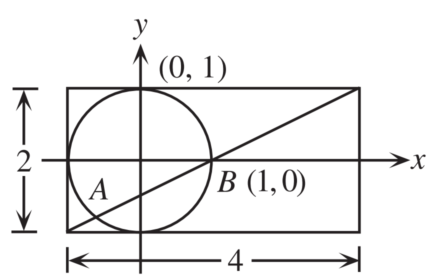
RÉPONSE : (B)

23. Un cercle est tangent à trois côtés d'un rectangle dont les côtés mesurent respectivement 2 et 4 unités. Une diagonale du rectangle croise le cercle aux points A et B. La longueur de AB est égale à :



(**A**) $\sqrt{5}$ (**B**) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (**C**) $\sqrt{5}-\frac{1}{5}$ (**D**) $\sqrt{5}-\frac{1}{6}$ (**E**) $\frac{5\sqrt{5}}{6}$

Solution 1
Il y a plusieurs façons de résoudre ce problème. La plus facile est probablement d'utiliser un repère cartésien. Deux choix s'imposent pour l'origine, soit le centre du cercle ou le coin inférieur gauche du rectangle. Dans cette solution, on choisit le centre du cercle. Les axes sont parallèles aux côtés du rectangle. L'équation du cercle est $x^2+y^2=1$ et l'équation de la droite qui contient la diagonale est $y+1=\frac{1}{2}(x+1)$, ou



Pour un point d'intersection de la droite et du cercle, on reporte $x = 2y + 1$ dans l'équation du cercle. On obtient : $(2y+1)^2 + y^2 = 1$

$$5y^2 + 4y = 0$$
$$y(5y+4) = 0$$
$$y = 0 \text{ ou } y = -\frac{4}{5}$$

On reporte ces valeurs dans l'équation $x - 2y = 1$ pour obtenir $x = 1$ et $x = -\frac{3}{5}$.

Les points d'intersection sont $A\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ et $B(1, 0)$.

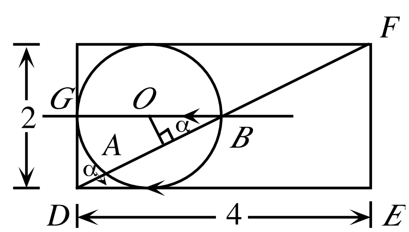
La longueur de AB est égale à : $\sqrt{\left(1+\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{80}{25}}, \text{ ou } \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Remarque : Si on avait choisi l'autre point comme origine, l'équation de la droite serait $y = \frac{1}{2}x$ et celle du cercle, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Solution 2

Le point B est le centre du rectangle.
On trace le diamètre BG parallèle aux deux côtés du rectangle.
Soit O le centre du cercle. On abaisse une perpendiculaire OC à la diagonale. C est donc le milieu de la corde AB.



Puisque BG est parallèle à DE, $\angle BDE = \angle CBO = \alpha$.
Les triangles OBC et FDE sont donc semblables.
Selon le théorème de Pythagore, $DF = 2\sqrt{5}$. Donc $\frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{CB}{4}$, d'où $CB = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.
La longueur de AB est égale à $2\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$, ou $\frac{4}{5}\sqrt{5}$.

RÉPONSE : (B)

24. On considère le système d'équations $x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 525$ et $x + xy + xy^2 = 35$. La somme des valeurs réelles de y qui vérifient le système d'équations est égale à :

(**A**) 20 (**B**) 2 (**C**) 5 (**D**) $\frac{55}{2}$ (**E**) $\frac{5}{2}$

Solution

Soit $x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 525$ (1)

et $x + xy + xy^2 = 35$ (2).

On peut exprimer le membre de gauche de l'équation (1) comme suit :

$$\begin{aligned} x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 &= \left(x + xy^2\right)^2 - x^2y^2 \\ &= \left(x + xy^2 - xy\right)\left(x + xy^2 + xy\right) \end{aligned}$$

L'équation (1) devient donc $\left(x + xy^2 - xy\right)\left(x + xy^2 + xy\right) = 525$.

On reporte l'équation (2) dans cette équation pour obtenir :

$$\left(x + xy^2 - xy\right)(35) = 525$$

$$x + xy^2 - xy = 15 \qquad (3)$$

On soustrait l'équation (3) de l'équation (2) pour obtenir $2xy = 20$, d'où $x = \frac{10}{y}$.

On reporte $x = \frac{10}{y}$ dans l'équation (3) :

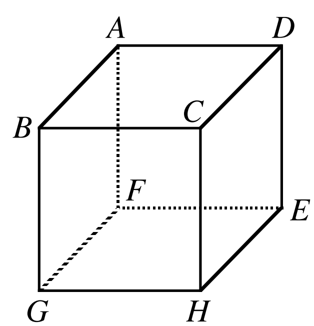
$$\begin{aligned} \frac{10}{y} + 10y - 10 &= 15 \\ 10y^2 - 25y + 10 &= 0 \\ 2y^2 - 5y + 2 &= 0 \\ (2y-1)(y-2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $2y - 1 = 0$ ou $y - 2 = 0$, d'où $y = \frac{1}{2}$ ou $y = 2$.

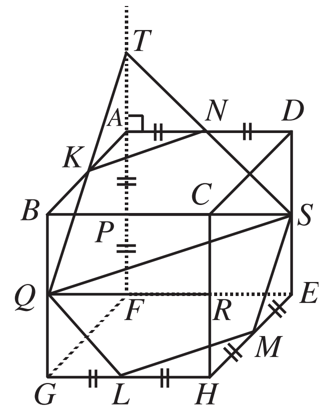
La somme des valeurs réelles de y qui vérifient le système d'équations est égale à $\frac{5}{2}$.

RÉPONSE : (E)

25. Le cube illustré est coupé en quatre sections par deux plans. Le premier plan est parallèle à la face $ABCD$ et passe au milieu de l'arête BG. Le deuxième plan passe par les milieux des arêtes AB, AD, HE et GH. Quel est le rapport des volumes du plus petit et du plus grand des quatre morceaux?



(**A**) 3:8 (**B**) 7:24 (**C**) 7:25
(**D**) 7:17 (**E**) 5:11



Solution
On peut attribuer une longueur de 2 aux arêtes. Le premier plan, qui est parallèle à la face $ABCD$ et qui passe au milieu de l'arête BG, coupe le cube en deux parties de même volume. Soit *K*, *Q*, *L*, *M*, *S*, *N* et *P* les milieux respectifs des arêtes AB, BG, GH, HE, ED, AD et AF. Le deuxième plan, qui passe par les points *K, L, M* et *N*, coupe le cube en deux parties de même volume et contient le segment *QS*. Les deux plans coupent donc le cube en quatre morceaux, soit deux grands morceaux identiques et deux petits morceaux identiques.
On prolonge QK et SN jusqu'au point *T*.
Les triangles *TAN* et *TPS* sont semblables puisqu'ils sont rectangles et que les côtés AN et PS sont parallèles.
Donc $\dfrac{TA}{TP} = \dfrac{AN}{PS}$ et puisque $PA = 1$, on obtient $TA = 1$.
Le volume du petit morceau du haut est égal au volume du tétraèdre *TQSP* moins le volume du tétraèdre *TKNA*. Il est donc égal à : $\dfrac{1}{3}\left[\left(\dfrac{1}{2}(2)(2)(2)\right)\right] - \dfrac{1}{3}\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)(1)(1)(1)\right]$

$$= \frac{4}{3} - \frac{1}{6}, \text{ ou } \frac{7}{6}$$

Le volume du grand morceau est égal à $2 \times 2 \times 1 - \dfrac{7}{6}$, ou $\dfrac{17}{6}$.
Le rapport des volumes du plus petit et du plus grand des quatre morceaux est égal à 7:17.

RÉPONSE : (D)

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1999 Solutions

Concours Fermat (11e - Sec. V)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

Partie A

1. La valeur de $\left(\sqrt{25}-\sqrt{9}\right)^2$ est :

   (**A**) 26 (**B**) 16 (**C**) 34 (**D**) 8 (**E**) 4

   Solution

   $$\left(\sqrt{25}-\sqrt{9}\right)^2 = (5-3)^2$$
   $$= 4$$

   RÉPONSE : (E)

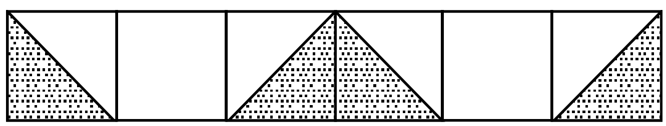
2. Nous sommes aujourd'hui mercredi. Quel jour de la semaine serons-nous dans 100 jours?

   (**A**) lundi (**B**) mardi (**C**) jeudi (**D**) vendredi (**E**) samedi

   Solution

   Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine et que $98 = 7 \times 14$, nous serons un mercredi dans 98 jours. Dans 100 jours, nous serons donc un vendredi. RÉPONSE : (D)

3. La figure illustrée est formée de six carrés. Quelle fraction de la figure est ombrée?



   (**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{1}{4}$ (**D**) $\frac{2}{5}$ (**E**) $\frac{2}{3}$

   Solution

   La figure est formée de six carrés. Quatre demi-carrés, soit l'équivalent de deux carrés, sont ombrés. Donc $\frac{1}{3}$ de la figure est ombrée. RÉPONSE : (B)

4. Lorsqu'on fait tourner un tourne-vis sur un angle de $90°$, une vis pénètre dans un morceau de bois sur une profondeur de 3 mm. Combien faut-il de tours complets du tourne-vis pour insérer une vis de 36 mm dans le bois?

   (**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 9 (**E**) 12

   Solution

   Un tour complet du tourne-vis, soit un angle de $360°$, fera pénétrer la vis sur une profondeur de 12 mm.

   Il faut donc trois tours complets pour insérer une vis de 36 mm dans le bois.

   RÉPONSE : (A)

5. Une valeur de x pour laquelle $(5-3x)^5=-1$ est :

(**A**) $\frac{4}{3}$ (**B**) 0 (**C**) $\frac{10}{3}$ (**D**) $\frac{5}{3}$ (**E**) 2

Solution
Puisque $(-1)^5=-1$, alors $5-3x=-1$ d'où $x=2$. RÉPONSE : (E)

6. Le nombre qui est 6 de moins que le double du carré de 4 est :

(**A**) -26 (**B**) 10 (**C**) 26 (**D**) 38 (**E**) 58

Solution
$2(4)^2-6=26$ RÉPONSE : (C)

7. Dans la famille Martin, chacun des cinq enfants reçoit une allocation hebdomadaire. L'allocation moyenne des trois plus jeunes est de 8 \$. Les deux plus vieux reçoivent une allocation moyenne de 13 \$. Quelle somme est déboursée à chaque semaine pour les allocations des enfants?

(**A**) 50 \$ (**B**) 52,50 \$ (**C**) 105 \$ (**D**) 21 \$ (**E**) 55 \$

Solutiion
La somme déboursée est égale à $3\times 8\ \$+2\times 13\ \$$, ou 50 \$. RÉPONSE : (A)

8. Une montre à affichage digital indique $5{:}55$. Combien de minutes s'écouleront avant que la montre indique de nouveau des chiffres qui sont tous identiques?

(**A**) 71 (**B**) 72 (**C**) 255 (**D**) 316 (**E**) 436

Solution
Les prochains chiffres identiques seront $11{:}11$. Cela représente une différence de 316 minutes. (On remarque que les affichages $6{:}66$, $7{:}77$, etc., sont impossibles.) RÉPONSE : (D)

9. Lors d'une élection, Hubert a reçu 60 % des votes et Jeanne a reçu tous les autres votes. Si Hubert a gagné par 24 votes, combien de personnes ont voté?

(**A**) 40 (**B**) 60 (**C**) 72 (**D**) 100 (**E**) 120

Solution
Puisque Hubert a reçu 60 % des votes, Jeanne a reçu 40 % des votes. Il y a donc une différence de 20 % des votes entre eux, soit 24 votes.
Le nombre de personnes qui ont voté est donc égal à 5×24, ou 120. RÉPONSE : (E)

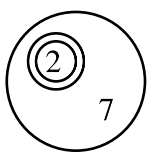
10. Si on choisit les valeurs de x et de y dans l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10\}$, la plus grande valeur possible de l'expression $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ est :

(**A**) 2 (**B**) $12\frac{1}{2}$ (**C**) $10\frac{1}{10}$ (**D**) $2\frac{1}{2}$ (**E**) 20

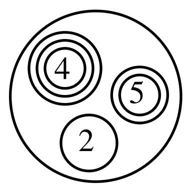
Solution
Il faut choisir la plus grande valeur possible pour x et la plus petite valeur possible pour y, de manière que $\frac{x}{y}$ soit aussi grand que possible. L'inverse, $\frac{y}{x}$, sera inférieure à 1 et aura peu de conséquence sur la somme. Les meilleurs choix sont donc $x = 10$ et $y = 1$. On aura alors $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{1} + \frac{1}{10}$, ou $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 10\frac{1}{10}$. RÉPONSE : (C)

Partie B

11. Au *Pays des ronds*, on représente les nombres 207 et 4520 de la façon suivante :

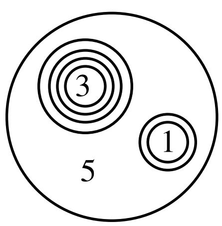


207



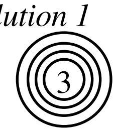
4520

Au *Pays des ronds*, quel nombre est représenté par le diagramme suivant?



(**A**) 30 105 (**B**) 30 150 (**C**) 3105 (**D**) 3015 (**E**) 315

Solution 1



$= 3 \times 10^4$
$= 30\,000$

$= 1 \times 10^2$
$= 100$

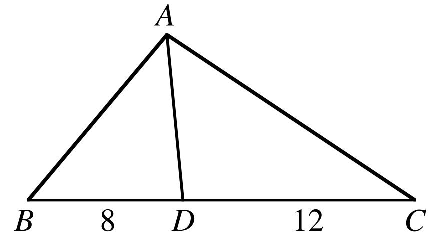
$5 \;= 5 \times 10^0$
$= 5$

Le nombre représenté est égal à $30\,000 + 100 + 5$, ou $30\,105$.

Solution 2
Puisqu'il y a quatre ronds autour du '3', cela représente le nombre 3×10^4, ou $30\,000$.
Le '5' représente 5 unités. Le seul nombre possible parmi les cinq choix est donc $30\,105$.

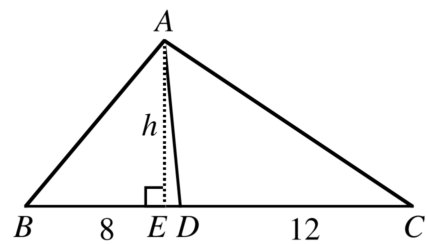
RÉPONSE : (A)

12. Le triangle ABC a une aire de 60 unités carrées. Si $BD = 8$ unités et $DC = 12$ unités, l'aire du triangle ABD, en unités carrées, est égale à :



(**A**) 24 (**B**) 40 (**C**) 48
(**D**) 36 (**E**) 6

Solution 1
Les triangles ABC et ABD ont la même hauteur $AE = h$. L'aire de chaque triangle est donc proportionnelle à la longueur de sa base. Puisque le triangle ABC a une aire de 60 unités carrées, l'aire du triangle ABD est égale à $\frac{8}{20} \times 60$, ou 24 unités carrées.



Solution 2
Soit h la hauteur des triangles ABC et ABD.
Puisque le triangle ABC a une aire de 60 unités carrées, alors :

$$\frac{20 \times h}{2} = 60$$
$$h = 6$$

Donc l'aire du triangle ABD est égale à $\frac{8 \times 6}{2}$, ou 24 unités carrées.

RÉPONSE : (A)

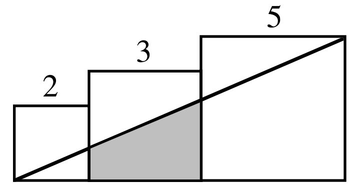
13. Pépin a passé quatre examens, chacun sur 100. Il a obtenu une moyenne de 88. Quelle est la note la plus basse qu'il ait pu obtenir sur un de ces examens?

(**A**) 88 (**B**) 22 (**C**) 52 (**D**) 0 (**E**) 50

Solution
Puisque Pépin a obtenu une moyenne de 88, il a obtenu un total de 4×88, ou 352 points. La note la plus basse proviendrait donc de la situation où il reçoit trois notes de 100 et une note de 52.

RÉPONSE : (C)

14. Le diagramme illustre trois carrés dont les dimensions sont indiquées. Quelle est l'aire du quadrilatère ombré?

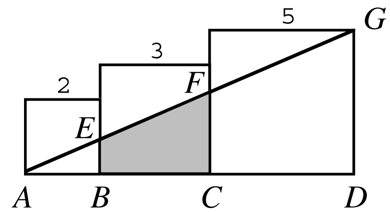


(**A**) $\frac{21}{4}$ (**B**) $\frac{9}{2}$ (**C**) 5

(**D**) $\frac{15}{4}$ (**E**) $\frac{25}{4}$

Solution 1

Dans cette solution, on fait appel aux triangles semblables. Soit les points indiqués sur le diagramme. On calculera les longueurs EB et FC, ce qui permettra de calculer l'aire du trapèze $BCFE$. Les triangles ACF et ADG sont semblables, puisque leurs angles correspondants sont congruents.



Donc $\frac{FC}{GD} = \frac{AC}{AD} = \frac{5}{10}$, ou $\frac{FC}{GD} = \frac{1}{2}$.

Donc $FC = \frac{1}{2}GD$, ou $FC = \frac{5}{2}$.

De même, les triangles ABE et ACF sont semblables. Donc $\frac{EB}{FC} = \frac{2}{5}$.

Donc $EB = \frac{2}{5}\left(\frac{5}{2}\right)$, ou $EB = 1$.

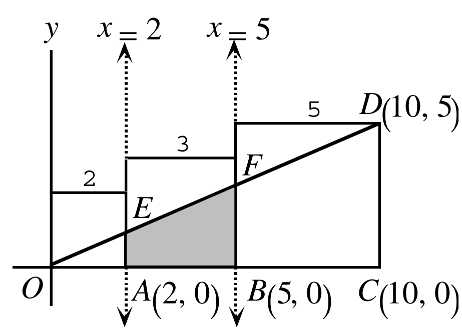
L'aire du trapèze $BCFE$ $= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{2}\right) \times 3$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\right) \times 3$

$= \frac{21}{4}$.

Solution 2

On ajoute un repère cartésien. La droite OD a pour équation $y = \frac{1}{2}x$. Puisque les points $E(2, y_1)$ et $F(5, y_2)$ sont sur cette droite, leurs coordonnées vérifient l'équation. Donc $y_1 = 1$ et $y_2 = \frac{5}{2}$. Donc $AE = 1$ et $BF = \frac{5}{2}$. On continue comme dans la solution 1.



RÉPONSE : (A)

15. Si l'expression $(a + b + c + d + e + f + g + h + i)^2$ est développée et réduite, combien y aura-t-il de termes différents dans la réponse?

(**A**) 36 (**B**) 9 (**C**) 45 (**D**) 81 (**E**) 72

Solution

$$\overset{\text{Parenthèse 1}}{\left(a+b+c+d+e+f+g+h+i\right)}\overset{\text{Parenthèse 2}}{\left(a+b+c+d+e+f+g+h+i\right)}$$

Il faut d'abord multiplier le a de la parenthèse 1 par chacun des termes de la parenthèse 2. On obtient 9 termes. Ensuite il faut multiplier le b de la parenthèse 1 par tous les termes de la parenthèse 2 à partir de b car $b \times a$ ne donnerait pas un nouveau terme. On obtient 8 nouveaux termes. On continue de cette façon jusqu'à la fin, alors que l'on multiplie le i de la parenthèse 1 par le i de la parenthèse 2. Le nombre de termes différents est donc égal à $9+8+7+6+5+4+3+2+1$, ou 45.

RÉPONSE : (C)

16. Si les équations $px+2y=7$ et $3x+qy=5$ représentent la même droite, la valeur de p est :

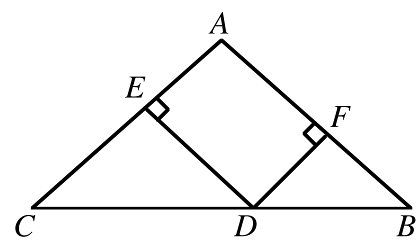
(**A**) 5 (**B**) 7 (**C**) 21 (**D**) $\frac{21}{5}$ (**E**) $\frac{10}{7}$

Solution

Si on multiplie les membres de la première équation par 5, on obtient $5px+10y=35$. Si on multiplie les membres de la deuxième équation par 7, on obtient $21x+7qy=35$. En comparant les coefficients, on obtient $5p=21$ ou $p=\frac{21}{5}$.

RÉPONSE : (D)

17. Dans le triangle ABC, on a $AC=AB=25$ et $BC=40$. D est un point sur BC. Au point D, on abaisse des perpendiculaires qui rencontrent AC en E et AB en F. $DE+DF$ est égal à :

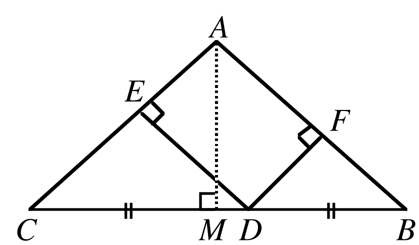


(**A**) 12 (**B**) 35 (**C**) 24

(**D**) 25 (**E**) $\frac{35}{2}\sqrt{2}$

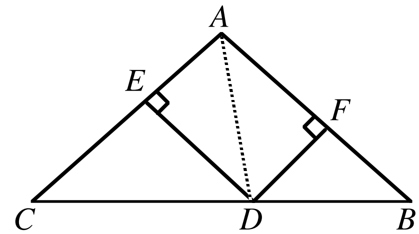
Solution

On trace la hauteur AM. Puisque le triangle ABC est isocèle, M est le milieu de CB, d'où $CM=MB=20$. Puisque le triangle ACM est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $AM=\sqrt{25^2-20^2}$, ou $AM=15$.



On joint A et D. L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(BC)(AM)$. Elle est aussi égale à la somme des aires des triangles ACD et ADB. On a donc :

$$\frac{1}{2}(40)(15)=\frac{1}{2}(25)(ED)+\frac{1}{2}(25)(DF)$$
$$(40)(15)=(25)(ED)+(25)(DF)$$
$$600=(25)(ED)+(25)(DF)$$
$$ED+DF=24$$



RÉPONSE : (C)

18. Si P et Q sont des entiers de 1 à 9 inclusivement, le nombre de solutions (P,Q) de l'équation $\frac{P}{Q}-\frac{Q}{P}=\frac{P+Q}{PQ}$ est égal à :

(**A**) 1 (**B**) 8 (**C**) 16 (**D**) 72 (**E**) 81

Solution

L'équation peut s'écrire :

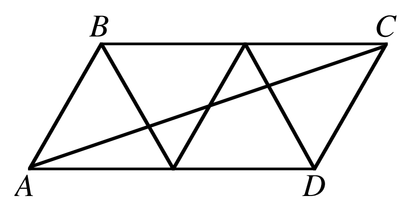
$$\frac{P}{Q}-\frac{Q}{P}=\frac{P+Q}{PQ}$$
$$\frac{P^2-Q^2}{PQ}=\frac{P+Q}{PQ}$$
$$\frac{(P-Q)(P+Q)}{PQ}=\frac{P+Q}{PQ}$$

Donc $P-Q=1$, $PQ\neq 0$ et $P+Q\neq 0$.

Les solutions sont $(2,1)$, $(3,2)$, $(4,3)$, ..., $(9,8)$.

Il y en a huit. RÉPONSE : (B)

19. Le parallélogramme $ABCD$ est formé de quatre triangles équilatéraux dont les côtés mesurent 1. La diagonale AC a une longueur de :

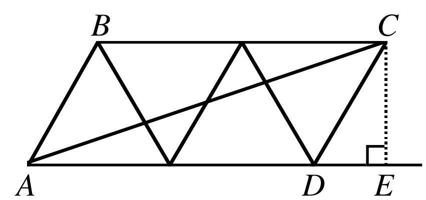


(**A**) $\sqrt{5}$ (**B**) $\sqrt{7}$ (**C**) 3
(**D**) $\sqrt{3}$ (**E**) $\sqrt{10}$

Solution

On trace la hauteur CE du parallélogramme.

Le triangle CDE est donc un triangle $30°-60°-90°$, avec $\angle CDE=60°$ et $CD=1$. Donc $CE=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $DE=\frac{1}{2}$.



Puisque le triangle AEC est rectangle et que $AE = \frac{5}{2}$ et $CE = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $AC = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}$, ou $AC = \sqrt{7}$.

RÉPONSE : (B)

20. On définit $a_1 = \dfrac{1}{1-x}$, $a_2 = \dfrac{1}{1-a_1}$ et $a_n = \dfrac{1}{1-a_{n-1}}$, où $n \geq 2$, $x \neq 1$ et $x \neq 0$. Alors a_{107} est égal à :

(**A**) $\dfrac{1}{1-x}$ (**B**) x (**C**) $-x$ (**D**) $\dfrac{x-1}{x}$ (**E**) $\dfrac{1}{x}$

Solution

$$a_1 = \frac{1}{1-x}$$

$$a_2 = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{(1-x)(1)}{(1-x)\left(1-\frac{1}{1-x}\right)} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}$$

$$a_3 = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{x(1)}{x\left(1-\frac{x-1}{x}\right)} = \frac{x}{x-(x-1)} = x$$

$$a_4 = \frac{1}{1-x}$$

Puisque $a_1 = a_4$, on conclut que $a_1 = a_4 = a_7 = ... = a_{3n-2} = a_{106}$.
De même, $a_2 = a_5 = a_8 = ... = a_{3n-1} = a_{107}$ lorsque $n = 36$.
Puisque $a_2 = \dfrac{x-1}{x}$, alors $a_{107} = \dfrac{x-1}{x}$.

RÉPONSE : (D)

Partie C

21. Combien d'entiers peut-on exprimer comme une somme de trois nombres distincts choisis dans l'ensemble {4, 7, 10, 13, …, 46}?

(**A**) 45 (**B**) 37 (**C**) 36 (**D**) 43 (**E**) 42

Solution
Chacun des nombres de l'ensemble est de la forme $1+3n$, où $n = 1, 2, 3, ..., 15$. La somme de trois nombres distincts sera donc de la forme $3+3k+3l+3m$ ou $3(1+k+l+m)$, k, l et m étant choisis dans l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., 15\}$. Le problème est donc équivalent au problème suivant qui est plus facile : « Combien d'entiers différents peut-on former en additionnant trois nombres de l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., 15\}$? »

La plus petite somme est $1+2+3$, ou 6 et la plus grande somme est $13+14+15$, ou 42.
Il est possible d'obtenir chaque somme de 6 à 42 :

a) en remplaçant un des entiers par l'entier suivant pour augmenter la somme de 1 ou
b) en remplaçant un des entiers par l'entier précédent pour diminuer la somme de 1.

Le nombre total de sommes distinctes est donc égal à $42-5$, ou 37. RÉPONSE : (B)

22. Soit $x^2+ax+48=(x+y)(x+z)$ et $x^2-8x+c=(x+m)(x+n)$, où y, z, m et n sont des entiers entre -50 et 50. La valeur maximale de ac est :

(**A**) 343 (**B**) 126 (**C**) 52 234 (**D**) 784 (**E**) 98 441

Solution
D'après l'énoncé, les trinômes $x^2+ax+48$ et x^2-8x+c peuvent être factorisés.
On considère d'abord les factorisations possibles de 48 et les valeurs de a qu'elles produisent.

Factorisations possibles de 48	*Valeurs de a*
1×48, -1×-48	49, -49
2×24, -2×-24	26, -26
3×16, -3×-16	19, -19
4×12, -4×-12	16, -16
6×8, -6×-8 14, -14	

On considère ensuite les factorisations possibles de x^2-8x+c, ainsi que les valeurs de c qu'elles produisent.

Factorisations possibles	*Valeurs de c*
$(x-49)(x+41)$	$-49\times 41=-2009$
$(x-48)(x+40)$	$-48\times 40=-1920$
$\vdots$	$\vdots$
$(x-9)(x+1)$	$-9\times 1=-9$
$(x-8)(x+0)$	0

En comparant ces valeurs, on voit que la valeur maximale de ac est -49×-2009, ou $98\,441$.

RÉPONSE : (E)

23. La somme des valeurs de x qui vérifient l'équation $\left(x^2-5x+5\right)^{x^2+4x-60}=1$ est égale à :

(**A**) -4 (**B**) 3 (**C**) 1 (**D**) 5 (**E**) 6

Solution
On peut considérer trois cas.

1er cas La base est égale à 1.
On a alors $x^2-5x+5=1$.

$$x^2-5x+4=0$$
$$(x-1)(x-4)=0$$

$x=1$ ou $x=4$

Ces deux valeurs de x vérifient l'équation donnée.

2ᵉ cas L'exposant est égal à 0.

On a alors $x^2+4x-60=0$.

$$(x+10)(x-6)=0$$
$$x=-10 \text{ ou } x=6$$

On peut vérifier que $x=-10$ et $x=6$ ne sont pas des racines de $x^2-5x+5=0$, ce qui fait que nous n'avons pas la forme indéterminée 0^0.

3ᵉ cas La base est égale à –1 et l'exposant est pair.

On a alors $x^2-5x+5=-1$ et $x^2+4x-60$ est pair.

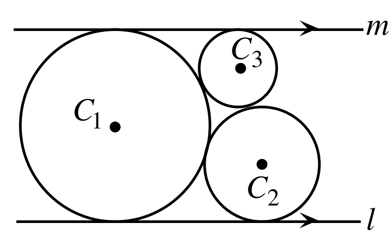
$$x^2-5x+5=-1$$
$$x^2-5x+6=0$$
$$(x-2)(x-3)=0$$
$$x=2 \text{ ou } x=3$$

Si $x=2$, alors $x^2-4x-60$ est pair et $x=2$ est donc une solution.

Si $x=3$, alors $x^2-4x-60$ est impair et $x=3$ ***n'est pas*** une solution.

La somme des solutions est $1+4-10+6+2$, ou 3. RÉPONSE : (B)

24. Deux cercles, C_1 et C_2, se touchent extérieurement. La droite l est une tangente commune. La droite m est parallèle à l et touche les deux cercles C_1 et C_3. Les trois cercles sont tangents l'un à l'autre. Si C_2 a un rayon de 9 et C_3 a un rayon de 4, quel est le rayon de C_1?

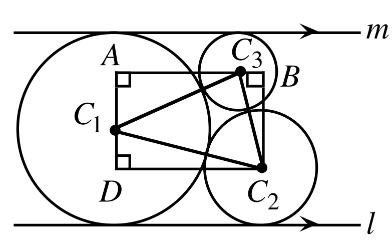


(**A**) 10,4 (**B**) 11 (**C**) $8\sqrt{2}$
(**D**) 12 (**E**) $7\sqrt{3}$

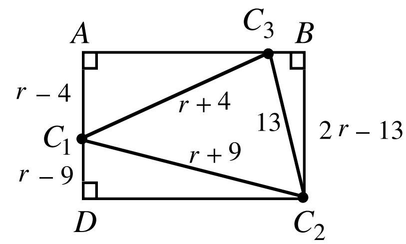
Solution

On joint d'abord les centres pour former le triangle $C_1C_2C_3$. Chaque segment joignant deux centres passe par le point de tangence des deux cercles. Sa longueur est donc égale à la somme des rayons des deux cercles.

On construit ensuite le rectangle ABC_2D illustré dans le diagramme. Soit r le rayon du cercle de centre C_1. Alors $C_1C_2=r+9$, $C_1C_3=r+4$ et $C_2C_3=13$.



On peut ensuite représenter certaines longueurs comme dans le diagramme en comparant les rayons des cercles. Par exemple, la longueur C_1D est égale au rayon du grand cercle moins le rayon du cercle de centre C_2. Donc $C_1D = r - 9$.



Un raisonnement semblable donne $C_1A = r - 4$ et $BC_2 = 2r - 13$.
Puisque les triangles suivants sont rectangles, on utilise le théorème de Pythagore.
Dans le triangle AC_3C_1 :

$$\begin{aligned}(C_3A)^2 &= (r+4)^2 - (r-4)^2 \\ &= 16r \\ C_3A &= 4\sqrt{r}.\end{aligned}$$

Dans le triangle DC_1C_2 :

$$\begin{aligned}(DC_2)^2 &= (r+9)^2 - (r-9)^2 \\ &= 36r \\ DC_2 &= 6\sqrt{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}BC_3 &= DC_2 - C_3A \\ &= 2\sqrt{r}\end{aligned}$$

Dans le triangle BC_3C_2 :

$$\begin{aligned}(2r-13)^2 + \left(2\sqrt{r}\right)^2 &= 13^2 \\ 4r^2 - 52r + 169 + 4r &= 169 \\ 4r^2 - 48r &= 0 \\ 4r(r-12) &= 0\end{aligned}$$

Donc $r = 0$ ou $r = 12$.
On rejète $r = 0$ d'après l'énoncé. Donc $r = 12$. RÉPONSE : (D)

25. Sachant que n est un entier, pour combien de valeurs de n l'expression $\dfrac{2n^2 - 10n - 4}{n^2 - 4n + 3}$ donnera-t-elle un entier?

(**A**) 9 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution
On divise d'abord $2n^2 - 10n - 4$ par $n^2 - 4n + 3$.

$$\begin{array}{r|l} 2n^2 - 10n - 4 & n^2 - 4n + 3 \\ \cline{2-2} \underline{2n^2 - 8n + 6} & 2 \\ -2n - 10 & \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 2 \\ n^2 - 4n + 3\overline{)2n^2 - 10n - 4} \\ \underline{2n^2 - 8n + 6} \\ -2n - 10 \end{array}$$

On peut donc écrire l'expression donnée sous la forme

$$\frac{2n^2-10n-4}{n^2-4n+3}=2+\frac{-2n-10}{n^2-4n+3}=2-\frac{2n+10}{n^2-4n+3}.$$

Il faut donc déterminer le nombre de valeurs de n pour lesquelles l'expression $\frac{2n+10}{n^2-4n+3}$ donnera un entier.

Pour que cette expression donne un entier, il faut que $|n^2-4n+3|\le|2n+10|$ et que $n^2-4n+3\neq 0$.

Puisque $n^2-4n+3=(n-1)(n-3)$, la seule valeur négative de cette expression est -1, lorsque $n=2$.

Il faut donc que $n^2-4n+3\le|2n+10|$, $n\neq 1$, $n\neq 3$.

On considère trois cas :

1er cas

Si $n<-5$, il faut que $n^2-4n+3\le-(2n+10)$.

$$n^2-2n+13\le 0$$

Cette inéquation n'admet aucune solution, puisque son discriminant est négatif.

2e cas

Si $n=-5$, l'expression rationnelle $\frac{2n+10}{n^2-4n+3}$ sera égale à 0, ce qui est un entier.

3e cas

Si $n>-5$, $n\neq 1$, $n\neq 3$, il faut que $n^2-4n+3\le 2n+10$.

$$n^2-6n-7\le 0$$
$$(n+1)(n-7)\le 0$$
$$-1\le n\le 7$$

Il suffit donc de vérifier les valeurs entières de n telles que $-1\le n\le 7$, $n\neq 1$, $n\neq 3$. Le tableau contient aussi la valeur de l'expression rationnelle pour $n=-5$.

n	-5	-1	0	2	4	5	6	7
$\frac{2n+10}{(n-3)(n-1)}$	0	$+1$	$\frac{10}{3}$	-14	6	$\frac{5}{2}$	$\frac{22}{15}$	1

Il y a donc cinq valeurs acceptables de *n*. RÉPONSE : (E)

35e Anniversaire 1963 – 1998

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1998 Solutions
Concours Fermat (11e - Sec. V)

BANQUE NATIONALE DU CANADA

PARTIE A :

1. La valeur de $\frac{1+2+3+4+5}{2+4+6+8+10}$ est :

(**A**) $\frac{1}{3}$ (**B**) 2,5 (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) $\frac{11}{26}$ (**E**) $\frac{3}{8}$

Solution 1

$$\begin{aligned}\frac{1+2+3+4+5}{2+4+6+8+10} &= \frac{15}{30}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

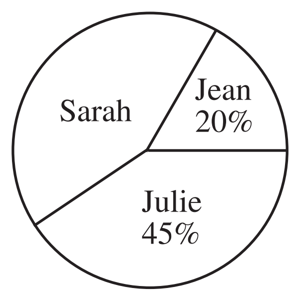
Solution 2

$$\begin{aligned}\frac{1+2+3+4+5}{2+4+6+8+10} &= \frac{(1+2+3+4+5)}{2(1+2+3+4+5)}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

RÉPONSE : (C)

2. Le diagramme circulaire indique les pourcentages des 1000 votes reçus par les candidats lors d'une élection à l'école. Combien de votes Sarah a-t-elle reçus?

(**A**) 550 (**B**) 350 (**C**) 330
(**D**) 450 (**E**) 935



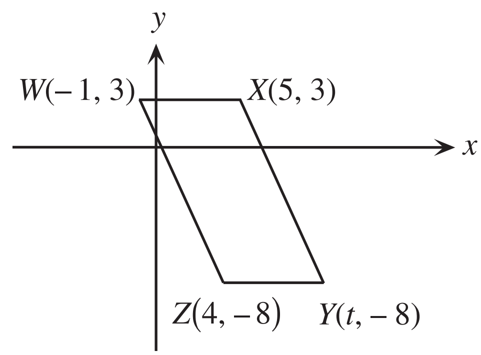
Solution

Le pourcentage des votes reçus par Sarah est égal à $100-(20+45)$, c'est-à-dire à 35. Or 35 % de 1000 est égal à $0,35(1000)$, c'est-à-dire à 350. Sarah a reçu 350 votes.

RÉPONSE : (B)

3. Si $WXYZ$ est un parallélogramme, alors t est égal à :

(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10
(**D**) 11 (**E**) 12



Solution
Puisque $WXYZ$ est un parallélogramme, ses côtés opposés sont de la même longueur.
La longueur du côté WX est égale à $5-(-1)$, c'est-à-dire 6.
Puisque $WX = ZY$, alors $t - 4 = 6$, d'où $t = 10$. RÉPONSE : (C)

4. Le produit de deux entiers positifs, p et q, est égal à 100. Quelle est la plus grande valeur possible de $p+q$?

(**A**) 52 (**B**) 101 (**C**) 20 (**D**) 29 (**E**) 25

Solution
Les paires d'entiers positifs dont le produit est égal à 100 sont : 1 et 100, 2 et 50, 4 et 25, 5 et 20, 10 et 10. La paire 1 et 100 donne la plus grande somme. La plus grande valeur possible de $p+q$ est 101. RÉPONSE : (B)

5. On définit une nouvelle opération $\otimes$, entre deux nombres p et q, comme suit : $p \otimes q = p^2 - 2q$. Quelle est la valeur de $7 \otimes 3$?

(**A**) 43 (**B**) 8 (**C**) 141 (**D**) 36 (**E**) 26

Solution
D'après la définition de la nouvelle opération $\otimes$, on a :

$$\begin{aligned} 7 \otimes 3 &= 7^2 - 2(3) \\ &= 49 - 6 \\ &= 43 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

6. La valeur de $\frac{1}{3}$ de 6^{30} est :

(**A**) 6^{10} (**B**) 2^{30} (**C**) 2^{10} (**D**) 2×6^{29} (**E**) 2×6^{10}

Solution

$$\frac{1}{3}\times 6^{30} = \frac{1}{3}\times 6\times 6^{29}$$
$$= 2\times 6^{29}$$

RÉPONSE : (D)

7. La moyenne d'une liste de 10 nombres est 0. Si on ajoute les nombres 72 et -12 à la liste, la nouvelle moyenne sera égale à :

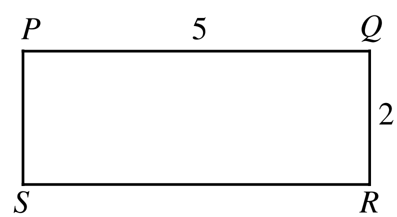
(**A**) 30 (**B**) 6 (**C**) 0 (**D**) 60 (**E**) 5

Solution

Puisque la moyenne des 10 nombres est 0, la somme de ces nombres est égale à 10×0 ou 0. Lorsqu'on ajoute les nombres 72 et –12 à la liste, la somme des 12 nombres est égale à $0+72+(-12)$, c'est-à-dire à 60.

La nouvelle moyenne est donc égale à $60 \div 12$, c'est-à-dire à 5. RÉPONSE : (E)

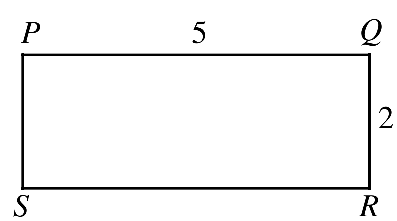
8. Le diagramme illustre une table de billard de forme rectangulaire. La table a une longueur de 5 unités et une largeur de 2 unités. À partir du point *P*, on fait rouler une boule à un angle de $45°$ par rapport à PQ. La boule ira rebondir sur SR. La boule rebondit plusieurs fois, sur divers côtés, à un angle de $45°$, jusqu'à ce qu'elle arrive au point *S*. Combien de fois la boule rebondit-elle avant d'arriver à *S*?



(**A**) 9 (**B**) 8 (**C**) 7
(**D**) 5 (**E**) 4

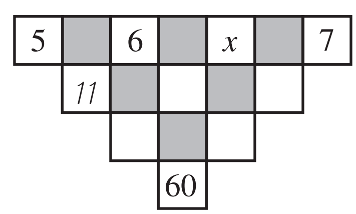
Solution

Puisque la balle rebondit toujours à un angle de 45°, son trajet forme des triangles rectangles isocèles, comme dans le diagramme. La balle part du point *P*, puis elle rebondit aux points *A*, *B*, *C*, *D* et *E* avant d'arriver au point *S*.
Elle rebondit donc 5 fois.



RÉPONSE : (D)

9. Un nombre dans une case blanche est obtenu en additionnant les nombres des deux cases blanches de la rangée précédente qui sont tout près. (Le '11' a été obtenu de cette façon.) La valeur de *x* est :



(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 9
(**D**) 15 (**E**) 10

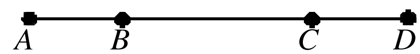
Solution

De gauche à droite, les trois nombres des cases blanches de la deuxième rangée sont 11, $6+x$ et $x+7$. De gauche à droite, les deux nombres des cases blanches de la troisième rangée sont $11+(6+x)$ et $(6+x)+(x+7)$, c'est-à-dire $17+x$ et $2x+13$. Le nombre de la quatrième rangée est $(17+x)+(2x+13)$, c'est-à-dire $3x+30$. Donc :

$$\begin{aligned} 3x+30 &= 60 \\ 3x &= 30 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (E)

10. Le diagramme montre quatre points sur un segment de droite. Si $AB:BC=1:2$ et $BC:CD=8:5$, alors $AB:BD$ est égal à :



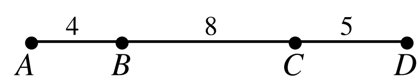
(**A**) $4:13$ (**B**) $1:13$ (**C**) $1:7$
(**D**) $3:13$ (**E**) $4:17$

Solution

Pour comparer les rapports, il faut écrire $AB:BC=1:2$ sous la forme $AB:BC=4:8$, de manière que les deux rapports, $AB:BC=4:8$ et $BC:CD=8:5$, indiquent que $BC=8$ unités.

On peut donc écrire $AB:BC:CD=4:8:5$.

Comme dans le diagramme ci-contre, on a $AB=4$ unités, $BC=8$ unités et $CD=5$ unités.



Donc $AB:BD=4:13$.

RÉPONSE : (A)

PARTIE B :

11. Si x et y sont des entiers positifs, combien de solutions (x, y) l'équation $3x+y=100$ admet-elle?

(**A**) 33 (**B**) 35 (**C**) 100 (**D**) 101 (**E**) 97

Solution

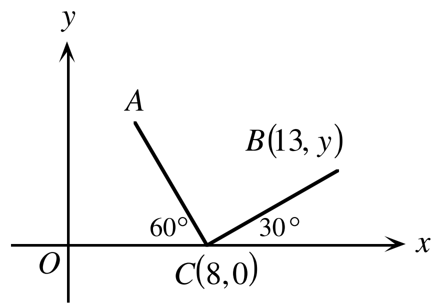
On récrit l'équation sous la forme $x=\dfrac{100-y}{3}$. Puisque x doit être un entier positif, $100-y$ doit être divisible par 3. Puisque y doit aussi être un entier positif, ses seules valeurs possibles sont 1, 4, 7, 10, 13, …, 94 et 97. Il y a donc 33 valeurs possibles de y. L'équation $3x+y=100$ admet donc 33 solutions.

RÉPONSE : (A)

12. Dans le diagramme, la valeur de y est :

(**A**) $\frac{13}{2\sqrt{3}}$ (**B**) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ (**C**) 2

(**D**) 12 (**E**) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

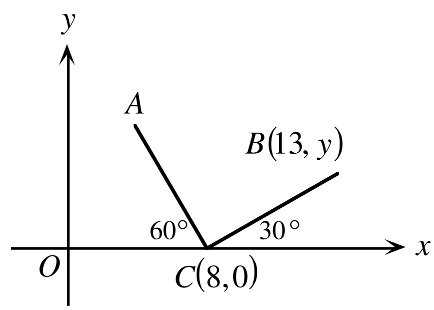


Solution 1

Soit le point $D(13, 0)$. Le triangle BDC est rectangle.

La pente du segment AC est égale à $\frac{4\sqrt{3}-0}{4-8}$, c'est-à-dire $-\sqrt{3}$. Puisque $\angle ACB = 90°$, AC est perpendiculaire au segment CB et celui-ci a donc une pente égale à $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

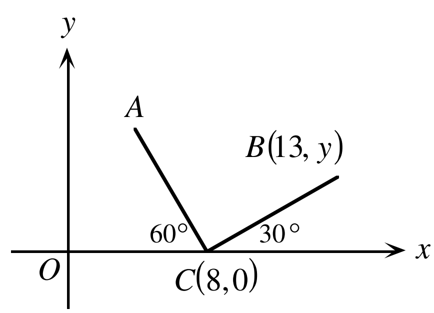
On a donc $\frac{y-0}{13-8} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $y = \frac{5}{\sqrt{3}}$.



Solution 2

Soit le point $D(13, 0)$. Le triangle BDC est rectangle. On a donc $BD = y$ et $CD = 5$. Puisque le triangle BDC est un triangle $30° - 60° - 90°$, les longueurs de ses côtés sont dans le rapport $1 : \sqrt{3} : 2$. Donc :

$$\frac{BD}{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{y}{5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$y = \frac{5}{\sqrt{3}}$$



RÉPONSE : (B)

13. On forme des entiers de trois chiffres en n'utilisant que les chiffres 1 et/ou 2. La somme de tous les entiers que l'on peut former est égale à :

(**A**) 1332 (**B**) 333 (**C**) 999 (**D**) 666 (**E**) 1665

Solution

Seuls les nombres suivants peuvent être formés : 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221 et 222.
La somme de ces nombres est égale à 1332. RÉPONSE : (A)

14. Les droites l_1, l_2 et l_3 ont pour pentes respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. Les trois droites ont la même ordonnée à l'origine. Si la somme des trois abscisses à l'origine est égale à 36, alors l'ordonnée à l'origine est :

(**A**) $\frac{-13}{12}$ (**B**) $\frac{-12}{13}$ (**C**) -4 (**D**) 4 (**E**) -9

Solution

Soit b l'ordonnée à l'origine commune des trois droites. La première droite, l_1, a pour équation $y=\frac{1}{2}x+b$. Pour déterminer son abscisse à l'origine, posons $y=0$.

$$0=\frac{1}{2}x+b$$
$$x=-2b$$

Son abscisse à l'origine est égale à $-2b$.

De même, la droite l_2 a pour équation $y=\frac{1}{3}x+b$ et pour abscisse à l'origine $-3b$.

La droite l_3 a pour équation $y=\frac{1}{4}x+b$ et pour abscisse à l'origine $-4b$.

Puisque la somme des abscisses à l'origine est égale à 36, on a :

$$-2b-3b-4b=36$$
$$-9b=36$$
$$b=-4$$

L'ordonnée à l'origine est égale à -4. RÉPONSE : (C)

15. Si $-2\le x\le 5$, $-3\le y\le 7$, $4\le z\le 8$ et $w=xy-z$, alors la plus petite valeur que w puisse prendre est :

(**A**) -14 (**B**) -18 (**C**) -19 (**D**) -22 (**E**) -23

Solution

Puisque $w=xy-z$, on obtient la plus petite valeur de w en choisissant la plus petite valeur possible du produit xy et en soustrayant la plus grande valeur possible de z.

Puisque x et y peuvent prendre des valeurs positives et négatives, la plus petite valeur du produit xy sera négative. L'une des variables x et y prendra une valeur positive, tandis que l'autre prendra une valeur négative. On obtient le plus petit produit possible, -15, avec $x=5$ et $y=-3$.

On soustrait alors $z=8$ pour obtenir la plus petite valeur possible de w, soit $w=-15-8$ ou $w=-23$. RÉPONSE : (E)

16. Si le nombre $N=\left(7^{p+4}\right)\left(5^q\right)\left(2^3\right)$ est un cube parfait, p et q étant des entiers positifs, la plus petite valeur possible de $p+q$ est :

(**A**) 5 (**B**) 2 (**C**) 8 (**D**) 6 (**E**) 12

Solution

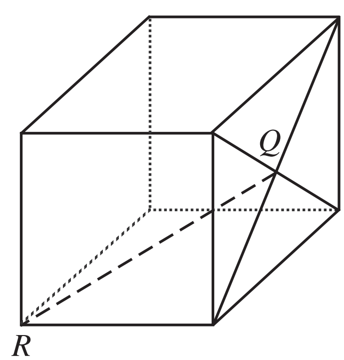
Pour que N soit un cube parfait, il faut que chacun de ses facteurs premiers ait pour exposant un multiple de 3. La plus petite valeur possible de p est 2 et la plus petite valeur possible de q est 3. La plus petite valeur possible de $p+q$ est 5. RÉPONSE : (A)

17. On utilise seulement les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 pour former une suite de nombres comme suit : un 1, deux 2, trois 3, quatre 4, cinq 5, six 1, sept 2, ainsi de suite.
Voici le début de la suite : 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, ...
Le 100e nombre de la suite est :
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution
Le nombre total de nombres dans les n premiers groupes de la suite est égal à $1+2+3+...+n$. Pour déterminer le 100e nombre de la suite, on doit d'abord déterminer la valeur de n pour laquelle la somme est près de 100.
Or $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Cette formule nous permet d'obtenir rapidement, par tâtonnement, $1+2+3+...+13=91$ et $1+2+3+...+13+14=105$.
Le 100e nombre de la suite est donc situé dans le 14e groupe. Il s'agit donc d'un 4.

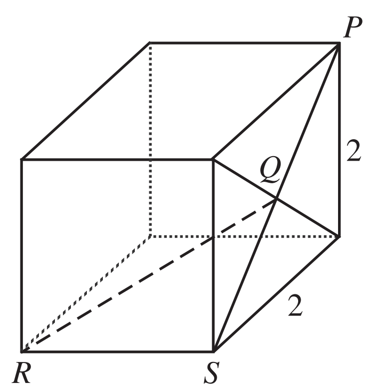
RÉPONSE : (D)

18. Les arêtes d'un cube ont une longueur de 2 unités. Le point Q est le point d'intersection des diagonales d'une des faces. La longueur du segment QR est égale à :
(**A**) 2 (**B**) $\sqrt{8}$ (**C**) $\sqrt{5}$
(**D**) $\sqrt{12}$ (**E**) $\sqrt{6}$



Solution
On considère les points P et S illustrés dans le diagramme. Sachant que les arêtes ont une longueur de 2 unités, on utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur de la diagonale PS.

$$PS^2=2^2+2^2$$
$$PS^2=8$$
$$PS=2\sqrt{2}$$



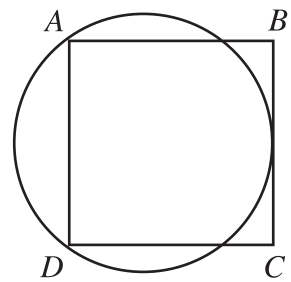
Puisque Q est le milieu du segment PS, alors $QS=\sqrt{2}$.
Puisqu'il s'agit d'un cube, le triangle QRS est rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

$$QR^2=2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$QR^2=6$$
$$QR=\sqrt{6}$$

RÉPONSE : (E)

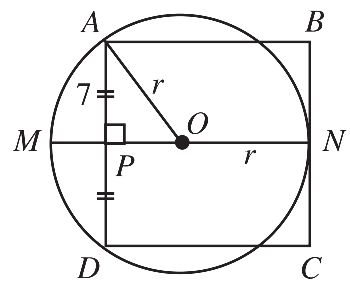
19. Chaque côté d'un carré $ABCD$ a une longueur de 14. On trace un cercle, passant aux points A et D, de manière qu'il soit tangent au côté BC. Quel est le rayon du cercle?

(**A**) 8,5 (**B**) 8,75 (**C**) 9
(**D**) 9,25 (**E**) 9,5



Solution

Soit r le rayon du cercle et O son centre. Soit MN le diamètre qui coupe le côté AD perpendiculairement en son milieu P. On joint O et A.



Puisque P est le milieu de AD, on a $AP = 7$.
Puisque $ON = r$, alors :

$$\begin{aligned} PO &= PN - ON \\ &= 14 - r \end{aligned}$$

Le triangle APO est rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} r^2 &= 7^2 + (14 - r)^2 \\ r^2 &= 49 + 196 - 28r + r^2 \\ 28r &= 245 \\ r &= 8,75 \end{aligned}$$

Le cercle a donc un rayon de 8,75. RÉPONSE : (B)

20. Un jeu compte 100 cartes numérotées de 1 à 100. Chaque carte a une face jaune et une face rouge, le même numéro paraissant sur chaque face. Jérôme place toutes les cartes sur une table, de manière à montrer les faces rouges. Il retourne d'abord chaque carte portant un nombre divisible par 2. En examinant ensuite toutes les cartes, il retourne chaque carte portant un numéro divisible par 3. Combien de cartes montrent une face rouge à la fin?

(**A**) 83 (**B**) 17 (**C**) 66 (**D**) 50 (**E**) 49

Solution

Au début, toutes les cartes montrent une face rouge. Après avoir retourné chaque carte portant un nombre divisible par 2, seules les 50 cartes portant un nombre impair montrent une face rouge.
La deuxième fois, il retourne chaque carte portant un numéro divisible par 3. Les cartes portant un numéro impair divisible par 3 passeront alors du rouge au jaune. Il y a 17 tels numéros, soit 3, 9, 15, 21, …, 93 et 99. De plus, les cartes portant un numéro pair divisible par 3 passeront du jaune au rouge. Il y a 16 tels numéros, soit 6, 12, 18, 24, …, 90 et 96.
À la fin, les cartes montrant une face rouge sont les 50 cartes portant un numéro impair, moins les 17 cartes portant un numéro impair divisible par 3, plus les 16 cartes portant un numéro pair divisible par 3.
Le nombre de telles cartes est égal à $50 - 17 + 16$, c'est-à-dire 49. RÉPONSE : (E)

PARTIE C :

21. On multiplie les nombres 123 456 789 et 999 999 999. Combien des chiffres de la réponse sont des 9?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 17

Solution

On récrit la multiplication sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}(123\,456\,789)(999\,999\,999) &= (123\,456\,789)(10^9 - 1)\\ &= (123\,456\,789)\times 10^9 - (123\,456\,789)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{array}{r} 123\,456\,789\,000\,000\,000 \\ -\qquad\qquad 123\,456\,789 \\ \hline 123\,456\,788\,876\,543\,211 \end{array}$$

Il n'y a aucun chiffre 9 dans la réponse. RÉPONSE : (A)

22. On considère quatre entiers positifs différents, a, b, c et N, tels que $N = 5a + 3b + 5c$. De plus, $N = 4a + 5b + 4c$ et N est un nombre entre 131 et 150. Quelle est la valeur de $a + b + c$?

(**A**) 13 (**B**) 17 (**C**) 22 (**D**) 33 (**E**) 36

Solution

On a $N = 5a + 3b + 5c$ (1) et $N = 4a + 5b + 4c$ (2).

On multiplie chaque membre de l'équation (1) par 4 pour obtenir $4N = 20a + 12b + 20c$ (3).

On multiplie chaque membre de l'équation (2) par 5 pour obtenir $5N = 20a + 25b + 20c$ (4).

On soustrait l'équation (3) de l'équation (4), membre par membre, pour obtenir $N = 13b$.

Puisque N et b sont des entiers positifs, N doit être un multiple de 13.

Puisque $131 < N < 150$, N doit être égal à 143. Donc $143 = 13b$, d'où $b = 11$.

On reporte $N = 143$ et $b = 11$ dans l'équation (1) pour obtenir :

$$\begin{aligned}143 &= 5a + 3(11) + 5c\\ 110 &= 5a + 5c\\ 22 &= a + c\end{aligned}$$

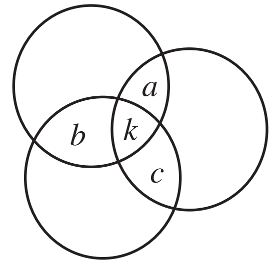
Donc la valeur de $a + b + c$ est égale à $11 + 22$, c'est-à-dire 33. RÉPONSE : (D)

23. Trois tapis ont une aire totale de $200\ \text{m}^2$. En les superposant partiellement, on recouvre une surface de $140\ \text{m}^2$. La partie recouverte par exactement deux tapis a une aire de $24\ \text{m}^2$. Quelle est l'aire de la surface recouverte par trois tapis?

(**A**) $12\ \text{m}^2$ (**B**) $18\ \text{m}^2$ (**C**) $24\ \text{m}^2$ (**D**) $36\ \text{m}^2$ (**E**) $42\ \text{m}^2$

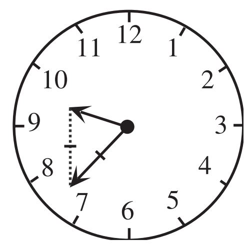
Solution

On illustre les trois tapis comme dans le diagramme. $a+b+c$ représente l'aire de la surface recouverte par exactement deux tapis et k représente l'aire de la surface recouverte par trois tapis.
On donne $a+b+c=24$ (1).



Puisque les trois tapis ont une aire totale de 200 m^2 et puisqu'ils recouvrent une surface de 140 m^2 lorsqu'ils sont partiellement superposés, il y a alors une surface de 60 m^2 qui est « gaspillée » par les deux ou trois couches de tapis superposés.
Donc $a+b+c+2k=60$ (2). On soustrait l'équation (1) de l'équation (2), membre par membre, pour obtenir $2k=36$, d'où $k=18$.
L'aire de la surface recouverte par trois tapis est donc égale à 18 m^2. RÉPONSE : (B)

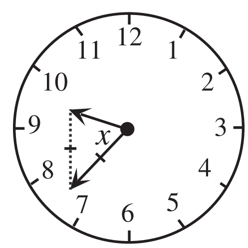
24. À un moment entre 9 h 30 et 10 h, le triangle formé par les aiguilles d'une montre est isocèle (voir le diagramme). Si chacun des angles égaux du triangle est deux fois plus grand que le troisième angle, quelle heure est-il?



(**A**) 9 h 35 (**B**) 9 h 36 (**C**) 9 h 37
(**D**) 9 h 38 (**E**) 9 h 39

Solution

Soit x la mesure de l'angle, en degrés, entre les deux aiguilles. Le triangle illustré est isocèle et chacun des angles égaux du triangle est deux fois plus grand que le troisième angle. Donc :



$$\begin{aligned} x+x+\frac{1}{2}x &= 180 \\ \frac{5}{2}x &= 180 \\ x &= 72 \end{aligned}$$

Puisque $360^\circ \div 60 = 6^\circ$, à chaque minute la grande aiguille balaie un angle de 6°.
Puisque $\left(360^\circ \div 12\right) \div 60 = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$, à chaque minute la petite aiguille balaie un angle de $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$.

À 9 h il y a un angle de 270° entre les deux aiguilles. Au moment dont on parle dans l'énoncé, il y a un angle de 72° entre les deux aiguilles. À chaque minute, la grande aiguille gagne $\left(5\frac{1}{2}\right)^\circ$ sur la petite aiguille. Puisque $\dfrac{270-72}{5\frac{1}{2}}=36$, la position du diagramme est atteinte 36 minutes après 9 h. Il est donc 9 h 36. RÉPONSE : (B)

25. Pour chaque valeur de x, on définit $f(x)$ comme étant la valeur minimale des trois expressions $2x+2$, $\frac{1}{2}x+1$ et $-\frac{3}{4}x+7$. Quelle est la valeur maximale de $f(x)$?

(**A**) $\frac{2}{3}$ (**B**) 2 (**C**) $\frac{17}{5}$ (**D**) $\frac{62}{11}$ (**E**) 7

Solution

Les trois expressions, $2x+2$, $\frac{1}{2}x+1$ et $-\frac{3}{4}x+7$, peuvent définir les droites respectives d'équations $y=2x+2$ (1), $y=\frac{1}{2}x+1$ (2) et $y=-\frac{3}{4}x+7$ (3). Chaque expression représente alors l'ordonnée d'un point sur la droite correspondante.

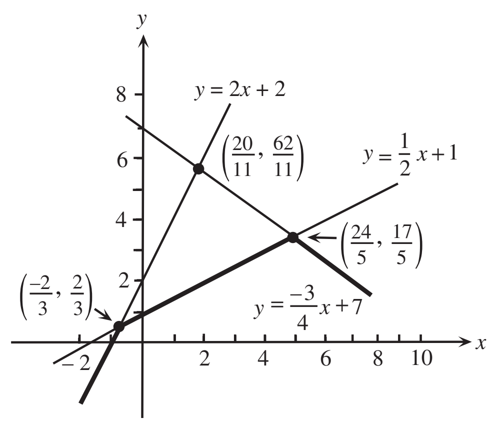
On trace une esquisse des droites et on détermine les points d'intersection.

Pour déterminer le point d'intersection des droites (1) et (2), posons $2x+2=\frac{1}{2}x+1$. Donc :

$$\frac{3}{2}x=-1$$

$$x=-\frac{2}{3}$$

On reporte cette valeur dans l'équation (1) pour obtenir :



$$y=2\left(-\frac{2}{3}\right)+2$$

$$y=\frac{2}{3}$$

Le point d'intersection des droites (1) et (2) a pour coordonnées $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

De même, le point d'intersection des droites (1) et (3) a pour coordonnées $\left(\frac{20}{11},\frac{62}{11}\right)$ et le point d'intersection des droites (2) et (3) a pour coordonnées $\left(\frac{24}{5},\frac{17}{5}\right)$.

Pour chaque valeur de x, la valeur minimale des trois expressions $2x+2$, $\frac{1}{2}x+1$ et $-\frac{3}{4}x+7$ est représentée par la plus petite des ordonnées des trois points sur les droites correspondant à cette valeur de x. Les points choisis pour cette ordonnée minimale sont illustrés par un trait plus épais. La valeur maximale de ces ordonnées est $\frac{17}{5}$. RÉPONSE : (C)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1997 Solutions et Concours Fermat (11^{e} - Sec. IV)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

PARTIE A

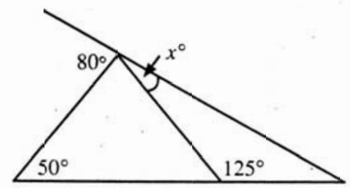
1. La valeur de $(1)^{10}+(-1)^8+(-1)^7+(1)^5$ est :
(A) 0 **(B)** 4 **(C)** 1 **(D)** 16 **(E)** 2

Solution

$$(1)^{10}+(-1)^8+(-1)^7+(1)^5 = 1+1-1+1$$
$$= 2$$

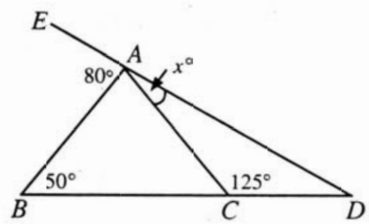
RÉPONSE : (E)

2. La valeur de x est :
(A) 15 **(B)** 20 **(C)** 25
(D) 30 **(E)** 35



Solution

Puisque B, C et D sont alignés,
$\angle BCA = 180° - 125°$
$= 55°.$
Dans le triangle ABC,
$\angle BAC = 180° - (50° + 55°)$
$= 75°.$
Puisque E, A et D sont alignés,
$x° = 180° - (80° + 75°)$
$= 25°.$
La valeur de x est 25.



RÉPONSE : (C)

3. Le plus grand nombre de lundis qu'il pourrait y avoir dans une période de 45 jours consécutifs est :
(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9

Solution

Si le premier jour est un lundi, alors ce sera aussi lundi 7 jours plus tard. Les lundis tomberont donc les jours suivants : 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43.
Dans une période de 45 jours consécutifs, il peut y avoir au plus sept lundis.

RÉPONSE : (C)

4. Le produit d'un nombre positif, de son carré et de son inverse est égal à $\frac{100}{81}$. Quel est le nombre?

(A) $\frac{81}{100}$ **(B)** $\frac{100}{81}$ **(C)** $\frac{9}{10}$ **(D)** $\frac{10}{9}$ **(E)** $\frac{10\,000}{6561}$

Solution

Soit x le nombre.

Donc $x\left(x^2\right)\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{100}{81}$.

$$x^2=\frac{100}{81}$$
$$x=\pm\frac{10}{9}$$

Puisque x est positif, $x=\frac{10}{9}$. RÉPONSE : (D)

5. La somme de sept entiers positifs consécutifs est égale à 77. Le plus grand de ces entiers est :
(A) 8 **(B)** 11 **(C)** 14 **(D)** 15 **(E)** 17

Solution

Puisque la somme des sept entiers est égale à 77, leur moyenne est égale à $\frac{77}{7}=11$.

Puisqu'il y a un nombre impair d'entiers consécutifs, le nombre du milieu est 11 et le plus grand est 14. RÉPONSE : (C)

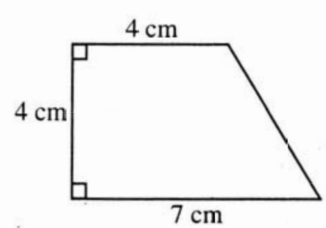
6. Sur une certaine calculatrice, le nombre 2×10^3 est représenté par 2E3. Comment le produit de 2E3 et de 3E2 serait-il représenté sur cette calculatrice?
(A) $6E6$ **(B)** $6E5$ **(C)** $5E5$ **(D)** $2.3E3$ **(E)** $5E6$

Solution

Le produit de $2E3$ et de $3E2$ est $\left(2\times10^3\right)\left(3\times10^2\right)=6\times10^5$. Il est représenté par $6E5$.

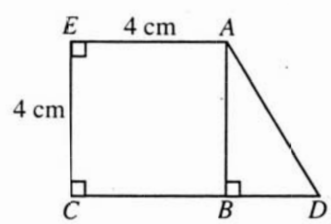
RÉPONSE : (B)

7. Le périmètre de la figure est égal à :
(A) 19 cm **(B)** 22 cm **(C)** 21 cm
(D) 15 cm **(E)** 20 cm



Solution

Au point A, on abaisse une perpendiculaire AB à CD.



Puisque $ABCE$ est un carré, chacun de ses côtés mesure 4 cm. Donc $BD=3$ cm.

D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle ABD : $AD^2=4^2+3^2$

$$AD=5$$

Le périmètre de la figure est égal à $4+4+5+7=20$ cm. RÉPONSE : (E)

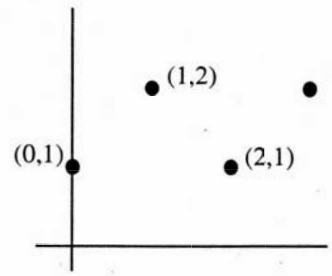
8. Trois des sommets d'un parallélogramme sont situés aux points $(0, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 1)$. L'aire du parallélogramme est égale à :

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** $2\sqrt{2}$ **(E)** 4

Solution

Il y a trois positions possibles pour le quatrième sommet. Cependant chaque parallélogramme qui en résulte a la même aire.

Si on choisit le point $(3, 2)$ pour le sommet, on obtient un parallélogramme avec une base de 2 et une hauteur de 1. Son aire est égale à $(2)(1) = 2$.



RÉPONSE : (B)

9. Si $10 \leq x \leq 20$ et $40 \leq y \leq 60$, la plus grande valeur possible de $\frac{x^2}{2y}$ est :

(A) 5 **(B)** $\frac{5}{6}$ **(C)** $\frac{10}{3}$ **(D)** $\frac{5}{4}$ **(E)** 10

Solution

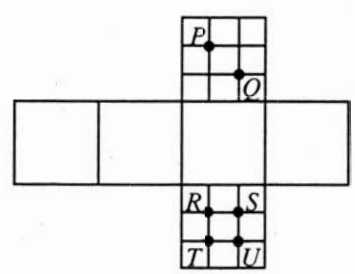
Pour maximiser $\frac{x^2}{2y}$, il faut maximiser le numérateur et minimiser le dénominateur.

Puisque $10 \leq x \leq 20$, la plus grande valeur de x^2 est $(20)^2 = 400$. Puisque $40 \leq y \leq 60$, la plus petite valeur de $2y$ est $2(40) = 80$.

La plus grande valeur possible de $\frac{x^2}{2y}$ est $\frac{400}{80} = 5$. RÉPONSE : (A)

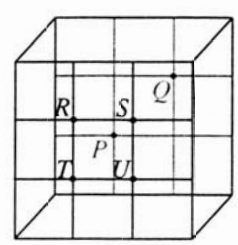
10. Sur un cube, on dit que deux points sont *diamétralement opposés* si la droite qui contient les deux points contient aussi le centre du cube. Le diagramme ci-contre illustre une figure qui peut être pliée pour former un cube. Quel point serait alors diamétralement opposé au point P?

(A) Q **(B)** R **(C)** S
(D) T **(E)** U



Solution

Le diagramme indique la position des points après que l'on a formé le cube. Le point S est diamétralement opposé au point P.



PARTIE B

11. La moyenne de cinq entiers est égale à 69. L'entier du milieu (la médiane) est égal à 83. Le nombre qui paraît le plus souvent (le mode) est 85. L'étendue de ces cinq nombres est égale à 70. Quel est le deuxième plus petit de ces cinq entiers?

(A) 77 **(B)** 15 **(C)** 50 **(D)** 55 **(E)** 49

Solution

Puisque l'entier du milieu (la médiane) est égal à 83, les deux entiers les plus grands doivent tous deux être 85 (le mode). Puisque l'étendue de ces cinq nombres est égale à 70, le plus petit des entiers doit être égal à $85 - 70 = 15$.

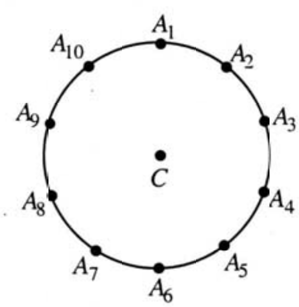
La somme des cinq entiers est égale à $5(69) = 345$.

Le deuxième plus petit des cinq entiers est donc égal à $345 - (85 + 85 + 83 + 15) = 77$.

RÉPONSE : (A)

12. Dix points A_1, A_2, A_3, …, A_{10} sont placés sur un cercle à égales distances. Si C est le centre du cercle, quelle est la mesure, en degrés, de l'angle A_1A_5C?

(A) 18 **(B)** 36 **(C)** 10 **(D)** 72 **(E)** 144



Solution

On trace les segments A_1A_5, A_1C et A_5C.

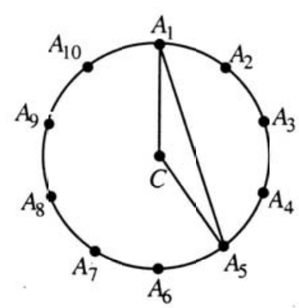
Puisque les points A_1, A_2, A_3, …, A_{10} sont placés à égales distances, ils forment des angles au centre égaux, mesurant chacun $\frac{360°}{10} = 36°$.

Donc $\angle A_1CA_5 = 4(36°)$
$= 144°$.

Puisque $A_1C = A_5C$, alors le triangle A_1CA_5 est isocèle.

Donc $\angle A_1A_5C = \frac{(180° - 144°)}{2}$
$= 18°$.

L'angle A_1A_5C mesure donc 18 degrés.



RÉPONSE : (A)

13. En changeant l'ordre des chiffres 1, 2, 3 et 4, on peut former vingt-quatre nombres différents de quatre chiffres. Si on écrit ces vingt-quatre nombres en ordre, du plus petit au plus grand, dans quelle position le nombre 3142 se trouve-t-il?

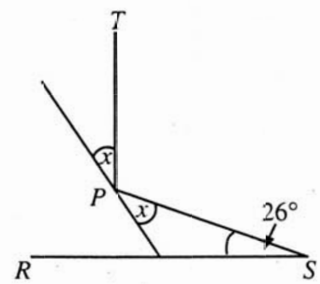
(A) 13^e **(B)** 14^e **(C)** 15^e **(D)** 16^e **(E)** 17^e

Solution

Les douze premiers nombres commencent par un 1 ou un 2. Les six nombres suivants commencent par un 3. Ces six nombres, dans l'ordre, sont 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421.
Le nombre 3142 est en 14^e position. RÉPONSE : (B)

14. Un faisceau de lumière est projeté à partir du point S. Il est réfléchi dans un miroir au point P pour atteindre le point T de manière que PT soit perpendiculaire à RS. Alors la mesure de x est égale à :

(A) 26° (B) 13° (C) 64°
(D) 32° (E) 58°

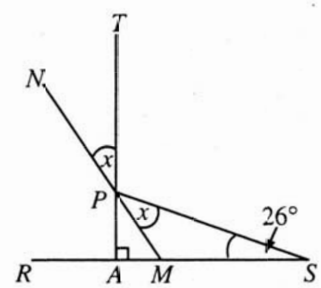


Solution

On prolonge le segment TP jusqu'au point A sur RS. Puisque TP et RS sont perpendiculaires,

alors $\angle SPA = 180° - 90° - 26°$
$= 64°$.

Soit les points M et N indiqués sur le diagramme.
Puisque les angles TPN et MPA sont opposés par le sommet, $\angle MPA = x$.
Puisque $\angle SPA = 2x$, alors $2x = 64°$, d'où $x = 32°$.
Alors la mesure de x est égale à 32°.



RÉPONSE : (D)

15. Si $x^2yz^3 = 7^3$ et $xy^2 = 7^9$, alors xyz est égal à :

(A) 7^{10} (B) 7^9 (C) 7^8 (D) 7^6 (E) 7^4

Solution

On multiplie les deux égalités, membre par membre, pour obtenir : $\left(x^2yz^3\right)\left(xy^2\right) = \left(7^3\right)\left(7^9\right)$

$$x^3y^3z^3 = 7^{12}$$

Donc $xyz = 7^4$. RÉPONSE : (E)

16. La somme des 50 premiers entiers impairs positifs est égale à 50^2. La somme des 50 premiers entiers pairs positifs est égale à :

(A) 50^2 (B) $50^2 + 1$ (C) $50^2 + 25$ (D) $50^2 + 50$ (E) $50^2 + 100$

Solution

Chacun des 50 premiers entiers pairs est 1 de plus qu'un des 50 premiers entiers impairs.
La somme des 50 premiers entiers pairs positifs est donc égale à la somme des 50 premiers entiers impairs positifs plus 50 fois le nombre 1.
La somme des 50 premiers entiers pairs positifs est égale à $50^2 + 50$. RÉPONSE: (D)

17. En 1996, la population de Sudbury a baissé de 6 %, tandis que la population de Victoria a augmenté de 14 %. À la fin de 1996, ces deux villes avaient la même population. Quel était le rapport de la population de la ville de Sudbury à la population de Victoria au début de 1996?

(A) $47:57$ **(B)** $57:47$ **(C)** $53:43$ **(D)** $53:57$ **(E)** $43:47$

Solution

Soit s la population de Sudbury au début de 1996 et v la population de Victoria au début de 1996. À la fin de 1996, la population de Sudbury est égale à $0{,}94s$, tandis que la population de Victoria est égale à $1{,}14v$. On a donc $0{,}94s = 1{,}14v \quad (1)$.

Pour obtenir $s:v$, on divise chaque membre de (1) par $0{,}94v$.

On obtient ainsi $\frac{s}{v} = \frac{1{,}14}{0{,}94}$ ou $\frac{s}{v} = \frac{57}{47}$. RÉPONSE : (B)

18. On considère l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\}$. Combien d'entiers, entre 3 et 89, ne peuvent pas être exprimés comme la somme d'exactement deux éléments de l'ensemble?

(A) 43 **(B)** 36 **(C)** 34 **(D)** 55 **(E)** 51

Solution

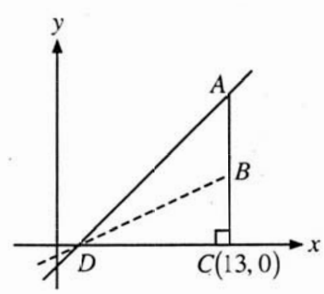
On compte d'abord le nombre d'entiers, entre 3 et 89, qui peuvent être exprimés comme la somme d'exactement deux éléments de l'ensemble. Puisque chaque élément de l'ensemble est la somme des deux éléments précédents, on peut ajouter 55 à chacun des sept premiers éléments pour former sept entiers différents, chacun inférieur à 89.

De même, on peut ajouter 34 à chacun des sept premiers éléments, on peut ajouter 21 à chacun des six premiers éléments, ainsi de suite. Le nombre d'entiers, entre 3 et 89, qui peuvent être exprimés comme la somme d'exactement deux éléments de l'ensemble est égal à $7+7+6+5+4+3+2=34$. Puisqu'il y a 85 entiers entre 3 et 89, alors il y a $85-34=51$ entiers qui ne peuvent pas être exprimés comme la somme d'exactement deux éléments de l'ensemble. RÉPONSE : (E)

19. L'équation de la droite AD est $y=\sqrt{3}(x-1)$. BD est la bissectrice de $\angle ADC$. Si les coordonnées de B sont (p, q), quelle est la valeur de q?

(A) 6 **(B)** 6.5 **(C)** $\frac{10}{\sqrt{3}}$

(D) $\frac{12}{\sqrt{3}}$ **(E)** $\frac{13}{\sqrt{3}}$

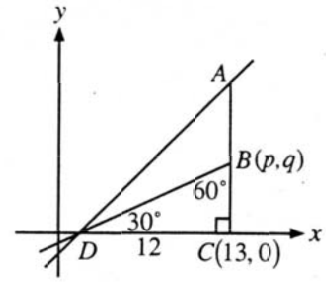


Solution

Puisque l'abscisse du point D est l'abscisse à l'origine de la droite AD, les coordonnées de D sont $(1, 0)$. Donc $DC = 12$. Puisque la pente de AD est égale à $\sqrt{3}$, alors $AC = 12\sqrt{3}$ et $\angle ADC = 60°$.

Puisque BD est la bissectrice de $\angle ADC$, alors $\angle BDC = 30°$ et le triangle DBC est un triangle $30°$ - $60°$ - $90°$. Les longueurs de ses côtés sont donc dans un rapport $1 : \sqrt{3} : 2$.

Donc $BC = \frac{12}{\sqrt{3}}$, ce qui est la valeur de q.

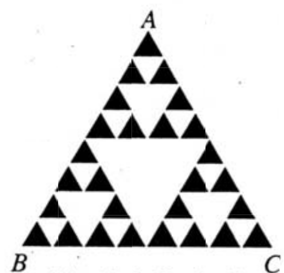


RÉPONSE : (D)

20. Tous les triangles du diagramme sont équilatéraux. Si $AB = 16$, l'aire totale de tous les triangles noirs est égale à :

(A) $37\sqrt{3}$ **(B)** $32\sqrt{3}$ **(C)** $27\sqrt{3}$

(D) $64\sqrt{3}$ **(E)** $\frac{64}{3}\sqrt{3}$

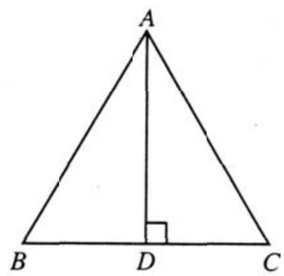


Triangle de Sierpinski

Solution

Le diagramme compte 27 triangles noirs. Si on divise le grand triangle en petits triangles, alors en comptant du bas jusqu'en haut, le nombre de petits triangles est égal à : $8 + 2(7) + 2(6) + 2(5) + 2(4) + 2(3) + 2(2) + 2(1) = 64$.

Donc $\frac{27}{64}$ du triangle ABC est colorée en noir.



On abaisse la hauteur AD. Puisque le triangle ABC est équilatéral et puisque $AB = 16$, alors $BD = DC = 8$. On utilise le théorème de Pythagore, ou le fait que le triangle ABD est un triangle $30°$ - $60°$ - $90°$ et que les longueurs de ses côtés sont dans un rapport $1 : \sqrt{3} : 2$, pour obtenir $AD = 8\sqrt{3}$.

L'aire du triangle ABC est donc égale à $\frac{1}{2}(8\sqrt{3})(16) = 64\sqrt{3}$. L'aire totale de tous les triangles noirs est donc égale à $\frac{27}{64}(64\sqrt{3}) = 27\sqrt{3}$.

RÉPONSE : (C)

PARTIE C

21. Soit a, b et c trois entiers positifs tels que $\frac{\left(\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1\right)}{\left(\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1\right)} = 11$. Le nombre de triplets (a, b, c), tels que $a + 2b + c \leq 40$, est égal à :

(A) 33 **(B)** 37 **(C)** 40 **(D)** 42 **(E)** 45

Solution

$$\frac{\left(\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1\right)}{\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1\right)}=11$$

$$\frac{abc\left(\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1\right)}{abc\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1\right)}=11$$

$$\frac{a^2b+a^2c+abc}{b^2c+ab^2+abc}=11$$

$$\frac{a(ab+ac+bc)}{b(bc+ab+ac)}=11$$

$$\frac{a}{b}=11$$

$$a=11b$$

On reporte $a=11b$ dans l'inéquation $a+2b+c\leq 40$ pour obtenir $13b+c\leq 40$.
Puisque b et c sont des entiers positifs, b ne peut prendre que les valeurs 1, 2 et 3. Puisque $a=11b$, a prend trois valeurs correspondantes.
Si $b=3$, l'inéquation $13b+c\leq 40$ devient $39+c\leq 40$, d'où $c\leq 1$.
Elle admet un triplet, $(33, 3, 1)$.
Si $b=2$, l'inéquation devient $26+c\leq 40$, d'où $c\leq 14$.
Elle admet 14 valeurs possibles de c et donc 14 triplets.
Si $b=1$, l'inéquation devient $13+c\leq 40$, d'où $c\leq 27$.
Elle admet 27 valeurs possibles de c et donc 27 triplets.
Le nombre de triplets qui vérifient les conditions données est égal à $1+14+27=42$.

RÉPONSE : (D)

22. Soit x et y des entiers et $x\geq 0$. Le nombre de couples (x, y) différents qui vérifient l'équation $2x^2-2xy+y^2=289$ est égal à :
(A) 8 **(B)** 7 **(C)** 5 **(D)** 4 **(E)** 3

Solution

On récrit l'expression $2x^2-2xy+y^2=289$ sous forme $x^2+(x-y)^2=289$. Au moyen de triplets pythagoriciens, on conclut que les valeurs possibles de x sont 0, 8, 15 et 17.
On reporte chaque valeur de x dans l'équation et on résout les équations qui en résultent. On obtient sept couples différents.

RÉPONSE : (B)

23. Si $f(x)=px+q$ et si $f\big(f\big(f(x)\big)\big)=8x+21$, p et q étant des nombres réels, alors $p+q$ est égal à :
(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 11

Solution

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(px+q) \\ &= p(px+q)+q \\ &= p^2x+pq+q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(f(f(x))) &= f(p^2x+pq+q) \\ &= p(p^2x+pq+q)+q \\ &= p^3x+p^2q+pq+q \end{aligned}$$

Puisque $f(f(f(x))) = 8x+21$, alors $8x+21 = p^3x+p^2q+pq+q$ pour toutes les valeurs de x.

Donc $p^3 = 8$, d'où $p = 2$, et $p^2q+pq+q = 21$, d'où $q = 3$.

Donc $p+q = 5$.

RÉPONSE : (C)

24. Le premier terme d'une suite de nombres est $t_1 = 5$. Les termes suivants sont définis au moyen de la formule $t_n - t_{n-1} = 2n+3$ pour $n \geq 2$. La valeur de t_{50} est :

(**A**) 2700 (**B**) 2702 (**C**) 2698 (**D**) 2704 (**E**) 2706

Solution

Il s'agit d'une série télescopique.

On reporte $n = 2, 3, 4, ..., 50$ dans la formule donnée pour obtenir :

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= 7 \\ t_3 - t_2 &= 9 \\ t_4 - t_3 &= 11 \\ &\vdots \\ t_{49} - t_{48} &= 101 \\ t_{50} - t_{49} &= 103 \end{aligned}$$

On additionne les membres gauches et les membres droits des égalités pour obtenir

$t_{50} - t_1 = 7+9+11+...+101+103$.

Le membre droit est une série arithmétique de 49 termes.

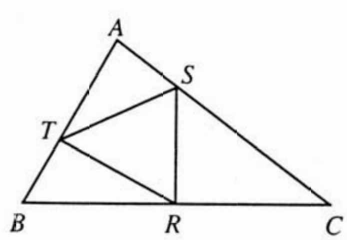
Sa somme est égale à $\frac{49(7+103)}{2} = 2695$.

Donc $t_{50} - t_1 = 2695$.

$$\begin{aligned} t_{50} - 5 &= 2695 \\ t_{50} &= 2700 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

25. Dans le triangle ABC, R est le milieu de BC, $CS = 3SA$, et $\frac{AT}{TB} = \frac{p}{q}$. Si w est l'aire du triangle CRS, x est l'aire du triangle RBT et z est l'aire du triangle ATS, et si $x^2 = wz$, alors la valeur de $\frac{p}{q}$ est égale à :

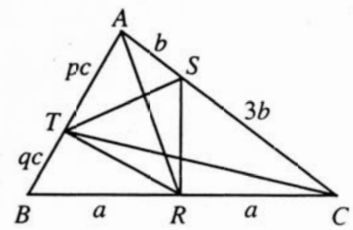


(**A**) $\frac{\sqrt{21}-3}{2}$ (**B**) $\frac{\sqrt{21}+3}{2}$ (**C**) $\frac{\sqrt{21}-3}{6}$

(**D**) $\frac{\sqrt{105}+3}{6}$ (**E**) $\frac{\sqrt{105}-3}{6}$

Solution

On joint A et R, de même que C et T. Soit a, b et c les longueurs indiquées et soit k l'aire du triangle ABC.



Puisque $CS = 3SA$, alors $\dfrac{\text{aire du triangle } CRS}{\text{aire du triangle } CRA} = \dfrac{3}{4}$.

Donc $w = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{k}{2}$ ou $w = \dfrac{3k}{8}$.

Puisque $BT : TA = q : p$, alors $\dfrac{\text{aire du triangle } RBT}{\text{aire du triangle } ABR} = \dfrac{q}{p+q}$

Donc $$x = \frac{q}{p+q} \cdot \frac{k}{2} = \frac{qk}{2(p+q)}.$$

De plus, $\dfrac{\text{aire du triangle } ATC}{\text{aire du triangle } ABC} = \dfrac{p}{p+q}$.

Donc l'aire du triangle ATC est égale à $k \cdot \dfrac{p}{p+q}$ ou $\dfrac{pk}{p+q}$.

Puisque $CS = 3SA$, alors $\dfrac{\text{aire du triangle } ATS}{\text{aire du triangle } ATC} = \dfrac{1}{4}$.

Donc $$z = \frac{1}{4} \cdot \frac{pk}{p+q} = \frac{pk}{4(p+q)}.$$

Puisque $x^2 = wz$, alors $\dfrac{q^2k^2}{4(p+q)^2} = \dfrac{3pk^2}{32(p+q)}$.

$$8q^2k^2 = 3pk^2(p+q)$$
$$8q^2 = 3p(p+q) \quad (\text{puisque } k \neq 0)$$
$$3p^2 + 3pq - 8q^2 = 0$$

On divise chaque membre de l'équation par q^2.

$$3\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 3\left(\frac{p}{q}\right) - 8 = 0$$

$$\frac{p}{q} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(3)(-8)}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{6}$$

Puisque $\dfrac{p}{q} > 0$, alors $\dfrac{p}{q} = \dfrac{\sqrt{105} - 3}{6}$.

RÉPONSE : (E)