Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^{e} année – Sec. V)

le mercredi 28 février 2024

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 29 février 2024

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 60 minutes

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Les parties A et B du concours sont composées de questions à choix multiple. Chacune de ces questions est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. La réponse juste à chaque question de la partie C est un entier de 0 à 99 inclusivement. Après avoir décidé de votre réponse, remplissez les deux cercles appropriés sur la feuille-réponse. Une réponse à un chiffre (p. ex. « 7 ») doit être codée avec un zéro non significatif (« 07 »).
8. Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C. Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée. Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
9. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
10. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
11. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $3\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\right)$?

   (A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 6

2. Si $x = 2$, quelle est la valeur de $4x^2 - 3x^2$?

   (A) 1 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 2 **(E)** 5

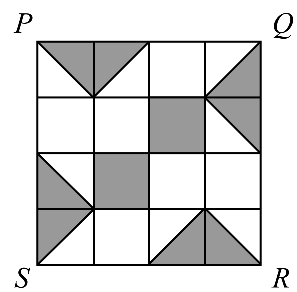
3. Combien de cubes $1 \times 1 \times 1$ faut-il pour former un cube $2 \times 2 \times 2$?

   (A) 4 **(B)** 7 **(C)** 6 **(D)** 5 **(E)** 8

4. Shuxin a initialement 10 bonbons rouges, 7 bonbons jaunes et 3 bonbons bleus. Après en avoir mangé quelques-uns, elle se retrouve avec une quantité égale de bonbons de chaque couleur. Quel est le nombre minimal de bonbons que Shuxin a pu manger ? ?

   (A) 11 **(B)** 7 **(C)** 17 **(D)** 20 **(E)** 14

5. Le carré $PQRS$ est divisé en 16 petits carrés congruents, comme dans la figure ci-contre. Quelle fraction de $PQRS$ est ombrée ?

   (A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{1}{2}$
   (D) $\frac{1}{4}$ **(E)** $\frac{3}{8}$

6. Combien y a-t-il d'entiers supérieurs à $\sqrt{15}$ et inférieurs à $\sqrt{50}$?

   (A) 3 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 5 **(E)** 2

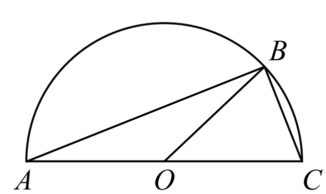
7. La droite d'équation $y = 3x + 6$ subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées. Quelle est l'abscisse à l'origine de l'image ?

   (A) 2 **(B)** -2 **(C)** 6 **(D)** -6 **(E)** $\frac{1}{2}$

8. Si $10^n = 1000^{20}$, quelle est la valeur de n ?

   (A) 1000 **(B)** 60 **(C)** 2000 **(D)** 300 **(E)** 102

9. Dans la figure ci-contre, un demi-cercle a pour centre O et pour diamètre AC. De plus, le point B est situé sur le demi-cercle de manière que $\angle BAC = 25°$. Quelle est la mesure de l'angle BOC ?

   (A) 60° **(B)** 55° **(C)** 45°
   (D) 50° **(E)** 65°

10. Dans une photographie, Aristote, David, Flora, Munirah et Pedro sont assis, dans un ordre aléatoire, sur 5 chaises qui forment une rangée. Si David est assis au milieu de la rangée, quelle est la probabilité pour que Pedro soit assis à côté de lui ?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{2}{5}$ **(E)** $\frac{3}{5}$

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Dans la Figure 1, on voit 3 lignes qui se croisent en 1 seul point d'intersection. Dans la Figure 2, on voit 3 lignes qui se croisent de manière à former 3 points d'intersection.

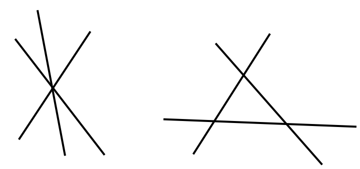


Figure 1 Figure 2

Quel est le nombre maximum de points d'intersection que peuvent former 4 lignes ?

(A) 5 **(B)** 4 **(C)** 8 **(D)** 6 **(E)** 7

12. Les nombres 5, 6, 10, 17 et 21 sont réorganisés de sorte que la somme des trois premiers nombres soit égale à celle des trois derniers. Quel nombre se trouve au milieu de ce nouvel arrangement ?

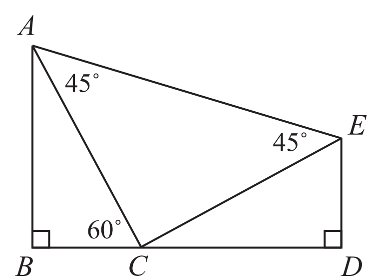
(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 10 **(D)** 17 **(E)** 21

13. Supposons que l'expression $(x + m)(x + n)$, m et n étant des entiers, est égale à une expression quadratique dont le terme constant est -12. Parmi les choix de réponse suivants, lequel ne peut pas être une valeur de m ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

14. Dans la figure ci-contre, le point C est situé sur le côté BD du quadrilatère $ABDE$. De plus, AB et ED sont perpendiculaires à BD, $\angle ACB = 60°$, $\angle CAE = 45°$ et $\angle AEC = 45°$. Si $AB = \sqrt{3}$, quel est le périmètre du quadrilatère $ABDE$?

(A) $1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
(B) $2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$
(C) $1 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
(D) $2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
(E) $2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$



15. La grand-mère d'Anila se réveille à la même heure tous les jours et suit la même routine :
— Elle prend son café 1 heure après s'être réveillée. Cela prend 10 minutes.
— Elle prend une douche 2 heures après s'être réveillée. Cela prend 10 minutes.
— Elle se promène 3 heures après s'être réveillée. Cela prend 40 minutes.
— Elle appelle sa petite-fille 4 heures après s'être réveillée. Cela prend 15 minutes.
— Elle fait du yoga 5 heures après s'être réveillée. Cela prend 30 minutes.
Si la grand-mère d'Anila s'est réveillée il y a 5 minutes, que fera-t-elle dans 197 heures ?

(A) Prendre son café **(B)** Prendre une douche **(C)** Faire du yoga
(D) Se promener **(E)** Appeler sa petite-fille

16. Francesca a placé l'un des entiers $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ dans chacune des neuf cases de la grille ci-contre. Les entiers dans les neuf cases sont tous différents. Elle a calculé le produit des trois entiers de chaque rangée et a écrit ces produits à droite des rangées correspondantes. Elle a calculé le produit des entiers de chaque colonne et a écrit ces produits sous les colonnes correspondantes. Ensuite, elle a effacé les entiers dans les neuf cases. Quel entier se trouvait dans la case N ?

			56
			135
	N		48
21	108	160	

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 6
(D) 8 **(E)** 9

17. Les variables a, b, c, d et e représentent des entiers strictement positifs qui vérifient :

$$b + d > a + d$$
$$c + e > b + e$$
$$b + d = c$$
$$a + c = b + e$$

Laquelle de ces variables a la plus grande valeur ?

(A) a **(B)** b **(C)** c **(D)** d **(E)** e

18. Soit x et y des nombres réels qui vérifient les deux équations suivantes :

$$3x + 2y = 6$$
$$9x^2 + 4y^2 = 468$$

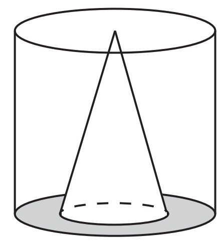
Quelle est la valeur de xy ?

(A) -36 **(B)** -12 **(C)** -32 **(D)** -120 **(E)** -32

19. On jette trois dés réguliers. On détermine ensuite la somme, S, des trois nombres obtenus. La probabilité pour que $S > 5$ est plus près de :

(A) 0,97 **(B)** 0,95 **(C)** 0,94 **(D)** 0,96 **(E)** 0,98

20. Un cylindre contient de l'eau. Un cône solide, ayant la même hauteur et un rayon équivalent à la moitié de celui du cylindre, est immergé dans l'eau jusqu'à ce que sa face circulaire repose à plat sur la base circulaire du cylindre, comme dans la figure ci-contre. Après l'immersion du cône, la profondeur de l'eau est égale à la moitié de la hauteur du cylindre. Si le cône est ensuite retiré, quelle sera la fraction de la hauteur du cylindre que représente la profondeur de l'eau ?



(Le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est égal à $\pi r^2 h$ et le volume d'un cône de rayon r et de hauteur h est égal à $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.)

(A) $\frac{3}{16}$ **(B)** $\frac{41}{96}$ **(C)** $\frac{5}{16}$
(D) $\frac{3}{8}$ **(E)** $\frac{7}{16}$

Partie C (8 points par bonne réponse).
Chaque bonne réponse est un entier de 0 à 99 inclusivement.
Une réponse à un chiffre (p. ex. ≪ 7 ≫) doit être codée avec un zéro non significatif (≪ 07 ≫).

Remarque: L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 12 345 est 45. L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 6307 est 7, que l'on code 07.

21. Les neuf cases d'un tableau 3×3 contiennent initialement des 0. On modifie le tableau selon les étapes suivantes :

(i) ajouter 1 aux trois nombres de n'importe quelle rangée ;

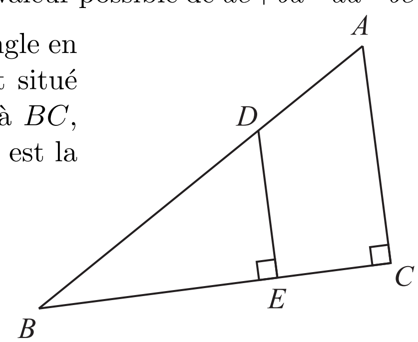
(ii) ajouter 2 aux trois nombres de n'importe quelle colonne.

Après avoir appliqué l'étape (i) a fois et l'étape (ii) b fois, on obtient le tableau dans la figure ci-contre. Quelle est la valeur de $a + b$?

7	1	5
9	3	7
8	2	6

22. On choisit quatre entiers distincts a, b, c et d parmi les entiers de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Quelle est la plus grande valeur possible de $ac + bd - ad - bc$?

23. Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en C. Le point D est situé sur AB et le point E est situé sur BC de manière que DE soit perpendiculaire à BC, $BE = AC$, $BD = 120$ et $DE + BC = 288$. Quelle est la longueur de DE ?



24. L'entier N est le plus petit entier strictement positif qui est un multiple de 2024, a plus de 100 diviseurs positifs (y compris 1 et N) et moins de 110 diviseurs positifs (y compris 1 et N). Quelle est la somme des chiffres de N ?

25. Une suite de 11 nombres réels positifs, soit $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}$, satisfait $a_1 = 4$ et $a_{11} = 1024$ et $a_n + a_{n-1} = \frac{5}{2}\sqrt{a_n \cdot a_{n-1}}$ pour tout entier n $(2 \leq n \leq 11)$. Par exemple, lorsque $n = 7$, $a_7 + a_6 = \frac{5}{2}\sqrt{a_7 \cdot a_6}$. Il y a S telles suites. Quels sont les deux chiffres les plus à droite de S ?

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2024! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— plus d'information à propos du concours Hypatie
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— utiliser notre générateur de séries de problèmes gratuit pour créer des séries de problèmes afin de soutenir et d'enrichir le programme scolaire; veuillez noter que cette ressource n'est disponible qu'en anglais
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les concours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^{e} année – Sec. V)

le mercredi 22 février 2023

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 23 février 2023

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 60 minutes

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Les parties A et B du concours sont composées de questions à choix multiple. Chacune de ces questions est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. La réponse juste à chaque question de la partie C est un entier de 0 à 99 inclusivement. Après avoir décidé de votre réponse, remplissez les deux cercles appropriés sur la feuille-réponse. Une réponse à un chiffre (p. ex. ≪ 7 ≫) doit être codée avec un zéro non significatif (≪ 07 ≫).
8. Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C. Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée. Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
9. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
10. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
11. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation:	Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.* On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $0{,}3 + 0{,}03$?

   (A) 0,303 **(B)** 0,6 **(C)** 3,3 **(D)** 0,33 **(E)** 0,06

2. Sachant que $3 + x = 5$ et $-3 + y = 5$, quelle est la valeur de $x + y$?

   (A) 4 **(B)** 16 **(C)** 6 **(D)** 12 **(E)** 10

3. Sachant que $x = 2$, quelle est la valeur de $2x^2 + 3x^2$?

   (A) 14 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 22 **(E)** 20

4. Parmi les nombres suivants, lequel est le plus près du nombre de minutes dans une semaine ?

   (A) 100 **(B)** 1000 **(C)** 10 000 **(D)** 100 000 **(E)** 1 000 000

5. La machine d'Ava accepte comme entrée des entiers strictement positifs de quatre chiffres. Si l'on présente l'entier de quatre chiffres $ABCD$ comme entrée, on obtient l'entier $A \times B + C \times D$ comme sortie. Par exemple, si l'on présente l'entier 1234 comme entrée, on obtient l'entier $1 \times 2 + 3 \times 4 = 2 + 12 = 14$ comme sortie. Si l'on présente l'entier 2023 comme entrée, quel entier obtiendra-t-on comme sortie ?

   (A) 0 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 6 **(E)** 8

6. Vivek peint trois portes, soit les portes 1, 2 et 3. Chaque porte doit être peinte d'une seule couleur : noir ou bleu. Une possibilité est que la porte 1 soit peinte en noir, la porte 2 en bleu et la porte 3 en bleu. En tout, combien y a-t-il de façons différentes de peindre les trois portes ?

   (A) 8 **(B)** 7 **(C)** 5 **(D)** 4 **(E)** 3

7. On achète des collations pour 17 joueurs de soccer. Les boîtes de jus sont vendues en paquets de 3 et coûtent 2,00 \$ le paquet. Les pommes sont vendues en sacs de 5 et coûtent 4,00 \$ le sac. Daniel veut acheter suffisamment de paquets de jus et de sacs de pommes pour que chaque joueur reçoive une boîte de jus et une pomme. Quel est le montant minimum qu'il doit dépenser ?

   (A) 26,00 \$ **(B)** 28,00 \$ **(C)** 24,00 \$ **(D)** 30,00 \$ **(E)** 36,00 \$

8. Deux amis parcourent un trajet de 30 km à vélo. Ari roule à une vitesse moyenne de 20 km/h. Bri roule à une vitesse moyenne de 15 km/h. Sachant qu'Ari et Bri ont commencé le trajet en même temps, combien de minutes faura-t-il attendre l'arrivée de Bri après l'arrivée d'Ari ?

   (A) 50 min **(B)** 40 min **(C)** 30 min **(D)** 20 min **(E)** 10 min

9. Trois réservoirs contiennent de l'eau. Le nombre de litres d'eau dans chacun d'eux est indiqué dans le tableau ci-dessous :

Réservoir A	Réservoir B	Réservoir C
3600 L	1600 L	3800 L

De l'eau est pompée et transvasée des réservoirs A et C au réservoir B afin que chaque réservoir contienne le même volume d'eau. Combien de litres d'eau sont pompés et transvasés du réservoir A au réservoir B ?

(A) 500 L **(B)** 600 L **(C)** 700 L **(D)** 800 L **(E)** 900 L

10. Les points A, B, C et D sont situés sur une droite dans cet ordre. Sachant que $AB : AC = 1 : 5$ et $BC : CD = 2 : 1$, quel est le rapport $AB : CD$?

(A) $1 : 1$ **(B)** $1 : 2$ **(C)** $1 : 3$ **(D)** $2 : 5$ **(E)** $3 : 5$

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Au début du mois, Mathilde et Salah avaient chacun 100 pièces. Pour Mathilde, ce nombre de pièces est 25 % de plus que le nombre de pièces qu'elle avait au début du mois dernier. Pour Salah, ce nombre de pièces est 20 % de moins que le nombre de pièces qu'il avait au début du mois dernier. Combien de pièces possédaient-ils en tout au début du mois dernier ?

(A) 180 **(B)** 185 **(C)** 190 **(D)** 200 **(E)** 205

12. Un rectangle a une longueur de 8 cm et une largeur de π cm. Un demi-cercle a la même aire que le rectangle. Quel est son rayon ?

(A) $4\sqrt{2}$ cm **(B)** 4 cm **(C)** 16 cm **(D)** 8 cm **(E)** 2 cm

13. Sachant que $a(x+2)+b(x+2)=60$ et $a+b=12$, quelle est la valeur de x ?

(A) 3 **(B)** 5 **(C)** 1 **(D)** 7 **(E)** 48

14. Une droite a une pente de 2 tandis qu'une autre droite a une pente de -4. Chacune des droites a une ordonnée à l'origine de 6. Quelle est la distance entre les abscisses à l'origine des droites ?

(A) 2 **(B)** 6 **(C)** $\frac{3}{2}$ **(D)** $\frac{5}{2}$ **(E)** $\frac{9}{2}$

15. Une suite contient 101 termes. Chacun des termes est un entier strictement positif. Si un terme, n, est pair, alors le terme suivant est égal à $\frac{1}{2}n+1$. Si un terme, n, est impair, alors le terme suivant est égal à $\frac{1}{2}(n+1)$. Par exemple, si le premier terme est 7, alors le deuxième terme est 4 tandis que le troisième terme est 3. Si le premier terme de la suite est 16, quel est le 101^{e} terme ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

16. Dans la figure ci-contre, vingt-cinq cartes sont disposées au hasard dans une grille. Parmi les cartes, cinq d'entre elles portent le nombre 0 sur l'une des faces et le nombre 1 sur l'autre face, tandis que les vingt cartes restantes portent soit le nombre 0 sur les deux faces, soit le nombre 1 sur les deux faces. Lauriane choisit une rangée ou une colonne et retourne chacune des cinq cartes dans cette rangée ou colonne, laissant les autres cartes intactes. Après cette opération, Lauriane détermine le rapport du nombre de 0 visibles au nombre de 1 visibles. Quelle que soit la rangée ou la colonne que choisit Lauriane, il est *impossible* que ce rapport soit égal à :

0	0	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	0
0	0	1	0	0
1	0	1	0	1

(A) 12 : 13 **(B)** 2 : 3 **(C)** 9 : 16
(D) 3 : 2 **(E)** 16 : 9

17. Les diviseurs positifs de 6 sont 1, 2, 3, 6. Quelle est la somme des diviseurs positifs de 1184 ?

(A) 2394 **(B)** 2396 **(C)** 2398 **(D)** 2400 **(E)** 2402

18. Une sauterelle robotisée saute de 1 cm vers l'est, puis de 2 cm vers le nord, puis de 3 cm vers l'ouest, puis de 4 cm vers le sud. Après chaque quatrième saut, la sauterelle recommence la séquence de sauts : 1 cm vers l'est, puis 2 cm vers le nord, puis 3 cm vers l'ouest, puis 4 cm vers le sud. Après un total de n sauts, la sauterelle est située à 162 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale. Quelle est la somme des carrés des chiffres de n ?

(A) 22 **(B)** 29 **(C)** 17 **(D)** 14 **(E)** 13

19. Sachant que x et y sont des entiers qui vérifient $2x^2 + 8y = 26$, quelle est une valeur possible de $x - y$?

(A) -8 **(B)** 26 **(C)** -16 **(D)** 22 **(E)** 30

20. Si n est un entier strictement positif, la notation $n!$ (qui se lit « factorielle n ») représente le produit des entiers de 1 à n. Par exemple, $5! = (1)(2)(3)(4)(5)$ ou $5! = 120$, qui se termine par exactement 1 zéro. Pour combien d'entiers m $(1 \leq m \leq 30)$ est-il possible de trouver une valeur de n telle que $n!$ se termine par exactement m zéros ?

(A) 30 **(B)** 27 **(C)** 28 **(D)** 24 **(E)** 25

Partie C (8 points par bonne réponse).
Chaque bonne réponse est un entier de 0 à 99 inclusivement.
Une réponse à un chiffre (p. ex. ≪ 7 ≫) doit être codée avec un zéro non significatif (≪ 07 ≫).

Remarque: L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 12 345 est 45. L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 6307 est 7, que l'on code 07.

21. Les entiers 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13 doivent être placés dans les cercles et les carrés ci-dessous. Chaque forme doit contenir un seul nombre.

$$\boxed{x} \; \bigcirc \; \square \; \bigcirc \; \square \; \bigcirc \; \square \; \bigcirc \; \boxed{y}$$

Chaque entier ne peut être utilisé qu'une seule fois et l'entier dans chaque cercle doit être égal à la somme des entiers dans les deux carrés voisins. Si l'entier x est placé dans le carré le plus à gauche et l'entier y dans le carré le plus à droite, quelle est la plus grande valeur possible de $x + y$?

22. Sachant que x et y sont des nombres réels positifs qui vérifient $\dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$, quelle est la valeur de $\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)^2$?

23. Pour chaque entier strictement positif n, soit $s(n)$ égal à la somme des chiffres de n. Par exemple, $s(2023) = 2 + 0 + 2 + 3$. Il y a S entiers n tels que $100 \leq n \leq 999$ et $7 \leq s(n) \leq 11$. Quel est l'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de S ?

24. Le quadrilatère $ABCD$ a $\angle BCD = \angle DAB = 90°$. De plus, le quadrilatère $ABCD$ a un périmètre de 224 et une aire de 2205. L'un des côtés de $ABCD$ a une longueur de 7 tandis que les trois autres côtés ont des longueurs entières. Les carrés des longueurs des côtés de $ABCD$ ont une somme égale à S. Quel est l'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de S ?

25. Un cube a des arêtes de longueur 4 m. L'une des extrémités d'une corde de 5 m de long est ancrée au centre de la face supérieure du cube. L'aire de la surface du cube que l'autre extrémité de la corde peut atteindre est égale à A m^2. Quel est l'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de l'entier le plus près de $100A$?

**Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE**
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2023! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— plus d'information à propos du concours Hypatie
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les concours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 23 février 2022

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 24 février 2022

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 60 minutes

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Les parties A et B du concours sont composées de questions à choix multiple. Chacune de ces questions est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. La réponse juste à chaque question de la partie C est un entier de 0 à 99 inclusivement. Après avoir décidé de votre réponse, remplissez les deux cercles appropriés sur la feuille-réponse. Une réponse à un chiffre (p. ex. ≪ 7 ≫) doit être codée avec un zéro non significatif (≪ 07 ≫).
8. Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C. Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée. Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
9. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
10. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
11. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $6 + (3 \times 6) - 12$?

(A) 6 **(B)** 9 **(C)** 12 **(D)** 18 **(E)** 24

2. Deux nombres ont une moyenne de 7. L'un des nombres est 5. Quel est l'autre nombre ?

(A) 6 **(B)** 4 **(C)** 3 **(D)** 8 **(E)** 9

3. Gauravi fait une promenade tous les jours. Un lundi, elle parcourt 500 m. Chaque jour suivant, elle augmente sa distance parcourue de 500 m par rapport au jour précédent. Quel jour de la semaine parcourra-t-elle exactement 4500 m ?

(A) Jeudi **(B)** Vendredi **(C)** Mardi **(D)** Lundi **(E)** Mercredi

4. Quel est le plus grand nombre de carrés ayant des côtés de longueur 2 que l'on peut placer, sans chevauchement, à l'intérieur d'un carré ayant des côtés de longueur 8 ?

(A) 8 **(B)** 32 **(C)** 16 **(D)** 64 **(E)** 4

5. On choisit au hasard l'un des entiers dans la liste suivante de 15 entiers :

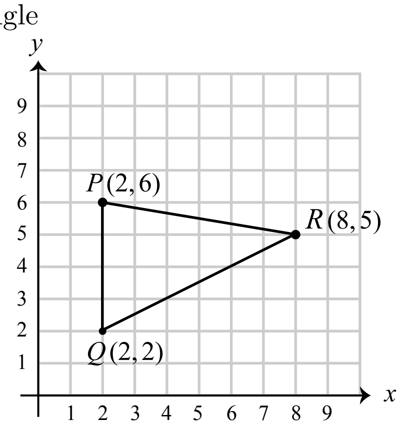
$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5$$

La probabilité pour que l'entier choisi soit égal à n est égale à $\frac{1}{3}$. Quelle est la valeur de n ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

6. Dans la figure ci-contre, les points $P(2, 6)$, $Q(2, 2)$ et $R(8, 5)$ forment un triangle. Quelle est l'aire du triangle PQR ?

(A) 24 **(B)** 14 **(C)** 21
(D) 12 **(E)** 16



7. L'expression $(1 + 2 + 3)(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})$ est égale à :

(A) 3 **(B)** 11 **(C)** 6 **(D)** $\dfrac{11}{6}$ **(E)** 12

8. Sachant que $10x+y=75$ et $10y+x=57$, x et y étant des entiers strictement positifs, quelle est la valeur de $x+y$?

(A) 12 **(B)** 5 **(C)** 7 **(D)** 77 **(E)** 132

9. Pascale met 7 jours pour creuser 4 trous tandis que Miguel met 3 jours pour creuser 2 trous. S'ils travaillent ensemble et que chacun continue à creuser à la même vitesse, combien de trous au total creuseront-ils en 21 jours ?

(A) 35 **(B)** 22 **(C)** 12 **(D)** 26 **(E)** 28

10. Sachant que $2^{11} \times 6^5 = 4^x \times 3^y$, x et y étant des entiers strictement positifs, quelle est la valeur de $x+y$?

(A) 10 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 13 **(E)** 14

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Dhruv est plus âgé que Bev. Bev est plus âgé que Elcim. Elcim est plus jeune qu'André. André est plus jeune que Bev. Bev est plus jeune que Cao. Qui est le troisième plus âgé ?

(A) André **(B)** Bev **(C)** Cao **(D)** Dhruv **(E)** Elcim

12. Supposons que d est un entier impair et que e est un entier pair. Combien des expressions suivantes sont égales à un entier impair ?

$$d+d \qquad (e+e)\times d \qquad d\times d \qquad d\times(e+d)$$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

13. Sept rectangles identiques sont disposés de manière à former deux grands rectangles, comme dans les figures A et B ci-dessous.

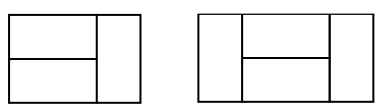


Figure A Figure B

Quel est le rapport du périmètre de la Figure A au périmètre de la Figure B ?

(A) 2 : 3 **(B)** 3 : 4 **(C)** 3 : 5 **(D)** 4 : 5 **(E)** 5 : 6

14. Zebadiah a 3 chemises rouges, 3 chemises bleues et 3 chemises vertes dans un tiroir. Sans regarder, il retire au hasard les chemises une par une. Il voudrait un ensemble de chemises comprenant soit 3 chemises de la même couleur, soit 3 chemises de couleurs différentes. Quel est le nombre minimum de chemises que Zebadiah doit retirer pour *garantir* qu'il ait un tel ensemble ?

(A) 4 **(B)** 3 **(C)** 6 **(D)** 5 **(E)** 7

15. On présente un entier strictement positif a comme entrée dans une machine. Si a est impair, la sortie est égale à $a+3$. Si a est pair, la sortie est égale à $a+5$. On peut répéter ce processus en utilisant chaque sortie successive comme entrée suivante. Par exemple, si on a $a=1$ comme entrée initiale et qu'on utilise la machine trois fois, on obtient une sortie finale de 12. Si l'entrée initiale est $a=15$ et que la machine est utilisée 51 fois, quelle est la sortie finale ?

(A) 213 **(B)** 218 **(C)** 212 **(D)** 220 **(E)** 215

16. Lorsque l'on divise 111 par 10, on a un reste de 1. Lorsque l'on divise 111 par l'entier strictement positif n, on a un reste de 6. Combien y a-t-il de valeurs possibles de n ?

(A) 5 **(B)** 8 **(C)** 7 **(D)** 6 **(E)** 4

17. Une canette en aluminium est en forme de cylindre. La canette est fermée aux deux extrémités et a une aire totale de 300 cm^2. Sachant que la canette aurait une aire totale de 900 cm^2 si l'on doublait son rayon, que serait son aire totale si l'on doublait plutôt sa hauteur ?

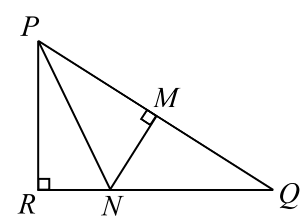
(L'aire totale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est égale à $2\pi r^2 + 2\pi rh$.)

(A) 450 cm^2 **(B)** 600 cm^2 **(C)** 750 cm^2 **(D)** 375 cm^2 **(E)** 300 cm^2

18. Arianne et Béatrice marchent à des vitesses différentes, mais constantes. Arianne est située à l'une des extrémités d'une rue tandis que Béatrice est située à l'autre extrémité de la rue. Chacune d'elles commence à marcher à 8 h et se dirige directement vers le point de départ de l'autre. Les deux filles se croisent à 8 h 42. Sachant qu'Arianne arrive au point de départ de Béatrice à 9 h 10, à quelle heure Béatrice arrive-t-elle au point de départ d'Arianne ?

(A) 9 h 30 **(B)** 9 h 35 **(C)** 9 h 40 **(D)** 9 h 45 **(E)** 9 h 50

19. Dans la figure ci-contre, le triangle PQR est rectangle en R, $PR=12$ et $QR=16$. De plus, M est le milieu de PQ et le point N est situé sur QR de manière que MN soit perpendiculaire à PQ. Quelle est l'aire du triangle PNR ?



(A) 21 **(B)** 17,5 **(C)** 36
(D) 16 **(E)** 21,5

20. On considère une suite de nombres $t_1, t_2, t_3, ...$ dont les termes sont définis par $t_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$ pour tout entier n ($n \geq 1$). Par exemple, $t_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$. Quel est le plus grand entier strictement positif k pour lequel les k premiers termes (c'est-à-dire $t_1 + t_2 + \cdots + t_{k-1} + t_k$) ont une somme inférieure à 1,499 ?

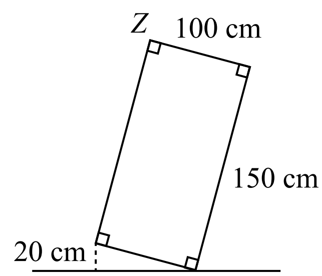
(A) 2000 **(B)** 1999 **(C)** 2002 **(D)** 2001 **(E)** 1998

Partie C (8 points par bonne réponse).
Chaque bonne réponse est un entier de 0 à 99 inclusivement.
Une réponse à un chiffre (p. ex. ≪ 7 ≫) doit être codée avec un zéro non significatif (≪ 07 ≫).

Remarque: L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 12 345 est 45. L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 6307 est 7, que l'on code 07.

21. Gustave a 15 barres d'acier dont les masses sont : 1 kg, 2 kg, 3 kg, ..., 14 kg, 15 kg. Il a également trois sacs : soit le sac A, le sac B et le sac C. Il place deux barres d'acier dans chaque sac de manière que la masse totale contenue dans chacun des sacs soit égale à M kg. Combien y a-t-il de valeurs différentes possibles de M ?

22. Un rectangle de dimensions 100 cm × 150 cm est incliné de manière que l'un de ses sommets soit situé à 20 cm au dessus d'une droite horizontale, comme dans la figure ci-contre. Au centimètre près, le sommet Z est situé à $(100 + x)$ cm au-dessus de la droite horizontale. Quelle est la valeur de x ?



23. Pour combien d'entiers strictement positifs k les droites d'équations $9x + 4y = 600$ et $kx - 4y = 24$ se coupent-elles en un point dont les coordonnées sont des entiers strictement positifs ?

24. Il existe des fonctions $f(x)$ qui satisfont aux conditions suivantes :
   - $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des entiers quelconques avec $a > 0$, et
   - $f(p) = f(q) = 17$ et $f(p + q) = 47$, p et q étant des nombres premiers tels que $p < q$.

   On calcule la valeur de $f(pq)$ pour chaque telle fonction. La somme de toutes les valeurs possibles de $f(pq)$ est égale à S. Quels sont les deux chiffres les plus à droite de S ?

25. Dans la grille 3 × 3 ci-contre, la case du centre contient l'entier 5 tandis que les huit autres cases contiennent les lettres a, b, c, d, e, f, g, h. Chacune des huit lettres doit être remplacée par un entier de 1 à 9. N'importe quel entier peut être utilisé plus d'une fois. Il existe N façons de compléter la grille pour que les entiers le long de chaque rangée, de chaque colonne et de chacune des deux diagonales principales aient des sommes qui soient toutes divisibles par 5. Quels sont les deux chiffres les plus à droite de N ?

a	b	c
d	5	e
f	g	h

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2022! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— plus d'information à propos du concours Hypatie
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les concours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^{e} année – Sec. V)

le mardi 23 février 2021

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 24 février 2021

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 60 minutes

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

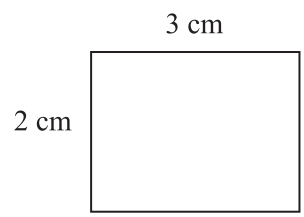
Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Un rectangle a une largeur de 2 cm et une longueur de 3 cm. Quelle est l'aire du rectangle ?



(A) 2 cm^2 **(B)** 9 cm^2 **(C)** 5 cm^2 **(D)** 36 cm^2 **(E)** 6 cm^2

2. L'expression $2 + 3 \times 5 + 2$ est égale à :

(A) 19 **(B)** 27 **(C)** 35 **(D)** 17 **(E)** 32

3. Parmi les nombres suivants, lequel est égal à 25 % de 60 ?

(A) 10 **(B)** 15 **(C)** 20 **(D)** 12 **(E)** 18

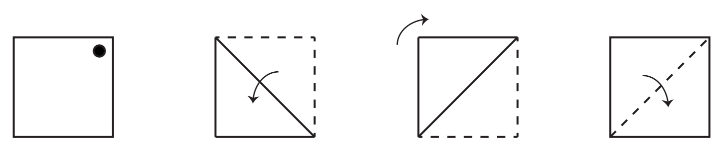
4. Si $x = 2021$, quelle est la valeur de $\dfrac{4x}{x+2x}$?

(A) $\dfrac{3}{4}$ **(B)** $\dfrac{4}{3}$ **(C)** 2021 **(D)** 2 **(E)** 6

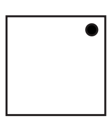
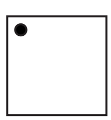
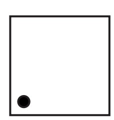
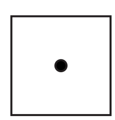
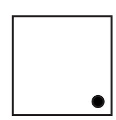
5. Lequel des entiers suivants ne peut *pas* être exprimé comme produit de deux entiers, chacun étant supérieur à 1 ?

(A) 6 **(B)** 27 **(C)** 53 **(D)** 39 **(E)** 77

6. Dans la figure ci-dessous, un morceau de papier carré a un point dans son coin supérieur droit et repose sur une table. Le carré est plié le long de sa diagonale puis subit une rotation autour de son centre de 90° dans les sens des aiguilles d'une montre. Finalement, le morceau de papier est déplié.



De quoi aura l'air le morceau de papier une fois qu'il aura été déplié ?

(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

7. Pour laquelle des valeurs suivantes de x est-ce que x est supérieur à x^2 ?

(A) $x = -2$ **(B)** $x = -\frac{1}{2}$ **(C)** $x = 0$ **(D)** $x = \frac{1}{2}$ **(E)** $x = 2$

8. On renverse l'ordre des chiffres d'un entier strictement positif de deux chiffres. Lorsqu'on soustrait l'entier initial du nouvel entier de deux chiffres, on obtient 54. Quelle est la différence positive entre les deux chiffres de l'entier initial ?

(A) 5 **(B)** 7 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** 9

9. La droite d'équation $y = 2x - 6$ subit une translation de 4 unités vers le haut. (Autrement dit, chaque point sur la droite initiale subit une translation de 4 unités vers le haut de manière à former une nouvelle droite.) Quelle est l'abscisse à l'origine de la nouvelle droite ?

(A) 3 **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** 4 **(D)** 1 **(E)** 2

10. Si $3^x = 5$, quelle est la valeur de 3^{x+2} ?

(A) 10 **(B)** 25 **(C)** 2187 **(D)** 14 **(E)** 45

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Dans la somme ci-contre, P, Q et R représentent trois entiers distincts de un chiffre chacun. Quelle est la valeur de $P + Q + R$?

$$\begin{array}{cccc} & P & 7 & R \\ + & 3 & 9 & R \\ \hline & R & Q & 0 \end{array}$$

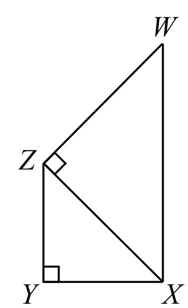
(A) 13 **(B)** 12 **(C)** 14

(D) 3 **(E)** 4

12. Parmi les 20 carrés parfaits $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 19^2, 20^2$, combien sont divisibles par 9 ?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

13. Dans la figure ci-contre, chacun des triangles WXZ et XYZ est isocèle et rectangle. La longueur de WX est de $6\sqrt{2}$. Le périmètre du quadrilatère $WXYZ$ est plus près de :



(A) 18 **(B)** 20 **(C)** 23

(D) 25 **(E)** 29

14. Natasha avance 3 fois plus vite en vélo qu'en courant. Elle fait du vélo pendant 4 heures et court pendant 1 heure. Quel est le rapport entre la distance parcourue à vélo et celle parcourue en courant ?

(A) 12 : 1 **(B)** 7 : 1 **(C)** 4 : 3 **(D)** 16 : 9 **(E)** 1 : 1

15. Soit a et b des entiers strictement positifs qui vérifient $45a + b = 2021$. Quelle est la valeur minimale possible de $a + b$?

(A) 44 **(B)** 82 **(C)** 85 **(D)** 86 **(E)** 130

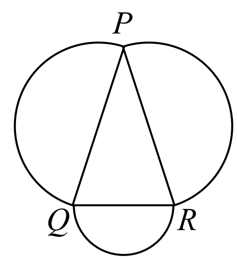
16. Si n est un entier strictement positif, la notation $n!$ (qui se lit « factorielle n ») représente le produit des entiers de 1 à n. C'est-à-dire, $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$. Par exemple, $4! = 4(3)(2)(1) = 24$ et $1! = 1$. Si a et b sont des entiers strictement positifs tels que $b > a$, le chiffre des unités de $b! - a!$ ne peut pas être :

(A) 1 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 9

17. L'ensemble S est composé de 9 entiers strictement positifs distincts. Parmi les entiers de l'ensemble S, les deux entiers les plus petits ont une moyenne de 5 tandis que les deux entiers les plus grands ont une moyenne de 22. Quelle est la plus grande moyenne possible de tous les entiers de l'ensemble S ?

(A) 15 **(B)** 16 **(C)** 17 **(D)** 18 **(E)** 19

18. Dans la figure ci-contre, le triangle PQR est isocèle ($PQ = PR$). On trace des demi-cercles de diamètres PQ, QR et PR. Les aires de ces trois demi-cercles ont une somme égale à 5 fois l'aire du demi-cercle de diamètre QR. Quelle est la valeur de $\cos(\angle PQR)$?



(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{\sqrt{8}}$ **(C)** $\frac{1}{\sqrt{12}}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{15}}$ **(E)** $\frac{1}{\sqrt{10}}$

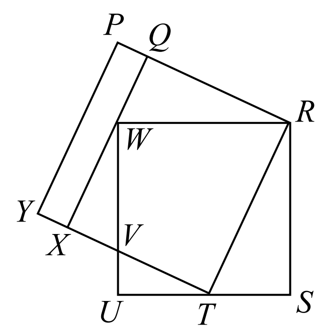
19. Les nombres réels x, y et z vérifient les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ xz &= -180 \\ (x + y + z)^2 &= 4 \end{aligned}$$

Si S est la somme des deux valeurs possibles de y, alors $-S$ est égal à :

(A) 56 **(B)** 14 **(C)** 36 **(D)** 34 **(E)** 42

20. Dans la figure ci-contre, $PRTY$ et $WRSU$ sont des carrés. Le point Q est situé sur PR et le point X est situé sur TY de manière que $PQXY$ soit un rectangle. De plus, le point T est situé sur SU, le point W est situé sur QX et le point V est le point d'intersection de UW et TY. Si le rectangle $PQXY$ a une aire de 30, la longueur de ST est plus près de :



(A) 5 **(B)** 5,25 **(C)** 5,5

(D) 5,75 **(E)** 6

Partie C (8 points par bonne réponse)

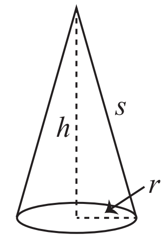
21. Une fonction f est telle que $f(2) = 5$, que $f(3) = 7$ et que

$$f(m) + f(n) = f(mn)$$

pour tous les entiers strictement positifs m et n.
(Par exemple, $f(9) = f(3) + f(3) = 14$.) Quelle est la valeur de $f(12)$?

(A) 17 **(B)** 35 **(C)** 28 **(D)** 12 **(E)** 25

22. Un cône non peint a un rayon de 3 cm et a une génératrice (apothème) dont la longueur est de 5 cm. On place le cône dans un seau de peinture. Lorsque la base circulaire du cône repose à plat sur le fond du seau, la profondeur de la peinture dans le seau est de 2 cm. Lorsque le cône est retiré, sa base circulaire et la partie inférieure de sa surface latérale sont recouvertes de peinture. La fraction de la surface totale du cône qui est recouverte de peinture peut être exprimée sous la forme de $\frac{p}{q}$, p et q étant des entiers strictement positifs qui n'admettent aucun diviseur commun supérieur à 1. Quelle est la valeur de $p + q$?



(La *surface latérale* d'un cône est sa surface externe qui ne comprend pas la base circulaire. Un cône de rayon r, de hauteur h et dont la génératrice (apothème) a une longueur de s a une surface latérale dont l'aire est égale à πrs.)

(A) 59 **(B)** 61 **(C)** 63 **(D)** 65 **(E)** 67

23. Dans la Figure 1 ci-dessous, trois points non ombrés sont disposés de manière à former un triangle équilatéral. La Figure 2 est formée en disposant trois copies de la Figure 1 de manière à former le contour d'un triangle équilatéral plus grand, puis en remplissant l'espace vide résultant avec 1 point ombré. Pour chaque entier $n > 2$, la Figure n est formée en disposant trois copies de la Figure $n - 1$ de manière à former le contour d'un triangle équilatéral plus grand, puis en remplissant l'espace vide résultant au centre avec un triangle inversé de points ombrés.

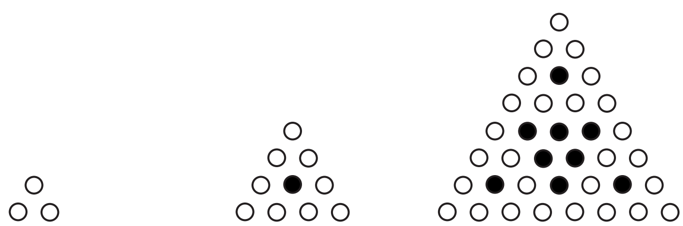


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Quelle est la plus petite valeur de n telle que la Figure n comprend au moins 100 000 points ombrés ?

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 12

24. On choisit au hasard un couple de nombres réels (a, b) tels que $a^2 + b^2 \leq \frac{1}{4}$. Si la probabilité pour que les courbes définies par les équations $y = ax^2 + 2bx - a$ et $y = x^2$ se coupent est représentée par p, alors $100p$ est plus près de :

(A) 65 **(B)** 69 **(C)** 53 **(D)** 57 **(E)** 61

25. Soit N le nombre de triplets (x, y, z) d'entiers strictement positifs tels que $x < y < z$ et que $xyz = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2$. Lorsqu'on divise N par 100, quel est le reste ?

(A) 28 **(B)** 88 **(C)** 8 **(D)** 68 **(E)** 48

2021 Concours Fermat (français)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2021! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— plus d'information à propos du concours Hypatie
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^{e} année – Sec. V)

le mardi 25 février 2020

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 26 février 2020

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 60 minutes

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

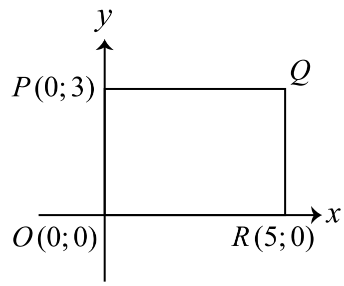
Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Dans la figure ci-contre, les points $O(0,0)$, $P(0,3)$, Q et $R(5,0)$ forment un rectangle. Quelles sont les coordonnées de Q ?

   (A) $(5,5)$ **(B)** $(5,3)$ **(C)** $(3,3)$
   (D) (2,5, 1,5) **(E)** $(0,5)$



2. Quelle est la valeur de $3 \times 2020 + 2 \times 2020 - 4 \times 2020$?

   (A) 6060 **(B)** 4040 **(C)** 8080 **(D)** 0 **(E)** 2020

3. L'expression $(x+1)^2 - x^2$ est égale à laquelle des expressions suivantes pour tous les nombres réels x ?

   (A) $2x+1$ **(B)** $2x-1$ **(C)** $(2x+1)^2$ **(D)** -1 **(E)** $x+1$

4. Ewan crée une suite en comptant par bonds de 11 à partir de 3. Il écrit donc : $3, 14, 25, 36, \ldots$ Lequel des nombres suivants finira par paraitre dans la suite d'Ewan ?

   (A) 113 **(B)** 111 **(C)** 112 **(D)** 110 **(E)** 114

5. Quelle est la valeur de $\sqrt{\dfrac{\sqrt{81}+\sqrt{81}}{2}}$?

   (A) 3 **(B)** 18 **(C)** 27 **(D)** 81 **(E)** 162

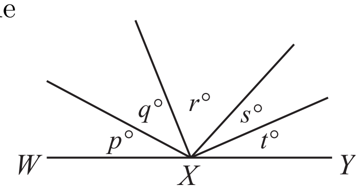
6. Anna pense à un entier :
   - qui *n'est pas* un multiple de trois ;
   - qui *n'est pas* un carré parfait ;
   - dont la somme de ses chiffres est égale à un nombre premier.

   Lequel des nombres suivants pourrait être l'entier auquel pense Anna ?

   (A) 12 **(B)** 14 **(C)** 16 **(D)** 21 **(E)** 26

7. Dans la figure ci-contre, WXY est un angle plat. Quelle est la moyenne de p, de q, de r, de s et de t ?

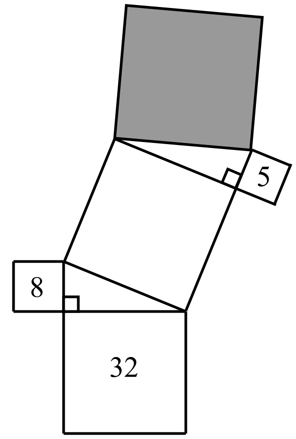
   (A) 30 **(B)** 36 **(C)** 60
   (D) 72 **(E)** 45



8. Si $2^n = 8^{20}$, quelle est la valeur de n ?

   (A) 10 **(B)** 60 **(C)** 40 **(D)** 16 **(E)** 17

9. La figure ci-contre est composée de deux triangles rectangles et de cinq carrés dont trois ont des aires de 5, de 8 et de 32. Quelle est l'aire du carré ombré ?



(A) 35 **(B)** 45 **(C)** 29
(D) 19 **(E)** 75

10. Les entiers strictement positifs s et t sont tels que $s(s-t)=29$. Quelle est la valeur de $s+t$?

(A) 1 **(B)** 28 **(C)** 57 **(D)** 30 **(E)** 29

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Dans le quadrillage 5×5 ci-contre, 15 cases contiennent des X et 10 cases sont vides. On peut déplacer n'importe quel X pour le placer dans n'importe quelle case vide. Quel est le plus petit nombre de X qu'il faut déplacer afin que chaque rangée et chaque colonne contienne exactement trois X ?

X	X	X	X	
X	X	X		X
X	X			
X	X		X	
		X	X	

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3
(D) 4 **(E)** 5

12. Harriet a parcouru une piste de 1000 m en 380 secondes. Elle a parcouru les 720 premiers mètres de la piste à une vitesse constante de 3 m/s. Elle a parcouru le restant de la piste à une vitesse constante de v m/s. Quelle est la valeur de v ?

(A) 2 **(B)** 1,5 **(C)** 3 **(D)** 1 **(E)** 4,5

13. Dans la liste $2, x, y, 5$, tous les couples de nombres adjacents ont la même somme. Quelle est la valeur de $x-y$?

(A) 1 **(B)** -3 **(C)** 3 **(D)** -1 **(E)** 0

14. Dans le jardin de Rad, il y a exactement 30 roses rouges, 19 roses jaunes et aucune autre rose. Combien de roses jaunes Rad doit-il enlever afin que les roses jaunes représentent $\frac{2}{7}$ du nombre total de roses dans le jardin ?

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** 7

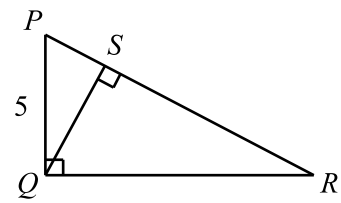
15. On considère l'équation $N = 3x + 4y + 5z$, x ayant comme valeurs possibles 1 ou -1, y ayant comme valeurs possibles 1 ou -1, et z ayant comme valeurs possibles 1 ou -1. Combien des énoncés suivants sont vrais ?
- N peut être égale à 0.
- N est toujours égale à un nombre impair.
- N ne peut pas être égale à 4.
- N est toujours égale à un nombre pair.

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

16. Soit x et y des nombres réels tels que $-4 \leq x \leq -2$ et $2 \leq y \leq 4$. Quelle est la plus grande valeur possible de $\dfrac{x+y}{x}$?

(A) 1 **(B)** -1 **(C)** $-\frac{1}{2}$ **(D)** 0 **(E)** $\frac{1}{2}$

17. Dans la figure ci-contre, le triangle PQR est rectangle en Q et le point S est situé sur PR de manière que QS est perpendiculaire à PR. Sachant que le triangle PQR a une aire de 30 et que $PQ = 5$, quelle est la longueur de QS ?



(A) $\frac{60}{13}$ **(B)** 5 **(C)** $\frac{30}{13}$
(D) 4 **(E)** 3

18. Quatre équipes participent à un tournoi où chaque équipe joue un seul match contre chacune des trois autres équipes. À la fin de chaque match, soit les équipes ont fait match nul, soit une équipe a gagné tandis que l'autre a perdu. On attribue aux équipes 3 points pour une victoire, 0 point pour une défaite et 1 point pour un match nul. Soit S la somme des points des quatre équipes à la fin du tournoi. Parmi les valeurs suivantes, laquelle ne peut *pas* être égale à S ?

(A) 13 **(B)** 17 **(C)** 11 **(D)** 16 **(E)** 15

19. Si l'expression $(3 + 2x + x^2)(1 + mx + m^2x^2)$ est développée et réduite, le coefficient de x^2 est égal à 1. Quelle est la somme de toutes les valeurs possibles de m ?

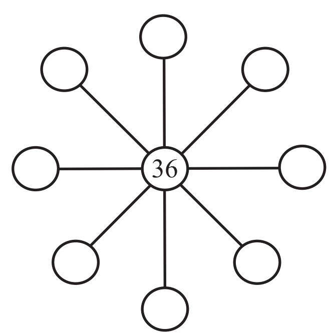
(A) $-\frac{4}{3}$ **(B)** $-\frac{2}{3}$ **(C)** 0 **(D)** $\frac{2}{3}$ **(E)** $\frac{4}{3}$

20. Un cube a six faces. Chaque face porte quelques points. Les six faces respectives du cube portent 2, 3, 4, 5, 6 et 7 points. Harry choisit un point au hasard et décide de l'effacer, chaque point ayant les mêmes chances d'être choisi par Harry. À la suite d'un lancer, chaque face du cube a les mêmes chances d'être la face supérieure. On lance le cube, quelle est la probabilité que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points ?

(A) $\frac{4}{7}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{13}{27}$ **(D)** $\frac{11}{21}$ **(E)** $\frac{3}{7}$

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Dans la figure ci-contre, le cercle du milieu contient le nombre 36. Il est possible d'écrire divers entiers positifs dans les huit cercles vides de manière que le produit de n'importe quels trois entiers sur une même ligne droite soit égal à 2592. Si les neuf entiers dans les cercles doivent être tous différents les uns des autres, quelle est la plus grande somme possible de ces neuf entiers ?



(A) 160 **(B)** 176 **(C)** 178
(D) 195 **(E)** 216

22. Soit x et y des nombres réels qui vérifient les deux équations suivantes :

$$x^2 + 3xy + y^2 = 909$$
$$3x^2 + xy + 3y^2 = 1287$$

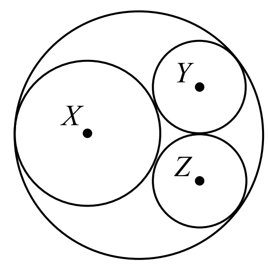
Quelle est une valeur possible de $x + y$?

(A) 27 **(B)** 39 **(C)** 29 **(D)** 92 **(E)** 41

23. Soit a et b des nombres réels tels que la fonction f ait comme propriétés $f(x) = ax + b$ pour tous les nombres réels x et $f(bx + a) = x$ pour tous les nombres réels x. Quelle est la valeur de $a + b$?

(A) 2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** -2

24. Dans la figure ci-contre, le cercle de centre X est tangent au grand cercle et passe par le centre de ce dernier. Chacun des cercles de centres Y et Z est tangent aux trois autres cercles. Le cercle de centre X a un rayon de 1. Chacun des cercles de centres Y et Z a un rayon de r. La valeur de r est plus près de :



(A) 0,93 **(B)** 0,91 **(C)** 0,95

(D) 0,87 **(E)** 0,89

25. On choisit trois nombres réels de 0 à 1 au hasard et indépendamment les uns des autres, soit les nombres x, y et z. Quelle est la probabilité que $x - y$ et $x - z$ soient tous les deux supérieurs à $-\frac{1}{2}$ mais inférieurs à $\frac{1}{2}$?

(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{7}{12}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{2}{3}$

2020 Concours Fermat (français)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2020! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— plus d'information à propos du concours Hypatie
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e^ et 12^e^ année
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^e année – Sec. V)

le mardi 26 février 2019

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 27 février 2019

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 60 minutes

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quel est le reste lorsqu'on divise 14 par 5 ?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

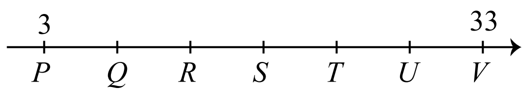
2. Laquelle des expressions suivantes est égale à $20(x+y)-19(y+x)$ pour toutes les valeurs de x et y ?

(A) $39x+39y$ **(B)** $x+y$ **(C)** $39x+y$ **(D)** $x+39y$ **(E)** $19x-18y$

3. Quelle est la valeur de $8-\dfrac{6}{4-2}$?

(A) 5 **(B)** 1 **(C)** $\dfrac{7}{2}$ **(D)** $\dfrac{17}{2}$ **(E)** 7

4. Dans la droite numérique suivante, le point P se trouve à la valeur de 3 tandis que le point V se trouve à 33. La droite numérique est divisée de 3 à 33 en six parties égales par les points Q, R, S, T, U.



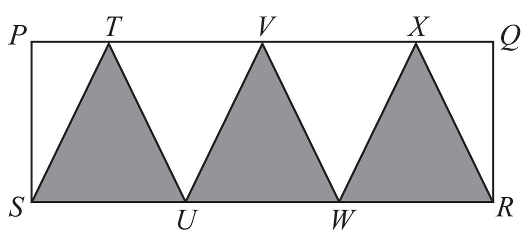
Quelle est la somme des longueurs de PS et TV ?

(A) 25 **(B)** 23 **(C)** 24 **(D)** 21 **(E)** 27

5. Mike fait du vélo à une vitesse constante de 30 km/h. Combien de kilomètres parcourt-il en 20 minutes ?

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 1,5 **(D)** 15 **(E)** 10

6. Dans la figure ci-dessous, $PQRS$ est un rectangle. De plus, les triangles STU, UVW et WXR sont congruents.



Quelle fraction de l'aire du rectangle $PQRS$ est ombrée ?

(A) $\frac{3}{7}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{3}{5}$ **(E)** $\frac{2}{3}$

7. La ville de Cans est située au nord de la ville d'Ernie. La ville de Dundee est située au sud de Cans mais au nord d'Ernie. La ville d'Arva est située au sud de la ville de Blythe et au nord de Dundee et de Cans. Quelle est la ville qui est située le plus au nord ?

(A) Arva **(B)** Blythe **(C)** Cans **(D)** Dundee **(E)** Ernie

8. Le produit de $8 \times 48 \times 81$ est divisible par 6^k. Quelle est la plus grande valeur entière possible de k ?

(A) 7 **(B)** 6 **(C)** 5 **(D)** 4 **(E)** 3

9. Quelle est la moyenne de $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{6}$?

(A) $\frac{1}{9}$ **(B)** $\frac{7}{24}$ **(C)** $\frac{1}{5}$ **(D)** $\frac{1}{48}$ **(E)** $\frac{7}{48}$

10. On peut utiliser chacun des chiffres 2, 3, 5, 7 et 8 une seule fois pour former des nombres entiers à cinq chiffres. Parmi ces nombres entiers, N est celui qui est le plus près possible de 30 000. Quel est le chiffre des dizaines de N ?

(A) 2 **(B)** 5 **(C)** 3 **(D)** 8 **(E)** 7

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. La droite d est perpendiculaire à la droite d'équation $y = x - 3$. La droite d a la même abscisse à l'origine que la droite d'équation $y = x - 3$. Quelle est l'ordonnée à l'origine de la droite d ?

(A) -3 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** 3 **(D)** -1 **(E)** 0

12. La première partie du quiz Genius comporte 30 questions tandis que la deuxième partie comporte 50 questions. Alberto a bien répondu à 70% des 30 questions de la première partie. Il a bien répondu à 40% des 50 questions de la deuxième partie. Le pourcentage de toutes les questions du quiz auxquelles Alberto a bien répondues est plus près de :

(A) 59 **(B)** 57 **(C)** 48 **(D)** 51 **(E)** 41

13. À un moment donné, Tanis vérifia l'heure sur sa montre et remarqua qu'il était $8x$ minutes après 7h00 et $7x$ minutes avant 8h00 pour une valeur de x. Quelle heure était-il à ce moment ?

(A) 7h08 **(B)** 7h40 **(C)** 7h32 **(D)** 7h36 **(E)** 7h31

14. Les lettres A, B, C, D et E doivent être placées dans les cases du quadrillage ci-contre de manière que chaque lettre ne paraisse qu'une seule fois dans chaque rangée et dans chaque colonne. Quelle lettre va dans la case indiquée par le $*$?

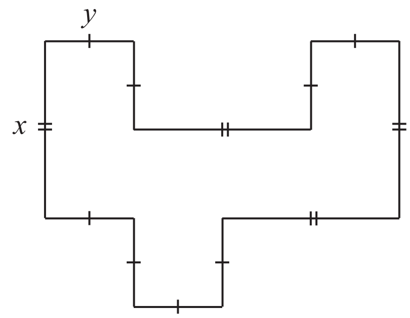
A				E
		C	A	
E		B	C	
	*			
B			D	

(A) A **(B)** B **(C)** C
(D) D **(E)** E

15. Il y a six boules rouges identiques et trois boules vertes identiques dans un seau. On en sélectionne quatre au hasard et on les arrange en ordre en ligne droite. Combien d'arrangements visiblement différents sont possibles ?

(A) 15 **(B)** 16 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 12

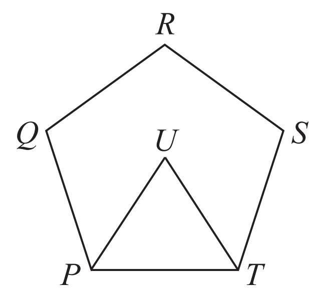
16. Dans la figure ci-dessous, chaque segment de droite a une longueur de x ou de y. De plus, chaque paire de côtés adjacents est perpendiculaire.



Si l'aire de la figure est 252 et que $x = 2y$, que serait le périmètre de cette figure ?

(A) 96 **(B)** 192 **(C)** 288 **(D)** 72 **(E)** 168

17. Les cinq côtés d'un pentagone régulier ont tous la même longueur. De plus, tous les angles intérieurs d'un pentagone régulier ont la même mesure. Dans la figure ci-contre, $PQRST$ est un pentagone régulier et PUT est un triangle équilatéral. Quelle est la mesure de l'angle obtus QUS ?



(A) 172° **(B)** 168° **(C)** 170°
(D) 176° **(E)** 174°

18. Combien y a-t-il d'entiers positifs à 7 chiffres qui comportent uniquement les chiffres 0 et 1 et qui sont divisibles par 6 ?

(A) 16 **(B)** 11 **(C)** 21 **(D)** 10 **(E)** 33

19. La fonction f est telle que $f(1) = 6$ et $f(2x + 1) = 3f(x)$ pour tout entier x. Quelle est la valeur de $f(63)$?

(A) 4374 **(B)** 1162 **(C)** 54 **(D)** 1458 **(E)** 486

20. Les sommets d'un triangle équilatéral sont situés sur un cercle de rayon 2. Quelle est l'aire du triangle ?

(A) $3\sqrt{3}$ **(B)** $4\sqrt{3}$ **(C)** $6\sqrt{3}$ **(D)** $5\sqrt{3}$ **(E)** $2\sqrt{3}$

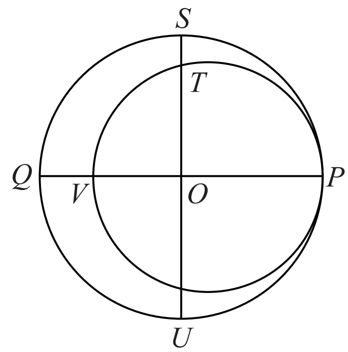
Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Dans la multiplication ci-contre, P, Q, R, S et T représentent chacun un chiffre. Quelle est la valeur de $P + Q + R + S + T$?

$$\begin{array}{r} P\ Q\ R\ S\ T\ 4 \\ \times \qquad\qquad 4 \\ \hline 4\ P\ Q\ R\ S\ T \end{array}$$

(A) 14 **(B)** 20 **(C)** 16
(D) 17 **(E)** 13

22. Dans la figure ci-contre, deux cercles se coupent en P. De plus, QP et SU se coupent en O et sont les diamètres perpendiculaires du grand cercle. Le point V est situé sur QP, et VP est le diamètre du petit cercle. Comme indiqué dans la figure, SU et le petit cercle se coupent en T. Si $QV = 9$ et $ST = 5$, quelle est la somme des longueurs des diamètres des deux cercles ?



(A) 50 **(B)** 91 **(C)** 41 **(D)** 82 **(E)** 100

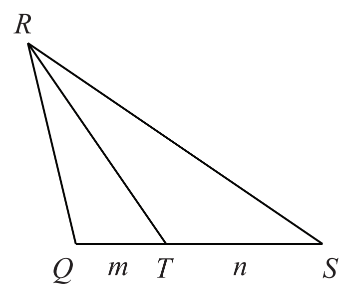
23. Combien y a-t-il de valeurs entières strictements positives de n, où $n \leq 100$, qui peuvent être exprimées par la somme de quatre entiers consécutifs ou plus, chacun strictement positif ?

(A) 64 **(B)** 63 **(C)** 66 **(D)** 65 **(E)** 69

24. On considère l'équation quadratique $x^2 - (r+7)x + r + 87 = 0$ où r est un nombre réel. Cette équation a deux solutions réelles distinctes, x, qui sont toutes les deux négatives lorsque $p < r < q$, où p et q sont des nombres réels. Quelle est la valeur de $p^2 + q^2$?

(A) 7618 **(B)** 698 **(C)** 1738 **(D)** 7508 **(E)** 8098

25. Dans le triangle QRS, le point T est situé sur QS et $\angle QRT = \angle SRT$. Soit $QT = m$ et $TS = n$ pour des entiers m et n où $n > m$ et pour lesquels $n + m$ est un multiple de $n - m$. Étant donné que le périmètre du triangle QRS est égal à p et que le nombre de valeurs entières possibles de p est égal à $m^2 + 2m - 1$, que serait la valeur de $n - m$?



(A) 4 **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 2 **(E)** 5

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2019! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
- plus d'information à propos du concours Hypatie
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11e et 12e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^e année – Sec. V)

le mardi 27 février 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 28 février 2018
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 60 minutes

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable, telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera, (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation:	Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.* On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $2016 - 2017 + 2018 - 2019 + 2020$?

   (A) 2012 **(B)** 2014 **(C)** 2016 **(D)** 2018 **(E)** 2020

2. Lundi, la température minimale à Fermatville était de $-11\,^\circ$C et la température maximale était de $14\,^\circ$C. Quelle était l'étendue des températures à Fermatville lundi ?

   (A) $3\,^\circ$C **(B)** $25\,^\circ$C **(C)** $14\,^\circ$C **(D)** $11\,^\circ$C **(E)** $23\,^\circ$C

3. Si $x = -2$ et $y = -1$, quelle est la valeur de l'expression $(3x + 2y) - (3x - 2y)$?

   (A) -4 **(B)** 12 **(C)** 0 **(D)** 4 **(E)** 8

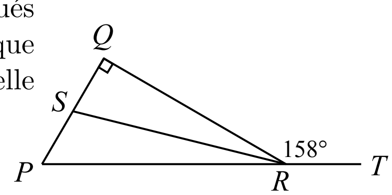
4. Combien d'entiers sont supérieurs à $\frac{5}{7}$ et inférieurs à $\frac{28}{3}$?

   (A) 1 **(B)** 9 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 3

5. Les signes $\heartsuit$ et ∇ représentent deux entiers différents strictement positifs et inférieurs à 20. Sachant que $\heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = \nabla$, quelle est la valeur de $\nabla \times \nabla$?

   (A) 12 **(B)** 16 **(C)** 36 **(D)** 64 **(E)** 81

6. Dans la figure ci-contre, les points R et S sont situés sur les segments respectifs PT et PQ. Sachant que $\angle PQR = 90^\circ$, $\angle QRT = 158^\circ$ et $\angle PRS = \angle QRS$, quelle est la mesure de l'angle QSR ?



   (A) 34° **(B)** 22° **(C)** 68° **(D)** 11° **(E)** 79°

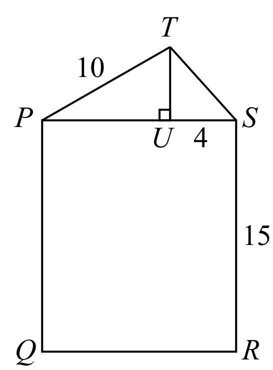
7. Bev conduit de Waterloo ON à Marathon ON. Elle a déjà parcouru 312 km. Il lui reste encore 858 km à parcourir. Combien lui reste-t-il à parcourir avant d'être à mi-chemin entre Waterloo et Marathon ?

   (A) 585 km **(B)** 273 km **(C)** 312 km **(D)** 429 km **(E)** 196.5 km

8. Pour quelle valeur de k la droite qui passe aux points $(3, 2k + 1)$ et $(8, 4k - 5)$ est-elle parallèle à l'axe des abscisses ?

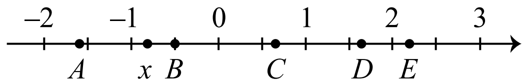
   (A) 3 **(B)** -4 **(C)** 2 **(D)** 0 **(E)** -1

9. Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un rectangle et $SR = 15$. Le point T est situé au-dessus de PS et le point U est situé sur PS de manière que TU soit perpendiculaire à PS. Sachant que $PT = 10$, que $US = 4$ et que $PQRS$ a une aire de 180, quelle est l'aire du triangle PTS ?



   (A) 60 **(B)** 36 **(C)** 48 **(D)** 24 **(E)** 12

10. Dans la figure suivante, la droite numérique de -2 à 3 est divisée en 10 parties égales. Les entiers -1, 0, 1 et 2 sont aussi indiqués, de même que les nombres A, x, B, C, D et E. Quel nombre est plus près de la valeur de x^2 ?



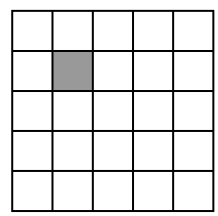
(A) A **(B)** B **(C)** C **(D)** D **(E)** E

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Un sac contient 8 boules rouges, un nombre de boules blanches et aucune autre boule. Sachant que $\frac{5}{6}$ des boules dans le sac sont blanches, combien y a-t-il de boules blanches dans le sac ?

(A) 48 **(B)** 20 **(C)** 40 **(D)** 32 **(E)** 30

12. Dans le quadrillage 5×5 ci-contre, on peut former beaucoup de carrés en utilisant les lignes du quadrillage. Combien de ces carrés contiennent le carré 1×1 ombré ?



(A) 15 **(B)** 16 **(C)** 11
(D) 12 **(E)** 14

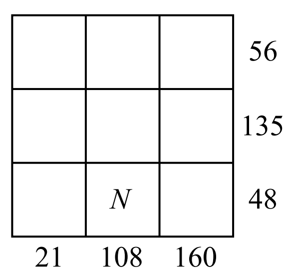
13. Une horloge numérique indique l'heure, 4:56. Combien de minutes s'écouleront avant la prochaine fois où tous les chiffres de l'horloge seront consécutifs et en ordre croissant?

(A) 458 **(B)** 587 **(C)** 376 **(D)** 315 **(E)** 518

14. La droite d'équation $y = x$ subit une translation de 3 unités vers la droite et de 2 unités vers le bas. Quelle est l'ordonnée à l'origine de la droite qui en résulte ?

(A) -1 **(B)** -2 **(C)** -5 **(D)** 3 **(E)** 4

15. Francesca a placé les entiers $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et 9 dans les neuf cases du quadrillage. Elle a placé un entier dans chaque case et aucun entier n'a été utilisé plus d'une fois. Elle a calculé le produit des trois nombres de chaque rangée et inscrit les produits à la droite des rangées correspondantes. Elle a calculé le produit des trois nombres de chaque colonne et inscrit les produits au-dessous des colonnes correspondantes. Elle a ensuite effacé les entiers des neuf cases. Quel entier était situé dans la case indiquée par un N ?

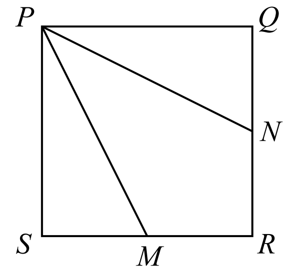


(A) 3 **(B)** 8 **(C)** 9
(D) 6 **(E)** 4

16. P et Q sont deux points distincts du plan cartésien. À combien d'endroits du plan cartésien peut-on placer un troisième point, R, de manière que $PQ = QR = PR$?

(A) 6 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

17. Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un carré avec des côtés de longueur 2. Les points M et N sont les milieux respectifs des côtés SR et RQ. Quelle est la valeur de $\cos(\angle MPN)$?



(A) $\frac{4}{5}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(C)** $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **(D)** $\frac{1}{3}$ **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

18. Soit m et n deux entiers positifs tels que $\sqrt{7+\sqrt{48}} = m + \sqrt{n}$. Quelle est la valeur de $m^2 + n^2$?

(A) 37 **(B)** 25 **(C)** 58 **(D)** 29 **(E)** 13

19. Radford et Pierre ont participé à une course dans laquelle chacun a couru à une vitesse constante. Radford a commencé la course 30 m devant Pierre. Après 3 minutes, Pierre était 18 m devant Radford. Pierre a gagné la course en terminant exactement 7 minutes après le départ. À quelle distance Radford était-il de la ligne d'arrivée lorsque Pierre a gagné ?

(A) 16 m **(B)** 64 m **(C)** 48 m **(D)** 82 m **(E)** 84 m

20. Combien y a-t-il de valeurs entières strictements positives de x qui vérifient l'inéquation $(x-2)(x-4)(x-6)\cdots(x-2016)(x-2018) \leq 0$? (Le produit dans le membre de gauche de l'inéquation est constitué de 1009 facteurs de la forme $x - 2k$, les entiers k étant dans l'intervalle $1 \leq k \leq 1009$.)

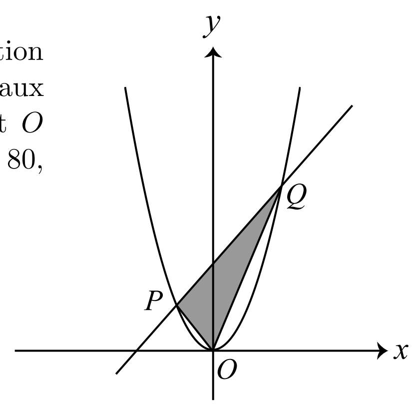
(A) 1009 **(B)** 1010 **(C)** 1514 **(D)** 1515 **(E)** 1513

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Une suite est composée de termes $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Le premier terme est $a_1 = x$ et le troisième terme est $a_3 = y$. Chaque terme après le premier est égal à 1 de moins que la somme du terme précédent et du terme suivant (c.-à-d. que lorsque $n \geq 1$, alors $a_{n+1} = a_n + a_{n+2} - 1$). Quelle est la somme des 2018 premières termes de la suite ?

(A) $-x-2y+2023$ **(B)** $3x-2y+2017$ **(C)** y
(D) $x+y-1$ **(E)** $2x+y+2015$

22. On suppose que $k > 0$ et que la droite d'équation $y = 3kx + 4k^2$ coupe la parabole d'équation $y = x^2$ aux points P et Q, comme dans la figure ci-contre. Soit O l'origine. Sachant que le triangle OPQ a une aire de 80, quelle est la pente de la droite ?



(A) 4 **(B)** 3 **(C)** $\frac{15}{4}$ **(D)** 6 **(E)** $\frac{21}{4}$

23. Soit a, b et c des entiers tels que $(x-a)(x-6)+3 = (x+b)(x+c)$ pour tous les nombres réels x. Quelle est la somme de toutes les valeurs possibles de b ?

(A) -12 **(B)** -24 **(C)** -14 **(D)** -8 **(E)** -16

24. Wilfrid a 3 seaux verts, 3 seaux rouges, 3 seaux bleus et and 3 seaux jaunes. Il distribue au hasard 4 rondelles de hockey dans les seaux verts, les chances de chaque rondelle étant égales d'aboutir dans n'importe quel des seaux verts. De même, il distribue au hasard 3 rondelles dans les seaux rouges, 2 rondelles dans les seaux bleus et 1 rondelle dans les seaux jaunes. À la fin, quelle est la probabilité pour qu'un des seaux verts contiennent plus de rondelles que chacun des 11 autres seaux ?

(A) $\frac{97}{243}$ **(B)** $\frac{89}{243}$ **(C)** $\frac{93}{243}$ **(D)** $\frac{95}{243}$ **(E)** $\frac{91}{243}$

25. Pour chaque chiffre strictement positif C et chaque entier strictement positif k, on utilise l'expression $C_{(k)}$ pour représenter l'entier positif composé d'exactement k chiffres, chaque chiffre étant égal à C. Par exemple, $2_{(1)} = 2$ et $3_{(4)} = 3333$. Il existe N quadruplets (P, Q, R, k) où P, Q et R sont des chiffres strictement positifs, k est un entier strictement positif ($k \leq 2018$) et $P_{(2k)} - Q_{(k)} = \left(R_{(k)}\right)^2$. Quelle est la somme des chiffres de N ?

(A) 10 **(B)** 9 **(C)** 11 **(D)** 12 **(E)** 13

2018 Concours Fermat (français)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2018! Chaque année, plus de 240 000 élèves, provenant de 75 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— plus d'information à propos du concours Hypatie
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11e et 12e année
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^e année – Sec. V)

le mardi 28 février 2017

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 1er mars 2017

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 60 minutes

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

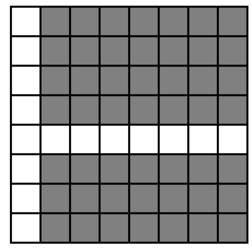
Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $6 \times 2017 - 2017 \times 4$?

(A) 2 **(B)** 20170 **(C)** 0 **(D)** 4034 **(E)** 24

2. La figure ci-contre présente un quadrillage 8×8. Combien de carrés 1×1 sont ombrés ?

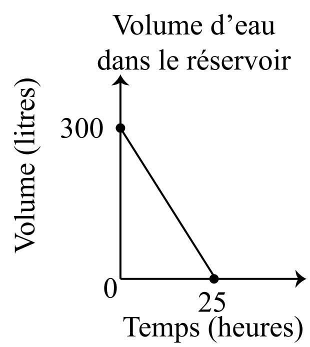


(A) 53 **(B)** 51 **(C)** 47
(D) 45 **(E)** 49

3. Trois des nombres 2, 3, 4 et 6 ont une somme de 11. Quel est le produit de ces trois nombres ?

(A) 24 **(B)** 72 **(C)** 36 **(D)** 48 **(E)** 32

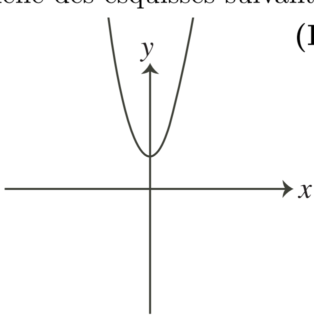
4. On vide un réservoir d'eau de 300 L à un taux constant. Le graphique ci-contre représente la relation entre le volume d'eau dans le réservoir et le temps écoulé pendant cette opération. À quel taux l'eau sort-elle du reservoir en litres par heure ?



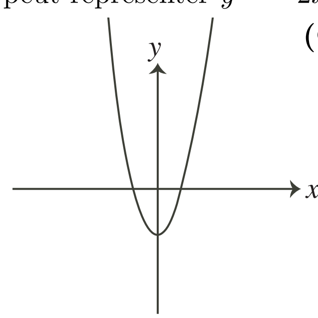
(A) 12 **(B)** 20 **(C)** 2,5
(D) 5 **(E)** 15

5. Laquelle des esquisses suivantes peut représenter $y = -2x^2 + 4$?

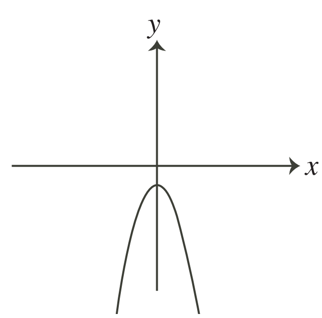
(A)



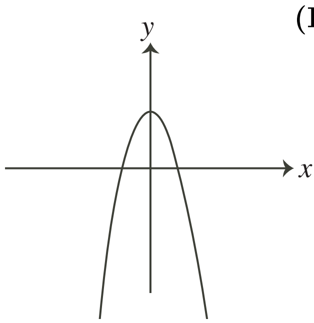
(B)



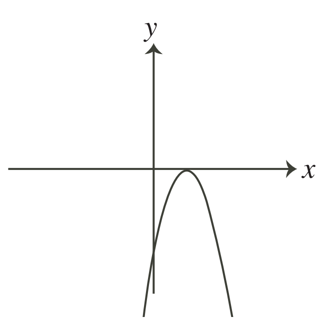
(C)



(D)



(E)



6. Émilie écrit les nombres 5, x et 9. Valentin calcule la moyenne de chaque paire de nombres et obtient 7, 10 et 12. Quelle est la valeur de x ?

(A) 5 **(B)** 15 **(C)** 3 **(D)** 25 **(E)** 1

7. Sachant que $x = 1$ est une solution de l'équation $x^2 + ax + 1 = 0$, quelle est la valeur de a ?

(A) 3 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2 **(E)** -2

8. Si $\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{4n} = \dfrac{3}{12}$, alors n est égal à :

(A) 6 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** 2 **(E)** 3

9. Kamila a éteint son ordinateur à 17 heures vendredi. Celui-ci avait été allumé pendant exactement 100 heures. À quelle heure Kamila avait-elle allumé son ordinateur ?

(A) 13 h mardi **(B)** 21 h lundi **(C)** 14 h mardi
(D) 13 h lundi **(E)** 21 h mercredi

10. La somme de quatre entiers strictement positifs distincts est égale à 100. Le plus grand de ces quatre entiers est n. Quelle est la plus petite valeur possible de n ?

(A) 26 **(B)** 50 **(C)** 28 **(D)** 27 **(E)** 94

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Jeudi dernier, chaque élève de la classe de Monsieur Fermat a apporté un fruit en classe. Chacun a apporté une pomme, une banane ou une orange. De fait, 20 % des élèves ont apporté une pomme, 35 % des élèves ont apporté une banane et 9 élèves ont apporté une orange. Combien y avait-il d'élèves dans la classe ?

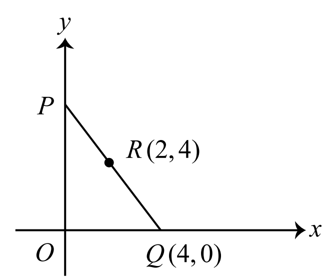
(A) 18 **(B)** 64 **(C)** 24 **(D)** 20 **(E)** 40

12. On place des chiffres dans les deux cases de 2☐☐, soit un chiffre par case, pour créer un entier positif de trois chiffres. De combien de façons peut-on le faire pour que l'entier de trois chiffres sont supérieur à 217 ?

(A) 81 **(B)** 82 **(C)** 83 **(D)** 92 **(E)** 93

13. Dans la figure ci-contre, P est situé sur l'axe des ordonnées, Q a pour coordonnées $(4, 0)$, et PQ passe au point $R(2, 4)$. Quelle est l'aire du triangle OPQ ?

(A) 8 **(B)** 12 **(C)** 32
(D) 24 **(E)** 16



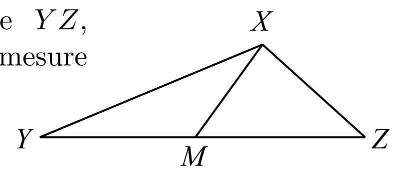
14. L'expression

$$\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{4}\right)\left(1+\tfrac{1}{5}\right)\left(1+\tfrac{1}{6}\right)\left(1+\tfrac{1}{7}\right)\left(1+\tfrac{1}{8}\right)\left(1+\tfrac{1}{9}\right)$$

est égale à :

(A) 5 **(B)** $\frac{10}{9}$ **(C)** 9 **(D)** $9\frac{1}{8}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

15. Dans la figure ci-contre, M est le milieu de YZ, $\angle XMZ = 30^\circ$ et $\angle XYZ = 15^\circ$. Quelle est la mesure de l'angle XZY ?



(A) 75° **(B)** 65° **(C)** 60° **(D)** 80° **(E)** 85°

16. Si $x + 2y = 30$, quelle est la valeur de $\dfrac{x}{5} + \dfrac{2y}{3} + \dfrac{2y}{5} + \dfrac{x}{3}$?

(A) 8 **(B)** 16 **(C)** 18 **(D)** 20 **(E)** 30

17. Aaron a 144 cubes identiques dont les arêtes mesurent 1 cm. Il utilise tous les cubes pour construire un prisme droit à base rectangulaire qu'il place à plat sur une table. La base du prisme a un périmètre de 20 cm. Quelle est la somme de toutes les hauteurs possibles du prisme ?

(A) 31 cm **(B)** 25 cm **(C)** 15 cm **(D)** 22 cm **(E)** 16 cm

18. Étant donné un nombre réel strictement positif quelconque x, $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $\lfloor 4{,}2 \rfloor = 4$ et $\lfloor 3 \rfloor = 3$. Si $\lfloor x \rfloor \cdot x = 36$ et $\lfloor y \rfloor \cdot y = 71$ $(x, y > 0)$, quelle est la valeur de $x + y$?

(A) $\frac{107}{8}$ **(B)** $\frac{119}{8}$ **(C)** $\frac{125}{9}$ **(D)** $\frac{107}{6}$ **(E)** $\frac{101}{7}$

19. Un point est *équidistant des axes* si la distance verticale du point à l'axe des abscisses est égale à la distance horizontale du point à l'axe des ordonnées. Le point d'intersection de la droite verticale d'équation $x = a$ et de la droite d'équation $3x + 8y = 24$ est équidistant des deux axes. Quelle est la somme de toutes les valeurs possibles de a ?

(A) 0 **(B)** $-\frac{144}{55}$ **(C)** $-\frac{11}{5}$ **(D)** $\frac{24}{11}$ **(E)** 8

20. Si m et n sont des entiers strictement positifs, avec $n > 1$, tels que $m^n = 2^{25} \times 3^{40}$, quelle est la valeur de $m + n$?

(A) 209 962 **(B)** 1954 **(C)** 209 957 **(D)** 6598 **(E)** 1 049 760

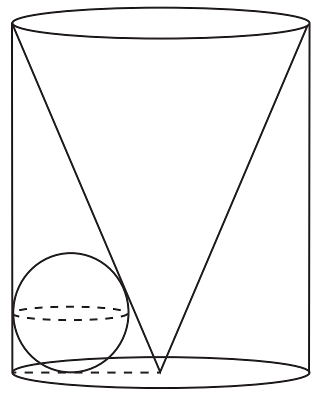
Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Dans la somme ci-contre, chaque lettre représente un chiffre distinct avec $T \neq 0$ et $W \neq 0$. Combien y a-t-il de valeurs différentes possibles de U ?

$$\begin{array}{cccccc} & & W & X & Y & Z \\ + & & W & X & Y & Z \\ \hline & T & W & U & Y & V \end{array}$$

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

22. Un cylindre a un rayon de 12 et une hauteur de 30. La base circulaire supérieure du cylindre est la base d'un cône et le centre de la base circulaire inférieure du cylindre est le sommet du cône. On place une sphère à l'intérieur du cylindre de manière qu'elle touche au cône, à la base du cylindre et à la surface latérale du cylindre, comme dans la figure ci-contre. Laquelle des valeurs suivantes est plus près du rayon de la sphère ?



(A) 4,84 **(B)** 4,74 **(C)** 4,64 **(D)** 4,54 **(E)** 4,44

23. Céline a choisi des entiers strictement positifs a, b et c.

Ariane a calculé la valeur de $a + \dfrac{b}{c}$ pour obtenir une réponse de 101.

Isabelle a calculé la valeur de $\dfrac{a}{c} + b$ pour obtenir une réponse de 68.

Véronic a calculé la valeur de $\dfrac{a+b}{c}$ pour obtenir une réponse de k.

Quelle est la valeur de k ?

(A) 13 **(B)** 168 **(C)** 152 **(D)** 12 **(E)** 169

24. Huit équipes participent à un tournoi. Chaque paire d'équipes joue exactement un match l'une contre l'autre. Il n'y a aucun match nul. Si les deux résultats possibles de chaque match sont équiprobables, quelle est la probabilité pour que chaque équipe perde au moins un match et gagne au moins un match ?

(A) $\frac{1799}{2048}$ **(B)** $\frac{1831}{2048}$ **(C)** $\frac{1793}{2048}$ **(D)** $\frac{903}{1024}$ **(E)** $\frac{889}{1024}$

25. Soit $r = \sqrt{\frac{\sqrt{53}}{2} + \frac{3}{2}}$. Il existe exactement un triplet (a, b, c) d'entiers strictement positifs tels que :

$$r^{100} = 2r^{98} + 14r^{96} + 11r^{94} - r^{50} + ar^{46} + br^{44} + cr^{40}$$

Quelle est la valeur de $a^2 + b^2 + c^2$?

(A) 11 421 **(B)** 20 229 **(C)** 16 291 **(D)** 15 339 **(E)** 17 115

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2017! Chaque année, plus de 235 000 élèves, provenant de 75 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— plus d'information à propos du concours Hypatie
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11e et 12e année
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^{e} année – Sec. V)

le mercredi 24 février 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 25 février 2016
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 60 minutes

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

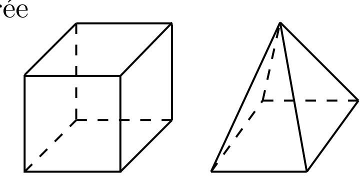
Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Sachant que $x = 3$, $y = 2x$ et $z = 3y$, quelle est la valeur de z ?

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 6 **(D)** 18 **(E)** 15

2. Comme on le voit dans la figure ci-contre, un cube a 12 arêtes. Combien d'arêtes une pyramide à base carrée a-t-elle ?

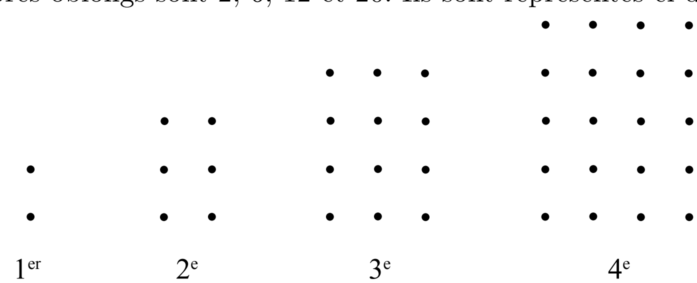


(A) 6 **(B)** 12 **(C)** 8
(D) 4 **(E)** 10

3. Quelle est la valeur de l'expression $\dfrac{20 + 16 \times 20}{20 \times 16}$?

(A) 20 **(B)** 276 **(C)** 21 **(D)** $\dfrac{9}{4}$ **(E)** $\dfrac{17}{16}$

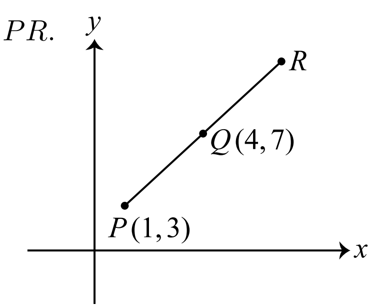
4. Un *nombre oblong* est le nombre de points dans un tableau rectangulaire de points dont le nombre de rangées est un de plus que le nombre de colonnes. Les quatre premiers nombres oblongs sont 2, 6, 12 et 20. Ils sont représentés ci-dessous :



Quel est le 7e nombre oblong ?

(A) 42 **(B)** 49 **(C)** 56 **(D)** 64 **(E)** 72

5. Dans la figure ci-contre, le point Q est le milieu de PR. Quelles sont les coordonnées de R ?



(A) $(2, 5)$ **(B)** $(7, 11)$ **(C)** $(6, 9)$
(D) $(8, 10)$ **(E)** $(9, 15)$

6. Carrine envoie à son frère cinq textos chaque samedi et cinq textos chaque dimanche. Chaque autre jour de la semaine, elle envoie deux textos à son frère. Dans l'espace de quatre semaines complètes, combien de textos Carrine envoie-t-elle à son frère ?

(A) 15 **(B)** 28 **(C)** 60 **(D)** 80 **(E)** 100

7. Quelle est la valeur de l'expression $(-2)^3 - (-3)^2$?

(A) -17 **(B)** 1 **(C)** -12 **(D)** 0 **(E)** -1

8. Si $\sqrt{25-\sqrt{n}}=3$, quelle est la valeur de n ?

(A) 4 **(B)** 16 **(C)** 64 **(D)** 484 **(E)** 256

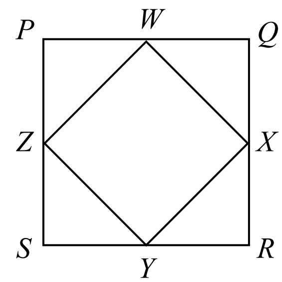
9. Sachant que $x\,\%$ de 60 est égal à 12, quelle est la valeur de $15\,\%$ de x ?

(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** 4 **(D)** 3 **(E)** 9

10. Dans la figure ci-contre, le carré $PQRS$ a des côtés de longueur 2. Les points W, X, Y et Z sont les milieux des côtés du carré $PQRS$. Quel est le rapport de l'aire du carré $WXYZ$ à l'aire du carré $PQRS$?

(A) $1:2$ **(B)** $2:1$ **(C)** $1:3$

(D) $1:4$ **(E)** $\sqrt{2}:2$

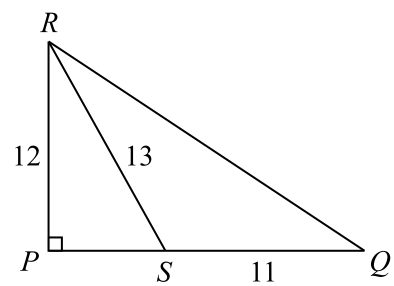


Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Dans la figure ci-contre, le triangle PQR est rectangle en P et $PR = 12$. Le point S est situé sur PQ de manière que $SQ = 11$ et $SR = 13$. Quel est le périmètre du triangle QRS ?

(A) 47 **(B)** 44 **(C)** 30

(D) 41 **(E)** 61



12. Parmi les diviseurs positifs de 128, combien sont des carrés parfaits supérieurs à 1 ?

(A) 2 **(B)** 5 **(C)** 1 **(D)** 3 **(E)** 4

13. Les nombres $4x, 2x-3$ et $4x-3$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Quelle est la valeur de x ?

(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant une constante au terme précédent. Par exemple, $3, 5, 7, 9$ sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.)

(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $-\frac{4}{3}$ **(C)** $\frac{3}{2}$ **(D)** $-\frac{3}{2}$ **(E)** $-\frac{3}{4}$

14. On considère des entiers a et b avec $4 < a < b < 22$. Si les nombres $4, a, b$ et 22 ont une moyenne de 13, combien y a-t-il de couples (a, b) possibles ?

(A) 10 **(B)** 8 **(C)** 7 **(D)** 9 **(E)** 6

15. Hichem parcourt 16 km à la course en 1,5 heure. Il parcourt les 10 premiers kilomètres à une vitesse moyenne de 12 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne dans les 6 derniers kilomètres ?

(A) 8 km/h **(B)** 9 km/h **(C)** 10 km/h **(D)** 6 km/h **(E)** 12 km/h

16. Sachant que $x = 18$ est une des solutions de l'équation $x^2 + 12x + c = 0$, quelle est l'autre solution ?

(A) $x = 216$ **(B)** $x = -6$ **(C)** $x = -30$ **(D)** $x = 30$ **(E)** $x = -540$

17. On place n points à égales distances sur un cercle et ces points sont nommés, dans l'ordre, au moyen des entiers de 1 à n. On dit que deux points sont *diamétralement opposés* si le segment de droite qui les joint est un diamètre du cercle. Sachant que les points 7 et 35 sont diamétralement opposés, quelle est la valeur de n ?

(A) 54 **(B)** 55 **(C)** 56 **(D)** 57 **(E)** 58

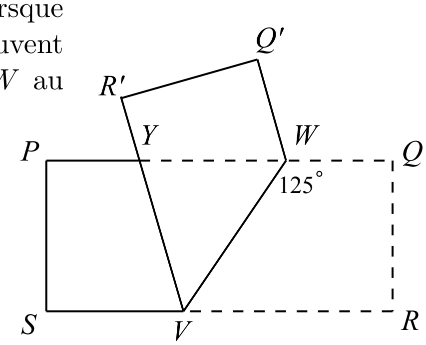
18. Sachant que x et y vérifient les équations $\dfrac{x-y}{x+y} = 9$ et $\dfrac{xy}{x+y} = -60$, quelle est la valeur de l'expression $(x+y) + (x-y) + xy$?

(A) 210 **(B)** -150 **(C)** 14160 **(D)** -14310 **(E)** -50

19. À l'école secondaire Pouliot, n élèves sont membres du club de maths. Lorsque madame Germain tente de placer les n élèves en groupes de 4, elle peut former un nombre de groupes complets, mais il reste un groupe de moins de 4 élèves. Lorsqu'elle tente de placer les n élèves en groupes de 3, elle réussit à former 3 groupes complets de plus qu'il y avait de groupes complets de 4 et il reste encore un groupe incomplet. Lorsqu'elle tente de placer les n élèves en groupes de 2, elle réussit à former 5 groupes complets de plus qu'il y avait de groupes complets de 3 et il reste encore un groupe incomplet. Quelle est la somme des chiffres de l'entier égal à $n^2 - n$?

(A) 11 **(B)** 12 **(C)** 20 **(D)** 13 **(E)** 10

20. Dans la figure ci-contre, $PQRS$ représente une feuille de papier de forme rectangulaire. La feuille est pliée le long de la ligne VW de manière que $\angle VWQ = 125°$. Lorsque la feuille pliée est aplatie, les coins R et Q se retrouvent aux points respectifs R' et Q' et $R'V$ traverse PW au point Y. Quelle est la mesure de l'angle PYV ?



(A) 110° **(B)** 100° **(C)** 95°
(D) 105° **(E)** 115°

Partie C (8 points par bonne réponse)

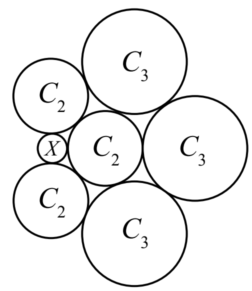
21. La boite 1 contient une bille dorée et une bille noire. La boite 2 contient une bille dorée et deux billes noires. La boite 3 contient une bille dorée et trois billes noires. Lorsqu'on prend une bille au hasard dans une des boites, chaque bille de cette boite a les mêmes chances d'être choisie. On prend une bille au hasard dans la boite 1 et on la dépose dans la boite 2. On prend ensuite une bille au hasard dans la boite 2 et on la dépose dans la boite 3. Enfin, on prend une bille au hasard dans la boite 3. Quelle est la probabilité pour que la bille choisie dans la boite 3 soit dorée ?

    (A) $\frac{11}{40}$ **(B)** $\frac{3}{10}$ **(C)** $\frac{13}{40}$ **(D)** $\frac{7}{20}$ **(E)** $\frac{3}{8}$

22. Sachant que x et y sont des nombres réels, quelle est la valeur minimale possible de l'expression $(x+3)^2 + 2(y-2)^2 + 4(x-7)^2 + (y+4)^2$?

    (A) 172 **(B)** 65 **(C)** 136 **(D)** 152 **(E)** 104

23. Sept pièces de monnaie de trois différentes grandeurs sont placées à plat sur une table, comme dans la figure ci-contre. Chaque pièce, à l'exception de celle au centre, touche à exactement trois autres pièces. La pièce au centre touche à toutes les autres pièces. Sachant que les pièces C_3 ont un rayon de 3 cm et que les pièces C_2 ont un rayon de 2 cm, alors le rayon de la pièce X est plus près de :

    (A) 0,615 cm **(B)** 0,620 cm **(C)** 0,610 cm
    (D) 0,605 cm **(E)** 0,625 cm

24. Étant donné un nombre réel x, l'expression $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $\lfloor 4{,}2 \rfloor = 4$ et $\lfloor 0{,}9 \rfloor = 0$.
    S représente la somme de tous les entiers k ($1 \le k \le 999\,999$) qui sont divisibles par $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$. Quelle est la valeur de S ?

    (A) 999 500 000 **(B)** 999 000 000 **(C)** 999 999 000
    (D) 998 999 500 **(E)** 998 500 500

25. L'ensemble $A = \{1, 2, 3, \dots, 2044, 2045\}$ contient 2045 éléments. On dit qu'un sous-ensemble S de A est *sans-triple* si aucun élément de S est égal à trois fois un autre élément de S. Par exemple, le sous-ensemble $\{1, 2, 4, 5{,}10, 2043\}$ est sans-triple, mais le sous-ensemble $\{1, 2, 4, 5, 10, 681, 2043\}$ n'est pas sans-triple. Les sous-ensembles sans-triple de A qui contiennent le plus grand nombre d'éléments contiennent exactement 1535 éléments. Il existe n sous-ensembles sans-triple de A qui contiennent exactement 1535 éléments. L'entier n peut être écrit sous la forme $p^a q^b$, p et q étant des nombres premiers distincts et a et b étant des entiers strictement positifs. Soit $N = p^2 + q^2 + a^2 + b^2$. Les trois derniers chiffres de N sont :

    (A) 202 **(B)** 102 **(C)** 302 **(D)** 402 **(E)** 502

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2016! Chaque année, plus de 220 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— plus d'information à propos du concours Hypatie
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^{e} et 12^{e} année
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^e année – Sec. V)

le mardi 24 février 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 25 février 2015
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 60 minutes

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

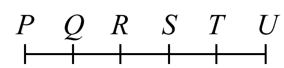
1. Quelle est la moyenne des cinq nombres 8, 9, 10, 11, 12 ?

(A) 12,5 **(B)** 8 **(C)** 9,6 **(D)** 9 **(E)** 10

2. Quelle est la valeur de $\dfrac{2 \times 3 + 4}{2 + 3}$?

(A) 2 **(B)** 5 **(C)** 8 **(D)** 4 **(E)** 11

3. Six points, P, Q, R, S, T et U, sont placés à égales distances sur une droite. Eva marche de P à U et revient à P. À quel point a-t-elle complété 70 % de son trajet ?



(A) T **(B)** Q **(C)** R
(D) S **(E)** U

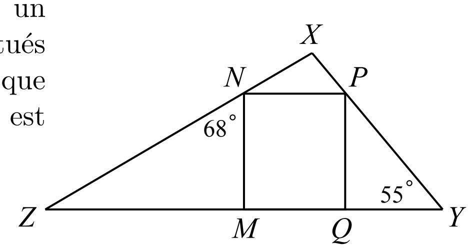
4. Si $x = -3$, quelle est la valeur de $(x-3)^2$?

(A) 12 **(B)** 36 **(C)** -12 **(D)** 0 **(E)** -36

5. Les points $P(3,-2)$, $Q(3,1)$, $R(7,1)$ et S forment un rectangle. Quelles sont les coordonnées de S ?

(A) $(-1,-2)$ **(B)** $(7,-2)$ **(C)** $(7,4)$ **(D)** $(3,7)$ **(E)** $(1,-2)$

6. Dans la figure ci-contre, $MNPQ$ est un rectangle et les points M, N, P et Q sont situés sur les côtés du triangle XYZ. Sachant que $\angle ZNM = 68°$ et que $\angle XYZ = 55°$, quelle est la mesure de l'angle YXZ ?



(A) 77° **(B)** 113° **(C)** 93°
(D) 97° **(E)** 103°

7. Valérie a la moitié de l'argent qu'il faut pour acheter un collier à sa mère. Sa soeur lui remet 30 $. Valérie a maintenant les trois quarts de l'argent qu'il lui faut. Son père accepte de lui remettre le reste de ce qu'il lui faut. Combien son père lui donnera-t-il ?

(A) 7,50 $ **(B)** 15 $ **(C)** 22,50 $ **(D)** 30 $ **(E)** 120 $

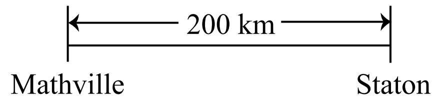
8. Sachant que x et y sont des entiers strictement positifs tels que $3^x 5^y = 225$, quelle est la valeur de $x + y$?

(A) 7 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 3 **(E)** 8

9. À l'école secondaire Paquin, 36 élèves font partie de l'équipe de baseball, de l'équipe de hockey ou des deux. Sachant que l'équipe de baseball compte 25 élèves et que l'équipe de hockey compte 19 élèves, combien d'élèves font partie des deux équipes ?

(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 11

10. Anca et Boris quittent Mathville en même temps et voyagent sur une route droite en direction de Staton. Boris conduit à une vitesse de 50 km/h. Anca conduit à une vitesse de 60 km/h, mais elle s'arrête en chemin pour se reposer. Les deux arrivent à Staton en même temps. Combien de temps Anca s'est-elle arrêtée pour se reposer ?



(A) 40 minutes **(B)** 10 minutes **(C)** 67 minutes

(D) 33 minutes **(E)** 27 minutes

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Les entiers positifs de trois chiffres, 789 et 998, n'utilisent aucun autre chiffre que 7, 8 et 9. En tout, combien y a-t-il d'entiers positifs de trois chiffres qui n'utilisent aucun autre chiffre que 7, 8 et 9 ?

(A) 36 **(B)** 6 **(C)** 9 **(D)** 18 **(E)** 27

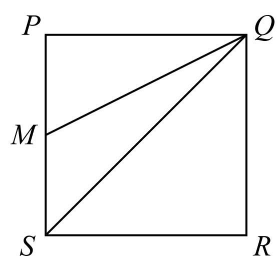
12. Sachant que $\cos 60° = \cos 45° \cos\theta$ et $0° \leq \theta \leq 90°$, quelle est la valeur de θ ?

(A) 0° **(B)** 15° **(C)** 30° **(D)** 45° **(E)** 60°

13. À la fin de l'an 2000, Steve avait 100 \$ et Wilfrid avait 10 000 \$. À la fin de chaque année suivante, Steve avait le double de l'argent qu'il avait à la fin de l'année précédente et Wilfrid avait la moitié de l'argent qu'il avait à la fin de l'année précédente. À la fin de quelle année Steve avait-il plus d'argent que Wilfrid pour la première fois ?

(A) 2002 **(B)** 2003 **(C)** 2004 **(D)** 2005 **(E)** 2006

14. Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un carré et M est le milieu de PS. Quel est le rapport de l'aire du triangle QMS à l'aire du carré $PQRS$?



(A) 1 : 6 **(B)** 1 : 4 **(C)** 1 : 3

(D) 1 : 8 **(E)** 1 : 2

15. Un examen de musique est composé de 50 questions à choix multiple. Le résultat de Zoltan est calculé :

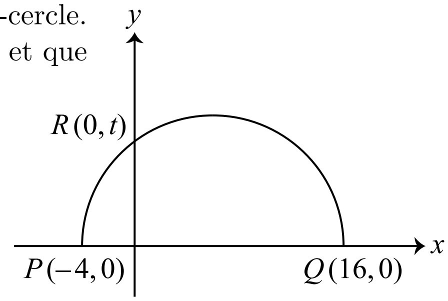
- en ajoutant 4 points pour chaque bonne réponse,
- en soustrayant 1 point pour chaque réponse erronée et
- en accordant 0 point pour chaque question laissée sans réponse.

Zoltan répond à 45 des 50 questions et il obtient un total de 135 points.
Combien de ses réponses sont *erronées* ?

(A) 9 **(B)** 15 **(C)** 41 **(D)** 40 **(E)** 5

16. Dans la figure ci-contre, le segment ayant pour extrémités $P(-4, 0)$ et $Q(16, 0)$ est le diamètre d'un demi-cercle. Sachant que le point $R(0, t)$ est situé sur le cercle et que $t > 0$, quelle est la valeur de t ?

(A) 6 **(B)** 10 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 7



17. Si a et b sont deux nombres distincts tels que $\dfrac{a+b}{a-b} = 3$, quelle est la valeur de $\dfrac{a}{b}$?

(A) -1 **(B)** 3 **(C)** 1 **(D)** 2 **(E)** 5

18. Il existe deux valeurs de k pour lesquelles l'équation $x^2 + 2kx + 7k - 10 = 0$ admet deux racines réelles égales (c.-à-d. qu'il existe une seule valeur de x comme solution). La somme de ces valeurs de k est égale à :

(A) 0 **(B)** -3 **(C)** 3 **(D)** -7 **(E)** 7

19. Trois droites parallèles ont pour ordonnées à l'origine 2, 3 et 4. Les abscisses à l'origine de ces droites ont une somme de 36. Quelle est la pente de ces droites parallèles ?

(A) $-\frac{1}{3}$ **(B)** $-\frac{2}{9}$ **(C)** $-\frac{1}{6}$ **(D)** -4 **(E)** $-\frac{1}{4}$

20. Combien y a-t-il d'entiers a $(1 \le a \le 10)$ pour lesquels $a^{2014} + a^{2015}$ est divisible par 5 ?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Amina et Ben lancent à tour de rôle une pièce de monnaie juste, Amina lançant en premier. Le jeu s'arrête lorsque chaque joueur a lancé trois fois. Le premier joueur à obtenir *pile* gagne. Si personne n'obtient *pile*, personne ne gagne. Quelle est la probabilité pour qu'Amina gagne ?

(A) $\frac{21}{32}$ **(B)** $\frac{5}{8}$ **(C)** $\frac{3}{7}$ **(D)** $\frac{11}{16}$ **(E)** $\frac{9}{16}$

22. Trois entiers distincts, a, b et c, satisfont aux trois conditions suivantes :

- $abc = 17\,955$,
- a, b et c, dans cet ordre, forment une suite arithmétique et
- $(3a + b)$, $(3b + c)$ et $(3c + a)$, dans cet ordre, forment une suite géométrique.

Quelle est la valeur de $a + b + c$?

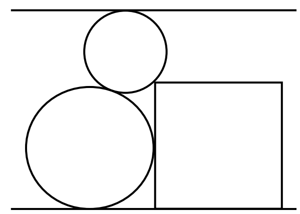
(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant une constante au terme précédent. Par exemple, 3, 5, 7 est une suite arithmétique de trois termes.
Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante non nulle. Par exemple, 3, 6, 12 est une suite géométrique de trois termes.)

(A) -63 **(B)** -42 **(C)** $-68\,229$ **(D)** -48 **(E)** 81

23. Combien y a-t-il de couples (x, y) d'entiers non négatifs, tels que $0 \leq x \leq y$, qui vérifient l'équation $5x^2 - 4xy + 2x + y^2 = 624$?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7

24. Dans la figure ci-contre, deux cercles et un carré sont situés entre deux droites parallèles ayant une distance de 400 entre elles. Le carré a des côtés de longueur 279 et un de ses côtés est situé sur la droite inférieure. Les deux cercles sont tangents l'un à l'autre et chaque cercle est tangent à une des droites. De plus, chaque cercle touche le carré en exactement un point — le cercle inférieur touche un côté du carré et le cercle supérieur touche un sommet du carré. Le cercle supérieur a un rayon de 65. Le rayon du cercle inférieur est plus près de :



(A) 151 **(B)** 152 **(C)** 153
(D) 154 **(E)** 155

25. Il existe F fractions $\frac{m}{n}$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

- m et n sont des entiers strictement positifs tels que $m < n$,
- $\frac{m}{n}$ est une fraction irréductible,
- n n'est pas divisible par le carré de n'importe quel entier supérieur à 1 et
- dans l'écriture décimale de $\frac{m}{n}$, la séquence la plus courte de chiffres qui se répète consécutivement et indéfiniment a une longueur de 6 chiffres.

  (Remarque : Dans l'écriture décimale $0{,}12\overline{745} = 0{,}12745745745\ldots$, la séquence la plus courte de chiffres qui se répète consécutivement et indéfiniment a une longueur de 3 chiffres et dans l'écriture décimale $0{,}\overline{5}$, la séquence la plus courte de chiffres qui se répète consécutivement et indéfiniment a une longueur de 1 chiffre.)

Soit $G = F + p$, l'entier F étant composé de p chiffres. Quelle est la somme des carrés des chiffres de G ?

(A) 170 **(B)** 168 **(C)** 217 **(D)** 195 **(E)** 181

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2015! Chaque année, plus de 200 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- plus d'information à propos du concours Hypatie
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^{e} et 12^{e} année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^{e} année – Sec. V)

le jeudi 20 février 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 21 février 2014
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Durée : 60 minutes

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation:	Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
	On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $\dfrac{15-3^2}{3}$?

   (A) 2 **(B)** 4 **(C)** 12 **(D)** 48 **(E)** 3

2. L'entier 2014 est situé entre les entiers :

   (A) 10^0 et 10^1 **(B)** 10^1 et 10^2 **(C)** 10^2 et 10^3
   (D) 10^3 et 10^4 **(E)** 10^4 et 10^5

3. Sachant que $x = 2$, quelle est la valeur de l'expression $(x + 2 - x)(2 - x - 2)$?

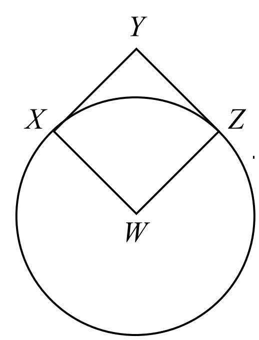
   (A) -12 **(B)** 4 **(C)** 0 **(D)** 12 **(E)** -4

4. On considère deux entiers strictement positifs x et y tels que $xy = 24$ et $x - y = 5$. Quelle est la valeur de l'expression $x + y$?

   (A) 10 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 13 **(E)** 14

5. Dans la figure ci-contre, le carré $WXYZ$ a une aire de 9 et W est le centre du cercle. Les points X et Z sont situés sur le cercle. Quelle est l'aire du cercle ?

   (A) 3π **(B)** 6π **(C)** 9π
   (D) 18π **(E)** 81π

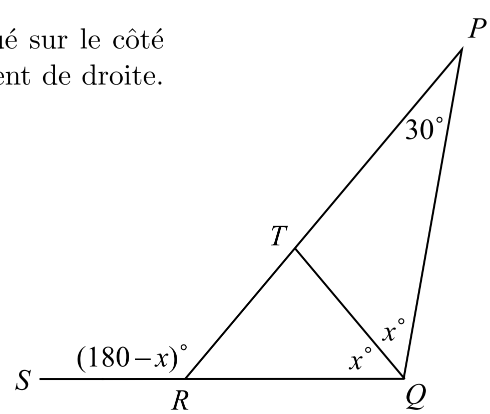


6. Sachant que 50 % de N est égal à 16, quelle est la valeur de 75 % de N ?

   (A) 12 **(B)** 6 **(C)** 20 **(D)** 24 **(E)** 40

7. Dans la figure ci-contre, le point T est situé sur le côté PR du triangle PQR et QRS est un segment de droite. Quelle est la valeur de x ?

   (A) 55 **(B)** 70 **(C)** 75
   (D) 60 **(E)** 50



8. Dans un groupe de 5 amis, on sait que :

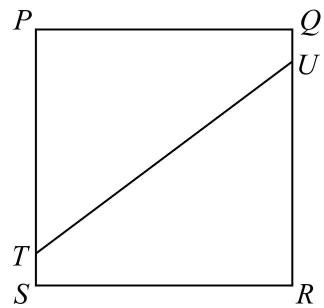
- Alexa est plus grande que Carla,
- Dan est plus court qu'Éric, mais plus grand que Boris,
- Éric est plus court que Carla.

Quelle est la personne la plus courte ?

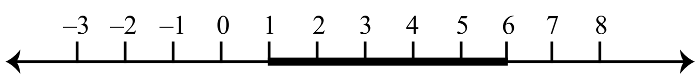
(A) Alexa **(B)** Boris **(C)** Carla **(D)** Dan **(E)** Éric

9. Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un carré avec des côtés de longueur 8. Les points T et U sont situés sur les côtés respectifs PS et QR de manière que $QU = TS = 1$. La longueur de TU est plus près de :

(A) 8,5 **(B)** 9,9 **(C)** 10
(D) 10,6 **(E)** 11,3



10. Un segment de droite de longueur 5 est situé, au départ, entre les nombres 1 et 6 sur la droite numérique.



Le segment subit une rotation de 180°, de centre au point 2. L'image du segment est maintenant située entre les points -2 et 3 sur la droite numérique. Cette image subit une rotation de 180°, de centre au point 1. L'image de cette image est maintenant située entre les points suivants sur la droite numérique :

(A) -2 et 3 **(B)** -1 et 4 **(C)** 0 et 5 **(D)** -3 et 2 **(E)** -4 et 1

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Sachant que $a = \dfrac{2}{3}b$ et $b \neq 0$, quelle est la valeur de l'expression $\dfrac{9a + 8b}{6a}$?

(A) $\dfrac{7}{2}$ **(B)** 9 **(C)** $\dfrac{3}{2}$ **(D)** $\dfrac{11}{2}$ **(E)** $\dfrac{17}{6}$

12. Sachant que $10^x \cdot 10^5 = 100^4$, quelle est la valeur de x ?

(A) 1 **(B)** 35 **(C)** 11 **(D)** $\frac{4}{5}$ **(E)** 3

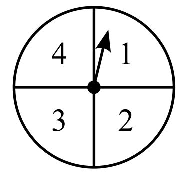
13. Combien y a-t-il d'entiers n entre 10 et 1000 dont la somme des chiffres est égale à 3 ?

(A) 10 **(B)** 8 **(C)** 6 **(D)** 9 **(E)** 7

14. L'été dernier, Paul a travaillé dans un camp d'été.
Chaque jour qu'il travaillait, il gagnait 100 \$ et ses repas étaient gratuits.
Chaque jour qu'il ne travaillait pas, il ne gagnait rien et il devait débourser 20 \$ pour ses repas.
Après 70 jours, l'argent qu'il a gagné moins l'argent qu'il a déboursé pour ses repas totalisait 5440 \$.
Sur les 70 jours, combien de jours Paul a-t-il travaillé ?

(A) 60 **(B)** 68 **(C)** 50 **(D)** 57 **(E)** 34

15. Lorsqu'on fait tourner la flèche ci-contre, elle peut s'arrêter sur n'importe quel numéro avec la même probabilité. Diane fait tourner la flèche deux fois. Elle multiplie ensuite les deux numéros sur lesquels la flèche s'est arrêtée. Lequel des produits suivants est le plus probable ?



(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 6
(D) 8 **(E)** 12

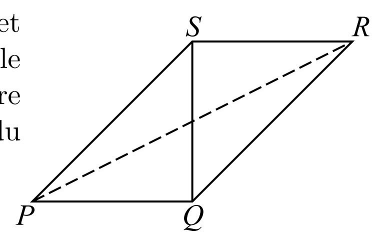
16. Au départ d'un voyage de 5 heures, le compteur kilométrique de la voiture de Jade indique 13 831 km. L'entier 13 831 est un palindrome, car on peut le lire de gauche à droite ou de droite à gauche. À la fin du voyage de 5 heures, le compteur kilométrique indique un nombre qui est un autre palindrome. Sachant que Jade n'a jamais dépassé la vitesse de 80 km/h, la vitesse moyenne maximale qu'elle a pu atteindre est plus près de :

(A) 62 km/h **(B)** 20 km/h **(C)** 42 km/h **(D)** 16 km/h **(E)** 77 km/h

17. Sergio vient de lancer un nouveau magasin. Un jour, il détermine que la moyenne d'items vendus par employé, à date, était de 75. Le lendemain, un employé a vendu 6 items, un autre employé a vendu 5 items et une autre employée a vendu 4 items. Les autres employés ont tous vendu 3 items. La moyenne d'items vendus par employé était maintenant de 78,3. Combien y a-t-il d'employés en tout ?

(A) 50 **(B)** 5 **(C)** 20 **(D)** 40 **(E)** 30

18. On a découpé un carré le long d'une diagonale et on a placé les morceaux de manière à former le parallélogramme $PQRS$ que l'on retrouve dans la figure ci-contre. Sachant que $PR = 90$ mm, quelle est l'aire du carré initial, en mm^2 ?

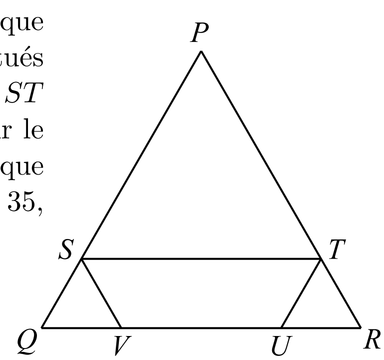


(A) 324 **(B)** 1620 **(C)** 1800
(D) 2025 **(E)** 2700

19. Max et Min Hee additionnent chacun des groupes d'entiers positifs de trois chiffres. Chacun additionne trois entiers de trois chiffres dont les neuf chiffres sont tous différents. Max crée la somme la plus grande possible. Min Hee crée la somme la plus petite possible. Quelle est la différence entre la somme de Max et celle de Min Hee ?

(A) 594 **(B)** 1782 **(C)** 1845 **(D)** 1521 **(E)** 2592

20. Dans la figure ci-contre, le triangle PQR est tel que $PQ = QR = RP = 30$. Les points S et T sont situés sur les côtés respectifs PQ et PR, de manière que ST soit parallèle à QR. Les points V et U sont situés sur le côté QR de manière que TU soit parallèle à PQ et que SV soit parallèle à PR. Sachant que $VS+ST+TU = 35$, quelle est la longueur de VU ?



(A) 21 **(B)** 15 **(C)** 18
(D) 20 **(E)** 25

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Dans une boite, il y a 10 kg d'arachides. On retire 2 kg d'arachides et on ajoute 2 kg de raisins secs et on mélange le tout. On retire 2 kg de ce mélange et on ajoute 2 kg de raisins secs et on mélange le tout de nouveau. Quel est le rapport de la masse d'arachides à la masse de raisins secs dans le mélange final ?

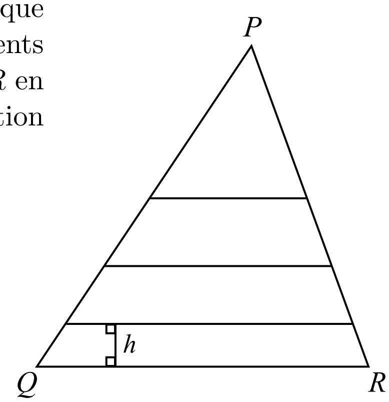
    (A) 3 : 2 **(B)** 4 : 1 **(C)** 5 : 1 **(D)** 7 : 3 **(E)** 16 : 9

22. Julie parcourt un chemin droit qui relie sa maison (J) à celle de son grand-père (G). Une partie du chemin est sur terrain plat, tandis que d'autres parties sont en montant ou en descendant. Sa voiture descend les côtes à une vitesse de 99 km/h, elle fait 77 km/h sur terrain plat et monte les côtes à une vitesse de 63 km/h. Julie met 3 heures et 40 minutes pour se rendre de J à G. Elle met 4 heures et 20 minutes pour se rendre de G à J. Quelle est la distance entre J et G, en km ?

    (A) $318\frac{2}{3}$ **(B)** 324 **(C)** 308 **(D)** $292\frac{3}{5}$ **(E)** $292\frac{1}{9}$

23. Dans la figure ci-contre, le triangle PQR est tel que $PQ = 150$ et $PR = QR = 125$. On trace trois segments parallèles à QR, de manière à diviser le triangle PQR en quatre sections de même aire. La hauteur h de la section du bas est plus près de :

    (A) 16,7 **(B)** 16,9 **(C)** 16,5
    (D) 16,3 **(E)** 16,1



24. Mohamed a huit boites numérotées de 1 à 8 et huit boules numérotées de 1 à 8. De combien de façons peut-il placer les boules dans les boites de manière que chaque boite reçoive une boule, que la boule 1 ne se retrouve pas dans la boite 1, que la boule 2 ne se retrouve pas dans la boite 2 et que la boule 3 ne se retrouve pas dans la boite 3 ?

    (A) 27 240 **(B)** 29 160 **(C)** 27 360 **(D)** 27 600 **(E)** 25 200

25. Les points $P(r, s)$ et $Q(t, u)$ sont situés sur la parabole d'équation $y = x^2 - \frac{1}{5}mx + \frac{1}{5}n$ de manière que $PQ = 13$ et que la pente de PQ soit égale à $\frac{12}{5}$. Combien y a-t-il de couples (m, n) d'entiers strictement positifs, $n \leq 1000$, pour lesquels $r + s + t + u = 27$?

    (A) 28 **(B)** 26 **(C)** 27 **(D)** 29 **(E)** 25

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2014!
En 2013, plus de 65 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Pascal, Cayley et Fermat.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web pour :
- plus d'information à propos du concours Hypatie;
- des copies gratuites des concours précédents;
- des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs;
- de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours.

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour :
- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril;
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants;
- trouver les résultats de votre école.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^e année – Sec. V)

le jeudi 21 février 2013
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 22 février 2013
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Durée : 60 minutes

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

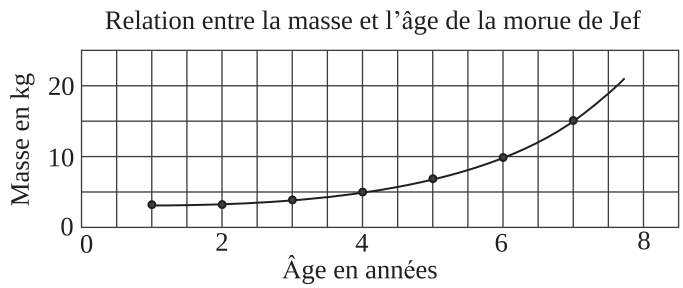
Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $\dfrac{10^2+6^2}{2}$?

   (A) 16 **(B)** 86 **(C)** 34 **(D)** 68 **(E)** 128

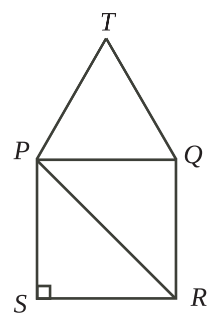
2. Le graphique suivant représente la relation entre la masse et l'âge de la morue que Jef élève. Quel est l'âge de la morue lorsqu'elle a une masse de 15 kg ?



   (A) 3 **(B)** 7 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 5

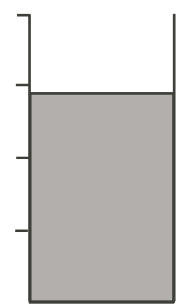
3. Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un carré et le triangle PTQ est équilatéral. Quelle est la mesure de l'angle TPR ?

   (A) 90° **(B)** 105° **(C)** 120°
   (D) 150° **(E)** 75°



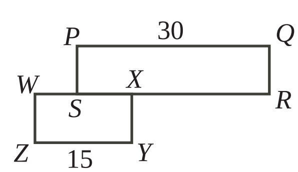
4. Le grand cylindre dans la figure ci-contre contient du lait au chocolat. Il peut contenir jusqu'à 50 L lorsqu'il est plein. Les coches indiquent la division du cylindre en quatre parties de même volume. Parmi les réponses suivantes, laquelle est la meilleure approximation du volume de lait au chocolat contenu présentement dans le cylindre ?

   (A) 24 L **(B)** 28 L **(C)** 30 L
   (D) 36 L **(E)** 40 L



5. Dans la figure ci-contre, le rectangle $PQRS$ a un côté PQ de longueur 30 et le rectangle $WXYZ$ a un côté ZY de longueur 15. Le point S est situé sur WX et le point X est situé sur SR de manière que $SX = 10$. Quelle est la longueur du segment WR ?

   (A) 20 **(B)** 25 **(C)** 55
   (D) 45 **(E)** 35



6. Sachant que $x = 11$, $y = 8$ et $2x + 3z = 5y$, quelle est la valeur de z ?

(A) 6 **(B)** $\frac{62}{3}$ **(C)** 13 **(D)** 15 **(E)** $\frac{46}{5}$

7. Si $(x + a)(x + 8) = x^2 + bx + 24$ pour toutes les valeurs de x, quelle est la valeur de $a + b$?

(A) 32 **(B)** 144 **(C)** 40 **(D)** 14 **(E)** 16

8. Quel nombre faut-il enlever de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ pour que les autres nombres de l'ensemble aient une moyenne de 6,1 ?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8

9. Un vélo se vend au prix régulier de 320 \$. Le vélo est en solde avec un rabais de 20 %. Un casque protecteur se vend au prix régulier de 80 \$. Le casque est en solde avec un rabais de 10 %. Si Sylviane achète le vélo et le casque, quel pourcentage de rabais obtient-elle sur l'achat total ?

(A) 18 % **(B)** 12 % **(C)** 15 % **(D)** 19 % **(E)** 22,5 %

10. On considère un carré $PQRS$. Le point M est le milieu de PQ et le point N est le milieu de RS. Sachant que le rectangle $PMNS$ a un périmètre de 36, quelle est l'aire du carré $PQRS$?

(A) 81 **(B)** 72 **(C)** 324 **(D)** 144 **(E)** 36

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Lundi, Ramya a lu $\frac{1}{5}$ d'un roman de 300 pages. Mardi, elle a lu $\frac{4}{15}$ des pages qu'il lui restait à lire. Combien de pages a-t-elle lues en tout lundi et mardi ?

(A) 124 **(B)** 60 **(C)** 252 **(D)** 80 **(E)** 64

12. Un entier m est choisi au hasard dans la liste $-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$. Quelle est la probabilité pour que $m^4 > 100$?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{3}{10}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{2}{5}$ **(E)** $\frac{3}{5}$

13. Sachant que $512^x = 64^{240}$, quelle est la valeur de x ?

(A) 80 **(B)** 30 **(C)** 360 **(D)** 160 **(E)** 237

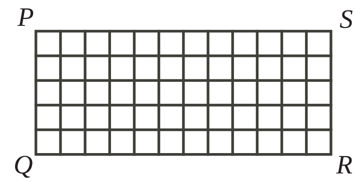
14. Dans une levée de fonds à l'école, 25 % de l'argent reçu provenait des parents. Le reste de l'argent provenait des enseignants et des élèves. Le rapport de la quantité d'argent provenant des enseignants à la quantité d'argent provenant des élèves était de 2 : 3. Quel était le rapport de la quantité d'argent provenant des parents à la quantité d'argent provenant des élèves ?

(A) 20 : 9 **(B)** 5 : 6 **(C)** 5 : 9 **(D)** 1 : 2 **(E)** 5 : 12

15. Les biscuits dans un bocal contiennent 100 raisins en tout. Tous les biscuits ont le même format et contiennent le même nombre de raisins, sauf un biscuit. Ce dernier biscuit est plus grand que les autres et il contient un raison de plus que chacun des autres. Il peut y avoir de 5 à 10 biscuits dans le bocal. Combien de raisins le grand biscuit contient-il ?

(A) 10 **(B)** 11 **(C)** 20 **(D)** 17 **(E)** 12

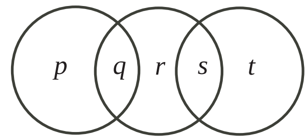
16. Un rectangle $PQRS$ est divisé en 60 petits carreaux, comme dans la figure ci-contre. Chacun de ces carreaux a une diagonale de longueur 2. La longueur de QS est plus près de :



(A) 18 **(B)** 13 **(C)** 26

(D) 24 **(E)** 17

17. Dans la figure ci-contre, p, q, r, s et t représentent cinq entiers consécutifs, mais pas nécessairement dans cet ordre. Les deux entiers dans le cercle de gauche ont une somme de 63. Les deux entiers dans le cercle de droite ont une somme de 57. Quelle est la valeur de r ?



(A) 24 **(B)** 28 **(C)** 20

(D) 42 **(E)** 30

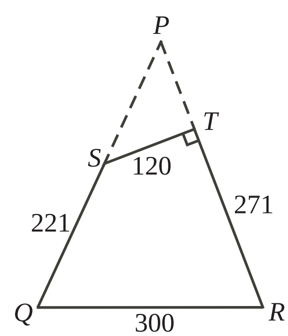
18. Sachant que m, n et p sont des entiers strictement positifs tels que $m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p}} = \frac{17}{3}$, quelle est la valeur de n ?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 1 **(D)** 17 **(E)** 13

19. Il y a deux façons de choisir six nombres différents dans la liste $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ de manière que le produit des six nombres soit un carré parfait. Soit m^2 et n^2 les deux carrés parfaits que l'on peut obtenir, m et n étant des entiers strictement positifs et $m \neq n$. Quelle est la valeur de $m + n$?

(A) 108 **(B)** 11 **(C)** 61 **(D)** 56 **(E)** 144

20. On considère un triangle isocèle PQR de manière que $PQ = PR$ et $QR = 300$. Le point S est situé sur PQ et le point T est situé sur PR de manière que ST soit perpendiculaire à PR et que $ST = 120$, $TR = 271$ et $QS = 221$. Quelle est l'aire du quadrilatère $STRQ$?

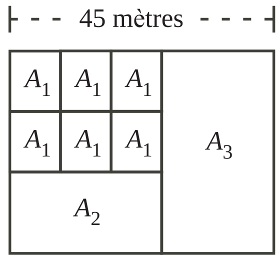


(A) 21 275 **(B)** 40 605 **(C)** 46 860

(D) 54 000 **(E)** 54 603

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Un éleveur a un champ de forme rectangulaire d'une largeur de 45 mètres. Il divise le champ en petits enclos de forme rectangulaire de trois grandeurs différentes, comme dans la figure suivante.



Les enclos A_1 ont les mêmes dimensions les uns que les autres. L'enclos A_2 a une aire qui est 4 fois l'aire d'un enclos A_1. L'enclos A_3 a une aire qui est 5 fois l'aire d'un enclos A_1. Les lignes de la figure représentent des clôtures. Les clôtures ont une longueur totale de 360 mètres. L'aire d'une région A_1, en mètres carrés, est plus près de :

(A) 143,4 **(B)** 150,0 **(C)** 175,2 **(D)** 162,7 **(E)** 405,0

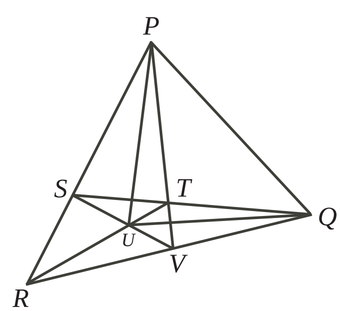
22. Magda et Sara courrent l'une contre l'autre. La gagnante de chaque course remporte x pièces d'or, tandis que la perdante remporte y pièces d'or. (Il n'y a aucune égalité et x et y sont des entiers tels que $x > y > 0$.) Après quelques courses, Magda a 42 pièces d'or et Sara a 35 pièces d'or. Sara a remporté exactement 2 courses. Quelle est la valeur de x ?

(A) 3 **(B)** 7 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 4

23. Un sac contient 2 billes rouges et 2 billes bleues. Un deuxième sac contient 2 billes rouges, 2 billes bleues et v billes vertes ($v > 0$). Pour chaque sac, Marie calcule la probabilité d'obtenir deux billes d'une même couleur en tirant au hasard deux billes du même sac, l'une après l'autre, sans remettre la première bille dans le sac. Sachant que ces deux probabilités sont égales, quelle est la valeur de v ?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8

24. Dans la figure ci-contre, on a un triangle PQR avec un point S sur PR et un point V sur RQ. Les segments QS et PV se coupent en T. Les segments RT et SV se coupent en U. Sachant que le triangle RST a une aire de 55, le triangle RTV a une aire de 66 et le triangle RSV a une aire de 77, quelle est l'aire du triangle PQU ?



(A) 869 **(B)** 836 **(C)** 840

(D) 864 **(E)** 847

25. Pour combien de valeurs entières impaires de k, de 0 à 100, l'équation

$$2^{4m^2} + 2^{m^2-n^2+4} = 2^{k+4} + 2^{3m^2+n^2+k}$$

admet-elle exactement deux couples (m, n) d'entiers strictement positifs qui sont des solutions ?

(A) 17 **(B)** 20 **(C)** 19 **(D)** 18 **(E)** 21

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2013!
En 2012, plus de 75 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Pascal, Cayley et Fermat.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web pour :
– plus d'information à propos du concours Hypatie;
– des copies gratuites des concours précédents;
– des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs;
– de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours.

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour :
– inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril;
– vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants;
– trouver les résultats de votre école.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^e année – Sec. V)

le jeudi 23 février 2012

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 24 février 2012

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Durée : 60 minutes

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur gauche de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié sur notre site web à http://www.cemc.uwaterloo.ca.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Lequel des nombres suivants *n'est pas* un nombre entier ?

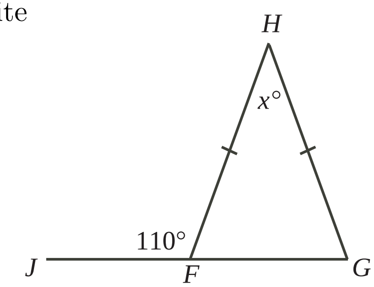
(A) $\frac{60}{12}$ **(B)** $\frac{60}{8}$ **(C)** $\frac{60}{5}$ **(D)** $\frac{60}{4}$ **(E)** $\frac{60}{3}$

2. Si $3 - 5 + 7 = 6 - x$, quelle est la valeur de x ?

(A) -3 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 11 **(E)** 15

3. Dans la figure ci-contre, JFG est un segment de droite et $HF = HG$. Quelle est la valeur de x ?

(A) 45 **(B)** 35 **(C)** 55
(D) 60 **(E)** 40

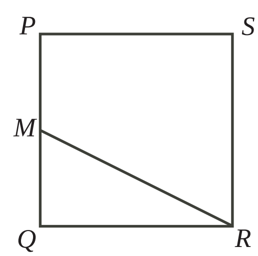


4. Quelle est la valeur de $\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)$?

(A) $\frac{5}{3}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{13}{12}$ **(D)** $\frac{31}{12}$ **(E)** $\frac{16}{7}$

5. Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un carré et M est le milieu du côté PQ. Le triangle MQR a une aire de 100. Quelle est l'aire du carré $PQRS$?

(A) 200 **(B)** 500 **(C)** 300
(D) 400 **(E)** 800

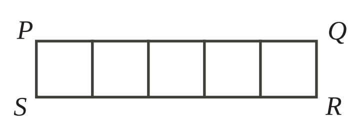


6. En quatre soirées consécutives, Jean a mangé un total de 120 arachides. Chaque soir, il a mangé 6 arachides de plus que le soir précédent. Combien d'arachides a-t-il mangées le quatrième soir ?

(A) 42 **(B)** 39 **(C)** 30 **(D)** 36 **(E)** 33

7. Le rectangle $PQRS$, ci-contre, est formé de cinq carrés identiques. Le rectangle $PQRS$ a un périmètre de 48. Quelle est l'aire du rectangle $PQRS$?

(A) 45 **(B)** 9 **(C)** 80
(D) 16 **(E)** 96



8. Si $x = 2$ et $v = 3x$, quelle est la valeur de l'expression $(2v - 5) - (2x - 5)$?

(A) 2 **(B)** 8 **(C)** -2 **(D)** -7 **(E)** 6

9. Marie et Sylvie avaient autrefois la même taille. Depuis, Sylvie a grandi de 20 % et la taille de Marie a augmenté de la moitié du nombre de centimètres qu'il y a dans l'augmentation de taille de Sylvie. Sylvie mesure maintenant 180 cm. Quelle est la taille de Marie aujourd'hui, en centimètres ?

(A) 144 **(B)** 165 **(C)** 162 **(D)** 150 **(E)** 170

10. Si $(2^a)(2^b) = 64$, quelle est la moyenne de a et de b ?

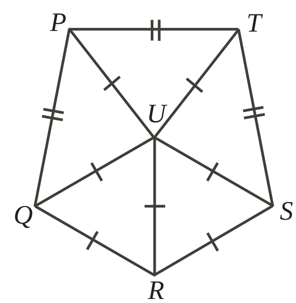
(A) 12 **(B)** $\frac{5}{2}$ **(C)** $\frac{3}{2}$ **(D)** 3 **(E)** 8

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Il y a exactement un entier impair N, entre 400 et 600, qui est divisible par 5 et par 11. Quelle est la somme des chiffres de N ?

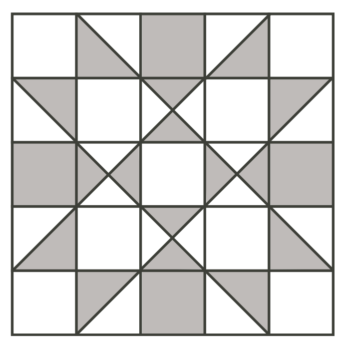
(A) 11 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 16 **(E)** 18

12. Dans la figure ci-contre, les triangles QUR et SUR sont équilatéraux, tandis que les triangles QUP, PUT et TUS sont isocèles. De plus, $PU = QU = SU = TU$ et $QP = PT = TS$. Quelle est la mesure de l'angle UST, en degrés ?



(A) 50 **(B)** 54 **(C)** 60
(D) 70 **(E)** 80

13. La figure ci-contre représente une courtepointe carrée qui contient des carrés identiques et des triangles rectangles isocèles de deux grandeurs. Quel pourcentage de la courtepointe est ombrée ?

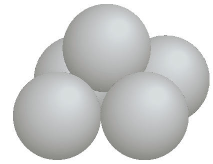


(A) 36 % **(B)** 40 % **(C)** 44 %
(D) 48 % **(E)** 50 %

14. Quel est le produit des racines de l'équation $(x - 4)(x - 2) + (x - 2)(x - 6) = 0$?

(A) 20 **(B)** 48 **(C)** 10 **(D)** 96 **(E)** 2

15. On place des oranges en couches pour former une pile de forme pyramidale. La base est un rectangle qui fait 5 oranges de large et 7 oranges de long. Après la première couche, chaque orange est placée dans le creux formé par quatre oranges de la couche en dessous, comme dans la figure ci-contre. La dernière couche est formée d'une seule rangée d'oranges. Combien y a-t-il d'oranges en tout dans la pile ?



(A) 53 **(B)** 80 **(C)** 82
(D) 85 **(E)** 105

16. Il y a 30 personnes dans une salle et 60 % d'entre elles sont des hommes. Si aucun homme n'entre dans la salle ou ne quitte la salle, combien faut-il ajouter de femmes dans la salle pour que 40 % de toutes les personnes dans la salle soient des hommes ?

(A) 10 **(B)** 6 **(C)** 20 **(D)** 12 **(E)** 15

17. Quelle est la valeur de l'expression $\dfrac{3^{2011}+3^{2011}}{3^{2010}+3^{2012}}$?

(A) $\frac{3}{5}$ **(B)** 1 **(C)** $\frac{9}{10}$ **(D)** $\frac{10}{3}$ **(E)** $\frac{2}{3}$

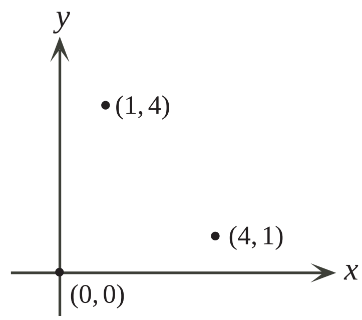
18. Si N est le plus petit entier positif dont les chiffres ont un produit de 1728, quelle est la somme des chiffres de N ?

(A) 28 **(B)** 26 **(C)** 18 **(D)** 27 **(E)** 21

19. Les points ayant pour coordonnées $(0,0)$, $(1,4)$ et $(4,1)$ sont trois sommets d'un parallélogramme. Quelle est l'aire du parallélogramme ?

(A) 15 **(B)** 19 **(C)** 16

(D) 17 **(E)** 12



20. Karine et Sarah courent à des vitesses constantes différentes. Elles ont participé à deux courses sur une piste de 100 m. Dans la première course, Sarah était 5 m derrière Karine lorsque Karine a terminé la course. Dans la deuxième course, Karine a pris le départ à 5 m derrière la ligne de départ et les deux filles ont couru à la même vitesse que dans la première course. Quel est le résultat de la deuxième course ?

(A) Karine et Sarah ont traversé la ligne d'arrivée en même temps.
(B) Lorsque Karine a traversé la ligne d'arrivée, Sarah était 0,25 m derrière.
(C) Lorsque Karine a traversé la ligne d'arrivée, Sarah était 0,26 m derrière.
(D) Lorsque Sarah a traversé la ligne d'arrivée, Karine était 0,25 m derrière.
(E) Lorsque Sarah a traversé la ligne d'arrivée, Karine était 0,26 m derrière.

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Si $x^2 = 8x + y$ et $y^2 = x + 8y$, $x \neq y$, quelle est la valeur de $x^2 + y^2$?

(A) 9 **(B)** 49 **(C)** 63 **(D)** 21 **(E)** 56

22. Dans le pays de Sanscôtes, n'importe quelles deux villes sont reliées par un chemin droit et plat. Le tableau ci-contre indique les distances entre certaines villes. La distance le long du chemin droit qui relie la ville P et la ville R est plus près de :

	P	Q	R	S
P	0	25		24
Q	25	0	25	7
R		25	0	18
S	24	7	18	0

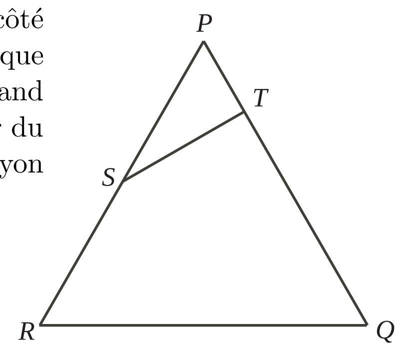
(A) 30 **(B)** 25 **(C)** 27

(D) 24,5 **(E)** 24

23. Dans un bol, il y avait 320 grammes de sucre blanc pur. On a formé le mélange Y en enlevant x grammes de sucre blanc du bol, en ajoutant x grammes de cassonade dans le bol et en mélangeant pour que le mélange soit uniforme. Dans le mélange Y, le rapport irréductible de la masse de sucre blanc à la masse de cassonade est de $b : c$. On forme le mélange Z en enlevant x grammes de mélange Y du bol, en ajoutant x grammes de cassonade dans le bol et en mélangeant pour que le mélange soit uniforme. Dans le mélange Z, le rapport irréductible de la masse de sucre blanc à la masse de cassonade est de 49 : 15. Quelle est la valeur de $x + b + c$?

(A) 48 **(B)** 49 **(C)** 139 **(D)** 76 **(E)** 104

24. Dans le triangle équilatéral PQR, S est le milieu du côté PR et T est un point sur le côté PQ de manière que $PT = 1$ et $TQ = 3$. Il est possible de tracer un grand nombre de cercles qui sont complètement à l'intérieur du quadrilatère $QRST$. Le plus grand tel cercle a un rayon qui est plus près de :



(A) 1,00 **(B)** 1,10 **(C)** 1,15

(D) 1,05 **(E)** 1,37

25. Il existe un grand nombre d'entiers strictement positifs N qui satisfont aux propriétés suivantes :

- parmi les chiffres de N, on retrouve au moins un 3, un 4, un 5 et un 6,
- parmi les chiffres de N, on ne retrouve aucun autre chiffre que 3, 4, 5 et 6 et
- les chiffres de N ont une somme de 900 et ceux de $2N$ ont une somme de 900.

Si on multiplie la plus grande valeur possible de N et la plus petite valeur possible de N, combien le produit a-t-il de chiffres ?

(A) 408 **(B)** 400 **(C)** 432 **(D)** 416 **(E)** 424

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2012!
En 2011, plus de 81 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Pascal, Cayley et Fermat.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web pour :
- plus d'information à propos du concours Hypatie;
- des copies gratuites des concours précédents;
- des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs;
- de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours.

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour :
- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril;
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants;
- trouver les résultats de votre école.

www.cemc.uwaterloo.ca

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^{e} année – Sec. V)

le jeudi 24 février 2011

Durée : 60 minutes

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur gauche de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié sur notre site web à http://www.cemc.uwaterloo.ca.

Notation:	Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.* On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $\dfrac{2+3\times 6}{23+6}$?

   (A) 1 **(B)** $\frac{11}{29}$ **(C)** $\frac{36}{29}$ **(D)** $\frac{20}{29}$ **(E)** $\frac{5}{23}$

2. Si $y = 77$, quelle est la valeur de $\dfrac{7y+77}{77}$?

   (A) 8 **(B)** 12 **(C)** 78 **(D)** 84 **(E)** 540

3. Le rectangle ci-contre a une aire de 192. Quel est le périmétre du rectangle ?

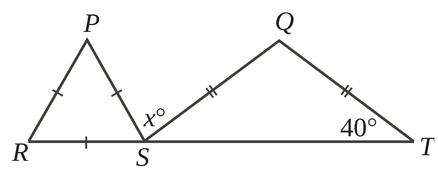
   (A) 64 **(B)** 384 **(C)** 192
   (D) 1728 **(E)** 32

4. Si $\sqrt{n+9} = 25$, quelle est la valeur de n ?

   (A) 256 **(B)** -4 **(C)** 484 **(D)** 616 **(E)** 16

5. Dans la figure ci-contre, le point S est situé sur le segment RT, $\angle QTS = 40°$, $QS = QT$ et le triangle PRS est équilatéral. Quelle est la valeur de x ?

   (A) 50 **(B)** 60 **(C)** 80
   (D) 90 **(E)** 100



6. Lorsqu'on additionne trois entiers consécutifs, on obtient un total de 27. Lorsqu'on multiplie les trois mêmes entiers, on obtient un produit de :

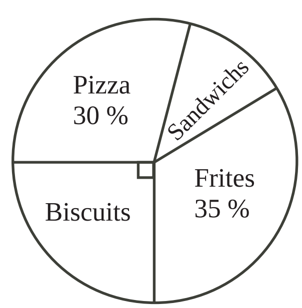
   (A) 504 **(B)** 81 **(C)** 720 **(D)** 729 **(E)** 990

7. Quel nombre est à mi-chemin entre $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{10}$?

   (A) $\frac{1}{11}$ **(B)** $\frac{1}{120}$ **(C)** $\frac{11}{60}$ **(D)** $\frac{11}{120}$ **(E)** $\frac{1}{22}$

8. Le conseil des élèves de l'école secondaire Fermat a mené un sondage pour connaître la nourriture préférée des élèves à la cafétéria. Le diagramme circulaire ci-contre représente les résultats du sondage. Parmi les 200 élèves qui ont participé au sondage, combien préfèrent les sandwichs ?

   (A) 10 **(B)** 20 **(C)** 35
   (D) 50 **(E)** 70

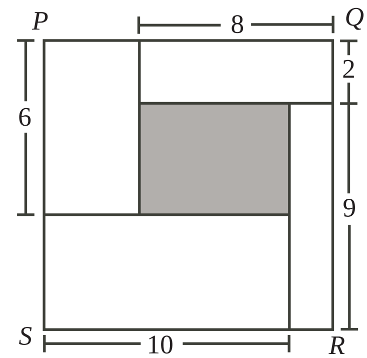


9. L'ensemble $S = \{1, 2, 3, \ldots, 49, 50\}$ contient les 50 premiers entiers strictement positifs. Lorsqu'on a enlevé les multiples de 2 et les multiples de 3, combien reste-t-il d'entiers dans l'ensemble S ?

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 16 **(D)** 17 **(E)** 18

10. Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un carré. On voit que le carré $PQRS$ est divisé en cinq rectangles. Quelle est l'aire du rectangle ombré ?

(A) 49 **(B)** 28 **(C)** 22
(D) 57 **(E)** 16



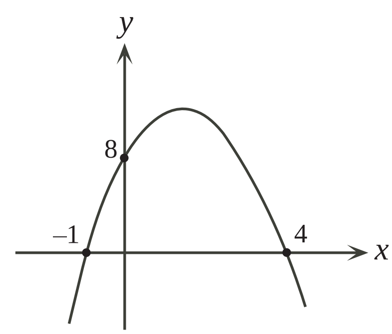
Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Un appareil distribue des boules de gomme, une à la fois, en les choisissant au hasard. Il contient 13 boules rouges, 5 boules bleues, 1 boule noire et 9 boules vertes. Quel est le nombre minimum de boules de gomme que Xavier doit acheter pour *s'assurer* qu'il aura reçu 3 boules de la même couleur ?

(A) 6 **(B)** 9 **(C)** 4 **(D)** 7 **(E)** 8

12. Dans la figure ci-contre, la parabole a des abscisses à l'origine de -1 et 4 et une ordonnée à l'origine de 8. Sachant que la parabole passe au point $(3, w)$, quelle est la valeur de w ?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6
(D) 7 **(E)** 8



13. Xavier, Yolande et Zinedine ont un total de 50 \$. Le rapport de la quantité d'argent de Xavier à la quantité totale de Yolande et de Zinedine est de 3 : 2. Yolande a 4 \$ de plus que Zinedine. Combien d'argent Zinedine a-t-il ?

(A) 16 \$ **(B)** 8 \$ **(C)** 14 \$ **(D)** 13 \$ **(E)** 30 \$

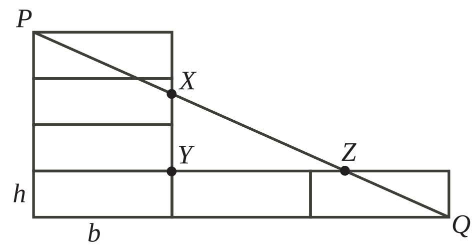
14. Laquelle des expressions suivantes *doit* donner un entier pair ?

(A) La moyenne de deux entiers pairs
(B) La moyenne de deux nombres premiers
(C) La moyenne de deux carrés parfaits
(D) La moyenne de two multiples de 4
(E) La moyenne de trois entiers consécutifs

15. Si m et n sont deux entiers consécutifs strictement positifs et si $n^2 - m^2 > 20$, quelle est la valeur minimale possible de l'expression $n^2 + m^2$?

(A) 29 **(B)** 181 **(C)** 265 **(D)** 23 **(E)** 221

16. Six rectangles identiques ayant pour hauteur h et pour base b sont placés comme dans la figure ci-contre. Le segment de droite PQ coupe le côté vertical d'un rectangle au point X et le côté horizontal d'un autre rectangle au point Z. Sachant que le triangle rectangle XYZ est tel que $YZ = 2XY$, quelle est la valeur de $\frac{h}{b}$?

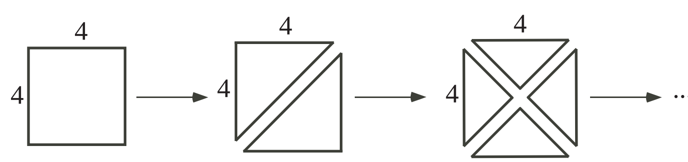


(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{3}{8}$
(D) $\frac{1}{3}$ **(E)** $\frac{3}{4}$

17. Si $3^{2x} = 64$, quelle est la valeur de 3^{-x} ?

(A) -32 **(B)** -8 **(C)** $\frac{1}{4096}$ **(D)** $\frac{1}{32}$ **(E)** $\frac{1}{8}$

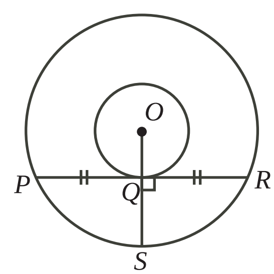
18. Un morceau de papier de forme carrée mesure 4 sur 4. Le papier est coupé le long d'une diagonale pour former deux morceaux identiques. Chacun des deux nouveaux morceaux de papier identiques est coupé en deux morceaux identiques.



Chacun des quatre nouveaux morceaux de papier identiques est coupé en deux morceaux identiques. Chacun des huit nouveaux morceaux de papier identiques est coupé en deux morceaux identiques. Quelle est la longueur du plus grand des côtés d'un de ces seize derniers morceaux de papier ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(E)** $2\sqrt{2}$

19. Dans la figure ci-contre, deux cercles ont pour centre O. Le point S est situé sur le grand cercle. Le point Q est le point d'intersection de OS et du petit cercle. Le segment de droite PR est une corde du grand cercle qui touche (c.-à-d. qui est tangent) au petit cercle au point Q. On remarque que OS est la médiatrice de PR. Sachant que $PR = 12$ et $QS = 4$, quel est le rayon du grand cercle ?



(A) 6,0 **(B)** 5,0 **(C)** 6,5
(D) 7,2 **(E)** 20,0

20. Trois nombres, a, b et c, ont une somme de 114 et un produit de 46 656. Sachant que $b = ar$ et que $c = ar^2$, r étant un nombre réel quelconque, quelle est la valeur de $a + c$?

(A) 78 **(B)** 76 **(C)** 24 **(D)** 54 **(E)** 36

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. On place les entiers strictement positifs en ordre croissant dans un tableau de forme triangulaire, comme dans le tableau ci-contre. Chaque rangée contient un nombre de plus que la rangée précédente. Quelle est la somme des nombres de la rangée qui contient le nombre 400 ?

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 $\cdots$

(A) 10 990 **(B)** 12 209 **(C)** 9855
(D) 10 976 **(E)** 11 368

22. Combien y a-t-il de couples (p, q) d'entiers strictement positifs, tels que $p + q \leq 100$, qui vérifient l'équation $\dfrac{p + q^{-1}}{p^{-1} + q} = 17$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** 5

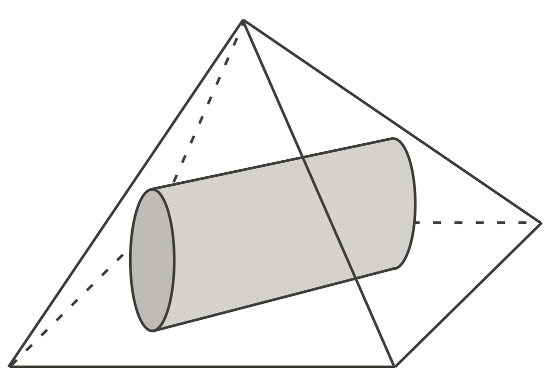
23. Ariane, Diane et Éliane peuvent chacune marcher à une vitesse de 6 km/h. Un maximum de deux personnes peut prendre place sur leur motocyclette. La moto peut se déplacer à une vitesse de 90 km/h (et elle ne peut se déplacer d'elle-même !). Soit t le nombre d'heures que les trois amies prennent pour atteindre le point d'arrivée à 135 km du point de départ. Si on omet le temps requis pour partir, s'arrêter ou changer de direction, que peut-on dire au sujet de la plus petite valeur possible de t ?

(A) $t < 3{,}9$ **(B)** $3{,}9 \leq t < 4{,}1$ **(C)** $4{,}1 \leq t < 4{,}3$
(D) $4{,}3 \leq t < 4{,}5$ **(E)** $t \geq 4{,}5$

24. Quatre nombres w, x, y et z, sont tels que $w < x < y < z$. Chacune des six paires possibles de nombres distincts a une somme différente. Les quatre plus petites sommes sont 1, 2, 3 et 4. Quelle est la somme de toutes les valeurs possibles de z ?

(A) 4 **(B)** $\frac{13}{2}$ **(C)** $\frac{17}{2}$ **(D)** $\frac{15}{2}$ **(E)** 7

25. Une pyramide a une base carrée mesurant 20 sur 20. Un cylindre droit a une longueur de 10 et sa base circulaire a un diamètre de 10. Le cylindre repose à l'horizontale, complètement à l'intérieur de la pyramide. L'axe central du cylindre est parallèle à une diagonale de la base de la pyramide et il est directement au-dessus de la diagonale. Le milieu de l'axe central est directement au-dessus du centre de la base carrée de la pyramide.



La plus petite hauteur possible de la pyramide est plus près de :

(A) 15,3 **(B)** 22,1 **(C)** 21,9 **(D)** 21,7 **(E)** 15,5

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2011!
En 2010, plus de 81 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Pascal, Cayley et Fermat.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu le 13 avril 2011.

Visitez notre site Web pour :
- plus d'information à propos du concours Hypatie;
- des copies gratuites des concours précédents;
- des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs;
- de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours.

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour :
- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu le 13 avril 2011;
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants;
- trouver les résultats de votre école.

www.cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat *(11e année – Sec. V)*

le jeudi 25 février 2010

Durée : 60 minutes

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur gauche de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié sur notre site web à http://www.cemc.uwaterloo.ca.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$?

(A) 2 **(B)** $\frac{5}{13}$ **(C)** $\frac{5}{6}$ **(D)** 1 **(E)** $\frac{13}{6}$

2. La quantité « 2 % de 1 » est égale à :

(A) $\frac{2}{100}$ **(B)** $\frac{2}{10}$ **(C)** 2 **(D)** 20 **(E)** 200

3. Dans la figure ci-contre, les points P, Q, R et S sont placés dans l'ordre sur un segment de droite. Sachant que $PQ = 1$, $QR = 2PQ$ et $RS = 3QR$, quelle est la longueur du segment PS ?

(A) 7 **(B)** 6 **(C)** 9
(D) 8 **(E)** 10

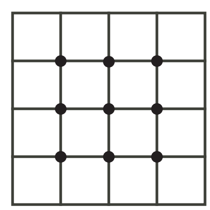
4. Si $u = -6$ et $x = \frac{1}{3}(3 - 4u)$, alors x est égal à :

(A) -23 **(B)** -7 **(C)** 9 **(D)** 2 **(E)** 25

5. Si $2^x = 16$, alors 2^{x+3} est égal à :

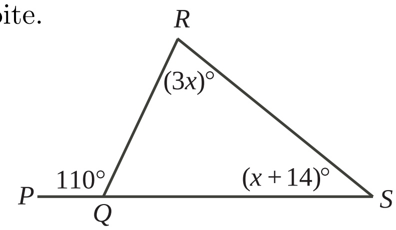
(A) 19 **(B)** 48 **(C)** 22 **(D)** 128 **(E)** 2048

6. Dans le quadrillage 4 sur 4 ci-contre, les neuf points d'intersection intérieurs sont indiqués en gras. Combien y a-t-il de points d'intersection intérieurs sur un quadrillage 12 sur 12 ?



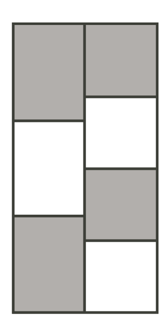
(A) 100 **(B)** 121 **(C)** 132
(D) 144 **(E)** 169

7. Dans la figure ci-contre, PQS est un segment de droite. Quelle est la valeur de x ?



(A) 19 **(B)** 62 **(C)** 21.5
(D) 24 **(E)** 32

8. Un rectangle est divisé en deux bandes verticales de même largeur. La bande de gauche est divisée en trois parties égales et la bande de droite est divisée en quatre parties égales. Des parties du rectangle sont ensuite ombrées comme dans la figure ci-contre. Quelle fraction du rectangle initial est ombrée ?



(A) $\frac{3}{5}$ **(B)** $\frac{2}{7}$ **(C)** $\frac{4}{7}$
(D) $\frac{7}{6}$ **(E)** $\frac{7}{12}$

9. La valeur de l'expression $k \nabla m$ est définie comme étant $k(k-m)$. Par exemple, $7 \nabla 2 = 7(7-2) = 35$. Quelle est la valeur de $(5 \nabla 1) + (4 \nabla 1)$?

(A) 9 **(B)** 84 **(C)** 20 **(D)** 32 **(E)** 72

10. Si $2x^2 = 9x - 4$ et $x \neq 4$, quelle est la valeur de $2x$?

(A) 4 **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** 0 **(E)** 2

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Une pièce de 1 \$ a la même masse que 4 pièces de 10 ¢. Un sac rempli de pièces de 10 ¢ a la même masse qu'un autre sac contenant des pièces de 1 \$. Les pièces de 1 \$, dans ce sac, ont une valeur totale de 400 \$. Quelle est la valeur totale des pièces de 10 ¢ dans le premier sac ?

(A) 40 \$ **(B)** 100 \$ **(C)** 160 \$ **(D)** 1000 \$ **(E)** 1600 \$

12. Lorsqu'on a distribué k bonbons à sept personnes de manière que chaque personne a reçu le même nombre de bonbons et que chaque personne a reçu autant de bonbons que possible, il est resté 3 bonbons. Si, à la place, on distribuait $3k$ bonbons de la même manière à sept personnes, combien resterait-il de bonbons à la fin ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 6 **(E)** 9

13. Cinquante nombres ont une moyenne de 76. Quarante de ces nombres ont une moyenne de 80. Quelle est la moyenne des dix autres nombres ?

(A) 60 **(B)** 4 **(C)** 72 **(D)** 40 **(E)** 78

14. Quatre amis sont allés à la pêche et ils ont attrapé un total de 11 poissons.
Chaque personne a attrapé au moins un poisson.
Chacun des énoncés suivants *pourrait* être vrai.
Lequel des énoncés *doit* être vrai ?

(A) Au moins une personne a attrapé exactement un poisson.
(B) Au moins une personne a attrapé exactement trois poissons.
(C) Au moins une personne a attrapé plus de trois poissons.
(D) Au moins une personne a attrapé moins de trois poissons.
(E) Au moins deux personnes ont chacun attrapé plus d'un poisson.

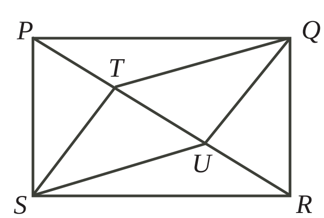
15. Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs p pour lesquels $-1 < \sqrt{p} - \sqrt{100} < 1$?

(A) 19 **(B)** 21 **(C)** 38 **(D)** 39 **(E)** 41

16. Des entiers positifs a et b vérifient l'équation $ab = 2010$. Si $a > b$, quelle est la plus petite valeur possible de $a - b$?

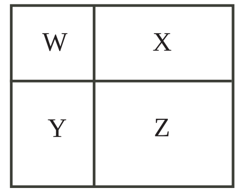
(A) 37 **(B)** 119 **(C)** 191 **(D)** 1 **(E)** 397

17. Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un rectangle, $PQ = 5$ et $QR = 3$. Les points T et U divisent le segment PR en trois segments de même longueur. Quelle est l'aire du quadrilatère $STQU$?



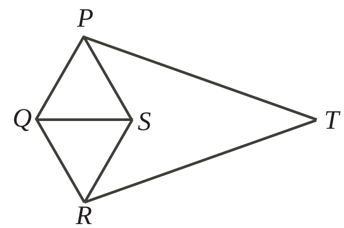
(A) $\frac{17}{3}$ **(B)** 5 **(C)** $\frac{5}{2}$
(D) $\frac{\sqrt{34}}{3}$ **(E)** $\sqrt{34}$

18. Dans la figure ci-contre, un rectangle a été divisé en quatre petits rectangles nommés W, X, Y et Z. Les rectangles W, X et Y ont un périmètre respectif de 2, 3 et 5. Quel est le périmètre du rectangle Z ?



(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 4
(D) 8 **(E)** 7.5

19. Dans la figure ci-contre, $PQ = QR = RS = SP = SQ = 6$ et $PT = RT = 14$. Quelle est la longueur de ST ?



(A) $4\sqrt{10} - 3$ **(B)** 11 **(C)** $7\sqrt{3} - 3$
(D) 10 **(E)** $\sqrt{232 - 84\sqrt{3}}$

20. Un carré a des côtés de longueur 5. À combien d'endroits peut-on placer un point X de manière que les distances du point X aux quatre côtés du carré soient égales à 1, 2, 3 et 4 ?

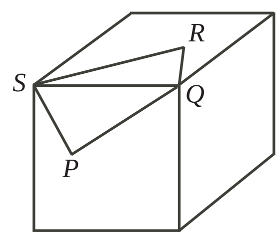
(A) 0 **(B)** 12 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** 16

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Si $\dfrac{x-y}{z-y} = -10$, quelle est la valeur de $\dfrac{x-z}{y-z}$?

(A) 11 **(B)** -10 **(C)** 9 **(D)** -9 **(E)** 10

22. Une feuille de papier $PQRS$, de forme rectangulaire, est telle que $PQ = 20$ et $QR = 15$. La feuille est collée à plat sur la surface d'un grand cube de manière que Q et S soient sur les sommets du cube. (Dans la figure ci-contre, les triangles QPS et QRS sont collés sur le devant et le dessus du cube, respectivement.) La distance la plus courte de P à R, mesurée à travers le cube, est plus près de :

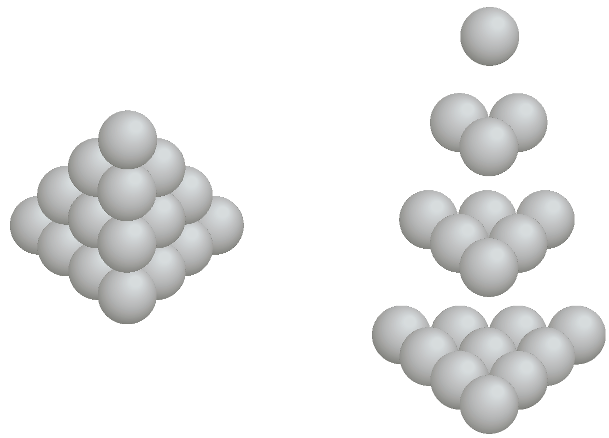


(A) 17,0 **(B)** 25,0 **(C)** 31,0
(D) 17,7 **(E)** 18,4

23. Soit t_n l'entier le plus près de $\sqrt{n}$.
Par exemple, $t_1 = t_2 = 1$ puisque $\sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{2} \approx 1{,}41$; $t_3 = 2$ puisque $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.
La somme $\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} + \dfrac{1}{t_3} + \dfrac{1}{t_4} + \cdots + \dfrac{1}{t_{2008}} + \dfrac{1}{t_{2009}} + \dfrac{1}{t_{2010}}$ est égale à :

(A) $88\frac{1}{6}$ **(B)** $88\frac{1}{2}$ **(C)** $88\frac{2}{3}$ **(D)** $88\frac{1}{3}$ **(E)** 90

24. On peut utiliser des sphères pour construire une structure en forme de tétraèdre dans laquelle les sphères forment des couches triangulaires. Chaque sphère touche aux trois sphères au-dessous d'elle. La première figure montre un tétraèdre de quatre couches et la deuxière montre les couches. Une *sphère interne*, dans le tétraèdre, est une sphère qui touche exactement aux trois sphères dans la couche au-dessus d'elle. Par exemple, il y a une sphère interne dans la quatrième couche, mais il n'y en a aucune dans les trois premières couches.



On forme un tétraèdre de treize couches dans laquelle chaque sphère porte un numéro. La sphère du dessus porte le numéro 1. Chaque autre sphère porte un numéro qui est la somme des numéros des sphères auxquelles elle touche dans la couche au-dessus d'elle. Quelle est la somme des numéros sur les sphères internes dans ce tétraèdre de treize couches ?

(A) 772 588 **(B)** 772 566 **(C)** 772 156 **(D)** 772 538 **(E)** 772 626

25. Alexa a choisi des entiers strictement positifs a, b, c, d, e et f, puis elle a développé et simplifié le produit de polynômes suivant.

$$(1-x)^a(1+x)^b(1-x+x^2)^c(1+x^2)^d(1+x+x^2)^e(1+x+x^2+x^3+x^4)^f$$

Elle a ensuite enlevé tous les termes dont le x était affecté d'un exposant supérieur à 6 et elle a été surprise de constater qu'il ne restait que $1-2x$. Si $a > d+e+f$, $b > c+d$ et $e > c$, quelle est la valeur de a qu'elle a choisie ?

(A) 17 **(B)** 19 **(C)** 20 **(D)** 21 **(E)** 23

2010 Concours Fermat (français)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2010!
En 2009, plus de 84 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Pascal, Cayley et Fermat.

Allez voir sur Facebook le groupe du CEMI « Who is The Mathiest? ».

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu le 9 avril 2010.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour :
- **plus d'information à propos du concours Hypatie;**
- **des copies gratuites des concours précédents;**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs;**
- **de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours;**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour :
- **inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu le 9 avril 2010;**
- **vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants;**
- **trouver les résultats de votre école.**

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat (11^e année – Sec. V)

Wednesday, February 18, 2009

Avec la contribution de:

Avec la participation de:

Comptables agréés

Durée : 60 minutes

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur gauche de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié sur notre site web à http://www.cemc.uwaterloo.ca.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $3 + 3^3$?

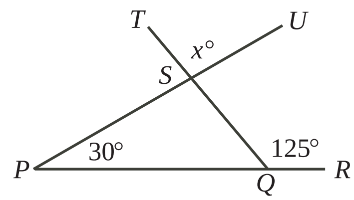
(A) 12 **(B)** 18 **(C)** 216 **(D)** 30 **(E)** 36

2. Si $3 \times 2 + 8 = \nabla + 5$, alors ∇ est égal à :

(A) 14 **(B)** 25 **(C)** 19 **(D)** 17 **(E)** 9

3. Dans la figure ci-contre, PQR, QST et PSU sont des segments de droites. Quelle est la valeur de x ?

(A) 75 **(B)** 85 **(C)** 95
(D) 125 **(E)** 155



4. Si $w = 4$, $x = 9$ et $z = 25$, alors $\sqrt{\frac{w}{x}} + \sqrt{\frac{x}{z}}$ est égal à :

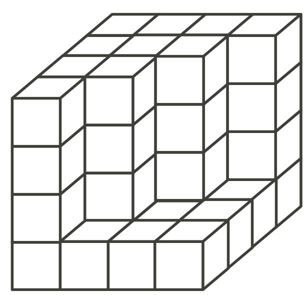
(A) $\frac{5}{8}$ **(B)** $\frac{19}{15}$ **(C)** $\frac{77}{225}$ **(D)** $\frac{181}{225}$ **(E)** $\frac{2}{5}$

5. Quelle est la valeur de $1 - 4(3-1)^{-1}$?

(A) -1 **(B)** $-\frac{3}{2}$ **(C)** 9 **(D)** 6 **(E)** $\frac{11}{3}$

6. Soixante-quatre petits cubes identiques ont été placés pour former une structure de dimensions $4 \times 4 \times 4$, puis certains des petits cubes ont été enlevés du devant de la structure, comme on le voit dans la figure ci-contre. Aucun cube caché de la vue n'a été enlevé. Combien de petits cubes reste-t-il dans la structure ?

(A) 46 **(B)** 40 **(C)** 52
(D) 55 **(E)** 49



7. Si $n > 0$ et $\sqrt{n^2 + n^2 + n^2 + n^2} = 64$, quelle est la valeur de n ?

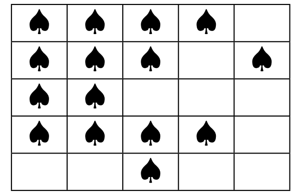
(A) $\sqrt{8}$ **(B)** 16 **(C)** 4 **(D)** 32 **(E)** $\sqrt{2}$

8. Gabrielle a une collection de 50 chansons qui ont chacune une durée de 3 minutes et de 50 chansons qui ont chacune une durée de 5 minutes. Quel est le nombre maximum de chansons de sa collection qu'elle peut jouer en 3 heures ?

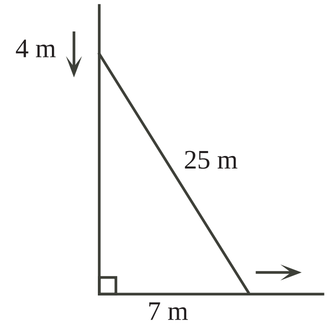
(A) 100 **(B)** 36 **(C)** 56 **(D)** 60 **(E)** 45

9. Dans la figure ci-contre, on peut déplacer n'importe quel ♠ pour le placer dans n'importe quelle case vide. Quel est le plus petit nombre de ♠ qu'il faut déplacer pour que chaque rangée et chaque colonne contienne trois ♠ ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3
(D) 4 **(E)** 5



10. Jade appuie une échelle de 25 m contre un mur vertical, le bas de l'échelle étant à 7 m du mur. (Jade est très forte — il ne faut pas chercher à l'imiter à la maison !) Ensuite, elle tire le bas de l'échelle et l'éloigne du mur, de manière que le haut de l'échelle glisse vers le bas sur une distance de 4 m. Sur quelle distance Jade a-t-elle déplacé le bas de l'échelle par rapport à sa position initiale ?



(A) 4 m **(B)** 11 m **(C)** 2 m **(D)** 13 m **(E)** 8 m

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. On considère deux entiers strictement positifs, m et n, de manière que $m < n$. La valeur de $\dfrac{m+3}{n+3}$ est :

(A) égale à 1
(B) égale à 3
(C) inférieure à celle de $\dfrac{m}{n}$
(D) supérieure à celle de $\dfrac{m}{n}$
(E) égale à celle de $\dfrac{m}{n}$

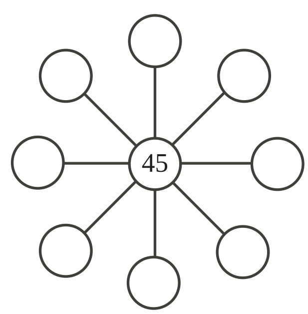
12. Combien y a-t-il d'entiers de quatre chiffres, de 5000 à 6000, dont le chiffre des milliers est égal à la somme des trois autres chiffres ? (Le chiffre des milliers de 5124 est 5.)

(A) 5 **(B)** 15 **(C)** 21 **(D)** 30 **(E)** 12

13. Combien y a-t-il de valeurs entières de x pour lesquelles la valeur de $\dfrac{-6}{x+1}$ est un entier ?

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 2 **(D)** 6 **(E)** 7

14. Il est possible d'écrire divers entiers positifs différents dans les huit cercles vides de manière que le produit de n'importe quels trois entiers sur une même ligne droite soit égal à 3240. Quelle est la plus grande somme possible des huit nombres qui entourent 45 ?

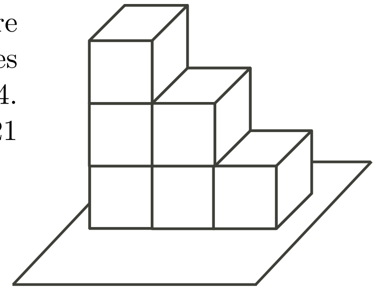


(A) 139 **(B)** 211 **(C)** 156 **(D)** 159 **(E)** 160

15. Lundi, 10 % des élèves de l'école Desloges étaient absents et 90 % des élèves étaient présents. Mardi, 10 % des élèves qui étaient absents lundi sont présents et les autres qui étaient absents lundi sont toujours absents. De plus, 10 % des élèves qui étaient présents lundi sont absents et les autres qui étaient présents lundi sont toujours présents. Quel pourcentage des élèves de l'école Desloges sont présents mardi ?

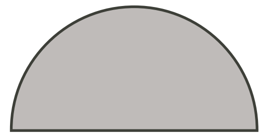
(A) 81 % **(B)** 82 % **(C)** 90 % **(D)** 91 % **(E)** 99 %

16. Six dés sont placés sur une table comme dans la figure ci-contre. Sur chaque dé, les nombres 1 et 6 sont sur des faces opposées ; il en est de même de 2 et 5 et de 3 et 4. Quelle est la somme maximale des numéros sur les 21 faces visibles ?



(A) 69 **(B)** 88 **(C)** 89
(D) 91 **(E)** 96

17. La figure ci-contre, formée d'un demi-cercle et de son diamètre, a un périmètre de 20. (Le périmètre inclut la mesure du demi-cercle et du diamètre.) Lequel des nombres suivants est la meilleure approximation de l'aire de la région ombrée ?



(A) 36,6 **(B)** 23,8 **(C)** 49,3
(D) 51,6 **(E)** 26,7

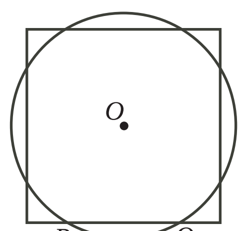
18. Lundi, Hana s'est rendue au travail en voiture à une vitesse de 70 km/h et elle est arrivée 1 minute en retard. Mardi, elle est partie à la même heure et elle a suivi le même chemin. Cette fois-ci, elle a conduit à une vitesse de 75 km/h et elle est arrivée 1 minute en avance. Quelle est la longueur du chemin qu'elle a suivi ?

(A) 30 km **(B)** 35 km **(C)** 45 km **(D)** 50 km **(E)** 60 km

19. Si $2^x = 15$ et $15^y = 32$, quelle est la valeur de xy ?

(A) 5 **(B)** 8 **(C)** 16 **(D)** 6 **(E)** 4

20. Dans la figure ci-contre, le cercle et le carré ont le même centre O et la même aire. Le cercle, qui a un rayon de 1, coupe un côté du carré aux points P et Q. Quelle est la longueur de PQ ?



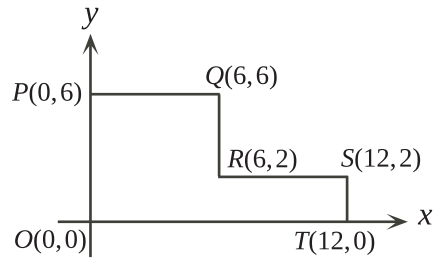
(A) $\sqrt{4-\pi}$ **(B)** 1 **(C)** $\sqrt{2}$
(D) $2-\sqrt{\pi}$ **(E)** $4-\sqrt{\pi}$

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. À la fête d'anniversaire de Matilde, le rapport du nombre de personnes qui ont mangé de la crème glacée au nombre de personnes qui ont mangé du gâteau était de 3 : 2. Les personnes qui ont mangé du gâteau et de la crème glacée ont été comptées dans les deux catégories. S'il y avait 120 personnes à la fête, quel est le nombre maximum de personnes qui pourraient avoir mangé du gâteau et de la crème glacée ?

(A) 24 **(B)** 30 **(C)** 48 **(D)** 80 **(E)** 72

22. Dans la figure ci-contre, on veut tracer deux droites qui passent au point $O(0,0)$ de manière que ces droites coupent la figure $OPQRST$ en trois parties ayant une même aire. Quelle est la somme des pentes de ces droites ?



(A) $\frac{35}{24}$ **(B)** $\frac{7}{6}$ **(C)** $\frac{5}{4}$
(D) $\frac{4}{3}$ **(E)** $\frac{11}{8}$

23. On considère quatre entiers strictement positifs, a, b, c et d, de manière que :

$$\begin{aligned} ab + cd &= 38 \\ ac + bd &= 34 \\ ad + bc &= 43 \end{aligned}$$

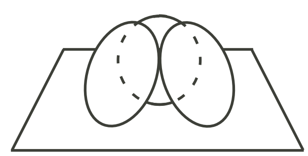
Quelle est la valeur de $a + b + c + d$?

(A) 15 **(B)** 16 **(C)** 17 **(D)** 18 **(E)** 19

24. Si on place l'entrée (m, n) dans la machine A, on obtient la sortie (n, m).
Si on place l'entrée (m, n) dans la machine B, on obtient la sortie $(m + 3n, n)$.
Si on place l'entrée (m, n) dans la machine C, on obtient la sortie $(m - 2n, n)$.
Nathalie choisit le couple $(0, 1)$ et le place comme entrée dans une des machines. Elle prend ensuite la sortie et la place comme entrée dans n'importe quelle des machines. Elle continue de la sorte en prenant la sortie à chaque fois et en la plaçant comme entrée dans n'importe quelle des machines. (Par exemple, elle peut commencer par le couple $(0, 1)$ et utiliser successivement les machines B, B, A, C et B pour obtenir la sortie finale $(7, 6)$.) Lequel des couples suivants est impossible à obtenir commençant par le couple $(0, 1)$ et en utilisant ces machines dans n'importe quel ordre n'importe quel nombre de fois ?

(A) (2009, 1016) **(B)** (2009, 1004) **(C)** (2009, 1002)
(D) (2009, 1008) **(E)** (2009, 1032)

25. Dans la figure ci-contre, trois cercles de rayon 10 sont tangents les uns aux autres et tangents à un plan dans l'espace tridimensionnel. Chaque cercle est incliné de manière à former un angle de 45° avec le plan. Les cercles se touchent les uns les autres en trois points. Ces trois points sont situés sur un cercle qui est parallèle au plan. Lequel des nombres suivants est la meilleure approximation du rayon de ce cercle ?



(A) 6,9 **(B)** 7,1 **(C)** 7,3
(D) 7,5 **(E)** 7,7

Concours canadien de mathématiques

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2009!
En 2008, plus de 83 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Pascal, Cayley et Fermat.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu le 8 avril 2009.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour :
- **plus d'information à propos du concours Hypatie;**
- **des copies gratuites des concours précédents;**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs;**
- **de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours;**
- **de l'information concernant les carrières en mathématiques.**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour :
- **inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu le 8 avril 2009;**
- **vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants;**
- **trouver les résultats de votre école.**

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat (11^e année – Sec. V)

le mardi 19 février 2008

Avec la contribution de:

University of Waterloo

Great-West Compagnie d'assurance vie

London Life

Canada-Vie

La parfaite alliance communautaire

Sybase iAnywhere

Avec la participation de:

Canadian Institute of Actuaries / Institut canadien des actuaires

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Maplesoft command the brilliance

Durée: 60 minutes

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur gauche de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont une seule est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié sur notre site web à http://www.cemc.uwaterloo.ca.

Notation:	Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*. On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2}{1\times 2\times 3}$?

   (A) 110 **(B)** 22 **(C)** $\dfrac{50}{3}$ **(D)** 5 **(E)** 14

2. Quelle est la valeur de $6\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)$?

   (A) 13 **(B)** 6 **(C)** $\frac{13}{6}$ **(D)** $\frac{29}{3}$ **(E)** 5

3. Si $1+2+3+4+5+x=21+22+23+24+25$, quelle est la valeur de x ?

   (A) 11 **(B)** 210 **(C)** 100 **(D)** 20 **(E)** 26

4. Un camion vide pèse 9600 kg. Lorsqu'on charge le camion de 40 caisses identiques, le poids total est de 38 000 kg. Quel est le poids de chaque caisse ?

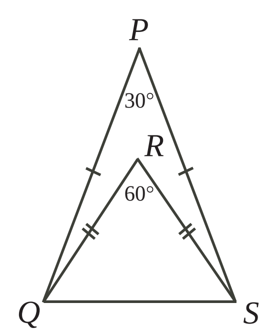
   (A) 460 kg **(B)** 950 kg **(C)** 1190 kg **(D)** 240 kg **(E)** 710 kg

5. Si $\dfrac{18}{\sqrt{x}}=2$, quelle est la valeur de x ?

   (A) 81 **(B)** 36 **(C)** 18 **(D)** 9 **(E)** 3

6. Dans la figure ci-contre, quelle est la mesure de l'angle PQR ?

   (A) 45° **(B)** 30° **(C)** 60°
   (D) 75° **(E)** 15°



7. Si p est un entier impair et si q est un entier pair, laquelle des expressions suivantes représente un entier impair ?

   (A) $2p+3q$ **(B)** $3p+2q$ **(C)** $4p+q$ **(D)** $2(p+3q)$ **(E)** pq

8. Deux nombres de trois chiffres, soit abc et def, vérifient la propriété suivante :

$$\begin{array}{rcccc} & & a & b & c \\ + & & d & e & f \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

   Aucun des chiffres a, b, c, d, e et f n'est égal à 0.
   Quelle est la valeur de $a+b+c+d+e+f$?

   (A) 10 **(B)** 19 **(C)** 21 **(D)** 28 **(E)** 30

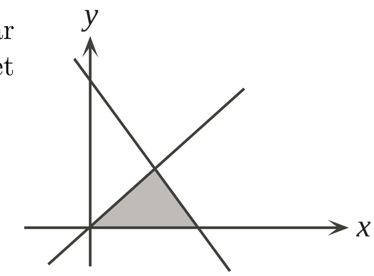
9. Beshmi a placé $\frac{1}{5}$ de ses économies dans la compagnie X, 42 % de ses économies dans la compagnie Y et le reste de ses économies dans la compagnie Z. Si Beshmi a placé 10 500 $ dans la compagnie Y, combien a-t-elle placé dans la compagnie Z ?

(A) 25 000 $ **(B)** 15 500 $ **(C)** 14 000 $ **(D)** 9500 $ **(E)** 5000 $

10. Dans la figure ci-contre, la région ombrée est bornée par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = x$ et $y = -2x + 3$. Quelle est l'aire de la région ombrée ?

(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{9}{4}$

(D) 1 **(E)** $\frac{\sqrt{10}}{4}$



Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Si $\dfrac{1}{x} = 2$ et $\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} = 3$, quelle est la valeur de $x + y$?

(A) 3 **(B)** $\frac{5}{6}$ **(C)** $\frac{7}{3}$ **(D)** $\frac{7}{2}$ **(E)** $\frac{4}{3}$

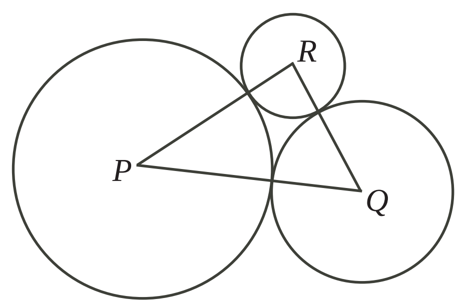
12. Siobhan a écrit sept épreuves, chacune sur 100 points. Elle a obtenu des notes de 69, 53, 69, 71, 78, x et y. La moyenne des sept notes est de 66. Quelle est la plus petite valeur possible de x ?

(A) 22 **(B)** 68 **(C)** 61 **(D)** 53 **(E)** 0

13. Dans la figure ci-contre, les cercles de centres P, Q et R ont un rayon respectif de 3, 2 et 1. Chaque cercle touche aux deux autres comme il est indiqué. Quelle est l'aire du triangle PQR ?

(A) 12 **(B)** 6 **(C)** 7,5

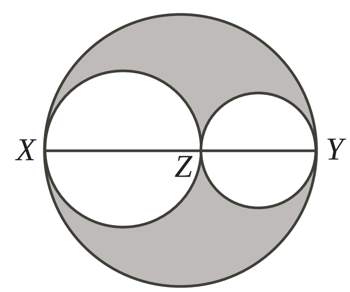
(D) 10 **(E)** 4



14. Dans la figure ci-contre, le point Z est situé sur le segment XY et les trois cercles ont pour diamètre respectif XZ, ZY et XY. Si $XZ = 12$ et $ZY = 8$, alors le rapport de l'aire de la région ombrée à l'aire de la région non ombrée est égal à :

(A) 12 : 25 **(B)** 12 : 13 **(C)** 1 : 1

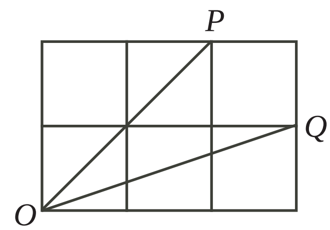
(D) 1 : 2 **(E)** 2 : 3



15. Dans une course de relais, Alice complète le 1er tour de piste en 72 secondes. Brigitte parcourt le 2e tour de piste à $\frac{9}{10}$ de la vitesse d'Alice. Cécile parcourt le 3e tour de piste à $\frac{4}{3}$ de la vitesse de Brigitte. Diane parcourt le dernier tour de piste à $\frac{6}{5}$ de la vitesse de Cécile. Quel temps ont-elles mis, à la seconde près, pour la course au complet ?

(A) 4 minutes, 48 secondes
(B) 4 minutes, 22 secondes
(C) 5 minutes, 27 secondes
(D) 4 minutes, 37 secondes
(E) 3 minutes, 46 secondes

16. Dans la figure ci-contre, les six petits carrés ont tous des côtés de longueur 2. Des segments OP et OQ ont été ajoutés. Quelle est la mesure de l'angle POQ, en degrés, au dixième près ?



(A) 15,0 **(B)** 25,5 **(C)** 26,6
(D) 22,5 **(E)** 30,0

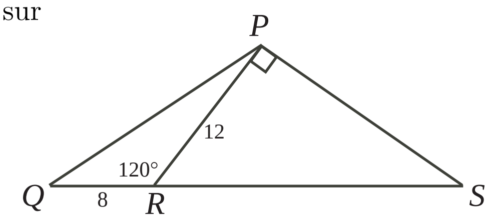
17. La différence des carrés de deux entiers consécutifs est égale à 199. Quelle est la somme des carrés de ces deux entiers consécutifs ?

(A) 19 801 **(B)** 39 601 **(C)** 19 602 **(D)** 20 201 **(E)** 19 405

18. Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant une même constante au terme précédent.
Pour deux nombres particuliers, a et b, les quatre premiers termes d'une suite arithmétique sont a, $2a$, b et $a - 6 - b$. Quelle est la valeur du 100e terme ?

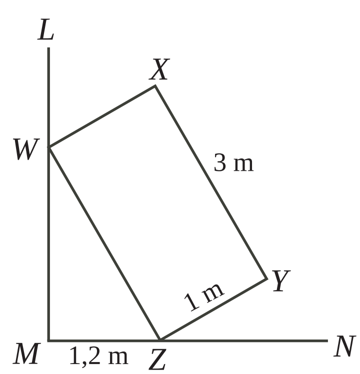
(A) -100 **(B)** -300 **(C)** 150 **(D)** -150 **(E)** 100

19. Dans la figure ci-contre, le point R est situé sur le segment QS. De plus, $QR = 8$, $PR = 12$, $\angle PRQ = 120°$ et $\angle RPS = 90°$.
Quelle est l'aire du triangle QPS ?



(A) $72\sqrt{3}$ **(B)** 72 **(C)** 36
(D) $60\sqrt{3}$ **(E)** $96\sqrt{3}$

20. Dans la figure ci-contre, LM est perpendiculaire à MN. Le sommet W du rectangle $WXYZ$ est situé sur LM et le sommet Z est situé sur MN. De plus, $YZ = 1$ m, $XY = 3$ m et $MZ = 1{,}2$ m. Quelle est la distance du point X au segment MN, au centième de mètre près ?



(A) 2,75 m **(B)** 3,67 m **(C)** 3,15 m
(D) 3,26 m **(E)** 3,63 m

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Supposons que $N = 1 + 11 + 101 + 1001 + 10001 + \ldots + 1\overbrace{000\ldots0000}^{50 \text{ zéros}}1$.
Lorsqu'on calcule la valeur de N et qu'on l'écrit sous la forme d'un seul entier, la somme de ses chiffres est égale à :

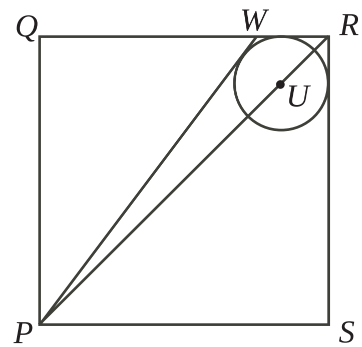
(A) 58 **(B)** 99 **(C)** 55 **(D)** 50 **(E)** 103

22. Pour combien de valeurs entières de k les paraboles d'équations $y = -\frac{1}{8}x^2 + 4$ et $y = x^2 - k$ se coupent-elles sur l'axe des abscisses ou au-dessus de cet axe ?

(A) 9 **(B)** 32 **(C)** 33 **(D)** 36 **(E)** 37

23. Le carré $PQRS$ a des côtés de longueur 4 m. Le point U est situé sur le segment PR de manière que $PR = 4UR$. Un cercle de centre U touche à deux côtés du carré. Le segment PW est tangent au cercle, W étant situé sur le segment QR. Quelle est la longueur de PW, au millième de mètre près ?

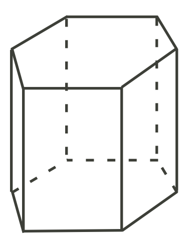
(A) 4,123 m **(B)** 4,472 m **(C)** 4,685 m
(D) 4,726 m **(E)** 4,767 m

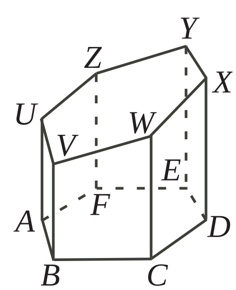


24. Combien y a-t-il de triplets (a, b, c) d'entiers positifs de manière que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{4}$?

(A) 16 **(B)** 25 **(C)** 31 **(D)** 19 **(E)** 34

25. La première figure ci-dessous est un prisme droit dont la base est un hexagone régulier. Il a été tranché pour obtenir le deuxième solide. La base du nouveau solide est un hexagone régulier $ABCDEF$. Les six faces latérales sont des trapèzes perpendiculaires à la base $ABCDEF$. Le dessus est un hexagone $UVWXYZ$ qui n'est pas nécéssairement régulier.





Parmi les six arêtes AU, BV, CW, DX, EY et FZ, trois ont une longueur respective de 4, 7 et 10.
Quelle est la plus grande valeur possible de $AU + BV + CW + DX + EY + FZ$?

(A) 42 **(B)** 51 **(C)** 69 **(D)** 78 **(E)** 91

Concours canadien de mathématiques

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2008!
En 2007, plus de 86 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Pascal, Cayley et Fermat.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu le 16 avril 2008.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **plus d'information à propos du concours Hypatie**
- **des copies gratuites des concours précédents**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs**
- **de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours**
- **de l'information concernant les carrières en mathématiques**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **inscrire vos élèvess aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu le 16 avril 2008**
- **se renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles aux enseignants**
- **trouver les résultats de votre école**

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat (11^e année – Sec. V)

Tuesday, February 20, 2007

Avec la contribution de:

University of Waterloo

Great-West Compagnie d'assurance-vie

London Life

Canada-Vie

La parfaite alliance communautaire[MC]

Sybase

iAnywhere Solutions

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Maplesoft

Avec la participation de:

Canadian Institute of Actuaries / Institut canadien des actuaires

Durée: 60 minutes

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur gauche de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont une seule est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié sur notre site web à http://www.cemc.uwaterloo.ca.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $\dfrac{36-12}{12-4}$?

   (A) 6 **(B)** 9 **(C)** 1 **(D)** 31 **(E)** 3

2. Si $7x = 28$ et $x + w = 9$, quelle est la valeur de xw ?

   (A) 9 **(B)** 20 **(C)** 18 **(D)** 52 **(E)** -252

3. Étant donné les fractions $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{7}{8}$, $\dfrac{13}{16}$ et $\dfrac{1}{2}$, quelle est la différence entre la plus grande et la plus petite de ces fractions ?

   (A) $\dfrac{3}{8}$ **(B)** $\dfrac{6}{7}$ **(C)** $\dfrac{5}{16}$ **(D)** $\dfrac{1}{16}$ **(E)** $\dfrac{1}{8}$

4. Lorsque $x = -5$, quelle est la valeur de $-2x^2 + \dfrac{5}{x}$?

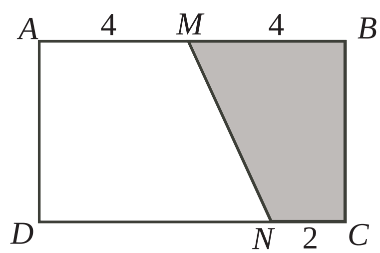
   (A) 99 **(B)** 101 **(C)** -51 **(D)** 19 **(E)** -49

5. Quelle est la valeur de $1^{-2} + 2^{-1}$?

   (A) $\frac{3}{2}$ **(B)** $\frac{1}{27}$ **(C)** 4 **(D)** -4 **(E)** 9

6. Le rectangle $ABCD$, ci-contre, a une aire de 40. Quelle est l'aire du quadrilatère ombré $MBCN$?

   (A) 15 **(B)** 10 **(C)** 30
   (D) 12 **(E)** 16



7. Trois entiers positifs ont un produit de 42. Deux de ces entiers ont une somme de 9. Quel est le troisième entier ?

   (A) 1 **(B)** 7 **(C)** 6 **(D)** 3 **(E)** 2

8. Ivan s'est entraîné pour une course de fond.
   Lundi, il a couru une certaine distance.
   Mardi, il a couru le double de ce qu'il a couru lundi.
   Mercredi, il a couru la moitié de ce qu'il a couru mardi.
   Jeudi, il a couru la moitié de ce qu'il a couru mercredi.
   Vendredi, il a couru le double de ce qu'il a couru jeudi.
   La distance la plus courte parcourue en une seule journée est de 5 km. Quelle distance a-t-il parcourue en tout ?

   (A) 55 km **(B)** 25 km **(C)** 27,5 km **(D)** 17,5 km **(E)** 50 km

9. Si $\dfrac{1}{x+3} = 2$, quelle est la valeur de $\dfrac{1}{x+5}$?

   (A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{1}{4}$ **(E)** 4

10. Dans un magasin, le prix normal d'un disque DVD est de 20 \$. Lors d'un solde, Philippa a acheté deux disques au prix régulier et un troisième disque à moitié prix. Cet achat est équivalent au taux de :

(A) 2 disques pour le prix de 1
(B) 3 disques pour le prix de 2
(C) 4 disques pour le prix de 3
(D) 5 disques pour le prix de 4
(E) 6 disques pour le prix de 5

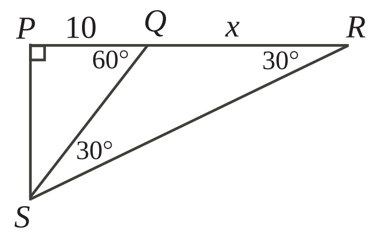
Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Voici cinq nombres en ordre croissant : 2, 5, x, 10 et y. Ces nombres ont une médiane de 7 et une moyenne de 8. Quelle est la valeur de y ?

(A) 16 **(B)** 14 **(C)** 15 **(D)** 18 **(E)** 12

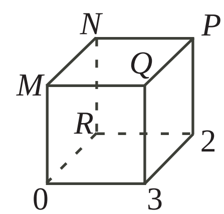
12. Dans la figure, $PQ = 10$ et $QR = x$. Quelle est la valeur de x ?

(A) $10\sqrt{3}$ **(B)** 20 **(C)** $\frac{50}{3}$
(D) $\frac{20}{\sqrt{3}}$ **(E)** 10



13. On doit placer chacun des nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 pour représenter les sommets d'un cube. Les nombres 0, 2 et 3 ont déjà été placés dans la figure. La somme des deux nombres aux extrémités de chaque arête doit être un nombre premier. (Remarque : 1 n'est pas un nombre premier.) La valeur de $M + N + P + Q$ doit être égale à :

(A) 16 **(B)** 17 **(C)** 18
(D) 19 **(E)** 22



14. Deux entiers strictement positifs, a et b, sont tels que si on augmente a de 25 %, le résultat sera *plus grand* que cinq fois la valeur de b. Quelle est la valeur minimale possible de $a + b$?

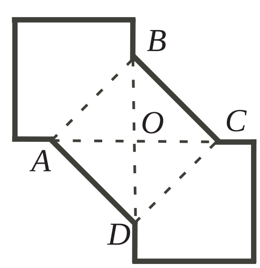
(A) 3 **(B)** 6 **(C)** 10 **(D)** 9 **(E)** 21

15. Combien y a-t-il d'entiers positifs x de trois chiffres qui vérifient la propriété suivante : tous les chiffres de x et de $2x$ sont pairs ? ($x = 420$ est un tel nombre, puisque $2x = 840$; on voit que tous les chiffres de x et de $2x$ sont pairs.)

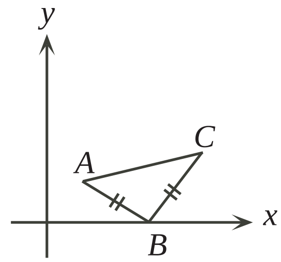
(A) 64 **(B)** 18 **(C)** 16 **(D)** 125 **(E)** 100

16. Dans la figure, chacun des trois carrés a des côtés de longueur 3. Deux des carrés ont un sommet commun O et O est le centre du carré $ABCD$. Quelle est la meilleure approximation du périmètre de la figure ?

(A) 21,5 **(B)** 22,0 **(C)** 22,5
(D) 24,0 **(E)** 30,0



17. $A(2,2)$ et $C(8,4)$ sont deux sommets du triangle rectangle isocèle ABC. B est situé sur l'axe des abscisses et $\angle ABC = 90°$. Quelle est l'abscisse de B ?

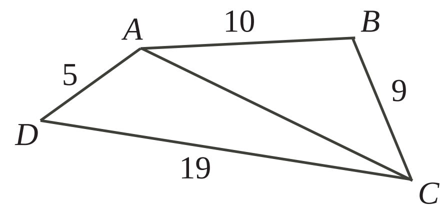


(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5
(D) 6 **(E)** 7

18. Au départ, Alphonse et Katrina avaient le *même nombre* de pommes. Katrina a donné 12 de ses pommes à Alphonse. Ensuite, Katrina a donné la moitié des pommes qui lui restaient à Alphonse. Alphonse a maintenant quatre fois autant de pommes que Katrina. Combien de pommes Katrina a-t-elle présentement ?

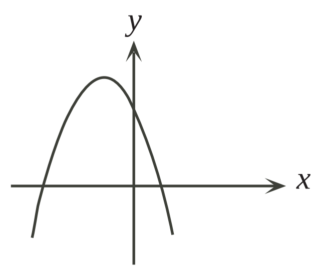
(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 36 **(D)** 48 **(E)** 72

19. Dans la figure ci-contre, AC est une diagonale du quadrilatère $ABCD$. Laquelle des longueurs suivantes est une longueur possible de AC ?



(A) 9 **(B)** 10 **(C)** 13
(D) 15 **(E)** 20

20. Dans la figure ci-contre, on a la représentation graphique de $y = ax^2 + bx + c$. Laquelle des expressions suivantes doit être positive ?



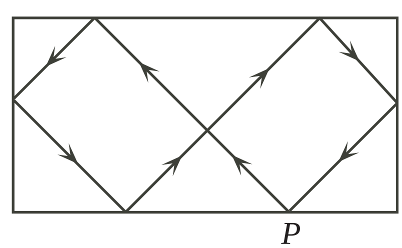
(A) a **(B)** bc **(C)** ab^2
(D) $b - c$ **(E)** $c - a$

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Cinq entiers consécutifs strictement positifs sont tels que leur somme est un cube parfait, tandis que la somme des deuxième, troisième et quatrième nombres est un carré parfait. Si m est le troisième de ces nombres, alors la valeur minimale possible de m vérifie :

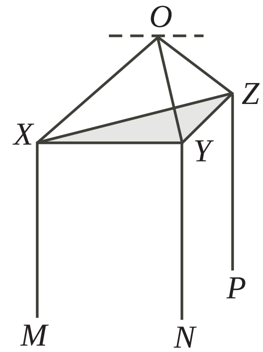
(A) $m \leq 200$
(B) $200 < m \leq 400$
(C) $400 < m \leq 600$
(D) $600 < m \leq 800$
(E) $m > 800$

22. Une balle est placée au point P sur une table de billard rectangulaire. Elle est frappée à un angle de 45° par rapport au bord de la table. Après avoir rebondi contre les bords de la table à des angles de 45°, comme dans la figure, elle retourne au point P. Si la balle parcourt une distance totale de 7 m, quelle est la meilleure approximation du périmètre de la table ?



(A) 7,0 m **(B)** 7,5 m **(C)** 8,0 m
(D) 8,5 m **(E)** 9,0 m

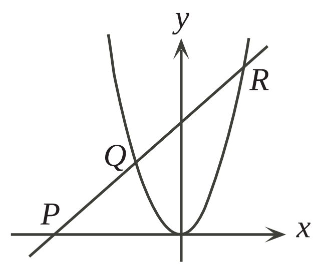
23. Un luminaire plutôt laid est suspendu du point O au plafond. Des fils OXM, OYN et OZP passent aux sommets d'un triangle équilatéral XYZ en bois mince. Le triangle a des côtés de 60 cm et son plan est parallèle au plafond. (Une petite ampoule est attachée au bout de chaque fil.) Si chaque fil a une longueur de 100 cm et si chaque extrémité inférieure des fils est à 90 cm du plafond, quelle est la distance verticale entre le triangle et le plafond ?



(A) 40 cm **(B)** 45 cm **(C)** 50 cm

(D) 55 cm **(E)** 60 cm

24. Une droite de pente 1 passe par le point P qui est situé sur la partie négative de l'axe des abscisses. La droite coupe la parabole d'équation $y = x^2$ aux points Q et R, comme dans la figure. Si $PQ = QR$, quelle est la meilleure approximation de l'ordonnée à l'origine de PR ?



(A) 9,9 **(B)** 10,2 **(C)** 8,2

(D) 9,3 **(E)** 8,6

25. Combien y a-t-il de couples (n, r) d'entiers positifs, $4 \leq n \leq r \leq 2007$, de manière que lorsque n boules noires et r boules rouges sont placées en ligne, au hasard, la probabilité pour que la première boule et la dernière boule aient la même couleur soit égale à $\frac{1}{2}$?

(A) 60 **(B)** 62 **(C)** 58 **(D)** 61 **(E)** 59

Concours canadien de mathématiques

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2007!
En 2006, plus de 90 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Pascal, Cayley et Fermat.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu le 18 avril 2007.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **plus d'information à propos du concours Hypatie**
- **des copies gratuites des concours précédents**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs**
- **de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours**
- **de l'information concernant les carrières en mathématiques**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **inscrire vos élèvess aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu le 18 avril 2007**
- **se renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles aux enseignants**
- **trouver les résultats de votre école**

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat *(11^e année – Sec. V)*

le mercredi 22 février 2006

Avec la contribution de:

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

The Great-West Life Assurance Company
stronger communities together™ GREAT-WEST LIFE | LONDON LIFE
London Life et La Great-West, compagnies d'assurance-vie

Sybase
iAnywhere Solutions

Avec la participation de:

Institut canadien des actuaires

Durée: 60 minutes

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignant-e d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplire les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droit de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont une seule est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Il n'y a *pas de pénalité* pour une réponse fautive.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les diagrammes *ne sont pas* dessinés à l'échelle. Ils sont inclus pour aider seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée.*
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $\dfrac{1}{4 \times 5}$?

(A) 0,45 **(B)** 0,05 **(C)** 1,25 **(D)** 0,20 **(E)** 0,02

2. Si $2x + 3x + 4x = 12 + 9 + 6$, quelle est la valeur de x ?

(A) 6 **(B)** 3 **(C)** 1 **(D)** $\frac{1}{3}$ **(E)** $10\frac{1}{2}$

3. Quelle est la valeur de $\dfrac{4^3}{10^2 - 6^2}$?

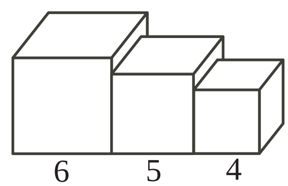
(A) 1 **(B)** 0,5 **(C)** $-35{,}36$ **(D)** 1,5 **(E)** 4

4. Quelle est la valeur de $\left(\sqrt{\sqrt{9} + \sqrt{1}}\right)^4$?

(A) $\sqrt{10}$ **(B)** 10 **(C)** 16 **(D)** 82 **(E)** 100

5. Trois cubes ont des arêtes de longueurs respectives 4, 5 et 6. Quelle est la moyenne de leur volume ?

(A) 120 **(B)** 125 **(C)** 1125
(D) 261 **(E)** 135



6. Un tee-shirt se vend au prix régulier de 25 \$, tandis qu'un jean se vend au prix régulier de 75 \$. Si le prix du tee-shirt est réduit de 30 % et si le prix du jean est réduit de 10 %, quelle est la réduction du prix total ?

(A) 15 \$ **(B)** 20 \$ **(C)** 30 \$ **(D)** 36 \$ **(E)** 40 \$

7. Quel est le plus petit entier strictement positif p pour lequel $\sqrt{2^3 \times 5 \times p}$ est un entier ?

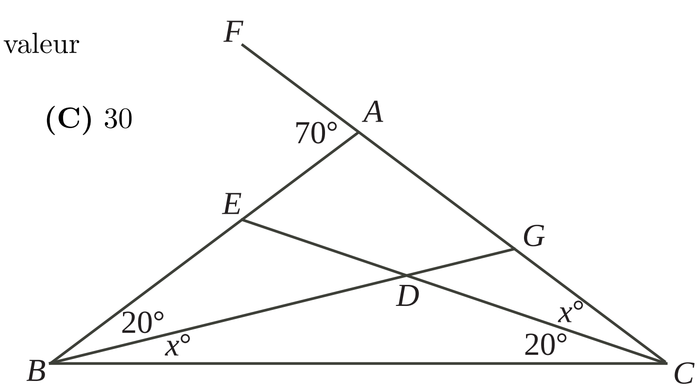
(A) 2 **(B)** 5 **(C)** 10 **(D)** 1 **(E)** 20

8. Si Corina avait additionné les nombres P et Q correctement, elle aurait obtenu 16. Or, elle a soustrait Q de P et elle a obtenu 4. Quelle est la valeur de P ?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 8 **(D)** 10 **(E)** 16

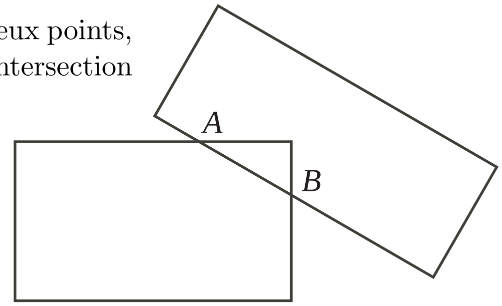
9. Dans la figure, quelle est la valeur de x ?

(A) 15 **(B)** 20 **(C)** 30
(D) 35 **(E)** 50



10. Dans la figure, deux rectangles se coupent en deux points, A et B. Le nombre fini maximum de points d'intersection de *n'importe quels* deux rectangles est égal à :

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 12 **(D)** 8 **(E)** 6



Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Si $\dfrac{a}{b} = 3$ et $\dfrac{b}{c} = 2$, quelle est la valeur de $\dfrac{a-b}{c-b}$?

(A) -4 **(B)** $-\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** 2 **(E)** 6

12. Si $\left(2^4\right)\left(3^6\right) = 9\left(6^x\right)$, quelle est la valeur de x ?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 216 **(E)** 8

13. En 2004, Gaby a téléchargé 200 chansons. En 2005, Gaby a téléchargé 360 chansons à un coût qui était 32 cents de moins par chanson qu'en 2004. Le coût *total* était le même à chaque année. Quel était le coût du téléchargement des 360 chansons en 2005 ?

(A) 144,00 \$ **(B)** 108,00 \$ **(C)** 80,00 \$ **(D)** 259,20 \$ **(E)** 72,00 \$

14. Si le système d'équations

$$\begin{aligned} px + qy &= 8 \\ 3x - qy &= 38 \end{aligned}$$

a pour solution $(x,y) = (2,-4)$, alors p est égal à :

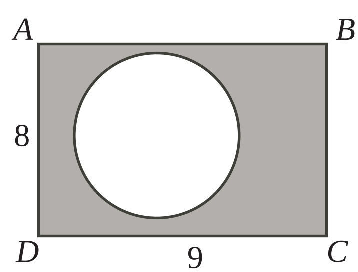
(A) -12 **(B)** 20 **(C)** 8 **(D)** 40 **(E)** 21,5

15. Les points (5,3) et $(1,-1)$ sont placés dans un plan cartésien sur une feuille de papier. La feuille est pliée le long d'une droite de manière que le point (5,3) soit superposé au point $(1,-1)$. Quelle est l'équation de la droite qui représente le pli ?

(A) $y = -x + 1$ **(B)** $y = -x + 2$ **(C)** $y = -x + 3$
(D) $y = -x + 4$ **(E)** $y = -x + 5$

16. Dans la figure, on voit un disque à l'intérieur d'un rectangle $ABCD$. Si l'aire du disque est égale à l'aire de la région ombrée, quel est le rayon du disque ?

(A) $\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ **(B)** $\frac{6}{\pi}$ **(C)** $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$
(D) $\sqrt{\frac{18}{\pi}}$ **(E)** $\frac{18}{\pi}$



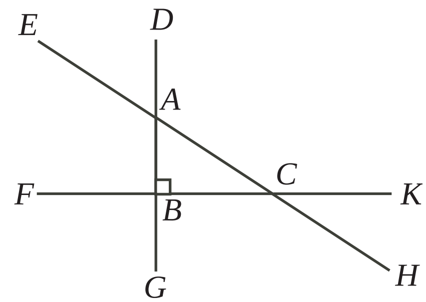
17. Dans la suite de sept termes, 5, p, q, 13, r, 40, x, chaque terme, à partir du quatrième, est égal à la somme des trois termes précédents. Quelle est la valeur de x ?

(A) 21 **(B)** 61 **(C)** 67 **(D)** 74 **(E)** 80

18. La roue avant du vélo de Georgina a un diamètre de 0,75 mètre. Elle se déplace pendant 6 minutes à une vitesse de 24 kilomètres à l'heure. Le nombre de rotations que la roue a complétées pendant ce temps est plus près de :

(A) 610 **(B)** 1020 **(C)** 1360 **(D)** 1700 **(E)** 5430

19. Dans la figure, le triangle ABC est rectangle. Le côté AB est prolongé dans les deux sens jusqu'aux points D et G de manière que $DA = AB = BG$. De même, BC est prolongé jusqu'aux points F et K de manière que $FB = BC = CK$ et AC est prolongé jusqu'aux points E et H de manière que $EA = AC = CH$. Quel est le rapport de l'aire de l'hexagone $DEFGHK$ à l'aire du triangle ABC ?



(A) 4 : 1 **(B)** 7 : 1 **(C)** 9 : 1

(D) 16 : 1 **(E)** 13 : 1

20. Dans un sac, il y a huit billes jaunes, sept billes rouges et cinq billes noires. Sans regarder dans le sac, Igor enlève N billes d'un coup. S'il veut s'assurer que, peu importe le choix de N billes enlevées, il reste au moins quatre billes d'une couleur et au moins trois billes d'une autre couleur dans le sac, quelle est la plus grande valeur possible de N ?

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 10

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Pour combien d'entiers n, dans l'intervalle $2 \leq n \leq 80$, l'expression $\dfrac{(n-1)(n)(n+1)}{8}$ prend-elle des valeurs entières ?

(A) 10 **(B)** 20 **(C)** 59 **(D)** 39 **(E)** 49

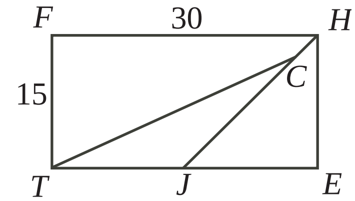
22. Céline et René doivent déplacer 16 petites boîtes et 10 grandes boîtes. Le tableau indique le temps que met chaque personne pour déplacer chaque type de boîte. Ils commencent à déplacer les boîtes à 9 h 00. Le plus tôt qu'ils peuvent finir de déplacer toutes les boîtes est à :

	Céline	René
petite boîte	2 min.	3 min.
grande boîte	6 min.	5 min.

(A) 9 h 41 **(B)** 9 h 42 **(C)** 9 h 43

(D) 9 h 44 **(E)** 9 h 45

23. Le rectangle $TEHF$ mesure 15 m sur 30 m. Le chat Tom part du point T, tandis que la souris Jerry part du point J, qui est le milieu du segment TE. Jerry court en ligne droite, à 3 m/s, en direction du point H. Tom part en même temps que Jerry et court en ligne droite, à 5 m/s, et arrive au point C au même moment que Jerry. Le temps, en secondes, que met Tom pour attraper Jerry, est plus près de :

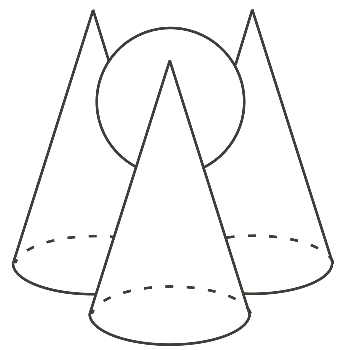


(A) 5,4 **(B)** 5,6 **(C)** 5,8
(D) 6,0 **(E)** 6,2

24. Si a et b sont des entiers strictement positifs tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}=\frac{1}{b^2-2b}$, alors la plus petite valeur possible de $a+b$ est :

(A) 8 **(B)** 6 **(C)** 96 **(D)** 10 **(E)** 50

25. Trois cônes identiques ont un rayon de 50 et une hauteur de 120. Les cônes sont placés de manière que les bases circulaires se touchent l'une l'autre. Comme l'indique la figure, une sphère est placée de manière à reposer dans l'espace entre les cônes. Si le haut de la sphère est au même niveau que le sommet des cônes, alors le rayon de la sphère est plus près de :



(A) 38,9 **(B)** 38,7 **(C)** 38,1
(D) 38,5 **(E)** 38,3

Concours canadien de mathématiques

Pour les étudiants...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2006!
En 2005, plus de 90 000 étudiants autour du monde se sont inscrits aux concours Pascal, Cayley et Fermat.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu le 20 avril 2006.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour trouver

- **plus d'information à propos du concours Hypatie**
- **des copies gratuites des concours précédents**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs**
- **de l'information au sujet de nos publications pour l'enrichissement mathématiques et pour la préparation aux concours**
- **de l'information concernant les carrières en mathématiques**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour

- **inscrire vos étudiants aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu le 20 avril 2006**
- **apprendre à propos des ateliers et des ressources disponibles aux enseignants**
- **trouver les résultats de votre école**

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat *(11e - Sec. V)*

Le mercredi 23 février 2005

Avec la contribution de:

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la participation de:

Institut canadien des actuaires

The Great-West Life Assurance Company

stronger communities together
Great-West Life | London Life

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance vie

Sybase

Sybase

*i*Anywhere Solutions

*i*Anywhere Solutions

Durée: 60 minutes

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignant-e d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Aussi, il faut bien remplire les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droit de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Il n'y a *pas de pénalité* pour une réponse fautive.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les diagrammes *ne sont pas* dessinés à l'échelle. Ils sont inclus pour aider seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*. On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. L'expression $\dfrac{150+(150\div 10)}{15-5}$ est égale à :

   (A) 6 **(B)** 3 **(C)** 146 **(D)** $151{,}5$ **(E)** $16{,}5$

2. Quelle est la valeur de $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{3}{9}$?

   (A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{5}{18}$ **(D)** $\frac{1}{9}$ **(E)** 0

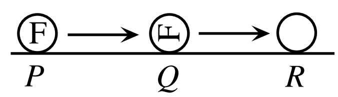
3. Si $a=\frac{1}{2}$ et $b=\frac{2}{3}$, alors $\dfrac{6a+18b}{12a+6b}$ est égal à :

   (A) 9 **(B)** 7 **(C)** 10 **(D)** 6 **(E)** $\frac{3}{2}$

4. Si $\sqrt{4+9+x^2}=7$, alors une valeur possible de x est :

   (A) 6 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 36 **(E)** 0

5. La figure montre une pièce de monnaie Fermat qui roule de P à Q jusqu'à R. Si la distance de P à Q est égale à la distance de Q à R, quelle est l'orientation de la pièce de monnaie lorsqu'elle arrive au point R ?



   (A)  **(B)**  **(C)** 

   (D)  **(E)** 

6. La somme des 2005 premiers termes de la suite $1,2,3,4,1,2,3,4,\ldots$ est égale à :

   (A) 5011 **(B)** 5110 **(C)** 5020 **(D)** 5010 **(E)** 501

7. Dans le triangle ABC, l'angle A mesure 21° de plus que celle de l'angle B et l'angle C mesure 36° de plus que l'angle B. Quelle est la mesure de l'angle B ?

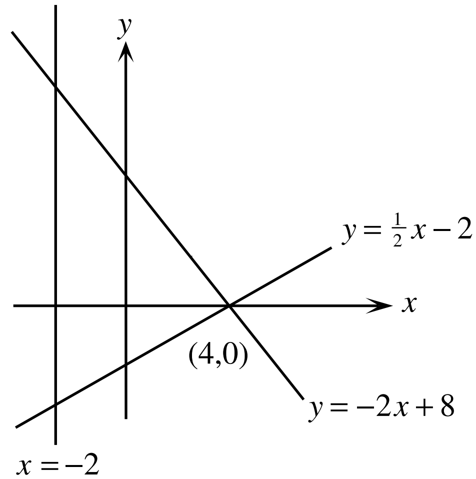
   (A) 20° **(B)** 41° **(C)** 62° **(D)** 46° **(E)** 56°

8. Sept enfants sont nés sept années consécutives, le même jour de l'année. La somme de l'âge des trois plus jeunes est égale à 42 ans. Quelle est la somme de l'âge des trois plus vieux ?

   (A) 51 ans **(B)** 54 ans **(C)** 57 ans **(D)** 60 ans **(E)** 63 ans

9. Dans la figure ci-contre, les droites d'équations $y = -2x + 8$ et $y = \frac{1}{2}x - 2$ se coupent au point $(4, 0)$. Quelle est l'aire du triangle formé par ces deux droites et par la droite d'équation $x = -2$?

(A) 15 **(B)** 27 **(C)** 30
(D) 36 **(E)** 45



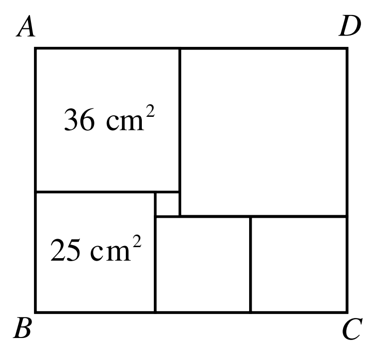
10. Si 50 % de P est égal à 20 % de Q, alors P est égal à quel pourcentage de Q ?

(A) 60% **(B)** 250% **(C)** 40% **(D)** 20% **(E)** 30%

Partie B (6 points par bonne réponse)

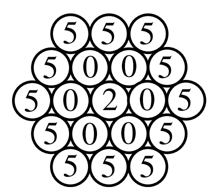
11. Le rectangle $ABCD$ est formé de six carrés. L'aire de deux des carrés est indiquée. Quel est le périmètre du rectangle $ABCD$, en centimètres ?

(A) 50 **(B)** 44 **(C)** 46
(D) 52 **(E)** 48



12. En partant du 2 au centre, on peut former le nombre 2005 en se déplaçant d'un cercle à un autre si les deux cercles se touchent. Combien de chemins différents peut-on emprunter pour former le nombre 2005 ?

(A) 36 **(B)** 24 **(C)** 12
(D) 18 **(E)** 6



13. On trace un cercle de manière qu'aucune partie du cercle ne soit située à l'extérieur d'un hexagone *régulier*. Si ce cercle ne touche pas tous les six côtés de l'hexagone, quel est le nombre maximum de côtés qu'il peut toucher ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

14. Le poids d'une lionne est six fois le poids de son lionceau femelle ou quatre fois le poids de son lionceau mâle. Or la différence entre le poids des deux lionceaux est de 14 kg. Quel est le poids de la lionne, en kilogrammes ?

(A) 84 **(B)** 252 **(C)** 168 **(D)** 140 **(E)** 112

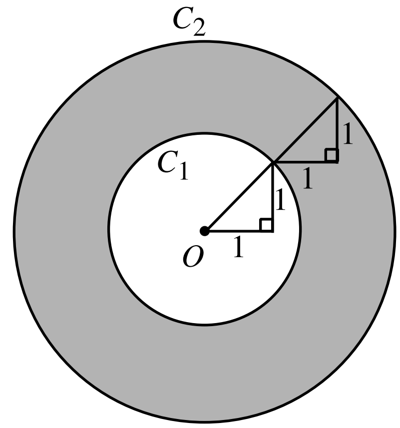
15. Si $(x - 4)(5x + 2) = 0$, alors les deux valeurs possibles de l'expression $5x + 2$ sont :

(A) -4 et $\frac{2}{5}$ **(B)** 0 et -18 **(C)** 0 et 22 **(D)** 0 et 4 **(E)** 4 et 22

16. Dans le figure ci-contre, les cercles C_1 et C_2 ont pour centre O. Quelle est l'aire de la région ombrée ?

(A) 2π **(B)** 3π **(C)** 4π

(D) 6π **(E)** 8π



17. Un cylindre rempli d'eau a un rayon de 2 cm et une hauteur de 8 cm. Un cylindre vide a un rayon de 4 cm et une hauteur de 8 cm. Si on transvide toute l'eau du premier cylindre dans le deuxième, quelle sera la profondeur de l'eau dans ce cylindre ?

(A) 1 cm **(B)** 2 cm **(C)** 3 cm **(D)** 4 cm **(E)** 6 cm

18. Une évaluation est composée de 10 questions. Les points sont accordés comme suit :
• Chaque bonne réponse vaut 3 points.
• Chaque question laissée sans réponse vaut 1 point.
• Chaque réponse incorrecte vaut 0 point.
Lequel des nombres suiivants *ne peut pas* représenter un total de points ?

(A) 11 **(B)** 13 **(C)** 17 **(D)** 23 **(E)** 29

19. Samuel pédale à une vitesse de 16 km/h, tandis que Julie pédale à une vitesse de 24 km/h. À midi, Samuel est situé à 1 km au nord de Julie. Chacun se met à pédaler en direction nord. Combien de minutes Julie mettra-t-elle pour rattraper Samuel ?

(A) $1\frac{1}{2}$ **(B)** $2\frac{1}{2}$ **(C)** $3\frac{3}{4}$ **(D)** $7\frac{1}{2}$ **(E)** 8

20. Le triangle ABC est tel que $AB = AC = x + 1$ et $BC = 2x - 2$, $x > 1$. L'aire du triangle est toujours égale à :

(A) $(x-1)\sqrt{2x^2+2}$ **(B)** $2(x-1)$ **(C)** $\frac{1}{2}(x+1)^2$

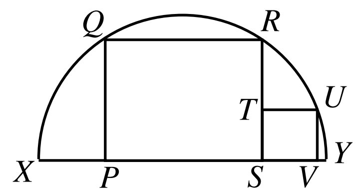
(D) $(x+1)(x-1)$ **(E)** $2(x-1)\sqrt{x}$

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. On choisit quatre nombres *différents*, a, b, c et d, parmi les nombres -1, -2, -3, -4 et -5. La plus grande valeur possible de l'expression $a^b + c^d$ est égale à :

(A) $\frac{5}{4}$ **(B)** $\frac{7}{8}$ **(C)** $\frac{31}{32}$ **(D)** $\frac{10}{9}$ **(E)** $\frac{26}{25}$

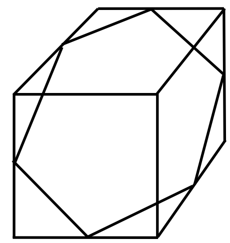
22. Dans la figure ci-contre, le rectangle $PQRS$ est inscrit dans le demi-cercle de rayon XY. De plus, $PQ = 12$ et $QR = 28$. Les sommets du carré $STUV$ sont tels que T est situé sur RS, U est situé sur le demi-cercle et V est situé sur XY. La meilleure approximation de l'aire du carré $STUV$ est :



(A) 12 **(B)** 13 **(C)** 16

(D) 14 **(E)** 15

23. Un cube en bois, ayant des arêtes de 4 cm, est découpé par un plan qui passe par le milieu des arêtes indiquées dans la figure ci-contre, formant ainsi deux moitiés de cube. L'aire totale de chaque moitié de cube, arrondie au centimètre carré près, est égale à :



(A) 69 **(B)** 48 **(C)** 32

(D) 65 **(E)** 58

24. La suite arithmétique a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $\ldots$, $a+(n-1)d$ vérifie les propriétés suivantes :

- La somme des termes suivants est égale à 320 : Les 1$^{\text{er}}$, 3$^{\text{e}}$, 5$^{\text{e}}$, $\ldots$, jusqu'au dernier terme inclusivement.
- La somme des termes suivants est égale à 224 : Les 1$^{\text{er}}$, 4$^{\text{e}}$, 7$^{\text{e}}$, $\ldots$, jusqu'au dernier terme inclusivement.

Quelle est la somme de tous les termes de la suite ?

(A) 656 **(B)** 640 **(C)** 608 **(D)** 704 **(E)** 672

25. Une *triligne* est une droite dont la somme de l'abscisse à l'origine et de l'ordonnée à l'origine est égale à trois fois la pente. Combien y a-t-il d'entiers q, $1 \leq q \leq 10\ 000$, pour lesquels il existe au moins un entier p de manière qu'il y ait exactement une triligne qui passe par le point (p, q) ?

(A) 60 **(B)** 57 **(C)** 58 **(D)** 61 **(E)** 59

Concours canadien de mathématiques

Pour les étudiants...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2005!
En 2004, plus de 83 000 étudiants autour du monde se sont inscrits aux concours Pascal, Cayley et Fermat.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu le 20 avril 2005.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour trouver

- **plus d'information à propos du concours Hypatie**
- **des copies gratuites des concours précédents**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs**
- **de l'information au sujet de nos publications pour l'enrichissement mathématiques et pour la préparation aux concours**
- **de l'information concernant les carrières en mathématiques**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour

- **inscrire vos étudiants aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu le 20 avril 2005**
- **apprendre à propos des ateliers et des ressources disponibles aux enseignants**
- **trouver les résultats de votre école**

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat (11 ^{e} – Sec. V)

Le mercredi 18 février 2004

Avec la
contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la
participation de :

Institut canadien
des actuaires

The Great-West Life Assurance Company

London Life, compagnie
d'assurance-vie et La
Great-West, compagnie
d'assurance-vie

Sybase
Inc. (Waterloo)

*i*Anywhere Solutions

Durée : 1 heure

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponse. Au besoin, demandez à l'enseignant-e d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Aussi, il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droit de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation :
   Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Il *n'y a pas* de pénalité pour une réponse fautive.
   Chaque question restée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 20 points.
8. Les diagrammes *ne sont pas* dessinés à l'échelle. Ils sont inclus pour aider seulement.
9. Après le signal du surveillant, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Notation :	Une réponse fautive *n'est pas* pénalisée. On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 20 points.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. La valeur de $\dfrac{10}{10(11)-10^2}$ est :

   (**A**) 100 (**B**) 2 (**C**) 10 (**D**) 1 (**E**) 11

2. $\sqrt{4^0+4^2+4^3}$ est égal à :

   (**A**) 9 (**B**) 13 (**C**) 14 (**D**) 32 (**E**) 64

3. Si $x=2-4+6$ et $y=1-3+5$, alors $x-y$ est égal à :

   (**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 5 (**D**) 3 (**E**) –1

4. Un gâteau remplit complètement un plat qui mesure 20 cm sur 18 cm sur 5 cm. On coupe le gâteau en 25 morceaux de même volume. Si le gâteau a une masse volumique (densité) de $2\ \text{g}/\text{cm}^3$, combien pèse chacun des 25 morceau?

   (**A**) 72 g (**B**) 288 g (**C**) 36 g (**D**) 144 g (**E**) 720 g

5. Si $\left(\dfrac{1}{2+3}\right)\left(\dfrac{1}{3+4}\right)=\dfrac{1}{x+5}$, alors x est égal à :

   (**A**) 4 (**B**) 7 (**C**) 30 (**D**) 37 (**E**) 67

6. Il faut trois boîtes de jus pour remplir $\frac{2}{3}$ d'un contenant de 1 litre. Combien faut-il de boîtes de jus pour remplir au complet 8 contenants de 1 litre?

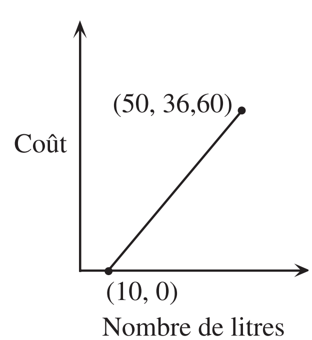
   (**A**) 36 (**B**) 12 (**C**) $\frac{16}{3}$ (**D**) 16 (**E**) 24

7. Si $x=\frac{1}{5}$, alors l'expression $\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$ est égale à :

   (**A**) 0,4 (**B**) $-0{,}52$ (**C**) -5 (**D**) 10 (**E**) 11

8. Julie arrive au garage Fermat pour faire le plein. Le graphique indique la quantité d'essence qu'il lui restait en arrivant, la quantité d'essence achetée et le coût de l'essence. Quel est le coût d'un litre d'essence?

   (**A**) 91,5 ¢ (**B**) 73,2 ¢ (**C**) 61,0 ¢
   (**D**) 53,2 ¢ (**E**) 1,09 $



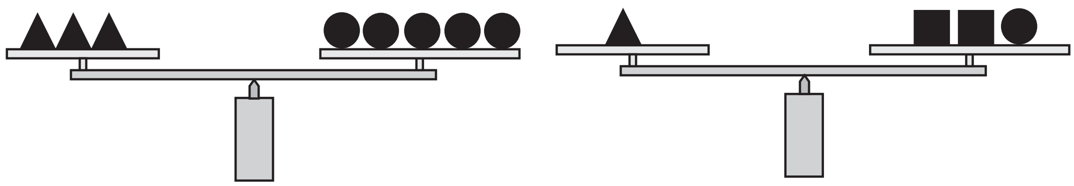
9. Le tableau nous renseigne au sujet de la population de deux villes en 2003 et en 2004.

Ville	Population en 2003	Pourcentage du changement de 2003 à 2004
Cayleyville	10 000	4 %
Pascalbourg	25 000	–12 %

En 2004, quelle est la différence entre la population des deux villes?

(**A**) 12 400 (**B**) 11 600 (**C**) 17 600 (**D**) 13 800 (**E**) 17 400

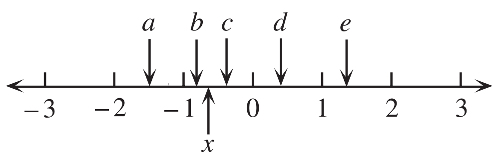
10. La figure suivante présente deux balances en équilibre. Combien faut-il de ■ pour équilibrer un ●?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Partie B (6 points par bonne réponse)

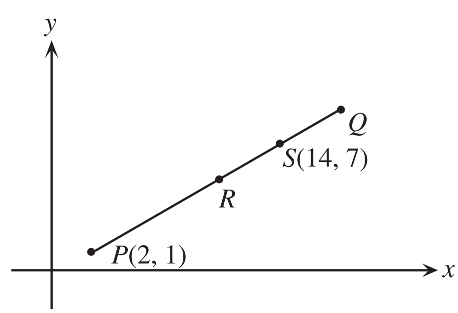
11. Si x est situé sur la droite numérique à l'endroit indiqué, quelle lettre représente le mieux la position de $-x^2$?



(**A**) a (**B**) b (**C**) c (**D**) d (**E**) e

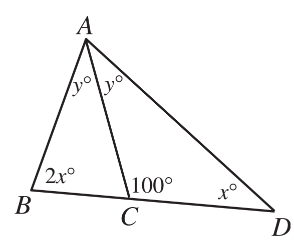
12. Le point R est le milieu du segment PQ et le point S est le milieu du segment QR. Si P a pour coordonnées $(2,1)$ et S a pour coordonnées $(14,7)$, quelles sont les coordonnées du point Q ?

(**A**) $(8,4)$ (**B**) $(26,13)$ (**C**) $(10,5)$
(**D**) $(18,9)$ (**E**) $(16,11)$

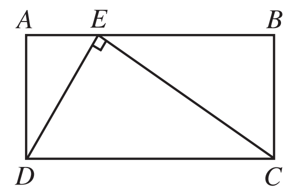


13. Dans la figure, les points B, C et D sont situés sur une même droite. De plus, on a $\angle ACD = 100^\circ$, $\angle ADB = x^\circ$, $\angle ABD = 2x^\circ$ et $\angle DAC = \angle BAC = y^\circ$. Quelle est la valeur de x?

(**A**) 10 (**B**) 45 (**C**) 30
(**D**) 50 (**E**) 20



14. Dans la figure, $ABCD$ est un rectangle et le point E est situé sur AB. Dans le triangle DEC, on a $\angle DEC = 90°$, $DE = 3$ et $EC = 4$. Quelle est la longueur AD ?

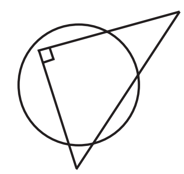


(**A**) 2,6 (**B**) 2,4 (**C**) 2,8
(**D**) 1,8 (**E**) 3,2

15. La représentation graphique de l'équation $x^2 - y^2 = 0$ est :

(**A**) une droite (**B**) une parabole (**C**) un cercle
(**D**) un point (**E**) deux droites

16. Un triangle rectangle a des côtés de longueurs 6, 8 et 10. On trace un cercle de manière que l'aire de la partie du cercle qui est à l'extérieur du triangle est égale à l'aire de la partie du triangle qui est à l'extérieur du cercle. Le rayon du cercle, arrondi au dixième près, est égal à :



(**A**) 2,9 (**B**) 2,8 (**C**) 3,8
(**D**) 3,1 (**E**) 3,6

17. On forme une suite croissante de manière que la différence entre deux termes consécutifs soit une constante. Si les quatre premiers termes de cette suite sont x, y, $3x + y$ et $x + 2y + 2$, alors la valeur de $y - x$ est :

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

18. Si les équations $y = a(x-2)^2 + c$ et $y = (2x-5)(x-b)$ définissent la même fonction du second degré, alors b est égal à :

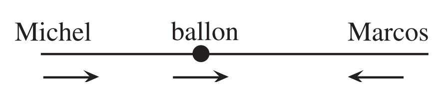
(**A**) 3 (**B**) $\frac{3}{2}$ (**C**) $\frac{4}{5}$ (**D**) $-\frac{5}{2}$ (**E**) $\frac{8}{5}$

19. Un magasin spécialisé dans la vente de logiciels vient de recevoir 1200 copies d'un nouveau logiciel. La gérante, se fiant à son expérience, croit que :
- la moitié des copies se vendront au prix initial qu'elle fixera;
- deux tiers des copies qui resteront seront vendues lorsqu'elle enlèvera 40 % du prix initial;
- les autres copies seront vendues lorsqu'elle enlèvera 75 % du prix initial.

Pour faire un profit raisonnable, elle doit obtenir des recettes de 72 000 $. Quel prix initial doit-elle fixer, au cent près?

(**A**) 60,01 $ (**B**) 75,01 $ (**C**) 79,13 $ (**D**) 80,90 $ (**E**) 240,01 $

20. Un ballon de soccer roule vers Marcos, à une vitesse de 4 m/s. Michel, qui est 15 m derrière le ballon, le poursuit à une vitesse de 9 m/s. Marcos, qui est à 30 m du ballon, court en direction du ballon à une vitesse de 8 m/s. Lorsque le ballon sera touché initialement par l'un des deux, la distance entre les joueurs sera plus près de :



(**A**) 2,00 m (**B**) 2,25 m (**C**) 2,50 m
(**D**) 2,75 m (**E**) 3,00 m

à suivre ...

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Brigitte et Jules ont un contrat pour peindre une ligne sur une route. Si Brigitte travaillait seule, elle pourrait peindre la ligne en B heures. Si Jules travaillait seul, il pourrait la peindre en J heures. Brigitte commence à peindre la ligne à une extrémité. Une heure plus tard, Jules commence à peindre la ligne à l'autre extrémité. Ils travaillent jusqu'à ce que la ligne soit peinte au complet. Laquelle des expressions suivantes représente le nombre d'heures que Brigitte a travaillé?

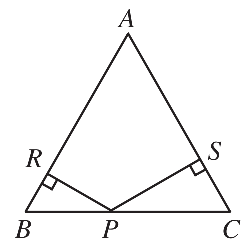
    (**A**) $\dfrac{B(J+1)}{B+J}$ (**B**) $J+1$ (**C**) $\dfrac{BJ}{B+J}+1$ (**D**) $\dfrac{B+J-1}{2}$ (**E**) $\dfrac{B(J-1)}{B+J}$

22. Soit k le plus petit entier positif de sorte que le nombre $\left(2^k\right)\left(5^{300}\right)$, écrit en notation courante, comporte 303 chiffres. La somme de ces chiffres est égale à :

    (**A**) 11 (**B**) 10 (**C**) 8 (**D**) 7 (**E**) 5

23. Soit un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC$ et $BC = 65$ cm. Soit P un point sur BC. Des perpendiculaires PR et PS sont abaissées depuis P jusqu'à AB et AC, de sorte que $PR = 24$ cm et $PS = 36$ cm. L'aire du triangle ABC, en cm^2, est égale à :

    (**A**) 1254 (**B**) 1640 (**C**) 1950
    (**D**) 2535 (**E**) 2942

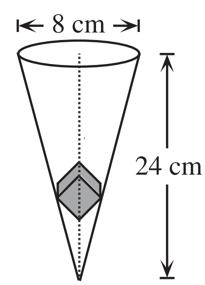


24. Soit un polynôme $f(x)$ tel que $f(x) - f(x-2) = (2x-1)^2$ pour toute valeur de x. Dans le polynôme $f(x)$, p et q sont les coefficients respectifs de x^2 et de x. Alors $p+q$ est égal à :

    (**A**) 0 (**B**) $\frac{5}{6}$ (**C**) $\frac{4}{3}$ (**D**) 1 (**E**) $\frac{2}{3}$

25. On considère un cube dont les arêtes mesurent 3 cm et un cône ayant un diamètre de 8 cm et une hauteur de 24 cm. On place le cube dans le cône de manière qu'une diagonale du cube coïncide avec l'axe du cône. Quelle est la distance, en cm, entre le sommet du cône et le sommet du cube le plus rapproché?

    (**A**) $6\sqrt{6}-\sqrt{3}$ (**B**) $\dfrac{12\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{4}$ (**C**) $6\sqrt{6}-2\sqrt{3}$
    (**D**) $5\sqrt{3}$ (**E**) $6\sqrt{6}$



✿✿✿✿✿✿✿✿✿✿

PUBLICATIONS

Les tudiants et les parents qui estiment que la r solution de probl mes constitue un divertissement et un loisir se r jouiront de pouvoir consulter les publications suivantes. Il s agit d excellentes ressources documentaires ax es sur l enrichissement, le d veloppement des capacit s r soudre des probl mes et la pr paration en vue des concours de math matiques.

Exemplaires des Concours canadiens de mathématiques des années antérieures
Des exemplaires des concours antérieurs et des solutions, aussi bien en français qu'en anglais, sont disponibles gratuitement sur note site web http://www.cemc.uwaterloo.ca

Livres «Problems Problems Problems»
Chaque volume est une ensemble de problèmes à choix multiple ou à solution complète. Les problèmes sont regroupés selon les sujets, avec 9 sujets ou plus par volume. Les problèmes sont choisis à partir des concours des années précédentes offerts par le Concours canadien de mathématiques et des solutions complètes sont fournies pour chaque problème. Chaque volume coûte 15,00 $. **Le Volume 1 est disponible en français et en anglais. Les Volumes 2-9 sont disponibles en anglais seulement.**

Volume 1
- **(Disponible en français)**
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves de 9^e, 10^e et 11^e année (Sec. III, IV et V)

Volume 2
- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets (différents de ceux du volume 1)
- pour les élèves de 9^e, 10^e et 11^e année (Sec. III, IV et V)

Volume 3
- plus de 235 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 4
- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 7^e, 8^e et 9^e année (Sec. I, II et III)

Volume 5
- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 9 sujets (différents de ceux du volume 3)
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 6
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 11 sujets (différents de ceux du vol. 4)
- pour les élèves de 7^e, 8^e et 9^e année (Sec. I, II et III)

Volume 7
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 9^e et 10^e année (Sec. III et IV)

Volume 8
- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 9
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 11 sujets
- pour les élèves de 7^e et 8^e année (Sec. I et II)

Faire passer les commandes au : Concours canadien de mathématiques
Faculté de mathématiques, pièce MC 5181
Université de Waterloo
Waterloo (Ontario) N2L 3G1

Veuillez inscrire votre nom, votre adresse (et votre code postal) ainsi que votre numéro de téléphone.
Établir les chèques ou les mandats à l'ordre du «Centre for Education in Mathematics and Computing».
Pour les commandes effectuées au Canada, veuillez ajouter 3 $ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 1 $ pour chaque article additionnel. Aucune taxe de vente provinciale ne s'applique, mais il faut ajouter la TPS de 7 p. 100. Pour les commandes ***de l'extérieur du Canada SEULEMENT***, veuillez ajouter 10 $ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 2 $ pour chaque article additionnel. **Les prix de ces publications demeureront en vigueur jusqu'en 1 septembre 2004.**

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat (11^e – Sec. V)

Le mercredi 19 février 2003

C.M.C. Sponsors:

University of Waterloo

Deloitte & Touche Chartered Accountants

C.M.C. Supporters:

Canadian Institute of Actuaries

Great West Life and London Life

Sybase Inc. (Waterloo)

*i*Anywhere Solutions

C.M.C. Contributors:

Manulife Financial

Durée : 1 heure

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponse. Au besoin, demandez à l'enseignant-e d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Aussi, il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droit de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation :
   Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Il *n'y a pas* de pénalité pour une réponse fautive.
   Chaque question restée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 20 points.
8. Les diagrammes *ne sont pas* dessinés à l'échelle. Ils sont inclus pour aider seulement.
9. Après le signal du surveillant, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Notation :	Une réponse fautive *n'est pas* pénalisée. On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 20 points.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. La valeur de $3^3 - 3^2 + 3^1 - 3^0$ est :

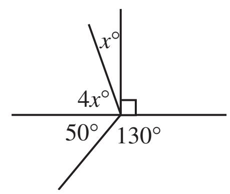
   (A) 18 **(B)** 6 **(C)** 9 **(D)** 40 **(E)** 20

2. Si $a = 5$ et $a^2 + ab = 60$, alors b est égal à :

   (A) 7 **(B)** 4 **(C)** 2 **(D)** 10 **(E)** 30

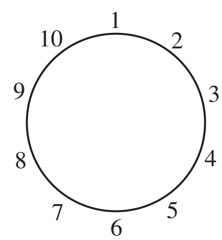
3. D'après le diagramme, la valeur de x est :

   (A) 22,5 **(B)** 25 **(C)** 20
   (D) 36 **(E)** 18



4. On a placé les nombres de 1 à 10 autour d'un cercle. Marie-Ève barre le 1, puis le 4, puis le 7. Elle continue de la sorte en barrant chaque troisième nombre parmi ceux qui ne sont pas encore barrés, jusqu'à ce qu'il ne reste que deux nombres. La somme de ces deux nombres est égale à :

   (A) 13 **(B)** 10 **(C)** 8
   (D) 14 **(E)** 17



5. Pendant sa période d'hibernation, un ours a perdu 20 % de sa masse initiale. À la fin de l'hibernation, il a une masse de 220 kg. Quelle était sa masse initiale, en kilogrammes?

   (A) 176 **(B)** 264 **(C)** 240 **(D)** 275 **(E)** 1100

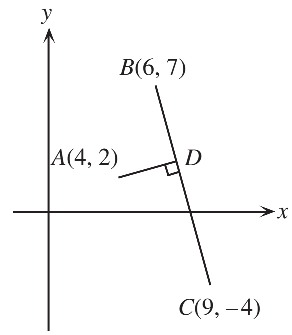
6. Deux filles et six garçons participent à un jeu. Combien faut-il ajouter de filles pour que $\frac{5}{8}$ des participants soient des filles?

   (A) 6 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 8 **(E)** 7

7. Un aquarium a la forme d'un prisme droit à base rectangulaire. Sa base mesure 20 cm sur 40 cm et il a une hauteur de 30 cm. L'aquarium, qui est à moitié rempli, repose sur une table horizontale. Si on ajoute 4000 cm^3 d'eau à l'aquarium, quelle sera la profondeur de l'eau?

   (A) 5 cm **(B)** 15 cm **(C)** 20 cm **(D)** 25 cm **(E)** 10 cm

8. Dans le diagramme, D est le point sur BC de manière que AD soit perpendiculaire à BC. La pente de AD est égale à :



(A) $\frac{3}{11}$ **(B)** 1 **(C)** $-\frac{15}{11}$

(D) $\frac{2}{7}$ **(E)** $\frac{2}{5}$

9. La moyenne de $\frac{1}{5}$ et de $\frac{1}{10}$ est égale à $\frac{1}{x}$. Alors x est égal à :

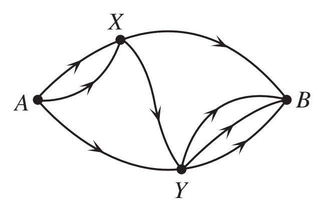
(A) $\frac{20}{3}$ **(B)** $\frac{3}{20}$ **(C)** 30 **(D)** $\frac{10}{3}$ **(E)** $\frac{2}{15}$

10. Carla prend trois pas, alors que Jacob en prend quatre, pour parcourir la même distance. À chaque pas, Carla parcourt 0,5 mètre. Combien de mètres Jacob parcourt-il en 24 pas?

(A) 16 **(B)** 9 **(C)** 36 **(D)** 12 **(E)** 18

Partie B (6 points par bonne réponse)

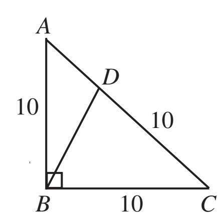
11. Dans ce diagramme, il est permis de parcourir une arête dans le sens indiqué par la flèche seulement. Maya a bien étudié le diagramme et elle a découvert toutes les routes possibles pour se rendre de A à B. Elle choisit une de ces routes au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'elle choisisse une route qui passe par le point X?



(A) $\frac{8}{11}$ **(B)** $\frac{3}{11}$ **(C)** 1

(D) $\frac{9}{11}$ **(E)** $\frac{6}{11}$

12. Dans le diagramme, on a $\angle ABC = 90^\circ$ et $AB = BC = CD = 10$. La longueur de AD, à l'unité près, est égale à :



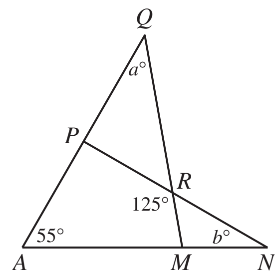
(A) 14 **(B)** 5 **(C)** 9

(D) 10 **(E)** 4

13. Si $x + y = 1$ et $x - y = 3$, quelle est la valeur de $2^{x^2-y^2}$?

(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 2 **(D)** 16 **(E)** 32

14. Dans ce diagramme, AMN, APQ, QRM et PRN sont des segments de droites. Donc $a+b$ est égal à :



(**A**) 70 (**B**) 55 (**C**) 80
(**D**) 90 (**E**) 75

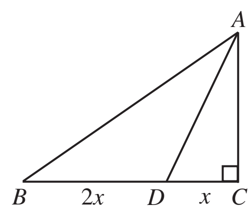
15. Les longueurs des côtés d'un triangle équilatéral et d'un carré sont des entiers. Si le triangle et le carré ont le même périmètre, lequel des nombres suivants peut représenter la longueur d'un côté du triangle?

(**A**) 1 (**B**) 10 (**C**) 18 (**D**) 20 (**E**) 25

16. Le produit des chiffres d'un nombre de quatre chiffres est égal à 810. Si aucun des chiffres n'est répété, alors la somme des chiffres est égale à :

(**A**) 18 (**B**) 19 (**C**) 23 (**D**) 25 (**E**) 22

17. Le triangle ABC est rectangle en C. Si $BD=2x$, $DC=x$ et $\angle ADC = 2(\angle ABC)$, alors la longueur de AB est égale à :

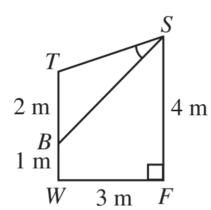


(**A**) $2\sqrt{2}x$ (**B**) $\sqrt{6}x$ (**C**) $2\sqrt{3}x$
(**D**) $3x$ (**E**) $4x$

18. Une voiture consomme 8,4 litres d'essence aux 100 km parcourus. Un mécanicien est en mesure de modifier le réglage du moteur, au coût de 400 $, de manière que la voiture ne consomme que 6,3 litres d'essence aux 100 km. La propriétaire de la voiture calcule la distance minimale qu'elle devra parcourir pour recouvrer le coût de la modification. Si l'essence coûte 0,80 $ le litre, cette distance, en kilomètres, est entre :

(**A**) 10 000 et 14 000 (**B**) 14 000 et 18 000 (**C**) 18 000 et 22 000
(**D**) 22 000 et 26 000 (**E**) 26 000 et 30 000

19. Le segment BT représente une peinture pendue dans une galerie d'art. Elle a une hauteur de 2 m et sa partie inférieure est à 1 m au-dessus du sol. Elle est éclairée par un projecteur placé au point S. Ce point est situé à 4 m au-dessus du point F qui est au sol, à 3 m du mur. La mesure de l'angle TSB, à l'unité près, est égale à :



(**A**) 27° (**B**) 63° (**C**) 34°
(**D**) 45° (**E**) 18°

à suivre ...

20. Si a, b et c sont des nombres positifs qui forment trois termes consécutifs d'une suite géométrique (c.-à-d. que $\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$), alors la représentation graphique de $y=ax^2+bx+c$ est :
(**A**) une courbe qui coupe l'axe des abscisses en deux points distincts
(**B**) située complètement en dessous de l'axe des abscisses
(**C**) située complètement au-dessus de l'axe des abscisses
(**D**) une droite
(**E**) tangente à l'axe des abscisses

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Le premier terme d'une suite de nombres est 6. Chaque autre terme est défini comme suit. Si un terme, t, est pair, le terme suivant est $\frac{1}{2}t$. Si un terme, s, est impair, le terme suivant est $3s+1$. Les quatre premiers termes de la suite sont donc 6, 3, 10 et 5. Le 100e terme de la suite est :

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 6

22. Un pentagone $ABCDE$ est tel que chacune des cinq diagonales AC, BD, CE, DA et EB est complètement à l'intérieur du pentagone. Si chacun des triangles ABC, BCD, CDE, DEA et EAB a une aire de 1, alors l'aire du pentagone $ABCDE$, au centième près, est égale à :

(**A**) 3,62 (**B**) 3,64 (**C**) 3,66 (**D**) 3,68 (**E**) 3,70

23. Un coin d'une boîte de forme rectangulaire est le point de rencontre de trois faces de la boîte. Les centres de ces faces sont les sommets d'un triangle dont les côtés ont des longueurs de 4 cm, 5 cm et 6 cm. Le volume de cette boîte, en centimètres cubes, est égal à :

(**A**) $45\sqrt{3}$ (**B**) $45\sqrt{6}$ (**C**) $90\sqrt{6}$ (**D**) 125 (**E**) $120\sqrt{2}$

24. Lorsque l'expression $\left[(1+x)(1+2x^3)(1+4x^9)(1+8x^{27})(1+16x^{81})(1+32x^{243})(1+64x^{729})\right]^2$ est développée et réduite, le coefficient de x^{2003} est égal à :

(**A**) 0 (**B**) 2^{28} (**C**) 2^{30} (**D**) 2^{29} (**E**) 2^{31}

25. L'ensemble $\{1, 4, n\}$ a une propriété intéressante. Si on choisit deux éléments distincts de cet ensemble et que l'on ajoute 2112 à leur produit, la réponse est toujours un carré parfait. Si n est un entier strictement positif, le nombre de valeurs possibles de n est :

(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 4

●●●●●

PUBLICATIONS

Les étudiants et les parents qui estiment que la résolution de problèmes constitue un divertissement et un loisir se réjouiront de pouvoir consulter les publications suivantes. Il s'agit d'excellentes ressources documentaires axées sur l'enrichissement, le développement des capacités à résoudre des problèmes et la préparation en vue des concours de mathématiques.

Exemplaires des Concours canadiens de mathématiques des années antérieures

Des exemplaires des concours antérieurs et des solutions, aussi bien en français qu'en anglais, sont disponibles gratuitement sur note site web http://www.cemc.uwaterloo.ca

Livres «Problems Problems Problems»

Chaque volume est une ensemble de problèmes à choix multiple ou à solution complète. Les problèmes sont regroupés selon les sujets, avec 9 sujets ou plus par volume. Les problèmes sont choisis à partir des concours des années précédentes offerts par le Concours canadien de mathématiques et des solutions complètes sont fournies pour chaque problème. Chaque volume coûte 15,00 $. **Le Volume 1 est disponible en français et en anglais. Les Volumes 2-8 sont disponibles en anglais seulement.**

Volume 1
- **(Disponible en français)**
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves de 9e, 10e et 11e année (Sec. III, IV et V)

Volume 2
- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets (différents de ceux du volume 1)
- pour les élèves de 9e, 10e et 11e année (Sec. III, IV et V)

Volume 3
- plus de 235 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 4
- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 7e, 8e et 9e année (Sec. I, II et III)

Volume 5
- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 9 sujets (différents de ceux du volume 3)
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 6
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 11 sujets (différents de ceux du vol. 4)
- pour les élèves de 7e, 8e et 9e année (Sec. I, II et III)

Volume 7 — NOUVEAU
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 9e et 10e année (Sec. III et IV)

Volume 8 — NOUVEAU
- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Les Problèmes et Leurs Solutions - Volume 1

Cette brochure fait suite à la collection de problèmes d'enrichissement offerte aux étudiants de 9e, 10e et 11e années. Chacun des huit chapitres comprend un examen des solutions et des démarches suggérées. Ils comptent plus de 225 nouveaux problèmes, presque tous tirés des concours canadiens de mathématiques, accompagnés de solutions complètes. Le prix est de 20 $. **(Disponible en anglais seulement.)**

Faire passer les commandes au : Concours canadien de mathématiques
Faculté de mathématiques, pièce MC 5181
Université de Waterloo
Waterloo (Ontario) N2L 3G1

Veuillez inscrire votre nom, votre adresse (et votre code postal) ainsi que votre numéro de téléphone.

Établir les chèques ou les mandats à l'ordre du «Centre for Education in Mathematics and Computing». Pour les commandes effectuées au Canada, veuillez ajouter 3 $ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 1 $ pour chaque article additionnel. Aucune taxe de vente provinciale ne s'applique, mais il faut ajouter la TPS de 7 p. 100. Pour les commandes ***de l'extérieur du Canada SEULEMENT***, veuillez ajouter 10 $ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 2 $ pour chaque article additionnel. **Les prix de ces publications demeureront en vigueur jusqu'en 1 septembre 2003.**

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat (11^e – Sec. V)

Le mercredi 20 février 2002

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Sybase Inc. (Waterloo)

*i*Anywhere Solutions

Avec l'appui de :

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 1 heure

L'usage de la calculatrice est permis, pourvu qu'elle ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

Directives
1. Attendez le signal du surveillant avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponse. Au besoin, demandez à l'enseignant-e d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Aussi, il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droit de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation :
   Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Il *n'y a pas* de pénalité pour une réponse fautive.
   Chaque question restée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 20 points.
8. Les diagrammes *ne sont pas* dessinés à l'échelle. Ils sont inclus pour aider seulement.
9. Après le signal du surveillant, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Notation :	Une réponse fautive *n'est pas* pénalisée. On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 20 points.

Partie A : 5 points par question

1. Si $x = 3$, la valeur numérique de $5 - 2x^2$ est :

   (**A**) –1 (**B**) 27 (**C**) –13 (**D**) -31 (**E**) 3

2. $\dfrac{3^3 + 3}{2^2 + 2}$ est égal à :

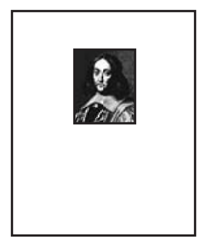
   (**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 2 (**D**) $\frac{3}{2}$ (**E**) 5

3. Il est maintenant 9 h 04. Dans 56 heures, il sera :

   (**A**) 9 h 04 (**B**) 17 h 04 (**C**) 5 h 04 (**D**) 13 h 04 (**E**) 1 h 04

4. Lequel des énoncés suivants n'est **pas** vrai?
   (**A**) 25 est un carré parfait.
   (**B**) 31 est un nombre premier.
   (**C**) 3 est le plus petit nombre premier.
   (**D**) 8 est un cube parfait.
   (**E**) 15 est le produit de deux nombres premiers.

5. Un portrait de Pierre de Fermat est de forme rectangulaire et mesure 20 cm sur 40 cm. Il est placé comme dans le diagramme, sur une affiche rectangulaire mesurant 50 cm sur 100 cm. Quel pourcentage de la surface de l'affiche est recouverte par le portrait?

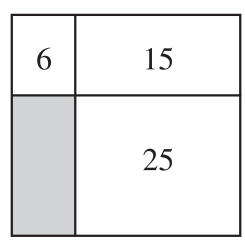
   

   (**A**) 24 % (**B**) 16 % (**C**) 20 %
   (**D**) 25 % (**E**) 40 %

6. Gisa est plus grande que Henri, mais elle est plus courte que Justine. Yvan est plus grand que Catherine, mais plus court que Gisa. La plus grande de ces cinq personnes est :

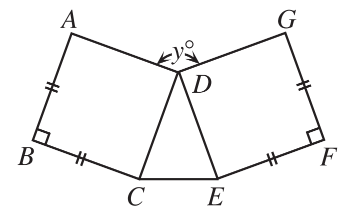
   (**A**) Gisa (**B**) Henri (**C**) Yvan (**D**) Justine (**E**) Catherine

7. Un rectangle a été divisé en quatre petits rectangles. Trois de ces rectangles ont une aire respective de 6, 15 et 25, comme l'indique le diagramme. L'aire du rectangle ombré est égale à :

   (**A**) 7 (**B**) 15 (**C**) 12
   (**D**) 16 (**E**) 10

8. Dans le diagramme, $ABCD$ et $DEFG$ sont des carrés ayant les mêmes longueurs de côtés et $\angle DCE = 70°$. La valeur de y est :

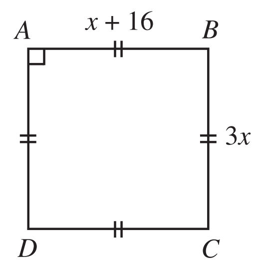


(**A**) 120 (**B**) 160 (**C**) 130
(**D**) 110 (**E**) 140

9. On a écrit les nombres de 1 à 20 sur vingt balles de golf, un numéro par balle. On a ensuite placé les balles dans une boîte. Si on tire une balle au hasard et que chaque balle a une même chance d'être choisie, quelle est la probabilité pour que la balle choisie soit un multiple de 3?

(**A**) $\frac{3}{20}$ (**B**) $\frac{6}{20}$ (**C**) $\frac{10}{20}$ (**D**) $\frac{5}{20}$ (**E**) $\frac{1}{20}$

10. $ABCD$ est un carré. Si $AB = x+16$ et $BC = 3x$, alors le périmètre de $ABCD$ est égal à :



(**A**) 16 (**B**) 32 (**C**) 96
(**D**) 48 (**E**) 24

Partie B : 6 points par question

11. Une droite qui passe par les points $(0,-2)$ et $(1,0)$ passe aussi par le point $(7,b)$. La valeur numérique de b est :

(**A**) 12 (**B**) $\frac{9}{2}$ (**C**) 10 (**D**) 5 (**E**) 14

12. Combien y a-t-il d'entiers positifs de trois chiffres qui sont des carrés parfaits?

(**A**) 23 (**B**) 22 (**C**) 21 (**D**) 20 (**E**) 19

13. Un nombre « double-singulier » est un entier positif de trois chiffres dont les deux premiers chiffres sont identiques et le troisième chiffre est différent des deux autres. Par exemple, 553 est un nombre double-singulier. Combien y a-t-il de nombres doubles-singuliers entre 100 et 1000?

(**A**) 81 (**B**) 18 (**C**) 72 (**D**) 64 (**E**) 90

14. On écrit les entiers de 1 à 2100, dans l'ordre, dans un tableau de 7 colonnes. Les 3 premières rangées du tableau sont indiquées. Le nombre 2002 est placé dans la colonne m, rangée n. La valeur de $m+n$ est :

	Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4	Colonne 5	Colonne 6	Colonne 7
Rangée 1	1	2	3	4	5	6	7
Rangée 2	8	9	10	11	12	13	14
Rangée 3	15	16	17	18	19	20	21
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(**A**) 290 (**B**) 291 (**C**) 292 (**D**) 293 (**E**) 294

15. Dans une suite de nombres positifs, chaque terme, après les deux premiers, est la somme de *tous les termes précédents*. Si le premier terme est a, le deuxième terme est 2 et le sixième terme est 56, alors la valeur de a est :

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

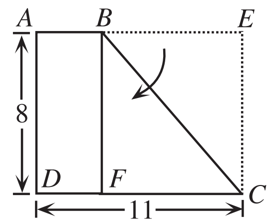
16. Si $ac + ad + bc + bd = 68$ et $c + d = 4$, quelle est la valeur de $a + b + c + d$?

(**A**) 17 (**B**) 85 (**C**) 4 (**D**) 21 (**E**) 64

17. L'âge moyen d'un groupe de 140 personnes est de 24 ans. L'âge moyen des hommes du groupe est de 21 ans et l'âge moyen des femmes du groupe est de 28 ans. Combien y a-t-il de femmes dans le groupe?

(**A**) 90 (**B**) 80 (**C**) 70 (**D**) 60 (**E**) 50

18. Une feuille de papier a la forme d'un rectangle $AECD$ et mesure 8 cm sur 11 cm. On replie la feuille de manière que le coin E coïncide avec le point F, situé sur DC, comme dans le diagramme. Le périmètre du trapèze $ABCD$ est plus près de :

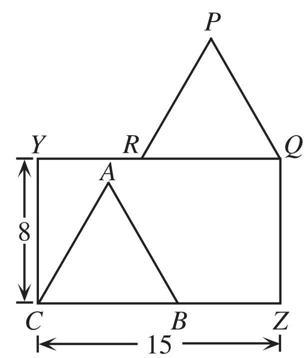


(**A**) 33,3 cm (**B**) 30,3 cm (**C**) 30,0 cm
(**D**) 41,3 cm (**E**) 35,6 cm

19. Si $2^a 3^b = 8\left(6^{10}\right)$, a et b étant des entiers, alors $b - a$ est égal à :

(**A**) 0 (**B**) 23 (**C**) -13 (**D**) -7 (**E**) -3

20. Dans le diagramme, $YQZC$ est un rectangle, $YC = 8$ et $CZ = 15$. Deux triangles équilatéraux, ABC et PQR, ayant chacun des côtés de longueur 9, sont placés comme il est indiqué, avec R sur le côté YQ et B sur le côté CZ. La longueur de AP est égale à :



(**A**) 10 (**B**) $\sqrt{117}$ (**C**) 9
(**D**) 8 (**E**) $\sqrt{72}$

Partie C : 8 points par question

21. Si $\sqrt{\frac{3}{1} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n+1}{2n-1}} = 9$, alors la valeur de n est :

(**A**) 38 (**B**) 1 (**C**) 40 (**D**) 4 (**E**) 39

22. La fonction f est telle que $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$, pour tous les entiers strictement positifs x et y. Si $f(1) = 4$, alors la valeur numérique de $f(8)$ est :

(**A**) 72 (**B**) 84 (**C**) 88 (**D**) 64 (**E**) 80

à suivre ...

23. On a écrit les entiers de 1 à 9 au tableau. Si on ajoute m autres 8 et k autres 9 au tableau, la moyenne de tous les nombres sera égale à 7,3. La valeur de $k+m$ est :

(**A**) 24 (**B**) 21 (**C**) 11 (**D**) 31 (**E**) 89

24. Une élève a deux contenants ouverts, de forme cylindrique. (Les parois des contenants sont minces et leur épaisseur est négligeable.) Le plus grand des contenants a une hauteur de 20 cm, un rayon de 6 cm et il contient de l'eau jusqu'à une profondeur de 17 cm. Le plus petit a une hauteur de 18 cm, un rayon de 5 cm et il est vide. Comme l'illustre la Figure 1, l'élève fait descendre le petit contenant dans le plus grand. Comme on peut le constater dans la Figure 2, lorsque le petit contenant descend dans le grand, l'eau se met à déborder vers l'extérieur, mais lorsque le petit contenant est baissé plus bas, l'eau se met à déborder dans le petit contenant. Lorsque le petit contenant reposera au fond du grand, la profondeur de l'eau dans le petit contenant sera à peu près égale à :

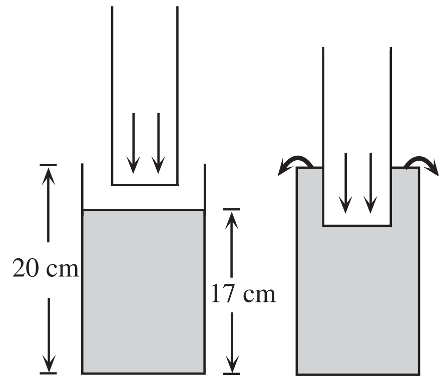


Figure 1 Figure 2

(**A**) 2,82 cm (**B**) 2,84 cm (**C**) 2,86 cm
(**D**) 2,88 cm (**E**) 2,90 cm

25. Les longueurs de chacune des six arêtes d'un tétraèdre sont des entiers. Cinq des longueurs d'arêtes sont 14, 20, 40, 52 et 70. Le nombre de longueurs possibles de la sixième arête est égal à :

(**A**) 9 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat (11e – Sec. V)

Le mercredi 21 février 2001

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 1 heure

L'usage de la calculatrice est permis, pourvu qu'elle ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponse. Au besoin, demandez à l'enseignant-e d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Aussi, il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droit de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation :
   Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Il *n'y a pas* de pénalité pour une réponse fautive.
   Chaque question restée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 20 points.
8. Les diagrammes *ne sont pas* dessinés à l'échelle. Ils sont inclus pour aider seulement.
9. Après le signal du surveillant, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Notation :	Une réponse fautive *n'est pas* pénalisée. On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 20 points.

Partie A : Chaque réponse exacte vaut 5 points

1. Si $x+2x+3x+4x=5$, alors x est égal à :

   (**A**) 10 (**B**) $\frac{1}{2}$ (**C**) $\frac{5}{4}$ (**D**) 2 (**E**) $\frac{5}{9}$

2. Si $x=\frac{1}{4}$, laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur?

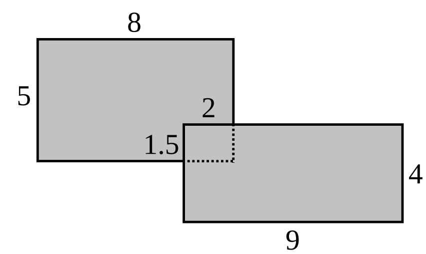
   (**A**) x (**B**) x^2 (**C**) $\frac{1}{2}x$ (**D**) $\frac{1}{x}$ (**E**) $\sqrt{x}$

3. Dans une école, 20 filles et 30 garçons se sont inscrits au concours Fermat. Des certificats ont été remis à 20 % des filles et à 10 % des garçons. Quel pourcentage des élèves inscrits ont reçu un certificat?

   (**A**) 14 (**B**) 15 (**C**) 16 (**D**) 30 (**E**) 50

4. Deux rectangles sont partiellement superposés comme dans le diagramme. La partie commune forme un rectangle. L'aire totale de la région ombrée est égale à :

   (**A**) 45 (**B**) 70 (**C**) 52
   (**D**) 79 (**E**) 73



5. Dans le triangle ABC, $\angle A=3\angle B$ et $\angle B=2\angle C$. La mesure de l'angle B est égale à :

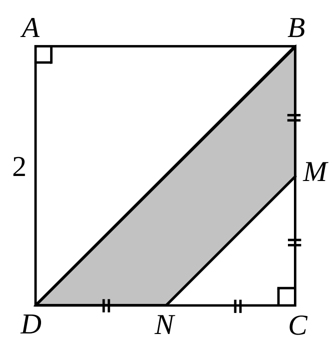
   (**A**) $10°$ (**B**) $20°$ (**C**) $30°$ (**D**) $40°$ (**E**) $60°$

6. Patrick remet la moitié de ses billes à son meilleur ami, puis il remet un tiers des billes qu'il lui reste à sa sœur. Si sa sœur reçoit 9 billes, alors le nombre de billes que Patrick garde pour lui est :

   (**A**) 27 (**B**) 54 (**C**) 18 (**D**) 36 (**E**) 9

7. Dans le diagramme, le carré $ABCD$ a des côtés de longueur 2, M est le milieu de BC et N est le milieu de CD. L'aire de la région ombrée $BMND$ est égale à :

   (**A**) 1 (**B**) $2\sqrt{2}$ (**C**) $\frac{4}{3}$
   (**D**) $\frac{3}{2}$ (**E**) $4-\frac{3}{2}\sqrt{2}$



8. Si $\sqrt{5+11-7}=\sqrt{5+11}-\sqrt{x}$, alors la valeur de x est :

   (**A**) 1 (**B**) 7 (**C**) -7 (**D**) 49 (**E**) 4

9. Un sac contient 20 bonbons : 4 au chocolat, 6 à la menthe et 10 au caramel. Des bonbons sont retirés du sac, au hasard, et mangés. Quel est le nombre minimum de bonbons qu'il faut retirer du sac pour être *certain* qu'au moins deux bonbons de chaque sorte ont été mangés?

(**A**) 6 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 16 (**E**) 18

10. Lorsqu'un entier positif N est divisé par 60, le reste est égal à 49. Lorsque N est divisé par 15, le reste est égal à :

(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 8

Partie B : Chaque réponse exacte vaut 6 points

11. La racine quatrième de 2001200120012001 (c'est-à-dire $\sqrt[4]{2001200120012001}$) est plus près de :

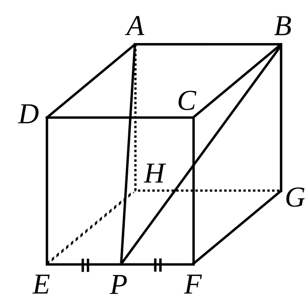
(**A**) 2001 (**B**) 6700 (**C**) 21 000 (**D**) 12 000 (**E**) 2100

12. Combien y a-t-il de valeurs entières de x qui vérifient $\frac{x-1}{3} < \frac{5}{7} < \frac{x+4}{5}$?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

13. $ABCDEFGH$ est un cube ayant des côtés de longueur 2. P est le milieu de EF. L'aire du triangle APB est égale à :

(A) $\sqrt{8}$ (**B**) 3 (**C**) $\sqrt{32}$
(**D**) $\sqrt{2}$ (**E**) 6

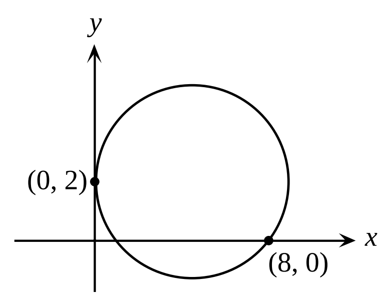


14. Le dernier chiffre (c'est-à-dire le chiffre des unités) du nombre $(2002)^{2002}$ est :

(**A**) 4 (**B**) 2 (**C**) 8 (**D**) 0 (**E**) 6

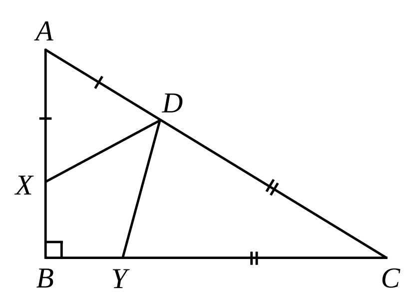
15. Un cercle est tangent à l'axe des y au point $(0, 2)$ et la plus grande de ses abscisses à l'origine est 8. Le rayon du cercle est égal à :

(**A**) $\frac{9}{2}$ (**B**) $\sqrt{17}$ (**C**) $\frac{17}{4}$
(**D**) $\frac{15}{4}$ (**E**) $\frac{\sqrt{17}}{2}$



16. Dans un triangle rectangle ABC, $AX = AD$ et $CY = CD$, comme l'indique le diagramme. La mesure de l'angle XDY est :

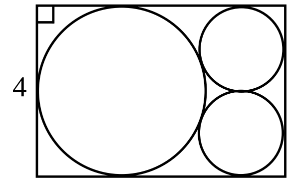
(**A**) 35° (**B**) 40° (**C**) 45°
(**D**) 50° (**E**) indéterminée par ces données



17. Trois nombres différents sont choisis tels que lorsqu'on additionne tour à tour un des nombres à la moyenne des deux autres, on obtient 65, 69 et 76. La moyenne des trois nombres choisis est égale à :

(**A**) 34 (**B**) 35 (**C**) 36 (**D**) 37 (**E**) 38

18. Les deux petits cercles du diagramme on le même rayon. Chacun des trois cercles est tangent aux deux autres cercles et chacun est tangent à des côtés du rectangle. Si le rectangle a une largeur de 4, sa longueur est égale à :



(**A**) $2+\sqrt{8}$ (**B**) $3+\sqrt{8}$ (**C**) $3+\sqrt{10}$
(**D**) $\sqrt{32}$ (**E**) $4+\sqrt{3}$

19. À chaque jour, Carla quitte l'école à la même heure. Si elle pédale à une vitesse de 20 km/h, elle arrive à la maison à 16 h 30. Si elle pédale à une vitesse de 10 km/h, elle arrive à la maison à 17 h 15. À quelle vitesse, en km/h, doit-elle pédaler pour arriver à la maison à 17 h?

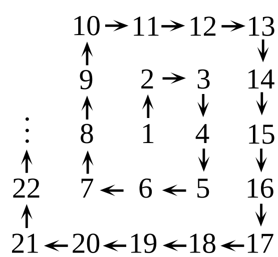
(**A**) $16\frac{2}{3}$ (**B**) 15 (**C**) $13\frac{1}{3}$ (**D**) 12 (**E**) $18\frac{3}{4}$

20. Le point P est sur la droite définie par $y=5x+3$. Les coordonnées d'un point Q sont $(3,-2)$. Si M est le milieu de PQ, alors M doit être situé sur la droite définie par :

(**A**) $y=\frac{5}{2}x-\frac{7}{2}$ (**B**) $y=5x+1$ (**C**) $y=-\frac{1}{5}x-\frac{7}{5}$ (**D**) $y=\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$ (**E**) $y=5x-7$

Partie C : Chaque réponse exacte vaut 8 points

21. On forme une spirale de nombres, en commençant par 1, comme dans le diagramme. Si la spirale est prolongée de la même façon, dans laquelle des configurations suivantes retrouvera-t-on les nombres 399, 400 et 401?



(**A**) $399 \rightarrow 400 \rightarrow 401$ (**B**) $401 \leftarrow 400 \leftarrow 399$

(**C**) $\begin{array}{c} 401 \\ \uparrow \\ 400 \\ \uparrow \\ 399 \end{array}$ (**D**) $\begin{array}{c} 399 \\ \downarrow \\ 400 \\ \downarrow \\ 401 \end{array}$ (**E**) $\begin{array}{ll} 400 & \rightarrow 401 \\ \uparrow & \\ 399 & \end{array}$

22. Une bouteille fermée, contenant de l'eau, a été construite en attachant un cylindre de rayon 1 cm à un cylindre de rayon 3 cm, comme dans la Figure A. Lorsque la bouteille est tenue à l'endroit, le niveau de l'eau est à une hauteur de 20 cm, comme l'illustre la vue de face dans la Figure B. Lorsque la bouteille est tenue à l'envers, le niveau de l'eau est à une hauteur de 28 cm, comme l'illustre la Figure C. Quelle est la hauteur totale de la bouteille, en centimètres?

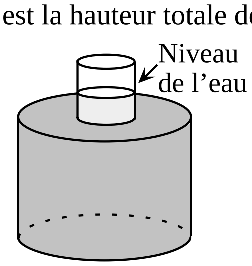


Figure A

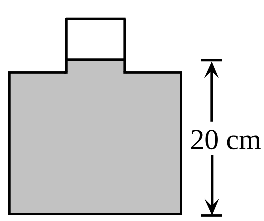


Figure B

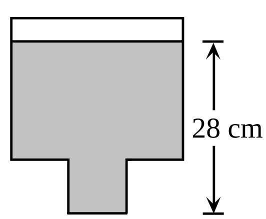


Figure C

(**A**) 29 (**B**) 30 (**C**) 31 (**D**) 32 (**E**) 48

à suivre ...

23. On définit une suite $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ comme suit :

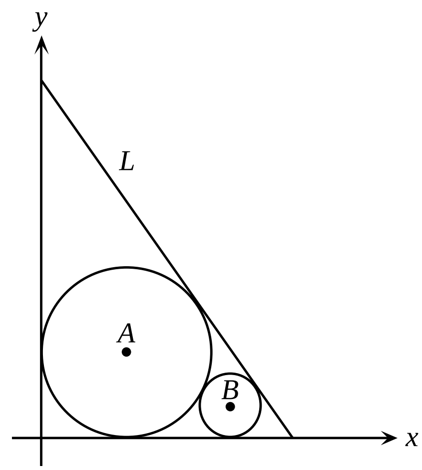
$t_1 = 14$

$t_k = 24 - 5t_{k-1}$, lorsque $k \geq 2$.

Pour chaque entier strictement positif n, on peut exprimer t_n comme suit : $t_n = p \cdot q^n + r$, où p, q et r sont des constantes. La valeur de $p + q + r$ est :

(**A**) -5 (**B**) -3 (**C**) 3 (**D**) 17 (**E**) 31

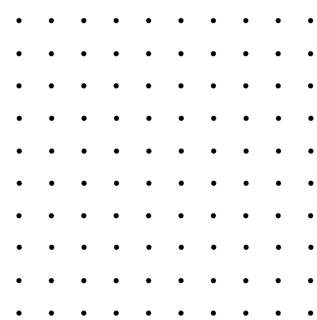
24. Le cercle de centre A a un rayon de 3. Il est tangent à la partie positive de l'axe des x et à la partie positive de l'axe des y. Le cercle de centre B a un rayon de 1 et il est tangent à la partie positive de l'axe des x et au cercle de centre A. La droite L est tangente au deux cercles. L'ordonnée à l'origine de la droite L est :



(**A**) $3 + 6\sqrt{3}$ (**B**) $10 + 3\sqrt{2}$ (**C**) $8\sqrt{3}$

(**D**) $10 + 2\sqrt{3}$ (**E**) $9 + 3\sqrt{3}$

25. On considère un tableau formé de 10 rangées de 10 points, comme dans le diagramme. Chaque point est rouge ou bleu. Lorsque deux points d'une même couleur sont en positions adjacentes dans la même rangée ou la même colonne, ils sont joints par un segment de la même couleur que les points. Lorsque deux points de couleurs différentes sont en positions adjacentes, ils sont joints par un segment vert. En tout, il y a 52 points rouges. Il y a 2 points rouges dans les coins et 16 autres points rouges sur les côtés formant l'extérieur du tableau. Les autres points rouges sont à l'intérieur du tableau. Il y a 98 segments verts. Le nombre de segments bleus est égal à :



(**A**) 36 (**B**) 37 (**C**) 38

(**D**) 39 (**E**) 40

❁ ❁ ❁ ❁ ❁

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat (11 e – Sec. IV)

Le mercredi 23 février 2000

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Deloitte & Touche
Chartered Accountants

Avec la participation de :

IBM
Canada Ltée

Institut canadien
des actuaires

Sybase
inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Northern Telecom (Nortel)

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 1 heure

L'usage de la calculatrice est permis, pourvu qu'elle ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponse. Au besoin, demandez à l'enseignant-e d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Aussi, il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droit de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation :
   Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Il *n'y a pas* de pénalité pour une réponse fautive.
   Chaque question restée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 20 points.
8. Les diagrammes *ne sont pas* dessinés à l'échelle. Ils sont inclus pour aider seulement.
9. Après le signal du surveillant, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Notation :	Une réponse fautive *n'est pas* pénalisée. On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 20 points.

Partie A : 5 points par question

1. La somme de $29+12+23$ est égale à :

   (**A**) 6^2 (**B**) 4^4 (**C**) 8^8 (**D**) 64^0 (**E**) 2^6

2. Si la suite de cinq flèches, illustrée ci-dessous, se répète sans cesse, quelle flèche sera située dans la 48^e position?

   $\rightarrow$, $\nearrow$, $\nwarrow$, $\leftarrow$, $\downarrow$

   (**A**) $\rightarrow$ (**B**) $\nearrow$ (**C**) $\nwarrow$ (**D**) $\leftarrow$ (**E**) $\downarrow$

3. Un fermier possède 7 vaches, 8 brebis et 6 chèvres. Combien d'autres chèvres devrait-il acheter pour que la moitié de ses animaux soient des chèvres?

   (**A**) 18 (**B**) 15 (**C**) 21 (**D**) 9 (**E**) 6

4. On divise le carré de 9 par la racine cubique de 125. Quel est le reste?

   (**A**) 6 (**B**) 3 (**C**) 16 (**D**) 2 (**E**) 1

5. La somme et le produit de 2, 3, 5 et y sont égaux. Quelle est la valeur de y?

   (**A**) $\frac{1}{3}$ (**B**) $\frac{10}{31}$ (**C**) $\frac{10}{29}$ (**D**) $\frac{3}{10}$ (**E**) $\frac{10}{3}$

6. Un élève utilise une calculatrice pour obtenir une réponse, mais au lieu d'utiliser la touche $\boxed{x^2}$, il utilise la touche $\boxed{\sqrt{x}}$ par erreur. Sa réponse est 9. Quelle réponse aurait-il dû obtenir?

   (**A**) 243 (**B**) 81 (**C**) 729 (**D**) 3 (**E**) 6561

7. La somme de $(-300)+(-297)+(-294)+\ldots+306+309$ est :

   (**A**) 309 (**B**) 927 (**C**) 615 (**D**) 918 (**E**) 18

8. Lors d'un référendum à l'école, $\frac{3}{5}$ des élèves ont voté « oui » et 28 % ont voté « non ». Si aucun bulletin de vote n'a été annulé, quel pourcentage des élèves n'ont pas voté?

   (**A**) 72 % (**B**) 40 % (**C**) 32 % (**D**) 12 % (**E**) 88 %

9. Les nombres 6, 14, x, 17, 9, y et 10 ont une moyenne de 13. Quelle est la valeur de $x+y$?

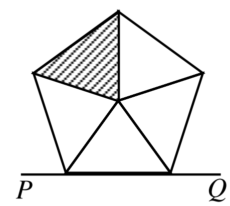
   (**A**) 20 (**B**) 21 (**C**) 23 (**D**) 25 (**E**) 35

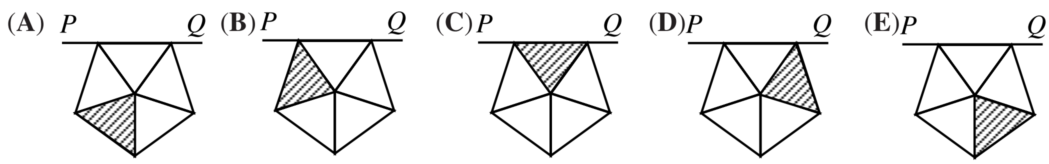
10. Si $x(x(x+1)+2)+3=x^3+x^2+x-6$, alors x est égal à :

(**A**) 11 (**B**) -9 (**C**) -4 or 3 (**D**) -1 or 0 (**E**) -2

Partie B : 6 points par question

11. Lorsqu'on fait subir au pentagone régulier une réflexion par rapport à la droite PQ, suivie d'une rotation de 144° *dans le sens des aiguilles d'une montre*, dont le centre de rotation est le centre du pentagone, on obtient :



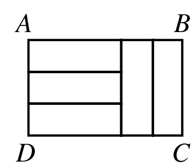


12. Si on évaluait l'expression $15^6\times28^5\times55^7$, la réponse se terminerait par une série de zéros consécutifs. Combien de zéros y aurait-il dans cette série?

(**A**) 10 (**B**) 18 (**C**) 26 (**D**) 13 (**E**) 5

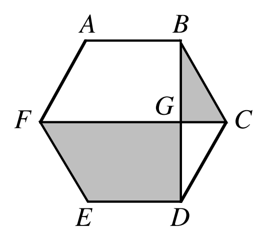
13. On divise le rectangle $ABCD$ en cinq rectangles congruents comme dans le diagramme. Le rapport $AB:BC$ est égal à :

(**A**) 3:2 (**B**) 2:1 (**C**) 5:2
(**D**) 5:3 (**E**) 4:3



14. $ABCDEF$ est un hexagone régulier dont les diagonales FC et BD se croisent au point G. Le rapport de l'aire du quadrilatère $FEDG$ à celle du triangle BCG est égal à :

(**A**) $3\sqrt{3}:1$ (**B**) 4:1 (**C**) 6:1
(**D**) $2\sqrt{3}:1$ (**E**) 5:1



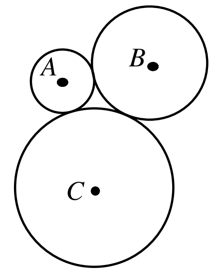
15. Dans une suite, chaque terme, à partir du troisième, est le double de la somme des deux termes précédents. Le septième terme de la suite est 8 et le neuvième terme est 24. Quel est le onzième terme de la suite?

(**A**) 160 (**B**) 304 (**C**) 28 (**D**) 56 (**E**) 64

16. On place les chiffres 2, 2, 3 et 5 au hasard l'un à côté de l'autre pour former un nombre de quatre chiffres. Quelle est la probabilité pour que la somme du premier et du dernier chiffre soit paire?

(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{1}{6}$ (**D**) $\frac{1}{2}$ (**E**) $\frac{2}{3}$

17. Les trois cercles de centres A, B et C ont des rayons respectifs de 2, 4 et 6 unités. Comme l'indique le diagramme, les cercles sont tangents l'un à l'autre. Dans le triangle ABC :



(**A**) $\angle A$ est obtus (**B**) $\angle B = 90°$ (**C**) $\angle A = 90°$

(**D**) tous les angles sont aigus (**E**) $\angle B = \angle C$

18. Soit $P = 3^{2000} + 3^{-2000}$ et $Q = 3^{2000} - 3^{-2000}$. Alors $P^2 - Q^2$ est égal à :

(**A**) 3^{4000} (**B**) 2×3^{-4000} (**C**) 0 (**D**) 2×3^{4000} (**E**) 4

19. Une fourmi se promène à l'intérieur d'un rectangle mesurant 18 cm sur 150 cm. La fourmi parcourt des chemins droits qui forment tous des angles de 45° avec les côtés du rectangle. La fourmi commence à un point X situé sur un des petits côtés du rectangle. La première fois que la fourmi atteint le côté opposé, elle arrive au milieu du côté. Quelle est la distance, en centimètres, du point X jusqu'au coin le plus proche?

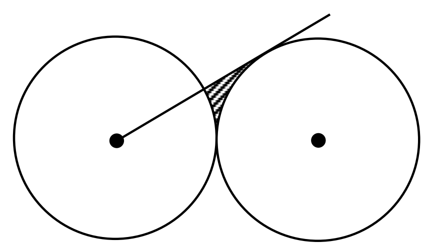
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

20. Soit $a + 2b + 3c + 4d + 5e = k$ et $5a = 4b = 3c = 2d = e$. Quel est le plus petit entier strictement positif, k, pour lequel a, b, c, d et e sont tous des entiers strictement positifs?

(**A**) 87 (**B**) 522 (**C**) 10 (**D**) 120 (**E**) 60

Partie C : 8 points par question

21. Deux cercles, ayant chacun un rayon de 10 unités, sont tangents l'un à l'autre. On trace une droite, tangente à un des cercles, à partir du centre de l'autre cercle. Quelle est l'aire de la région ombrée, à l'unité près?

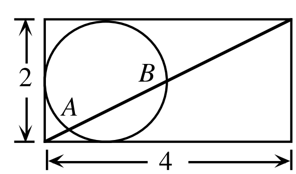


(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8
(**D**) 9 (**E**) 10

22. On considère un entier de 2000 chiffres dont le premier chiffre, à l'extrême gauche, est un 3. Les chiffres de l'entier sont placés de manière que n'importe quels deux chiffres consécutifs forment un nombre divisible par 17 ou par 23. Le 2000e chiffre peut être a ou b. Quelle est la valeur de $a + b$?

(**A**) 3 (**B**) 7 (**C**) 4 (**D**) 10 (**E**) 17

23. Un cercle est tangent à trois côtés d'un rectangle dont les côtés mesurent respectivement 2 et 4 unités. Une diagonale du rectangle croise le cercle aux points A et B. La longueur de AB est égale à :



(**A**) $\sqrt{5}$ (**B**) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (**C**) $\sqrt{5} - \frac{1}{5}$

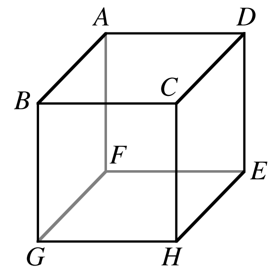
(**D**) $\sqrt{5} - \frac{1}{6}$ (**E**) $\frac{5\sqrt{5}}{6}$

à suivre ...

24. On considère le système d'équations $x^2+x^2y^2+x^2y^4=525$ et $x+xy+xy^2=35$. La somme des valeurs réelles de y qui vérifient le système d'équations est égale à :

(**A**) 20 (**B**) 2 (**C**) 5 (**D**) $\frac{55}{2}$ (**E**) $\frac{5}{2}$

25. Le cube illustré est coupé en quatre sections par deux plans. Le premier plan est parallèle à la face $ABCD$ et passe au milieu de l'arête BG. Le deuxième plan passe par les milieux des arêtes AB, AD, HE et GH. Quel est le rapport des volumes du plus petit et du plus grand des quatre morceaux?



(**A**) 3:8 (**B**) 7:24 (**C**) 7:25
(**D**) 7:17 (**E**) 5:11

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat (11e – Sec. V)

Le mercredi 24 février 1999

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Banque Nationale du Canada

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Avec la participation de :

IBM Canada Ltée

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

La Great-West Compagnie d'Assurance-Vie

Northern Telecom (Nortel)

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 1 heure

L'usage de la calculatrice est permis, pourvu qu'elle ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponse. Au besoin, demandez à l'enseignant-e d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Aussi, il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droit de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation :
   Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Il *n'y a pas* de pénalité pour une réponse fautive.
   Chaque question restée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 20 points.
8. Les diagrammes *ne sont pas* dessinés à l'échelle. Ils sont inclus pour aider seulement.
9. Après le signal du surveillant, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Notation :	Une réponse fautive *n'est pas* pénalisée. On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 20 points.

Partie A : 5 points par question

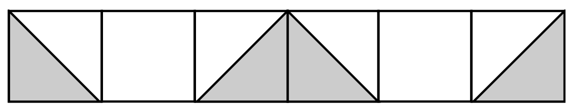
1. La valeur de $\left(\sqrt{25}-\sqrt{9}\right)^2$ est :

   (**A**) 26 (**B**) 16 (**C**) 34 (**D**) 8 (**E**) 4

2. Nous sommes aujourd'hui mercredi. Quel jour de la semaine serons-nous dans 100 jours?

   (**A**) lundi (**B**) mardi (**C**) jeudi (**D**) vendredi (**E**) samedi

3. La figure illustrée est formée de six carrés. Quelle fraction de la figure est ombrée?



   (**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{1}{4}$ (**D**) $\frac{2}{5}$ (**E**) $\frac{2}{3}$

4. Lorsqu'on fait tourner un tourne-vis sur un angle de $90°$, une vis pénètre dans un morceau de bois sur une profondeur de 3 mm. Combien faut-il de tours complets du tourne-vis pour insérer une vis de 36 mm dans le bois?

   (**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 9 (**E**) 12

5. Une valeur de x pour laquelle $(5-3x)^5=-1$ est :

   (**A**) $\frac{4}{3}$ (**B**) 0 (**C**) $\frac{10}{3}$ (**D**) $\frac{5}{3}$ (**E**) 2

6. Le nombre qui est 6 de moins que le double du carré de 4 est :

   (**A**) -26 (**B**) 10 (**C**) 26 (**D**) 38 (**E**) 58

7. Dans la famille Martin, chacun des cinq enfants reçoit une allocation hebdomadaire. L'allocation moyenne des trois plus jeunes est de 8 \$. Les deux plus vieux reçoivent une allocation moyenne de 13 \$. Quelle somme est déboursée à chaque semaine pour les allocations des enfants?

   (**A**) 50 \$ (**B**) 52,50 \$ (**C**) 105 \$ (**D**) 21 \$ (**E**) 55 \$

8. Une montre à affichage digital indique $5{:}55$. Combien de minutes s'écouleront avant que la montre indique de nouveau trois chiffres identiques?

   (**A**) 71 (**B**) 72 (**C**) 255 (**D**) 316 (**E**) 436

9. Lors d'une élection, Hubert a reçu 60 % des votes et Jeanne a reçu tous les autres votes. Si Hubert a gagné par 24 votes, combien de personnes ont voté?

   (**A**) 40 (**B**) 60 (**C**) 72 (**D**) 100 (**E**) 120

10. Si on choisit les valeurs de x et de y dans l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10\}$, la plus grande valeur possible de l'expression $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ est :

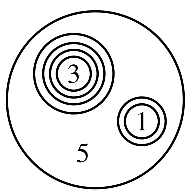
(**A**) 2 (**B**) $12\frac{1}{2}$ (**C**) $10\frac{1}{10}$ (**D**) $2\frac{1}{2}$ (**E**) 20

Partie B : 6 points par question

11. Au *Pays des ronds*, on représente les nombres 207 et 4520 de la façon suivante :

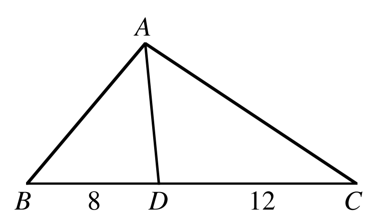
207 4520

Au *Pays des ronds*, quel nombre est représenté par le diagramme suivant?



(**A**) 30 105 (**B**) 30 150 (**C**) 3105 (**D**) 3015 (**E**) 315

12. Le triangle ABC a une aire de 60 unités carrées. Si $BD=8$ unités et $DC=12$ unités, l'aire du triangle ABD, en unités carrées, est égale à :

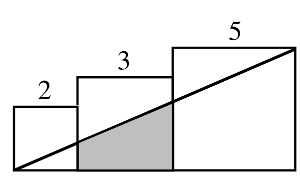


(**A**) 24 (**B**) 40 (**C**) 48
(**D**) 36 (**E**) 6

13. Pépin a passé quatre examens, chacun sur 100. Il a obtenu une moyenne de 88. Quelle est la note la plus basse qu'il ait pu obtenir sur un de ces examens?

(**A**) 88 (**B**) 22 (**C**) 52 (**D**) 0 (**E**) 50

14. Le diagramme illustre trois carrés dont les dimensions sont indiquées. Quelle est l'aire du quadrilatère ombré?



(**A**) $\frac{21}{4}$ (**B**) $\frac{9}{2}$ (**C**) 5

(**D**) $\frac{15}{4}$ (**E**) $\frac{25}{4}$

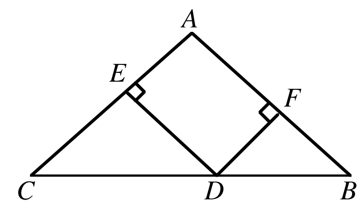
15. Si l'expression $(a+b+c+d+e+f+g+h+i)^2$ est développée et réduite, combien y aura-t-il de termes différents dans la réponse?

(**A**) 36 (**B**) 9 (**C**) 45 (**D**) 81 (**E**) 72

16. Si les équations $px + 2y = 7$ et $3x + qy = 5$ représentent la même droite, la valeur de p est :

(**A**) 5 (**B**) 7 (**C**) 21 (**D**) $\frac{21}{5}$ (**E**) $\frac{10}{7}$

17. Dans le triangle ABC, on a $AC = AB = 25$ et $BC = 40$. D est un point sur BC. Au point D, on abaisse des perpendiculaires qui rencontrent AC en E et AB en F. $DE + DF$ est égal à :



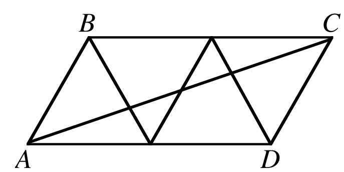
(**A**) 12 (**B**) 35 (**C**) 24

(**D**) 25 (**E**) $\frac{35}{2}\sqrt{2}$

18. Si P et Q sont des entiers de 1 à 9 inclusivement, le nombre de solutions (P, Q) de l'équation $\frac{P}{Q} - \frac{Q}{P} = \frac{P+Q}{PQ}$ est égal à :

(**A**) 1 (**B**) 8 (**C**) 16 (**D**) 72 (**E**) 81

19. Le parallélogramme $ABCD$ est formé de quatre triangles équilatéraux dont les côtés mesurent 1. La diagonale AC a une longueur de :



(**A**) $\sqrt{5}$ (**B**) $\sqrt{7}$ (**C**) 3

(**D**) $\sqrt{3}$ (**E**) $\sqrt{10}$

20. On définit $a_1 = \frac{1}{1-x}$, $a_2 = \frac{1}{1-a_1}$ et $a_n = \frac{1}{1-a_{n-1}}$, où $n \geq 2$, $x \neq 1$ et $x \neq 0$. Alors a_{107} est égal à :

(**A**) $\frac{1}{1-x}$ (**B**) x (**C**) $-x$ (**D**) $\frac{x-1}{x}$ (**E**) $\frac{1}{x}$

Partie C : 8 points par question

21. Combien d'entiers peut-on exprimer comme une somme de trois nombres distincts choisis dans l'ensemble $\{4, 7, 10, 13, \ldots, 46\}$?

(**A**) 45 (**B**) 37 (**C**) 36 (**D**) 43 (**E**) 42

22. Soit $x^2 + ax + 48 = (x+y)(x+z)$ et $x^2 - 8x + c = (x+m)(x+n)$, où y, z, m et n sont des entiers entre -50 et 50. La valeur maximale de ac est :

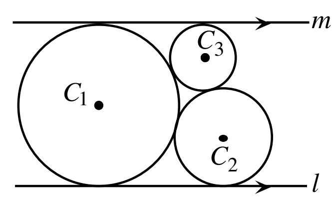
(**A**) 343 (**B**) 126 (**C**) 52 234 (**D**) 784 (**E**) 98 441

23. La somme des valeurs de x qui vérifient l'équation $\left(x^2 - 5x + 5\right)^{x^2+4x-60} = 1$ est égale à :

(**A**) -4 (**B**) 3 (**C**) 1 (**D**) 5 (**E**) 6

à suivre ...

24. Deux cercles, C_1 et C_2, se touchent extérieurement. La droite l est une tangente commune. La droite m est parallèle à l et touche les deux cercles C_1 et C_3. Les trois cercles sont tangents l'un à l'autre. Si C_2 a un rayon de 9 et C_3 a un rayon de 4, quel est le rayon de C_1?



(**A**) 10,4 (**B**) 11 (**C**) $8\sqrt{2}$
(**D**) 12 (**E**) $7\sqrt{3}$

25. Sachant que n est un entier, pour combien de valeurs de n l'expression $\dfrac{2n^2 - 10n - 4}{n^2 - 4n + 3}$ donnera-t-elle un entier?

(**A**) 9 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 4 (**E**) 5

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

35e Anniversaire 1963 – 1998

Concours Fermat (11e – Sec. V)

Le mercredi 18 février 1998

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Banque Nationale du Canada

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Avec la participation de :

IBM Canada Ltée

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

La Great-West Compagnie d'Assurance-Vie

Northern Telecom (Nortel)

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 1 heure

L'usage de la calculatrice est permis, pourvu qu'elle ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponse. Au besoin, demandez à l'enseignant-e d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Aussi, il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droit de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation :
   Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Il *n'y a pas* de pénalité pour une réponse fautive.
   Chaque question restée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 20 points.
8. Les diagrammes *ne sont pas* dessinés à l'échelle. Ils sont inclus pour aider seulement.
9. Après le signal du surveillant, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Notation :	Une réponse fautive n'est pas pénalisée. On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 20 points.

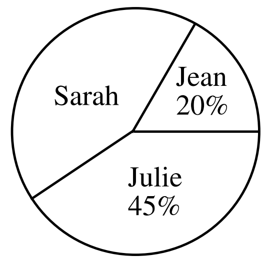
Partie A : 5 points par question

1. La valeur de $\frac{1+2+3+4+5}{2+4+6+8+10}$ est :

   (**A**) $\frac{1}{3}$ (**B**) 2,5 (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) $\frac{11}{26}$ (**E**) $\frac{3}{8}$

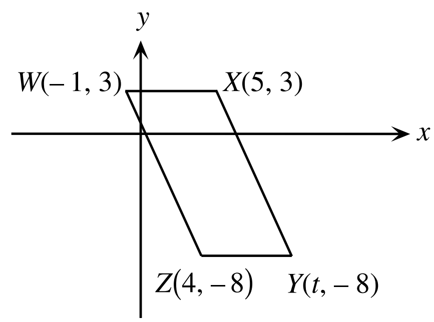
2. Le diagramme circulaire indique les pourcentages des 1000 votes reçus par les candidats lors d'une élection à l'école. Combien de votes Sarah a-t-elle reçus?

   (**A**) 550 (**B**) 350 (**C**) 330
   (**D**) 450 (**E**) 935



3. Si $WXYZ$ est un parallélogramme, alors t est égal à :

   (**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10
   (**D**) 11 (**E**) 12



4. Le produit de deux entiers positifs, p et q, est égal à 100. Quelle est la plus grande valeur possible de $p+q$?

   (**A**) 52 (**B**) 101 (**C**) 20 (**D**) 29 (**E**) 25

5. On définit une nouvelle opération $\otimes$, entre deux nombres p et q, comme suit : $p \otimes q = p^2 - 2q$. Quelle est la valeur de $7 \otimes 3$?

   (**A**) 43 (**B**) 8 (**C**) 141 (**D**) 36 (**E**) 26

6. La valeur de $\frac{1}{3}$ de 6^{30} est :

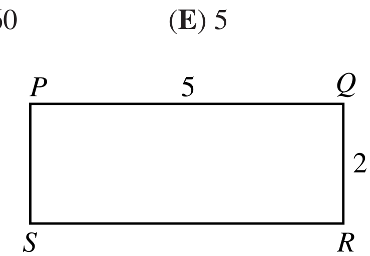
   (**A**) 6^{10} (**B**) 2^{30} (**C**) 2^{10} (**D**) 2×6^{29} (**E**) 2×6^{10}

7. La moyenne d'une liste de 10 nombres est 0. Si on ajoute les nombres 72 et -12 à la liste, la nouvelle moyenne sera égale à :

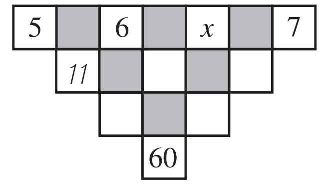
   (**A**) 30 (**B**) 6 (**C**) 0 (**D**) 60 (**E**) 5

8. Le diagramme illustre une table de billard de forme rectangulaire. La table a une longueur de 5 unités et une largeur de 2 unités. À partir du point P, on fait rouler une boule à un angle de $45°$ par rapport à PQ. La boule ira rebondir sur SR. La boule rebondit plusieurs fois, sur divers côtés, à un angle de $45°$, jusqu'à ce qu'elle arrive au point S. Combien de fois la boule rebondit-elle avant d'arriver à S?

   (**A**) 9 (**B**) 8 (**C**) 7
   (**D**) 5 (**E**) 4

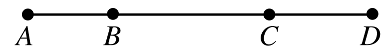


9. Un nombre dans une case blanche est obtenu en additionnant les nombres des deux cases blanches de la rangée précédente qui sont tout près. (Le ‘*11*’ a été obtenu de cette façon.) La valeur de x est :



(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 9
(**D**) 15 (**E**) 10

10. Le diagramme montre quatre points sur un segment de droite. Si $AB : BC = 1 : 2$ et $BC : CD = 8 : 5$, alors $AB : BD$ est égal à :

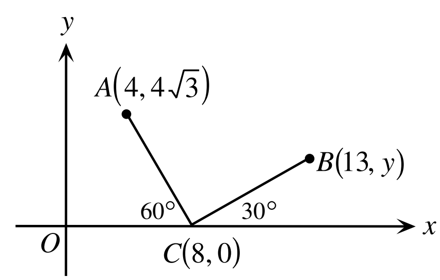


(**A**) $4 : 13$ (**B**) $1 : 13$ (**C**) $1 : 7$
(**D**) $3 : 13$ (**E**) $4 : 17$

Partie B : 6 points par question

11. Si x et y sont des entiers positifs, combien de solutions (x, y) l’équation $3x + y = 100$ admet-elle?
(**A**) 33 (**B**) 35 (**C**) 100 (**D**) 101 (**E**) 97

12. Dans le diagramme, la valeur de y est :



(**A**) $\frac{13}{2\sqrt{3}}$ (**B**) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ (**C**) 2
(**D**) 12 (**E**) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

13. On forme des entiers de trois chiffres en n’utilisant que les chiffres 1 et/ou 2. La somme de tous les entiers que l’on peut former est égale à :
(**A**) 1332 (**B**) 333 (**C**) 999 (**D**) 666 (**E**) 1665

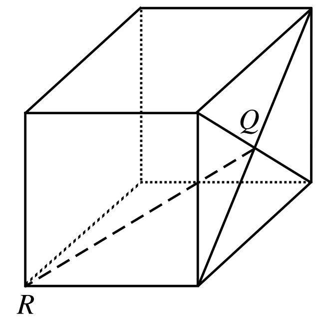
14. Les droites l_1, l_2 et l_3 ont pour pentes respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. Les trois droites ont la même ordonnée à l’origine. Si la somme des trois abscisses à l’origine est égale à 36, alors l’ordonnée à l’origine est :
(**A**) $\frac{-13}{12}$ (**B**) $\frac{-12}{13}$ (**C**) -4 (**D**) 4 (**E**) -9

15. Si $-2 \le x \le 5$, $-3 \le y \le 7$, $4 \le z \le 8$ et $w = xy - z$, alors la plus petite valeur que w puisse prendre est :
(**A**) -14 (**B**) -18 (**C**) -19 (**D**) -22 (**E**) -23

16. Si le nombre $N = \left(7^{p+4}\right)\left(5^q\right)\left(2^3\right)$ est un cube parfait, p et q étant des entiers positifs, la plus petite valeur possible de $p + q$ est :
(**A**) 5 (**B**) 2 (**C**) 8 (**D**) 6 (**E**) 12

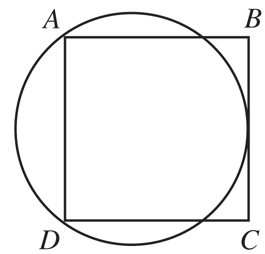
17. On utilise seulement les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 pour former une suite de nombres comme suit : un 1, deux 2, trois 3, quatre 4, cinq 5, six 1, sept 2, ainsi de suite.
Voici le début de la suite : 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, ...
Le 100[e] nombre de la suite est :
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

18. Les arêtes d'un cube ont une longueur de 2 unités. Le point Q est le point d'intersection des diagonales d'une des faces. La longueur du segment QR est égale à :



(**A**) 2 (**B**) $\sqrt{8}$ (**C**) $\sqrt{5}$
(**D**) $\sqrt{12}$ (**E**) $\sqrt{6}$

19. Chaque côté d'un carré $ABCD$ a une longueur de 14. On trace un cercle, passant aux points A et D, de manière qu'il soit tangent au côté BC. Quel est le rayon du cercle?



(**A**) 8,5 (**B**) 8,75 (**C**) 9
(**D**) 9,25 (**E**) 9,5

20. Un jeu compte 100 cartes numérotées de 1 à 100. Chaque carte a une face jaune et une face rouge, le même numéro paraissant sur chaque face. Jérôme place toutes les cartes sur une table, de manière à montrer les faces rouges. Il retourne d'abord chaque carte portant un nombre divisible par 2. En examinant ensuite toutes les cartes, il retourne chaque carte portant un numéro divisible par 3. Combien de cartes montrent une face rouge à la fin?

(**A**) 83 (**B**) 17 (**C**) 66 (**D**) 50 (**E**) 49

Partie C : 8 points par question

21. On multiplie les nombres $123\,456\,789$ et $999\,999\,999$. Combien des chiffres de la réponse sont des 9?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 17

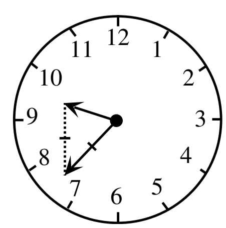
22. On considère quatre entiers positifs différents, a, b, c et N, tels que $N = 5a + 3b + 5c$. De plus, $N = 4a + 5b + 4c$ et N est un nombre entre 131 et 150. Quelle est la valeur de $a + b + c$?

(**A**) 13 (**B**) 17 (**C**) 22 (**D**) 33 (**E**) 36

23. Trois tapis ont une aire totale de 200 m^2. En les superposant partiellement, on recouvre une surface de 140 m^2. La partie recouverte par exactement deux tapis a une aire de 24 m^2. Quelle est l'aire de la surface recouverte par trois tapis?

(**A**) 12 m^2 (**B**) 18 m^2 (**C**) 24 m^2 (**D**) 36 m^2 (**E**) 42 m^2

24. À un moment entre 9 h 30 et 10 h, le triangle formé par les aiguilles d'une montre est isocèle (voir le diagramme). Si chacun des angles égaux du triangle est deux fois plus grand que le troisième angle, quelle heure est-il?



(**A**) 9 h 35 (**B**) 9 h 36 (**C**) 9 h 37
(**D**) 9 h 38 (**E**) 9 h 39

25. Pour chaque valeur de x, on définit $f(x)$ comme étant la valeur minimale des trois expressions $2x + 2$, $\frac{1}{2}x + 1$ et $-\frac{3}{4}x + 7$. Quelle est la valeur maximale de $f(x)$?

(**A**) $\frac{2}{3}$ (**B**) 2 (**C**) $\frac{17}{5}$ (**D**) $\frac{62}{11}$ (**E**) 7

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1997 Solutions et Concours Fermat (11^{e} - Sec. IV)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

PARTIE A

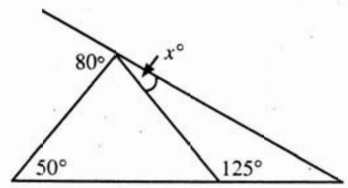
1. La valeur de $(1)^{10}+(-1)^8+(-1)^7+(1)^5$ est :
(**A**) 0 (**B**) 4 (**C**) 1 (**D**) 16 (**E**) 2

Solution

$$(1)^{10}+(-1)^8+(-1)^7+(1)^5 = 1+1-1+1$$
$$= 2$$

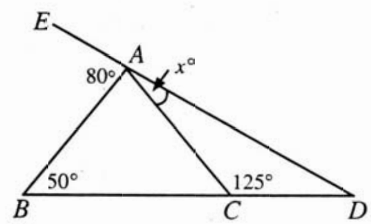
RÉPONSE : (E)

2. La valeur de x est :
(**A**) 15 (**B**) 20 (**C**) 25
(**D**) 30 (**E**) 35



Solution

Puisque B, C et D sont alignés,
$\angle BCA = 180° - 125°$
$= 55°$.
Dans le triangle ABC,
$\angle BAC = 180° - (50° + 55°)$
$= 75°$.
Puisque E, A et D sont alignés,
$x° = 180° - (80° + 75°)$
$= 25°$.
La valeur de x est 25.



RÉPONSE : (C)

3. Le plus grand nombre de lundis qu'il pourrait y avoir dans une période de 45 jours consécutifs est :
(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Solution

Si le premier jour est un lundi, alors ce sera aussi lundi 7 jours plus tard. Les lundis tomberont donc les jours suivants : 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43.
Dans une période de 45 jours consécutifs, il peut y avoir au plus sept lundis.

RÉPONSE : (C)

4. Le produit d'un nombre positif, de son carré et de son inverse est égal à $\frac{100}{81}$. Quel est le nombre?

(**A**) $\frac{81}{100}$ (**B**) $\frac{100}{81}$ (**C**) $\frac{9}{10}$ (**D**) $\frac{10}{9}$ (**E**) $\frac{10\,000}{6561}$

Solution

Soit x le nombre.

Donc $x\left(x^2\right)\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{100}{81}$.

$$x^2=\frac{100}{81}$$
$$x=\pm\frac{10}{9}$$

Puisque x est positif, $x=\frac{10}{9}$. RÉPONSE : (D)

5. La somme de sept entiers positifs consécutifs est égale à 77. Le plus grand de ces entiers est :
(A) 8 **(B)** 11 **(C)** 14 **(D)** 15 **(E)** 17

Solution

Puisque la somme des sept entiers est égale à 77, leur moyenne est égale à $\frac{77}{7}=11$.

Puisqu'il y a un nombre impair d'entiers consécutifs, le nombre du milieu est 11 et le plus grand est 14. RÉPONSE : (C)

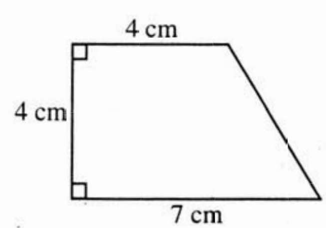
6. Sur une certaine calculatrice, le nombre 2×10^3 est représenté par 2E3. Comment le produit de 2E3 et de 3E2 serait-il représenté sur cette calculatrice?
(A) $6E6$ **(B)** $6E5$ **(C)** $5E5$ **(D)** $2.3E3$ **(E)** $5E6$

Solution

Le produit de $2E3$ et de $3E2$ est $\left(2\times10^3\right)\left(3\times10^2\right)=6\times10^5$. Il est représenté par $6E5$.

RÉPONSE : (B)

7. Le périmètre de la figure est égal à :
(A) 19 cm **(B)** 22 cm **(C)** 21 cm
(D) 15 cm **(E)** 20 cm



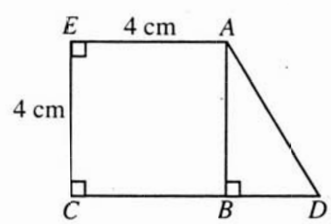
Solution

Au point A, on abaisse une perpendiculaire AB à CD.

Puisque $ABCE$ est un carré, chacun de ses côtés mesure 4 cm. Donc $BD=3$ cm.

D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle ABD : $AD^2=4^2+3^2$

$$AD=5$$



Le périmètre de la figure est égal à $4+4+5+7=20$ cm. RÉPONSE : (E)

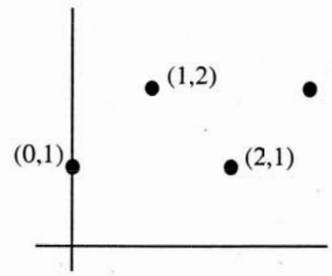
8. Trois des sommets d'un parallélogramme sont situés aux points $(0, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 1)$. L'aire du parallélogramme est égale à :

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** $2\sqrt{2}$ **(E)** 4

Solution

Il y a trois positions possibles pour le quatrième sommet. Cependant chaque parallélogramme qui en résulte a la même aire.

Si on choisit le point $(3, 2)$ pour le sommet, on obtient un parallélogramme avec une base de 2 et une hauteur de 1. Son aire est égale à $(2)(1) = 2$.



RÉPONSE : (B)

9. Si $10 \le x \le 20$ et $40 \le y \le 60$, la plus grande valeur possible de $\frac{x^2}{2y}$ est :

(A) 5 **(B)** $\frac{5}{6}$ **(C)** $\frac{10}{3}$ **(D)** $\frac{5}{4}$ **(E)** 10

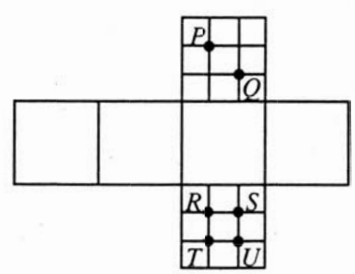
Solution

Pour maximiser $\frac{x^2}{2y}$, il faut maximiser le numérateur et minimiser le dénominateur.

Puisque $10 \le x \le 20$, la plus grande valeur de x^2 est $(20)^2 = 400$. Puisque $40 \le y \le 60$, la plus petite valeur de $2y$ est $2(40) = 80$.

La plus grande valeur possible de $\frac{x^2}{2y}$ est $\frac{400}{80} = 5$. RÉPONSE : (A)

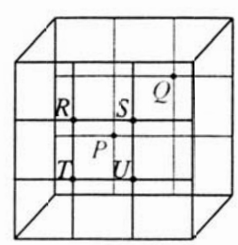
10. Sur un cube, on dit que deux points sont *diamétralement opposés* si la droite qui contient les deux points contient aussi le centre du cube. Le diagramme ci-contre illustre une figure qui peut être pliée pour former un cube. Quel point serait alors diamétralement opposé au point P?



(A) Q **(B)** R **(C)** S
(D) T **(E)** U

Solution

Le diagramme indique la position des points après que l'on a formé le cube. Le point S est diamétralement opposé au point P.



PARTIE B

11. La moyenne de cinq entiers est égale à 69. L'entier du milieu (la médiane) est égal à 83. Le nombre qui paraît le plus souvent (le mode) est 85. L'étendue de ces cinq nombres est égale à 70. Quel est le deuxième plus petit de ces cinq entiers?

(**A**) 77 (**B**) 15 (**C**) 50 (**D**) 55 (**E**) 49

Solution

Puisque l'entier du milieu (la médiane) est égal à 83, les deux entiers les plus grands doivent tous deux être 85 (le mode). Puisque l'étendue de ces cinq nombres est égale à 70, le plus petit des entiers doit être égal à $85-70=15$.

La somme des cinq entiers est égale à $5(69)=345$.

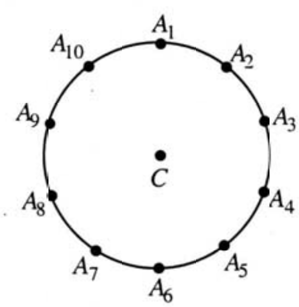
Le deuxième plus petit des cinq entiers est donc égal à $345-(85+85+83+15)=77$.

RÉPONSE : (A)

12. Dix points $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$ sont placés sur un cercle à égales distances. Si C est le centre du cercle, quelle est la mesure, en degrés, de l'angle A_1A_5C?

(**A**) 18 (**B**) 36 (**C**) 10

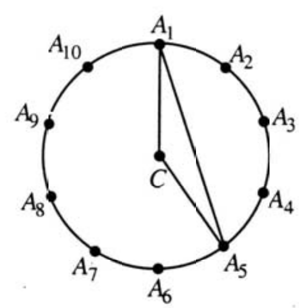
(**D**) 72 (**E**) 144



Solution

On trace les segments A_1A_5, A_1C et A_5C.

Puisque les points A_1, A_2, A_3, …, A_{10} sont placés à égales distances, ils forment des angles au centre égaux, mesurant chacun $\frac{360°}{10}=36°$.



Donc $\angle A_1CA_5 = 4(36°)$
$= 144°$.

Puisque $A_1C = A_5C$, alors le triangle A_1CA_5 est isocèle.

Donc $\angle A_1A_5C = \frac{(180° - 144°)}{2}$
$= 18°$.

L'angle A_1A_5C mesure donc 18 degrés.

RÉPONSE : (A)

13. En changeant l'ordre des chiffres 1, 2, 3 et 4, on peut former vingt-quatre nombres différents de quatre chiffres. Si on écrit ces vingt-quatre nombres en ordre, du plus petit au plus grand, dans quelle position le nombre 3142 se trouve-t-il?

(**A**) 13^e (**B**) 14^e (**C**) 15^e (**D**) 16^e (**E**) 17^e

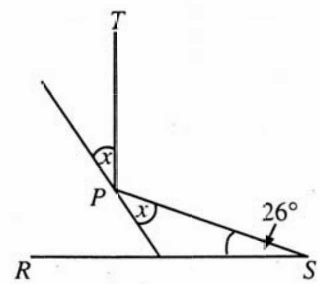
Solution

Les douze premiers nombres commencent par un 1 ou un 2. Les six nombres suivants commencent par un 3. Ces six nombres, dans l'ordre, sont 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421.

Le nombre 3142 est en 14ᵉ position. RÉPONSE : (B)

14. Un faisceau de lumière est projeté à partir du point S. Il est réfléchi dans un miroir au point P pour atteindre le point T de manière que PT soit perpendiculaire à RS. Alors la mesure de x est égale à :

(**A**) 26° (**B**) 13° (**C**) 64° (**D**) 32° (**E**) 58°



Solution

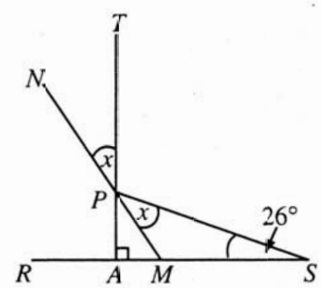
On prolonge le segment TP jusqu'au point A sur RS. Puisque TP et RS sont perpendiculaires,

alors $\angle SPA = 180° - 90° - 26°$
$= 64°$.

Soit les points M et N indiqués sur le diagramme.

Puisque les angles TPN et MPA sont opposés par le sommet, $\angle MPA = x$.

Puisque $\angle SPA = 2x$, alors $2x = 64°$, d'où $x = 32°$.



Alors la mesure de x est égale à 32°. RÉPONSE : (D)

15. Si $x^2yz^3 = 7^3$ et $xy^2 = 7^9$, alors xyz est égal à :

(**A**) 7^{10} (**B**) 7^9 (**C**) 7^8 (**D**) 7^6 (**E**) 7^4

Solution

On multiplie les deux égalités, membre par membre, pour obtenir : $(x^2yz^3)(xy^2) = (7^3)(7^9)$

$$x^3y^3z^3 = 7^{12}$$

Donc $xyz = 7^4$. RÉPONSE : (E)

16. La somme des 50 premiers entiers impairs positifs est égale à 50^2. La somme des 50 premiers entiers pairs positifs est égale à :

(**A**) 50^2 (**B**) 50^2+1 (**C**) 50^2+25 (**D**) 50^2+50 (**E**) 50^2+100

Solution

Chacun des 50 premiers entiers pairs est 1 de plus qu'un des 50 premiers entiers impairs.

La somme des 50 premiers entiers pairs positifs est donc égale à la somme des 50 premiers entiers impairs positifs plus 50 fois le nombre 1.

La somme des 50 premiers entiers pairs positifs est égale à $50^2 + 50$. RÉPONSE: (D)

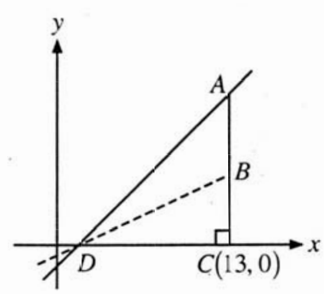
17. En 1996, la population de Sudbury a baissé de 6 %, tandis que la population de Victoria a augmenté de 14 %. À la fin de 1996, ces deux villes avaient la même population. Quel était le rapport de la population de la ville de Sudbury à la population de Victoria au début de 1996?
(A) $47:57$ **(B)** $57:47$ **(C)** $53:43$ **(D)** $53:57$ **(E)** $43:47$

Solution
Soit s la population de Sudbury au début de 1996 et v la population de Victoria au début de 1996. À la fin de 1996, la population de Sudbury est égale à $0,94s$, tandis que la population de Victoria est égale à $1,14v$. On a donc $0,94s = 1,14v$ (1).
Pour obtenir $s:v$, on divise chaque membre de (1) par $0,94v$.
On obtient ainsi $\frac{s}{v} = \frac{1,14}{0,94}$ ou $\frac{s}{v} = \frac{57}{47}$. Réponse : (B)

18. On considère l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\}$. Combien d'entiers, entre 3 et 89, ne peuvent pas être exprimés comme la somme d'exactement deux éléments de l'ensemble?
(A) 43 **(B)** 36 **(C)** 34 **(D)** 55 **(E)** 51

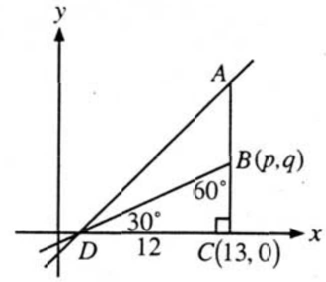
Solution
On compte d'abord le nombre d'entiers, entre 3 et 89, qui peuvent être exprimés comme la somme d'exactement deux éléments de l'ensemble. Puisque chaque élément de l'ensemble est la somme des deux éléments précédents, on peut ajouter 55 à chacun des sept premiers éléments pour former sept entiers différents, chacun inférieur à 89.
De même, on peut ajouter 34 à chacun des sept premiers éléments, on peut ajouter 21 à chacun des six premiers éléments, ainsi de suite. Le nombre d'entiers, entre 3 et 89, qui peuvent être exprimés comme la somme d'exactement deux éléments de l'ensemble est égal à $7+7+6+5+4+3+2=34$.
Puisqu'il y a 85 entiers entre 3 et 89, alors il y a $85-34=51$ entiers qui ne peuvent pas être exprimés comme la somme d'exactement deux éléments de l'ensemble. Réponse : (E)

19. L'équation de la droite AD est $y = \sqrt{3}(x-1)$. BD est la bissectrice de $\angle ADC$. Si les coordonnées de B sont (p, q), quelle est la valeur de q?
(A) 6 **(B)** 6.5 **(C)** $\frac{10}{\sqrt{3}}$
(D) $\frac{12}{\sqrt{3}}$ **(E)** $\frac{13}{\sqrt{3}}$



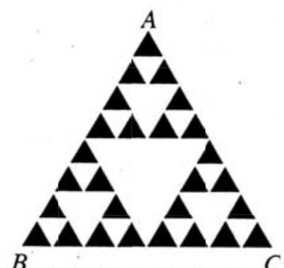
Solution

Puisque l'abscisse du point D est l'abscisse à l'origine de la droite AD, les coordonnées de D sont $(1, 0)$. Donc $DC = 12$.
Puisque la pente de AD est égale à $\sqrt{3}$, alors $AC = 12\sqrt{3}$ et $\angle ADC = 60°$.
Puisque BD est la bissectrice de $\angle ADC$, alors $\angle BDC = 30°$ et le triangle DBC est un triangle $30°$ - $60°$ - $90°$. Les longueurs de ses côtés sont donc dans un rapport $1 : \sqrt{3} : 2$.
Donc $BC = \frac{12}{\sqrt{3}}$, ce qui est la valeur de q.



RÉPONSE : (D)

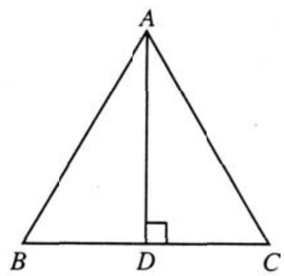
20. Tous les triangles du diagramme sont équilatéraux. Si $AB = 16$, l'aire totale de tous les triangles noirs est égale à :
(A) $37\sqrt{3}$ (B) $32\sqrt{3}$ (C) $27\sqrt{3}$
(D) $64\sqrt{3}$ (E) $\frac{64}{3}\sqrt{3}$



Triangle de Sierpinski

Solution

Le diagramme compte 27 triangles noirs. Si on divise le grand triangle en petits triangles, alors en comptant du bas jusqu'en haut, le nombre de petits triangles est égal à :
$8 + 2(7) + 2(6) + 2(5) + 2(4) + 2(3) + 2(2) + 2(1) = 64$.
Donc $\frac{27}{64}$ du triangle ABC est colorée en noir.



On abaisse la hauteur AD. Puisque le triangle ABC est équilatéral et puisque $AB = 16$, alors $BD = DC = 8$. On utilise le théorème de Pythagore, ou le fait que le triangle ABD est un triangle $30°$ - $60°$ - $90°$ et que les longueurs de ses côtés sont dans un rapport $1 : \sqrt{3} : 2$, pour obtenir $AD = 8\sqrt{3}$.
L'aire du triangle ABC est donc égale à $\frac{1}{2}(8\sqrt{3})(16) = 64\sqrt{3}$. L'aire totale de tous les triangles noirs est donc égale à $\frac{27}{64}(64\sqrt{3}) = 27\sqrt{3}$.

RÉPONSE : (C)

PARTIE C

21. Soit a, b et c trois entiers positifs tels que $\dfrac{\left(\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1\right)}{\left(\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1\right)} = 11$. Le nombre de triplets (a, b, c), tels que $a + 2b + c \leq 40$, est égal à :
(A) 33 (B) 37 (C) 40 (D) 42 (E) 45

Solution

$$\frac{\left(\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1\right)}{\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1\right)}=11$$

$$\frac{abc\left(\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1\right)}{abc\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1\right)}=11$$

$$\frac{a^2b+a^2c+abc}{b^2c+ab^2+abc}=11$$

$$\frac{a(ab+ac+bc)}{b(bc+ab+ac)}=11$$

$$\frac{a}{b}=11$$

$$a=11b$$

On reporte $a=11b$ dans l'inéquation $a+2b+c\leq 40$ pour obtenir $13b+c\leq 40$.
Puisque b et c sont des entiers positifs, b ne peut prendre que les valeurs 1, 2 et 3. Puisque $a=11b$, a prend trois valeurs correspondantes.
Si $b=3$, l'inéquation $13b+c\leq 40$ devient $39+c\leq 40$, d'où $c\leq 1$.
Elle admet un triplet, (33, 3, 1).
Si $b=2$, l'inéquation devient $26+c\leq 40$, d'où $c\leq 14$.
Elle admet 14 valeurs possibles de c et donc 14 triplets.
Si $b=1$, l'inéquation devient $13+c\leq 40$, d'où $c\leq 27$.
Elle admet 27 valeurs possibles de c et donc 27 triplets.
Le nombre de triplets qui vérifient les conditions données est égal à $1+14+27=42$.

RÉPONSE : (D)

22. Soit x et y des entiers et $x\geq 0$. Le nombre de couples (x, y) différents qui vérifient l'équation $2x^2-2xy+y^2=289$ est égal à :

(A) 8 **(B)** 7 **(C)** 5 **(D)** 4 **(E)** 3

Solution

On récrit l'expression $2x^2-2xy+y^2=289$ sous forme $x^2+(x-y)^2=289$. Au moyen de triplets pythagoriciens, on conclut que les valeurs possibles de x sont 0, 8, 15 et 17.
On reporte chaque valeur de x dans l'équation et on résout les équations qui en résultent. On obtient sept couples différents.

RÉPONSE : (B)

23. Si $f(x)=px+q$ et si $f\big(f(f(x))\big)=8x+21$, p et q étant des nombres réels, alors $p+q$ est égal à :

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 11

Solution

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(px+q) \\ &= p(px+q)+q \\ &= p^2x+pq+q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\big(f(f(x))\big) &= f\big(p^2x+pq+q\big) \\ &= p(p^2x+pq+q)+q \\ &= p^3x+p^2q+pq+q \end{aligned}$$

Puisque $f\big(f(f(x))\big)=8x+21$, alors $8x+21=p^3x+p^2q+pq+q$ pour toutes les valeurs de x.

Donc $p^3=8$, d'où $p=2$, et $p^2q+pq+q=21$, d'où $q=3$.

Donc $p+q=5$.

RÉPONSE : (C)

24. Le premier terme d'une suite de nombres est $t_1=5$. Les termes suivants sont définis au moyen de la formule $t_n-t_{n-1}=2n+3$ pour $n\geq 2$. La valeur de t_{50} est :

(**A**) 2700 (**B**) 2702 (**C**) 2698 (**D**) 2704 (**E**) 2706

Solution

Il s'agit d'une série télescopique.

On reporte $n=2, 3, 4, ..., 50$ dans la formule donnée pour obtenir :

$$\begin{aligned} t_2-t_1&=7 \\ t_3-t_2&=9 \\ t_4-t_3&=11 \\ &\vdots \\ t_{49}-t_{48}&=101 \\ t_{50}-t_{49}&=103 \end{aligned}$$

On additionne les membres gauches et les membres droits des égalités pour obtenir

$t_{50}-t_1=7+9+11+...+101+103$.

Le membre droit est une série arithmétique de 49 termes.

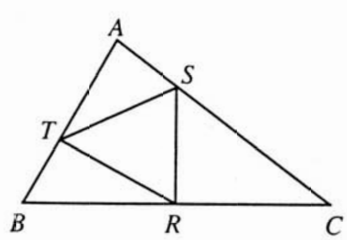
Sa somme est égale à $\frac{49(7+103)}{2}=2695$.

Donc $t_{50}-t_1=2695$.

$$\begin{aligned} t_{50}-5&=2695 \\ t_{50}&=2700 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

25. Dans le triangle ABC, R est le milieu de BC, $CS=3SA$, et $\frac{AT}{TB}=\frac{p}{q}$. Si w est l'aire du triangle CRS, x est l'aire du triangle RBT et z est l'aire du triangle ATS, et si $x^2=wz$, alors la valeur de $\frac{p}{q}$ est égale à :

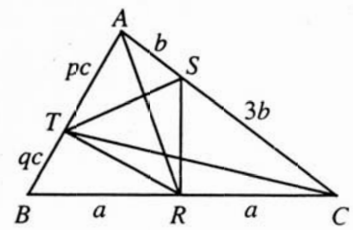


(**A**) $\frac{\sqrt{21}-3}{2}$ (**B**) $\frac{\sqrt{21}+3}{2}$ (**C**) $\frac{\sqrt{21}-3}{6}$

(**D**) $\frac{\sqrt{105}+3}{6}$ (**E**) $\frac{\sqrt{105}-3}{6}$

Solution

On joint A et R, de même que C et T. Soit a, b et c les longueurs indiquées et soit k l'aire du triangle ABC.



Puisque $CS = 3SA$, alors $\dfrac{\text{aire du triangle } CRS}{\text{aire du triangle } CRA} = \dfrac{3}{4}$.

Donc $w = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{k}{2}$ ou $w = \dfrac{3k}{8}$.

Puisque $BT : TA = q : p$, alors $\dfrac{\text{aire du triangle } RBT}{\text{aire du triangle } ABR} = \dfrac{q}{p+q}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } x &= \frac{q}{p+q} \cdot \frac{k}{2} \\ &= \frac{qk}{2(p+q)}. \end{aligned}$$

De plus, $\dfrac{\text{aire du triangle } ATC}{\text{aire du triangle } ABC} = \dfrac{p}{p+q}$.

Donc l'aire du triangle ATC est égale à $k \cdot \dfrac{p}{p+q}$ ou $\dfrac{pk}{p+q}$.

Puisque $CS = 3SA$, alors $\dfrac{\text{aire du triangle } ATS}{\text{aire du triangle } ATC} = \dfrac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } z &= \frac{1}{4} \cdot \frac{pk}{p+q} \\ &= \frac{pk}{4(p+q)}. \end{aligned}$$

Puisque $x^2 = wz$, alors $\dfrac{q^2k^2}{4(p+q)^2} = \dfrac{3pk^2}{32(p+q)}$.

$$8q^2k^2 = 3pk^2(p+q)$$

$$8q^2 = 3p(p+q) \quad \text{(puisque } k \neq 0\text{)}$$

$$3p^2 + 3pq - 8q^2 = 0$$

On divise chaque membre de l'équation par q^2.

$$3\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 3\left(\frac{p}{q}\right) - 8 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(3)(-8)}}{6} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{6} \end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{p}{q} > 0$, alors $\dfrac{p}{q} = \dfrac{\sqrt{105} - 3}{6}$.

RÉPONSE : (E)