Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2022

le mardi 5 avril 2022

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 6 avril 2022

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) On a : $\dfrac{3^2-2^3}{2^3-3^2}=\dfrac{9-8}{8-9}=\dfrac{1}{-1}=-1$.

   OU : puisque $2^3-3^2=-(3^2-2^3)$, alors $\dfrac{3^2-2^3}{2^3-3^2}=-1$.

   (b) On a : $\sqrt{\sqrt{81}+\sqrt{9}-\sqrt{64}}=\sqrt{9+3-8}=\sqrt{4}=2$.

   (c) Puisque $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+7}}=\dfrac{1}{4}$, alors $\sqrt{x^2+7}=4$.
   Donc, $x^2+7=4^2=16$, d'où $x^2=9$.
   Puisque $x^2=9$, alors $x=\pm 3$.
   On peut vérifier par substitution que ces deux valeurs satisfont à l'équation donnée.

2. (a) On écrit l'entier 2022 en factorisation première : $2022=2\cdot 1011=2\cdot 3\cdot 337$.
   Donc, $2022=2\cdot 1011$ et $2022=3\cdot 674$ et $2022=6\cdot 337$.
   Donc, les trois couples d'entiers sont $(a,b)=(2,1011),(3,674),(6,337)$.

   (b) On manipule l'équation donnée, tout en obtenant une suite d'équations équivalentes :

$$\begin{aligned}\frac{2c+1}{2d+1}&=\frac{1}{17}\\17(2c+1)&=2d+1\\34c+17&=2d+1\\34c+16&=2d\\d&=17c+8\end{aligned}$$

   Puisque c est un entier tel que $c>0$, alors $c\geq 1$, d'où on a donc $17c+8\geq 25$.
   Donc, la plus petite valeur possible de d est $d=25$.
   Remarquons que lorsque $d=25$, alors $c=1$, d'où $\dfrac{2c+1}{2d+1}=\dfrac{3}{51}=\dfrac{1}{17}$.

   (c) *Solution 1*
   Lorsque $x=-5$, le membre de gauche de l'équation est égal à 0.
   Donc, lorsque $x=-5$, le membre de droite de l'équation est aussi égal à 0.
   Donc, $(-5)^2+3(-5)+t=0$, d'où $25-15+t=0$ ou $t=-10$.

   Solution 2
   On développe le membre de gauche de l'équation :

$$(px+r)(x+5)=px^2+rx+5px+5r$$

   Puisque cette expression est égale à x^2+3x+t pour tous les nombres réels, alors les coefficients des deux expressions quadratiques doivent être égaux.
   En comparant les coefficients de x^2, on a $p=1$.
   Cela signifie que

$$x^2+rx+5x+5r=x^2+3x+t$$

   En comparant les coefficients de x, on a $r+5=3$, d'où $r=-2$.
   Cela signifie que

$$x^2+3x-10=x^2+3x+t$$

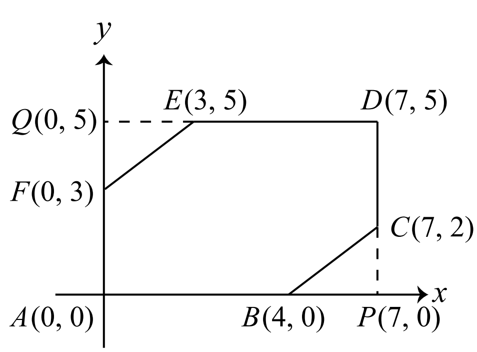
   En comparant les termes constants, on a $t=-10$.

3. (a) Supposons que le volume de la carafe est égal à V L.
Alors $\frac{1}{4}V + 24 = \frac{5}{8}V$.
On multiplie chaque membre par 8 pour obtenir $2V + 24 \cdot 8 = 5V$, d'où $3V = 192$ ou $V = 64$.
Donc, le volume de la carafe est égal à 64 L.

(b) Supposons que Stéphanie avait n ballons de soccer au début.
Puisque Stéphanie pouvait diviser les n ballons en cinquièmes et en onzièmes, alors n est un multiple de 5 et de 11.
Puisque 5 et 11 sont tous deux des nombres premiers, alors n doit être un multiple de $5 \cdot 11 = 55$.
Donc, $n = 55k$, k étant un entier strictement positif.
Dans ce cas, $\frac{2}{5}n = \frac{2}{5} \cdot 55k = 22k$ et $\frac{6}{11}n = \frac{6}{11} \cdot 55k = 30k$.
Après avoir donné ces ballons, il lui reste $55k - 22k - 30k = 3k$ ballons.
Puisque $3k$ est un multiple de 9, alors k est un multiple de 3.
Donc, on obtient le plus petit nombre de ballons de soccer lorsque $k = 3$. C'est-à-dire que le plus petit nombre de ballons que Stéphanie aurait pu avoir au début est égal à $n = 55 \cdot 3 = 165$.

(c) Supposons que le club de mathématiques comporte j élèves de la section junior et s élèves de la section senior.
Parmi les j élèves de la section junior, 60 % sont gauchers, soit $0{,}6j$.
Parmi les j élèves de la section junior, 40 % sont droitiers, soit $0{,}4j$.
Parmi les s élèves de la section senior, 10 % sont gauchers, soit $0{,}1s$.
Parmi les s élèves de la section senior, 90 % sont droitiers, soit $0{,}9s$.
Puisque le nombre total d'élèves gauchers est égal au nombre total d'élèves droitiers, alors on obtient l'équation $0{,}6j + 0{,}1s = 0{,}4j + 0{,}9s$, d'où $0{,}2j = 0{,}8s$ ou $j = 4s$.
Cela signifie qu'il y a 4 fois plus d'élèves de la section junior que d'élèves de la section senior. Donc, parmi les membres du club de mathématiques, $\frac{4}{5}$ des élèves font partie de la section junior tandis que $\frac{1}{5}$ font partie de la section senior.
Donc, 80 % des élèves du club de mathématiques font partie de la section junior.

4. (a) Soit P et Q les points ayant pour coordonnées respectives $(7, 0)$ et $(0, 5)$.



Donc, $APDQ$ est un rectangle de largeur 7, de hauteur 5 et a donc une aire de $7 \cdot 5 = 35$.
L'hexagone $ABCDEF$ est formé en retirant deux triangles du rectangle $APDQ$, soit les triangles BPC et EQF.
Les triangles BPC et EQF sont tous deux rectangles puisque chacun d'eux partage un angle avec le rectangle $APDQ$.
Chacun des triangles BPC et EQF a une base de 3 et une hauteur de 2.
Donc, les triangles ont des aires dont la somme est égale à $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 6$.
Donc, l'hexagone $ABCDEF$ a une aire de $35 - 6 = 29$.

(b) Puisque le triangle PQS est rectangle en P, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$SQ^2 = SP^2 + PQ^2 = (x+3)^2 + x^2$$

Puisque le triangle QRS est rectangle en Q, alors d'après le théorème de Pythagore, on obtient

$$\begin{aligned} RS^2 &= SQ^2 + QR^2 \\ (x+8)^2 &= ((x+3)^2 + x^2) + 8^2 \\ x^2 + 16x + 64 &= x^2 + 6x + 9 + x^2 + 64 \\ 0 &= x^2 - 10x + 9 \\ 0 &= (x-1)(x-9) \end{aligned}$$

d'où $x = 1$ ou $x = 9$.
(On peut vérifier que si $x = 1$, alors les deux triangles PQS et QRS sont tous deux rectangles car ayant respectivement des côtés de longueurs 4, 1 et $\sqrt{17}$; et $\sqrt{17}$, 8 et 9. De même, on peut vérifier que si $x = 9$, alors les deux triangles PQS et QRS sont tous deux rectangles car ayant respectivement des côtés de longueurs 12, 9 et 15 ; et 15, 8 et 17.)
En fonction de x, le périmètre de $PQRS$ est égal à $x + 8 + (x+8) + (x+3) = 3x + 19$.
Donc, le quadrilatère $PQRS$ peut avoir un périmètre de 22 (lorsque $x = 1$) ou un périmètre de 46 (lorsque $x = 9$).

5. (a) Si r et s sont deux termes consécutifs dans la suite, alors $s = 1 + \dfrac{1}{1+r}$.
Cela signifie que $s - 1 = \dfrac{1}{1+r}$ ou $\dfrac{1}{s-1} = 1 + r$, d'où $r = \dfrac{1}{s-1} - 1$.
Donc, puisque $a_3 = \dfrac{41}{29}$, alors

$$a_2 = \frac{1}{a_3 - 1} - 1 = \frac{1}{(41/29) - 1} - 1 = \frac{1}{12/29} - 1 = \frac{29}{12} - 1 = \frac{17}{12}$$

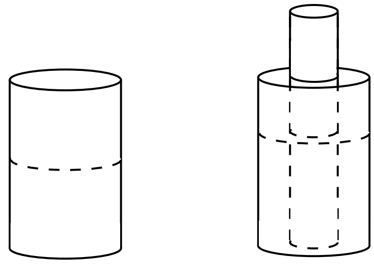
De plus, puisque $a_2 = \dfrac{17}{12}$, alors

$$a_1 = \frac{1}{a_2 - 1} - 1 = \frac{1}{(17/12) - 1} - 1 = \frac{1}{5/12} - 1 = \frac{12}{5} - 1 = \frac{7}{5}$$

(b) Au début, l'eau dans le tube creux forme un cylindre de rayon 10 mm et de hauteur h mm.
Donc, l'eau a un volume de $\pi(10 \text{ mm})^2(h \text{ mm}) = 100\pi h \text{ mm}^3$.
Après que la tige est placée dans le tube, la profondeur de l'eau dans le tube est de 64 mm. Remarquons que cela ne fait pas déborder le tube, puisque la hauteur du tube est de 100 mm.
Jusqu'à la surface de l'eau, le tube est un cylindre de rayon 10 mm et de hauteur 64 mm.
Donc, le volume du tube jusqu'à la surface de l'eau est égal à

$$\pi(10 \text{ mm})^2(64 \text{ mm}) = 6400\pi \text{ mm}^3$$

Ce volume est constitué de l'eau qui se trouve dans le tube (dont le volume, qui n'a pas changé, est de $100\pi h$ mm^3) et de la tige jusqu'à une hauteur de 64 mm.



Puisque la tige a un rayon de 2,5 mm, le volume de la tige jusqu'à une hauteur de 64 mm est égal à $\pi(2{,}5 \text{ mm})^2(64 \text{ mm}) = 400\pi \text{ mm}^3$.
On compare les volumes : $6400\pi \text{ mm}^3 = 100\pi h \text{ mm}^3 + 400\pi \text{ mm}^3$, d'où $100h = 6000$ ou $h = 60$.

6. (a) On remarque que $\dfrac{2x+1}{x} = \dfrac{2x}{x} + \dfrac{1}{x} = 2 + \dfrac{1}{x}$.
Donc, $\dfrac{2x+1}{x} = 4$ exactement lorsque $2 + \dfrac{1}{x} = 4$, d'où $\dfrac{1}{x} = 2$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.
On aurait également pu résoudre $\dfrac{2x+1}{x} = 4$ directement pour obtenir $2x + 1 = 4x$, d'où $2x = 1$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.
Donc, pour déterminer la valeur de $f(4)$, on reporte $x = \dfrac{1}{2}$ dans l'équation donnée $f\left(\dfrac{2x+1}{x}\right) = x + 6$ pour obtenir $f(4) = \dfrac{1}{2} + 6 = \dfrac{13}{2}$.

(b) Puisque la représentation graphique de la fonction $y = \log_a(x+b) + c$ passe aux points $(3,5)$, $(5,4)$ et $(11,3)$, on reporte les trois points dans l'équation pour obtenir les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} 5 &= \log_a(3+b) + c \\ 4 &= \log_a(5+b) + c \\ 3 &= \log_a(11+b) + c \end{aligned}$$

On soustrait la deuxième équation de la première, membre par membre, et on soustrait la troisième équation de la deuxième, membre par membre, pour obtenir :

$$\begin{aligned} 1 &= \log_a(3+b) - \log_a(5+b) \\ 1 &= \log_a(5+b) - \log_a(11+b) \end{aligned}$$

Puisque les deux membres de droite sont égaux, on a :

$$\begin{aligned} \log_a(5+b) - \log_a(11+b) &= \log_a(3+b) - \log_a(5+b) \\ 2\log_a(5+b) &= \log_a(3+b) + \log_a(11+b) \\ \log_a\left((5+b)^2\right) &= \log_a\left((3+b)(11+b)\right) \qquad \text{(à l'aide des lois des logarithmes)} \\ (5+b)^2 &= (3+b)(11+b) \qquad \text{(on élève chaque membre à la puissance } a\text{)} \\ 25 + 10b + b^2 &= 33 + 14b + b^2 \\ -8 &= 4b \\ b &= -2 \end{aligned}$$

Puisque $b = -2$, l'équation $1 = \log_a(3+b) - \log_a(5+b)$ devient $1 = \log_a 1 - \log_a 3$.
Puisque $\log_a 1 = 0$ pour chaque valeur admissible de a, alors $\log_a 3 = -1$, d'où $a = 3^{-1} = \frac{1}{3}$.

Finalement, l'équation $5 = \log_a(3+b) + c$ devient $5 = \log_{1/3}(1) + c$, d'où $c = 5$.
Donc, $a = \frac{1}{3}$, $b = -2$ et $c = 5$, d'où on a donc $y = \log_{1/3}(x-2) + 5$.

On vérifie :
- Lorsque $x = 3$, on obtient $y = \log_{1/3}(3-2) + 5 = \log_{1/3} 1 + 5 = 0 + 5 = 5$.
- Lorsque $x = 5$, on obtient $y = \log_{1/3}(5-2) + 5 = \log_{1/3} 3 + 5 = -1 + 5 = 4$.
- Lorsque $x = 11$, on obtient $y = \log_{1/3}(11-2) + 5 = \log_{1/3} 9 + 5 = -2 + 5 = 3$.

7. (a) La probabilité que l'entier n soit choisi est égale à $\log_{100}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

La probabilité qu'un entier de 81 à 99 soit choisi est égale à la somme des probabilités que les entiers 81, 82, …, 98, 99 soient choisis, ce qui est égale à

$$\log_{100}\left(1+\frac{1}{81}\right) + \log_{100}\left(1+\frac{1}{82}\right) + \cdots + \log_{100}\left(1+\frac{1}{98}\right) + \log_{100}\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

Puisque la deuxième probabilité est égale au double de la première, alors les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}\log_{100}\left(1+\frac{1}{81}\right) + \log_{100}\left(1+\frac{1}{82}\right) + \cdots + \log_{100}\left(1+\frac{1}{98}\right) + \log_{100}\left(1+\frac{1}{99}\right) &= 2\log_{100}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ \log_{100}\left(\frac{82}{81}\right) + \log_{100}\left(\frac{83}{82}\right) + \cdots + \log_{100}\left(\frac{99}{98}\right) + \log_{100}\left(\frac{100}{99}\right) &= 2\log_{100}\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

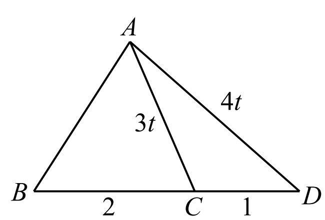
En utilisant les lois des logarithmes, ces équations sont équivalentes à

$$\begin{aligned}\log_{100}\left(\frac{82}{81}\cdot\frac{83}{82}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{98}\cdot\frac{100}{99}\right) &= \log_{100}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\\ \log_{100}\left(\frac{100}{81}\right) &= \log_{100}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\end{aligned}$$

Puisque les fonctions logarithmiques sont inversibles, on obtient $\dfrac{100}{81} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$.

Puisque $n > 0$, alors $1 + \dfrac{1}{n} = \sqrt{\dfrac{100}{81}} = \dfrac{10}{9}$, d'où $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{9}$, soit $n = 9$.

(b) Puisque $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{3}{4}$, alors soit $AC = 3t$ et $AD = 4t$, t étant un nombre réel tel que $t > 0$.



D'après la loi du cosinus dans le triangle ACD, on a les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}AD^2 &= AC^2 + CD^2 - 2\cdot AC\cdot CD\cdot\cos(\angle ACD)\\ (4t)^2 &= (3t)^2 + 1^2 - 2(3t)(1)(-\tfrac{3}{5})\\ 16t^2 &= 9t^2 + 1 + \tfrac{18}{5}t\\ 80t^2 &= 45t^2 + 5 + 18t\\ 35t^2 - 18t - 5 &= 0\\ (7t-5)(5t+1) &= 0\end{aligned}$$

Puisque $t > 0$, alors $t = \frac{5}{7}$.
Donc, $AC = 3t = \frac{15}{7}$.
On utilise la loi du cosinus dans le triangle ACB, tout en notant que

$$\cos(\angle ACB) = \cos(180^\circ - \angle ACD) = -\cos(\angle ACD) = \tfrac{3}{5}$$

pour obtenir les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(\angle ACB) \\ &= \left(\tfrac{15}{7}\right)^2 + 2^2 - 2(\tfrac{15}{7})(2)(\tfrac{3}{5}) \\ &= \tfrac{225}{49} + 4 - \tfrac{36}{7} \\ &= \tfrac{225}{49} + \tfrac{196}{49} - \tfrac{252}{49} \\ &= \tfrac{169}{49} \end{aligned}$$

Puisque $AB > 0$, alors $AB = \frac{13}{7}$.

8. (a) La parabole d'équation $y = ax^2 + 2$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Le sommet a donc pour abscisse $x = 0$ (d'où $y = a \cdot 0^2 + 2 = 2$). Donc, le sommet V a pour coordonnées $(0, 2)$.
Pour déterminer les coordonnées de B et C, on utilise les équations de la parabole et de la droite pour obtenir

$$\begin{aligned} ax^2 + 2 &= -x + 4a \\ ax^2 + x + (2 - 4a) &= 0 \end{aligned}$$

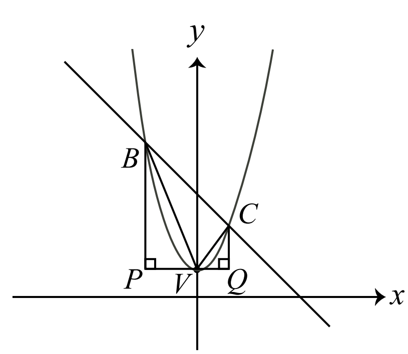
À l'aide de la formule quadratique,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4a(2-4a)}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8a + 16a^2}}{2a}$$

Puisque $1 - 8a + 16a^2 = (4a-1)^2$ et $4a - 1 > 0$ (car $a > \frac{1}{2}$), alors $\sqrt{1 - 8a + 16a^2} = 4a - 1$.
Donc,

$$x = \frac{-1 \pm (4a-1)}{2a}$$

d'où $x = \dfrac{4a-2}{2a} = \dfrac{2a-1}{a} = 2 - \dfrac{1}{a}$ ou $x = \dfrac{-4a}{2a} = -2$.
On peut utiliser l'équation de la droite pour obtenir les ordonnées de B et C.
Lorsque $x = -2$ (soit l'abscisse du point B), on obtient $y = -(-2) + 4a = 4a + 2$.
Lorsque $x = 2 - \dfrac{1}{a}$ (soit l'abscisse du point C), on obtient $y = -\left(2 - \dfrac{1}{a}\right) + 4a = 4a - 2 + \dfrac{1}{a}$.
Soit P et Q les points sur la droite horizontale qui passe par V tels que BP et CQ soient perpendiculaires à PQ.



Donc, l'aire du triangle VBC est égale à l'aire du trapèze $PBCQ$ moins les aires des triangles rectangles BPV et CQV.
Puisque B a pour coordonnées $(-2, 4a+2)$, que P a pour coordonnées $(-2, 2)$, que V a pour coordonnées $(0, 2)$, que Q a pour coordonnées $\left(2 - \frac{1}{a}, 2\right)$ et que C a pour coordonnées $\left(2 - \frac{1}{a}, 4a - 2 + \frac{1}{a}\right)$, alors

$$\begin{aligned}
BP &= (4a+2) - 2 = 4a \\
CQ &= \left(4a - 2 + \frac{1}{a}\right) - 2 = 4a - 4 + \frac{1}{a} \\
PV &= 0 - (-2) = 2 \\
QV &= 2 - \frac{1}{a} - 0 = 2 - \frac{1}{a} \\
PQ &= PV + QV = 2 + 2 - \frac{1}{a} = 4 - \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

Alors l'aire du trapèze $PBCQ$ est égale à

$$\frac{1}{2}(BP + CQ)(PQ) = \frac{1}{2}\left(4a + 4a - 4 + \frac{1}{a}\right)\left(4 - \frac{1}{a}\right) = \left(4a - 2 + \frac{1}{2a}\right)\left(4 - \frac{1}{a}\right)$$

De plus, l'aire du triangle BPV est égale à $\frac{1}{2} \cdot BP \cdot PV = \frac{1}{2}(4a)(2) = 4a$

et l'aire du triangle CQV est égale à

$$\frac{1}{2} \cdot CQ \cdot QV = \frac{1}{2}\left(4a - 4 + \frac{1}{a}\right)\left(2 - \frac{1}{a}\right) = \left(2a - 2 + \frac{1}{2a}\right)\left(2 - \frac{1}{a}\right)$$

D'après les renseignements donnés,

$$\left(4a - 2 + \frac{1}{2a}\right)\left(4 - \frac{1}{a}\right) - 4a - \left(2a - 2 + \frac{1}{2a}\right)\left(2 - \frac{1}{a}\right) = \frac{72}{5}$$

On multiplie chaque membre de l'équation par $2a^2$, que l'on distribue dans les facteurs du membre de gauche comme $2a \cdot a$, pour obtenir

$$(8a^2 - 4a + 1)(4a - 1) - 8a^3 - (4a^2 - 4a + 1)(2a - 1) = \frac{144}{5}a^2$$

On multiplie chaque membre de l'équation par 5 pour obtenir

$$5(8a^2 - 4a + 1)(4a - 1) - 40a^3 - 5(4a^2 - 4a + 1)(2a - 1) = 144a^2$$

On développe et on simplifie pour obtenir

$$\begin{aligned}
(160a^3 - 120a^2 + 40a - 5) - 40a^3 - (40a^3 - 60a^2 + 30a - 5) &= 144a^2 \\
80a^3 - 204a^2 + 10a &= 0 \\
2a(40a^2 - 102a + 5) &= 0 \\
2a(20a - 1)(2a - 5) &= 0
\end{aligned}$$

d'où $a = 0$ ou $a = \frac{1}{20}$ ou $a = \frac{5}{2}$. Puisque $a > \frac{1}{2}$, alors $a = \frac{5}{2}$.

(b) On démontrera qu'il ne peut y avoir un tel triangle à l'aide d'une preuve par contradiction. C'est-à-dire qu'on supposera qu'il existe un tel triangle et on démontrera qu'il y a alors une contradiction logique.

Supposons que le triangle ABC n'est pas équilatéral, que les longueurs de ses côtés forment une suite géométrique et que ses angles ont des mesures qui forment une suite arithmétique.

Supposons que le triangle ABC a des côtés de longueurs $BC = a$, $AC = ar$ et $AB = ar^2$, a et r étant des nombres réels tels que $a > 0$ et $r > 1$. (Ces longueurs forment une suite géométrique et on peut supposer que cette suite est croissante et que les côtés sont nommés dans cet ordre particulier).

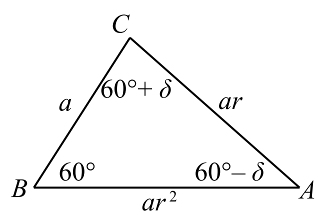
Puisque $BC < AC < AB$, alors les angles opposés ont les mêmes relations, soit $\angle BAC < \angle ABC < \angle ACB$.

Supposons que $\angle BAC = \theta$, que $\angle ABC = \theta + \delta$ et que $\angle ACB = \theta + 2\delta$, θ et δ étant des angles. (En d'autres termes, ces angles forment une suite arithmétique.)

Puisque ces trois angles sont les angles d'un triangle, leur somme est égale à 180°. Donc,

$$\begin{aligned} \theta + (\theta + \delta) + (\theta + 2\delta) &= 180^\circ \\ 3\theta + 3\delta &= 180^\circ \\ \theta + \delta &= 60^\circ \end{aligned}$$

Autrement dit, $\angle ABC = 60^\circ$.



On peut procéder en utilisant la loi du cosinus :

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 + AB^2 - 2 \cdot BC \cdot AB \cdot \cos(\angle ABC) \\ (ar)^2 &= a^2 + (ar^2)^2 - 2a(ar^2)\cos(60^\circ) \\ a^2r^2 &= a^2 + a^2r^4 - 2a^2r^2 \cdot \tfrac{1}{2} \\ a^2r^2 &= a^2 + a^2r^4 - a^2r^2 \\ 0 &= a^2r^4 - 2a^2r^2 + a^2 \\ 0 &= a^2(r^4 - 2r^2 + 1) \\ 0 &= a^2(r^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

On a donc que $a = 0$ (ce qui est impossible) ou $r^2 = 1$ (d'où $r = \pm 1$, ce qui est impossible). Par conséquent, nous avons atteint une contradiction logique et un tel triangle ne peut donc pas exister.

Par ailleurs, on peut également procéder en utilisant la loi des sinus, tout en notant que :

$$\begin{aligned} \angle BAC &= \theta = (\theta + \delta) - \delta = 60^\circ - \delta \\ \angle ACB &= \theta + 2\delta = (\theta + \delta) + \delta = 60^\circ + \delta \end{aligned}$$

D'après la loi des sinus,

$$\frac{BC}{\sin(\angle BAC)} = \frac{AC}{\sin(\angle ABC)} = \frac{AB}{\sin(\angle ACB)}$$

d'où on obtient
$$\frac{a}{\sin(60^\circ - \delta)} = \frac{ar}{\sin(60^\circ)} = \frac{ar^2}{\sin(60^\circ + \delta)}$$
Puisque $a \neq 0$, alors d'après les deux premières parties
$$r = \frac{ar}{a} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ - \delta)}$$
Puisque $ar \neq 0$, alors d'après les deux secondes parties
$$r = \frac{ar^2}{ar} = \frac{\sin(60^\circ + \delta)}{\sin 60^\circ}$$
Puisque les deux membres de droite représentent r, alors :
$$\begin{aligned}
\frac{\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ - \delta)} &= \frac{\sin(60^\circ + \delta)}{\sin 60^\circ} \\
\sin^2 60^\circ &= \sin(60^\circ - \delta)\sin(60^\circ + \delta) \\
\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= (\sin 60^\circ \cos\delta - \cos 60^\circ \sin\delta)(\sin 60^\circ \cos\delta + \cos 60^\circ \sin\delta) \\
\tfrac{3}{4} &= \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\delta - \tfrac{1}{2}\sin\delta\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\delta + \tfrac{1}{2}\sin\delta\right) \\
\tfrac{3}{4} &= \tfrac{3}{4}\cos^2\delta - \tfrac{1}{4}\sin^2\delta \\
\tfrac{3}{4} &= \tfrac{3}{4}\cos^2\delta + \tfrac{3}{4}\sin^2\delta - \sin^2\delta \\
\tfrac{3}{4} &= \tfrac{3}{4}(\cos^2\delta + \sin^2\delta) - \sin^2\delta \\
\tfrac{3}{4} &= \tfrac{3}{4} - \sin^2\delta \\
\sin^2\delta &= 0
\end{aligned}$$
d'où on a donc $\delta = 0^\circ$. (Tout autre angle δ avec $\sin\delta = 0$ ne produirait pas d'angles dans un triangle.)
Par conséquent, chacun des trois angles du triangle a une mesure de 60°, ce qui signifie que le triangle est équilatéral, ce qu'il ne peut pas être.
Par conséquent, on a une contradiction logique et donc un tel triangle ne peut pas exister.

9. (a) Les termes de la suite en dents de scie $(4,2)$ sont

$$1, \quad 2,3,4,3,2,1, \quad 2,3,4,3,2,1$$

dont la somme est égale à 31.

(b) *Solution 1*
Supposons que $m \geq 2$.
La suite en dents de scie $(m,3)$ a comme premier terme 1 suivi de 3 dents. Chaque dent commence à 2, monte jusqu'à m et redescend à 1.
Considérons l'une de ces dents dont les termes sont

$$2,3,4,\ldots,m-1,m,m-1,m-2,m-3,\ldots,2,1$$

Lorsqu'on écrit la partie ascendante directement au-dessus de la partie descendante, on obtient

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 3, & 4, & \ldots, & m-1, & m, \\ m-1, & m-2, & m-3, & \ldots, & 2, & 1 \end{array}$$

D'après cela, on peut voir $m-1$ paires de termes ; les termes de chaque paire ayant une somme de $m+1$.
(Remarquons que $2+(m-1) = 3+(m-2) = 4+(m-3) = \cdots = (m-1)+2 = m+1$ et que les termes du haut augmentent de 1 et les termes du bas diminuent de 1 lorsqu'on se déplace de gauche à droite ; les termes de chaque paire ont donc une somme constante).
Donc, les termes d'une dent ont une somme de $(m-1)(m+1) = m^2-1$.
Cela signifie que la somme des termes de la suite en dents de scie $(m,3)$ est égale à $1+3(m^2-1)$, soit $3m^2-2$.

Solution 2
Supposons que $m \geq 2$.
La suite en dents de scie $(m,3)$ a comme premier terme 1 suivi de 3 dents. Chaque dent commence à 2, monte jusqu'à m et redescend à 1.
Considérons l'une de ces dents dont les termes sont

$$2,3,4,\ldots,m-1,m,m-1,m-2,m-3,\ldots,2,1$$

Cette dent comprend un 1, deux 2, deux 3 et ainsi de suite jusqu'à atteindre deux $(m-1)$ et un m.
La somme de ces termes est égale à

$$1(1)+2(2)+2(3)+\cdots+2(m-1)+m$$

ce que l'on peut exprimer sous la forme

$$2(1+2+3+\cdots+(m-1)+m)-1-m = 2\cdot\tfrac{1}{2}m(m+1)-m-1 = m^2+m-m-1 = m^2-1$$

Donc, les termes d'une dent ont une somme de $(m-1)(m+1) = m^2-1$.
Cela signifie que la somme des termes de la suite en dents de scie $(m,3)$ est égale à $1+3(m^2-1)$, soit $3m^2-2$.

(c) D'après la partie (b), les termes de chaque dent ont une somme de $m^2 - 1$.
Donc, les termes de la suite en dents de scie (m, n) ont une somme de $1 + n(m^2 - 1)$.
Pour que cette somme soit égale à 145, on a $n(m^2 - 1) = 144$.
Cela signifie que n et $m^2 - 1$ forment une paire de diviseurs complémentaires de 144.
Puisque m varie de 2 à 12, alors les valeurs de $m^2 - 1$ sont

$$3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, 143$$

(Lorsque $m = 13$, on obtient $m^2 - 1 = 168$. Donc, lorsque $m \geq 13$, la valeur de $m^2 - 1$ est trop grande pour qu'elle soit un diviseur de 144.)
Parmi les valeurs de $m^2 - 1$, $3, 8, 24, 48$ sont des diviseurs de 144 (correspondant à $m = 2, 3, 5, 7$) et ont comme diviseurs complémentaires $48, 18, 6, 3$.
Donc, les couples (m, n) pour lesquels les termes de la suite ont une somme de 145 sont

$$(m, n) = (2, 48), (3, 18), (5, 6), (7, 3)$$

(d) La somme des termes d'une suite en dents de scie (m, n) est égale à $n(m^2 - 1) + 1$.
Chaque dent comprend $(m - 1) + (m - 1) = 2m - 2$ termes (de 2 à m et de $m - 1$ à 1).
Cela signifie que la suite comprend $n(2m - 2) + 1$ termes.
Donc, les termes de la suite ont une moyenne de $\dfrac{n(m^2 - 1) + 1}{n(2m - 2) + 1}$.
Il faut démontrer que cette moyenne n'est pas un entier pour tous les couples (m, n) d'entiers strictement positifs $(m \geq 2)$.
Supposons que $\dfrac{n(m^2 - 1) + 1}{n(2m - 2) + 1} = k$, k étant un entier quelconque. On va démontrer à l'aide d'une preuve par contradiction que cela n'est pas possible.
Puisque $\dfrac{n(m^2 - 1) + 1}{n(2m - 2) + 1} = k$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{m^2n - n + 1}{2mn - 2n + 1} &= k \\
m^2n - n + 1 &= 2mnk - 2nk + k \\
m^2n - 2mnk + (2nk - n - k + 1) &= 0
\end{aligned}$$

On considère cette dernière comme étant une équation du second degré en m.
Puisque m est un entier, alors cette équation admet des racines entières et son discriminant doit donc être un carré parfait.
Cette équation a donc comme discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-2nk)^2 - 4n(2nk - n - k + 1) \\
&= 4n^2k^2 - 8n^2k + 4n^2 + 4nk - 4n \\
&= 4n^2(k^2 - 2k + 1) + 4n(k - 1) \\
&= 4n^2(k - 1)^2 + 4n(k - 1) \\
&= (2n(k - 1))^2 + 2(2n(k - 1)) + 1 - 1 \\
&= (2n(k - 1) + 1)^2 - 1
\end{aligned}$$

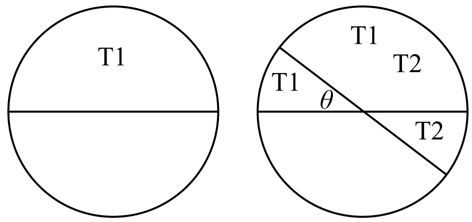
Remarquons que $(2n(k - 1) + 1)^2$ est un carré parfait et que Δ est supposé être un carré parfait.
Or, ces deux carrés parfaits ont une différence de 1 et les deux seuls carrés parfaits qui ont

cette différence sont 1 et 0.
(Pour justifier ce fait, on peut considérer l'équation $a^2 - b^2 = 1$, a et b étant des entiers non négatifs, que l'on factorise pour obtenir $(a+b)(a-b) = 1$ d'où on a donc $a+b = a-b = 1$, soit $a = 1$ et $b = 0$.)
Puisque $(2n(k-1)+1)^2 = 1$ et $2n(k-1)+1$ est non négatif, alors $2n(k-1)+1 = 1$, d'où $2n(k-1) = 0$.
Puisque n est positif, alors $k-1 = 0$ ou $k = 1$.
Donc, la seule manière pour que la moyenne soit un entier est que la moyenne soit égale à 1.
Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} m^2n - 2mn + (2n - n - 1 + 1) &= 0 \\ m^2n - 2mn + n &= 0 \\ n(m^2 - 2m + 1) &= 0 \\ n(m-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

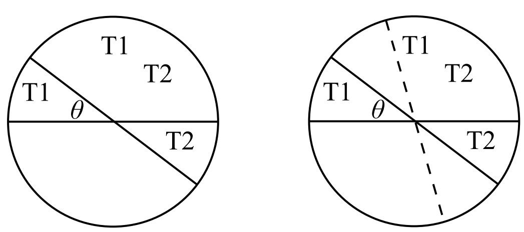
Puisque n et m sont des entiers strictement positifs avec $m \geq 2$, alors $n(m-1)^2 \neq 0$, ce qui est une contradiction.
Donc, la moyenne des termes de la suite en dents de scie (m, n) ne peut pas être un entier.

10. (a) Supposons que la première garniture soit placée sur la moitié supérieure de la pizza (on peut faire pivoter la pizza pour que ce soit le cas).
Supposons que la deuxième garniture soit placée sur la moitié de la pizza située au-dessus du diamètre horizontal de manière que l'angle formé par le diamètre du deuxième demi-cercle et le diamètre horizontal ait une mesure de θ dans le sens des aiguilles d'une montre, comme dans la figure ci-dessous. En d'autres termes, la garniture couvre la pizza de θ à $\theta + 180°$.



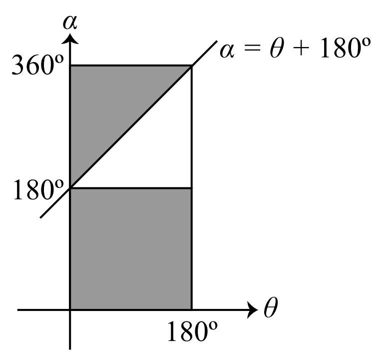
On peut supposer que $0° \leq \theta \leq 360°$.
Lorsque $0° \leq \theta \leq 90°$, l'angle du secteur couvert par les deux garnitures est d'au moins $90°$ (et donc d'au moins un quart de cercle).
Lorsque $90° < \theta \leq 180°$, l'angle du secteur couvert par les deux garnitures est inférieur à $90°$ (et donc inférieur à un quart de cercle).
Lorsque θ dépasse $180°$, les deux garnitures commencent à nouveau à couvrir la partie gauche du demi-cercle supérieur. Lorsque $180° \leq \theta < 270°$, l'angle du secteur couvert par les deux garnitures est inférieur à $90°$ (et donc inférieur à un quart de cercle).
Lorsque $270° \leq \theta \leq 360°$, l'angle du secteur couvert par les deux garnitures est d'au moins $90°$ (et donc d'au moins un quart de cercle).
Donc, si l'on choisit θ au hasard entre $0°$ et $360°$, la longueur combinée des intervalles dans lesquels au moins $\frac{1}{4}$ de la pizza est couverte par les deux garnitures est de $180°$.
Donc, la probabilité est égale à $\dfrac{180°}{360°}$, soit $\dfrac{1}{2}$.

(b) Supposons que la première garniture soit placée sur la moitié supérieure de la pizza (on peut faire pivoter la pizza pour que ce soit le cas).
Supposons que la deuxième garniture soit placée sur la moitié de la pizza située au-dessus du diamètre horizontal de manière que l'angle formé par le diamètre du deuxième demi-cercle et le diamètre horizontal ait une mesure de θ dans le sens des aiguilles d'une montre, comme dans la figure ci-dessous. En d'autres termes, la garniture couvre la pizza de θ à $\theta + 180°$.
On peut supposer que $0° \leq \theta \leq 180°$. Si $180° \leq \theta \leq 360°$, alors on considère la pizza résultante comme étant une réflexion de celle dans la figure ci-dessous.



Considérons le troisième diamètre, représenté en pointillé, dans la figure ci-dessus. Supposons qu'il forme un angle de α avec l'horizontale. (Dans la figure, $\alpha < 90°$.) On suppose que la garniture est ajoutée sur la moitié de pizza dans le sens des aiguilles d'une montre en commençant par l'angle α, et que cette garniture reste dans la même position relative pendant que le diamètre fait le tour du cercle..
Pour quels angles α y aura-t-il une région de la pizza qui sera couverte par toutes les trois

garnitures ?
Si $0^\circ \le \alpha < 180^\circ$, une région de la pizza sera couverte par toutes les trois garnitures ; cette région se trouve au-dessus de la moitié droite du diamètre horizontal.
Si $180^\circ \le \alpha < 180^\circ + \theta$, le troisième diamètre passera par les deux régions d'angle θ et la troisième garniture sera en-dessous de ce diamètre. Il n'y aura donc pas de région qui sera couverte par toutes les trois garnitures.
Si $180^\circ + \theta \le \alpha \le 360^\circ$, la troisième garniture commence à couvrir la partie la plus à gauche de la région qui est couverte par deux garnitures. Il y aura donc une région qui sera couverte par toutes les trois garnitures.
Donc, pour un angle θ avec $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$, une région de la pizza contient trois garnitures lorsque $0^\circ \le \alpha < 180^\circ$ et lorsque $180^\circ + \theta \le \alpha \le 360^\circ$.
Pour déterminer la probabilité souhaitée, on représente graphiquement les points (θ, α). Un choix particulier de diamètres correspond à un choix d'angles θ et α avec $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ et $0^\circ \le \alpha \le 360^\circ$, ce qui correspond à un point dans le graphique ci-dessous.
La probabilité souhaitée est donc égale à l'aire de la région de ce graphique où trois garnitures recouvrent une partie de la pizza divisée par l'aire totale du graphique.
La région ombrée du graphique correspond aux cas où une partie de la pizza est couverte par trois garnitures.

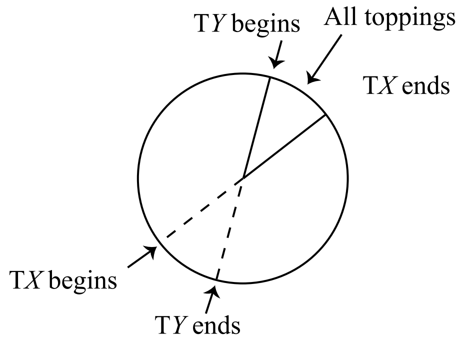


Cette région ombrée est composée de toute la partie du graphique où $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$ (peu importe θ) ainsi que de la région au-dessus de la droite d'équation $\alpha = \theta + 180^\circ$ (c'est-à-dire la région avec $\theta + 180^\circ \le \alpha \le 360^\circ$).
La pente de la droite étant égale à 1, elle divise la moitié supérieure de la région, qui est un carré, en deux parties d'aire égale.
Donc, $\frac{3}{4}$ du graphique est ombré, ce qui signifie que la probabilité qu'une région de la pizza soit couverte par les trois garnitures est égale à $\boxed{\dfrac{3}{4}}$.

(c) L'idée principale de cette solution est que les garnitures se chevauchent toutes exactement lorsqu'il existe une garniture telle que toutes les autres garnitures « commencent » quelque part dans le demi-cercle de cette garniture. Dans la suite de cette solution, on déterminera la probabilité en utilisant ce fait, que l'on justifiera par la suite.

Supposons que, pour $1 \le j \le N$, la garniture j soit placé sur le demi-cercle qui commence à un angle de θ_j dans le sens des aiguilles d'une montre à partir du rayon horizontal de gauche et qui va jusqu'à un angle de $\theta_j + 180^\circ$ où $0^\circ \le \theta_j < 360^\circ$. En établissant ces variables et cette convention, on fixe à la fois l'angle du diamètre et le demi-cercle défini par ce diamètre sur lequel la garniture est placée.
Supposons qu'il y a une région de la pizza ayant une aire non nulle qui soit couverte par les N garnitures à la fois.
Cette région sera un secteur délimité par deux rayons, chacun d'entre eux étant la moitié

d'un diamètre délimitant l'une des garnitures.
Supposons que le rayon au « bout dans le sens horaire » du secteur soit l'extrémité du demi-cercle où est placée la garniture X, et que le rayon au « début dans le sens antihoraire » du secteur soit le début du demi-cercle où est placée la garniture Y.



Cela signifie que chacune des $N-2$ autres garnitures commence entre (dans le sens horaire) les points où commence la garniture X et où commence la garniture Y.
Considérons l'angle de départ de la garniture X, θ_X.
Le fait de dire que les $N-1$ autres garnitures commencent à un certain point avant que la garniture X ne se termine revient à dire que chaque θ_j avec $j \neq X$ est entre θ_X et $\theta_X + 180°$.
Dans ce cas, on peut admettre la possibilité que $\theta_X + 180°$ soit supérieur à 360° en précisant qu'un angle équivalent à θ_j (qui est soit θ_j ou $\theta_j + 360°$) est entre θ_X et $\theta_X + 180°$.
Pour chaque $j \neq X$, l'angle θ_j est choisi aléatoirement, uniformément et indépendamment dans le cercle, il y a donc une probabilité de $\frac{1}{2}$ que cet angle (ou son équivalent) soit dans le demi-cercle compris entre θ_X et $\theta_X + 180°$.
Puisqu'il y a $N-1$ tels angles, la probabilité que tous soient compris entre θ_X et $\theta_X + 180°$ est égale à $\frac{1}{2^{N-1}}$.
Puisqu'il y a N choix possibles pour la première garniture qui peuvent « terminer » le secteur commun, alors la probabilité souhaitée sera égale à $\frac{N}{2^{N-1}}$ tant que l'on peut démontrer qu'aucun ensemble d'angles ne peut donner deux secteurs différents qui soient tous les deux couverts par toutes les garnitures.
Pour démontrer ce fait, on peut supposer, sans perte de généralité, que

$$0° = \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \cdots < \theta_{N-1} < \theta_N < 180°$$

(On peut renommer les garnitures si nécessaire pour obtenir cet ordre et faire tourner la pizza pour que la garniture 1 commence à 0°.)
On doit démontrer qu'il n'est pas possible d'avoir un Z pour lequel $\theta_Z, \theta_{Z+1}, \ldots, \theta_N, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{Z-1}$ se trouvent tous dans un demi-cercle commençant par θ_Z.
Puisque $\theta_Z < 180°$ et que l'on peut considérer θ_1 comme étant égal à 360°, alors cela n'est pas possible puisque θ_1 et les angles qui le suivent ne sont pas tous à moins de 180° de θ_Z.
Par conséquent, il n'est pas possible d'avoir deux telles régions avec le même ensemble d'angles. Donc, la probabilité souhaitée est égale à $\frac{N}{2^{N-1}}$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2021

le mercredi 7 avril 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 8 avril 2021
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Puisque $(a-1)+(2a-3)=14$, alors $3a=18$, d'où $a=6$.

   (b) Puisque $(c^2-c)+(2c-3)=9$, alors $c^2+c-3=9$, d'où $c^2+c-12=0$.
   Sous forme factorisée, l'équation devient $(c+4)(c-3)=0$. Donc, $c=3$ ou $c=-4$.

   (c) *Solution 1*
   À l'aide de manipulations algébriques, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2x^2}&=10\\ 2+3&=20x^2 \qquad \text{(on a multiplié chaque membre par } 2x^2\text{, étant donné que } x\neq 0)\\ 5&=20x^2\\ x^2&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

   donc, $x=\pm\frac{1}{2}$.

   Solution 2
   À l'aide de manipulations algébriques, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2x^2}&=10\\ \frac{2}{2x^2}+\frac{3}{2x^2}&=10\\ \frac{5}{2x^2}&=10\\ 5&=20x^2 \qquad \text{(puisque } x\neq 0)\\ x^2&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

   donc, $x=\pm\frac{1}{2}$.

2. (a) À l'aide d'une calculatrice, on a que

$$(10^3+1)^2=1001^2=1\,002\,001$$

   Les chiffres de cet entier ont une somme de $1+2+1$, soit 4.
   Pour déterminer cet entier sans l'aide d'une calculatrice, on pose $x=10^3$.
   Donc,

$$\begin{aligned}(10^3+1)^2&=(x+1)^2\\ &=x^2+2x+1\\ &=(10^3)^2+2(10^3)+1\\ &=1\,002\,001\end{aligned}$$

(b) Avant l'augmentation de prix, 2 petits biscuits et 1 grand biscuit auraient coûté en tout $2 \cdot 1{,}50\ \$ + 2{,}00\ \$ = 5{,}00\ \$$.
10 % de 1,50 \$ équivaut à $0{,}1 \cdot 1{,}50\ \$ = 0{,}15\ \$$. Après l'augmentation de prix, le coût d'un petit biscuit est de $1{,}50\ \$ + 0{,}15\ \$ = 1{,}65\ \$$.
5 % de 2,00 \$ équivaut à $0{,}05 \cdot 2{,}00\ \$ = 0{,}10\ \$$. Après l'augmentation de prix, le coût d'un grand biscuit est de $2{,}00\ \$ + 0{,}10\ \$ = 2{,}10\ \$$.
Après l'augmentation de prix, 2 petits biscuits et 1 grand biscuit ont un coût total de $2 \cdot 1{,}65\ \$ + 2{,}10\ \$ = 5{,}40\ \$$.
L'augmentation en pourcentage du coût total est donc de

$$\frac{5{,}40\ \$ - 5{,}00\ \$}{5{,}00\ \$} \times 100\ \% = \frac{40}{500} \times 100\ \% = 8\ \%$$

(c) Supposons que Rayna a x ans.
Puisque Qing est deux fois plus vieux que Rayna, alors Qing a $2x$ ans.
Puisque Qing a 4 ans de moins que Paolo, alors Paolo a $2x + 4$ ans.
Puisque les trois amis ont un âge moyen de 13 ans, on a donc

$$\frac{x + (2x) + (2x + 4)}{3} = 13$$

D'où l'on obtient $5x + 4 = 39$ ou $5x = 35$, soit $x = 7$.
Donc, Rayna a 7 ans, Qing a 14 ans et Paolo a 18 ans.
(On peut vérifier notre réponse : 7, 14 et 18 ont une moyenne de $\dfrac{7 + 14 + 18}{3} = \dfrac{39}{3} = 13$.)

3. (a) La longueur de PQ est égale à $\sqrt{(0-5)^2 + (12-0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$.
De même, on voit que $QR = RS = SP = 13$.
Donc, $PQRS$ a un périmètre de $4 \cdot 13 = 52$.
(On peut également voir que si O est situé à l'origine, alors les triangles POQ, POS, ROQ et ROS sont isométriques car $OQ = OS$ et $OP = OR$, d'où $PQ = QR = RS = SP$.)

(b) *Solution 1*
Supposons que B a pour coordonnées (r, s) et que C a pour coordonnées (t, u).
Puisque $M(3, 9)$ est le milieu de $A(0, 8)$ et $B(r, s)$, alors 0 et r ont une moyenne de 3 (d'où on a donc que $r = 6$) tandis que 8 et s ont une moyenne de 9 (d'où on a donc que $s = 10$).
Puisque $N(7, 6)$ est le milieu de $B(6, 10)$ et $C(t, u)$, alors 6 et t ont une moyenne de 7 (d'où on a donc que $t = 8$) tandis que 10 et u ont une moyenne de 6 (d'où on a donc que $u = 2$).
Le segment de droite délimité par les points $A(0, 8)$ et $C(8, 2)$ a donc une pente de $\dfrac{8-2}{0-8}$, soit $-\dfrac{3}{4}$.

Solution 2
Puisque M est le milieu de AB et que N est le milieu de BC, alors MN est parallèle à AC.
Donc, la pente de AC est égale à la pente du segment de droite délimité par les points $M(3, 9)$ et $N(7, 6)$, soit $\dfrac{9-6}{3-7}$ ou $-\dfrac{3}{4}$.

(c) Puisque $V(1,18)$ est situé sur la parabole, alors $18 = -2(1^2) + 4(1) + c$, d'où $c = 18 + 2 - 4 = 16$.
Donc, la parabole a pour équation $y = -2x^2 + 4x + 16$.
L'ordonnée à l'origine a pour abscisse $x = 0$, donc $y = 16$. Ainsi, D a pour coordonnées $(0,16)$.
Les abscisses à l'origine ont pour ordonnées $y = 0$. Donc,

$$\begin{aligned} -2x^2 + 4x + 16 &= 0 \\ -2(x^2 - 2x - 8) &= 0 \\ -2(x-4)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

d'où on a donc $x = 4$ et $x = -2$.
Cela signifie que E et F, dans un certain ordre, ont pour coordonnées $(4,0)$ et $(-2,0)$.
Donc, le triangle DEF a pour base EF (dont la longueur est de $4-(-2) = 6$) et a une hauteur de 16 (la distance verticale du point D à l'axe des abscisses).
Donc, le triangle DEF a une aire de $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 16 = 48$.

4. (a) On développe l'équation comme suit :

$$\begin{aligned} 3(8^x) + 5(8^x) &= 2^{61} \\ 8(8^x) &= 2^{61} \\ 8^{x+1} &= 2^{61} \\ (2^3)^{x+1} &= 2^{61} \\ 2^{3(x+1)} &= 2^{61} \end{aligned}$$

Donc, $3(x+1) = 61$, d'où $3x + 3 = 61$ ou $3x = 58$, soit $x = \frac{58}{3}$.

(b) Puisque la liste $3n^2$, m^2, $2(n+1)^2$ est composée de trois entiers consécutifs écrits en ordre croissant, alors

$$\begin{aligned} 2(n+1)^2 - 3n^2 &= 2 \\ 2n^2 + 4n + 2 - 3n^2 &= 2 \\ -n^2 + 4n &= 0 \\ -n(n-4) &= 0 \end{aligned}$$

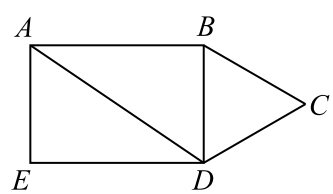
d'où on a donc $n = 0$ ou $n = 4$.
Si $n = 0$, la liste devient 0, m^2, 2. Cela signifie que $m^2 = 1$, soit $m = \pm 1$.
Si $n = 4$, on a $3n^2 = 3 \cdot 16 = 48$ et $2(n+1)^2 = 2 \cdot 25 = 50$. On a donc la liste 48, m^2, 50.
Cela signifie que $m^2 = 49$, soit $m = \pm 7$.
Donc, les valeurs possibles de m sont 1, -1, 7, -7.

5. (a) *Solution 1*
Supposons que S_0 a pour coordonnées (a,b).
Le point (a,b) passe à $(a,-b)$ dans l'étape 1.
Le point $(a,-b)$ passe à $(a,-b+2)$ dans l'étape 2.
Le point $(a,-b+2)$ passe à $(-a,-b+2)$ dans l'étape 3.
Donc, S_1 a pour coordonnées $(-a,-b+2)$.
Le point $(-a,-b+2)$ passe à $(-a,b-2)$ dans l'étape 1.
Le point $(-a,b-2)$ passe à $(-a,b)$ dans l'étape 2.

Le point $(-a, b)$ passe à (a, b) dans l'étape 3.
Donc, S_2 a les mêmes coordonnées que S_0, soit (a, b).
En poursuivant le processus, S_4 aura les mêmes coordonnées que S_2 (et aura donc les mêmes coordonnées que S_0). De même, S_6 aura les mêmes coordonnées que S_4, que S_2 et que S_0.
Puisque S_6 a pour coordonnées $(-7, -1)$, alors S_0 a également pour coordonnées $(-7, -1)$.

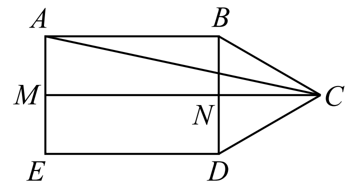
Solution 2
On procède à rebours à partir de $S_6(-7, -1)$.
Pour le faire, on annule chacune des étapes du processus $\mathcal{P}$ en les appliquant dans l'ordre inverse.
Puisque l'étape 3 fait subir à un point une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, l'étape inverse produit le même résultat.
Puisque l'étape 2 fait subir à un point une translation de 2 unités vers le haut, alors l'étape inverse fait subir à un point une translation de 2 unités vers le bas.
Puisque l'étape 1 fait subir à un point une réflexion par rapport à l'axe des abscisses, l'étape inverse produit le même résultat.
En appliquant ces étapes inverses à $S_6(-7, -1)$, on obtient $(7, -1)$, ensuite $(7, -3)$ et ensuite $(7, 3)$.
Donc, S_5 a pour coordonnées $(7, 3)$.
En appliquant ces étapes inverses à $S_5(7, 3)$, on obtient $(-7, 3)$, ensuite $(-7, 1)$ et ensuite $(-7, -1)$.
Donc, S_4 a pour coordonnées $(-7, -1)$; soit les mêmes coordonnées que S_6.
Si on applique ces étapes deux fois de plus, on verra que S_2 est le même point que S_4.
Si on applique ces étapes encore deux fois, on verra que S_0 est le même point que S_2.
Donc, S_0 et S_6 ont les mêmes coordonnées, soit $(-7, -1)$.

(b) On détermine d'abord la longueur de AB en fonction de x.
Puisque $ABDE$ est un rectangle, alors $BD = AE = 2x$.
Puisque le triangle BCD est équilatéral, $\angle DBC = 60°$.
On joint A à D.



Puisque AD et BC sont parallèles, alors $\angle ADB = \angle DBC = 60°$.
Considérons le triangle ADB. Ce triangle est un triangle remarquable 30°-60°-90° puisque l'angle ABD est droit.
Étant donné que les longueurs des côtés d'un tel triangle sont dans un rapport de $1 : \sqrt{3} : 2$, alors $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$, d'où $AB = \sqrt{3}BD = 2\sqrt{3}x$.
De plus, $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{2}{1}$, d'où $AD = 2BD = 4x$, ce qui est la réponse à (i).

On détermine ensuite $\dfrac{AC}{AD}$.
Supposons que M est le milieu de AE et que N est le milieu de BD.
Puisque $AE = BD = 2x$, alors $AM = ME = BN = ND = x$.
On joint M à N, N à C, et A à C.



Puisque $ABDE$ est un rectangle, alors MN est parallèle à AB. Donc MN est perpendiculaire à AE et à BD.
De plus, $MN = AB = 2\sqrt{3}x$.
Puisque le triangle BCD est équilatéral, sa médiane CN est perpendiculaire à BD.
Puisque MN et NC sont perpendiculaires à BD, alors MNC est en réalité un segment de droite, on a donc que $MC = MN + NC$.
Donc, le triangle BNC est également un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Ainsi, $NC = \sqrt{3}BN = \sqrt{3}x$.
Donc, $MC = 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}x = 3\sqrt{3}x$.

Finalement, le triangle AMC est rectangle en M, d'où

$$AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = \sqrt{x^2 + (3\sqrt{3}x)^2} = \sqrt{x^2 + 27x^2} = \sqrt{28x^2} = 2\sqrt{7}x$$

car $x > 0$.
Cela signifie que $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{2\sqrt{7}x}{4x} = \dfrac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{\dfrac{7}{4}}$. Donc, les entiers $r = 7$ et $s = 4$ remplissent les conditions de (ii).

6. (a) *Solution 1*
Puisque la suite $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1}, t_n$ est arithmétique, alors

$$t_1 + t_n = t_2 + t_{n-1} = t_3 + t_{n-2}$$

car si r est la raison, alors on a $t_2 = t_1 + r$ et $t_{n-1} = t_n - r$ ainsi que $t_3 = t_1 + 2r$ et $t_{n-2} = t_n - 2r$.
Puisque les n termes ont une somme de 1000, on obtient les équations suivantes à l'aide de la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique :

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}(t_1 + t_n) &= 1000 \\ n(t_1 + t_n) &= 2000 \\ n(t_3 + t_{n-2}) &= 2000 \\ n(5 + 95) &= 2000 \end{aligned}$$

Donc, $n = 20$.

Solution 2
Supposons que la suite arithmétique de n termes est de premier terme a et de raison r.
Alors $t_3 = a + 2r = 5$ et $t_{n-2} = a + (n-3)r = 95$.
Puisque les n termes ont une somme de 1000, alors

$$\frac{n}{2}(2a + (n-1)r) = 1000$$

En additionnant les équations $a+2r = 5$ et $a+(n-3)r = 95$, on obtient $2a+(n-1)r = 100$, ce que l'on reporte dans l'équation ci-dessus pour obtenir $\frac{n}{2}(100) = 1000$, d'où $n = 20$.

(b) Puisque les 4 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme a et de raison r ont une somme de $6 + 6\sqrt{2}$, alors

$$a + ar + ar^2 + ar^3 = 6 + 6\sqrt{2}$$

Puisque les 8 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme a et de raison r ont une somme de $30 + 30\sqrt{2}$, alors

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + ar^6 + ar^7 = 30 + 30\sqrt{2}$$

Puisque

$$\begin{aligned} & a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + ar^6 + ar^7 \\ & \qquad = (a + ar + ar^2 + ar^3) + r^4(a + ar + ar^2 + ar^3) \\ & \qquad = (1 + r^4)(a + ar + ar^2 + ar^3) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} 30 + 30\sqrt{2} &= (1 + r^4)(6 + 6\sqrt{2}) \\ \frac{30 + 30\sqrt{2}}{6 + 6\sqrt{2}} &= 1 + r^4 \\ 5 &= 1 + r^4 \\ r^4 &= 4 \\ r^2 &= 2 \qquad \text{(puisque } r^2 > 0\text{)} \\ r &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Si $r = \sqrt{2}$,

$$a + ar + ar^2 + ar^3 = a + \sqrt{2}a + a(\sqrt{2})^2 + a(\sqrt{2})^3 = a + \sqrt{2}a + 2a + 2\sqrt{2}a = a(3 + 3\sqrt{2})$$

Puisque $a + ar + ar^2 + ar^3 = 6 + 6\sqrt{2}$, alors $a(3 + 3\sqrt{2}) = 6 + 6\sqrt{2}$, d'où $a = \dfrac{6 + 6\sqrt{2}}{3 + 3\sqrt{2}} = 2$.

Si $r = -\sqrt{2}$,

$$a + ar + ar^2 + ar^3 = a - \sqrt{2}a + a(-\sqrt{2})^2 + a(-\sqrt{2})^3 = a - \sqrt{2}a + 2a - 2\sqrt{2}a = a(3 - 3\sqrt{2})$$

Puisque $a + ar + ar^2 + ar^3 = 6 + 6\sqrt{2}$, alors $a(3 - 3\sqrt{2}) = 6 + 6\sqrt{2}$, d'où

$$a = \frac{6 + 6\sqrt{2}}{3 - 3\sqrt{2}} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{(2 + 2\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \frac{2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4}{1 - 2} = -6 - 4\sqrt{2}$$

Donc, les valeurs possibles de a sont $a = 2$ et $a = -6 - 4\sqrt{2}$.

Une autre façon d'arriver à l'équation $1 + r^4 = 5$ consiste à utiliser la formule de la somme d'une suite géométrique à deux reprises pour obtenir

$$\frac{a(1 - r^4)}{1 - r} = 6 + 6\sqrt{2} \qquad \frac{a(1 - r^8)}{1 - r} = 30 + 30\sqrt{2}$$

en supposant que $r \neq 1$. (Pouvez-vous expliquer pourquoi $r \neq 1$ et $r^4 \neq 1$ même si l'on ne savait pas que $r = \pm\sqrt{2}$?)

On divise la seconde équation par la première pour obtenir

$$\frac{a(1 - r^8)}{1 - r} \cdot \frac{1 - r}{a(1 - r^4)} = \frac{30 + 30\sqrt{2}}{6 + 6\sqrt{2}}$$

d'où on a donc

$$\frac{1-r^8}{1-r^4} = 5$$

Puisque $1 - r^8 = (1 + r^4)(1 - r^4)$, alors $1 + r^4 = 5$. On peut alors procéder de la même manière que ci-dessus.

7. (a) Victor arrête de retirer des boules lorsqu'il y a soit 2 boules vertes sur la table, soit 2 boules rouges sur la table.
Si les 2 premières boules que Victor retire sont de la même couleur, Victor arrêtera de retirer des boules.
Si les 2 premières boules que Victor retire sont de couleurs différentes, Victor retirera une troisième boule qui, forcément, sera de la même couleur que l'une des deux autres boules. À ce point-ci, Victor arrêtera de retirer des boules.
Donc, la probabilité qu'il arrête de retirer des boules lorsqu'il y a au moins 1 boule rouge et 1 boule verte sur la table est égale à la probabilité que les 2 premières boules qu'il retire soient de couleurs différentes.
De plus, la probabilité que les 2 premières boules qu'il retire soient de couleurs différentes est égale à 1 moins la probabilité que les 2 premières boules qu'il retire soient de la même couleur.
La probabilité que les deux premières boules que Victor retire soient toutes les deux vertes est égale à $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}$ car il y a 7 boules dans le sac (dont 3 sont vertes) pour la première boule tandis qu'il y a 6 boules dans le sac (dont 2 sont vertes) pour la seconde boule.
La probabilité que les deux premières boules que Victor retire soient toutes les deux rouges est égale à $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$ car il y a 7 boules dans le sac (dont 4 sont rouges) pour la première boule tandis qu'il y a 6 boules dans le sac (dont 3 sont rouges) pour la seconde boule.
Donc, la probabilité que les deux premières boules que Victor retire soient de la même couleur est égale à

$$\tfrac{3}{7} \cdot \tfrac{2}{6} + \tfrac{4}{7} \cdot \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{7} + \tfrac{2}{7} = \tfrac{3}{7}$$

Donc, au moment où Victor arrête de retirer les boules, la probabilité qu'il y ait au moins 1 boule rouge et au moins 1 boule verte sur la table est égale à $1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$.

(b) D'après la définition de f, les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ 2a^2 - 3a + 1 &= 0 \\ (a-1)(2a-1) &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $f(a) = 0$ uniquement lorsque $a = 1$ ou $a = \frac{1}{2}$.
Donc, $f(g(\sin\theta)) = 0$ uniquement lorsque $g(\sin\theta) = 1$ ou $g(\sin\theta) = \frac{1}{2}$.

D'après la définition de g,

- $g(b) = 1$ uniquement lorsque $\log_{\frac{1}{2}} b = 1$, d'où $b = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$, et
- $g(b) = 1/2$ uniquement lorsque $\log_{\frac{1}{2}} b = 1/2$, d'où $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc, $f(g(\sin\theta)) = 0$ uniquement lorsque $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ou $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Puisque $0 \leq \theta \leq 2\pi$, on a $\theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi$ pour solutions.

8. (a) Supposons que les entiers dans la rangée supérieure sont a, b, c, d, e dans cet ordre.
On exprime chacun des entiers contenu dans les cases qui ne sont pas dans la rangée supérieure en fonction de ces variables. Rappelons que chaque case qui n'est pas dans la rangée supérieure contient le produit des entiers dans les deux cases qui lui sont reliées dans la rangée directement au-dessus. On a donc :

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & b & & c & & d & & e \\ & ab & & bc & & cd & & de & \\ & & ab^2c & & bc^2d & & cd^2e & & \\ & & & ab^3c^3d & & bc^3d^3e & & & \\ & & & & ab^4c^6d^4e & & & & \end{array}$$

Donc, $ab^4c^6d^4e = 9\,953\,280\,000$.
On écrit ensuite la factorisation première de l'entier $9\,953\,280\,000$:

$$\begin{aligned} 9\,953\,280\,000 &= 10^4 \cdot 995\,328 \\ &= 2^4 \cdot 5^4 \cdot 2^3 \cdot 124\,416 \\ &= 2^7 \cdot 5^4 \cdot 2^3 \cdot 15\,552 \\ &= 2^{10} \cdot 5^4 \cdot 2^3 \cdot 1944 \\ &= 2^{13} \cdot 5^4 \cdot 2^3 \cdot 243 \\ &= 2^{16} \cdot 5^4 \cdot 3^5 \\ &= 2^{16} \cdot 3^5 \cdot 5^4 \end{aligned}$$

Donc, $ab^4c^6d^4e = 2^{16} \cdot 3^5 \cdot 5^4$.
Puisque le membre de droite n'est pas divisible par 7, alors aucun des entiers a, b, c, d, e ne peut être égal à 7.
Donc, a, b, c, d, e sont cinq entiers distincts que l'on choisit parmi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.
Parmi ces entiers, le seul qui est divisible par 5 est 5.
Puisque $2^{16} \cdot 3^5 \cdot 5^4$ comprend exactement quatre facteurs 5, alors soit $b = 5$ ou $d = 5$. Aucun autre placement du 5 ne peut donner exactement quatre facteurs 5.

Cas 1 : $b = 5$
Dans ce cas, $ac^6d^4e = 2^{16} \cdot 3^5$; a, c, d et e étant quatre entiers distincts choisis parmi $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$.
Puisque ac^6d^4e comprend exactement cinq facteurs 3 et que les valeurs possibles de a, c, d et e qui sont divisibles par 3 sont 3 et 6, alors soit $d = 3$ et l'un de a et e est 6, soit $d = 6$ et l'un de a et e est 3. Aucun autre placement des multiples de 3 ne peut donner exactement cinq facteurs 3.

Cas 1a : $b = 5$, $d = 3$, $a = 6$
Dans ce cas, $a \cdot c^6 \cdot d^4 \cdot e = 6 \cdot c^6 \cdot 3^4 \cdot e = 2 \cdot 3^5 \cdot c^6 \cdot e$.
On a donc $c^6e = 2^{15}$; c et e étant des entiers distincts choisis parmi $\{1, 2, 4, 8\}$.
Si l'on essaie les quatre valeurs possibles de c, on voit que $c = 4$ et $e = 8$ est la seule solution pour ce cas. Donc, $(a, b, c, d, e) = (6, 5, 4, 3, 8)$.

Cas 1b : $b = 5$, $d = 3$, $e = 6$ On obtient $(a, b, c, d, e) = (8, 5, 4, 3, 6)$.

Cas 1c : $b = 5$, $d = 6$, $a = 3$
Dans ce cas, $a \cdot c^6 \cdot d^4 \cdot e = 3 \cdot c^6 \cdot 6^4 \cdot e = 2^4 \cdot 3^5 \cdot c^6 \cdot e$.
On a donc $c^6e = 2^{12}$; c et e étant des entiers distincts choisis parmi $\{1, 2, 4, 8\}$.
Si l'on essaie les quatre valeurs possibles de c, on voit que $c = 4$ et $e = 1$ est la seule

solution pour ce cas. Donc, $(a, b, c, d, e) = (3, 5, 4, 6, 1)$.

Cas 1d : $b = 5$, $d = 6$, $e = 3$ On obtient $(a, b, c, d, e) = (1, 5, 4, 6, 3)$.

Cas 2 : $d = 5$: On obtient 4 quintuples (a,b, c, d, e) supplémentaires à l'aide d'une analyse semblable.

Donc, il existe 8 façons dont les nombres entiers peuvent être choisis et placés dans la rangée supérieure de manière à obtenir l'entier souhaité dans la case du bas.

(b) Soit $N = \dfrac{(1!)(2!)(3!)\cdots(398!)(399!)(400!)}{200!}$.

Pour chaque entier k de 1 à 200, on exprime $(2k)!$ sous la forme $2k \cdot (2k-1)!$.
Donc, $(2k-1)!(2k)! = (2k-1)! \cdot 2k \cdot (2k-1)! = 2k(2k-1!)^2$.
(En particulier, $(1!)(2!) = 2(1!)^2$, $(3!)(4!) = 4(3!)^2$ et ainsi de suite.)
Donc,

$$N = \frac{2(1!)^2 \cdot 4(3!)^2 \cdot \cdots \cdot 398(397!)^2 \cdot 400(399!)^2}{200!}$$

On peut réorganiser le numérateur de l'expression pour obtenir

$$N = \frac{(1!)^2(3!)^2\cdots(397!)^2(399!)^2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 398 \cdot 400)}{200!}$$

On exprime donc $2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 398 \cdot 400$ sous la forme $(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot \cdots \cdot (2 \cdot 199) \cdot (2 \cdot 200)$.
Puisqu'il y a 200 ensembles de parenthèses, on obtient

$$N = \frac{(1!)^2(3!)^2\cdots(397!)^2(399!)^2 \cdot 2^{200} \cdot (1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 199 \cdot 200)}{200!}$$

Puisque $1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 199 \cdot 200 = 200!$, alors on peut conclure que

$$N = 2^{200}(1!)^2(3!)^2\cdots(397!)^2(399!)^2$$

Donc,

$$\sqrt{N} = 2^{100}(1!)(3!)\cdots(397!)(399!)$$

ce qui est un produit d'entiers et est donc un entier lui-même.
Puisque $\sqrt{N}$ est un entier, N est un carré parfait, ce qu'il fallait démontrer.

9. (a) Lorsque $a = 5$ et $b = 4$, on obtient $a^2 + b^2 - ab = 5^2 + 4^2 - 5 \cdot 4 = 21$.
Donc, on veut trouver tous les couples d'entiers (K, L) tels que $K^2 + 3L^2 = 21$.
Si $L = 0$, alors $L^2 = 0$, d'où $K^2 = 21$ (ce qui n'admet pas de solutions entières).
Si $L = \pm 1$, alors $L^2 = 1$, d'où $K^2 = 18$ (ce qui n'admet pas de solutions entières).
Si $L = \pm 2$, alors $L^2 = 4$, d'où $K^2 = 9$ ou $K = \pm 3$.
Si $L = \pm 3$, alors $L^2 = 9$. Puisque $3L^2 = 27 > 21$, alors K n'a pas de solutions réelles.
De même, si $L^2 > 9$, alors K n'a pas de solutions réelles.
Donc, les solutions sont $(K, L) = (3, 2), (-3, 2), (3, -2), (-3, -2)$.

(b) Supposons que K et L sont des entiers.
Alors

$$\begin{aligned}(K+L)^2 + (K-L)^2 - (K+L)(K-L) \\ &= (K^2 + 2KL + L^2) + (K^2 - 2KL + L^2) - (K^2 - L^2) \\ &= K^2 + 3L^2\end{aligned}$$

Donc, les entiers $a = K + L$ et $b = K - L$ vérifient l'équation $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$. Donc, pour tous les entiers K et L, il y a au moins un couple d'entiers (a, b) qui vérifie l'équation.

Comment pourrait-on arriver à cela ? Une façon de le faire serait d'essayer de petites valeurs de K et L, de calculer $K^2 + 3L^2$ et d'utiliser ce résultat pour arriver à une déduction (que l'on peut justifier de manière algébrique comme ci-dessus). Voici quelques valeurs :

K	L	$K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$	a	b
1	1	4	2	0
2	1	7	3	1
3	1	12	4	2
1	2	13	3	-1
2	2	16	4	0
3	2	21	5	1

Les colonnes de a et b pourraient nous mener à déduire que $a = K + L$ et $b = K - L$, ce que l'on a déjà démontré ci-dessus.

(c) Supposons que a et b sont des entiers.
Si a est pair, alors $\frac{a}{2}$ est un entier et

$$\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + 3\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot b + b^2 + \frac{3a^2}{4} = a^2 + b^2 - ab$$

Donc, si $K = \frac{a}{2} - b$ et $L = \frac{a}{2}$, alors on a $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$.
Si b est pair, alors $\frac{b}{2}$ est un entier. Donc, un argument algébrique semblable démontre que

$$\left(\frac{b}{2} - a\right)^2 + 3\left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 - ab$$

d'où on a donc que si $K = \frac{b}{2} - a$ et $L = \frac{b}{2}$, alors $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$.
Si a et b sont tous deux impairs, alors $a + b$ et $a - b$ sont tous deux pairs, ce qui signifie que $\frac{a+b}{2}$ et $\frac{a-b}{2}$ sont tous deux des entiers. On a donc

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} + \frac{3a^2 - 6ab + 3b^2}{4} = \frac{4a^2 + 4b^2 - 4ab}{4} = a^2 + b^2 - ab$$

Donc, si $K = \frac{a+b}{2}$ et $L = \frac{a-b}{2}$, on a $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$.
Donc, dans tous les cas, pour tous les entiers a et b, il y a au moins un couple d'entiers (K, L) tel que $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$.

De la même manière que dans (b), on peut déduire des expressions possibles pour K et L

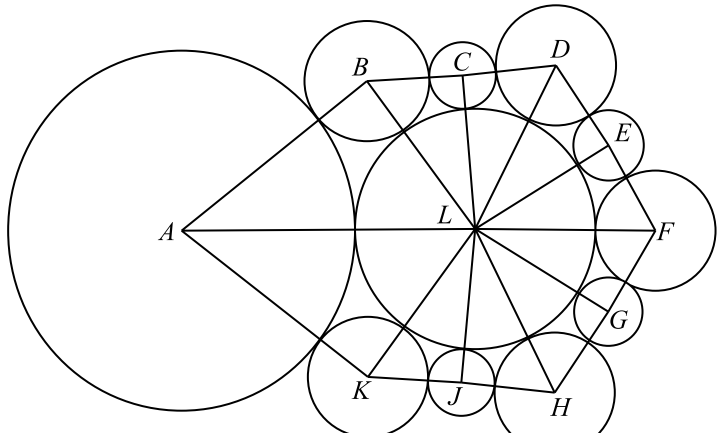
en fonction de a et b :

a	b	$K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$	K	L
1	1	1	1	0
2	1	3	0	1
3	1	7	2	1
4	1	13	1	2
1	2	3	0	1
2	2	4	1	1
3	2	7	2	1
4	2	12	3	1
5	3	19	4	1

Bien qu'il ne semble pas y avoir de régularités utiles au départ, on peut réorganiser les rangées et ajouter des répétitions pour nous permettre de mieux voir une régularité :

a	b	$K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$	K	L
2	1	3	0	1
4	1	13	1	2
2	2	4	1	1
4	2	12	3	1
1	2	3	0	1
3	2	7	2	1
4	2	12	3	1
1	1	1	1	0
3	1	7	2	1
5	3	19	4	1

10. (a) En commençant par le cercle Z et en suivant le sens des aiguilles d'une montre, on nomme les centres des cercles extérieurs comme suit : A, B, C, D, E, F, G, H, J et K. De plus, le centre du cercle Y est nommé L.



On joint L à chacun des points A, B, C, D, E, F, G, H, J et K. On joint A à B, B à C, C à D, D à E, E à F, F à G, G à H, H à J, J à K, et K à A.
Lorsque deux cercles sont tangents l'un à l'autre, la distance entre leurs centres est égale à la somme de leurs rayons.

Donc,

$$\begin{aligned}BC = CD = DE = EF = FG = GH = HJ = JK &= 2 + 1 = 3\\ BL = DL = FL = HL = KL &= 2 + 4 = 6\\ CL = EL = GL = JL &= 1 + 4 = 5\\ AB = AK &= r + 2\\ AL &= r + 4\end{aligned}$$

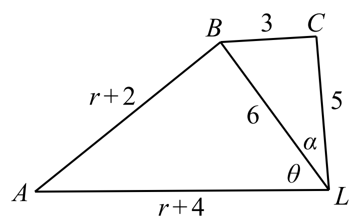
Donc, les triangles suivants sont isométriques puisque leurs côtés sont isométriques deux à deux :

$$BLC, DLC, DLE, FLE, FLG, HLG, HLJ, KLJ$$

De même, les triangles ALB et ALK sont isométriques puisque leurs côtés sont isométriques deux à deux.
Soit $\angle ALB = \theta$ et $\angle BLC = \alpha$.
Puisque les triangles sont isométriques, alors $\angle ALK = \theta$ et

$$\angle BLC = \angle DLC = \angle DLE = \angle FLE = \angle FLG = \angle HLG = \angle HLJ = \angle KLJ = \alpha$$

Puisque les angles autour du point L forment un angle plein, leurs mesures ont donc une somme de 360°, d'où $2\theta + 8\alpha = 360^\circ$ ou $\theta + 4\alpha = 180^\circ$, soit $\theta = 180^\circ - 4\alpha$.
Puisque $\theta = 180^\circ - 4\alpha$, alors $\cos\theta = \cos(180^\circ - 4\alpha) = -\cos 4\alpha$.
Considérons les triangles ALB et BLC.



D'après la loi du cosinus dans le triangle ALB, on a

$$\begin{aligned}AB^2 &= AL^2 + BL^2 - 2\cdot AL\cdot BL\cdot\cos\theta\\ (r+2)^2 &= (r+4)^2 + 6^2 - 2(r+4)(6)\cos\theta\\ 12(r+4)\cos\theta &= r^2 + 8r + 16 + 36 - r^2 - 4r - 4\\ \cos\theta &= \frac{4r+48}{12(r+4)}\\ \cos\theta &= \frac{r+12}{3r+12}\end{aligned}$$

D'après la loi du cosinus dans le triangle BLC, on a

$$\begin{aligned}BC^2 &= BL^2 + CL^2 - 2\cdot BL\cdot CL\cdot\cos\alpha\\ 3^2 &= 6^2 + 5^2 - 2(6)(5)\cos\alpha\\ 60\cos\alpha &= 36 + 25 - 9\\ \cos\alpha &= \frac{52}{60}\\ \cos\alpha &= \frac{13}{15}\end{aligned}$$

Puisque $\cos\alpha = \dfrac{13}{15}$, alors

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1\\ &= 2\cdot\frac{169}{225} - 1\\ &= \frac{338}{225} - \frac{225}{225}\\ &= \frac{113}{225}\end{aligned}$$

et

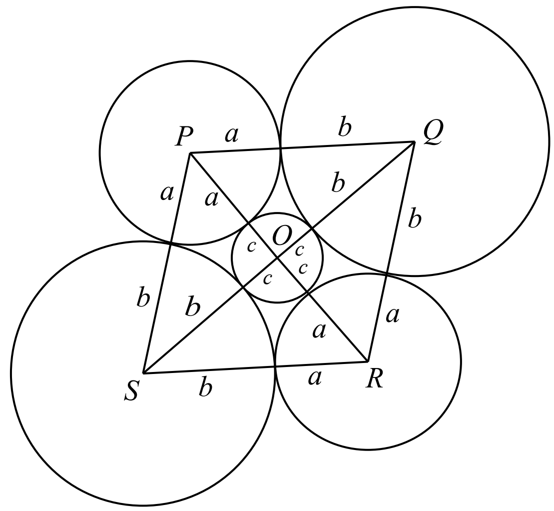
$$\begin{aligned}\cos 4\alpha &= 2\cos^2 2\alpha - 1\\ &= 2\cdot\frac{113^2}{225^2} - 1\\ &= \frac{25\,538}{50\,625} - \frac{50\,625}{50\,625}\\ &= -\frac{25\,087}{50\,625}\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= -\cos 4\alpha\\ \frac{r+12}{3r+12} &= \frac{25\,087}{50\,625}\\ \frac{r+12}{r+4} &= \frac{25\,087}{16\,875}\\ \frac{(r+4)+8}{r+4} &= \frac{25\,087}{16\,875}\\ 1+\frac{8}{r+4} &= \frac{25\,087}{16\,875}\\ \frac{8}{r+4} &= \frac{8212}{16\,875}\\ \frac{2}{r+4} &= \frac{2053}{16\,875}\\ \frac{r+4}{2} &= \frac{16\,875}{2053}\\ r+4 &= \frac{33\,750}{2053}\\ r &= \frac{25\,538}{2053}\end{aligned}$$

Donc, les entiers strictement positifs $s = 25\,538$ et $t = 2053$ remplissent les conditions de l'énoncé.

(b) Soit O le centre du cercle du milieu et soient P, Q, R et S les centres des autres cercles. On joint O à P, à Q, à R et à S. De plus, on joint P à Q, Q à R, R à S, et S à P.



D'après un argument semblable à celui dans la partie (a), on voit que

$$\begin{aligned} OP = OR &= a + c \\ OQ = OS &= b + c \\ PQ = QR = RS = SP &= a + b \end{aligned}$$

De même, les triangles OPQ, OPS, ORQ et ORS sont isométriques puisque leurs côtés sont isométriques deux à deux.
Cela signifie que $\angle POQ = \angle POS = \angle ROQ = \angle ROS$.
Puisque $\angle POQ + \angle POS + \angle ROQ + \angle ROS = 360°$ (ces angles entourent le point O), alors

$$\angle POQ = \frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$$

Donc, le triangle OPQ est rectangle en O.
D'après le théorème de Pythagore, $PQ^2 = OP^2 + OQ^2$. Donc, $(a+b)^2 = (a+c)^2 + (b+c)^2$.
À l'aide de manipulations algébriques, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + c)^2 + (b + c)^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 &= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bc + c^2 \\ 2ab &= 2ac + 2bc + 2c^2 \\ ab &= ac + bc + c^2 \\ ab - ac - bc &= c^2 \\ ab - ac - bc + c^2 &= 2c^2 \\ a(b - c) - c(b - c) &= 2c^2 \\ (a - c)(b - c) &= 2c^2 \end{aligned}$$

Donc, si a, b et c sont des nombres réels qui satisfont aux critères de l'énoncé du problème quant à la manière dont on peut dessiner la figure, alors a, b et c vérifient cette dernière équation.
De plus, si les nombres réels a, b et c vérifient la dernière équation, alors $(a + b)^2 = (a + c)^2 + (b + c)^2$ (car ces équations sont équivalentes). Donc, le triangle ayant pour longueurs de côtés $a + b$, $a + c$ et $b + c$ est donc rectangle et a pour hypoténuse

$a+b$ (car le théorème de Pythagore peut s'appliquer dans les deux sens). Cela signifie qu'on peut assembler quatre de ces triangles de manière à former un losange $PQRS$ ayant $a+b$ pour longueur de chaque côté et O pour centre ; ce qui signifie à son tour que les cinq cercles peuvent être dessinés en indiquant les longueurs appropriées a, b et c et en dessinant les cercles comme dans la figure initiale.
Autrement dit, la figure peut être dessinée uniquement lorsque $(a-c)(b-c)=2c^2$.

Supposons que c est un entier fixe et strictement positif.
Déterminer la valeur de $f(c)$ équivaut donc à compter le nombre de couples d'entiers strictement positifs (a,b) tels que $c<a<b$ et $(a-c)(b-c)=2c^2$.
Puisque a et b sont des entiers tels que $a>c$ et $b>c$, alors les entiers $a-c$ et $b-c$ sont positifs et forment un couple de diviseurs positifs de l'entier $2c^2$.
Puisque $a<b$, on a $a-c<b-c$. Donc, $a-c$ et $b-c$ sont des entiers distincts.
De plus, puisque $c>0$, alors $\sqrt{2c^2}=\sqrt{2}c$, ce qui n'est pas un entier puisque c est un entier. Cela signifie que $2c^2$ n'est pas un carré parfait.
Donc, chaque couple (a,b) correspond à un couple de diviseurs positifs de $2c^2$, à savoir $a-c$ et $b-c$.
De même, chaque couple de diviseurs e et f de $2c^2$ (où $e>f$) donne un couple d'entiers strictement positifs (a,b) où $a<b$ en posant $a=e+c$ et $b=f+c$.
Autrement dit, $f(c)$ est exactement le nombre de couples de diviseurs positifs de $2c^2$. (Rappelons à nouveau que $2c^2$ n'est pas un carré parfait.)
Donc, on veut déterminer tous les entiers strictement positifs c pour lesquels l'entier $2c^2$ a un nombre pair de couples de diviseurs. Cela signifie qu'on veut determiner tous les entiers strictement positifs c pour lesquels le nombre de diviseurs positifs de $2c^2$ est un multiple de 4 (car chaque couple de diviseurs positifs comprend deux diviseurs positifs et le produit de 2 et un entier pair est un multiple de 4).

Supposons que la factorisation première de c est

$$c=2^r p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

k étant un entier quelconque tel que $k\geq 0$, r étant un entier quelconque tel que $r\geq 0$, p_1, p_2, …, p_k étant des nombres premiers impairs quelconques et e_1, e_2, …, e_k étant des entiers strictement positifs quelconques.
Alors

$$2c^2=2^{2r+1} p_1^{2e_1} p_2^{2e_2} \cdots p_k^{2e_k}$$

d'où $2c^2$ a donc

$$(2r+2)(2e_1+1)(2e_2+1)\cdots(2e_k+1)$$

diviseurs posifits.
Le premier facteur de ce produit est pair et chaque facteur après le premier est impair.
Donc, ce produit est un multiple de 4 exactement lorsque $2r+2$ est un multiple de 4.
Cela est vrai exactement quand $2r+2=4s$, s étant un entier strictement positif quelconque, d'où on a $2r=4s-2$ ou $r=2s-1$.
Autrement dit, le nombre de diviseurs positifs de $2c^2$ est un multiple de 4 exactement lorsque r est un entier impair.

Enfin, cela signifie que les entiers strictement positifs pour lesquels $f(c)$ est pair sont ceux qui ont exactement un nombre impair de facteurs 2 dans leur factorisation première.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2020

le mardi 7 avril 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 8 avril 2020
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) *Solution 1*

Si $x \neq -2$, alors $\dfrac{3x+6}{x+2} = \dfrac{3(x+2)}{x+2} = 3$.

Autrement dit, pour toute valeur $x \neq -2$, l'expression est égale à 3.

Donc, lorsque $x = 11$, on a $\dfrac{3x+6}{x+2} = 3$.

Solution 2

Lorsque $x = 11$, on a $\dfrac{3x+6}{x+2} = \dfrac{3(11)+6}{11+2} = \dfrac{39}{13} = 3$.

(b) *Solution 1*

Une droite coupera toujours l'axe des ordonnées en un point dont l'abscisse est 0.
Puisque A a une abscisse de -1 et que B a une abscisse de 1, alors le milieu de AB est situé sur l'axe des ordonnées et sur la droite qui passe aux points A et B, il en est de même pour le point où cette droite coupe l'axe des abscisses.
Le milieu du segment de droite limité par les points $A(-1,5)$ et $B(1,7)$ est $\left(\frac{1}{2}(-1+1), \frac{1}{2}(5+7)\right)$ ou $(0,6)$.

Donc, la droite qui passe aux points $A(-1,5)$ et $B(1,7)$ a pour ordonnée à l'origine 6.

Solution 2

La droite qui passe aux points $A(-1,5)$ et $B(1,7)$ a pour pente $\dfrac{7-5}{1-(-1)} = \dfrac{2}{2} = 1$.

La droite de pente 1 et qui passe au point $B(1,7)$ a pour équation $y - 7 = 1(x-1)$ ou $y = x + 6$.
La droite d'équation $y = x + 6$ a pour ordonnée à l'origine 6.

(c) On détermine d'abord les coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $y = 3x + 7$ et $y = x + 9$.

À ce point, la valeur de y est la même sur les deux droites, donc $3x + 7 = x + 9$, d'où $2x = 2$ ou $x = 1$.
Lorsque $x = 1$, on obtient $y = x + 9 = 10$.
Donc, les deux droites se coupent au point $(1, 10)$.
Puisque les trois droites se coupent toutes en un même point, alors la droite d'équation $y = mx + 17$ passe par $(1, 10)$.
Donc, $10 = m \cdot 1 + 17$, d'où $m = 10 - 17 = -7$.

2. (a) Supposons que a, b et c sont respectivement les chiffres des centaines, des dizaines et des unités de m.
D'après le problème :

- a, b et c sont trois chiffres distincts,
- a, b et c sont chacun inférieurs à 10,
- $a = bc$ et
- c est impair (puisque m est impair).

L'entier $m = 623$ remplit toutes ces conditions. Étant donné qu'il n'existe qu'un tel nombre, 623 est donc la seule réponse.
Pourquoi est-ce la seule valeur possible de m ?
On remarque qu'on ne peut avoir $b = 1$ ou $c = 1$, sinon $a = c$ ou $a = b$.
Donc, $b \geq 2$ et $c \geq 2$.

Puisque $c \geq 2$ et que c est impair, alors c peut être égal à 3, à 5, à 7 ou à 9.
Puisque $b \geq 2$ et $a = bc$, alors a serait supérieur à 10 (ce qui est impossible) si c est égal à 5, à 7 ou à 9. Donc, $c = 3$.
Puisque $b \geq 2$ et $b \neq c$, alors $b = 2$ ou $b \geq 4$.
Si $b \geq 4$ et $c = 3$, alors $a > 10$, ce qui est impossible.
On doit donc avoir $c = 3$ et $b = 2$, d'où $a = 6$.

(b) Puisque Éléonore a un sac de 100 billes (chacune étant noire ou dorée) dont le rapport du nombre de billes noires au nombre de billes dorées est de $1 : 4$, alors $\frac{1}{5}$ de ses billes sont noires. Donc, Éléonore a $\frac{1}{5} \cdot 100 = 20$ billes noires.

Lorsqu'elle rajoute des billes dorées, le rapport du nombre de billes noires au nombre de billes dorées devient $1 : 6$. Donc, Éléonore a $6 \cdot 20 = 120$ billes dorées.
Éléonore a donc $20 + 120 = 140$ billes en tout, ce qui veut dire qu'elle a rajouté $140 - 100$ ou 40 billes dorées.

(c) On voit d'abord que $\dfrac{n^2+n+15}{n} = \dfrac{n^2}{n} + \dfrac{n}{n} + \dfrac{15}{n} = n + 1 + \dfrac{15}{n}$.

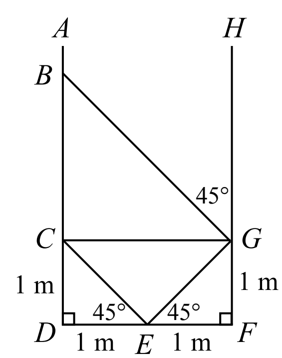
Donc, $\dfrac{n^2+n+15}{n}$ est un entier uniquement lorsque $n + 1 + \dfrac{15}{n}$ est un entier.

Puisque $n + 1$ est un entier, alors $\dfrac{n^2+n+15}{n}$ est un entier uniquement lorsque $\dfrac{15}{n}$ est un entier.

L'expression $\dfrac{15}{n}$ est un entier uniquement lorsque n est un diviseur de 15.

Puisque n est un entier strictement positif, alors les valeurs possibles de n sont 1, 3, 5 et 15.

3. (a) Remarquons d'abord qu'un triangle dont deux angles mesurent 45° et 90° est un triangle isocèle car le troisième angle a une mesure égale à $180° - 90° - 45° = 45°$. Le triangle a donc deux angles isométriques.
De façon particulière, le triangle CDE est isocèle et $CD = DE$ et le triangle EFG est isocèle et $EF = FG$.
Puisque $DE = EF = 1$ m, alors $CD = FG = 1$ m.
On relie C et G.



Considérons le quadrilatère $CDFG$. Puisque les angles aux sommets D et F sont droits et que $CD = GF$, $CDFG$ doit donc être un rectangle.
Cela signifie que $CG = DF = 2$ m et que les angles aux sommets C et G sont droits.
Puisque $\angle CGF = 90°$ et $\angle DCG = 90°$, alors $\angle BGC = 180° - 90° - 45° = 45°$ et $\angle BCG = 90°$.
Le triangle BCG est donc isocèle et $BC = CG = 2$ m.
Finalement, $BD = BC + CD = 2 \text{ m} + 1 \text{ m} = 3$ m.

(b) On applique le procédé deux fois de plus :

	x	y
Avant l'Étape 1	24	3
Après l'Étape 1	27	3
Après l'Étape 2	81	3
Après l'Étape 3	81	4

	x	y
Avant l'Étape 1	81	4
Après l'Étape 1	85	4
Après l'Étape 2	340	4
Après l'Étape 3	340	5

Donc, x a une valeur finale de 340.

(c) La parabole d'équation $y = kx^2 + 6x + k$ a deux abscisses à l'origine distinctes uniquement lorsque le discriminant de l'équation quadratique $kx^2 + 6x + k = 0$ est positif.
Dans ce cas, le discriminant est égal à $\Delta = 6^2 - 4 \cdot k \cdot k = 36 - 4k^2$.
L'inéquation $36 - 4k^2 > 0$ est équivalente à $k^2 < 9$.
Puisque k est un entier et que $k \neq 0$, alors k peut être égal à $-2, -1, 1, 2$.
(Si $k \geq 3$ ou $k \leq -3$, on obtient $k^2 \geq 9$. Donc aucunes valeurs de k dans ces intervalles ne donnent le résultat souhaité.)

4. (a) Puisque $\frac{a}{b} < \frac{4}{7}$ et que $\frac{4}{7} < 1$, alors $\frac{a}{b} < 1$.
Puisque a et b sont des entiers strictement positifs, alors $a < b$.
Puisque a et b ont une différence de 15 et que $a < b$, alors $b = a + 15$.
On a donc $\frac{5}{9} < \frac{a}{a+15} < \frac{4}{7}$.
On multiplie les deux membres de l'inéquation de gauche par $9(a + 15)$ (ce qui est positif) pour obtenir $5(a + 15) < 9a$ d'où on a $5a + 75 < 9a$ ou $4a > 75$.
On voit d'après cela que $a > \frac{75}{4} = 18{,}75$.
Puisque a est un entier, alors $a \geq 19$.
On multiplie les deux membres de l'inéquation de droite par $7(a + 15)$ (ce qui est positif) pour obtenir $7a < 4(a + 15)$ d'où on a $7a < 4a + 60$ ou $3a < 60$.
On voit d'après cela que $a < 20$.
Puisque a est un entier, alors $a \leq 19$.
Puisque $a \geq 19$ et que $a \leq 19$, alors $a = 19$, d'où $\frac{a}{b} = \frac{19}{34}$.

(b) Les 6 premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 10 sont : 10, 5, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{16}$.
Dans ce cas, le rapport du 6^{e} terme de la suite géométrique au 4^{e} terme est $\frac{5/16}{5/4}$, soit $\frac{1}{4}$.
(Par ailleurs, on aurait pu déterminer ce rapport sans écrire la suite en prenant conscience qu'on doit multiplier par $\frac{1}{2}$ deux fois en passant du 4^{e} terme au 6^{e} terme.)
Les 6 premiers termes d'une suite arithmétique de raison d et de premier terme 10 sont : 10, $10 + d$, $10 + 2d$, $10 + 3d$, $10 + 4d$, $10 + 5d$.
Dans ce cas, le rapport du 6^{e} terme de la suite arithmétique au 4^{e} terme est $\frac{10 + 5d}{10 + 3d}$.
Puisque ces rapports sont égaux, alors $\frac{10 + 5d}{10 + 3d} = \frac{1}{4}$.
On a donc $4(10 + 5d) = 10 + 3d$, d'où $40 + 20d = 10 + 3d$ ou $17d = -30$, soit $d = -\frac{30}{17}$.

5. (a) Soit $a = f(20)$. Alors $f(f(20)) = f(a)$.
Pour calculer $f(f(20))$, on détermine la valeur de a et ensuite celle de $f(a)$.
Par définition, $a = f(20)$ est le nombre de nombres premiers p qui vérifient $20 \leq p \leq 30$.
Les nombres premiers dans l'intervalle de 20 à 30 sont 23 et 29. Donc, $a = f(20) = 2$.
Donc, $f(f(20)) = f(a) = f(2)$.
Par définition, $f(2)$ est le nombre de nombres premiers p qui vérifient $2 \leq p \leq 12$.
Il y a 5 nombres premiers dans l'intervalle de 2 à 12, soit 2, 3, 5, 7, 11.
Donc, $f(f(20)) = 5$.

(b) Puisque $(x-1)(y-2) = 0$, alors $x = 1$ or $y = 2$.
Supposons que $x = 1$. Dans ce cas, les équations restantes sont :

$$\begin{aligned} (1-3)(z+2) &= 0 \\ 1 + yz &= 9 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} -2(z+2) &= 0 \\ yz &= 8 \end{aligned}$$

D'après la première équation, $z = -2$.
D'après la seconde équation, $y(-2) = 8$, d'où $y = -4$.
Donc, si $x = 1$, la seule solution est $(x, y, z) = (1, -4, -2)$.
Supposons que $y = 2$. Dans ce cas, les équations restantes sont :

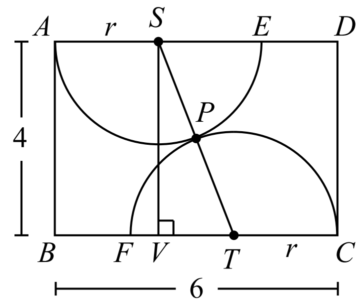
$$\begin{aligned} (x-3)(z+2) &= 0 \\ x + 2z &= 9 \end{aligned}$$

D'après la première équation, $x = 3$ ou $z = -2$.
Si $x = 3$, alors $3 + 2z = 9$, d'où $z = 3$.
Si $z = -2$, alors $x + 2(-2) = 9$, d'où $x = 13$.
Donc, si $y = 2$, les solutions sont $(x, y, z) = (3, 2, 3)$ et $(x, y, z) = (13, 2, -2)$.
Pour résumer, les solutions qui vérifient le système d'équations sont :

$$(x, y, z) = (1, -4, -2),\ (3, 2, 3),\ (13, 2, -2)$$

On peut confirmer par substitution que chacun des triplets vérifie bel et bien chacune des équations.

6. (a) On abaisse une perpendiculaire de S jusqu'à V sur BC.
Puisque le quadrilatère $ASVB$ a trois angles droits, son quatrième angle doit également être droit. Le quadrilatère est donc un rectangle.
Donc, $BV = AS = r$ puisque AS est un rayon du demi-cercle supérieur.
De plus, $SV = AB = 4$.
On joint les points S et T au point P. Puisque les deux demi-cercles sont tangents en P, alors SPT est une droite, d'où on a donc $ST = SP + PT = r + r = 2r$.



Considérons le triangle rectangle SVT. On a $SV = 4$ et $ST = 2r$.
De plus, $VT = BC - BV - TC = 6 - r - r = 6 - 2r$.
D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} SV^2 + VT^2 &= ST^2 \\ 4^2 + (6-2r)^2 &= (2r)^2 \\ 16 + 36 - 24r + 4r^2 &= 4r^2 \\ 52 &= 24r \end{aligned}$$

Donc, $r = \frac{52}{24} = \frac{13}{6}$.

(b) Puisque le triangle ABE est rectangle en A et est isocèle avec $AB = AE = 7\sqrt{2}$, alors le triangle ABE est un triangle 45°-45°-90°, d'où $\angle ABE = 45°$ et $BE = \sqrt{2}AB = \sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}$ ou $BE = 14$.
Puisque le triangle BCD est rectangle en C avec $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{8x}{4x} = 2$, alors le triangle BCD est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°, d'où $\angle DBC = 30°$.
Puisque $\angle ABC = 135°$, alors $\angle EBD = \angle ABC - \angle ABE - \angle DBC = 135° - 45° - 30° = 60°$.
Considérons maintenant le triangle EBD. On a $EB = 14$, $BD = 8x$, $DE = 8x - 6$ et $\angle EBD = 60°$.
D'après la loi du cosinus, on a donc les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} DE^2 &= EB^2 + BD^2 - 2 \cdot EB \cdot BD \cdot \cos(\angle EBD) \\ (8x-6)^2 &= 14^2 + (8x)^2 - 2(14)(8x)\cos(60°) \\ 64x^2 - 96x + 36 &= 196 + 64x^2 - 2(14)(8x) \cdot \tfrac{1}{2} \\ -96x &= 160 - 14(8x) \\ 112x - 96x &= 160 \\ 16x &= 160 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Donc, la seule valeur possible de x est $x = 10$.

7. (a) *Solution 1*

Puisque la fonction g est linéaire et a une pente positive, cette fonction est donc biunivoque et est donc inversible.
Cela signifie que $g^{-1}(g(a)) = a$ pour tout nombre réel a et que $g(g^{-1}(b)) = b$ pour tout nombre réel b.
Donc, $g(f(g^{-1}(g(a)))) = g(f(a))$ pour tout nombre réel a.
Donc,

$$\begin{aligned} g(f(a)) &= g(f(g^{-1}(g(a)))) \\ &= 2(g(a))^2 + 16g(a) + 26 \\ &= 2(2a-4)^2 + 16(2a-4) + 26 \\ &= 2(4a^2 - 16a + 16) + 32a - 64 + 26 \\ &= 8a^2 - 6 \end{aligned}$$

De plus, si $b = f(a)$, alors $g^{-1}(g(f(a))) = g^{-1}(g(b)) = b = f(a)$.
Donc,

$$f(a) = g^{-1}(g(f(a))) = g^{-1}(8a^2 - 6)$$

Puisque $g(x) = 2x - 4$, alors $y = 2g^{-1}(y) - 4$, d'où $g^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + 2$.
Donc,

$$f(a) = \tfrac{1}{2}(8a^2 - 6) + 2 = 4a^2 - 1$$

d'où $f(\pi) = 4\pi^2 - 1$.

Solution 2

Puisque la fonction g est linéaire et a une pente positive, cette fonction est donc biunivoque et est donc inversible.
Afin de trouver une formule pour $g^{-1}(y)$, on commence avec l'équation $g(x) = 2x - 4$ que l'on convertit à $y = 2g^{-1}(y) - 4$ et dans laquelle on isole $g^{-1}(y)$ pour obtenir $2g^{-1}(y) = y + 4$ ou $g^{-1}(y) = \dfrac{y+4}{2}$.
Étant donné que $g(f(g^{-1}(x))) = 2x^2 + 16x + 26$, on applique la fonction g^{-1} aux deux membres de l'équation pour obtenir successivement :

$$\begin{aligned} f(g^{-1}(x)) &= g^{-1}(2x^2 + 16x + 26) \\ f(g^{-1}(x)) &= \frac{(2x^2 + 16x + 26) + 4}{2} \qquad \text{(ayant une formule pour } g^{-1}) \\ f(g^{-1}(x)) &= x^2 + 8x + 15 \\ f\left(\frac{x+4}{2}\right) &= x^2 + 8x + 15 \qquad \text{(ayant une formule pour } g^{-1}) \\ f\left(\frac{x+4}{2}\right) &= x^2 + 8x + 16 - 1 \\ f\left(\frac{x+4}{2}\right) &= (x+4)^2 - 1 \end{aligned}$$

On veut déterminer la valeur de $f(\pi)$.
On peut donc remplacer $\dfrac{x+4}{2}$ avec π, ce qui revient à remplacer $x + 4$ avec 2π.
Donc, $f(\pi) = (2\pi)^2 - 1 = 4\pi^2 - 1$.

(b) *Solution 1*

En utilisant les lois des logarithmes, les équations données sont équivalentes à :

$$\log_2(\sin x) + \log_2(\cos y) = -\frac{3}{2}$$
$$\log_2(\sin x) - \log_2(\cos y) = \frac{1}{2}$$

En additionnant ces deux équations, on obtient $2\log_2(\sin x) = -1$, d'où $\log_2(\sin x) = -\frac{1}{2}$.

Donc, $\sin x = 2^{-1/2} = \frac{1}{2^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Puisque $0^\circ \leq x < 180^\circ$, alors $x = 45^\circ$ ou $x = 135^\circ$.

Puisque $\log_2(\sin x) + \log_2(\cos y) = -\frac{3}{2}$ et $\log_2(\sin x) = -\frac{1}{2}$, alors $\log_2(\cos y) = -1$, d'où $\cos y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Puisque $0^\circ \leq y < 180^\circ$, alors $y = 60^\circ$.

Donc, $(x, y) = (45^\circ, 60^\circ)$ ou $(x, y) = (135^\circ, 60^\circ)$.

Solution 2

Remarquons d'abord que $2^{1/2} = \sqrt{2}$ et que $2^{-3/2} = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{2^1 2^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

À partir partir des équations données, on obtient :

$$\sin x \cos y = 2^{-3/2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$\frac{\sin x}{\cos y} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

En multipliant ces deux équations ensemble, on obtient $(\sin x)^2 = \frac{1}{2}$, d'où $\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Puisque $0^\circ \leq x < 180^\circ$, on doit donc avoir $\sin x \geq 0$, donc $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Puisque $0^\circ \leq x < 180^\circ$, on obtient $x = 45^\circ$ ou $x = 135^\circ$.

Puisque $\sin x \cos y = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et que $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient $\cos y = \frac{1}{2}$.

Puisque $0^\circ \leq y < 180^\circ$, alors $y = 60^\circ$.

Donc, $(x, y) = (45^\circ, 60^\circ)$ ou $(x, y) = (135^\circ, 60^\circ)$.

8. (a) *Solution 1*

Soit x la probabilité que Bianca remporte le titre de champion du tournoi.

Puisque Alain, Bianca et Chen sont tous les trois des joueurs de même niveau et puisque leurs rôles dans le tournoi sont identiques, alors chacun d'eux a la même probabilité de remporter le titre de champion du tournoi.

Donc, la probabilité qu'Alain remporte le titre de champion du tournoi est égale à x et la probabilité que Chen remporte le titre de champion du tournoi est égale à x.

Soit y la probabilité que Dave remporte le titre de champion du tournoi.

Puisque uniquement l'un des quatre joueurs peut remporter le titre de champion du tournoi, alors $3x + y = 1$, d'où $x = \frac{1 - y}{3}$. On peut exprimer y en fonction de p.

Dave doit gagner deux matchs afin de remporter le titre de champion du tournoi.
Peu importe le joueur que Dave affronte lors d'un match, sa probabilité de victoire est égale à p.
Donc, la probabilité qu'il gagne ses deux matchs consécutifs est égale à p^2. Donc, la probabilité qu'il remporte le titre de champion du tournoi est de $y = p^2$.
Donc, la probabilité que Bianca remporte le titre de champion du tournoi est égale à $\dfrac{1-p^2}{3}$.
(Ce que l'on peut récrire sous la forme souhaitée de la manière suivante : $\dfrac{-p^2+0p+1}{3}$.)

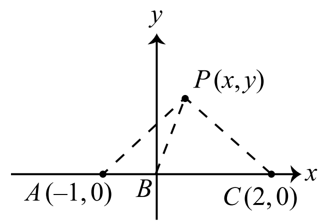
Solution 2
Soit x la probabilité que Bianca remporte le titre de champion du tournoi.
Pour les deux premiers matchs, les joueurs peuvent s'affronter selon les trois appariements suivants :
(i) Bianca affronte Alain et Chen affronte Dave
(ii) Bianca affronte Chen et Alain affronte Dave
(iii) Bianca affronte Dave et Alain affronte Chen
Chacun de ces trois appariements a une probabilité d'occurrence de $\frac{1}{3}$.
Dans l'appariement (i), Bianca sortira vainqueuse soit si Bianca bat Alain, Chen bat Dave et Bianca bat Chen, soit si Bianca bat Alain, Dave bat Chen et Bianca bat Dave.
Puisque la probabilité que Bianca batte Alain est égale à $\frac{1}{2}$, que la probabilité que Chen batte Dave est égale à $1-p$ et que la probabilité que Bianca batte Chen est égale à $\frac{1}{2}$, alors la première possibilité a une probabilité égale à $\frac{1}{2}\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2}$.
Puisque la probabilité que Bianca batte Alain est égale à $\frac{1}{2}$, que la probabilité que Dave batte Chen est égale à p et que la probabilité que Bianca batte Dave est égale à $1-p$, alors la deuxième possibilité a une probabilité égale à $\frac{1}{2}\cdot p\cdot(1-p)$.
Donc, la probabilité que Bianca sortira vainqueuse dans l'appariement (i) est égale à $\frac{1}{2}\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot p\cdot(1-p)$.

Dans l'appariement (ii), Bianca sortira vainqueuse soit si Bianca bat Chen, Alain bat Dave et Bianca bat Alain, soit si Bianca bat Alain, Dave bat Alain et Bianca bat Dave.
La probabilité combinée de ces possibilités est égale à $\frac{1}{2}\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot p\cdot(1-p)$.
Dans l'appariement (iii), Bianca sortira vainqueuse soit si Bianca bat Dave, Alain bat Chen et Bianca bat Alain, soit si Bianca bat Dave, Chen bat Alain et Bianca bat Chen.
La probabilité combinée de ces possibilités est égale à $(1-p)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+(1-p)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.
Donc,

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{4}(1-p)+\tfrac{1}{2}p(1-p)+\tfrac{1}{4}(1-p)+\tfrac{1}{2}p(1-p)+\tfrac{1}{4}(1-p)+\tfrac{1}{4}(1-p)\right) \\ &= \tfrac{1}{3}(p(1-p)+(1-p)) \\ &= \tfrac{1}{3}(p-p^2+1-p) \end{aligned}$$

Donc, la probabilité que Bianca remporte le titre de champion du tournoi est égale à $\dfrac{1-p^2}{3}$.

(b) Quoiqu'on n'inclura généralement pas les unités dans les calculs de notre solution, soient toutes les longueurs en kilomètres, toutes les heures en secondes et toutes les vitesses en kilomètres par seconde.
On place les points dans le plan cartésien avec B à l'origine $(0,0)$, A sur la partie négative de l'axe des abscisses et C sur la partie positive de l'axe des abscisses.
On place A à $(-1,0)$ et C à $(2,0)$.
Supposons que P a pour coordonnées (x,y) et que la distance de P à B est égale à d km.



Puisque le son arrive à A $\frac{1}{2}$ s après qu'il soit arrivé à B et que le son voyage à une vitesse de $\frac{1}{3}$ km/s, alors A est situé à $(\frac{1}{2}\text{ s})\cdot(\frac{1}{3}\text{ km/s}) = \frac{1}{6}$ km de plus du point P que ne l'est le point B.
Donc, la distance de P à A est égale à $(d+\frac{1}{6})$ km.
Puisque le son arrive à C 1 s après qu'il soit arrivé à A, alors C est situé à $\frac{1}{3}$ km de plus du point P que ne l'est le point A. Donc, C est situé à $(d+\frac{1}{6})\text{ km}+(\frac{1}{3}\text{ km}) = (d+\frac{1}{2})$ km de P.

Puisque la distance de P à B est égale à d km, alors $(x-0)^2+(y-0)^2 = d^2$.

Puisque la distance de P à A est égale à $(d+\frac{1}{6})$ km, alors $(x+1)^2+(y-0)^2 = (d+\frac{1}{6})^2$.

Puisque la distance de P à C est égale à $(d+\frac{1}{2})$ km, alors $(x-2)^2+(y-0)^2 = (d+\frac{1}{2})^2$.

On développe et on simplifie ces équations pour obtenir :

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= d^2 \\ x^2+2x+1+y^2 &= d^2+\tfrac{1}{3}d+\tfrac{1}{36} \\ x^2-4x+4+y^2 &= d^2+d+\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Lorsqu'on soustrait la première équation de la deuxième, on obtient :

$$2x+1 = \tfrac{1}{3}d+\tfrac{1}{36}$$

Lorsqu'on soustrait la première équation de la troisième, on obtient :

$$-4x+4 = d+\tfrac{1}{4}$$

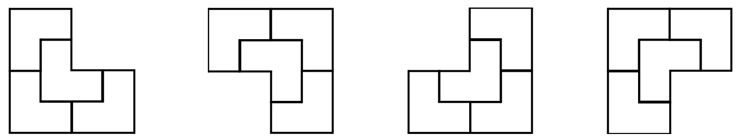
Donc,

$$\begin{aligned} 2(2x+1)+(-4x+4) &= 2(\tfrac{1}{3}d+\tfrac{1}{36})+(d+\tfrac{1}{4}) \\ 6 &= \tfrac{2}{3}d+\tfrac{1}{18}+d+\tfrac{1}{4} \\ 216 &= 24d+2+36d+9 \qquad \text{(en multipliant par 36)} \\ 205 &= 60d \\ d &= \tfrac{41}{12} \end{aligned}$$

Donc, la distance entre le microphone B et le point P est de $\frac{41}{12}$ km.

9. (a) À chaque tour, on subdivise chacune des formes L en quatre L plus petits.
Cela signifie que le nombre de formes L augmente par un facteur de 4 après chaque tour.
Après la première subdivision, il y a 4 formes L.
Après qu'il y ait eu deux subdivisions, il y a $4^2 = 16$ L de la plus petite taille.
Après qu'il y ait eu trois subdivisions, il y a $4^3 = 64$ L de la plus petite taille.

(b) Les formes en L ont quatre orientations possibles : , , , .
Lorsqu'on subdivise un L de chacune des orientations, on obtient les figures suivantes :



À partir de ces figures, on voit qu'après chaque tour subséquent,
- Chaque produit 2 , 0 , 1 et 1 de la plus petite taille.
- Chaque produit 0 , 2 , 1 et 1 .
- Chaque produit 1 , 1 , 2 et 0 .
- Chaque produit 1 , 1 , 0 et 2 .

Après 1 subdivision, on a 2 , 0 , 1 et 1 .
Après 2 subdivisions, le nombre de L de chaque orientation est comme suit :
- : $2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 6$
- : $2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$
- : $2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 4$
- : $2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 4$

Après 3 subdivisions, le nombre de L de chaque orientation est comme suit :
- : $6 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 20$
- : $6 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 12$
- : $6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 16$
- : $6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 16$

D'où viennent ces nombres ?

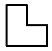
Par exemple, pour déterminer le nombre de après 2 subdivisions, on considère le nombre de L de chaque orientation après la première subdivision (2, 0, 1, 1) et on se demande combien de chacun d'eux produira au niveau suivant. Puisque les quatre types produisent chacun 2, 0, 1 et 1 , alors le nombre total de après qu'il y ait eu 2 subdivisions est égal à $2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$, soit 6.

À titre d'exemple supplémentaire, pour déterminer le nombre de après 3 subdivisions, on remarque qu'après 2 subdivisions le nombre de L des quatre orientations différentes est 6, 2, 4, 4 et que chaque L de chacun des quatre types produit 0, 2, 1, 1 . Cela signifie que le nombre total de après qu'il y ait eu 3 subdivisions est égal à

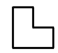
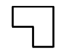
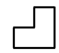
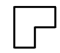
$$6 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 12$$

En combinant tout cela, il y a 20 L de la plus petite taille qui sont orientés de la même manière que le L d'origine.

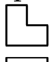
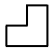
(c) Dans la partie (b), on avait déterminé le nombre de L de la plus petite taille de chaque orientation après qu'il y ait eu 1, 2 et 3 subdivisions.
Déterminons maintenant le nombre de L de la plus petite taille après la 4ᵉ subdivision.
Après 4 subdivisions, le nombre de L de chaque orientation est comme suit :

-  : $20 \cdot 2 + 12 \cdot 0 + 16 \cdot 1 + 16 \cdot 1 = 72$
-  : $20 \cdot 0 + 12 \cdot 2 + 16 \cdot 1 + 16 \cdot 1 = 56$
-  : $20 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 16 \cdot 2 + 16 \cdot 0 = 64$
-  : $20 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 16 \cdot 0 + 16 \cdot 2 = 64$

Dans le tableau suivant, on rassemble les données quant aux nombres de L de la plus petite taille de chaque orientation pour les 4 premières subdivisions :

Après la subdivision				
1	2	0	1	1
2	6	2	4	4
3	20	12	16	16
4	72	56	64	64

On récrit les nombres de la troisième rangée : $16+4, 16-4, 16, 16$. On récrit également les nombres de la quatrième rangée : $64+8, 64-8, 64, 64$.
Sur cette base, on peut deviner que le nombre de L de la plus petite taille de chaque orientation après n subdivisions est $4^{n-1}+2^{n-1}$, $4^{n-1}-2^{n-1}$, 4^{n-1}, 4^{n-1}.
Si cette supposition est correcte, alors après la 2020ᵉ subdivision il doit y avoir $4^{2019}+2^{2019}$ L de la plus petite taille qui sont orientés de la même manière que le L d'origine.
On peut prouver la véracité de ces suppositions à l'aide d'un raisonnement inductif.
On remarque d'abord que le tableau ci-dessus soutient notre supposition lorsque $n = 1$, 2, 3, 4.
Ensuite, si on peut montrer que le fait que notre supposition est correcte après un nombre donné de subdivisions signifie qu'elle sera correcte après la prochaine subdivision, alors elle sera correcte après chaque subdivision. (Car si notre supposition est correcte après 4 subdivisions, cela signifie qu'elle sera correcte après 5 subdivisions. De même, si notre supposition est correcte après 5 subdivisions, cela signifie qu'elle sera correcte après 6 subdivisions, et ainsi de suite de manière à être correcte après n'importe quel nombre de subdivisions.)
Supposons donc qu'après qu'il y ait eu k subdivisions, on a les nombres suivants de L de la plus petite taille pour chaque orientation : $4^{k-1}+2^{k-1}$, $4^{k-1}-2^{k-1}$, 4^{k-1}, 4^{k-1}.
Après $k+1$ subdivisions (c'est-à-dire après la prochaine subdivision), le nombre de L de chaque orientation est comme suit :

-  : $(4^{k-1}+2^{k-1}) \cdot 2 + (4^{k-1}-2^{k-1}) \cdot 0 + 4^{k-1} \cdot 1 + 4^{k-1} \cdot 1 = 4 \cdot 4^{k-1} + 2 \cdot 2^{k-1} = 4^k + 2^k$
-  : $(4^{k-1}+2^{k-1}) \cdot 0 + (4^{k-1}-2^{k-1}) \cdot 2 + 4^{k-1} \cdot 1 + 4^{k-1} \cdot 1 = 4 \cdot 4^{k-1} - 2 \cdot 2^{k-1} = 4^k - 2^k$
-  : $(4^{k-1}+2^{k-1}) \cdot 1 + (4^{k-1}-2^{k-1}) \cdot 1 + 4^{k-1} \cdot 2 + 4^{k-1} \cdot 0 = 4 \cdot 4^{k-1} = 4^k$
-  : $(4^{k-1}+2^{k-1}) \cdot 1 + (4^{k-1}-2^{k-1}) \cdot 1 + 4^{k-1} \cdot 0 + 4^{k-1} \cdot 2 = 4 \cdot 4^{k-1} = 4^k$

Puisque $k = (k+1) - 1$, ces expressions soutiennent notre supposition. Donc, notre supposition est correcte après n'importe quel nombre de subdivisions.
Donc, après qu'il y ait eu 2020 subdivisions, il y a $4^{2019} + 2^{2019}$ L de la plus petite taille qui sont orientés de la même manière que le L d'origine.

10. (a) Par souci de simplicité, soit l'expression « somme par paire » dans notre solution synonyme de la somme des entiers d'un couple possible d'entiers dans une liste de nombres.
Dans ce cas, les sommes par paires des nombres $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ sont

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4 \leq s_5 \leq s_6$$

On peut exprimer les six sommes par paires des nombres de la liste de la manière suivante :

$$a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_1 + a_4, a_2 + a_3, a_2 + a_4, a_3 + a_4$$

Puisque $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, alors la plus petite somme doit être celle des deux nombres les plus petits. Donc, $s_1 = a_1 + a_2$.
De même, la plus grande somme doit être la somme des deux nombres les plus grands, d'où $s_6 = a_3 + a_4$.
Puisque $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, alors la deuxième plus petite somme est $a_1 + a_3$ car $a_1 + a_3$ n'est pas supérieur à chacune des quatre sommes $a_1 + a_4$, $a_2 + a_3$, $a_2 + a_4$ et $a_3 + a_4$:

Puisque $a_3 \leq a_4$, alors $a_1 + a_3 \leq a_1 + a_4$.
Puisque $a_1 \leq a_2$, alors $a_1 + a_3 \leq a_2 + a_3$.
Puisque $a_1 \leq a_2$ et $a_3 \leq a_4$, alors $a_1 + a_3 \leq a_2 + a_4$.
Puisque $a_1 \leq a_4$, alors $a_1 + a_3 \leq a_3 + a_4$.

Donc, $s_2 = a_1 + a_3$.
D'après un argument semblable, $s_5 = a_2 + a_4$.
Jusqu'ici, on a $s_1 = a_1 + a_2$, $s_2 = a_1 + a_3$, $s_5 = a_2 + a_4$ et $s_6 = a_3 + a_4$.
Cela signifie que s_3 et s_4 sont égaux à $a_1 + a_4$ et à $a_2 + a_3$ dans un ordre quelconque (car il s'avère que les deux ordres sont possibles).

1^er^ cas : $s_3 = a_1 + a_4$ et $s_4 = a_2 + a_3$
Dans ce cas, $a_1 + a_2 = 8$, $a_1 + a_3 = 104$ et $a_2 + a_3 = 110$.
Lorsqu'on additionne ces trois équations, on obtient :

$$(a_1 + a_2) + (a_1 + a_3) + (a_2 + a_3) = 8 + 104 + 110$$

d'où $2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 222$ ou $a_1 + a_2 + a_3 = 111$.
Puisque $a_2 + a_3 = 110$, alors $a_1 = (a_1 + a_2 + a_3) - (a_2 + a_3) = 111 - 110 = 1$.
Puisque $a_1 = 1$ et $a_1 + a_2 = 8$, alors $a_2 = 7$.
Puisque $a_1 = 1$ et $a_1 + a_3 = 104$, alors $a_3 = 103$.
Puisque $a_3 = 103$ et $a_3 + a_4 = 208$, alors $a_4 = 105$.
Donc, $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 7, 103, 105)$.

2^e^ cas : $s_3 = a_2 + a_3$ et $s_4 = a_1 + a_4$
Dans ce cas, $a_1 + a_2 = 8$, $a_1 + a_3 = 104$ et $a_2 + a_3 = 106$.
En utilisant le même processus, $a_1 + a_2 + a_3 = 109$.
D'où on obtient $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (3, 5, 101, 107)$.

Donc, les deux listes possibles de Kerry sont $1, 7, 103, 105$ et $3, 5, 101, 107$.

(b) Supposons que les valeurs de $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}$ soient fixes mais inconnues. En fonction des nombres $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$, les dix sommes par paires sont :

$$a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_1 + a_4, a_1 + a_5, a_2 + a_3, a_2 + a_4, a_2 + a_5, a_3 + a_4, a_3 + a_5, a_4 + a_5$$

Ces derniers seront égaux à $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}$ dans un certain ordre.
En utilisant une analyse similaire à celle de la partie (a), la plus petite somme est $a_1 + a_2$ tandis que la plus grande somme est $a_4 + a_5$. Donc, $s_1 = a_1 + a_2$ et $s_{10} = s_4 + s_5$.
De plus, la deuxième plus petite somme sera $s_2 = a_1 + a_3$ tandis que la deuxième plus grande somme sera $s_9 = a_3 + a_5$.
Soit

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8 + s_9 + s_{10}$$

On remarque que S a une valeur fixe mais inconnue.
Même si on ne connaît pas l'ordre dans lequel ces sommes par paires sont affectées à s_1 jusqu'à s_{10}, la valeur de S sera tout de même égale à la somme de ces dix sommes par paires.
Autrement dit, $S = 4a_1 + 4a_2 + 4a_3 + 4a_4 + 4a_5$, puisque chacun des nombres de la liste est compris dans quatre sommes.
Donc, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{4}S$ ou $(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5) = \frac{1}{4}S$.
Cela signifie que $s_1 + a_3 + s_{10} = \frac{1}{4}S$, d'où $a_3 = \frac{1}{4}S - s_1 - s_{10}$.
Puisque les valeurs de s_1, s_{10} et S sont fixes, donc on peut déterminer la valeur de a_3 d'après la liste des sommes de s_1 jusqu'à s_{10}.
En utilisant la valeur de a_3, et sachant que $s_2 = a_1 + a_3$ et $s_9 = a_3 + a_5$ et que s_2 et s_9 sont connus, on peut déterminer a_1 et a_5.
Finalement, en utilisant $s_1 = a_1 + a_2$ et $s_{10} = a_4 + a_5$ et les valeurs de a_1 et a_5, on peut déterminer a_2 et a_4.
Donc, étant donné les dix sommes s_1 jusqu'à s_{10}, on peut déterminer les valeurs de a_3, a_1, a_5, a_2 et a_4, d'où il n'y a qu'une seule liste a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 possible. (Pouvez-vous écrire des expressions pour chacun de a_1 à a_5 uniquement en fonction de s_1 à s_{10} ?)

(c) Supposons que les listes a_1, a_2, a_3, a_4 et b_1, b_2, b_3, b_4 produisent la même liste de sommes s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6. (On peut trouver des exemples de telles listes dans la partie (a).)
Soit x un entier strictement positif. Considérons la liste suivante de 8 termes :

$$a_1, a_2, a_3, a_4, b_1 + x, b_2 + x, b_3 + x, b_4 + x$$

On voit qu'il y a trois catégories de sommes par paires dans cette liste :
(i) $a_i + a_j$, $1 \leq i < j \leq 4$: d'où on obtient les sommes de s_1 à s_6
(ii) $(b_i + x) + (b_j + x)$, $1 \leq i < j \leq 4$: chacun de ces derniers est $2x$ plus grand que les six sommes de s_1 à s_6 car on obtient ces six sommes à partir des sommes par paires $b_i + b_j$
(iii) $a_i + (b_j + x)$, $1 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 4$
Considérons la liste suivante de 8 termes :

$$a_1 + x, a_2 + x, a_3 + x, a_4 + x, b_1, b_2, b_3, b_4$$

On voit qu'il y a également trois catégories de sommes par paires dans cette liste :
(i) $b_i + b_j$, $1 \leq i < j \leq 4$: d'où on obtient les sommes de s_1 à s_6
(ii) $(a_i + x) + (a_j + x)$, $1 \leq i < j \leq 4$: chacun de ces derniers est $2x$ plus grand que les six sommes de s_1 à s_6 car on obtient ces six sommes à partir des sommes par paires $a_i + a_j$
(iii) $(a_i + x) + b_j$, $1 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 4$

Donc, on a les mêmes 28 sommes par paires dans chaque cas. Dans chaque cas, il y a 6 sommes dans (i), 6 sommes dans (ii) et 16 sommes dans (iii).
Si l'on choisit les listes initiales de manière qu'elles aient les mêmes sommes par paires et qu'on choisit la valeur de x de manière qu'elle soit suffisamment grande afin que $a_i + x$ ne soit pas égal à tout b_j et que $b_i + x$ ne soit pas égal à tout a_j, on obtient deux listes différentes de 8 nombres qui produisent chacune la même liste de 28 sommes.
Par exemple, si l'on choisit $1, 7, 103, 105$ comme la liste a_1, a_2, a_3, a_4 et $3, 5, 101, 107$ comme la liste b_1, b_2, b_3, b_4 et $x = 10\,000$, on obtient les listes

$$1, 7, 103, 105, 10\,003, 10\,005, 10\,101, 10\,107$$

et

$$3, 5, 101, 107, 10\,001, 10\,007, 10\,103, 10\,105$$

En utilisant une analyse similaire à celle ci-dessus, si les listes a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 et b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8 ont le même ensemble de sommes par paires, alors les listes

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, b_1 + y, b_2 + y, b_3 + y, b_4 + y, b_5 + y, b_6 + y, b_7 + y, b_8 + y$$

et

$$a_1 + y, a_2 + y, a_3 + y, a_4 + y, a_5 + y, a_6 + y, a_7 + y, a_8 + y, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8$$

auront également les mêmes sommes par paires.
Donc, on pose $y = 1\,000\,000$ et on voit que les listes

$$1, 7, 103, 105, 10\,003, 10\,005, 10\,101, 10\,107, 1\,000\,003, 1\,000\,005, 1\,000\,101, 1\,000\,107,$$

$$1\,010\,001, 1\,010\,007, 1\,010\,103, 1\,010\,105$$

et

$$3, 5, 101, 107, 10\,001, 10\,007, 10\,103, 10\,105, 1\,000\,001, 1\,000\,007, 1\,000\,103, 1\,000\,105,$$

$$1\,010\,003, 1\,010\,005, 1\,010\,101, 1\,010\,107$$

ont la même liste de sommes $s_1, s_2, \ldots, s_{120}$, ce qu'il fallait démontrer.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2019

le mercredi 3 avril 2019
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 4 avril 2019
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) *Solution 1*

Étant donné qu'un pot rempli à $\frac{3}{4}$ contient un volume de 300 mL, alors un pot rempli à $\frac{1}{4}$ contient un volume de (300 mL) $\div$ 3 ou 100 mL.

Solution 2

Étant donné qu'un pot rempli à $\frac{3}{4}$ contient un volume de 300 mL, alors le volume du pot entier équivaut à $\frac{4}{3}$(300 mL) ou 400 mL.

Donc, un pot rempli à $\frac{1}{4}$ contient un volume de (400 mL) $\div 4 = 100$ mL.

(b) Puisque $\dfrac{24}{a} > 3 > 0$, on remarque que a est donc positif.

Puisque $3 < \dfrac{24}{a}$ et $a > 0$, donc $a < \dfrac{24}{3} = 8$.

Puisque $\dfrac{24}{a} < 4$ et $a > 0$, donc $a > \dfrac{24}{4} = 6$.

Puisque $6 < a < 8$ et que a est un entier, donc $a = 7$.

On remarque qu'il est vrai que $3 < \dfrac{24}{7} < 4$.

(c) Puisque x et x^2 paraissent dans les dénominateurs de l'équation, alors $x \neq 0$.

On multiplie par x^2 et on manipule l'équation comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} &= 2 \\ 1 - x &= 2x^2 \\ 0 &= 2x^2 + x - 1 \\ 0 &= (2x-1)(x+1) \end{aligned}$$

donc $x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -1$.

On reporte dans l'équation d'origine afin de vérifier les solutions :

$$\frac{1}{(1/2)^2} - \frac{1}{1/2} = \frac{1}{1/4} - \frac{1}{1/2} = 4 - 2 = 2$$

et

$$\frac{1}{(-1)^2} - \frac{1}{-1} = \frac{1}{1} + 1 = 2$$

Donc les solutions à l'équation sont bel et bien $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = -1$.

2. (a) Puisque le grand cercle a un rayon de 2, son aire est égale à $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$.

Puisque chacun des petits cercles a un rayon de 1, l'aire de chaque petit cercle est égale à $\pi \cdot 1^2 = \pi$.

Puisque les deux petits cercles sont tangents l'un à l'autre et sont aussi tangents au grand cercle, alors leurs régions ne se chevauchent pas. De plus, leurs régions sont entièrement contenues dans le grand cercle.

Puisque la région ombrée est la partie du grand cercle qui se trouve en dehors des deux petits cercles, la région ombrée est donc égale à $4\pi - \pi - \pi = 2\pi$.

(b) Mo commence à 10h00 et finit à 11h00. Il fait donc du jogging pendant 1 heure.

Mo court à une vitesse de 6 km/h. Cela signifie qu'il parcourt 6 km en l'espace d'une heure.

Donc, Kari parcourt aussi une distance de 6 km.

Puisque Kari court à une vitesse de 8 km/h, elle va donc faire du jogging pendant $\dfrac{6 \text{ km}}{8 \text{ km/h}}$ ou $\dfrac{3}{4}$ h, soit 45 minutes.
Puisque Kari finit de faire du jogging à 11h00. Cela signifie qu'elle a commencé à faire du jogging à 10h15.

(c) On réécrit l'équation $x + 3y = 7$ sous les formes $3y = -x + 7$ et $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.
Donc, la pente de la droite de cette équation est égale à $-\frac{1}{3}$.
Puisque les deux droites sont parallèles et que la droite d'équation $y = mx + b$ a une pente égale à m, alors $m = -\frac{1}{3}$.
Ainsi, on peut réécrire l'équation de la deuxième droite sous la forme $y = -\frac{1}{3}x + b$.
Puisque (9,2) est situé sur la droite, alors $2 = -\frac{1}{3} \cdot 9 + b$ ou $2 = -3 + b$, d'où $b = 5$.

3. (a) La liste de Michelle contient 8 nombres. Sa moyenne est donc égale à :

$$\frac{5 + 10 + 15 + 16 + 24 + 28 + 33 + 37}{8} = \frac{168}{8} = 21$$

La liste de Daphne contient donc 7 nombres (1 nombre de moins que la liste de Michelle) et a une moyenne égale à 20 (1 de moins que la moyenne de la liste de Michelle).
La liste de 7 nombres, dont la moyenne est de 20, a une somme qui est égale à $7 \cdot 20 = 140$.
Puisque les nombres dans la liste de Michelle avaient une somme de 168, alors Daphne a enlevé le nombre qui est égal à la différence suivante $168 - 140$, soit 28.

(b) Puisque $16 = 2^4$ et $32 = 2^5$, on peut donc réécrire l'équation comme telle

$$\begin{aligned} (2^4)^{15/x} &= (2^5)^{4/3} \\ 2^{60/x} &= 2^{20/3} \end{aligned}$$

Cela signifie que $\dfrac{60}{x} = \dfrac{20}{3} = \dfrac{60}{9}$ d'où $x = 9$.

(c) À l'aide des lois des exposants, les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{2^{2022} + 2^a}{2^{2019}} &= 72 \\ 2^{2022-2019} + 2^{a-2019} &= 72 \\ 2^3 + 2^{a-2019} &= 72 \\ 8 + 2^{a-2019} &= 72 \\ 2^{a-2019} &= 64 \\ 2^{a-2019} &= 2^6 \end{aligned}$$

cela signifie que $a - 2019 = 6$ d'où $a = 2025$.

4. (a) *Solution 1*
Puisque le triangle CDB est rectangle en B, donc $\angle DCB = 90^\circ - \angle CDB = 30^\circ$.
Cela signifie que le triangle CDB est un triangle 30°-60°-90°.
On sait qu'il existe des rapports entre les longueurs des côtés dans un triangle 30°-60°-90°.
À l'aide de ceux-ci, on stipule alors que $CD : DB = 2 : 1$.
Puisque $DB = 10$, donc $CD = 20$.

Puisque $\angle CDB = 60^\circ$, alors $\angle ADC = 180^\circ - \angle CDB = 120^\circ$.
Puisque les angles dans le triangle ADC ont une somme de 180°, alors

$$\angle DAC = 180^\circ - \angle ADC - \angle ACD = 30^\circ$$

Cela signifie que le triangle ADC est un triangle isocèle où $AD = CD$.
Ainsi, $AD = CD = 20$.

Solution 2
Puisque le triangle CDB est rectangle en B, donc $\angle DCB = 90^\circ - \angle CDB = 30^\circ$.
Puisque le triangle ACB est rectangle en B, donc

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$$

Cela signifie que les triangles CDB et ACB sont tous les deux des triangles 30°-60°-90°.
On sait qu'il existe des rapports entre les longueurs des côtés dans un triangle 30°-60°-90°.
À l'aide de ceux-ci, on stipule alors que $CB : DB = \sqrt{3} : 1$.
Puisque $DB = 10$, donc $CB = 10\sqrt{3}$.
De même, $AB : CB = \sqrt{3} : 1$.
Puisque $CB = 10\sqrt{3}$, donc $AB = \sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} = 30$.
Finalement, cela signifie que $AD = AB - DB = 30 - 10 = 20$.

(b) Puisque les points $A(d, -d)$ et $B(-d + 12{,}2d - 6)$ sont situés sur le même cercle dont le centre est situé à l'origine, O, alors $OA = OB$.
Puisque les distances ne peuvent avoir des valeurs négatives, les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
\sqrt{(d-0)^2 + (-d-0)^2} &= \sqrt{((-d+12)-0)^2 + ((2d-6)-0)^2} \\
d^2 + (-d)^2 &= (-d+12)^2 + (2d-6)^2 \\
d^2 + d^2 &= d^2 - 24d + 144 + 4d^2 - 24d + 36 \\
2d^2 &= 5d^2 - 48d + 180 \\
0 &= 3d^2 - 48d + 180 \\
0 &= d^2 - 16d + 60 \\
0 &= (d-10)(d-6)
\end{aligned}$$

d'où $d = 10$ ou $d = 6$.
On peut vérifier que les points $A(10, -10)$ et $B(2{,}14)$ se trouvent tous les deux à une distance de $\sqrt{200}$ de l'origine. On peut aussi vérifier que les points $A(6, -6)$ et $B(6{,}6)$ se trouvent tous les deux à une distance de $\sqrt{72}$ de l'origine.

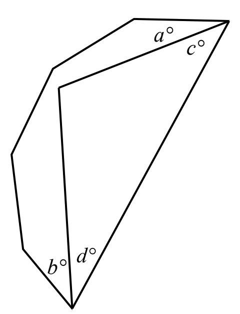
5. (a) Dans un premier temps, on remarque que $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
Ensuite, on remarque que $\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ et que $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.
À partir de ces dernières, on obtient $\sqrt{2} + \sqrt{32} = \sqrt{50}$ de la première et on obtient $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$ de la deuxième.
Ainsi, $(a, b) = (2, 32)$ et $(a, b) = (8, 18)$ sont des solutions à l'équation d'origine.
(Il n'est pas requis de justifier la raison pour laquelle ce sont les deux seules solutions.)

(b) À partir de la deuxième équation, on remarque que $d \neq 0$.
On peut réécrire cette deuxième équation comme telle $c = kd$.
On reporte cette dernière dans la première équation afin d'obtenir $kd + d = 2000$ ou $(k+1)d = 2000$.
Puisque $k \geq 0$, on remarque que $k + 1 \geq 1$.
Donc, si (c, d) est une solution, alors $k + 1$ est un diviseur de 2000.
De plus, si $k+1$ est un diviseur de 2000, alors l'équation $(k+1)d = 2000$ admet logiquement une valeur entière non nulle pour d. On se sert de cette dernière afin de déterminer la valeur entière de c à l'aide de la première équation.
Par conséquent, les valeurs de k que l'on veut compter correspondent aux diviseurs positifs de 2000.
Puisque $2000 = 10 \cdot 10 \cdot 20 = 2^4 \cdot 5^3$, alors 2000 a $(4 + 1)(3 + 1) = 20$ diviseurs positifs.
Cela est attribuable au fait que si p et q sont des nombres premiers distincts, l'entier positif $p^a \cdot q^b$ aurait $(a + 1)(b + 1)$ diviseurs positifs.
Dans le cas où la formule précédente nous était inconnue, on aurait pu dresser la liste de ces diviseurs :

$$1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 125, 200, 250, 400, 500, 1000, 2000$$

Puisque 2000 a 20 diviseurs positifs, il y a donc 20 valeurs de k qui admettraient au moins un couple d'entiers (c,d) comme solution au système.
Par exemple, si $k + 1 = 8$, alors $k = 7$, d'où le système $c + d = 2000$ et $\dfrac{c}{d} = 7$ qui a $(c, d) = (1750, 250)$ comme solution.

6. (a) *Solution 1*
La somme des mesures des angles d'un polygone à n côtés est égale à $(n - 2) \cdot 180°$.
Cela signifie que la somme des mesures des angles d'un pentagone est égale à $3 \cdot 180°$ ou $540°$. Sachant ceci, on déduit alors que chaque angle intérieur d'un pentagone régulier a une mesure de $\dfrac{1}{5} \cdot 540°$ ou $108°$.
D'ailleurs, dans un polygone régulier à n côtés, chaque angle intérieur a une mesure de $\dfrac{n-2}{n} \cdot 180°$. (Ceci est la version générale des énoncés des deux phrases précédentes.)
Considérons la partie du polygone régulier à n côtés qui n'est pas recouverte par le pentagone et relions les points à partir desquels émanent les angles de mesures $a°$ and $b°$ afin de former un hexagone.



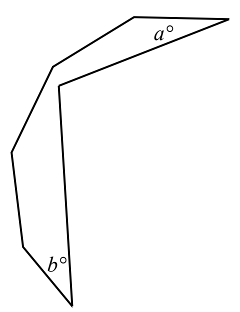
Puisque ce polygone a 6 côtés, la somme des mesures de ses 6 angles est égale à $4 \cdot 180°$.
Parmi ses angles, quatre sont les angles originaux du polygone à n côtés. Donc, chacun de ces quatre angles a une mesure de $\dfrac{n-2}{n} \cdot 180°$.

Les deux angles restants ont des mesures de $a° + c°$ et de $b° + d°$.
On sait que $a° + b° = 88°$.
De plus, les angles dont les mesures sont de $c°$ et de $d°$ font partie d'un triangle dont le troisième angle a une mesure de $108°$.
Alors, $c° + d° = 180° - 108° = 72°$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
4 \cdot \frac{n-2}{n} \cdot 180° + 88° + 72° &= 4 \cdot 180° \\
160° &= \left(4 - \frac{4(n-2)}{n}\right) \cdot 180° \\
160° &= \frac{4n - (4n-8)}{n} \cdot 180° \\
\frac{160°}{180°} &= \frac{8}{n} \\
\frac{8}{9} &= \frac{8}{n}
\end{aligned}$$

d'où la valeur de n est égale à 9.

Solution 2
La somme des mesures des angles d'un polygone à n côtés est égale à $(n-2) \cdot 180°$.
Cela signifie que la somme des mesures des angles d'un pentagone est égale à $3 \cdot 180°$ ou $540°$. Sachant ceci, on déduit alors que chaque angle intérieur d'un pentagone régulier a une mesure de $\frac{1}{5} \cdot 540°$ ou $108°$.
D'ailleurs, dans un polygone régulier à n côtés, chaque angle intérieur a une mesure de $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$. (Ceci est la version générale des énoncés des deux phrases précédentes.)
Considérons la partie du polygone régulier à n côtés qui n'est pas recouverte par le pentagone.



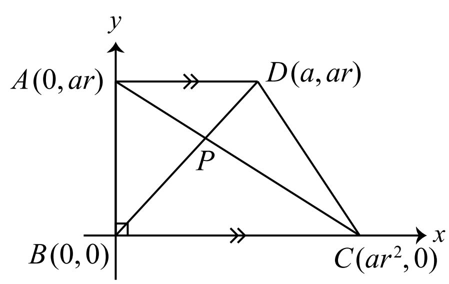
Puisque ce polygone a 7 côtés, la somme des mesures de ses 7 angles est égale à $5 \cdot 180°$.
Parmi ses angles, quatre sont les angles originaux du polygone à n côtés. Donc, chacun de ces quatre angles a une mesure de $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$.
De plus, deux de ses angles sont ceux dont les mesures sont de $a°$ et de $b°$ et dont la somme de ces derniers est égale à $88°$.
Son septième angle est l'angle de réflexe correspondant à l'angle de $108°$ du pentagone et a donc une mesure de $360° - 108°$ ou $252°$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ + 88^\circ + 252^\circ &= 5 \cdot 180^\circ \\ 340^\circ &= \left(5 - \frac{4(n-2)}{n}\right) \cdot 180^\circ \\ 340^\circ &= \frac{5n-(4n-8)}{n} \cdot 180^\circ \\ \frac{340^\circ}{180^\circ} &= \frac{n+8}{n} \\ \frac{17}{9} &= \frac{n+8}{n} \\ 17n &= 9(n+8) \\ 17n &= 9n+72 \\ 8n &= 72 \end{aligned}$$

d'où la valeur de n est égale à 9.

(b) Puisque les longueurs AD, AB et BC forment une suite géométrique, on suppose que ces longueurs sont, respectivement, a, ar et ar^2 ; a et r étant des nombres réels supérieurs à 0. Puisque les angles à A et à B sont tous les deux des angles droits, on assigne des coordonnées au diagramme en plaçant B au point d'origine $(0,0)$, C au point $(ar^2, 0)$ sur le côté positif de l'axe des abscisses, A au point $(0, ar)$ sur le côté positif de l'axe des ordonnées, et D au point (a, ar).



Ainsi, le segment de droite reliant le point $B(0,0)$ au point $D(a, ar)$ a une pente qui est égale à $\dfrac{ar-0}{a-0} = r$.

De plus, le segment de droite reliant le point $A(0,ar)$ au point $C(ar^2, 0)$ a une pente qui est égale à $\dfrac{ar-0}{0-ar^2} = -\dfrac{1}{r}$.

Ces segments de droite sont perpendiculaires car leurs pentes ont un produit de -1, ce qu'il fallait démontrer.

7. (a) À l'aide des lois des logarithmes et des lois des exposants, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
2\log_2(x-1) &= 1 - \log_2(x+2) \\
2\log_2(x-1) + \log_2(x+2) &= 1 \\
\log_2\left((x-1)^2\right) + \log_2(x+2) &= 1 \\
\log_2\left((x-1)^2(x+2)\right) &= 1 \\
(x-1)^2(x+2) &= 2^1 \\
(x^2-2x+1)(x+2) &= 2 \\
x^3 - 3x + 2 &= 2 \\
x^3 - 3x &= 0 \\
x(x^2-3) &= 0
\end{aligned}$$

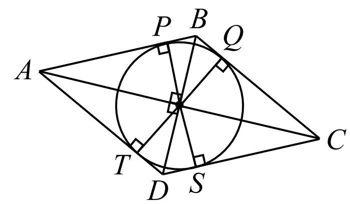
d'où $x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.
On remarque que si $x = 0$, alors $x - 1 = -1 < 0$, d'où $\log_2(x-1)$ est non définie. Donc, $x \neq 0$.
On remarque que si $x = -\sqrt{3}$, alors $x - 1 = -\sqrt{3} - 1 < 0$ d'où $\log_2(x-1)$ est non définie. Donc, $x \neq -\sqrt{3}$.
Si $x = \sqrt{3}$, on peut vérifier que les deux logarithmes de l'équation d'origine sont définies et que l'équation d'origine est vraie. Pour en être convaincu, on pourrait se servir d'une calculatrice. On pourrait aussi vérifier cela algébriquement en constatant qu'on obtient le même nombre en élevant les deux côtés à la puissance 2. Donc les expressions doivent effectivement être égales.
Ainsi, $x = \sqrt{3}$ est la seule solution.

(b) Soit $a = f(f(x))$.
Donc, l'équation $f(f(f(x))) = 3$ est équivalente à $f(a) = 3$.
Puisque $f(a) = a^2 - 2a$, on obtient donc l'équation $a^2 - 2a = 3$ d'où $a^2 - 2a - 3 = 0$ et $(a-3)(a+1) = 0$.
Ainsi, $a = 3$ ou $a = -1$. Cela signifie que $f(f(x)) = 3$ ou $f(f(x)) = -1$.
Soit $b = f(x)$.
Donc, les équations $f(f(x)) = 3$ et $f(f(x)) = -1$ deviennent $f(b) = 3$ et $f(b) = -1$.
Si l'on emploie le même raisonnement que celui ci-dessus, lorsque $f(b) = 3$, alors $b = f(x) = 3$ ou $b = f(x) = -1$.
Si $f(b) = -1$, alors $b^2 - 2b = -1$ d'où $b^2 - 2b + 1 = 0$ ou $(b-1)^2 = 0$. Cela signifie que $b = f(x) = 1$.
Donc, $f(x) = 3$ ou $f(x) = -1$ ou $f(x) = 1$.
Si $f(x) = 3$, alors $x = 3$ ou $x = -1$ comme énoncé ci-dessus.
Si $f(x) = -1$, alors $x = 1$ comme énoncé ci-dessus.
Si $f(x) = 1$, alors $x^2 - 2x = 1$ d'où $x^2 - 2x - 1 = 0$.
À l'aide de la formule quadratique,

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Donc, l'équation $f(f(f(x))) = 3$ a comme solutions $x = 3, 1, -1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$.

8. (a) Puisque $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA$ et que ces angles forment un cercle complet autour de O, alors $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ$.
On relie le point O aux points P, B, Q, C, S, D, T et A.



Puisque P, Q, S et T sont des points de tangence, alors les rayons sont perpendiculaires aux côtés $ABCD$ en ces points.
Puisque $AO = 3$, que $OT = 1$ et que $\angle OTA = 90^\circ$, alors à l'aide du théorème de Pythagore, $AT = \sqrt{AO^2 - OT^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Puisque le triangle OTA est rectangle en T, alors $\angle TAO + \angle AOT = 90^\circ$.
Puisque $\angle DOA = 90^\circ$, alors $\angle AOT + \angle DOT = 90^\circ$.
Donc, $\angle TAO = \angle DOT$.
Cela signifie que les triangles ATO et OTD sont semblables.
Donc, $\dfrac{DT}{OT} = \dfrac{OT}{AT}$ d'où $DT = \dfrac{OT^2}{AT} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Puisque DS et DT sont tangentes au cercle à partir du même point, alors $DS = DT = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

(b) Puisque $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, donc $0 < \cos x < 1$ et $0 < \sin x < 1$.
Cela signifie que $0 < \dfrac{3}{2}\cos x < \dfrac{3}{2}$ et que $0 < \dfrac{3}{2}\sin x < \dfrac{3}{2}$.
Puisque $3 < \pi$, alors $0 < \dfrac{3}{2}\cos x < \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < \dfrac{3}{2}\sin x < \dfrac{\pi}{2}$.
Si Y et Z sont des angles qui vérifient $0 < Y < \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < Z < \dfrac{\pi}{2}$, alors $\cos Y = \sin Z$ uniquement lorsque $Y + Z = \dfrac{\pi}{2}$. Afin de nous aider à visualiser cela, on peut placer les points R et S sur le cercle unité de manière à ce qu'ils correspondent aux angles Y et Z ; l'abscisse du point R est égale à l'ordonnée du point S uniquement lorsque les angles Y et Z sont des angles complémentaires.
Donc, les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{3}{2}\cos x\right) &= \sin\left(\frac{3}{2}\sin x\right) \\
\frac{3}{2}\cos x + \frac{3}{2}\sin x &= \frac{\pi}{2} \\
\cos x + \sin x &= \frac{\pi}{3} \\
(\sin x + \cos x)^2 &= \frac{\pi^2}{9} \\
\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x &= \frac{\pi^2}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sin x\cos x + (\sin^2 x + \cos^2 x) &= \frac{\pi^2}{9} \\ \sin 2x + 1 &= \frac{\pi^2}{9} \\ \sin 2x &= \frac{\pi^2 - 9}{9} \end{aligned}$$

Finalement, $\dfrac{\pi^2 - 9}{9}$ est la seule valeur possible de $\sin 2x$.

9. (a) Par définition, $f(2,5) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2 \cdot 5} = \dfrac{2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 1}{2 \cdot 5} = \dfrac{4 + 25 + 1}{10} = \dfrac{30}{10} = 3$.

(b) Par définition, $f(a,a) = \dfrac{a}{a} + \dfrac{a}{a} + \dfrac{1}{a^2} = 2 + \dfrac{1}{a^2}$.
Afin que $2 + \dfrac{1}{a^2}$ soit un entier, $\dfrac{1}{a^2}$ doit aussi être un entier.
Afin que $\dfrac{1}{a^2}$ soit un entier, et puisque a^2 est un entier, a^2 doit être un diviseur de 1.
Puisque a^2 est positif, alors $a^2 = 1$.
Puisque a est un entier positif, alors $a = 1$.
Ainsi, $a = 1$ est le seul entier positif a pour lequel $f(a,a)$ est un entier.

(c) Supposons que a et b sont des entiers positifs pour lesquels $f(a,b)$ est un entier.
Supposons aussi que $k = f(a,b)$ n'est pas un multiple de 3.
On va montrer qu'il va y avoir une contradiction qui mènera donc à la conclusion que k doit être un multiple de 3.
Par définition, $k = f(a,b) = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{1}{ab}$.
En multipliant par ab on obtient $kab = a^2 + b^2 + 1$, que l'on peut réécrire sous la forme $a^2 - (kb)a + (b^2 + 1) = 0$.
On considère cette équation comme étant quadratique où la variable est représentée par a et où les coéfficients seraient représentés en termes des variables b et k.
À l'aide de la formule quadratique, on peut déterminer les valeurs de a (en termes des variables b et k) qui satisfont l'équation quadratique

$$a = \frac{kb \pm \sqrt{(-kb)^2 - 4(1)(b^2+1)}}{2} = \frac{kb \pm \sqrt{k^2b^2 - 4b^2 - 4}}{2}$$

Puisque a est un entier, alors le discriminant $k^2b^2 - 4b^2 - 4$ doit être un carré parfait.
On peut réécrire le discriminant comme tel

$$k^2b^2 - 4b^2 - 4 = b^2(k^2 - 4) - 4 = b^2(k-2)(k+2) - 4$$

Puisque k n'est pas un multiple de 3, il est donc 1 de plus qu'un multiple de 3, ou 2 de plus qu'un multiple de 3.
Si k est 1 de plus qu'un multiple de 3, alors $k + 2$ est un multiple de 3.
Si k est 2 de plus qu'un multiple de 3, alors $k - 2$ est un multiple de 3.
Logiquement, $(k-2)(k+2)$ est donc un multiple de 3, chose que l'on clarifie en écrivant $(k-2)(k+2) = 3m$, m étant un entier quelconque.
Cela signifie que l'on peut encore réécrire le discriminant ; cette fois-ci de la manière suivante :

$$b^2(3m) - 4 = 3(b^2m - 2) + 2$$

Autrement dit, le discriminant lui-même est égal à 2 de plus qu'un multiple de 3.
Cependant, chaque carré parfait est soit un multiple de 3, soit 1 de plus qu'un multiple de 3 :

Supposons que r est un entier. Considérons r^2.
On peut représenter l'entier r à l'aide d'une des expressions suivantes : $3q$, $3q+1$ et $3q+2$; q étant un entier quelconque.
À partir de ces trois cas,

$$\begin{aligned}(3q)^2 &= 9q^2 = 3(3q^2)\\(3q+1)^2 &= 9q^2+6q+1 = 3(3q^2+2q)+1\\(3q+2)^2 &= 9q^2+12q+4 = 3(3q^2+4q+1)+1\end{aligned}$$

On comprend alors que r^2 est soit un multiple de 3, soit 1 de plus qu'un multiple de 3.

On avait déterminé que le discriminant était un carré parfait mais qu'il était aussi 2 de plus qu'un multiple de 3. Ceci est une contradiction.
Cela signifie que notre supposition initiale doit être incorrecte. Donc $k = f(a,b)$ doit être un multiple de 3.

(d) *Solution 1*
On détermine des couples additionnels d'entiers positifs (a,b) pour lesquels $f(a,b) = 3$.
Supposons que $f(a,b) = 3$.
Ceci est équivalent aux équations $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{ab} = 3$ et $a^2+b^2-3ab+1 = 0$.
Donc

$$\begin{aligned}f(b,3b-a)-3 &= \frac{b}{3b-a}+\frac{3b-a}{b}+\frac{1}{b(3b-a)}-3\\&= \frac{b^2+(3b-a)^2+1-3b(3b-a)}{b(3b-a)}\\&= \frac{b^2+(3b-a)(3b-a)+1-3b(3b-a)}{b(3b-a)}\\&= \frac{b^2-a(3b-a)+1}{b(3b-a)}\\&= \frac{b^2+a^2-3ab+1}{b(3b-a)}\\&= 0\end{aligned}$$

Ainsi, si $f(a,b) = 3$, alors $f(b,3b-a) = 3$.
De l'équation $f(1,2) = 3$ on obtient $f(2,3(2)-1) = f(2,5) = 3$.
De l'équation $f(2,5) = 3$ on obtient $f(5,3(5)-2) = f(5,13) = 3$.
De l'équation $f(5,13) = 3$ on obtient $f(13,3(13)-5) = f(13,34) = 3$.
De l'équation $f(13,34) = 3$ on obtient $f(34,3(34)-13) = f(34,89) = 3$.
De l'équation $f(34,89) = 3$ on obtient $f(89,3(89)-34) = f(89,233) = 3$.
Ainsi, les couples $(a,b) = (5,13),(13,34),(34,89),(89,233)$ remplissent les conditions énoncées dans la question.

Solution 2
On remarque que

$$f(5,13)=\frac{5}{13}+\frac{13}{5}+\frac{1}{5\cdot 13}=\frac{5^2+13^2+1}{65}=\frac{195}{65}=3$$
$$f(13,34)=\frac{13}{34}+\frac{34}{13}+\frac{1}{13\cdot 34}=\frac{13^2+34^2+1}{442}=\frac{1326}{442}=3$$
$$f(34,89)=\frac{34}{89}+\frac{89}{34}+\frac{1}{34\cdot 89}=\frac{34^2+89^2+1}{3026}=\frac{9078}{3026}=3$$
$$f(89,233)=\frac{89}{233}+\frac{233}{89}+\frac{1}{89\cdot 233}=\frac{89^2+233^2+1}{20737}=\frac{62\,211}{20\,737}=3$$

Ainsi, les couples $(a,b)=(5,13)$,$(13,34)$,$(34,89)$,$(89,233)$ remplissent les conditions énoncées dans la question.

D'où viennent ces couples ?
On peut définir la suite de Fibonacci $F_1,F_2,F_3,F_4,\ldots$ par $F_1=F_2=1$ et $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ lorsque $n\geq 3$.
Ainsi, la suite de Fibonacci débute avec les nombres $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\ldots$.
Les couples (a,b) énoncés ci-dessus prennent la forme (F_{2k-1},F_{2k+1}) pour les entiers $k\geq 3$.
On remarque que

$$\begin{aligned}
f(F_{2k-1},F_{2k+1}) &= \frac{F_{2k-1}}{F_{2k+1}}+\frac{F_{2k+1}}{F_{2k-1}}+\frac{1}{F_{2k-1}F_{2k+1}}\\
&= \frac{(F_{2k-1})^2+(F_{2k+1})^2+1}{F_{2k-1}F_{2k+1}}\\
&= \frac{(F_{2k-1})^2+(F_{2k}+F_{2k-1})^2+1}{F_{2k-1}(F_{2k}+F_{2k-1})}\\
&= \frac{2(F_{2k-1})^2+2F_{2k}F_{2k-1}+(F_{2k})^2+1}{(F_{2k-1})^2+F_{2k}F_{2k-1}}\\
&= \frac{2(F_{2k-1})^2+2F_{2k}F_{2k-1}}{(F_{2k-1})^2+F_{2k}F_{2k-1}}+\frac{(F_{2k})^2+1}{(F_{2k-1})^2+F_{2k}F_{2k-1}}\\
&= 2+\frac{(F_{2k})^2+1}{F_{2k-1}F_{2k+1}}
\end{aligned}$$

Cela signifie que $f(F_{2k-1},F_{2k+1})=3$ uniquement lorsque $\dfrac{(F_{2k})^2+1}{F_{2k-1}F_{2k+1}}=1$ (ou, de manière équivalente, lorsque $(F_{2k})^2+1=F_{2k-1}F_{2k+1}$ ou lorsque $(F_{2k})^2-F_{2k-1}F_{2k+1}=-1$).
On remarque que $(F_2)^2-F_1F_3=1^2-1\cdot 2=-1$ et que $(F_4)^2-F_3F_5=3^2-2\cdot 5=-1$.
Donc cela est vrai lorsque $k=1$ et $k=2$.

De plus, on remarque que

$$\begin{aligned}
(F_{2k+2})^2 - F_{2k+1}F_{2k+3} &= (F_{2k+2})^2 - F_{2k+1}(F_{2k+2} + F_{2k+1}) \\
&= (F_{2k+2})^2 - F_{2k+1}F_{2k+2} - (F_{2k+1})^2 \\
&= F_{2k+2}(F_{2k+2} - F_{2k+1}) - (F_{2k+1})^2 \\
&= F_{2k+2}F_{2k} - (F_{2k+1})^2 \\
&= (F_{2k+1} + F_{2k})F_{2k} - (F_{2k+1})^2 \\
&= (F_{2k})^2 + F_{2k+1}F_{2k} - (F_{2k+1})^2 \\
&= (F_{2k})^2 + F_{2k+1}(F_{2k} - F_{2k+1}) \\
&= (F_{2k})^2 + F_{2k+1}(-F_{2k-1}) \\
&= (F_{2k})^2 - F_{2k+1}F_{2k-1}
\end{aligned}$$

Cela signifie que puisque $(F_4)^2 - F_3F_5 = -1$, donc $(F_6)^2 - F_5F_7 = -1$, qui signifie à son tour que $(F_8)^2 - F_7F_9 = -1$, et ainsi de suite.
En continuant de cette manière, $(F_{2k})^2 - F_{2k-1}F_{2k+1} = -1$ pour tout entier positif $k \geq 1$.
Cela signifie à son tour que $f(F_{2k-1}, F_{2k+1}) = 3$, ce qu'il fallait démontrer.

10. (a) À ses deux premiers tours, Brigitte choisit soit deux cartes de la même couleur, soit deux cartes de couleurs différentes. Si elle choisit deux cartes de couleurs différentes, alors à son troisième tour, elle choisira forcément une carte qui correspondra à l'une des deux premières cartes.
Par conséquent, le jeu se terminera soit au troisième tour de Brigitte, soit avant.
Ainsi, si Amir est le gagnant, c'est qu'il aura forcément gagné à son deuxième ou à son troisième tour. (Il ne peut pas gagner dès le premier tour.)

Pour qu'Amir gagne à son deuxième tour, la deuxième carte qu'il choisit doit correspondre à la première carte qu'il choisit.
Lors de son deuxième tour, il aura 5 cartes en main, dont 1 correspondra à la couleur de la première carte qu'il a choisie.
Par conséquent, la probabilité qu'Amir gagne à son deuxième tour est égale à $\frac{1}{5}$.
Il est à remarquer qu'il n'y a aucune restriction sur la première carte qu'il choisit ou sur la première carte que choisit Brigitte.

Afin qu'Amir gagne à son troisième tour, les conditions suivantes doivent être remplies : (i) la couleur de la deuxième carte qu'il choisit est différente de celle de la première carte qu'il choisit, (ii) la couleur de la deuxième carte que Brigitte choisit diffère de la couleur de la première carte qu'elle choisit et (iii) la couleur de la troisième carte qu'Amir choisit correspond à la couleur de l'une des deux premières cartes qu'il a choisies.
La probabilité de (i) est égale à $\frac{4}{5}$, puisqu'il doit choisir une carte autre que celle qui correspond à la première.
La probabilité de (ii) est égale à $\frac{2}{3}$, puisque Brigitte doit choisir l'une des cartes qui ne correspond pas à sa première carte.
La probabilité de (iii) est égale à $\frac{2}{4}$, puisque Amir peut choisir l'une des 2 cartes qui correspond à l'une des deux premières cartes qu'il a choisies.
Encore une fois, les cartes choisies par Amir et Brigitte lors de leur premier tour n'ont aucune importance.
Donc, la probabilité qu'Amir gagne à son troisième tour est égale à $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4}$, soit $\frac{4}{15}$.

Finalement, la probabilité qu'Amir gagne le jeu est donc $\frac{1}{5} + \frac{4}{15}$, soit $\frac{7}{15}$.

(b) Supposons que p représente la probabilité qu'il y ait un nombre pair de pile après avoir lancé les 13 premières pièces.
Donc, $1 - p$ représente la probabilité qu'il y ait un nombre impair de pile.
Lorsque la 14^e pièce est lancée, la probabilité qu'elle tombe du côté pile est égale à h_{14} tandis que la probabilité qu'elle ne tombe pas du côté pile est égale à $1 - h_{14}$.
Après le 14^e lancer, il peut y avoir un nombre pair de pile s'il y a eu un nombre pair de pile dans les 13 premiers lancers et que le 14^e lancer n'ait pas pile comme résultat. De même, on pourrait aussi obtenir un nombre pair de pile après le 14^e lancer s'il y a eu un nombre impair de pile dans les 13 premiers lancers et que le 14^e lancer ait pile comme résultat.
La probabilité de cela est égale à $p(1 - h_{14}) + (1 - p)h_{14}$.
Ainsi,

$$
\begin{aligned}
p(1 - h_{14}) + (1 - p)h_{14} &= \tfrac{1}{2} \\
2p - 2ph_{14} + 2h_{14} - 2ph_{14} &= 1 \\
0 &= 4ph_{14} - 2p - 2h_{14} + 1 \\
0 &= 2p(2h_{14} - 1) - (2h14 - 1) \\
0 &= (2p - 1)(2h_{14} - 1)
\end{aligned}
$$

Donc, soit $h_{14} = \frac{1}{2}$, soit $p = \frac{1}{2}$.
Si $h_{14} = \frac{1}{2}$, on a prouvé le résultat.
Si $h_{14} \neq \frac{1}{2}$, donc $p = \frac{1}{2}$.
Cela signifie que la probabilité d'obtenir un nombre pair de pile à partir des 13 premiers lancers est égale à $\frac{1}{2}$.
On peut répéter l'argument ci-dessus pour conclure que soit $h_{13} = \frac{1}{2}$, soit la probabilité d'obtenir un nombre pair de pile à partir des 12 premiers lancers est égale à $\frac{1}{2}$.
En continuant de cette manière, soit un de $h_{14}, h_{13}, \ldots, h_3, h_2$ peut être égal à $\frac{1}{2}$, soit la probabilité d'obtenir un nombre pair de pile à partir d'un seul lancer est égale à $\frac{1}{2}$.
Cette dernière affirmation revient simplement à dire que la probabilité d'obtenir pile après le premier lancer est égale à $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire, $h_1 = \frac{1}{2}$).
Donc, parmi les probabilités $h_1, h_2, \ldots, h_{13}, h_{14}$, au moins une doit être égale à $\frac{1}{2}$.

(c) Afin que les deux chiffres imprimés aient une somme de 2, chaque chiffre doit être un 1.
Donc, $S(2) = p_1q_1$.
Afin que les deux chiffres imprimés aient une somme de 12, chaque chiffre doit être un 6.
Donc, $S(12) = p_6q_6$.
Afin que les deux chiffres imprimés aient une somme de 7, les chiffres doivent être soit 1 et 6, soit 2 et 5, soit 3 et 4, soit 4 et 3, soit 5 et 2, soit 6 et 1.
Donc, $S(7) = p_1q_6 + p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 + p_6q_1$.
Puisque $S(2) = S(12)$, alors $p_1q_1 = p_6q_6$.
Puisque $S(2) > 0$ et $S(12) > 0$, alors $p_1, q_1, p_6, q_6 > 0$.
Si $p_1 = p_6$, alors on peut diviser les deux côtés de $p_1q_1 = p_6q_6$ par $p_1 = p_6$ afin d'obtenir $q_1 = q_6$.
Si $q_1 = q_6$, alors on peut diviser les deux côtés de $p_1q_1 = p_6q_6$ par $q_1 = q_6$ afin d'obtenir $p_1 = p_6$.
Ainsi, si on peut démontrer que $p_1 = p_6$ ou que $q_1 = q_6$, notre résultat sera vrai.
Supposons que $p_1 \neq p_6$ et que $q_1 \neq q_6$.
Puisque $S(2) = \frac{1}{2}S(7)$ et $S(12) = \frac{1}{2}S(7)$, donc

$$\begin{aligned}
S(7) - \tfrac{1}{2}S(7) - \tfrac{1}{2}S(7) &= 0 \\
S(7) - S(2) - S(12) &= 0 \\
p_1q_6 + p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 + p_6q_1 - p_1q_1 - p_6q_6 &= 0 \\
p_1q_6 + p_6q_1 - p_1q_1 - p_6q_6 + (p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2) &= 0 \\
(p_1 - p_6)(q_6 - q_1) + (p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2) &= 0 \\
p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 &= -(p_1 - p_6)(q_6 - q_1) \\
p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 &= (p_1 - p_6)(q_1 - q_6)
\end{aligned}$$

Puisque $p_2, p_3, p_4, p_5, q_2, q_3, q_4, q_5 \geq 0$, alors $p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 \geq 0$.
À partir de cela, $(p_1 - p_6)(q_1 - q_6) \geq 0$.
Puisque $p_1 \neq p_6$, alors soit $p_1 > p_6$, soit $p_1 < p_6$.
Si $p_1 > p_6$, donc $p_1 - p_6 > 0$ d'où $(p_1 - p_6)(q_1 - q_6) \geq 0$ nous amène à comprendre que $q_1 - q_6 > 0$ qui signifie à son tour que $q_1 > q_6$.
Or, sachant que $p_1q_1 = p_6q_6$ et que $p_1, q_1, p_6, q_6 > 0$, $p_1 > p_6$ et $q_1 > q_6$ sont alors inadmissibles.
Si $p_1 < p_6$, donc $p_1 - p_6 < 0$ d'où $(p_1 - p_6)(q_1 - q_6) \geq 0$ nous amène à comprendre que $q_1 - q_6 < 0$ qui signifie à son tour que $q_1 < q_6$.
Or, sachant que $p_1q_1 = p_6q_6$ et que $p_1,q_1,p_6,q_6 > 0$, $p_1 < p_6$ et $q_1 < q_6$ sont alors inadmissibles. Cela est une contradiction.
Ainsi, puisque $p_1 > p_6$ et $p_1 < p_6$ sont inadmissibles, il doit être vrai que $p_1 = p_6$ qui signifie à son tour que $q_1 = q_6$, ce qu'il fallait démontrer.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2018

le mercredi 11 avril 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 12 avril 2018
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Lorsque $x = 11$, on a :

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 4x + 6 = 4(11) + 6 = 50$$

OU

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 11 + 12 + 13 + 14 = 50$$

(b) On multiplie chaque membre de l'équation $\dfrac{a}{6} + \dfrac{6}{18} = 1$ par 18 pour obtenir $3a + 6 = 18$.
On résout pour obtenir $3a = 12$, d'où $a = 4$.

(c) *Solution 1*
Puisqu'une tablette de chocolat coute 1,00 \$ de plus qu'un paquet de gomme, alors si on remplace un paquet de gomme par une tablette de chocolat, le cout est augmenté de 1,00 \$.
Étant donné une tablette de chocolat et deux paquets de gomme, on remplace les deux paquets de gomme par deux tablettes de chocolat.
Le cout est ainsi augmenté de 2,00 \$. Il passe donc de 4,15 \$ à 6,15 \$.
Donc, trois tablettes de chocolat coutent 6,15 \$ et une tablette de chocolat coute donc $\frac{1}{3}$(6,15 \$), ou 2,05 \$.

Solution 2
Soit x \$ le cout d'une palette de chocolat.
Soit y \$ le cout d'un paquet de gomme.
Puisqu'une tablette de chocolat et deux paquets de gomme coutent 4,15 \$, alors $x + 2y = 4{,}15$.
Puisqu'une palette de chocolat coute 1,00 \$ de plus qu'un paquet de gomme, alors $x = y+1$.
Puisque $x = y + 1$, alors $y = x - 1$.
On reporte $y = x - 1$ dans $x + 2y = 4{,}15$ pour obtenir $x + 2(x - 1) = 4{,}15$.
On résout pour obtenir $x + 2x - 2 = 4{,}15$, ou $3x = 6{,}15$. Donc $x = 2{,}05$.
Une tablette de chocolat coute donc 2,05 \$.

2. (a) On représente l'entier de cinq chiffres par $abcde$, a, b, c, d et e étant des les chiffres $1, 3, 5, 7, 9$ dans un ordre quelconque.
Puisque $abcde$ est supérieur à 80 000, alors $a \geq 8$. Donc $a = 9$.
Puisque $9bcde$ est inférieur à 92 000, alors $b < 2$. Donc $b = 1$.
Puisque le chiffre des unités de $91cde$ est 3, alors $e = 3$.
L'entier est donc $91cd3$, ce qui signifie que c et d sont 5 et 7 dans un ordre quelconque.
Puisque l'entier cd est divisible par 5, il doit être 75.
L'entier de cinq chiffres est donc 91753.

(b) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADB :

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$$

Puisque $AD > 0$, alors $AD = \sqrt{25}$, ou $AD = 5$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle CDB :

$$CD^2 = BC^2 - BD^2 = (12\sqrt{2})^2 - 12^2 = 12^2(2) - 12^2 = 12^2$$

Puisque $CD > 0$, alors $CD = 12$.
Puisque $AC = AD + DC$, alors $AC = 5 + 12$, ou $AC = 17$.

(c) *Solution 1*

L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du carré $OABC$ moins l'aire du triangle OCD.
Puisque le carré $OABC$ a des côtés de longueur 6, son aire est égale à 6^2, ou 36.
On sait que $OC = 6$.
Puisque la droite a pour équation $y = 2x$, elle a une pente de 2.
Puisque la droite a une pente de 2, alors $\dfrac{OC}{CD} = 2$.
Puisque $OC = 6$, alors $CD = 3$.
L'aire du triangle OCD est donc égale à $\frac{1}{2}(OC)(CD)$, ou $\frac{1}{2}(6)(3)$, ou 9.
L'aire de la région ombrée est égale à $36 - 9$, ou 27.

Solution 2

Puisque le carré $OABC$ a des côtés de longueur 6, alors $OA = AB = CB = OC = 6$.
Puisque la droite a une pente de 2, alors $\dfrac{OC}{CD} = 2$.
Puisque $OC = 6$, alors $CD = 3$.
Puisque $CB = 6$, $CD = 3$ et $DB = CB - CD$, alors $DB = 3$.
La région ombrée est un trapèze avec bases OA et DB et hauteur AB. Or, $DB = 3$, $OA = 6$ et $AB = 6$.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $\frac{1}{2}(DB + OA)(AB)$, ou $\frac{1}{2}(3 + 6)(6)$, ou 27.

3. (a) On a : $\left(\sqrt{4+\sqrt{4}}\right)^4 = \left(\sqrt{4+2}\right)^4 = \left(\sqrt{6}\right)^4 = \left(\left(\sqrt{6}\right)^2\right)^2 = 6^2 = 36$.

(b) Puisque y est un entier, alors $8 - y^2$ est un entier.
Donc $\sqrt{23-x}$ est un entier et $23 - x$ est donc un carré parfait.
Puisque x est un entier strictement positif, alors $23 - x < 23$ et $23 - x$ doit donc être un carré parfait inférieur à 23.
On remplit un tableau des valeurs possibles de $23-x$ et des valeurs x, de $\sqrt{23-x} = 8-y^2$, de y^2 et de y :

$23 - x$	x	$\sqrt{23-x} = 8 - y^2$	y^2	y
16	7	4	4	± 2
9	14	3	5	$\pm\sqrt{5}$
4	19	2	6	$\pm\sqrt{6}$
1	22	1	7	$\pm\sqrt{7}$
0	23	0	8	$\pm\sqrt{8}$

Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, on doit avoir $(x, y) = (7, 2)$.
(Puisque l'énoncé affirmait qu'il n'y avait qu'un seul tel couple, on pouvait s'arrêter dès la première ligne du tableau.)

(c) Puisque la droite d'équation $y = mx+2$ passe au point $(1, 5)$, les coordonnées $(1, 5)$ vérifient l'équation de la droite. Donc $5 = m + 2$, d'où $m = 3$.
Puisque la parabole d'équation $y = ax^2 + 5x - 2$ passe au point $(1, 5)$, les coordonnées $(1, 5)$ vérifient l'équation de la parabole. Donc $5 = a + 5 - 2$, d'où $a = 2$.
Pour déterminer les coordonnées de Q, on détermine le deuxième point d'intersection de la droite d'équation $y = 3x + 2$ et de la parabole d'équation $y = 2x^2 + 5x - 2$. À ce point, la valeur de y est la même sur les deux courbes. Donc :

$$\begin{aligned}2x^2+5x-2&=3x+2\\2x^2+2x-4&=0\\x^2+x-2&=0\\(x+2)(x-1)&=0\end{aligned}$$

Donc $x = 1$ ou $x = -2$.
Puisque P a pour abscisse 1, alors Q a pour abscisse -2.
Puisque Q est sur la droite d'équation $y = 3x + 2$, alors $y = 3(-2) + 2$, ou $y = -4$.
Pour résumer : (i) $m = 3$, (ii) $a = 2$ et (iii) les coordonnées de Q sont $(-2, -4)$.

4. (a) Puisque $80 = 2^4 \cdot 5$, ses diviseurs positifs sont $1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40$ et 80.
Un entier n a exactement deux diviseurs communs avec 80 si ces diviseurs sont 1 et 2 ou bien 1 et 5. (1 est un diviseur commun avec n'importe quel entier. Le deuxième diviseur commun doit être un nombre premier, car un diviseur composé ferait en sorte qu'il y aurait au moins un autre diviseur commun premier.)
Puisque $1 \leq n \leq 30$ et que n est un multiple de 2 ou de 5, alors les valeurs possibles de n parviennent de la liste :

$$2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 28, 30$$

On retire les multiples de 4 de cette liste (puisqu'ils partageraient les diviseurs $1, 2$ et 4 avec 80) et les multiples de 10 de cette liste (puisqu'ils partageraient au moins les diviseurs $1, 2, 5$ et 10 avec 80). Il reste la liste :

$$2, 5, 6, 14, 15, 18, 22, 25, 26$$

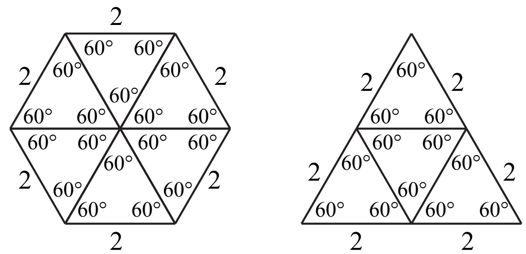
N'importe quel nombre de cette liste a deux diviseurs communs avec 80, soit 1 et 2, ou bien 1 et 5.
Il y a 9 tels entiers.

(b) On commence par $f(50)$ et on utilise les caractéristiques de la fonction jusqu'à ce qu'on arrive à $f(1)$:

$$\begin{aligned}f(50)&=f(25) && \text{(puisque 50 est pair et que } \tfrac{1}{2}(50)=25)\\&=f(24)+1 && \text{(puisque 25 est impair et que } 25-1=24)\\&=f(12)+1 && (\tfrac{1}{2}(24)=12)\\&=f(6)+1 && (\tfrac{1}{2}(12)=6)\\&=f(3)+1 && (\tfrac{1}{2}(6)=3)\\&=(f(2)+1)+1 && (3-1=2)\\&=f(1)+1+1 && (\tfrac{1}{2}(2)=1)\\&=1+1+1 && (f(1)=1)\\&=3\end{aligned}$$

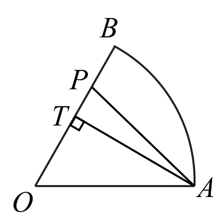
Donc $f(50) = 3$.

5. (a) Puisque l'hexagone régulier a 6 côtés et un périmètre de 12, ses côtés ont une longueur de 2.
Puisque le triangle équilatéral PQR a un périmètre de 12, ses côtés ont une longueur de 4.
On considère des triangles équilatéraux avec des côtés de longueur 2.
On peut combiner six de ces triangles pour former un hexagone régulier avec des côtés de longueur 2. On peut aussi combiner quatre de ces triangles pour former un triangle équilatéral avec des côtés de longueur 4.



Au centre de l'hexagone, les six triangles équilatéraux forment un angle au centre de $6 \cdot 60°$, ou $360°$ (un angle plein). Au milieu de chaque côté du grand triangle équilatéral, trois petits triangles équilatéraux forment un angle de $180°$ (un angle plat), puisque $3 \cdot 60° = 180°$.
Or, chaque côté de l'hexagone a une longueur de 2 et chaque angle intérieur de l'hexagone mesure $120°$, ce qui implique que l'hexagone est régulier. De même, le grand triangle est équilatéral.
Le grand triangle équilatéral et l'hexagone ont chacun un périmètre de 12.
Puisque le grand triangle est formé de 4 petits triangles identiques et que l'hexagone est formé de 6 des mêmes petits triangles identiques, le rapport de l'aire du triangle à celle de l'hexagone est égal à 4 : 6, ce qui est équivalent à 2 : 3.

(b) Puisque le secteur AOB est $\frac{1}{6}$ d'un disque complet de rayon 18, son aire est égale à $\frac{1}{6}(\pi \cdot 18^2)$, ou 54π.
Puisque le segment AP coupe le secteur en deux régions de même aire, chaque région doit avoir une aire de $\frac{1}{2}(54\pi)$, ou 27π.
On détermine la longueur de OP pour laquelle le triangle POA a une aire de 27π.
Puisque le secteur AOB est $\frac{1}{6}$ d'un disque, alors $\angle AOB = \frac{1}{6}(360°)$, ou $\angle AOB = 60°$.
On abaisse une perpendiculaire de A jusqu'à T sur OB.



L'aire du triangle POA est égale à $\frac{1}{2}(OP)(AT)$.
Le triangle AOT est un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Puisque $AO = 18$, alors $AT = \frac{\sqrt{3}}{2}(AO)$, ou $AT = 9\sqrt{3}$.
Pour que l'aire du triangle POA soit égale à 27π, on doit avoir $\frac{1}{2}(OP)(9\sqrt{3}) = 27\pi$.
On doit donc avoir $OP = \dfrac{54\pi}{9\sqrt{3}}$, ou $OP = \dfrac{6\pi}{\sqrt{3}}$, ou $OP = 2\sqrt{3}\pi$.
(On aurait pu utiliser le fait que l'aire du triangle POA est égale à $\frac{1}{2}(OA)(OP)\sin(\angle POA)$.)

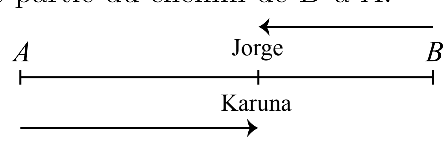
6. (a) Soit $\theta = 10k°$.

Les deux inéquations données deviennent ainsi $0° < \theta < 180°$ et $\dfrac{5\sin\theta - 2}{\sin^2\theta} \geq 2$.
Lorsque $0° < \theta < 180°$, on a $\sin\theta \neq 0$.
On peut ainsi multiplier chaque membre d'une inéquation par $\sin^2\theta$, qui est positif, et obtenir les inéquations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{5\sin\theta - 2}{\sin^2\theta} &\geq 2 \\
5\sin\theta - 2 &\geq 2\sin^2\theta \\
0 &\geq 2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 \\
0 &\geq (2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 2)
\end{aligned}$$

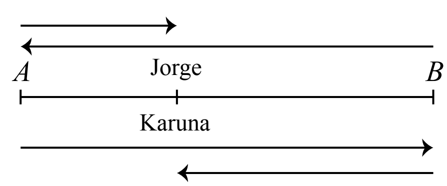
Puisque $\sin\theta \leq 1$, alors $\sin\theta - 2 \leq -1 < 0$ pour toutes valeurs de θ.
Donc $(2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 2) \leq 0$ précisément lorsque $2\sin\theta - 1 \geq 0$.
Or $2\sin\theta - 1 \geq 0$ précisément lorsque $\sin\theta \geq \frac{1}{2}$.
L'inéquation est vérifiée précisément lorsque $\frac{1}{2} \leq \sin\theta \leq 1$.
On sait que $\sin 30° = \sin 150° = \frac{1}{2}$ et que $0° < \theta < 180°$.
Lorsque $\theta = 0°$, on a $\sin\theta = 0$.
De $\theta = 0°$ jusqu'à $\theta = 30°$, la valeur de $\sin\theta$ augmente de 0 jusqu'à $\frac{1}{2}$.
De $\theta = 30°$ jusqu'à $\theta = 150°$, la valeur de $\sin\theta$ augmente de $\frac{1}{2}$ jusqu'à 1, puis elle diminue jusqu'à $\frac{1}{2}$.
De $\theta = 150°$ jusqu'à $\theta = 180°$, la valeur de $\sin\theta$ diminue de $\frac{1}{2}$ jusqu'à 0.
L'inéquation initiale est donc vérifiée précisément lorsque $30° \leq \theta \leq 150°$, ce qui est équivalent à $30° \leq 10k° \leq 150°$ et à $3 \leq k \leq 15$.
Les valeurs entières de k dans cet intervalle sont $k = 3, 4, 5, 6{,}7{,}8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$.
Il y a 13 valeurs de k.

(b) Supposons que Karuna et Jorge se rencontrent la première fois après t_1 secondes et la deuxième fois après t_2 secondes.
Lorsqu'ils se rencontrent la première fois, Karuna a parcouru une partie du chemin de A à B et Jorge a parcouru une partie du chemin de B à A.



À ce moment, la somme des distances qu'ils ont parcourues est égale à la distance entre A et B.
Puisque Karuna a couru à une vitesse de 6 m/s pendant t_1 secondes, elle a parcouru $6t_1$ m.
Puisque Jorge a couru à une vitesse de 5 m/s pendant t_1 secondes, il a parcouru $5t_1$ m.
Donc $6t_1 + 5t_1 = 297$, d'où $11t_1 = 297$, ou $t_1 = 27$.

Lorsqu'ils se rencontrent la deuxième fois, Karuna a couru de A à B et elle est en train de retourner vers A, tandis que Jorge a couru de B à A et il est en train de retourner vers B. En effet, Jorge se rend à A à mi-chemin de son parcours avant que Karuna ne revienne à A à la fin de son parcours.



Puisque les deux terminent leur course après 99 secondes, il reste à chacun $99 - t_2$ secondes à courir.
À ce moment, la somme des distances qu'il leur reste à parcourir est égale à la distance entre A et B.
Puisque Karuna courra à une vitesse de 6 m/s pendant ces $(99 - t_2)$ secondes, il lui reste $6(99 - t_2)$ m à parcourir.
Puisque Jorge courra à une vitesse de 7,5 m/s pendant ces $(99 - t_2)$ secondes, il lui reste $7{,}5(99 - t_2)$ m à parcourir.
Donc $6(99-t_2)+7{,}5(99-t_2) = 297$, d'où $13{,}5(99-t_2) = 297$, ou $99-t_2 = 22$, ou $t_2 = 77$.

Pour calculer la valeur de t_2, on pourrait aussi remarquer que lorsque Karuna et Jorge se rencontrent la deuxième fois, chacun a parcouru la distance de A à B une fois et ils sont sur leur retour.
Chacun a donc parcouru la distance de A à B et la somme des distances qu'il leur reste à parcourir est égale à la distance de A à B. Ces trois distances ont une somme de $3 \cdot 297$ m, ou 891 m.
Karuna a couru à une vitesse de 6 m/s pendant t_2 secondes. Elle a donc parcouru une distance de $6t_2$ m.
Jorge a parcouru les premiers 297 m à une vitesse de 5 m/s. Il a donc mis $\frac{297}{5}$ s pour le faire. Pendant les $(t_2 - \frac{297}{5})$ secondes suivantes, il a couru à une vitesse de 7,5 m/s. Il a donc parcouru une distance totale de $\big(297 + 7{,}5(t_2 - \frac{297}{5})\big)$ m. Donc :

$$\begin{aligned} 6t_2 + 297 + 7{,}5(t_2 - \tfrac{297}{5}) &= 891 \\ 13{,}5t_2 &= 891 - 297 + 7{,}5 \cdot \tfrac{297}{5} \\ 13{,}5t_2 &= 1039{,}5 \\ t_2 &= 77 \end{aligned}$$

Donc, Karuna et Jorge se sont rencontrés après 27 secondes et après 77 secondes.

7. (a) *Solution 1*

Étant donné un groupe de n personnes, il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ choix possibles de deux personnes :

Il y a n choix possibles pour la première personne.
Pour chacun de ces n choix, il y a $n-1$ choix possibles pour la deuxième personne.
Il y a donc $n(n-1)$ choix possibles de deux personnes en ordre.
Or, chaque couple a été choisi deux fois (par exemple, la personne A suivie de la personne B et la personne B suivie de la personne A). Le nombre de choix de deux personnes, sans ordre, est donc égal à $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

On nomme les canots W, X, Y et Z.
On détermine d'abord le nombre de façons d'affecter 8 personnes dans 4 canots.
On choisit 2 personnes pour le canot W. Il y a $\dfrac{8 \cdot 7}{2}$ choix. Il reste 6 personnes et 3 canots.
On choisit 2 personnes pour le canot X. Il y a $\dfrac{6 \cdot 5}{2}$ choix. Il reste 4 personnes pour 2 canots.
On choisit 2 personnes pour le canot Y. Il y a $\dfrac{4 \cdot 3}{2}$ choix. Il reste 2 personnes pour le dernier canot.
Il y a 1 choix pour le dernier canot Z.

Le nombre de façons d'affecter 8 personnes dans 4 canots est donc égal à :

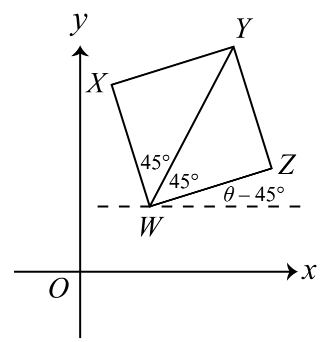
$$\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2^3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

On détermine maintenant le nombre de façons d'affecter les 8 personnes de manière qu'il n'y ait pas deux des trois personnes, Annie, Dany ou Fannie, dans le même canot.
Annie peut être affectée à l'un de 4 canots.
Dany peut ensuite être affecté à un de 3 canots, puisqu'il ne peut être affecté au même canot qu'Annie.
Fannie peut ensuite être affectée à un de 2 canots, puisqu'elle ne peut être affectée au même canot qu'Annie ou Dany.
Il y a ensuite 5 choix pour la personne qui accompagnera Annie, puis 4 choix pour la personne qui accompagnera Dany, puis 3 choix pour la personne qui accompagnera Fannie.
Les 2 personnes qui restent iront dans le canot vide.
Il y a donc $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ façons d'affecter les 8 personnes dans 4 canots de manière qu'il n'y ait pas deux des trois personnes, Annie, Dany ou Fannie, dans le même canot.

Donc, la probabilité qu'il n'y ait pas deux des triplets Annie, Dany et Fannie dans un même canot est égale à : $\dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{7 \cdot 6} = \dfrac{24}{42} = \dfrac{4}{7}$.

Solution 2
Soit p la probabilité que deux des triplets Annie, Dany et Fannie soient dans le même canot.
La probabilité que l'on cherche est donc égale à $1 - p$.
Soit q la probabilité qu'Annie et Dany soient dans le même canot.
Par symétrie, la probabilité qu'Annie et Fannie soient dans le même canot est aussi égale à q, de même que probabilité que Dany et Fannie soient dans le même canot.
Donc, $p = 3q$.
On détermine q.
On affecte Annie à un canot. Puisqu'il reste 7 personnes qui pourraient être affectées au même canot, la probabilité que Dany soit affecté au même canot est égale à $\frac{1}{7}$. Les 6 autres personnes peuvent être affectées de n'importe quelle façon aux autres canots.
La probabilité qu'Annie et Dany soient affectées au même canot est donc égale à $q = \frac{1}{7}$.
La probabilité que deux des triplets Annie, Dany et Fannie soient dans le même canot est donc égale à $1 - 3 \cdot \frac{1}{7}$, ou $\frac{4}{7}$.

(b) *Solution 1*
On suppose que WY forme un angle θ avec l'horizontale.



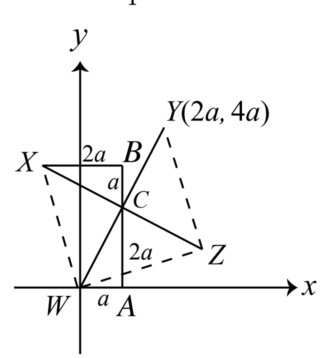
Puisque WY a une pente de 2, alors $\tan\theta = 2$, puisqu'une droite qui forme un angle θ avec l'horizontale a pour pente $\tan\theta$.

Puisque $\tan\theta = 2 > 1 = \tan 45^\circ$, alors $\theta > 45^\circ$.
Or, WY est la bissectrice de l'angle droit ZWX.
Donc $\angle ZWY = \angle YWX = 45^\circ$.
WX forme donc un angle de $\theta + 45^\circ$ avec l'horizontale et WZ forme un angle de $\theta - 45^\circ$ avec l'horizontale. Puisque $\theta > 45^\circ$, alors $\theta - 45^\circ > 0$ et $\theta + 45^\circ > 90^\circ$.
Puisque WZ et XY sont parallèles, ils ont la même pente.
Pour calculer les pentes de WX et de WZ, on calcule $\tan(\theta + 45^\circ)$ et $\tan(\theta - 45^\circ)$.
On utilise les identités $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ et $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ pour obtenir :

$$\tan(\theta + 45^\circ) = \frac{\tan\theta + \tan 45^\circ}{1 - \tan\theta\tan 45^\circ} = \frac{2+1}{1-(2)(1)} = -3$$
$$\tan(\theta - 45^\circ) = \frac{\tan\theta - \tan 45^\circ}{1 - \tan\theta\tan 45^\circ} = \frac{2-1}{1+(2)(1)} = \frac{1}{3}$$

La somme des pentes de WX et de XY est donc égale à $-3 + \frac{1}{3}$, ou $-\frac{8}{3}$.

Solution 2
On considère un carré $WXYZ$ dont la diagonale WY a une pente de 2.
On déplace le carré par translation de manière que W soit à l'origine $(0, 0)$. Une translation n'altère pas les pentes des segments de droites.
Soit $(2a, 2b)$ les coordonnées de Y, a et b étant des nombres non nuls.
Puisque WY a une pente de 2, alors $\dfrac{2b - 0}{2a - 0} = 2$, d'où $2b = 4a$, ou $b = 2a$.
Les coordonnées de Y sont donc $(2a, 4a)$.
Soit C le centre du carré $WXYZ$.
Puisque C est le milieu de WY, C a pour coordonnées $(a, 2a)$.
On déterminera les pentes de WX et de XY à partir des coordonnées de X.
On considère le segment XC.
Puisque les diagonales d'un carré sont perpendiculaires, XC est perpendiculaire à WC.
Puisque WC a une pente de 2, alors XC et ZC ont pour pente $-\frac{1}{2}$.
Puisque les diagonales d'un carré ont a même longueur et que C est le milieu de chaque diagonale, alors $XC = WC$.
On considère le triangle CAW, dans la figure suivante, dont WA est horizontal et AC est vertical. Puisque C a pour coordonnées $(a, 2a)$, alors $WA = a$ et $AC = 2a$.
On forme le triangle rectangle XBC tel que XB soit horizontal et CB soit vertical. Le segment CB est donc un prolongement du segment AC. Puisque l'angle WCX est droit et que l'angle ACB est plat, les angles WCA et CXB sont complémentaires. Les triangles rectangles CAW et XBC sont donc semblables. Puisque WC et XC ont la même longueur, les triangles CAW et XBC sont isométriques. Donc $BC = a$ et $BX = 2a$.



Pour se déplacer du point $C(a, 2a)$ au point X, on se déplace de $2a$ unités vers la gauche et de a unités vers le haut.
X a donc pour coordonnées $(a - 2a, 2a + a)$, ou $(-a, 3a)$.
La pente de WX est donc égale à $\dfrac{3a - 0}{-a - 0}$, ou -3.
Puisque XY est perpendiculaire à WX, sa pente est égale à $-\dfrac{1}{-3}$, ou $\dfrac{1}{3}$.
La somme des pentes de WX et de XY est égale à $-3 + \dfrac{1}{3}$, ou $-\dfrac{8}{3}$.

8. (a) Puisque la base d'un logarithme doit être positive et qu'elle ne peut être égale à 1, alors $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq \frac{1}{3}$.
Ceci nous assure que $\log 2x$ et $\log 3x$ existent et qu'ils n'égalent pas 0. Cela nous servira lorsqu'on changera de base.
On remarque que $48 = 2^4 \cdot 3$, $162 = 3^4 \cdot 2$, $\sqrt[3]{3} = 3^{1/3}$ et $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$.
On utilise les lois des logarithmes pour transformer les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\log_{2x}(48\sqrt[3]{3}) &= \log_{3x}(162\sqrt[3]{2}) \\
\frac{\log(2^4 \cdot 3 \cdot 3^{1/3})}{\log 2x} &= \frac{\log(3^4 \cdot 2 \cdot 2^{1/3})}{\log 3x} \qquad \text{(formule pour changement de base)} \\
\frac{\log(2^4 \cdot 3^{4/3})}{\log 2 + \log x} &= \frac{\log(3^4 \cdot 2^{4/3})}{\log 3 + \log x} \qquad (\log ab = \log a + \log b) \\
\frac{\log(2^4) + \log(3^{4/3})}{\log 2 + \log x} &= \frac{\log(3^4) + \log(2^{4/3})}{\log 3 + \log x} \qquad (\log ab = \log a + \log b) \\
\frac{4\log 2 + \frac{4}{3}\log 3}{\log 2 + \log x} &= \frac{4\log 3 + \frac{4}{3}\log 2}{\log 3 + \log x} \qquad (\log(a^c) = c\log a)
\end{aligned}$$

On multiplie chaque membre par le produit des dénominateurs (ce qui est équivalent au produit en croix) :

$$(4\log 2 + \tfrac{4}{3}\log 3)(\log 3 + \log x) = (4\log 3 + \tfrac{4}{3}\log 2)(\log 2 + \log x)$$

On développe le membre de gauche qui devient :

$$4\log 2\log 3 + \tfrac{4}{3}(\log 3)^2 + (4\log 2 + \tfrac{4}{3}\log 3)\log x$$

On développe le membre de droite qui devient :

$$4\log 3\log 2 + \tfrac{4}{3}(\log 2)^2 + (4\log 3 + \tfrac{4}{3}\log 2)\log x$$

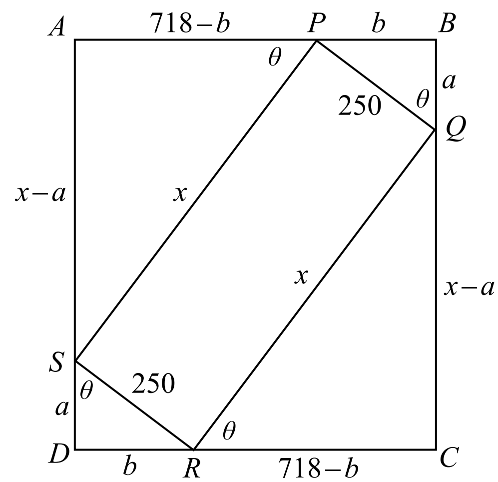
On obtient l'équation suivante que l'on simplifie pour obtenir les équations équivalentes qui suivent :

$$\begin{aligned}
\tfrac{4}{3}(\log 3)^2 - \tfrac{4}{3}(\log 2)^2 &= \log x(4\log 3 + \tfrac{4}{3}\log 2 - 4\log 2 - \tfrac{4}{3}\log 3) \\
\tfrac{4}{3}(\log 3)^2 - \tfrac{4}{3}(\log 2)^2 &= \log x\left(\tfrac{8}{3}\log 3 - \tfrac{8}{3}\log 2\right) \\
(\log 3)^2 - (\log 2)^2 &= 2\log x(\log 3 - \log 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log x &= \frac{(\log 3)^2 - (\log 2)^2}{2(\log 3 - \log 2)} \\
\log x &= \frac{(\log 3 - \log 2)(\log 3 + \log 2)}{2(\log 3 - \log 2)} \\
\log x &= \frac{\log 3 + \log 2}{2} \\
\log x &= \tfrac{1}{2}\log 6 \\
\log x &= \log(\sqrt{6})
\end{aligned}$$

Donc $x = \sqrt{6}$.

(b) Soit $BC = x$, $PB = b$ et $BQ = a$.
Puisque $BC = x$, alors $AD = PS = QR = x$.
Puisque $BC = x$ et que $BQ = a$, alors $QC = x - a$.
Puisque $AB = 718$ et que $PB = b$, alors $AP = 718 - b$.
On sait que $PQ = SR = 250$.
Soit $\angle BQP = \theta$.
Puisque le triangle PBQ est rectangle en B, alors $\angle BPQ = 90^\circ - \theta$.
Puisque BQC est un angle plat et que $\angle PQR = 90^\circ$, alors $\angle RQC = 180^\circ - 90^\circ - \theta$, ou $\angle RQC = 90^\circ - \theta$.
Puisque APB est un angle plat et que $\angle SPQ = 90^\circ$, alors $\angle APS = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \theta)$, ou $\angle APS = \theta$.
Puisque les triangles SAP et QCR sont rectangles et qu'ils ont un angle en commun avec le triangle PBQ, ces trois triangles sont semblables.



De la même manière, on peut montrer que le triangle RDS est semblable à ces trois triangles.
Puisque $RS = PQ$, le triangle RDS et le triangle PBQ sont isométriques (angle-côté-angle).
De même, le triangle SAP et le triangle QCR sont isométriques.
On a donc $AS = x - a$, $SD = a$, $DR = b$ et $RC = 718 - b$.

Puisque les triangles SAP et PBQ sont semblables, alors $\dfrac{SA}{PB} = \dfrac{AP}{BQ} = \dfrac{SP}{PQ}$.

Donc $\dfrac{x-a}{b} = \dfrac{718-b}{a} = \dfrac{x}{250}$.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PBQ, $a^2 + b^2 = 250^2$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle SAP :

$$\begin{aligned}
x^2 &= (x-a)^2 + (718-b)^2 \\
x^2 &= x^2 - 2ax + a^2 + (718-b)^2 \\
0 &= -2ax + a^2 + (718-b)^2 \qquad (*)
\end{aligned}$$

Puisque $a^2 + b^2 = 250^2$, alors $a^2 = 250^2 - b^2$.

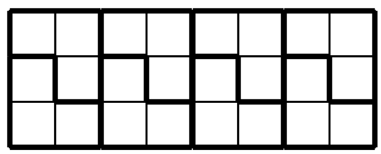
Puisque $\dfrac{718-b}{a} = \dfrac{x}{250}$, alors $ax = 250(718-b)$.

En reportant $a^2 = 250^2 - b^2$ et $ax = 250(718-b)$ dans $(*)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= -2(250)(718-b) + 250^2 - b^2 + (718-b)^2 \\
b^2 &= 250^2 - 2(250)(718-b) + (718-b)^2 \\
b^2 &= ((718-b) - 250)^2 \qquad \text{(puisque } y^2 - 2yz + z^2 = (y-z)^2\text{)} \\
b^2 &= (468-b)^2 \\
b &= 468 - b \qquad \text{(puisque } b \neq b - 468\text{)} \\
2b &= 468 \\
b &= 234
\end{aligned}$$

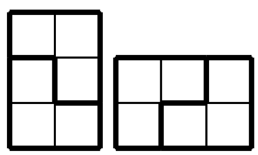
Puisque $a^2 = 250^2 - b^2$, alors $a^2 = 250^2 - 234^2$, ou $a^2 = (250 + 234)(250 - 234)$, ou $a^2 = 484 \cdot 16$, ou $a^2 = 22^2 \cdot 4^2$, ou $a^2 = 88^2$. Donc $a = 88$.
Donc $x = \dfrac{250(718-b)}{a}$, ou $x = \dfrac{250 \cdot 484}{88}$, ou $x = 1375$. Donc $BC = 1375$.

9. (a) Voici un pavage d'un rectangle 3×8 :



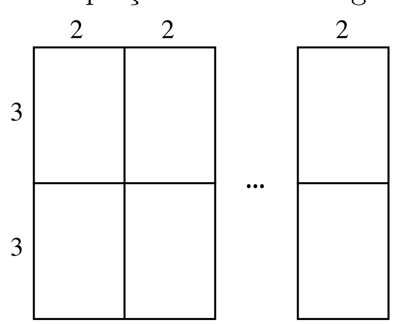
Plusieurs autres pavages sont possibles.

(b) On remarque qu'il est possible de paver tout rectangle 3×2 ou 2×3 :



On remarque aussi qu'il est impossible de paver un rectangle 6×1, puisqu'un L-triomino a une largeur de 2.
On montrera qu'il est possible de paver n'importe quel rectangle $6 \times L$ pour lequel $L \geq 2$. Pour le faire, on montrera qu'un tel rectangle $6 \times L$ peut être formé de rectangles 3×2 et de rectangles 2×3. Puisque chacun de ces rectangles peut être pavé par des L-triominos, le grand rectangle peut aussi être pavé en combinant ces pavages.

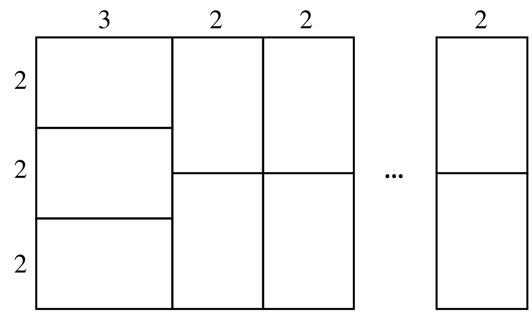
1$^{\text{er}}$ cas : L est pair
Soit $L = 2k$, k étant un entier strictement positif.
On construit un rectangle $6 \times 2k$ en plaçant k rectangles 6×2 l'un à côté de l'autre. Chaque rectangle 6×2 est obtenu en plaçant deux rectangles 3×2 l'un au-dessus de l'autre.



Il est donc possible de paver un tel rectangle.

2$^{\text{e}}$ cas : L est impair et $L \geq 3$
Soit $L = 2k + 1$, k étant un entier strictement positif.

On construit un rectangle $6 \times (2k+1)$ en construisant un rectangle 6×3 et en plaçant $k-1$ rectangles 6×2 à ses côtés. On sait que $2k+1 = 3+2(k-1)$ et que $k-1 \geq 0$, puisque $k \geq 1$.
Le rectangle 6×3 est formé en plaçant trois rectangles 2×3 l'un au-dessus de l'autre.
Chaque rectangle 6×2 est obtenu en plaçant deux rectangles 3×2 l'un au-dessus de l'autre.



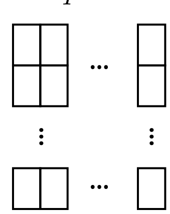
Il est donc possible de paver un tel rectangle.

Il est donc possible de paver un rectangle $6 \times L$ à l'aide de L-triominos lorsque $L \geq 2$.

(c) Soit (H, L) un couple d'entiers ($H \geq 4$ et $L \geq 4$).
Puisque chaque triomino a une aire de 3, l'aire du rectangle qui doit être pavé doit être un multiple de 3 (puisqu'il sera recouvert de triominos qui ont chacun une aire de 3).
Puisqu'un rectangle $H \times L$ a une aire égale à HL, il faut que HL soit un multiple of 3, ce qui implique que H ou L soit un multiple de 3.
Puisqu'un rectangle $a \times b$ peut être pavé si et seulement si un rectangle $b \times a$ peut être pavé (on peut s'en convaincre en faisant subir des rotations de 90° comme on l'a fait avec les rectangles 3×2 et 2×3 dans la partie (b)), on peut supposer, sans perte de généralité, que H est divisible par 3.
On montrera que si H est divisible par 3, alors tout rectangle $H \times L$ ($H \geq 4$ et $L \geq 4$) peut être pavé.

1$^{\text{er}}$ cas : H est un nombre pair divisible par 3
Dans ce cas, H est un multiple de 6. Soit $H = 6m$, m étant un entier strictement positif.
Puisque $L \geq 4$, on sait qu'un rectangle $6 \times L$ peut être pavé.
En plaçant m rectangles $6 \times L$ l'un au-dessus de l'autre, on obtient un rectangle $6m \times L$.
Puisque chaque rectangle $6 \times L$ peut être pavé, alors le rectangle $6m \times L$ peut être pavé.

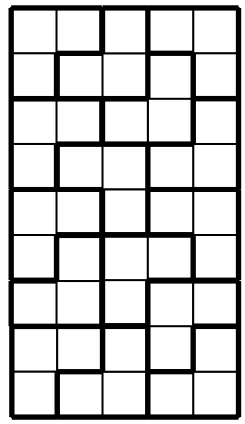
2$^{\text{e}}$ cas : H est un nombre impair divisible par 3, L est pair
Soit $H = 3q$ et $L = 2r$, q étant un entier positif impair et r étant un entier strictement positif .
Pour paver un rectangle $3q \times 2r$, on place qr rectangles 3×2 en q rangées et r colonnes :



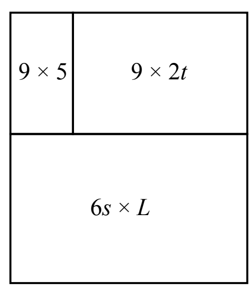
Il est donc possible de paver n'importe quel rectangle dans ce cas. (On remarque que l'on n'a pas utilisé le fait que q était impair.)

3^e^ cas : H est un nombre impair divisible par 3, L est impair

Puisque $H \geq 4$ et que $L \geq 4$, le rectangle qui a les plus petites valeurs possibles de H et de L mesure 9×5. Il peut être pavé comme suit :



(Il existe d'autres façons de paver ce rectangle.)
Puisque H est un multiple impair de 3 et que $H \geq 4$, on peut écrire $H = 9 + 6s$, s étant un entier ($s \geq 0$).
Puisque L est impair et que $L \geq 5$, on peut écrire $L = 5 + 2t$, t étant un entier ($t \geq 0$).
Le rectangle $H \times L$ est donc un rectangle $(9 + 6s) \times (5 + 2t)$.
On découpe ce rectangle en trois rectangles, soit un rectangle 9×5, un rectangle $9 \times 2t$ et un rectangle $6s \times L$:



(Si $s = 0$ ou $t = 0$, il y aura moins de trois rectangles.)
Il est possible de paver le rectangle 9×5, comme on l'a démontré ci-haut.
Si $t > 0$, il est possible de paver le rectangle $9 \times 2t$, comme on l'a démontré dans le 2^e^ cas.
Si $s > 0$, il est possible de paver le rectangle $6s \times L$, comme on l'a démontré dans le 1^er^ cas.
Il est donc possible de paver le rectangle $H \times L$.

Ces trois cas ont démontré qu'il est possible de paver un rectangle $H \times L$ ($H \geq 4$ et $L \geq 4$) lorsque H est un multiple de 3.
Puisque H et L peuvent être changés l'un pour l'autre et que H ou L doit être un multiple de 3, alors il est possible de paver un rectangle $H \times L$ ($H \geq 4$ et $L \geq 4$) précisément lorsque H ou L est un multiple de 3.

10. (a) On remplit une partie du tableau sachant que $A_0 = A_1 = A_2 = 0$ et que $A_3 = 1$:

$\cdots$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\cdots$
$\cdots$	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\cdots$

$\cdots$	0	0	0	1	A_4	A_5	$\cdots$
$\cdots$	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\cdots$

Puisque A_1 est la moyenne de A_0, de B_1 et de A_2, alors $A_1 = \dfrac{A_0 + B_1 + A_2}{3}$, ou $3A_1 = A_0 + B_1 + A_2$.
Donc $3(0) = 0 + B_1 + 0$, d'où $B_1 = 0$.
Puisque A_2 est la moyenne de A_1, de B_2 et de A_3, alors $3A_2 = A_1 + B_2 + A_3$. Donc $3(0) = 0 + B_2 + 1$, d'où $B_2 = -1$.
Puisque B_2 est la moyenne de B_1, de A_2 et de B_3, alors $3B_2 = B_1 + A_2 + B_3$.
Donc $3(-1) = 0 + 0 + B_3$, d'où $B_3 = -3$.
On a donc :

$\cdots$	0	0	0	1	A_4	A_5	$\cdots$
$\cdots$	B_0	0	-1	-3	B_4	B_5	$\cdots$

Puisque A_3 est la moyenne de A_2, de B_3 et de A_4, alors $3A_3 = A_2 + B_3 + A_4$.
Donc $3(1) = 0 + (-3) + A_4$, d'où $A_4 = 6$.

(b) On considère une partie du tableau :

$\cdots$	A_{k-1}	A_k	A_{k+1}	$\cdots$
$\cdots$	B_{k-1}	B_k	B_{k+1}	$\cdots$

Donc :

$$\begin{aligned}
3S_k &= 3A_k + 3B_k \\
&= 3\left(\frac{A_{k-1} + B_k + A_{k+1}}{3}\right) + 3\left(\frac{B_{k-1} + A_k + B_{k+1}}{3}\right) \\
&= A_{k-1} + B_k + A_{k+1} + B_{k-1} + A_k + B_{k+1} \\
&= (A_{k-1} + B_{k-1}) + (A_k + B_k) + (A_{k+1} + B_{k+1}) \\
&= S_{k-1} + S_k + S_{k+1}
\end{aligned}$$

Puisque $3S_k = S_{k-1} + S_k + S_{k+1}$, alors $S_{k+1} = 2S_k - S_{k-1}$.

(c) *Démonstration de l'énoncé (P)*
On suppose que chaque nombre du tableau est un entier strictement positif.
On suppose aussi que les nombres du tableau ne sont pas tous égaux.
Puisque tous les nombres du tableau sont strictement positifs, il doit y avoir un nombre minimal. Soit m le nombre minimal du tableau.
On choisit un nombre du tableau qui est égal à m, par exemple $A_r = m$, r étant un entier quelconque. S'il n'y a aucun nombre égal à m dans la première rangée, on trouvera $B_r = m$ dans la deuxième rangée.
Si les nombres A_j n'égalent pas tous m, alors en se déplaçant à gauche ou à droite dans la rangée, on arrivera à un nombre $A_t = m$, t étant un entier quelconque, dont un de ses voisins n'est pas égal à m. (Si ce n'était pas le cas, tous les nombres dans les deux directions seraient égaux à m.)
Si tous les nombres A_j égalent m, alors puisque les nombres du tableau n'égalent pas tous m, il y aura un nombre B_t qui n'est pas égal à m.
En d'autres mots, puisque les nombres du tableau ne sont pas tous égaux, il existe un entier t pour lequel $A_t = m$ et les nombres A_{t-1}, A_{t+1} et B_t n'égalent pas tous m.

Or $3m = 3A_t$ et $3A_t = A_{t-1} + B_t + A_{t+1}$. Donc $3m = A_{t-1} + B_t + A_{t+1}$.
Puisque A_{t-1}, B_t et A_{t+1} n'égalent pas tous m et que chacun est supérieur ou égal à m, alors un de ces nombres est supérieur à m.
Donc $A_{t-1} + B_t + A_{t+1} \geq m + m + (m+1) = 3m + 1 > 3m$, ce qui est une contradiction.
Notre supposition initiale que tous les nombres du tableau ne sont pas tous égaux est donc fausse. Donc, les nombres du tableau sont tous égaux. L'énoncé (P) est donc démontré.

Démonstration de l'énoncé (Q)
On suppose que tous les nombres du tableau sont des nombres réels strictement positifs.
On suppose aussi que les nombres du tableau ne sont pas tous égaux.
Comme dans la partie (b), on définit $S_k = A_k + B_k$ pour chaque entier k.
On définit aussi $D_k = A_k - B_k$ pour chaque entier k.

1re étape : On démontre que les nombres S_k forment une suite arithmétique

D'après la partie (b), $S_{k+1} = 2S_k - S_{k-1}$.
On récrit cette identité sous forme $S_{k+1} - S_k = S_k - S_{k-1}$. Puisque cette identité est vérifiée par tous les entiers k, la différence entre deux nombres consécutifs est la même pour tous les entiers k.
Cette différence est donc constante et la suite est donc une suite arithmétique.

2e étape : On démontre que S_k est une constante

On suppose que $S_0 = c$. Puisque $A_0 > 0$ et que $B_0 > 0$, alors $S_0 = c > 0$.
Puisque les termes S_k forment une suite arithmétique, la suite est constante, croissante ou décroissante.
Si la suite est croissante, la raison arithmétique, $d = S_1 - S_0$, est positive.
On remarque que $S_{-1} = c - d$, $S_{-2} = c - 2d$ et ainsi de suite.
Puisque c et d sont constants, alors en reculant assez loin dans la suite, on aura un terme négatif S_t, t étant un entier quelconque. On a donc une contradiction, puisque $A_t > 0$, $B_t > 0$ et que $S_t = A_t + B_t$.
La suite ne peut donc pas être croissante.
Si la suite est décroissante, la raison arithmétique, $d = S_1 - S_0$, est négative.
On remarque que $S_1 = c + d$, $S_2 = c + 2d$ et ainsi de suite.
Puisque c et d sont constants, alors en avançant assez loin dans la suite, on aura un terme négatif S_t, t étant un entier quelconque. On a donc une contradiction, puisque $A_t > 0$, $B_t > 0$ et que $S_t = A_t + B_t$.
La suite ne peut donc pas être décroissante.
Puisque tous les nombres sont strictement positifs et que les termes S_k forment une suite arithmétique, alors la suite de termes S_k est constante. Soit $S_k = c$ ($c > 0$) pour tous les entiers k.

3e étape : Déterminer l'intervalle des valeurs possibles de D_k

On remarque que $S_k = A_k + B_k = c$, que $A_k > 0$ et que $B_k > 0$, pour tous les entiers k.
Puisque $A_k > 0$, alors : $B_k = S_k - A_k = c - A_k < c$.
De même, $A_k < c$.
Donc $0 < A_k < c$ et $0 < B_k < c$.
Puisque $D_k = A_k - B_k$, alors $D_k < c - 0 = c$ et $D_k > 0 - c = -c$.
En d'autres mots, on a $-c < D_k < c$.

4^e étape : $D_{k+1} = 4D_k - D_{k-1}$

On utilise une approche semblable à celle de la solution de la partie (b) :

$$\begin{aligned} 3D_k &= 3A_k - 3B_k \\ 3D_k &= (A_{k-1} + B_k + A_{k+1}) - (B_{k-1} + A_k + B_{k+1}) \\ 3D_k &= (A_{k+1} - B_{k+1}) + (A_{k-1} - B_{k-1}) - (A_k - B_k) \\ 3D_k &= D_{k+1} + D_{k-1} - D_k \\ 4D_k - D_{k-1} &= D_{k+1} \end{aligned}$$

5^e étape : Dernière contradiction

On veut démontrer que $D_k = 0$ pour tous les entiers k.
Ceci démontrera que $A_k = B_k$ pour tous les entiers k.
Puisque $S_k = A_k + B_k = c$ pour tous les entiers k, ceci démontrera que $A_k = B_k = \frac{1}{2}c$ pour tous les entiers k, ce qui démontrera que tous les nombres du tableau sont égaux.
Supposons que $D_k \neq 0$, k étant un entier quelconque.
On peut supposer que $D_0 \neq 0$. (Si $D_0 = 0$, alors puisque le tableau est infini dans les deux directions, on peut déplacer le numérotage de manière qu'une colonne avec $D_k \neq 0$ est appelée colonne 0.)
Donc $D_0 > 0$ ou $D_0 < 0$.
On peut supposer que $D_0 > 0$. (Si $D_0 < 0$, on peut changer les deux rangées l'une pour l'autre de manière que D_0 soit positive.)
Supposons que $D_1 \geq D_0 > 0$.
Donc $D_2 = 4D_1 - D_0 \geq 4D_1 - D_1 = 3D_1$. Puisque $D_1 > 0$, ceci implique que $D_2 > D_1 > 0$.
De même, $D_3 = 4D_2 - D_1 \geq 4D_2 - D_2 = 3D_2 > D_2 > 0$. Puisque $D_2 \geq 3D_1$, alors $D_3 \geq 9D_1$.
En continuant de cette façon, on voit que $D_4 \geq 27D_1$, que $D_5 \geq 81D_1$ et ainsi de suite avec $D_k \geq 3^{k-1}D_1$ pour tous les entiers k ($k \geq 2$). Puisque la valeur de D_1 est un nombre réel fixe et strictement positif et que $D_k < c$ pour tous les entiers k, on a une contradiction, car la suite de termes 3^{k-1} est alors croissante sans borne, ce qui contredit le résultat de la 3^e étape.
On suppose alors que $D_1 < D_0$.
On récrit $D_{k+1} = 4D_k - D_{k-1}$ sous forme $D_{k-1} = 4D_k - D_{k+1}$.
Donc $D_{-1} = 4D_0 - D_1 > 4D_0 - D_0 = 3D_0 > D_0 > 0$.
On prolonge ce résultat en utilisant un argument semblable pour obtenir $D_{-j} > 3^j D_0$ pour tous les entiers strictement positifs j, ce qui nous amène à la même contradiction.
Puisqu'on a une contradiction dans tous les cas, on ne peut pas avoir $D_k \neq 0$ pour un entier quelconque k.

Puisque $D_k = 0$ et que $S_k = c$ pour tous les entiers k, alors $A_k = B_k = \frac{1}{2}c$ pour tous les entiers k. Donc, tous les nombres du tableau sont égaux.

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2017

le jeudi 6 avril 2017

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 7 avril 2017

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Puisque $5(2)+3(3) = 19$, le couple (a, b) d'entiers strictement positifs qui vérifie l'équation $5a + 3b = 19$ est $(2, 3)$. Donc $a = 2$ et $b = 3$.

(b) On écrit les premières puissances de 2 en ordre croissant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

On peut déterminer une puissance de 2 en multipliant la puissance précédente par 2.
D'après le tableau, la plus petite puissance de 2 supérieure à 5 est 8 ($2^3 = 8$) et la plus grande puissance de 2 inférieure à 2017 est 1024 ($2^{10} = 1024$). Puisque les valeurs de 2^n sont croissantes, ce sont les seules puissances de 2 dans cet intervalle.
Donc, les valeurs de n qui vérifient $5 < 2^n < 2017$ sont $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.
Il y a donc 8 entiers positifs n qui vérifient l'inéquation.

(c) Chacun des 600 euros que Jules a achetés a couté 1,50 \$.
Donc, les 600 euros ont couté $600 \times 1{,}50$ \$, ou 900 \$.
Lorsqu'il convertit ces euros en dollars, au taux de 1 \$ pour 0,75 euros, Jules reçoit $600 \text{ Euros} \times \dfrac{1{,}00\,\$}{0{,}75 \text{ euros}}$, ou $\dfrac{600\,\$}{0{,}75}$, ou 800 \$.
Donc, Jules avait 100 \$ en moins après les deux transactions ($900\,\$ - 800\,\$ = 100\,\$$).

2. (a) Puisque $x \neq 0$ et $x \neq 1$, on peut multiplier chaque membre de l'équation par $x(x-1)$ pour obtenir $\dfrac{5x(x-1)}{x(x-1)} = \dfrac{x(x-1)}{x} + \dfrac{x(x-1)}{x-1}$, ou $5 = (x-1) + x$.
Donc $5 = 2x - 1$, ou $2x = 6$, ou $x = 3$. Donc, la seule solution est $x = 3$.
(On peut reporter $x = 3$ dans l'équation initiale pour vérifier qu'il s'agit bien d'une solution.)

(b) La somme des nombres de la deuxième colonne est égale à $20 + 4 + (-12)$, ou 12.
Donc, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont une somme de 12.
Dans la première rangée, on a donc $0 + 20 + a = 12$, d'où $a = -8$.
Dans la diagonale allant du haut à gauche vers le bas à droite, on a $0 + 4 + b = 12$, d'où $b = 8$.
Dans la troisième colonne, on a $a = -8$ et $b = 8$, qui ont une somme de 0. Le troisième nombre doit donc être 12.
Dans la deuxième rangée, on a $c + 4 + 12 = 12$, d'où $c = -4$.
On a donc $a = -8$, $b = 8$ et $c = -4$.
On peut compléter le carré magique pour obtenir :

0	20	-8
-4	4	12
16	-12	8

(c) (i) Si $100^2 - n^2 = 9559$, alors $n^2 = 100^2 - 9559$, d'où $n^2 = 10\,000 - 9559$, ou $n^2 = 441$.
Puisque $n > 0$, alors $n = \sqrt{441}$, ou $n = 21$.

(ii) D'après (i), $9559 = 100^2 - 21^2$.
En exprimant la différence de carrés dans le membre de droite comme le produit d'une somme et d'une différence, on obtient :

$$9559 = (100 + 21)(100 - 21) = 121 \cdot 79$$

Donc $(a, b) = (121, 79)$ vérifie les conditions du problème.
(De plus, les couples $(a, b) = (79, 121), (869, 11), (11, 869)$ vérifient les conditions. On ne peut pas obtenir ces deux derniers couples de la même façon.)

3. (a) L'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à la somme de l'aire du triangle ABC et de celle du triangle ACD.
Puisque le triangle ABC est rectangle en B, son aire est égale à $\frac{1}{2}(AB)(BC)$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}(3)(4)$, ou 6.
Puisque le triangle ABC est rectangle en B, alors d'après le théorème de Pythagore, on a

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

puisque $AC > 0$. (On aurait pu affirmer que ABC est un triangle remarquable 3-4-5.)
Puisque le triangle ACD est rectangle en A, alors d'après le théorème de Pythagore, on a

$$AD = \sqrt{CD^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$$

puisque $AD > 0$. (On aurait pu affirmer que ACD est un triangle remarquable 5-12-13.)
L'aire du triangle ACD est égale à $\frac{1}{2}(AC)(AD)$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}(5)(12)$, ou 30.
L'aire du quadrilatère $ABCD$ est donc égale à $6 + 30$, ou 36.

(b) Soit a la base de chaque rectangle. Donc $QP = RS = TW = WX = UV = VY = a$.
Soit b la hauteur de chaque rectangle, c'est-à-dire que $QR = PS = TU = WV = XY = b$.
Le périmètre de la figure au complet est égale à :

$$QP + PS + SX + XY + VY + UV + TU + TR + QR$$

Il est donc égal à

$$a + b + SX + b + a + a + b + TR + b,$$

ou $3a + 4b + (SX + TR)$.
Or, $SX + TR = (TR + RS + SX) - RS = (TW + WX) - RS = a + a - a = a$.
Le périmètre de la figure au complet est donc égal à $4a + 4b$.
Or, chaque rectangle a un périmètre égal à $2a + 2b$ et on sait qu'il est égal à 21 cm.
Le périmètre de la figure au complet est égal à $2(2a + 2b)$, ce qui est égal à 42 cm.

(c) *Solution 1*
On suppose que le prisme mesure a cm sur b cm sur c cm.
On suppose aussi que la face qui a une aire de 27 cm^2 mesure a cm sur b cm et que la face qui a une aire de 32 cm^2 mesure a cm sur c cm. (Ces choix de variables n'entrainent aucune perte de généralité, puisque deux faces non opposées partagent une même dimension.)
Donc $ab = 27$ et $ac = 32$.
On sait que le prisme a un volume de 144 cm^3, d'où $abc = 144$.
Donc $bc = \dfrac{a^2b^2c^2}{a^2bc}$, ou $bc = \dfrac{(abc)^2}{(ab)(ac)}$. Donc $bc = \dfrac{144^2}{(27)(32)}$, ou $bc = 24$.

(On aurait pu remarquer que $abc = 144$ implique que $a^2b^2c^2 = 144^2$, ou $(ab)(ac)(bc) = 144^2$, d'où $bc = \dfrac{144^2}{(27)(32)}$.)
Donc, une troisième face du prisme a une aire de 24 cm^2.
Puisque le prisme a trois types de faces opposées, l'aire totale du prisme est égale à $2(27\ \text{cm}^2 + 32\ \text{cm}^2 + 24\ \text{cm}^2)$, ou 166 cm^2.

Solution 2
On suppose que le prisme mesure a cm sur b cm sur c cm.
On suppose aussi que la face qui a une aire de 27 cm^2 mesure a cm sur b cm et que la face qui a une aire de 32 cm^2 mesure a cm sur c cm. (Ces choix de variables n'entrainent aucune perte de généralité, puisque deux faces non opposées partagent une même dimension.)
Donc $ab = 27$ et $ac = 32$.
On sait que le prisme a un volume de 144 cm^3, d'où $abc = 144$.
Puisque $abc = 144$ et $ab = 27$, alors $c = \frac{144}{27}$, ou $c = \frac{16}{3}$.
Puisque $abc = 144$ et $ac = 32$, alors $b = \frac{144}{32}$, ou $b = \frac{9}{2}$.
Donc $bc = \frac{16}{3} \cdot \frac{9}{2} = 24$.
En centimètres carrés, l'aire totale du prisme est égale à $2ab+2ac+2bc$, ou $2(27+32+24)$, ou 166.
Le prisme a donc une aire totale de 166 cm^2.

4. (a) *Solution 1*
On développe et on simplifie le membre de droite de chaque équation :

$$y = a(x-2)(x+4) = a(x^2+2x-8) = ax^2+2ax-8a$$
$$y = 2(x-h)^2+k = 2(x^2-2hx+h^2)+k = 2x^2-4hx+(2h^2+k)$$

Puisque ces équations représentent la même parabole, les coefficients correspondants doivent être égaux. On a donc $a = 2$, $2a = -4h$ et $-8a = 2h^2 + k$.
Puisque $a = 2$ et $2a = -4h$, alors $4 = -4h$, d'où $h = -1$.
Puisque $-8a = 2h^2 + k$, $a = 2$ et $h = -1$, alors $-16 = 2 + k$, d'où $k = -18$.
Donc $a = 2$, $h = -1$ et $k = -18$.

Solution 2
À partir de l'équation $y = a(x-2)(x+4)$, on peut déterminer l'équation de l'axe de symétrie à partir des abscisses à l'origine de la parabole.
Les abscisses à l'origine sont 2 et -4. Par symétrie, l'axe de symétrie a pour équation $x = \frac{1}{2}(2 + (-4))$, ou $x = -1$.
Puisque le sommet de la parabole est situé sur l'axe de symétrie, il a pour abscisse -1.
Puisque le sommet est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation de la parabole.
On reporte $x = -1$ dans l'équation $y = a(x-2)(x+4)$ pour obtenir l'ordonnée du sommet.
On obtient $y = a(-1-2)(-1+4)$, ou $y = -9a$.
Le sommet de la parabole a donc pour coordonnées $(-1, -9a)$.
La deuxième équation, $y = 2(x-h)^2 + k$, est sous forme canonique. Elle nous dit que le sommet a pour coordonnées (h, k) et que $a = 2$.
Puisque $a = 2$, le sommet a pour coordonnées $(-1, -18)$. Donc $h = -1$ et $k = -18$.
Donc $a = 2$, $h = -1$ et $k = -18$.

(b) Soit d la raison arithmétique (la constante qu'on ajoute à chaque terme pour obtenir le terme suivant).
Puisque le premier terme est 5, les 5 termes de la suite sont $5, 5+d, 5+2d, 5+3d, 5+4d$.
D'après l'énoncé, on a $5^2 + (5+d)^2 + (5+2d)^2 = (5+3d)^2 + (5+4d)^2$.
On a donc les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} 5^2 + (5+d)^2 + (5+2d)^2 &= (5+3d)^2 + (5+4d)^2 \\ 25 + (25+10d+d^2) + (25+20d+4d^2) &= (25+30d+9d^2) + (25+40d+16d^2) \\ 75+30d+5d^2 &= 50+70d+25d^2 \\ 0 &= 20d^2+40d-25 \\ 0 &= 4d^2+8d-5 \\ 0 &= (2d+5)(2d-1) \end{aligned}$$

Donc $d = -\frac{5}{2}$ ou $d = \frac{1}{2}$.
Le cinquième terme $5+4d$ a donc pour valeurs possibles $5+4(-\frac{5}{2})$ et $5+4(\frac{1}{2})$, c'est-à-dire -5 et 7.

(Pour ces deux valeurs de d, les suites sont $5, \frac{5}{2}, 0, -\frac{5}{2}, -5$ et $5, \frac{11}{2}, 6, \frac{13}{2}, 7$.)

5. (a) On détermine d'abord les carrés parfaits entre 1300 et 1400 et entre 1400 et 1500.
Puisque $\sqrt{1300} \approx 36{,}06$, le premier carré parfait supérieur à 1300 est 37^2, ou 1369.
Les carrés parfaits suivants sont 38^2 et 39^2, soit 1444 et 1521.
Puisque Dan est né entre l'an 1300 et l'an 1400 et que son année de naissance est un carré parfait, il est né en 1369.
Puisque Samuel est né entre l'an 1400 et l'an 1500 et que son année de naissance est un carré parfait, il est né en 1444.
Supposons que le 7 avril d'une certaine année, Dan avait m^2 ans et Samuel avait n^2 ans, m et n étant des entiers strictement positifs. Dan avait donc m^2 ans en l'an $1369+m^2$ et Samuel avait n^2 ans en l'an $1444+n^2$.
Puisqu'il s'agit de la même année, alors $1369+m^2 = 1444+n^2$, d'où $m^2-n^2 = 1444-1369$, ou $m^2-n^2 = 75$.
On cherche donc deux carrés parfaits inférieurs à 110 (puisque Dan et Samuel ont chacun moins de 110 ans) avec une différence de 75.
Les carrés parfaits inférieurs à 110 sont $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$.
Les deux qui diffèrent de 75 sont 100 et 25.
Donc $m^2 = 100$ et $n^2 = 25$.
C'est donc en l'an $1369+100$, ou 1469, que l'âge de chacun était un carré parfait.

(b) *Solution 1*
Le triangle ABC est rectangle lorsqu'un des énoncés suivants est vrai :
- AB est perpendiculaire à BC, ou
- AB est perpendiculaire à AC, ou
- AC est perpendiculaire à BC.

Puisque les points $A(1,2)$ et $B(11,2)$ ont la même ordonnée, alors AB est horizontal.
Pour que AB et BC soient perpendiculaires, BC doit être vertical.
Donc, $B(11,2)$ et $C(k,6)$ doivent avoir la même abscisse, c'est-à-dire qu'on doit avoir $k = 11$.
Pour que AB et AC soient perpendiculaires, AC doit être vertical.
Donc, $A(1,2)$ et $C(k,6)$ doivent avoir la même abscisse, c'est-à-dire qu'on doit avoir $k = 1$.

Pour que AC et BC soient perpendiculaires, leurs pentes doivent avoir un produit de -1.
La pente de AC est égale à $\dfrac{6-2}{k-1}$, ou $\dfrac{4}{k-1}$.
La pente de BC est $\dfrac{6-2}{k-11}$, ou $\dfrac{4}{k-11}$.
Donc, AC et BC sont perpendiculaires lorsque $\dfrac{4}{k-1}\cdot\dfrac{4}{k-11}=-1$.
En supposant que $k\neq 1$ et $k\neq 11$, l'équation devient $16=-(k-1)(k-11)$, ou $16=-k^2+12k-11$, ou $k^2-12k+27=0$.
On factorise pour obtenir $(k-3)(k-9)=0$. Donc, AC et BC sont perpendiculaires lorsque $k=3$ ou $k=9$.

Le triangle ABC est donc rectangle lorsque k est égal à $1, 3, 9$ ou 11.

Solution 2
Le triangle ABC est rectangle si les longueurs de ses côtés vérifient la relation de Pythagore.
Il est donc rectangle si $AB^2+BC^2=AC^2$ ou $AB^2+AC^2=BC^2$ ou $AC^2+BC^2=AB^2$.
Avec $A(1,2)$ et $B(11,2)$, on a $AB^2=(11-1)^2+(2-2)^2$, ou $AB^2=100$.
Avec $A(1,2)$ et $C(k,6)$, on a $AC^2=(k-1)^2+(6-2)^2$, ou $AC^2=(k-1)^2+16$.
Avec $B(11,2)$ et $C(k,6)$, on a $BC^2=(k-11)^2+(6-2)^2$, ou $BC^2=(k-11)^2+16$.
En se référant aux relations de Pythagore ci-dessus, le triangle ABC est rectangle lorsque l'une des équations suivantes est satisfaite :

(i)

$$\begin{aligned}100+((k-11)^2+16)&=(k-1)^2+16\\100+k^2-22k+121+16&=k^2-2k+1+16\\220&=20k\\k&=11\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}100+((k-1)^2+16)&=(k-11)^2+16\\100+k^2-2k+1+16&=k^2-22k+121+16\\20k&=20\\k&=1\end{aligned}$$

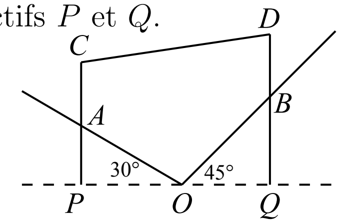
(iii)

$$\begin{aligned}((k-1)^2+16)+((k-11)^2+16)&=100\\k^2-2k+1+16+k^2-22k+121+16&=100\\2k^2-24k+54&=0\\k^2-12k+27&=0\\(k-3)(k-9)&=0\end{aligned}$$

Donc $k=3$ ou $k=9$.

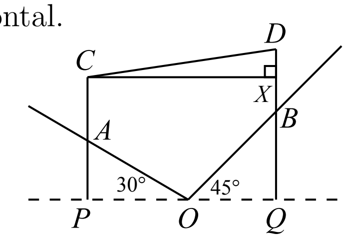
Le triangle ABC est donc rectangle lorsque k est égal à $1, 3, 9$ ou 11.

6. (a) On prolonge les segments CA et DB vers le bas jusqu'à ce qu'ils joignent la droite horizontale à tirets au points respectifs P et Q.



Puisque CA et DB sont verticaux, alors $\angle CPO = \angle DQO = 90°$.
Puisque $OA = 20$ m, alors $AP = OA \sin 30°$, ou $AP = (20 \text{ m}) \cdot \frac{1}{2}$, ou $AP = 10$ m.
Puisque $OB = 20$ m, alors $BQ = OB \sin 45°$, ou $BQ = (20 \text{ m}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou $BQ = 10\sqrt{2}$ m.
Puisque $AC = 6$ m et $CP = AC + AP$, alors $CP = 16$ m.
Pour que CD soit le plus court que possible, tenant compte que C est fixe, CD doit être horizontal :

Si CD n'était pas horizontal, soit X le point sur DQ ou sur son prolongement, de manière que CX soit horizontal.



Alors $\angle CXD = 90°$ et le triangle CXD est rectangle avec hypoténuse CD.
Donc, CD est plus long que CX et que XD.
Puisque $CD > CX$, on peut conclure que CD serait plus court si D était situé au point X. En d'autres mots, CD est le plus court possible lorsque CD est horizontal.

Lorsque CD est horizontal, $CDQP$ est un rectangle, puisque deux de ses côtés sont horizontaux et ses deux autres côtés sont verticaux. Donc $DQ = CP = 16$ m.
Puisque $BD = DQ - BQ$, alors $BD = (16 - 10\sqrt{2})$ m.

(b) Puisque $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, on peut supposer que $\cos\theta \neq 0$.
On obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \tan\theta \\ \cos\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ \cos^2\theta &= \sin\theta \\ 1 - \sin^2\theta &= \sin\theta \\ 0 &= \sin^2\theta + \sin\theta - 1 \end{aligned}$$

Soit $u = \sin\theta$. L'équation précédente devient $u^2 + u - 1 = 0$.

La formule pour résoudre une équation du second degré donne $u = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$, ou $u = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Donc $\sin\theta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}62$ ou $\sin\theta = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}62$.

Puisque $-1 \leq \sin\theta \leq 1$, cette dernière valeur est rejetée. Donc $\sin\theta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

7. (a) *Solution 1*

Soit v km/h la vitesse des trains.

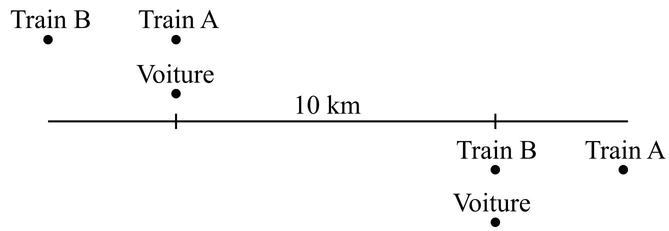
On considère deux points consécutifs où la voiture est dépassée par un train.

Puisque ces points sont à 10 minutes l'un de l'autre, ce qui correspond à $\frac{1}{6}$ heure, et que la voiture se déplace à une vitesse de 60 km/h, la voiture parcourt une distance de $(60 \text{ km/h}) \cdot (\frac{1}{6} \text{ h})$, ou 10 km entre ces deux points.

Durant ces 10 minutes, chaque train parcourt $\frac{1}{6}v$ km.

Au premier point, le train A et la voiture sont vis-à-vis l'un de l'autre.

Au même moment, le train B a 3 minutes de retard sur le train A.



Puisque 3 minutes correspondent à $\frac{1}{20}$ heure, le train B est à $\frac{1}{20}v$ km derrière le train A et la voiture.

Entre les deux points consécutifs où la voiture est dépassée par des trains, il y a donc une distance de $(\frac{1}{20}v+10)$ km. Or, cette distance est égale à $\frac{1}{6}v$ km, puisque les trains dépassent la voiture à toutes les 10 minutes et le train B parcourt cette distance en 10 minutes.

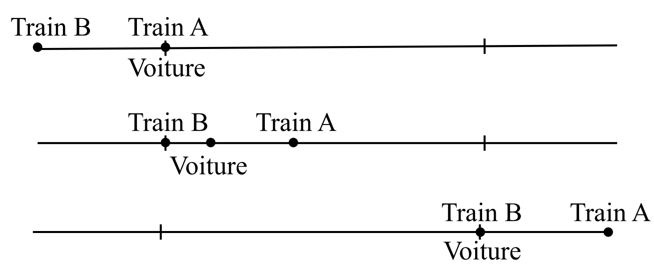
Donc $\frac{1}{6}v = \frac{1}{20}v + 10$, ou $\frac{10}{60}v - \frac{3}{60}v = 10$, d'où $\frac{7}{60}v = 10$, ou $v = \frac{600}{7}$.

Les trains se déplacent donc à une vitesse de $\frac{600}{7}$ km/h.

Solution 2

Soit v km/h la vitesse des trains.

On considère les trois moments suivants : le moment où la voiture et le train A sont vis-à-vis l'un de l'autre, le moment où le train B est au même endroit que le train A et la voiture au moment précédent et le moment où la voiture et le train B sont vis-à-vis l'un de l'autre.



Entre les deux premiers moments, le train B atteint le point où était le train A, ce qui prend 3 minutes, puisque les trains quittent la gare à toutes les 3 minutes.

Puisque 3 minutes correspondent à $\frac{3}{60}$ heure et que la voiture se déplace à la vitesse de 60 km/h, la voiture parcourt une distance de $(60 \text{ km/h}) \cdot (\frac{3}{60} \text{ h})$, ou 3 km entre ces deux moments.

Entre le premier moment et le troisième moment, 10 minutes se sont passées, puisqu'il s'agit de l'intervalle de temps entre deux dépassements consécutifs de la voiture par des trains. En 10 minutes, la voiture parcourt 10 km.

Entre le deuxième moment et le troisième moment, 7 minutes se sont écoulées $(10-3=7)$.

Pendant ces 7 minutes, le train B parcourt 10 km.

Puisque 7 minutes correspondent à $\frac{7}{60}$ heure, alors v km/h $= \frac{10 \text{ km}}{7/60 \text{ h}} = \frac{600}{7}$ km/h. Les trains se déplacent donc à la vitesse de $\frac{600}{7}$ km/h.

(b) D'après la première équation, on a $a \geq 0$ et $b \geq 0$, puisque la racine carrée n'est définie que pour des nombres réels non négatifs.
D'après la deuxième équation, on a $a > 0$ et $b > 0$, puisque les logarithmes ne sont définis que pour des nombres réels strictement positifs.
D'après ces deux restrictions, on a $a > 0$ et $b > 0$.

D'après l'équation $\log_{10} a + \log_{10} b = 2$, on obtient $\log_{10}(ab) = 2$, d'où $ab = 10^2$, ou $ab = 100$.
D'après la deuxième équation, on a :

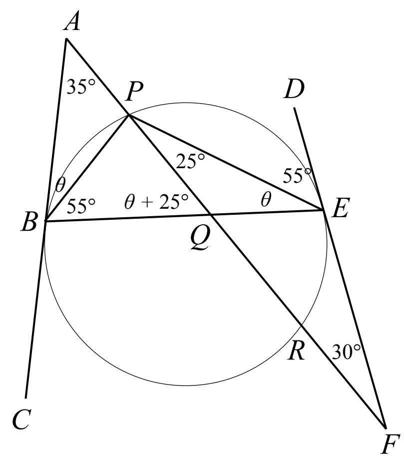
$$\begin{aligned} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &= 8^2 \\ a + 2\sqrt{ab} + b &= 64 \\ a + 2\sqrt{100} + b &= 64 \\ a + 2(10) + b &= 64 \\ a + b &= 44 \end{aligned}$$

Puisque $a + b = 44$, alors $b = 44 - a$.
On reporte $b = 44 - a$ dans $ab = 100$ pour obtenir $a(44 - a) = 100$, ou $44a - a^2 = 100$, ou $0 = a^2 - 44a + 100$.
D'après la formule pour résoudre une équation du second degré, on a :

$$a = \frac{44 \pm \sqrt{44^2 - 4(1)(100)}}{2 \cdot 1} = \frac{44 \pm \sqrt{1536}}{2} = \frac{44 \pm 16\sqrt{6}}{2} = 22 \pm 8\sqrt{6}$$

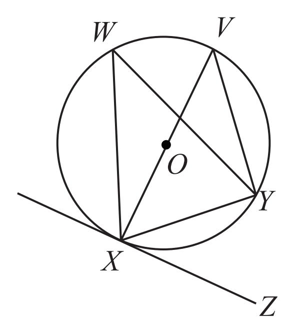
Puisque $b = 44 - a$, alors $b = 44 - (22 \pm 8\sqrt{6})$, ou $b = 22 \mp 8\sqrt{6}$.
Donc $(a, b) = (22 + 8\sqrt{6}, 22 - 8\sqrt{6})$ ou $(a, b) = (22 - 8\sqrt{6}, 22 + 8\sqrt{6})$.
(Puisque $22 + 8\sqrt{6} > 0$ et $22 - 8\sqrt{6} > 0$, les restrictions initiales sur a et b sont vérifiées.)

8. (a) Soit $\angle PEQ = \theta$.
On trace le segment PB.
On utilise la propriété de l'angle formé par une tangente à un cercle au point de contact et une corde du cercle issue du même point. Cet angle est égal à l'angle inscrit qui intercepte cette corde On démontrera cette propriété ci-dessous.
Selon cette propriété, $\angle DEP = \angle PBE$ (la corde EP et la tangente au point E forment l'angle DEP et l'angle inscrit PBE intercepte la corde PE) et $\angle ABP = \angle PEB = \theta$ (la corde BP et la tangente au point B forment l'angle ABP et l'angle inscrit PEB intercepte la corde BP).
Or, l'angle DEP est extérieur au triangle FEP. Donc $\angle DEP = \angle FPE + \angle EFP$, d'où $\angle DEP = 25° + 30°$, ou $\angle PBE = \angle DEP = 55°$.
De plus, l'angle AQB est extérieur au triangle PQE.
Donc, $\angle AQB = \angle QPE + \angle PEQ$, ou $\angle AQB = 25° + \theta$.



Dans le triangle ABQ, on a $\angle BAQ = 35°$, $\angle ABQ = \theta + 55°$ et $\angle AQB = 25° + \theta$.
Donc $35° + (\theta + 55°) + (25° + \theta) = 180°$, ou $115° + 2\theta = 180°$, ou $2\theta = 65°$.
Donc $\angle PEQ = \theta = \frac{1}{2}(65°)$, ou $\angle PEQ = 32{,}5°$.

On démontre maintenant que l'angle formé par une tangente à un cercle et une corde issue du point de contact est égal à l'angle inscrit qui intercepte la corde.
On considère un cercle de centre O, une corde XY et une tangente ZX au cercle au point X. Soit W un point sur le cercle, sur l'arc qui n'est pas compris dans l'angle ZXY. On démontre que $\angle ZXY = \angle XWY$ (c'est-à-dire qu'un angle inscrit sur la partie opposée à l'angle ZXY et qui intercepte la corde XY est égal à l'angle ZXY).
La démonstration porte sur un angle ZXY aigu. La démonstration est semblable lorsque l'angle ZXY est droit ou obtus.

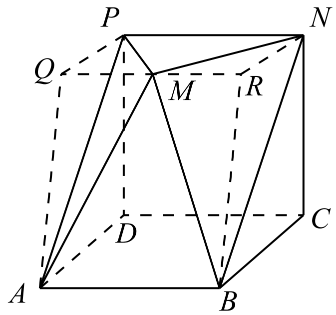


On trace le diamètre XOV et la corde VY. Puisque l'angle ZXY est aigu, les points V et W sont situés du même côté de la corde XY.
Donc $\angle XVY = \angle XWY$, puisque ces angles inscrits interceptent la même corde.
Puisque OX est un rayon et que XZ est une tangente, alors $\angle OXZ = 90°$.
Donc $\angle OXY + \angle ZXY = 90°$.
Puisque XV est un diamètre, alors $\angle XYV = 90°$.
Dans le triangle XYV, on a $\angle XVY + \angle VXY = 90°$.
Or, $\angle OXY + \angle ZXY = 90°$, $\angle XVY + \angle VXY = 90°$ et $\angle OXY = \angle VXY$, d'où $\angle ZXY = \angle XVY$.
Donc $\angle ZXY = \angle XWY$, ce qu'il fallait démontrer.

(b) *Solution 1*

Au point M, on trace un segment de droite dans le plan du triangle PMN, parallèle à PN et on le prolonge d'un côté jusqu'à ce qu'il joigne au point Q le plan qui contient les points P, A et D et de l'autre côté jusqu'à ce qu'il joigne au point R le plan qui contient les points N, B et C.

On trace les segments QP et QA, de même que RN et RB.



Le volume du solide $ABCDPMN$ est égal au volume du solide $ABCDPQRN$ moins les volumes des solides $PMQA$ et $NMRB$.

Le solide $ABCDPQRN$ est un prisme droit ayant pour base le trapèze $NRBC$ (ou $PQAD$). En effet, NR et BC sont parallèles (d'après la construction de R) et $NRBC$ est donc un trapèze. De même, $PQAD$ est un trapèze. De plus, PN, QR, DC et AB sont perpendiculaires à ces trapèzes et de même longueur, puisqu'ils ont la même longueur que les côtés d'un carré.

Les solides $PMQA$ et $NMRB$ sont des pyramides à bases triangulaires, soit les triangles PMQ et NMR. Ces deux pyramides ont une hauteur de 2, la même hauteur que le solide initial. (Le volume d'une pyramide est égal à $\frac{1}{3}$ du volume du prisme correspondant, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$ du produit de l'aire de la base et de la hauteur.)

Le volume de $ABCDPQRN$ est égal au produit de l'aire de sa base $NRBC$ et de sa hauteur, 2. Il est donc égal à $\frac{1}{2}(NR + BC)(NC)(NP)$, ou $\frac{1}{2}(NR + 2)(2)(2)$, ou $2 \cdot NR + 4$.

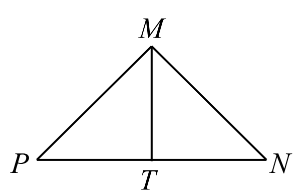
On doit donc déterminer la longueur de NR.

On considère le quadrilatère $PNRQ$. Il s'agit d'un rectangle, puisque PN et QR sont perpendiculaires aux plans qui contiennent les faces latérales PDA et NCB du solide initial.

Donc NR est égal à la hauteur du triangle PMN correspondant à la base PN.

On joint M au milieu T de PN.

Puisque le triangle PMN est isocèle, MT est perpendiculaire à PN.



Puisque $NT = \frac{1}{2}PN = 1$, $\angle PMN = 90^\circ$ et $\angle TNM = 45^\circ$, alors le triangle MTN est rectangle et isocèle, avec $MT = TN = 1$.

Donc $NR = MT = 1$. Le volume du solide $ABCDPQRN$ est donc égal à $2 \cdot 1 + 4$, ou 6.

Les solides $PMQA$ et $NMRB$ ont le même volume, puisqu'ils ont une hauteur de 2 et que leurs bases, les triangles PMQ et NMR, sont isométriques (les triangles sont rectangles avec $PQ = NR = 1$ et $QM = MR = 1$).

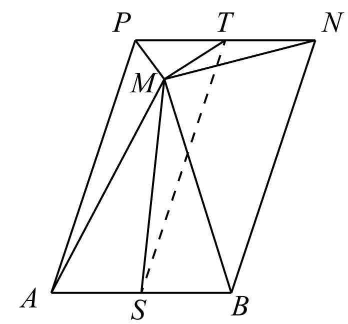
Chacun a donc un volume égal à $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}(1)(1))2$, ou $\frac{1}{3}$.

Le solide initial a donc un volume égal à $6 - 2 \cdot \frac{1}{3}$, ou $\frac{16}{3}$.

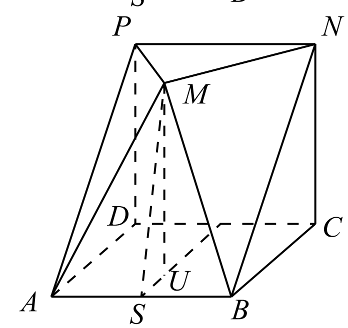
Solution 2

On détermine le volume du solide $ABCDPMN$ en coupant le solide selon le plan $ABNP$ de manière à produire deux solides, $ABCDPN$ et $ABNPM$.
Le solide $ABCDPN$ est un prisme droit à base triangulaire BCN (ou ADP). Ces triangles sont rectangles en C et D et $BC = CN = AD = DP = 2$. Les segments PN, DC et AB sont perpendiculaires aux plans des triangles et ils ont la même longueur.
Le volume du solide $ABCDPN$ est donc égal au produit de l'aire du triangle BCN et de la hauteur DC du prisme. Il est donc égal à $\frac{1}{2}(BC)(CN)(DC)$, ou $\frac{1}{2}(2)(2)(2)$, ou 4. (On peut aussi considérer que ce solide est la moitié d'un cube.)

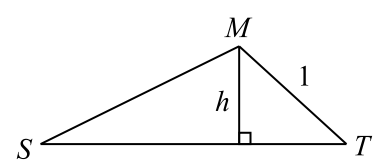
Le solide $ABNPM$ est une pyramide droite dont la base est le rectangle $ABNP$. (On sait que $PN = AB = 2$ et que les triangles ADP et BCN sont rectangles et isocèles. Par le théorème de Pythagore, on a $BN = AP = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.)
Le volume de la pyramide $ABNPM$ est égal à $\frac{1}{3}(AB)(BN)h$, h étant sa hauteur, c'est-à-dire la distance entre le point M et la base $ABNP$. Il est donc égal à $\frac{4\sqrt{2}}{3}h$.
On doit donc déterminer h.



On joint M au milieu T de PN et au milieu S de AB. On joint S et T. Par symétrie, M est situé directement au-dessus de ST. Puisque $ABNP$ est un rectangle et que S et T sont les milieux de deux de ses côtés opposés, alors $ST = AP = 2\sqrt{2}$.
Puisque le triangle PMN est rectangle et isocèle, alors MT est perpendiculaire à PN. Puisque $NT = \frac{1}{2}PN = 1$ et que $\angle TNM = 45^\circ$, alors le triangle MTN est aussi rectangle et isocèle avec $MT = TN = 1$.



De plus, MS est l'hypoténuse d'un triangle rectangle MUS formé en abaissant une perpendiculaire au point M jusqu'au point U sur le plan qui contient $ABCD$ (une distance de 2) et en joignant U et S. Puisque M est situé à une distance horizontale de 1 du segment PN, alors $US = 1$.
Par le théorème de Pythagore, $MS = \sqrt{2^2 + 1^2}$, ou $MS = \sqrt{5}$.



On considère le triangle SMT. Soit h la hauteur de ce triangle, du point M à la base ST.
Or $h = MT\sin(\angle MTS)$, d'où $h = \sin(\angle MTS)$.
D'après la loi du cosinus dans le triangle SMT, on a :

$$MS^2 = ST^2 + MT^2 - 2(ST)(MT)\cos(\angle MTS)$$

Donc $5 = 8 + 1 - 4\sqrt{2}\cos(\angle MTS)$, ou $4\sqrt{2}\cos(\angle MTS) = 4$.
Donc $\cos(\angle MTS) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où $\angle MTS = 45^\circ$. Donc $h = \sin(\angle MTS)$, ou $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
(On aurait pu remarquer que le plan contenant $ABCD$ est parallèle au plan contenant PMN et que puisque l'angle entre les plans $ABCD$ et $PNBA$ mesure 45°, alors l'angle entre les plans $PNBA$ et PMN mesure aussi 45°. Donc $\angle MTS = 45^\circ$.)
Le volume de $ABNPM$ est donc égal à $\frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou $\frac{4}{3}$, et le volume du solide $ABCDPMN$ est donc égal à $4 + \frac{4}{3}$, ou $\frac{16}{3}$.

9. (a) Le nombre de permutations de $1, 2, 3, 4$ est égal à $4!$, c'est-à-dire à $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, ou 24.
En effet, il y a 4 choix possibles du premier nombre a_1 et pour chacun de ces choix, il y a 3 choix possibles du deuxième nombre a_2 et pour chacun de ces choix, il y a 2 choix possibles du troisième nombre a_3 et pour chacun de ces choix, il y a 1 choix possible du quatrième nombre a_4.
On considère la permutation $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4$. (On écrira 1, 2, 3, 4.)
Dans ce cas, on a $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| = |1 - 2| + |3 - 4| = 1 + 1 = 2$.
Chacune des permutations 2, 1, 3, 4 et 1, 2, 4, 3 et 2, 1, 4, 3 et 3, 4, 1, 2 et 4, 3, 1, 2 et 3, 4, 2, 1 et 4, 3, 2, 1 donne la même valeur de $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4|$.
On considère la permutation 1, 3, 2, 4.
Dans ce cas, on a $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| = |1 - 3| + |2 - 4| = 2 + 2 = 4$.
Chacune des permutations 3, 1, 2, 4 et 1, 3, 4, 2 et 3, 1, 4, 2 et 2, 4, 1, 3 et 4, 2, 1, 3 et 2, 4, 3, 1 et 4, 2, 3, 1 donne la même valeur de $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4|$.
On considère la permutation 1, 4, 2, 3.
Dans ce cas, on a $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| = |1 - 4| + |2 - 3| = 3 + 1 = 4$.
Chacune des permutations 4, 1, 2, 3 et 1, 4, 3, 2 et 4, 1, 3, 2 et 2, 3, 1, 4 et 3, 2, 1, 4 et 2, 3, 4, 1 et 3, 2, 4, 1 donne la même valeur de $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4|$.
Ceci tient compte des 24 permutations.
La valeur moyenne de l'expression $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4|$ est donc égale à $\dfrac{2 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 8}{24}$, ou $\dfrac{80}{24}$, ou $\dfrac{10}{3}$.

(b) Le nombre de permutations de $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ est égal à $7!$, ou $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, puisqu'il y a 7 choix du premier nombre a_1 et pour chacun de ces choix, il y a 6 choix du deuxième nombre a_2 et ainsi de suite.
On détermine la valeur moyenne de l'expression $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7$, la valeur étant calculée pour toutes les $7!$ permutations, en additionnant ces valeurs et en divisant la somme par $7!$.
Pour déterminer la somme de ces $7!$ valeurs, on détermine la somme s_1 des valeurs de a_1 dans ces expressions, la somme s_2 des valeurs de a_2 dans ces expressions, et ainsi de suite.
La somme des $7!$ valeurs de l'expression donnée doit être égale à $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + s_5 - s_6 + s_7$.
Cela découle du fait que pour une addition, l'ordre dans lequel on effectue l'addition des termes n'importe pas.
Par symétrie, on sait que les sommes des valeurs de $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ seront égales, c'est-à-dire que $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = s_7$.
La valeur moyenne est donc égale à :

$$\frac{s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + s_5 - s_6 + s_7}{7!} = \frac{(s_1 + s_3 + s_5 + s_7) - (s_2 + s_4 + s_6)}{7!} = \frac{4s_1 - 3s_1}{7!} = \frac{s_1}{7!}$$

On doit donc déterminer la valeur de s_1.
Or, a_1 prend pour valeurs chacun des nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
Si $a_1 = 1$, il y a $6!$ façons d'attribuer des valeurs à $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$, puisqu'il y a 6 choix pour la valeur de a_2 et pour chacun de ces choix, il y a 5 choix pour la valeur de a_3 et ainsi de suite.
De même, lorsque a_1 prend chacune des valeurs $2, 3, 4, 5, 6, 7$, il y a $6!$ façons d'attribuer des valeurs à $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$.
Donc $s_1 = 1 \cdot 6! + 2 \cdot 6! + 3 \cdot 6! + 4 \cdot 6! + 5 \cdot 6! + 6 \cdot 6! + 7 \cdot 6!$, ou $s_1 = 6!(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$, ou $s_1 = 28(6!)$.
La valeur moyenne de l'expression est donc égale à : $\dfrac{28(6!)}{7!} = \dfrac{28(6!)}{7(6!)} = \dfrac{28}{7} = 4$

(c) Le nombre de permutations de $1, 2, 3, \ldots, 198, 199, 200$ est égal à $200!$.
On détermine la valeur moyenne de l'expression

$$|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \cdots + |a_{197} - a_{198}| + |a_{199} - a_{200}|, \qquad (*)$$

la valeur étant calculée pour toutes les $200!$ permutations, en additionnant ces valeurs et en divisant la somme par $200!$.
Comme dans la partie (b), soit s_1 la somme des valeurs de $|a_1 - a_2|$ dans chacune de ces expressions, s_2 la somme des valeurs de $|a_3 - a_4|$ dans chacune de ces expressions et ainsi de suite.
La somme des $200!$ valeurs de $(*)$ est égale à $s_1 + s_2 + \cdots + s_{99} + s_{100}$.
Par symétrie, $s_1 = s_2 = \cdots = s_{99} = s_{100}$.
La valeur moyenne de l'expression $(*)$ est égale à $\dfrac{100s_1}{200!}$. On doit donc déterminer la valeur de s_1.

Supposons que $a_1 = i$ et $a_2 = j$, i et j étant des entiers de 1 à 200.
Il y a $198!$ permutations des entiers de 1 à 200 dans lesquelles $a_1 = i$ et $a_2 = j$, puisqu'il y a 198 valeurs possibles de a_3 et pour chacune d'elles, il y a 197 valeurs possibles de a_4 et ainsi de suite.
De même, il y a $198!$ permutations avec $a_1 = j$ et $a_2 = i$.
Puisque $|i - j| = |j - i|$, il y a $2(198!)$ permutations avec $|a_1 - a_2| = |i - j|$ dans lesquelles a_1 et a_2 égalent i et j dans un ordre quelconque.
On peut donc supposer que $i > j$ et que s_1 est égal à $2(198!)$ fois la somme des valeurs de $i - j$ calculée pour tous les couples où $i > j$.
(Le nombre de couples (i, j) d'entiers où $i > j$ est égal à $\dbinom{200}{2}$, ou $\dfrac{200(199)}{2}$. Pour chacun de ces couples, il y a $2(198!)$ façons de choisir les autres éléments de la permutation, pour un nombre total de permutations égal à $\dfrac{200(199)}{2} \cdot 2(198!)$, ou $200(199)(198!)$, ou $200!$, ce à quoi on s'attend.)
Pour déterminer la valeur de s_1, il faut déterminer la somme des valeurs de $i - j$.
On calcule cette somme D en posant $j = 1, 2, 3, \ldots, 198, 199$ et pour chacune de ces valeurs, on attribue à i les valeurs entières possibles où $j < i \leq 200$:

$$\begin{aligned}
D &= (2-1) + (3-1) + (4-1) + \cdots + (197-1) + (198-1) + (199-1) + (200-1) \\
&\quad + (3-2) + (4-2) + (5-2) + \cdots + (198-2) + (199-2) + (200-2) \\
&\quad + (4-3) + (5-3) + (6-3) + \cdots + (199-3) + (200-3) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (199-198) + (200-198) \\
&\quad + (200-199) \\
&= 199(1) + 198(2) + 197(3) + \cdots + 2(198) + 1(199) \qquad \text{(en regroupant selon les colonnes)} \\
&= 199(200-199) + 198(200-198) + 197(200-197) + \cdots + 2(200-2) + 1(200-1) \\
&= 200(199 + 198 + 197 + \cdots + 3 + 2 + 1) - (199^2 + 198^2 + 197^2 + \cdots + 3^2 + 2^2 + 1^2) \\
&= 200 \cdot \tfrac{1}{2}(199)(200) - \tfrac{1}{6}(199)(199+1)(2(199)+1) \\
&= 100(199)(200) - \tfrac{1}{6}(199)(200)(399) \\
&= 199(200)\left(100 - \tfrac{133}{2}\right) \\
&= 199(200)\tfrac{67}{2}
\end{aligned}$$

Donc $s_1 = 2(198!)D = 2(198!) \cdot \frac{199(200)(67)}{2} = 67(198!)(199)(200) = 67(200!)$.

La valeur moyenne de $(*)$ est égale à $\dfrac{100s_1}{200!}$, ou $\dfrac{100(67)(200!)}{200!}$, ou 6700.

On a utilisé les identités suivantes pour tout entier strictement positif n :

- $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$
- $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

On aurait pu calculer la valeur de D en utilisant la notation sigma comme suit :

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{i=2}^{200}\sum_{j=1}^{i-1}(i-j) \\
&= \left(\sum_{i=2}^{200}\sum_{j=1}^{i-1} i\right) - \left(\sum_{i=2}^{200}\sum_{j=1}^{i-1} j\right) \\
&= \left(\sum_{i=2}^{200} i(i-1)\right) - \left(\sum_{i=2}^{200} \tfrac{1}{2}(i-1)i\right) \\
&= \left(\sum_{i=2}^{200} i(i-1)\right) - \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{200} (i-1)i\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{200} (i-1)i\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{200} (i-1)i\right) \qquad \text{(puisque } (i-1)i = 0 \text{ lorsque } i = 1\text{)} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{200} (i^2-i)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{200} i^2 - \sum_{i=1}^{200} i\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{6}(200)(200+1)(2(200)+1) - \tfrac{1}{2}(200)(200+1)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}(200)(201)\left(\tfrac{1}{6}(401) - \tfrac{1}{2}\right) \\
&= 100(201) \cdot \tfrac{398}{6} \\
&= 100(201) \cdot \tfrac{199}{3} \\
&= 100(67)(199),
\end{aligned}$$

ce qui est égal à $199(200)\frac{67}{2}$, comme on s'y attendait.
(Défi : Déterminer une formule générale lorsqu'on remplace 200 par $2n$.)

10. (a) On considère le sous-ensemble $\{1, 2, 3\}$.
Si on additionne les éléments deux à deux, on obtient $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$ et $2 + 3 = 5$, soit trois sommes différentes.
Donc $\{1, 2, 3\}$ est excitant.
On continue en ajoutant d'autres éléments à $\{1, 2, 3\}$.
On ne peut pas ajouter l'élément 4, parce qu'on aurait $1 + 4 = 2 + 3$, ce qui ferait de $\{1, 2, 3, 4\}$ un sous-ensemble ennuyant.
On considère le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 5\}$.
Si on additionne les éléments deux à deux, on obtient :

$$1 + 2 = 3 \qquad 1 + 3 = 4 \qquad 1 + 5 = 6 \qquad 2 + 3 = 5 \qquad 2 + 5 = 7 \qquad 3 + 5 = 8$$

On a des sommes différentes et $\{1, 2, 3, 5\}$ est donc un sous-ensemble excitant.
On ne peut pas ajouter 6 ou 7, puisqu'on aurait $2 + 5 = 1 + 6$ et $3 + 5 = 1 + 7$.
On considère le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 5, 8\}$.
En plus des six sommes précédentes d'éléments deux à deux, on a $1 + 8 = 9$, $2 + 8 = 10$, $3 + 8 = 11$ et $5 + 8 = 13$, soit quatre autres sommes différentes.
Donc, $\{1, 2, 3, 5, 8\}$ est un sous-ensemble excitant de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ qui contient exactement 5 éléments.
(Le sous-ensemble $\{1, 4, 6, 7, 8\}$ est le seul autre sous-ensemble excitant de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ qui contient exactement 5 éléments.)

(b) Soit S un ensemble excitant de m entiers strictement positifs.
Il y a donc $\binom{m}{2}$ paires, ou $\dfrac{m(m-1)}{2}$ paires d'éléments de S.
Puisque S est excitant, les sommes de ces paires d'entiers sont toutes distinctes.
La plus grande de ces sommes doit donc être supérieure ou égale à $\dfrac{m(m-1)}{2}$.
Lorsque deux nombres ont une somme supérieure ou égale à $\dfrac{m(m-1)}{2}$, alors au moins un de ces nombres doit être au moins aussi grand que $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{m(m-1)}{2}$, ou $\dfrac{m^2 - m}{4}$.
Donc, S contient un entier supérieur ou égal à $\dfrac{m^2 - m}{4}$.

(c) Soit n un entier tel que $n \geq 10$.
Pour chaque entier k dans l'intervalle $1 \leq k \leq n$, on définit $x_k = 2n \cdot \text{reste}(k^2, n) + k$, $\text{reste}(k^2, n)$ étant le reste lorsque k^2 est divisé par n.
Soit $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$. On montrera que T est excitant précisément lorsque n est premier.

Soit a, b, c et d des entiers distincts de 1 à n tels que $x_a + x_b = x_c + x_d$.
Cette équation est équivalente à :

$$(2n \cdot \text{reste}(a^2, n) + a) + (2n \cdot \text{reste}(b^2, n) + b) = (2n \cdot \text{reste}(c^2, n) + c) + (2n \cdot \text{reste}(d^2, n) + d)$$

et

$$2n \cdot (\text{reste}(a^2, n) + \text{reste}(b^2, n) - \text{reste}(c^2, n) - \text{reste}(d^2, n)) = c + d - a - b$$

Puisque a, b, c et d sont des entiers distincts de 1 à n, alors $1 + 2 \leq a + b \leq (n - 1) + n$, ou $3 \leq a + b \leq 2n - 1$. De même, $3 \leq c + d \leq 2n - 1$.
Donc $3 - (2n - 1) \leq c + d - a - b \leq (2n - 1) - 3$, ou $-2n + 4 \leq c + d - a - b \leq 2n - 4$.
Or, le membre de gauche de l'équation

$$2n \cdot (\text{reste}(a^2, n) + \text{reste}(b^2, n) - \text{reste}(c^2, n) - \text{reste}(d^2, n)) = c + d - a - b$$

est un entier qui est un multiple de $2n$, ce qui implique que le membre de droite, $c+d-a-b$, l'est aussi.
Puisque $-2n+4 \le c+d-a-b \le 2n-4$ et que le seul multiple de $2n$ entre $-2n+4$ et $2n-4$ est $0 \cdot 2n = 0$, alors $c+d-a-b=0$, ou $c+d=a+b$.
Donc $2n \cdot (\text{reste}(a^2,n)+\text{reste}(b^2,n)-\text{reste}(c^2,n)-\text{reste}(d^2,n)) = 0$.
Puisque $n \neq 0$, alors $\text{reste}(a^2,n)+\text{reste}(b^2,n)-\text{reste}(c^2,n)-\text{reste}(d^2,n) = 0$.
Donc, $x_a + x_b = x_c + x_d$ précisément lorsque :

$$a+b=c+d \quad \text{et} \quad \text{reste}(a^2,n)+\text{reste}(b^2,n) = \text{reste}(c^2,n)+\text{reste}(d^2,n)$$

On considère cette dernière équation.
Lorsqu'on divise a^2 par n, on obtient un quotient q_a et un reste, $\text{reste}(a^2,n)$.
On remarque que $a^2 = q_a n + \text{reste}(a^2,n)$ et $0 \le \text{reste}(a^2,n) < n$.
On définit q_b, q_c et q_d de la même manière et on obtient :

$$(a^2 - q_a n) + (b^2 - q_b n) = (c^2 - q_c n) + (d^2 - q_d n)$$

ou

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = n(q_a + q_b - q_c - q_d)$$

Puisque $a+b=c+d$, alors $a^2+2ab+b^2 = c^2+2cd+d^2$, ou $a^2+b^2-c^2-d^2 = 2cd-2ab$.
Donc, $x_a+x_b = x_c+x_d$ précisément lorsque $a+b=c+d$ et $2cd-2ab = n(q_a+q_b-q_c-q_d)$.
Puisque $d = a+b-c$, cette dernière équation devient :

$$\begin{aligned}
2c(a+b-c)-2ab &= n(q_a+q_b-q_c-q_d)\\
-2(c^2-ac-bc+ab) &= n(q_a+q_b-q_c-q_d)\\
-2(c(c-a)-b(c-a)) &= n(q_a+q_b-q_c-q_d)\\
-2(c-a)(c-b) &= n(q_a+q_b-q_c-q_d)
\end{aligned}$$

Supposons que n est un nombre premier. Puisque $n \ge 10$, alors n est impair.
Supposons que $x_a+x_b = x_c+x_d$. On montrera que c'est impossible.
Alors $a+b=c+d$ et $-2(c-a)(c-b) = n(q_a+q_b-q_c-q_d)$.
Donc, $2(c-a)(c-b)$ est un multiple de n, qui est un nombre premier impair.
Donc $c-a$ ou $c-b$ est un multiple de n.
Or a, b, c et d sont des entiers distincts dans l'intervalle de 1 à n. Donc $1-n \le c-a \le n-1$ et $1-n \le c-b \le n-1$.
Le seul multiple de n dans cet intervalle est 0. Donc $c-a=0$ ou $c-b=0$, ce qui contredit le fait que a, b, c et d sont distincts.
Donc si n est un nombre premier, il n'y a pas quatre nombre distincts dans T qui rendent T ennuyant. Donc, T est excitant.

Supposons que n est un nombre composé.
On considère trois cas : n est une puissance d'un nombre premier p (c.-à-d. que $n=p^2$), n est pair, n est n'importe quel autre nombre composé.
Supposons que $n=p^2$, p étant un nombre premier. Puisque $n \ge 10$, alors $p \ge 5$.
Posons $a=p$, $b=4p$, $c=2p$ et $d=3p$.
Alors $a+b=5p=c+d$.
Puisque $p \ge 5$, alors $0 < p < 2p < 3p < 4p < p^2$.
Puisque chacun des entiers a, b, c, d est divisible par p, alors chacun des entiers a^2, b^2, c^2, d^2 est divisible par p^2, ou n. Donc $\text{reste}(a^2,n) = \text{reste}(b^2,n) = \text{reste}(c^2,n) = \text{reste}(d^2,n) = 0$.
On a donc $a+b=c+d$ et $\text{reste}(a^2,n)+\text{reste}(b^2,n) = \text{reste}(c^2,n)+\text{reste}(d^2,n)$. Donc

$x_a + x_b = x_c + x_d$, ce qui signifie que T est ennuyant.

Supposons que n est pair, c'est-à-dire que $n = 2t$, t étant un entier positif ($t \geq 5$).
Posons $a = 1$, $b = t + 2$, $c = 2$ et $d = t + 1$.
Puisque $t \geq 5$, alors $1 \leq a < b < c < d < 2t$. Donc a, b, c et d sont des entiers positifs distincts dans l'intervalle approprié.
De plus, $a + b = t + 3 = c + d$.
Pour montrer que $x_a + x_b = x_c + x_d$, il faut montrer que :

$$\text{reste}(1^2, 2t) + \text{reste}((t+2)^2, 2t) = \text{reste}(2^2, 2t) + \text{reste}((t+1)^2, 2t)$$

Or $\text{reste}(1^2, 2t) = \text{reste}(1, 2t) = 1$ et $\text{reste}(2^2, 2t) = \text{reste}(4, 2t) = 4$, puisque $2t > 4$.
De plus, puisque $(t+2)^2 = t^2 + 4t + 4$, alors la différence entre $(t+2)^2$ et $t^2 + 4$ est un multiple de n ($n = 2t$), alors $\text{reste}((t+2)^2, 2t) = \text{reste}(t^2 + 4, 2t)$.
De même, puisque $(t+1)^2 = t^2 + 2t + 1$, alors $\text{reste}((t+1)^2, 2t) = \text{reste}(t^2 + 1, 2t)$.
Il faut donc montrer que $\text{reste}(t^2 + 4, 2t) - \text{reste}(t^2 + 1, 2t) = 4 - 1 = 3$.
Puisque $t \geq 5$, alors $t^2 + t > t^2 + 4$.
Donc $t^2 < t^2 + 1 < t^2 + 2 < t^2 + 3 < t^2 + 4 < t^2 + t$. En d'autres mots, chacun des nombres $t^2 + 1$, $t^2 + 2$, $t^2 + 3$ et $t^2 + 4$ est situé entre deux multiples consécutifs de t. Donc, aucun de ces quatre entiers n'est un multiple de t. Donc, aucun d'entre eux n'est un multiple de n ($n = 2t$).
Donc, $t^2 + 4$ et $t^2 + 1$ sont situés entre les deux mêmes multiples de n. Donc, la différence entre leurs restes après une division par n est égale à la différence entre les entiers, c'est-à-dire 3.
Donc $x_a + x_b = x_c + x_d$, ce qui indique que T est ennuyant.

Enfin, on considère le cas où n est un nombre composé impair, c'est-à-dire que $n = MN$, M et N étant deux entiers impairs et $M > N > 1$.
Posons $a = \frac{1}{2}(M + N)$, $b = n - a$, $c = \frac{1}{2}(M - N)$ et $d = n - c$.
Puisque M et N sont impairs, $M + N$ et $M - N$ sont pairs. Donc a, b, c et d sont des entiers.
Puisque $M > N > 0$, alors $a > c > 0$.
Puisque $N \geq 3$, alors $n = MN \geq 3M > 2M$. Donc $M < \frac{1}{2}n$.
Puisque $M > N$, alors $a = \frac{1}{2}(M + N) < \frac{1}{2}(M + M) = M < \frac{1}{2}n$.
Donc $0 < c < a < \frac{1}{2}n$.
Puisque $b = n - a$ et $d = n - c$, alors $\frac{1}{2}n < b < d < n$, d'où $0 < c < a < \frac{1}{2}n < b < d < n$.
Donc a, b, c et d sont des entiers distincts dans l'intervalle approprié.
On remarque aussi que $a + b = n = c + d$.
Pour montrer que $x_a + x_b = x_c + x_d$, il reste à montrer que :

$$\text{reste}(a^2, n) + \text{reste}(b^2, n) = \text{reste}(c^2, n) + \text{reste}(d^2, n)$$

On montrera que $\text{reste}(a^2, n) = \text{reste}(b^2, n) = \text{reste}(c^2, n) = \text{reste}(d^2, n)$, ce qui mènera à la conclusion.
Puisque $b = n - a$, alors $b^2 = n^2 - 2na + a^2$. Puisque la différence entre b^2 et a^2 est un multiple de n, leurs restes après une division par n seront égaux. De même, $\text{reste}(c^2, n) = \text{reste}(d^2, n)$.
Il reste donc à démontrer que $\text{reste}(a^2, n) = \text{reste}(c^2, n)$.
Or :

$$a^2 - c^2 = (a + c)(a - c) = \left(\tfrac{1}{2}(M + N) + \tfrac{1}{2}(M - N)\right)\left(\tfrac{1}{2}(M + N) - \tfrac{1}{2}(M - N)\right) = MN = n$$

Puisque la différence entre a^2 et c^2 est un multiple de n, alors $\text{reste}(a^2, n) = \text{reste}(c^2, n)$.
Donc $x_a + x_b = x_c + x_d$ et T est donc ennuyant.

Pour résumer, T est excitant précisément lorsque n est un nombre premier supérieur à 10.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2016

le mardi 12 avril 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 13 avril 2016
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) La moyenne est égale à :

$$\frac{5+15+25+35+45+55}{6} = \frac{(5+55)+(15+45)+(25+35)}{6} = \frac{60+60+60}{6} = 30$$

(b) Puisque $x^2 = 2016$, alors : $(x+2)(x-2) = x^2 - 4 = 2016 - 4 = 2012$

(c) Puisque les points P, Q et R sont situés sur une même droite, alors la pente de PQ est égale à la pente de PR.
Or, la pente de PQ est égale à $\dfrac{2a-5}{a-7}$ et la pente de PR est égale à $\dfrac{30-5}{12-7}$, ou $\dfrac{25}{5}$, ou 5.
Donc $\dfrac{2a-5}{a-7} = 5$, d'où $2a - 5 = 5(a-7)$.
Cette équation devient $2a - 5 = 5a - 35$, d'où $3a = 30$. Donc $a = 10$.

2. (a) Puisque $\dfrac{n}{9} = \dfrac{25}{n}$, alors $n^2 = 25(9)$, ou $n^2 = 225$. Donc $n = 15$ ou $n = -15$.
On vérifie par substitution que ces valeurs satisfont à l'équation donnée. Donc, les valeurs de n sont 15 et -15.

(b) L'équation $(x-3)(x-2) = 6$ devient $x^2 - 5x + 6 = 6$, ou $x^2 - 5x = 0$, ou $x(x-5) = 0$.
Donc $x = 0$ ou $x = 5$.
On vérifie par substitution que ces valeurs satisfont à l'équation donnée. Les valeurs de x sont donc 0 et 5.

(c) Soit p le cout d'une pomme, en dollars, et b le cout d'une banane, en dollars.
D'après l'énoncé, $2p = 3b$ et $6p + 12b = 6{,}30$.
Puisque $3b = 2p$, alors $12b = 4(3b) = 4(2p) = 8p$.
L'équation $6p + 12b = 6{,}30$ devient donc $6p + 8p = 6{,}3$ ou $14p = 6{,}3$, ou $p = 0{,}45$.
Une pomme coute donc 0,45 \$.

3. (a) *Solution 1*
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors les angles des triangles ABD, FBG et CBE ont une somme de $3 \cdot 180°$, ou 540°.
Les neuf angles de ces triangles comprennent ceux ayant des mesures de p, q, r, s, t et u degrés, ainsi que les angles ABD, FBG et CBE.
Ces trois angles forment un angle plat et leurs mesures ont donc une somme de 180°.
Les mesures des six autres angles ont donc une somme de $540° - 180°$, ou 360°.
Donc $p + q + r + s + t + u = 360$.

Solution 2
Dans les trois triangles suivants, les mesures des angles ont une somme de 180°.
D'après le triangle ABD, on a $\angle ABD = 180° - p° - q°$.
D'après le triangle FBG, on a $\angle FBG = 180° - r° - s°$.
D'après le triangle CBE, on a $\angle CBE = 180° - t° - u°$.
Puisque l'angle ABC est plat, alors :

$$\angle ABD + \angle FBG + \angle CBE = 180°$$

Donc :

$$(180° - p° - q°) + (180° - r° - s°) + (180° - t° - u°) = 180°$$

On simplifie pour obtenir $360 = p + q + r + s + t + u$. L'expression $p + q + r + s + t + u$ a donc une valeur de 360.

(b) *Solution 1*
Pour écrire 10^{20} en notation régulière, on écrit le chiffre 1 suivi de 20 fois le chiffre 0.
Pour écrire $10^{20} - 1$ en notation régulière, on écrit donc 20 fois le chiffre 9.
Or, le nombre $n = 10^{20} - 20$ est 19 de moins que le nombre $10^{20} - 1$ qui s'écrit au moyen de 20 fois le chiffre 9.
Donc $n = 10^{20} - 20 = 99\cdots980$, le chiffre 9 paraissant 18 fois.
La somme des chiffres de ce nombre n est donc égale à $18(9) + 8 + 0$, ou $162 + 8$, ou 170.

Solution 2
Puisque $10^{20} - 20 = 10(10^{19} - 2)$ et que $10^{19} - 2 = 99\cdots98$ (le chiffre 9 paraissant 18 fois), alors $10^{20} - 20 = 99\cdots980$, le chiffre 9 paraissant 18 fois.
La somme des chiffres de n est donc égale à $18(9) + 8 + 0$, ou $162 + 8$, ou 170.

(c) *Solution 1*
Puisqu'on a $P(2, 0)$ et $Q(8, 0)$, alors $PQ = 8 - 2$, ou $PQ = 6$.
Soit h la hauteur de S par rapport à PQ dans le triangle SPQ.
L'aire du triangle SPQ est donc égale à $\frac{1}{2}(PQ)h$.
Puisque ce triangle a une aire de 12, alors $\frac{1}{2}(PQ)h = 12$. Donc $\frac{1}{2}(6)h = 12$, d'où $h = 4$.
Puisque S est situé en dessous de l'axe des abscisses, S a donc pour ordonnée -4.
Puisque S est le sommet de la parabole et que celle-ci coupe l'axe des abscisses aux points P et Q, l'abscisse de S est égale à la moyenne des abscisses de P et Q, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(2 + 8)$, ou 5.
Donc, S a pour coordonnées $(5, -4)$.

Solution 2
Puisque la parabole coupe l'axe des abscisses en $P(2, 0)$ et $Q(8, 0)$, la parabole est définie par une équation de la forme $y = a(x - 2)(x - 8)$, a étant un nombre quelconque, $a \neq 0$.
On complète le carré pour obtenir :

$$y = a(x^2 - 10x + 16) = a((x - 5)^2 - 9) = a(x - 5)^2 - 9a$$

L'équation canonique $y = a(x - 5)^2 - 9a$ indique que la parabole a pour sommet $(5, -9a)$.
Puisque le sommet est situé en dessous de l'axe des abscisses, alors $-9a < 0$, d'où $a > 0$.
Le triangle SPQ a une base PQ sur l'axe des abscisses et cette base a une longueur égale à $8 - 2$, ou 6.
La hauteur correspondante est égale à la distance du sommet S jusqu'à l'axe des abscisses. Elle est égale à $9a$, car $a > 0$.
Puisque le triangle SPQ a une aire de 12, alors $\frac{1}{2}(6)(9a) = 12$, d'où $27a = 12$, ou $a = \frac{4}{9}$.
On reporte $a = \frac{4}{9}$ dans $(5, -9a)$, ce qui donne les coordonnées de S, soit $(5, -4)$.

4. (a) On récrit $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = \frac{7}{4}$ sous la forme $(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \cos^2\theta = \frac{7}{4}$.
Puisque $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ pour tout angle θ, l'équation devient $1 + \cos^2\theta = \frac{7}{4}$, d'où $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$, ou $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Puisque $0° \leq \theta \leq 180°$, alors $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ lorsque $\theta = 30°$.
Puisque $0° \leq \theta \leq 180°$, alors $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ lorsque $\theta = 150°$.
Donc $\theta = 30°$ ou $\theta = 150°$.
On vérifie ces valeurs par substitution. Les valeurs de θ sont donc $30°$ et $150°$.

(b) Soit r cm le rayon du petit cercle et R cm celui du grand cercle.
Le petit cercle a donc une circonférence de $2\pi r$ cm et une aire de πr^2 cm^2, tandis que le grand cercle a une circonférence de $2\pi R$ cm et une aire de πR^2 cm^2.
Puisque les rayons des deux cercles ont une somme de 10 cm, alors $r + R = 10$.
Puisque la circonférence du grand cercle a 3 cm de plus que celle du petit cercle, alors $2\pi R - 2\pi r = 3$, ou $2\pi(R - r) = 3$.
La différence, en cm^2, entre l'aire du grand cercle et celle du petit cercle est donc égale à :

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R - r)(R + r) = \tfrac{1}{2}[2\pi(R - r)](R + r) = \tfrac{1}{2}(3)(10) = 15$$

Elle est donc égale à 15 cm^2.

5. (a) Lorsque le prix de p \$ est augmenté de n %, le prix est multiplié par $1 + \dfrac{n}{100}$.
Lorsque le nouveau prix est diminué de 20 %, le nouveau prix est multiplié par $1 - \dfrac{20}{100}$, c'est-à-dire par $\dfrac{80}{100}$.
À la suite des deux ajustements, le prix en solde est égal à $p\left(1 + \dfrac{n}{100}\right)\left(\dfrac{80}{100}\right)$ \$.
Or selon l'énoncé, le prix en solde est 20 % de plus que p \$. Il est donc égal à $p\left(1 + \dfrac{20}{100}\right)$ \$, ou $p\left(\dfrac{120}{100}\right)$ \$.
On a donc :

$$p\left(1 + \frac{n}{100}\right)\left(\frac{80}{100}\right) \$ = p\left(\frac{120}{100}\right) \$$$

Sachant que $p \neq 0$, on simplifie pour obtenir $80\left(1 + \dfrac{n}{100}\right) = 120$.
On a donc $1 + \dfrac{n}{100} = \dfrac{120}{80}$, ou $1 + \dfrac{n}{100} = \dfrac{3}{2}$, ou $1 + \dfrac{n}{100} = \dfrac{150}{100}$. On a donc $\dfrac{n}{100} = \dfrac{50}{100}$, d'où $n = 50$.

(b) *Solution 1*
Soit $m = f(n)$. L'équation $f(f(n)) = 3$ devient $f(m) = 3$.
Supposons que $f(m) = 3$ et que m est impair.
Selon la définition, l'équation $f(m) = 3$ devient $m - 1 = 3$, d'où $m = 4$. Or, ce résultat contredit la supposition que m est impair. Cette supposition ne peut donc pas se réaliser.
Supposons que $f(m) = 3$ et que m est pair.
Selon la définition, l'équation $f(m) = 3$ devient $m^2 - 1 = 3$, d'où $m^2 = 4$. Donc $m = \pm 2$, chaque solution étant un nombre pair.
Donc si $f(f(n)) = 3$, alors $f(n) = 2$ ou $f(n) = -2$.
Supposons que $f(n) = 2$ ou $f(n) = -2$ et que n est impair.
Selon la définition, l'équation $f(n) = 2$ devient $n - 1 = 2$ (d'où $n = 3$) et l'équation $f(n) = -2$ devient $n - 1 = -2$ (d'où $n = -1$). Chacune de ces valeurs de n est impaire.
Supposons que $f(n) = 2$ ou $f(n) = -2$ et que n est pair.
Selon la définition, l'équation $f(n) = 2$ devient $n^2 - 1 = 2$ et l'équation $f(n) = -2$ devient $n^2 - 1 = -2$. On a donc $n^2 = 3$ ou $n^2 = -1$. Aucune de ces équation n'admet une solution entière.
Les entiers n pour lesquels $f(f(n)) = 3$ sont $n = 3$ et $n = -1$.
On vérifie que ces valeurs satisfont à l'équation donnée.

Solution 2
On considère séparément le cas où n est pair et le cas où n est impair.

Supposons que n est pair.
Donc, n^2 est pair et $f(n) = n^2 - 1$ doit être impair.
On a $f(f(n)) = f(n^2 - 1) = (n^2 - 1) - 1 = n^2 - 2$, puisque $f(m) = m - 1$ lorsque m est impair.
Si n est impair et $f(f(n)) = 3$, on doit avoir $n^2 - 2 = 3$, ou $n^2 = 5$.
Cette équation n'admet aucune solution entière. Donc, l'équation donnée n'admet aucune solution dans ce cas.

Supposons que n est impair.
Donc, $f(n) = n - 1$ doit être pair.
On a $f(f(n)) = f(n - 1) = (n - 1)^2 - 1 = n^2 - 2n + 1 - 1 = n^2 - 2n$.
Si n est impair et $f(f(n)) = 3$, on doit avoir $n^2 - 2n = 3$, ou $n^2 - 2n - 3 = 0$.
Sous forme factorisée, l'équation devient $(n - 3)(n + 1) = 0$. Donc $n = 3$ ou $n = -1$. Ces deux solutions sont des nombres impairs.

Les entiers n pour lesquels $f(f(n)) = 3$ sont $n = 3$ et $n = -1$.
On vérifie que ces valeurs satisfont à l'équation donnée.

6. (a) Puisque $10^y \neq 0$, l'équation $\dfrac{1}{32} = \dfrac{x}{10^y}$ est équivalente à l'équation $10^y = 32x$.
Pour résoudre ce problème, on cherche donc le plus petit entier strictement positif x pour lequel $32x$ est égal à une puissance de 10, l'exposant étant un entier strictement positif.
Or, $32 = 2^5$ et on a donc $32x = 2^5x$.
Pour que $32x$ soit une puissance de 10, chaque facteur 2 doit être accompagné d'un facteur 5.
Donc x doit être divisible par 5^5 (c'est-à-dire que x doit avoir au moins 5 fois le nombre 5 dans sa factorisation première). Donc $x \geq 5^5 = 3125$.
Or $32(5^5) = 2^5 5^5 = 10^5$. Si $x = 5^5 = 3125$, alors $32x$ est bien une puissance de 10, car il est égal à 10^5.
La plus petite valeur de x pour laquelle $\dfrac{1}{32} = \dfrac{x}{10^y}$, y étant un entier strictement positif quelconque est $x = 5^5$, ou $x = 3125$.

(b) *Solution 1*
Puisque les longueurs des trois côtés du triangle rectangle forment une suite arithmétique et qu'un des côtés a une longueur de 60, les trois longueurs doivent être $60, 60 + d, 60 + 2d$ ou $60 - d, 60, 60 + d$ ou $60 - 2d, 60 - d, 60$, d étant un nombre non nul.

Si un triangle rectangle a des côtés de longueurs $60, 60 + d$ et $60 + 2d$, alors d'après le théorème de Pythagore, on a les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} 60^2 + (60 + d)^2 &= (60 + 2d)^2 \\ 3600 + 3600 + 120d + d^2 &= 3600 + 240d + 4d^2 \\ 0 &= 3d^2 + 120d - 3600 \\ 0 &= d^2 + 40d - 1200 \\ 0 &= (d + 60)(d - 20) \end{aligned}$$

(Puisque $d \geq 0$, alors $60 + 2d$ représente la longueur de l'hypoténuse du triangle.)
Puisque $d \geq 0$, alors $d = 20$. On a le triangle avec des côtés de longueurs $60, 80$ et 100.
La grandeur la plus longue est celle de l'hypoténuse et les deux autres sont celles des cathètes qui sont perpendiculaires. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}(60)(80)$, ou 2400.

Si un triangle rectangle a des côtés de longueurs $60 - d, 60$ et $60 + d$, alors d'après le théorème de Pythagore, on a les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}(60-d)^2 + 60^2 &= (60+d)^2\\ 3600 - 120d + d^2 + 3600 &= 3600 + 120d + d^2\\ 3600 &= 240d\\ d &= 15\end{aligned}$$

Puisque $d \geq 0$, alors $d = 15$ est admissible. On a le triangle avec des côtés de longueurs $45, 60$ et 75.
On procède comme ci-haut et l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(45)(60)$, ou 1350.

Si un triangle rectangle a des côtés de longueurs $60 - 2d, 60 - d$ et 60, alors d'après le théorème de Pythagore, on a les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}(60-2d)^2 + (60-d)^2 &= 60^2\\ 3600 - 240d + 4d^2 + 3600 - 120d + d^2 &= 3600\\ 5d^2 - 360d + 3600 &= 0\\ d^2 - 72d + 720 &= 0\\ (d-60)(d-12) &= 0\end{aligned}$$

Puisque $d \geq 0$, alors $d = 60$ ou $d = 12$. Avec $d = 60$, on obtient des longueurs de côtés $-60, 0$ et 60, qui ne forment pas un triangle. Avec $d = 12$, on obtient des longueurs de côtés $36, 48$ et 60 qui forment un triangle.
On procède comme ci-haut et l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(36)(48)$, ou 864.

Les aires possibles de ces triangles sont 2400, 1350 et 864.

Solution 2
On considère un triangle rectangle dont les longueurs de côtés forment une suite arithmétique.
Soit $a - d, a$ et $a + d$ ces longueurs, où $a > 0$ et $d \geq 0$.
On remarque que $a - d \leq a \leq a + d$.
Puisque le triangle est rectangle, alors d'après le théorème de Pythagore, les équations équivalentes suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned}(a-d)^2 + a^2 &= (a+d)^2\\ a^2 - 2ad + d^2 + a^2 &= a^2 + 2ad + d^2\\ a^2 &= 4ad\end{aligned}$$

Puisque $a > 0$, alors $a = 4d$. Les longueurs $a - d$, a et $a + d$ deviennent donc $3d$, $4d$ et $5d$, d étant un nombre réel quelconque, $d \geq 0$.
(On remarque que ces triangles sont tous semblables au triangle remarquable 3-4-5.)
Puisqu'un des côtés a une longueur de 60, on a une des possibilités suivantes :

(i) $3d = 60$: Donc $d = 20$ et les côtés ont pour longueurs $60, 80$ et 100.
Le triangle a une hypoténuse de longueur 100 et des cathètes perpendiculaires de longueurs 60 et 80. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(60)(80)$, ou 2400.

(ii) $4d = 60$: Donc $d = 15$ et les côtés ont pour longueurs $45, 60$ et 75.
On procède comme ci-haut. L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(45)(60)$, ou 1350.

(iii) $5d = 60$: Donc $d = 12$ et les côtés ont pour longueurs $36, 48$ et 60.
On procède comme ci-haut. L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(36)(48)$, ou 864.

Les aires possibles de ces triangles sont 2400, 1350 et 864.

7. (a) *Solution 1*

Supposons qu'Amrita parcourt p km en kayak et n km à la nage.

Puisqu'Amrita laisse le kayak sur place et qu'il ne bouge pas, alors Zénon parcourt p km à la nage et n km en kayak.

On sait que chacun pagaie à une vitesse de 7 km/h, chacun nage à une vitesse de 2 km/h et chacun met 90 minutes (ou 1,5 heure) pour traverser le lac.

Si $n < p$, alors Amrita pagaie sur une plus grande distance que Zénon et nage sur une plus petite distance que lui.

Si $n > p$, alors Zénon pagaie sur une plus grande distance qu'Amrita et nage sur une plus petite distance qu'elle.

Puisque chacun met 90 minutes pour compléter la traversée, on doit avoir $n = p$.

On pourrait aussi considérer que puisque chacun pagaie à une vitesse de 7 km/h, chacun nage à une vitesse de 2 km/h et que chacun met 90 minutes (ou 1,5 heure) pour compléter la traversée, alors on a les équations suivantes :

$$\frac{p}{7} + \frac{n}{2} = 1{,}5 \qquad \frac{p}{2} + \frac{n}{7} = 1{,}5$$

Puisque les deux membres de droite sont égaux, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{p}{7} + \frac{n}{2} &= \frac{n}{7} + \frac{p}{2} \\
\frac{n}{2} - \frac{n}{7} &= \frac{p}{2} - \frac{p}{7} \\
n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) &= p\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) \\
n &= p
\end{aligned}$$

Donc $\frac{p}{7} + \frac{p}{2} = 1{,}5$ ou $\frac{9}{14}p = 1{,}5 = \frac{3}{2}$, d'où $p = \frac{7}{3}$.

Amrita pagaie cette distance de $\frac{7}{3}$ km à une vitesse de 7 km/h.

Pour le faire, elle met $\frac{7/3}{7}$ heure, ou $\frac{1}{3}$ heure, ou 20 minutes.

Zénon nage sur cette distance de $\frac{7}{3}$ km à une vitesse de 2 km/h.

Pour le faire, il met $\frac{7/3}{2}$ heure, ou $\frac{7}{6}$ heure, ou 70 minutes.

Le kayak n'est pas utilisé à partir du moment où Amrita cesse de pagayer jusqu'au moment où Zénon cesse de nager, soit une période de $(70 - 20)$ minutes, ou 50 minutes.

Solution 2

Soit t_1 heures le temps pendant lequel Amrita pagaie et Zénon nage.

Soit t_2 heures le temps pendant lequel Amrita nage et Zénon nage (le kayak ne bouge pas pendant ce temps).

Soit t_3 heures le temps pendant lequel Amrita nage et Zénon pagaie.

Soit d km la longueur de la traversée.

Puisqu'Amrita pagaie à une vitesse de 7 km/h et nage à une vitesse de 2 km/h, alors $7t_1 + 2t_2 + 2t_3 = d$.

Puisque Zénon pagaie à une vitesse de 7 km/h et nage à une vitesse de 2 km/h, alors $2t_1 + 2t_2 + 7t_3 = d$.

Puisque le kayak bouge à une vitesse de 7 km/h et qu'il ne bouge pas lorsqu'Amrita et

Zénon nagent tous les deux, alors $7t_1 + 0t_2 + 7t_3 = d$.
Puisqu'Amrita et Zénon mettent chacun 90 minutes ($\frac{3}{2}$ heure) pour traverser le lac, alors $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{3}{2}$.
D'après les équations $7t_1 + 2t_2 + 2t_3 = d$ et $2t_1 + 2t_2 + 7t_3 = d$, on obtient
$7t_1 + 2t_2 + 2t_3 = 2t_1 + 2t_2 + 7t_3$, ou $5t_1 = 5t_3$, d'où $t_1 = t_3$.
Puisque $7t_1 + 2t_2 + 2t_3 = d$ et $7t_1 + 0t_2 + 7t_3 = d$ et $t_1 = t_3$, alors $7t_1 + 2t_2 + 2t_1 = 7t_1 + 7t_1$, ou $2t_2 = 5t_1$, d'où $t_2 = \frac{5}{2}t_1$.

Puisque $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{3}{2}$, alors $t_1 + \frac{5}{2}t_1 + t_1 = \frac{3}{2}$, ou $\frac{9}{2}t_1 = \frac{3}{2}$, ou $t_1 = \frac{1}{3}$.

Donc $t_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3}$ heure, ou $t_2 = \frac{5}{6}$ heure (ou 50 minutes).

Le kayak ne bouge pas pendant $\frac{5}{6}$ heure.

(b) D'après la première équation, $x\left(\frac{1}{2} + y - 2x^2\right) = 0$, on a $x = 0$ ou $\frac{1}{2} + y - 2x^2 = 0$.
D'après la deuxième équation, $y\left(\frac{5}{2} + x - y\right) = 0$, on a $y = 0$ ou $\frac{5}{2} + x - y = 0$.

Si $x = 0$, la première équation donnée est vérifiée.
Dans ce cas, d'après la deuxième équation donnée, on a $y = 0$ (ce qui donne la solution $(0,0)$) ou $\frac{5}{2} + 0 - y = 0$ qui devient $y = \frac{5}{2}$ (ce qui donne la solution $(0, \frac{5}{2})$).

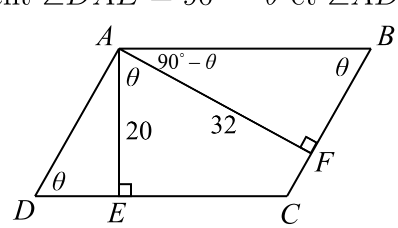
Si $y = 0$, la deuxième équation donnée est vérifiée.
Dans ce cas, d'après la première équation donnée, on a $x = 0$ (ce qui donne la solution $(0,0)$) ou $\frac{1}{2} + 0 - 2x^2 = 0$ qui devient $x^2 = \frac{1}{4}$, ou $x = \pm\frac{1}{2}$ (ce qui donne les solutions $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(-\frac{1}{2}, 0)$).

Jusqu'à maintenant, on a déterminé toutes les solutions pour lesquelles $x = 0$ ou $y = 0$.
Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, le système d'équations est vrai si $\frac{1}{2} + y - 2x^2 = 0$ et $\frac{5}{2} + x - y = 0$ (ou $1 + 2y - 4x^2 = 0$ et $5 + 2x - 2y = 0$).
On additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $6 + 2x - 4x^2 = 0$.
Cette équation est équivalente à $2x^2 - x - 3 = 0$, ou $(2x-3)(x+1) = 0$, dont les solutions sont $x = \frac{3}{2}$ et $x = -1$.
D'après l'équation $\frac{5}{2} + x - y = 0$, on a $y = x + \frac{5}{2}$.
On reporte $x = \frac{3}{2}$ dans cette équation pour obtenir $y = 4$. On reporte $x = -1$ dans la même équation pour obtenir $y = \frac{3}{2}$.

Les couples (x, y) qui vérifient le système donné sont donc :

$$(0,0), (0, \tfrac{5}{2}), (\tfrac{1}{2}, 0), (-\tfrac{1}{2}, 0), (\tfrac{3}{2}, 4), (-1, \tfrac{3}{2})$$

8. (a) Soit $\angle EAF = \theta$.
Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, alors AB et DC sont parallèles, $AB = DC$, DA et CB sont parallèles et $DA = CB$.
Puisque AE est perpendiculaire à DC et que AB et DC sont parallèles, alors AE est perpendiculaire à AB.
Donc $\angle EAB = 90^\circ$ et $\angle FAB = 90^\circ - \theta$.
Puisque le triangle AFB est rectangle en F et que $\angle FAB = 90^\circ - \theta$, alors $\angle ABF = \theta$.
De la même manière, on obtient $\angle DAE = 90^\circ - \theta$ et $\angle ADE = \theta$.



Puisque $\cos(\angle EAF) = \cos\theta = \frac{1}{3}$ et $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, alors :

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\tfrac{1}{9}} = \sqrt{\tfrac{8}{9}} = \tfrac{2\sqrt{2}}{3}$$

(On remarque que $\sin\theta > 0$ puisque θ est un angle d'un triangle, ce qui en fait un angle saillant.)

Dans le triangle AFB, $\sin\theta = \dfrac{AF}{AB}$ et $\cos\theta = \dfrac{FB}{AB}$.

Puisque $AF = 32$ et $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, alors $AB = \dfrac{AF}{\sin\theta} = \dfrac{32}{2\sqrt{2}/3} = \dfrac{48}{\sqrt{2}} = 24\sqrt{2}$.

Puisque $AB = 24\sqrt{2}$ et $\cos\theta = \frac{1}{3}$, alors $FB = AB\cos\theta = 24\sqrt{2}(\frac{1}{3}) = 8\sqrt{2}$.

Dans le triangle AED, $\sin\theta = \dfrac{AE}{AD}$ et $\cos\theta = \dfrac{DE}{AD}$.

Puisque $AE = 20$ et $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, alors $AD = \dfrac{AE}{\sin\theta} = \dfrac{20}{2\sqrt{2}/3} = \dfrac{30}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2}$.

On a $DE = AD\cos\theta$. Puisque $AD = 15\sqrt{2}$ et $\cos\theta = \frac{1}{3}$, alors $DE = AD\cos\theta$, d'où $DE = 15\sqrt{2}(\frac{1}{3})$, ou $DE = 5\sqrt{2}$.

(Pour déterminer AD et DE, on aurait pu utiliser la similitude des triangles ADE et ABF.)

L'aire du quadrilatère $AECF$ est égale à l'aire du parallélogramme $ABCD$ moins l'aire des triangles AFB et ADE.

L'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à $AB \cdot AE$, ou $24\sqrt{2}\cdot 20$, ou $480\sqrt{2}$.

L'aire du triangle AFB est égale à $\frac{1}{2}(AF)(FB)$, ou $\frac{1}{2}(32)(8\sqrt{2})$, ou $128\sqrt{2}$.

L'aire du triangle AED est égale à $\frac{1}{2}(AE)(DE)$, ou $\frac{1}{2}(20)(5\sqrt{2})$, ou $50\sqrt{2}$.

L'aire du quadrilatère $AECF$ est donc égale à $480\sqrt{2} - 128\sqrt{2} - 50\sqrt{2}$, ou $302\sqrt{2}$.

(b) On remarque que $x \neq 1$ puisque 1 ne peut être la base d'un logarithme. Donc $\log x \neq 0$.

On utilise d'abord la relation $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$, suivie des autres lois des logarithmes, pour obtenir les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\log_4 x - \log_x 16 &= \tfrac{7}{6} - \log_x 8 \\
\frac{\log x}{\log 4} - \frac{\log 16}{\log x} &= \frac{7}{6} - \frac{\log 8}{\log x} \qquad \text{(on sait que } x \neq 1\text{, d'où } \log x \neq 0) \\
\frac{\log x}{\log 4} &= \frac{7}{6} + \frac{\log 16 - \log 8}{\log x} \\
\frac{\log x}{\log(2^2)} &= \frac{7}{6} + \frac{\log(\frac{16}{8})}{\log x} \\
\frac{\log x}{2\log 2} &= \frac{7}{6} + \frac{\log 2}{\log x} \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\log x}{\log 2}\right) &= \frac{7}{6} + \frac{\log 2}{\log x}
\end{aligned}$$

Posons $t = \dfrac{\log x}{\log 2} = \log_2 x$. Puisque $x \neq 1$, on a $t \neq 0$. On a donc les équations suivantes qui sont toutes équivalentes aux équations précédentes :

$$\begin{aligned} \frac{t}{2} &= \frac{7}{6} + \frac{1}{t} \\ 3t^2 &= 7t + 6 \qquad \text{(on a multiplié chaque membre par } 6t\text{)} \\ 3t^2 - 7t - 6 &= 0 \\ (3t+2)(t-3) &= 0 \end{aligned}$$

L'équation initiale est équivalente à $t = -\frac{2}{3}$ ou $t = 3$.
Puisque $t = \log_2 x$, on a $\log_2 x = -\frac{2}{3}$ ou $\log_2 x = 3$, d'où $x = 2^{-2/3}$, ou $x = 2^3$.
Les valeurs de x qui vérifient l'équation donnée sont $2^{-2/3}$ et 8.

9. (a) Le nombre de chaines possibles de dix lettres, chaque lettre étant un A ou un B, est égal à 2^{10}, ou 1024, puisqu'il y a 2 choix pour chaque position dans la chaine.
On déterminera le nombre de telles chaines qui ne contiennent pas la sous-chaine $ABBA$ (c.-à-d. qui ne contiennent pas les lettres consécutives $ABBA$) en déterminant le nombre de chaines qui contiennent la sous-chaine $ABBA$ et en soustrayant ce nombre de 1024.
Si une chaine contient la sous-chaine $ABBA$, cette sous-chaine peut se retrouver dans une de 7 positions ($ABBAxxxxxx$, $xABBAxxxxx$, …, $xxxxxxABBA$).
Il y a 2 choix pour chacune des 6 autres lettres d'une telle chaine. La sous-chaine $ABBA$ parait donc $7 \cdot 2^6$ fois, ou 448 fois dans les 1024 chaines.
Or, la sous-chaine $ABBA$ peut paraitre plusieurs fois dans une chaine. (Par exemple, la sous-chaine $ABBA$ parait deux fois dans la chaine $ABBAAAABBA$ et la chaine a été comptée deux fois dans le total.)
On doit donc apporter une correction au total de 448 en tenant compte des cas où $ABBA$ parait plus d'une fois dans une chaine.
La sous-chaine $ABBA$ peut être répétée sans chevauchement de lettres (par exemple, $ABBAABBAxx$) ou avec chevauchement d'une lettre (par exemple, $ABBABBAxxx$).
Seule la chaine $ABBABBABBA$ admet trois présences de la sous-chaine $ABBA$.
Une chaine qui contient deux fois la sous-chaine $ABBA$ avec chevauchement doit être d'une des formes suivantes :

$$ABBABBAxxx \qquad xABBABBAxx \qquad xxABBABBAx \qquad xxxABBABBA$$

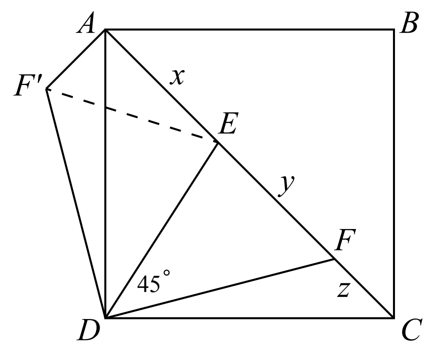
Il y a 4 choix pour la position de $ABBABBA$ dans la chaine et 2 choix pour chacune des autres lettres, pour un total de $4 \cdot 2^3$ chaines, ou 32 chaines de cette sorte.
Or, la chaine $ABBABBABBA$ est comptée dans la première forme et dans la quatrième forme. On doit donc soustraire 2 chaines. Il y a donc 30 chaines qui contiennent la sous-chaine $ABBA$ deux fois avec chevauchement.
Une chaine qui contient deux fois la sous-chaine $ABBA$ sans chevauchement doit être d'une des formes suivantes :

$$\begin{array}{ccc} ABBAABBAxx & ABBAxABBAx & ABBAxxABBA \\ xABBAABBAx & xABBAxABBA & xxABBAABBA \end{array}$$

Il y a 6 formes et 2 choix pour chacune des 2 autres lettres pour un total de $6 \cdot 2^2$ chaines, ou 24 chaines de cette sorte.
Or, la chaine $ABBABBABBA$ est comptée dans la troisième forme. On doit donc soustraire 1 chaine. Il y a donc 23 chaines qui contiennent la sous-chaine $ABBA$ deux fois sans chevauchement.

Il y a donc 30 chaines qui contiennent exactement deux fois la sous-chaine $ABBA$ avec chevauchement, 23 chaines qui contiennent exactement deux fois la sous-chaine $ABBA$ sans chevauchement et 1 chaine qui contient exactement trois fois la sous-chaine $ABBA$.
Pour connaitre le nombre de chaines qui contiennent la sous-chaine $ABBA$ au moins une fois, on considère le nombre de parutions de la sous-chaine $ABBA$ (448), on soustrait le nombre de chaines qui contiennent exactement deux fois la sous-chaine $ABBA$ (puisque celles-ci avaient été comptées deux fois au départ) et on soustrait deux fois le nombre de chaines qui contiennent trois fois la sous-chaine $ABBA$ (puisque celles-ci avaient été comptées trois fois au départ).
On obtient $448 - 23 - 30 - 2 \cdot 1 = 393$. Il y a donc 393 chaines qui contiennent au moins une fois la sous-chaine $ABBA$. Le nombre de chaines de dix lettres qui ne contiennent pas la sous-chaine $ABBA$ est donc égal à $1024 - 393$, ou 631.

(b) *Solution 1*
On fait subir au triangle DFC une rotation de centre D de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Ainsi DA est l'image de DC et F' est l'image de F, comme dans la figure suivante.
On joint F' et E.

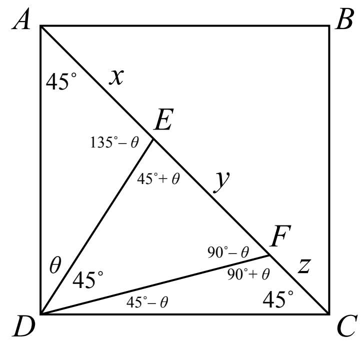


Puisque AC est la diagonale du carré $ABCD$, alors $\angle EAD = \angle FCD = 45°$.
Puisque $\angle EAD = 45°$ et $\angle F'AD = \angle FCD = 45°$, alors $\angle F'AE = 45° + 45°$, ou $\angle F'AE = 90°$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle $F'AE$, $(F'E)^2 = (F'A)^2 + (AE)^2$.
Or $F'A = FC = z$ et $AE = x$. Donc $(F'E)^2 = z^2 + x^2$.
Pour démontrer que $y^2 = x^2 + z^2$, il suffit donc de démontrer que $F'E = y$.
On considère les triangles $F'DE$ et FDE.
On sait que $F'D = FD$ et que $\angle F'DA = \angle FDC$ d'après la rotation. De plus, $ED = ED$.
On a $\angle F'DE = \angle F'DA + \angle EDA = \angle FDC + \angle EDA = 90° - \angle EDF = 45°$. Donc $\angle F'DE = \angle FDE = 45°$.
Les triangles $F'DE$ et FDE sont donc isométriques (côté-angle-côté).
Donc $F'E = FE = y$.
Donc $y^2 = x^2 + z^2$.

Solution 2
Puisque AC est la diagonale du carré $ABCD$, alors $\angle EAD = \angle FCD = 45°$.
Soit $\angle ADE = \theta$.
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors :

$$\angle AED = 180° - \angle EAD - \angle ADE = 180° - 45° - \theta = 135° - \theta$$

Puisque AEF est un angle plat, alors $\angle DEF = 180° - \angle AED = 180° - (135° - \theta) = 45° + \theta$.
De façon semblable, on obtient $\angle EFD = 90° - \theta$, $\angle DFC = 90° + \theta$ et $\angle FDC = 45° - \theta$.



D'après la loi des sinus dans le triangle AED, on a $\dfrac{AE}{\sin\angle ADE} = \dfrac{ED}{\sin\angle EAD}$, ou $\dfrac{x}{\sin\theta} = \dfrac{ED}{\sin 45^\circ}$.

D'après la loi des sinus dans le triangle DEF, on a $\dfrac{EF}{\sin\angle EDF} = \dfrac{ED}{\sin\angle EFD}$, ou $\dfrac{y}{\sin 45^\circ} = \dfrac{ED}{\sin(90^\circ - \theta)}$.

D'après la loi des sinus dans le triangle DEF, on a $\dfrac{EF}{\sin\angle EDF} = \dfrac{FD}{\sin\angle DEF}$, ou $\dfrac{y}{\sin 45^\circ} = \dfrac{FD}{\sin(45^\circ + \theta)}$.

D'après la loi des sinus dans le triangle DFC, on a $\dfrac{FC}{\sin\angle FDC} = \dfrac{FD}{\sin\angle DCF}$, ou $\dfrac{z}{\sin(45^\circ - \theta)} = \dfrac{FD}{\sin 45^\circ}$.

On divise la première de ces équations par la deuxième, membre par membre, pour obtenir $\dfrac{x\sin 45^\circ}{y\sin\theta} = \dfrac{\sin(90^\circ - \theta)}{\sin 45^\circ}$, ou $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\sin(90^\circ - \theta)\sin\theta}{\sin^2 45^\circ}$.

On divise la quatrième de ces équations par la troisème, membre par membre, pour obtenir $\dfrac{z\sin 45^\circ}{y\sin(45^\circ - \theta)} = \dfrac{\sin(45^\circ + \theta)}{\sin 45^\circ}$, ou $\dfrac{z}{y} = \dfrac{\sin(45^\circ + \theta)\sin(45^\circ - \theta)}{\sin^2 45^\circ}$.

Puisque $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ pour tout angle α, alors $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$.

De plus, $\sin(45^\circ + \theta) = \sin(90^\circ - (45^\circ - \theta)) = \cos(45^\circ - \theta)$.

On sait aussi que $\dfrac{1}{\sin^2 45^\circ} = \dfrac{1}{(1/\sqrt{2})^2} = 2$.

Les expressions pour $\dfrac{x}{y}$ et $\dfrac{z}{y}$ ci-haut deviennent donc

$$\frac{x}{y} = 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$$

et

$$\frac{z}{y} = 2\cos(45^\circ - \theta)\sin(45^\circ - \theta) = \sin(2(45^\circ - \theta)) = \sin(90^\circ - 2\theta) = \cos 2\theta.$$

On a donc :

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{z^2}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 = \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$$

Puisque $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{z^2}{y^2} = 1$, alors $x^2 + z^2 = y^2$, ce qu'il fallait démontrer.

10. (a) On a $k = 10$ et il y a donc 10 boules dans chaque sac.
On peut donc choisir $10 \cdot 10$ paires de boules, ou 100 paires de boules en choisissant une boule dans chaque sac. Ces 100 choix sont équiprobables.
Soit a le numéro de la boule qui vient du premier sac et b le numéro de la boule qui vient du deuxième sac. Pour déterminer $P(10)$, on doit compter le nombre m de couples (a, b) dont le produit ab est divisible par 10.
On aura alors $P(10) = \dfrac{m}{100}$.
Pour que ab soit divisible par 10, il faut qu'au moins un des nombres a et b soit un multiple de 5 et qu'au moins un des nombres a et b soit pair.
Si $a = 10$ ou $b = 10$, le couple (a, b) donne un produit ab qui est divisible par 10.
Il y a alors 19 couples favorables :

$$(a, b) = (1, 10), (2, 10), \ldots, (9, 10), (10, 10), (10, 9), \ldots, (10, 2),(10, 1)$$

Si ni a ni b n'est égal à 10, il faut que $a = 5$ ou $b = 5$ pour qu'au moins un des nombres a et b soit un multiple de 5. Dans ce cas, l'autre nombre, a ou b, doit être pair et pas égal à 10. (On a déjà compté les cas où $a = 10$ ou $b = 10$.)
Il y a alors 8 couples favorables :

$$(a, b) = (5, 2), (5, 4), (5, 6), (5, 8), (2, 5), (4, 5), (6, 5), (8, 5)$$

Il n'y a aucun autre couple (a, b) favorable pour lequel ab est divisible par 10.
Il y a donc 27 couples favorables $(19 + 8 = 27)$. Donc $P(10) = \frac{27}{100}$.
(On aurait pu créer un tableau 10 sur 10 qui indique toutes les combinaisons possibles de a et de b, ainsi que les produits ab correspondants, pour compter les produits divisibles par 10 et calculer $P(10)$.)

(b) Soit n un entier tel que $n \geq 2$.
On considère $f(n) = 2n - 1$. Il s'agit d'un polynôme en n.
On démontrera que $P(n) \geq \dfrac{2n-1}{n^2}$ pour tous les entiers n où $n \geq 2$ et que $P(n) = \dfrac{2n-1}{n^2}$ pour un nombre infini d'entiers n où $n \geq 2$.

On considère deux sacs contenant chacun n boules numérotées de 1 à n.
Puisque chaque sac contient n boules, il est possible de choisir n^2 couples de boules, une boule provenant de chaque sac. Ces choix sont équiprobables.
Soit a le numéro de la boule qui vient du premier sac et b le numéro de la boule qui vient du deuxième sac.
Les couples

$$(a, b) = (1, n),(2, n), \ldots, (n - 1, n), (n, n), (n, n - 1), \ldots, (n, 2), (n, 1)$$

sont tous tels que ab est divisible par n.
Le nombre de couples dans cette liste est égal à $(n - 1) + 1 + (n - 1)$, ou $2n - 1$.
Donc, au moins $2n-1$ des couples de boules peuvent être choisis de manière que le produit des numéros sur les boules soit divisible par n.
Puisque n^2 couples peuvent être choisis, que ces choix sont équiprobables et qu'il y a au moins $2n - 1$ choix favorables, alors $P(n) \geq \dfrac{2n-1}{n^2}$.
On a démontré la première condition.

Supposons que n est un nombre premier p $(n = p)$.
Pour que ab soit divisible par p, il faut que a soit divisible par p, que b soit divisible par p

ou que a et b soient divisibles par p. (Ceci n'est vrai que si p est un nombre premier ; par exemple, $2 \cdot 2$ est divisible par 4 même si aucun des facteurs n'est divisible par 4.)
Puisque $1 \leq a \leq p$ et $1 \leq b \leq p$, alors si a est divisible par p ou si b est divisible par p (ou si a et b sont divisibles par p), on doit avoit $a = p$ ou $b = p$ ou $a = b = p$.
En d'autres mots, ab est divisible par p exactement lorsque (a, b) est dans la liste

$$(1, p), (2, p), \ldots, (p-1, p), (p, p), (p, p-1), \ldots, (p, 2), (p, 1).$$

La liste contient $2p - 1$ couples. Ce sont les seuls couples pour lesquels ab est divisible par p.
Donc, $P(n) = \dfrac{2n-1}{n^2}$ lorsque n est un nombre premier.
Puisqu'il existe un nombre infini de nombres premiers, alors $P(n) = \dfrac{2n-1}{n^2}$ pour un nombre infini d'entiers n où $n \geq 2$. On a démontré la deuxième condition.
Donc, $f(n) = 2n - 1$ est un polynôme qui satisfait aux deux conditions.

(c) Soit $N = 2^k$, k étant un entier et $k \geq 2$.
On considère deux sacs contenant chacun N boules numérotées de 1 à N.
Puisque chaque sac contient N boules, il est possible de choisir N^2 couples de boules, une boule provenant de chaque sac. Ces choix sont équiprobables.
Soit a le numéro de la boule qui vient du premier sac et b le numéro de la boule qui vient du deuxième sac.
Soit j un entier, $1 \leq j \leq k - 1$.
On considère les couples de la forme $(a, b) = (2^j x, 2^{k-j} y)$, x et y étant des entiers positifs impairs tels que a et b soient dans l'intervalle voulu.
On remarque que $ab = (2^j x)(2^{k-j} y) = 2^k xy$, ce qui est divisible par $N = 2^k$.
Puisque $1 \leq a \leq 2^k$, alors $1 \leq 2^j x \leq 2^k$, d'où $x \leq 2^{k-j}$.
Puisque la moitié des entiers de 1 à 2^{k-j} sont impairs, il y a $\frac{1}{2}2^{k-j}$ choix, ou 2^{k-j-1} choix pour x. De même, il y a $2^{k-(k-j)-1}$ choix, ou 2^{j-1} choix pour y.
Chaque choix de x et de y donne un couple unique (a, b).
Pour n'importe quelle valeur particulière de j, il y a 2^{k-j-1} choix pour x et 2^{j-1} choix pour y.
Il y a donc $2^{k-j-1} \cdot 2^{j-1}$ choix, ou 2^{k-2} choix de cette forme pour (a, b).
Donc pour une valeur particulière de j, où $1 \leq j \leq k-1$, cette méthode donne 2^{k-2} couples (a, b) pour lesquels ab est divisible par N.
Puisqu'il y a $k - 1$ valeurs différentes de j, il y a au moins $(k - 1)2^{k-2}$ couples (a, b) pour lesquels ab est divisible par N. (Deux couples qui proviennent de deux valeurs différentes de j seront différents, puisque le nombre de facteurs 2 dans leurs valeurs de a seront différents.)
Puisqu'il y a N^2 choix pour (a, b), alors :

$$P(N) \geq \frac{(k-1)2^{k-2}}{N^2} = \frac{(k-1)2^k 2^{-2}}{N^2} = \frac{k-1}{4} \cdot \frac{1}{N}$$

Lorsque $\dfrac{k-1}{4} > 2016$, on a $P(N) > 2016 \cdot \dfrac{1}{N}$.
L'inéquation $\dfrac{k-1}{4} > 2016$ est équivalente à $k - 1 > 8064$, ou $k > 8065$.
On veut démontrer qu'il existe un entier strictement positif m pour lequel $P(m) > \dfrac{2016}{m}$.
Posons $m = 2^{8066}$.
D'après le travail précédent, $P(m) \geq \dfrac{8065}{4} \cdot \dfrac{1}{m} > \dfrac{2016}{m}$, ce qu'il fallait démontrer.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2015

le mercredi 15 avril 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 avril 2015
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) On a : $\dfrac{10^2-9^2}{10+9} = \dfrac{100-81}{19} = \dfrac{19}{19} = 1$

OU On factorise $10^2 - 9^2$ comme différence de carrés et on obtient :

$$\frac{10^2-9^2}{10+9} = \frac{(10+9)(10-9)}{10+9} = 10-9 = 1$$

On remarque que l'expression $10+9$, qui est annulée au numérateur et au dénominateur, n'est pas égale à 0.

(b) Puisque $\dfrac{x+1}{x+4} = 4$, alors $x+1 = 4(x+4)$, d'où $x+1 = 4x+16$, ou $3x = -15$.
Donc $3x+8 = -15+8 = -7$.

OU Puisque $3x = -15$, alors $x = -5$.
Donc $3x+8 = 3(-5)+8 = -15+8 = -7$.

(c) Puisque $f(x) = 2x-1$, alors $f(3) = 2(3)-1 = 5$.
Donc $(f(3))^2 + 2(f(3)) + 1 = 5^2 + 2(5) + 1 = 25+10+1 = 36$.

OU Puisque $f(x) = 2x-1$, alors :

$$(f(x))^2 + 2(f(x)) + 1 = (f(x)+1)^2 = (2x-1+1)^2 = 4x^2$$

Donc $(f(3))^2 + 2(f(3)) + 1 = 4(3^2) = 36$.

2. (a) Puisque $\sqrt{a} + \sqrt{a} = 20$, alors $2\sqrt{a} = 20$, d'où $\sqrt{a} = 10$. Donc $a = 10^2$, ou $a = 100$.

(b) Soit r le rayon du grand cercle.
Puisque le petit cercle a un rayon de 1, il a une aire de $\pi \cdot 1^2$, ou π.
Puisque la région entre les cercles a une aire égale à l'aire du petit cercle, alors le grand cercle a une aire de $\pi + \pi$, ou 2π.
Donc $\pi r^2 = 2\pi$, ou $r^2 = 2$. Puisque $r > 0$, alors $r = \sqrt{2}$.

(c) Puisque 30 élèves avaient une note moyenne de 80, alors la note totale de ces 30 élèves est égale à $30 \cdot 80$, ou 2400.
Lorsque 2 élèves quittent la classe, il reste 28 élèves et ils ont une note moyenne de 82.
Donc, la note totale de ces 28 élèves est égale à $28 \cdot 82$, ou 2296.
Donc, la note totale des 2 élèves qui ont quitté la classe est égale à $2400 - 2296$, ou 104.
La note moyenne de ces deux élèves est égale à $\dfrac{104}{2}$, ou 52.

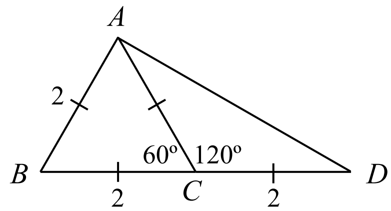
3. (a) *Solution 1*

On trace AD.

Puisque $BC = CD$ et $BD = 4$, alors $BC = CD = 2$. De plus, $AB = BC = 2$.

Puisque le triangle ABC est équilatéral, $\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$.

Puisque $\angle ACB = 60^\circ$, alors $\angle ACD = 180^\circ - \angle ACB$, d'où $\angle ACD = 180^\circ - 60^\circ$, ou $\angle ACD = 120^\circ$.



Puisque $AC = CD$, le triangle ACD est isocèle et $\angle CDA = \angle CAD$.

Chacun de ces angles a une mesure égale à $\frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACD)$, ou $\frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ)$, ou 30°.

Puisque $\angle ABD = 60^\circ$ et $\angle ADB = 30^\circ$, alors $\angle BAD = 90^\circ$. Le triangle DBA est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.

Donc $AD = \sqrt{3}AB$, d'où $AD = 2\sqrt{3}$.

Solution 2

On trace AD.

Puisque $BC = CD$ et $BD = 4$, alors $BC = CD = 2$. De plus, $AB = BC = 2$.

Puisque $\angle ACB = 60^\circ$, alors $\angle ACD = 180^\circ - \angle ACB$, d'où $\angle ACD = 180^\circ - 60^\circ$, ou $\angle ACD = 120^\circ$. D'après la loi du cosinus dans le triangle ACD, on a :

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 - 2(AC)(CD)\cos(\angle ACD) \\ &= 2^2 + 2^2 - 2(2)(2)\cos 120^\circ \\ &= 4 + 4 - 8(-\tfrac{1}{2}) \\ &= 12 \end{aligned}$$

Puisque $AD^2 = 12$ et $AD > 0$, alors $AD = \sqrt{12}$, ou $AD = 2\sqrt{3}$.

Solution 3

On trace AD et on abaisse une perpendiculaire du point A jusqu'au point E sur BC.

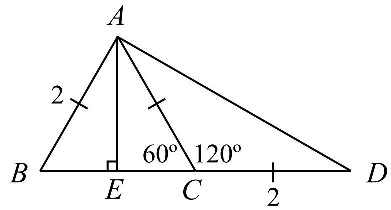
Puisque $BC = CD$ et $BD = 4$, alors $BC = CD = 2$. De plus, $AB = BC = 2$.

Puisque le triangle ABC est équilatéral, $\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$.

Puisque $\angle ABC = 60^\circ$ et $\angle AEB = 90^\circ$, le triangle ABE est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.

Donc $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$, d'où $AE = \sqrt{3}$.

Puisque $\angle ACB = 60^\circ$, alors $\angle ACD = 180^\circ - \angle ACB$, d'où $\angle ACD = 180^\circ - 60^\circ$, ou $\angle ACD = 120^\circ$.

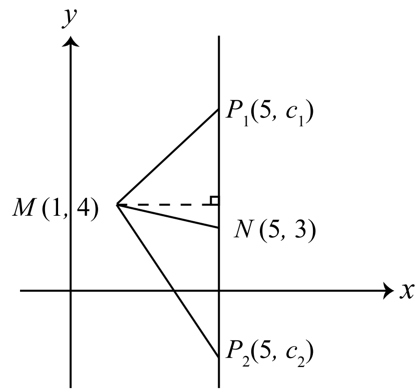


Puisque $AC = CD$, le triangle ACD est isocèle et $\angle CDA = \angle CAD$.

Chacun de ces angles a une mesure égale à $\frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACD)$, ou $\frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ)$, ou 30°.

DAE est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $AD = 2AE$, d'où $AD = 2\sqrt{3}$.

(b) Les points $N(5,3)$ et $P(5,c)$ sont situés sur la même droite verticale. On considère la base NP du triangle MNP. Soit b la longueur de cette base.
La hauteur correspondante du triangle MNP est la distance du point $M(1,4)$ jusqu'à la droite qui passe aux points N et P. Puisque M est situé sur la droite d'équation $x=1$ et que N et P sont situés sur la droite d'équation $x=5$, alors le triangle a une hauteur de 4.



Puisque le triangle MNP a une aire de 14, on a $\frac{1}{2}bh = 14$.
Puisque $h=4$, alors $\frac{1}{2}b(4)=14$, d'où $2b=14$, ou $b=7$.
Donc, le point $P(5,c)$ est à une distance de 7 unités du point $N(5,3)$.
Puisque NP est un segment de droite vertical, alors $c=3+7$ ou $c=3-7$, d'où $c=10$ ou $c=-4$.
Ces deux valeurs ont une somme de $10+(-4)$, ou 6.
(On aurait pu remarquer que les deux positions du point P doivent être symétriques par rapport au point N et que les deux valeurs de c auront donc une moyenne de 3. Elles auront donc une somme de $2\cdot 3$, ou 6.)

4. (a) Pour déterminer l'ordonnée à l'origine, on pose $x=0$. On obtient :

$$y = (-1)(-2)(-3) - (-2)(-3)(-4) = (-6) - (-24) = 18$$

Avant de déterminer les abscisses à l'origine, on transforme l'équation pour la présenter sous forme factorisée :

$$y = (x-1)(x-2)(x-3)-(x-2)(x-3)(x-4) = (x-2)(x-3)\left((x-1)-(x-4)\right) = 3(x-2)(x-3)$$

L'équation est donc $y=3(x-2)(x-3)$. Pour déterminer les abscisses à l'origine, on pose $y=0$. On obtient $3(x-2)(x-3)=0$, d'où $x=2$ ou $x=3$.
La courbe a pour abscisses à l'origine 2 et 3 et pour ordonnée à l'origine 18.

(b) Les courbes ont pour équation respective $y=x^3-x^2+3x-4$ et $y=ax^2-x-4$. Les coordonnées d'un point d'intersection vérifient chacune des équations. Pour déterminer les points d'intersection, on pose l'égalité entre les y des équations (les membres de gauche) et on détermine les valeurs de x de l'équation qui en résulte, soit $x^3-x^2+3x-4=ax^2-x-4$.
Dans ce problème, on cherche toutes les valeurs de a pour lesquelles l'équation $x^3-x^2+3x-4=ax^2-x-4$ admet exactement deux solutions.
On résout l'équation :

$$\begin{aligned} x^3-x^2+3x-4 &= ax^2-x-4 \\ x^3-x^2-ax^2+4x &= 0 \\ x^3-(a+1)x^2+4x &= 0 \\ x(x^2-(a+1)x+4) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x = 0$ ou $x^2 - (a+1)x + 4 = 0$.
On remarque que $x = 0$ n'est pas une solution de l'équation $x^2 - (a+1)x + 4 = 0$, puisque si on reporte $x = 0$ dans le membre de gauche, on obtient 4 et non pas 0.
Donc, pour que les deux courbes admettent exactement deux points d'intersection, l'équation du second degré $x^2 - (a+1)x + 4 = 0$ doit admettre exactement une solution. Son discriminant doit donc égaler 0.
On doit donc avoir $(a+1)^2 - 4(1)(4) = 0$, ou $(a+1)^2 = 16$, d'où $a + 1 = \pm 4$.
Si $a + 1 = 4$, alors $a = 3$; si $a + 1 = -4$, alors $a = -5$.
Les courbes d'équations $y = x^3 - x^2 + 3x - 4$ et $y = ax^2 - x - 4$ se coupent donc en exactement deux points lorsque $a = 3$ ou $a = -5$. Les valeurs de a sont donc 3 et -5.
(On peut vérifier que les courbes d'équations $y = x^3 - x^2 + 3x - 4$ et $y = 3x^2 - x - 4$ se coupent aux points $(0,\ -4)$ et $(2, 6)$ et que les courbes d'équations $y = x^3 - x^2 + 3x - 4$ et $y = -5x^2 - x - 4$ se coupent aux points $(0,\ -4)$ et $(-2,\ -22)$.)

5. (a) Soit $AB = AC = DE = x$.
Puisque $DB = 9$ et $EC = 8$, alors $AD = x - 9$ et $AE = x - 8$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADE, on a :

$$\begin{aligned} AD^2 + AE^2 &= DE^2 \\ (x-9)^2 + (x-8)^2 &= x^2 \\ x^2 - 18x + 81 + x^2 - 16x + 64 &= x^2 \\ x^2 - 34x + 145 &= 0 \\ (x-5)(x-29) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x = 5$ ou $x = 29$.
Or $AB \geq DB = 9$. On rejette donc $x = 5$.
Donc $DE = 29$.

(b) Puisque chaque liste est composée de 6 entiers consécutifs strictement positifs et que le plus petit entier des listes respectives est a ou b, la première liste est composée des entiers $a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$ et la deuxième liste est composée des entiers $b, b+1, b+2, b+3, b+4, b+5$. On a aussi $1 \leq a < b$.
On détermine d'abord les couples (a, b) pour lesquels le nombre 49 parait dans la troisième liste, puis on déterminera, parmi ces couples, ceux pour lesquels la troisième liste ne contient aucun multiple de 64. Ensuite, on gardera seulement les couples pour lesquels il y a un nombre supérieur à 75 dans la troisième liste.

D'après la 1re condition donnée, 49 est le produit d'un entier de la première liste et d'un entier de la deuxième liste.
Puisque $49 = 7^2$ et que 7 est un nombre premier, ces entiers sont 1 et 49 ou 7 et 7.
Si 1 est dans une liste, on doit avoir $a = 1$ ou $b = 1$. Puisque $1 \leq a < b$, alors $a = 1$.
Si 49 est dans la deuxième liste, alors un des nombres $b, b+1, b+2, b+3, b+4, b+5$ est égal à 49 et on a alors $44 \leq b \leq 49$.
Donc si 1 et 49 paraissent chacun dans une des deux premières listes, (a, b) doit être un des couples suivants :

$$(1, 49), (1, 48), (1, 47), (1, 46), (1, 45), (1, 44)$$

Si 7 parait dans la première liste, alors un des nombres $a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$ est égal à 7 et on a alors $2 \leq a \leq 7$. De même, si 7 parait dans la deuxième liste, on a $2 \leq b \leq 7$.

Donc si 7 parait dans chacune des deux premières listes et sachant que $a < b$, alors (a, b) doit être un des couples suivants :

$$(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(4,5),(4,6),(4,7),(5,6),(5,7),(6,7)$$

D'après la deuxième condition donnée, aucun nombre de la première liste ne peut être multiplié par un nombre de la deuxième liste pour obtenir un produit qui est un multiple de 64.
Puisque les valeurs possibles de a et b sont $1,2,3,4,5,6,7,44,45,46,47,48,49$, alors les entiers qui pourraient faire partie des deux premières listes sont les entiers de 1 à 12 et les entiers de 44 à 54. (Par exemple, si le premier nombre d'une liste est 7, les cinq nombres suivants de cette liste sont 8, 9, 10, 11, 12.)
Il n'y a aucun multiple de 32 ou de 64 dans ces listes.
Pour qu'une paire de nombres, un de chaque liste, ait un produit qui est un multiple de 64, un nombre doit être un multiple de 4 et l'autre un multiple de 16, ou les deux doivent être multiples de 8.
Si (a, b) est égal à $(1,48),(1,47),(1,46),(1,45)$ ou $(1,44)$, alors 4 parait dans la première liste et 48 parait dans la deuxième liste ; ces nombres ont un produit de 192, soit $3 \cdot 64$.
Si (a, b) est égal à $(1,49)$, la première liste et la deuxième liste contiennent chacune un multiple de 4 et ne contiennent aucun multiple de 8. La troisième liste ne contient donc aucun multiple de 64.
Si (a, b) est égal à $(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(4,5),(4,6),(4,7),(5,6),(5,7)$ ou $(6,7)$, 8 parait dans chaque liste et 64 parait donc dans la troisième liste.
Si (a, b) est égal à $(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$ ou $(2,7)$, la première liste ne contient aucun multiple de 8 ou de 16 et la deuxième liste ne contient aucun multiple de 16. La troisième liste ne contient donc aucun multiple de 64.
En tenant compte des deux premières conditions, les couples possibles (a, b) sont $(1,49)$, $(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$ et $(2,7)$.

D'après la troisième condition, la troisième liste contient au moins un nombre supérieur à 75.
Les couples (a, b) possibles, soit $(1,49),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$ et $(2,7)$, génèrent chacun 6 autre couples, les plus grands étant respectivement $(6,54),(7,8),(7,9),(7,10),(7,11)$ et $(7,12)$.
Les plus grands nombres correspondants, dans la troisième liste, sont les produits des deux nombres de chaque couple. Ces produits respectifs sont $324, 56, 63, 70, 77$ et 84.
Les produits supérieurs à 75 sont 324, 77 et 84, qui proviennent des couples $(6,54)$, $(7,11)$ et $(7,12)$.
Les couples (a, b) qui restent sont donc $(1,49),(2,6)$ et $(2,7)$

Les couples (a, b) qui satisfont aux trois conditions données sont $(1,49),(2,6)$ et $(2,7)$.

6. (a) On sait que lorsque les nombres a, b et c sont écrits dans cet ordre dans trois secteurs consécutifs, alors $b = ac$.
Donc lorsque a et b sont écrits dans deux secteurs consécutifs, le secteur suivant aura le nombre $c = \frac{b}{a}$. (Ainsi chaque nombre est égal au nombre précédent divisé par le nombre qui le précède.)
En commençant par les nombres 2 et 3 et en procédant dans le sens des aiguilles d'une

montre, on obtient :

$$2,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \ \frac{3/2}{3}=\frac{1}{2},\ \ \frac{1/2}{3/2}=\frac{1}{3},\ \ \frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3},\ \ \frac{2/3}{1/3}=2,\ \ \frac{2}{2/3}=3,\ \ \frac{3}{2},\ \ \ldots$$

Après les 6 premiers termes, les deux premiers termes (2 et 3) reviennent et les 6 premiers termes seront répétés. (En effet, puisque chaque terme provient des deux termes précédents, lorsque deux termes consécutifs reviennent, ils produisent le même terme qu'à leur tour précédent.)

Puisqu'il y a 36 termes, les 6 termes paraissent exactement $\frac{36}{6}$ fois, ou 6 fois.

La somme des 36 termes est donc égale à $6\left(2+3+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)$, ou $6(2+3+2+1)$, ou 48.

(b) On considère deux cas : $x>-1$ (c.-à-d. $x+1>0$) et $x<-1$ (c.-à-d. $x+1<0$). On doit avoir $x\neq -1$.

1er cas : $x>-1$

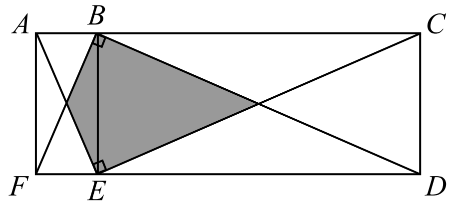
On multiplie chaque membre de l'inéquation $0<\frac{x^2-11}{x+1}<7$ par l'expression $x+1$ qui est positive. On obtient $0<x^2-11<7x+7$.
On a donc $x^2-11>0$ et $x^2-11<7x+7$.
D'après la première inéquation, on a $x^2>11$, d'où $x>\sqrt{11}$ ou $x<-\sqrt{11}$.
Puisque $x>-1$, alors $x>\sqrt{11}$. (On remarque que $-\sqrt{11}<-1$.)
D'après la deuxième inéquation, on a $x^2-7x-18<0$, ou $(x-9)(x+2)<0$. Donc $-2<x<9$. (Puisque l'équation $y=x^2-7x-18$ représente une parabole ouverte vers le haut, les valeurs de y sont négatives lorsque les valeurs de x sont entre les abscisses à l'origine de la parabole.)
Sachant que $x>-1$ et $-2<x<9$, alors $-1<x<9$.
Sachant en plus que $x>\sqrt{11}$, l'intervalle est réduit à $\sqrt{11}<x<9$.

2e cas : $x<-1$

On multiplie chaque membre de l'inéquation $0<\frac{x^2-11}{x+1}<7$ par l'expression $x+1$, qui est négative. On obtient $0>x^2-11>7x+7$.
On a donc $x^2-11<0$ et $x^2-11>7x+7$.
D'après la première inéquation, on a $x^2<11$, d'où $-\sqrt{11}<x<\sqrt{11}$.
Puisque $x<-1$ et $-\sqrt{11}<x<\sqrt{11}$, alors $-\sqrt{11}<x<-1$.
D'après la deuxième inéquation, on a $x^2-7x-18>0$, d'où $(x-9)(x+2)>0$. Donc $x<-2$ ou $x>9$. (Puisque l'équation $y=x^2-7x-18$ représente une parabole ouverte vers le haut, les valeurs de y sont positives lorsque les valeurs de x sont à l'extérieur des abscisses à l'origine de la parabole.)
Puisque $x<-1$, on omet $x>9$ pour ne garder que $x<-2$.
Sachant que $-\sqrt{11}<x<-1$ et $x<-2$, les valeurs de x, dans ce cas, sont celles de l'intervalle $-\sqrt{11}<x<-2$.

Donc, les valeurs de x pour lesquelles $0<\frac{x^2-11}{x+1}<7$ sont les valeurs dans les intervalles $-\sqrt{11}<x<-2$ et $\sqrt{11}<x<9$.

7. (a) On trace le segment BE.



Puisque les triangles FBD et AEC sont isométriques, alors $FB = AE$.
Puisque les triangles FAB et AFE sont rectangles, qu'ils partagent un côté commun AF et que leur hypoténuse est égale ($FB = AE$), ils sont donc isométriques, d'où $AB = FE$.
Le quadrilatère $BAFE$ a des angles droits en A et F (AB et FE sont donc parallèles) et ses côtés opposés AB et FE sont égaux. Il s'agit donc d'un rectangle.
Donc, le quadrilatère $BCDE$ est aussi un rectangle.
Or, les deux diagonales d'un rectangle partagent le rectangle en 4 triangles de même aire. (La diagonale AE coupe le rectangle $ABEF$ en deux triangles isométriques qui ont donc la même aire. Les deux diagonales se coupent en leur milieu. Les quatre petits triangles ont donc la même aire.)
Puisque $\frac{1}{4}$ du rectangle $ABEF$ est ombré et que $\frac{1}{4}$ du rectangle $BCDE$ est ombré, alors $\frac{1}{4}$ du rectangle $ACDF$ est ombré. (Soit x l'aire de $ABEF$ et y l'aire de $BCDE$. L'aire de la partie ombrée est égale à $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$, ce qui est égal à $\frac{1}{4}$ de l'aire totale $x + y$.)
Puisque $AC = 200$ et $CD = 50$, l'aire du rectangle $ACDF$ est égale à $200(50)$, ou $10\,000$.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $\frac{1}{4}(10\,000)$, ou 2500.

(b) Soit a le premier terme de la suite arithmétique $a_1, a_2, a_3, \ldots$ est a et d la raison arithmétique (la constante qu'on additionne entre les termes).
Pour chaque entier strictement positif n, on a $a_n = a + (n-1)d$.
Puisque $a_1 = a$, $a_2 = a + d$ et $a_1 \neq a_2$, alors $d \neq 0$.
Puisque a_1, a_2, a_6, dans cet ordre, forment une suite géométrique, alors $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_6}{a_2}$, d'où $(a_2)^2 = a_1 a_6$.
On reporte $a_1 = a$, $a_2 = a + d$ et $a_6 = a + 5d$ dans cette dernière équation :

$$\begin{aligned} (a+d)^2 &= a(a+5d) \\ a^2 + 2ad + d^2 &= a^2 + 5ad \\ d^2 &= 3ad \\ d &= 3a \qquad \text{(puisque } d \neq 0\text{)} \end{aligned}$$

Donc pour chaque valeur de n ($n \geq 1$), on a : $a_n = a+(n-1)d = a+(n-1)(3a) = (3n-2)a$
Donc $a_4 = (3(4)-2)a$, ou $a_4 = 10a$ et $a_k = (3k-2)a$. (On remarque que selon cette dernière équation, $a_1 = (3(1)-2)a$, c'est-à-dire que $a_1 = a$.)
Pour que a_1, a_4 et a_k forment une suite géométrique, on doit aussi avoir $(a_4)^2 = a_1 a_k$. Donc :

$$\begin{aligned} (10a)^2 &= (a)((3k-2)a) \\ 100a^2 &= (3k-2)a^2 \end{aligned}$$

Puisque $d \neq 0$ et $d = 3a$, alors $a \neq 0$.
Puisque $100a^2 = (3k-2)a^2$ et $a \neq 0$, alors $100 = 3k - 2$, d'où $3k = 102$, ou $k = 34$.
Pour vérifier, on remarque que $a_1 = a$, $a_4 = 10a$ et $a_{34} = 100a$ et que ces trois termes forment une suite géométrique avec une raison géométrique égale à 10.
Donc, la seule valeur possible de k est 34.

8. (a) Puisque k est un entier strictement positif, alors $k \geq 1$.
Le point $(0, -5)$ est situé sur la parabole et sur le cercle. (Les coordonnées $(0, -5)$ vérifient l'équation de la parabole $(-5 = \frac{0^2}{k} - 5)$ ainsi que l'équation du cercle $(0^2 + 5^2 = 25)$.)
Donc pour tout entier strictement positif k, les deux courbes se coupent en au moins un point.
Or si $y = -5$, alors $x^2 + (-5)^2 = 25$, d'où $x^2 = 0$, ou $x = 0$. Donc, il n'y a qu'un seul point sur le cercle et la parabole ayant une ordonnée de -5, soit le point $(0, -5)$.
Le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$ (ou $x^2 + y^2 = 5^2$) a pour centre $(0, 0)$ et pour rayon 5.
Les ordonnées des points sur le cercle vérifient donc l'inéquation $-5 \leq y \leq 5$.
Pour déterminer les autres points d'intersection, on récrit l'équation $y = \frac{x^2}{k} - 5$ sous la forme $ky = x^2 - 5k$, ou $x^2 = ky + 5k$. On reporte ensuite $x^2 = ky + 5k$ dans l'équation $x^2 + y^2 = 25$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} (ky + 5k) + y^2 &= 25 \\ y^2 + ky + (5k - 25) &= 0 \\ (y + 5)(y + (k - 5)) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $y = -5$ ou $y = 5 - k$.
(Dans la factorisation précédente, on savait que puisque les courbes se coupent à un point où $y = -5$, alors $(y + 5)$ était un facteur du membre de gauche de l'équation $y^2 + ky + (5k - 25) = 0$. On aurait pu résoudre l'équation du second degré en utilisant son discriminant et la formule.)
Pour que $y = 5 - k$ donne des points sur le cercle, il faut que $-5 \leq 5 - k$ et $5 - k \leq 5$, c'est-à-dire $k \leq 10$ et $k \geq 0$.
Puisque k est un entier strictement positif, les valeurs possibles de k sont $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, 7, 8, 9, 10.
Si $k = 1$, alors $y = 5 - 1$, ou $y = 4$. On reporte $y = 4$ dans l'équation du cercle pour obtenir $x^2 + 4^2 = 25$, ou $x^2 = 9$, d'où $x = \pm 3$.
Donc, les points $(3, 4)$ et $(-3, 4)$ sont situés sur la parabole et sur le cercle.
On considère les trois points $A(3, 4)$, $B(-3, 4)$ et $C(0, -5)$.
Le segment AB est horizontal et sa longueur est égale à $3 - (-3)$, ou 6. (Il s'agit de la différence des abscisses des extrémités.)
La distance entre le segment AB et le point C est égale à $4 - (-5)$, ou 9. (Il s'agit de la différence des ordonnées.)
L'aire du triangle ABC est donc égale à $\frac{1}{2}(6)(9)$, ou 27, ce qui est un entier.
On répète ces calculs pour chacune des autres valeurs de k en remplissant le tableau suivant :

k	y	$x = \pm\sqrt{25 - y^2}$	Base	Hauteur	Aire du triangle
1	4	± 3	$3 - (-3) = 6$	$4 - (-5) = 9$	27
2	3	± 4	$4 - (-4) = 8$	$3 - (-5) = 8$	32
3	2	$\pm\sqrt{21}$	$2\sqrt{21}$	7	$7\sqrt{21}$
4	1	$\pm\sqrt{24}$	$2\sqrt{24}$	6	$6\sqrt{24}$
5	0	± 5	10	5	25
6	-1	$\pm\sqrt{24}$	$2\sqrt{24}$	4	$4\sqrt{24}$
7	-2	$\pm\sqrt{21}$	$2\sqrt{21}$	3	$3\sqrt{21}$
8	-3	± 4	8	2	8
9	-4	± 3	6	1	3
10	-5	0			

Lorsque $k = 10$, on a $y = 5 - k$, ou $y = -5$ et $x = 0$ seulement. Il n'y a donc qu'un seul point d'intersection.

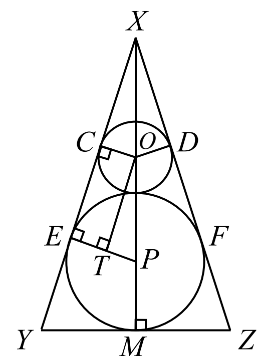
Les entiers strictement positifs k pour lesquels la parabole et le cercle exactement trois points d'intersection A, B et C et pour lesquels l'aire du triangle ABC est un entier sont 1, 2, 5, 8 et 9.

(b) Soit M le milieu de YZ.

Soit O et P les centres respectifs du petit cercle et du grand cercle.

Soit C et D les points de contact respectifs du petit cercle et des côtés XY et XZ. Soit E et F les points de contact respectifs du grand cercle et des côtés XY et XZ.

On trace les segments OC, OD et PE.



Puisque OC et PE sont des rayons aux points de contact de la tangente XY, OC et PE sont perpendiculaires à XY.

On trace XM. Puisque le triangle XYZ est isocèle, alors XM (qui est une médiane selon sa construction) est aussi une hauteur (c.-à-d. que XM est aussi perpendiculaire à YZ), de même qu'une bissectrice (c.-à-d. que $\angle MXY = \angle MXZ$).

XM passe aux points O et P. (Puisque XC et XD sont des tangentes au petit cercle issues du même point X, alors $XC = XD$. Les triangles XCO et XDO sont donc isométriques (trois côtés égaux deux à deux). Donc $\angle OXC = \angle OXD$, ce qui indique que O est situé sur la bissectrice de l'angle CXD. O est donc situé sur XM. De la même manière, P est situé sur XM.)

On abaisse une perpendiculaire du point O jusqu'au point T sur PE. OT est parallèle à XY (chacun est perpendiculaire à PE) et $OCET$ est un rectangle (puisque trois de ses angles sont droits).

On considère les triangles XMY et OTP. Chacun est rectangle (en M et en T respectivement).

Donc $\angle YXM = \angle POT$ (car OT et XY sont parallèles, chacun étant perpendiculaire à PE). Les triangles XMY et OTP sont donc semblables.

Donc $\dfrac{XY}{YM} = \dfrac{OP}{PT}$.

Or $XY = a$ et $YM = \frac{1}{2}b$.

Puisque le segment OP joint les centres de deux cercles tangents, $OP = r + R$.

Puisque $PE = R$, $ET = OC = r$ et que $OCET$ est un rectangle, alors $PT = PE - ET$, ou $PT = R - r$.

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b/2} &= \frac{R+r}{R-r} \\
\frac{2a}{b} &= \frac{R+r}{R-r} \\
2a(R-r) &= b(R+r) \\
2aR - bR &= 2ar + br \\
R(2a-b) &= r(2a+b) \\
\frac{R}{r} &= \frac{2a+b}{2a-b} \qquad \text{(puisque } 2a > b\text{, alors } 2a-b \neq 0 \text{ et } r > 0\text{)}
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{R}{r} = \dfrac{2a+b}{2a-b}$.

9. On fait appel aux lois des logarithmes $\log(uv) = \log u + \log v$ et $\log(s^t) = t \log s$ $(u, v, s > 0)$.
La première équation devient :

$$\begin{aligned}(\log x)(\log y) - 3\log 5 - 3\log y - \log 8 - \log x &= a\\(\log x)(\log y) - \log x - 3\log y - \log 8 - \log 5^3 &= a\\(\log x)(\log y) - \log x - 3\log y - \log(8 \cdot 125) &= a\\(\log x)(\log y) - \log x - 3\log y - \log(1000) &= a\\(\log x)(\log y) - \log x - 3\log y - 3 &= a\end{aligned}$$

La deuxième équation devient :

$$\begin{aligned}(\log y)(\log z) - 4\log 5 - 4\log y - \log 16 - \log z &= b\\(\log y)(\log z) - 4\log y - \log z - 4\log 5 - \log 16 &= b\\(\log y)(\log z) - 4\log y - \log z - \log(5^4 \cdot 16) &= b\\(\log y)(\log z) - 4\log y - \log z - \log(10\,000) &= b\\(\log y)(\log z) - 4\log y - \log z - 4 &= b\end{aligned}$$

La troisième équation devient :

$$\begin{aligned}(\log z)(\log x) - 4\log 8 - 4\log x - 3\log 625 - 3\log z &= c\\(\log z)(\log x) - 4\log x - 3\log z - 4\log 8 - 3\log 625 &= c\\(\log z)(\log x) - 4\log x - 3\log z - \log(8^4 \cdot 625^3) &= c\\(\log z)(\log x) - 4\log x - 3\log z - \log(2^{12} \cdot 5^{12}) &= c\\(\log z)(\log x) - 4\log x - 3\log z - 12 &= c\end{aligned}$$

Puisque toutes les étapes sont réversibles, le système initial d'équations est équivalent au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}(\log x)(\log y) - \log x - 3\log y - 3 &= a\\(\log y)(\log z) - 4\log y - \log z - 4 &= b\\(\log z)(\log x) - 4\log x - 3\log z - 12 &= c\end{aligned}$$

On reporte $X = \log x$, $Y = \log y$ et $Z = \log z$ dans ces équations. (Cela équivaut à énoncer que $x = 10^X$, $y = 10^Y$ et $z = 10^Z$.)
On obtient le système d'équations équivalent suivant :

$$\begin{aligned}XY - X - 3Y - 3 &= a\\YZ - 4Y - Z - 4 &= b\\XZ - 4X - 3Z - 12 &= c\end{aligned}$$

On écrit la première de ces trois équations sous la forme $X(Y-1) - 3Y - 3 = a$, puis $X(Y-1) - 3(Y-1) - 6 = a$, puis $(X-3)(Y-1) = a+6$.
On fait de même avec les deux autres équations pour obtenir le système d'équations équivalent suivant :

$$\begin{aligned}(X-3)(Y-1) &= a+6\\(Y-1)(Z-4) &= b+8\\(X-3)(Z-4) &= c+24\end{aligned}$$

On reporte $p = X - 3$, $q = Y - 1$ et $r = Z - 4$ dans ces équations. (Cela équivaut à énoncer que $X = p + 3$, $Y = q + 1$ et $Z = r + 4$, ou $x = 10^{p+3}$, $y = 10^{q+1}$ et $z = 10^{r+4}$.)
On obtient le système d'équations équivalent suivant :

$$\begin{aligned} pq &= a + 6 \\ qr &= b + 8 \\ pr &= c + 24 \end{aligned}$$

On rappelle que ce système d'équations est équivalent au système d'équations initial et que chaque solution de ce système correspond à une solution du système initial.

(a) Sachant que $a = -4$, $b = 4$ et $c = -18$, le dernier système d'équations devient :

$$\begin{aligned} pq &= 2 \\ qr &= 12 \\ pr &= 6 \end{aligned}$$

On multiplie les trois équations, membre par membre, pour obtenir $p^2q^2r^2 = 2 \cdot 12 \cdot 6$, ou $p^2q^2r^2 = 144$, d'où $pqr = \pm 12$.
Donc $r = \dfrac{pqr}{pq} = \dfrac{\pm 12}{2} = \pm 6$, $p = \dfrac{pqr}{qr} = \dfrac{\pm 12}{12} = \pm 1$ et $q = \dfrac{pqr}{pr} = \dfrac{\pm 12}{6} = \pm 2$.
Le dernier système d'équations a donc pour solutions $(p, q, r) = (1, 2, 6)$ et $(p, q, r) = (-1, -2, -6)$.
On procède par substitution pour obtenir les valeurs correspondantes du système d'équations initial. Lorsque $(a, b, c) = (-4, 4, -18)$, les solutions sont $(x, y, z) = (10^4, 10^3, 10^{10})$ et $(x, y, z) = (10^2, 10^{-1}, 10^{-2})$.

(b) On considère le produit $(a + 6)(b + 8)(c + 24)$ des membres de droite des trois équations du dernier système d'équations selon qu'il est négatif, positif ou nul.

<u>1$^{\text{er}}$ cas : $(a + 6)(b + 8)(c + 24) < 0$</u>
On multiplie les trois équations, membre par membre, pour obtenir

$$(pqr)^2 = (a + 6)(b + 8)(c + 24)$$

Puisque le membre de gauche est positif ou nul et que le membre de droite est négatif, le système n'admet aucune solution.

<u>2$^{\text{e}}$ cas : $(a + 6)(b + 8)(c + 24) > 0$</u>
On multiplie les trois équations, membre par membre, pour obtenir

$$(pqr)^2 = (a + 6)(b + 8)(c + 24)$$

Puisque $(pqr)^2 = (a + 6)(b + 8)(c + 24)$ et $(a + 6)(b + 8)(c + 24) > 0$, alors $pqr = \pm\sqrt{(a + 6)(b + 8)(c + 24)}$.
Puisque $(a + 6)(b + 8)(c + 24) > 0$, alors $\sqrt{(a + 6)(b + 8)(c + 24)}$ est bien défini.
Puisque $(a + 6)(b + 8)(c + 24) > 0$, chacun des facteurs $a + 6$, $b + 8$ et $c + 24$ est non nul et on peut donc diviser par n'importe quel des facteurs.

On procède comme dans la partie (a) pour obtenir :

$$\begin{aligned} p &= \frac{pqr}{qr} = \frac{\pm\sqrt{(a+6)(b+8)(c+24)}}{b+8} \\ q &= \frac{pqr}{pr} = \frac{\pm\sqrt{(a+6)(b+8)(c+24)}}{c+24} \\ r &= \frac{pqr}{pq} = \frac{\pm\sqrt{(a+6)(b+8)(c+24)}}{a+6} \end{aligned}$$

Puisque $(a+6)(b+8)(c+24) > 0$, chacune de ces fractions est bien définie. Le système admet donc deux solutions (p, q, r). Le système initial admet donc deux solutions (x, y, z).

3[e] cas : $(a+6)(b+8)(c+24) = 0$

On suppose qu'exactement un des facteurs $a+6$, $b+8$ ou $c+24$ est égal à 0.
Par exemple, on peut supposer que $a+6 = 0$, $b+8 \neq 0$ et $c+24 \neq 0$.
Puisque $pq = a+6 = 0$, alors $p = 0$ ou $q = 0$.
Donc $pq = 0$ ou $pr = 0$, d'où $b+8 = 0$ ou $c+24 = 0$ (car $qr = b+8$ et $pr = c+24$), ce qui contredit la supposition ci-dessus.
La supposition est donc fausse. Il est donc impossible qu'exactement un des facteurs $a+6$, $b+8$ ou $c+24$ soit égal à 0.

On suppose qu'exactement deux des facteurs $a+6$, $b+8$ ou $c+24$ est égal à 0.
Par exemple, on peut supposer que $a+6 = b+8 = 0$ et $c+24 \neq 0$.
Puisque $pr = c+24 \neq 0$, alors $p \neq 0$ et $r \neq 0$.
Puisque $pq = a+6 = 0$, $qr = b+8 = 0$, $p \neq 0$ et $r \neq 0$, alors $q = 0$.
Donc, tout triplet (p, q, r), où $q = 0$ et $pr = c+24 \neq 0$, est une solution du système d'équations.
Donc lorsque $a+6 = b+8 = 0$ et $c+24 \neq 0$ (c'est-à-dire si $(a, b, c) = (-6, -8, c)$ où $c \neq 24$), chaque triplet $(p, q, r) = \left(p, 0, \dfrac{c+24}{p}\right)$, où $p \neq 0$, est une solution du système d'équations.
Chacune de ces solutions correspond à une solution (x, y, z) du système initial. Donc si $(a, b, c) = (-6, -8, c)$ où $c \neq 0$, le système d'équations admet un nombre infini de solutions.
De même, si $(a, b, c) = (-6, b, -24)$ où $b \neq -8$ (c'est-à-dire si $p = a+6 = 0$, $r = c+24 = 0$ et $q = b+8 \neq 0$) ou si $(a, b, c) = (a, -8, -24)$ et $a \neq -6$, le système initial d'équations admet un nombre infini de solutions (x, y, z).
On considère enfin le cas où $a+6 = b+8 = c+24 = 0$.
Dans ce cas, on doit résoudre le système d'équations suivant :

$$pq = qr = pr = 0$$

Chaque triplet $(p, q, r) = (0, 0, r)$ est une solution et il y a un nombre infini de telles solutions. (Il ne s'agit pas de toutes les solutions, mais on sait qu'il y aura un nombre infini de solutions.)
Donc lorsque $(a, b, c) = (-6, -8, -24)$, le système initial d'équations admet un nombre infini de solutions.

Donc, le système initial d'équations admet un nombre infini de solutions (x, y, z) lorsque $(a, b, c) = (-6, -8, c)$, c étant un nombre réel quelconque, lorsque $(a, b, c) = (-6, b, -24)$, b étant un nombre réel quelconque, lorsque $(a, b, c) = (a, -8, -24)$, a étant un nombre réel quelconque ou lorsque $(a, b, c) = (-6, -8, -24)$. (Ce triplet est inclus dans chacune des trois familles de triplets.)

10. (a) Les sous-ensembles de C_4 sont :

$$\{\} \quad \{1\} \quad \{2\} \quad \{3\} \quad \{4\}$$

$$\{1,2\} \quad \{1,3\} \quad \{1,4\} \quad \{2,3\} \quad \{2,4\} \quad \{3,4\}$$

$$\{1,2,3\} \quad \{1,2,4\} \quad \{1,3,4\} \quad \{2,3,4\} \quad \{1,2,3,4\}$$

(Il y a 16 sous-ensembles, y compris l'ensemble vide $\{\}$ et l'ensemble au complet, $C_4 = \{1,2,3,4\}$.)
On considère la famille Furoni $A = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\}$.
Chacun des sous-ensembles suivants de C_4 est un élément de A : $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}$.
Chacun des sous-ensembles suivants de C_4 est un sous-ensemble d'au moins un élément de A : $\{\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$.
On considère les sous-ensembles suivants de C_4 : $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}$. Pour chacun, au moins un élément de A est un sous-ensemble de ce sous-ensemble.
Puisqu'une famille Furoni de C_4 ne peut contenir deux sous-ensembles de C_4 dont un est un sous-ensemble de l'autre, on ne peut pas ajouter aucun élément de l'une ou l'autre de ces listes à A pour former une plus grande famille Furoni.
Il reste à considérer les sous-ensembles suivants de C_4 comme éléments possibles que l'on pourrait ajouter à A : $\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{2,3,4\}$.
Si on ajoute $\{2,3,4\}$ à A pour former $A' = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3,4\}\}$, alors A' est aussi une famille Furoni de C_4 et aucun des sous-ensembles $\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ ne peut être ajouté, puisque chacun est un sous-ensemble de $\{2,3,4\}$. Donc A' est une famille Furoni de C_4 à laquelle aucun autre sous-ensemble ne peut être ajouté.
Si on ajoutait un des ensembles $\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ à A, on ne pourrait pas ajouter l'ensemble $\{2,3,4\}$ (puisque chacun de ces trois ensembles est un sous-ensemble de $\{2,3,4\}$), mais on pourrait ajouter chacun des deux autres ensembles tout en conservant la condition d'un ensemble Furoni.
Donc $A'' = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ est une famille Furoni de C_4 à laquelle on ne peut ajouter un autre sous-ensemble.
Donc, les deux familles Furoni de C_4 qui contiennent tous les éléments de A et auxquels aucun autre sous-ensemble de C_4 ne peut être ajouté pour former une nouvelle famille Furoni sont :

$$A' = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3,4\}\} \qquad A'' = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

(b) *Solution 1*
Soit n un entier strictement positif et F une famille Furoni de C_n qui contient a_k éléments, chaque élément contenant k entiers, pour chaque entier k de 0 à n.
On considère chaque élément E de F.
Chaque E est un sous-ensemble de C_n. Supposons qu'un E en particulier contient exactement k éléments.
On utilise E pour générer $k!(n-k)!$ permutations σ des entiers de l'ensemble $C_n = \{1,2,3,\ldots,n\}$ en commençant par une permutation α des éléments de E et en y aboutant une permutation β des éléments de C_n qui ne sont pas dans E.
Puisqu'il y a k éléments dans E, il y a $k!$ permutations possibles α.
Puisqu'il y a $n-k$ éléments dans C_n qui ne sont pas dans E, il y a $(n-k)!$ permutations possibles β.
À chaque permutation α, on peut abouter n'importe quelle permutation β. Il y a donc $k!(n-k)!$ permutations possibles $\sigma = \alpha|\beta$. (La notation « $\alpha|\beta$ » représente la permutation

de C_n formée en écrivant la permutation α (des éléments de E) à laquelle on aboute la permutation β (des éléments de C_n qui ne sont pas dans E).)
Ces $k!(n-k)!$ permutations générées par E sont distinctes. En effet, si deux permutations, $\sigma = \alpha|\beta$ et $\sigma' = \alpha'|\beta'$ sont égales, alors α et α' étant des permutations des éléments de E, ont la même longueur et $\alpha|\beta = \alpha'|\beta'$ signifie donc $\alpha = \alpha'$, d'où $\beta = \beta'$. Les deux permutations sont donc égales.
On répète ce processus pour chacun des éléments E de F.
Puisque pour chaque k, il y a a_k sous-ensembles de F qui contiennent k éléments, alors le nombre total de permutations générées de cette façon est égal à :

$$a_0 0!(n-0)! + a_1 1!(n-1)! + \cdots + a_{n-1}(n-1)!(n-(n-1))1! + a_n n!(n-n)!$$

Si chacune de ces permutations est distinctes, alors ce total est inférieur ou égal à $n!$, puisqu'il y a $n!$ permutations des éléments de C_n.
Est-il possible que deux éléments E et G de F génèrent des permutations identiques des éléments de C_n de cette façon ?
On considère deux permutations identiques, $\sigma = \alpha|\beta$ (générée par E) et $\sigma' = \alpha'|\beta'$ (générée par G).
On suppose que E contient k éléments et que G contient k' éléments.
On doit avoir $k \leq k'$ ou $k' \leq k$ (ou les deux si $k = k'$).
On peut supposer que $k \leq k'$.
La longueur α (qui est égale à k) est donc inférieure ou égale à α' (qui est égale à k').
Or $\alpha|\beta = \alpha'|\beta'$, ce qui indique que les k premières entrées de α' sont égales aux k premières entrées de α.
Puisque les entrées de α sont les éléments de E et que les entrées de α' sont les éléments de G, alors E est un sous-ensemble de G, ce qui ne peut être vrai, E et G étant des éléments d'une famille Furoni. On a donc une contradiction.
Donc, toutes les permutations générées par chacun des sous-ensembles de C_n contenus dans F sont distinctes. Donc :

$$a_0 0!(n-0)! + a_1 1!(n-1)! + \cdots + a_{n-1}(n-1)!(n-(n-1))1! + a_n n!(n-n)! \leq n!$$

On divise chaque membre par $n!$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
a_0 0!(n-0)! + a_1 1!(n-1)! + \cdots + a_{n-1}(n-1)!(n-(n-1))1! + a_n n!(n-n)! &\leq n! \\
a_0\frac{0!(n-0)!}{n!} + a_1\frac{1!(n-1)!}{n!} + \cdots + a_{n-1}\frac{(n-1)!(n-(n-1))1!}{n!} + a_n\frac{n!(n-n)!}{n!} &\leq 1 \\
a_0\frac{1}{\binom{n}{0}} + a_1\frac{1}{\binom{n}{1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{1}{\binom{n}{n-1}} + a_n\frac{1}{\binom{n}{n}} &\leq 1 \\
\frac{a_0}{\binom{n}{0}} + \frac{a_1}{\binom{n}{1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\binom{n}{n-1}} + \frac{a_n}{\binom{n}{n}} &\leq 1,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Solution 2
Soit n un entier strictement positif et F une famille Furoni de C_n choisie au hasard.
On considère $L = \{\{\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, \ldots, n\}\}$.
La probabilité pour que l'intersection de L et de F soit non vide est inférieure ou égale à 1.
On remarque que puisque chaque élément de L est un sous-ensemble de tous les éléments à sa droite dans la définition de L, alors au plus un élément de L peut être un élément de F.
Soit k un entier, $k \geq 0$. La probabilité pour que $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ soit un élément de F est égale à $\dfrac{a_k}{\binom{n}{k}}$, a_k étant le nombre d'éléments de F qui contiennent exactement k entiers :

Il existe $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de C_n qui contiennent exactement k entiers.

La probabilité pour qu'un de ces sous-ensembles soit $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ est égale à $\dfrac{1}{\binom{n}{k}}$.

Puisque a_k de ces sous-ensembles sont dans F, alors la probabilité pour qu'un de ces a_k sous-ensembles soit $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ est égale à $\dfrac{a_k}{\binom{n}{k}}$.

(On prend pour acquis que si $k = 0$, alors $\{1, 2, 3, \ldots, k\} = \{\}$.)

Il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de C_n qui contiennent exactement k entiers.
La probabilité pour qu'un de ces sous-ensembles soit $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ est égale à $\dfrac{1}{\binom{n}{k}}$. En effet, tout sous-ensemble de F contenant k éléments a la même probabilité d'être l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ puisque tous les éléments de C_n jouent un même rôle.
Donc

$$\frac{a_0}{\binom{n}{0}} + \frac{a_1}{\binom{n}{1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\binom{n}{n-1}} + \frac{a_n}{\binom{n}{n}} \leq 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(c) Soit $M = \binom{n}{k}$, où $k = \frac{1}{2}n$ si n est pair et $k = \frac{1}{2}(n-1)$ si n est impair.

Pour chaque entier r $(0 \leq r \leq n)$, on a $\binom{n}{r} \leq M$. (Cela équivaut à dire que dans chaque rangée du triangle de Pascal, le plus grand terme est celui du milieu (ou les deux plus grands termes sont les deux du milieu). Une preuve algébrique sera donnée à la fin.)
D'après (b), on a :

$$\frac{a_0}{\binom{n}{0}} + \frac{a_1}{\binom{n}{1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\binom{n}{n-1}} + \frac{a_n}{\binom{n}{n}} \leq 1$$

On multiplie chaque membre de l'inéquation par M pour obtenir :

$$a_0\frac{M}{\binom{n}{0}} + a_1\frac{M}{\binom{n}{1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{M}{\binom{n}{n-1}} + a_n\frac{M}{\binom{n}{n}} \leq M$$

Puisque M est supérieur ou égal à chaque dénominateur, alors chaque fraction dans le membre de gauche est supérieure ou égale à 1. Donc :

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n \leq a_0 \frac{M}{\binom{n}{0}} + a_1 \frac{M}{\binom{n}{1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{M}{\binom{n}{n-1}} + a_n \frac{M}{\binom{n}{n}} \leq M$$

Le nombre total d'éléments dans la famille Furoni F, soit $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, est inférieur ou égal à M.

Est-il possible de trouver une famille Furoni de grandeur M ?

Oui. Les M ($M = \binom{n}{k}$) sous-ensembles de C_n contenant k éléments chacun forment une famille Furoni, puisque deux ensembles de la même grandeur ne peuvent être un sous-ensemble l'un de l'autre sans être égaux. Donc la plus grande famille Furoni de l'ensemble C_n a une grandeur égale à $\binom{n}{k}$ lorsque $n = 2k$ ou $n = 2k+1$, k étant un entier non négatif quelconque.

On démontre maintenant de façon algébrique l'inégalité utilisée ci-haut.

On remarque que $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \binom{n}{n-r}$.

Donc si $\binom{n}{r} \leq \binom{n}{k}$ pour tout $r \leq k$, alors $\binom{n}{r} \leq \binom{n}{k}$ pour tout k, puisque si $s > k$, alors $s = n - r$ pour une valeur quelconque r, $r \leq k$, et on a donc $\binom{n}{s} = \binom{n}{r} \leq \binom{n}{k}$.

Supposons d'abord que $n = 2k$, k étant un entier strictement positif.

On démontrera que $\binom{n}{r} \leq \binom{n}{k}$ pour tout entier r, $0 \leq r \leq k$:

Puisque $n = 2k$, alors :

$$\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{k}} = \frac{\dfrac{(2k)!}{r!(2k-r)!}}{\dfrac{(2k)!}{k!k!}} = \frac{k!}{r!} \frac{k!}{(2k-r)!}$$

Si $r = k - d$, d étant un entier non négatif quelconque, alors :

$$\frac{k!}{r!} \frac{k!}{(2k-r)!} = \frac{k!k!}{(k-d)!(k+d)!} = \frac{k(k-1)\cdots(k-d+1)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+d)} = \frac{k}{k+1} \frac{k-1}{k+2} \cdots \frac{k-d+1}{k+d}$$

Puisque le membre de droite est le produit de d fractions non négatives, chacune inférieure à 1, leur produit est inférieur à 1.

Donc $\binom{n}{r} \leq \binom{n}{k}$ lorsque $0 \leq r \leq k$.

Supposons ensuite que $n = 2k + 1$, k étant un entier non négatif quelconque.

On démontrera que $\binom{n}{r} \leq \binom{n}{k}$ pour tout entier r, $0 \leq r \leq k$:

Puisque $n = 2k + 1$, alors :

$$\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{k}} = \frac{\dfrac{(2k+1)!}{r!(2k+1-r)!}}{\dfrac{(2k+1)!}{k!(k+1)!}} = \frac{k!}{r!} \frac{(k+1)!}{(2k+1-r)!}$$

Si $r = k - d$, d étant un entier non négatif quelconque, alors :

$$\begin{aligned}\frac{k!}{r!}\frac{(k+1)!}{(2k+1-r)!} &= \frac{k!(k+1)!}{(k-d)!(k+1+d)!}\\ &= \frac{k(k-1)\cdots(k-d+1)}{(k+2)(k+3)\cdots(k+1+d)}\\ &= \frac{k}{k+2}\frac{k-1}{k+3}\cdots\frac{k-d+1}{k+1+d}\end{aligned}$$

Puisque le membre de droite est le produit de d fractions non négatives, chacune inférieure à 1, leur produit est inférieur à 1.

Donc $\binom{n}{r} \leq \binom{n}{k}$ lorsque $0 \leq r \leq k$.

Ceci termine la démonstration.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2014

le mardi 15 avril 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 16 avril 2014
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) On a : $\dfrac{\sqrt{16}+\sqrt{9}}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{4+3}{\sqrt{25}} = \dfrac{7}{5}$.

   (b) Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors $(x-10)^\circ + (x+10)^\circ + x^\circ = 180^\circ$, ou $(x-10)+(x+10)+x = 180$.
   Donc $3x = 180$, d'où $x = 60$.

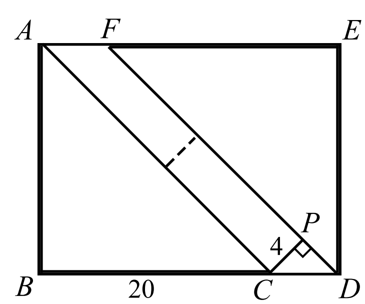
   (c) Supposons que Bart gagne x \$ l'heure. En 4 heures, il gagne $4 \times x$ \$, ou $4x$ \$.
   Lisa gagne donc $2x$ \$ l'heure. En 6 heures, elle gagne $6 \times 2x$ \$, ou $12x$ \$.
   Puisqu'ils gagnent 200 \$ en tout, alors $4x + 12x = 200$, ou $16x = 200$.
   Donc $x = 12{,}5$.
   Puisque $2x = 25$, alors Lisa gagne 25 \$ l'heure.

2. (a) Le périmètre du demi-disque est égal à la longueur du diamètre plus celle du demi-cercle.
   Puisque le demi-disque a un rayon de 10, il a un diamètre de 20.
   Un cercle ayant un diamètre de 20 a une circonférence de $\pi(20)$, ou 20π. La longueur du demi-cercle est donc la moitié de 20π, ou 10π.
   Le demi-disque a donc un périmètre de $10\pi + 20$.

   (b) La parabole d'équation $y = 10(x+2)(x-5)$ a pour abscisses à l'origine -2 et 5. Elle coupe donc l'axe des abscisses aux points $(-2,0)$ et $(5,0)$, nommés P et Q.
   Puisque le segment PQ est horizontal, sa longueur est égale à $5-(-2)$, ou 7.

   (c) La droite qui passe par les points $C(0,60)$ et $D(30,0)$ a pour pente $\dfrac{60-0}{0-30}$, ou $\dfrac{60}{-30}$, ou -2.
   Puisque cette droite passe par le point $C(0,60)$, elle a une ordonnée à l'origine de 60.
   La droite a donc pour équation $y = -2x + 60$.
   On cherche donc le point d'intersection E des droites d'équations $y = -2x+60$ et $y = 2x$.
   À ce point, la valeur de y est la même pour chaque équation.
   On a donc $-2x + 60 = 2x$, d'où $4x = 60$, ou $x = 15$.
   On reporte $x = 15$ dans l'équation $y = 2x$ et on obtient $y = 2(15)$, ou $y = 30$.
   Les coordonnées de E sont $(15, 30)$.

3. (a) On sait que $BD = BC + CD$ et que $BC = 20$ cm. On doit donc déterminer CD.
   Au point C, on abaisse une perpendiculaire CP à DF.
   Puisque AC et DF sont parallèles, alors CP est également perpendiculaire à AC.
   Il y a une distance de 4 cm entre AC et DF. Donc $CP = 4$ cm.
   Or, le triangle ABC est rectangle isocèle. Donc $\angle ACB = 45^\circ$.



   Donc $\angle PCD = 180^\circ - \angle ACB - \angle PCA$, d'où $\angle PCD = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ$, ou $\angle PCD = 45^\circ$.
   Puisque le triangle CPD est rectangle en P et que $\angle PCD = 45^\circ$, il est également un triangle rectangle isocèle.
   Donc $CD = \sqrt{2}CP$, d'où $CD = 4\sqrt{2}$ cm.
   Enfin $BD = BC + CD$, d'où $BD = (20 + 4\sqrt{2})$ cm.

(b) On manipule l'équation, tout en notant que $x \neq 0$ et $x \neq -\frac{1}{2}$, puisque les dénominateurs ne peuvent égaler zéro :

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+x+4}{2x+1} &= \frac{4}{x} \\
x(x^2+x+4) &= 4(2x+1) \\
x^3+x^2+4x &= 8x+4 \\
x^3+x^2-4x-4 &= 0 \\
x^2(x+1)-4(x+1) &= 0 \\
(x+1)(x^2-4) &= 0 \\
(x+1)(x-2)(x+2) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $x=-1$ ou $x=2$ ou $x=-2$. On peut vérifier que chaque valeur satisfait à l'équation donnée.

4. (a) *Solution 1*
Puisque $900 = 30^2$ et que $30 = 2\times 3\times 5$, alors $900 = 2^2 3^2 5^2$.
Les diviseurs positifs de 900 sont les entiers de la forme $d = 2^a 3^b 5^c$, a, b et c étant chacun égal à 0, 1 ou 2.
Un diviseur d est un carré parfait si chaque exposant dans sa factorisation première est pair.
Donc, d est un carré parfait si a, b et c égalent 0 ou 2.
Il y a donc 2 valeurs possibles de a et dans chaque cas, 2 valeurs possibles de b. Dans chaque cas, il y a aussi 2 valeurs possibles de c. En tout, il y a $2\times 2\times 2$ valeurs possibles, ou 8 valeurs possibles de d.
Ces valeurs sont $2^0 3^0 5^0 = 1$, $2^2 3^0 5^0 = 4$, $2^0 3^2 5^0 = 9$, $2^0 3^0 5^2 = 25$, $2^2 3^2 5^0 = 36$, $2^2 3^0 5^2 = 100$, $2^0 3^2 5^2 = 225$ et $2^2 3^2 5^2 = 900$.
Il y a donc 8 diviseurs positifs de 900 qui sont des carrés parfaits.

Solution 2
Les diviseurs positifs de 900 sont :

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 25, 30, 36, 45, 50, 60, 75, 90, 100, 150, 180, 225, 300, 450, 900$$

Parmi ces nombres, 1, 4, 9, 25, 36, 100, 225 et 900 sont des carrés parfaits ($1^2, 2^2, 3^2, 5^2, 6^2, 10^2, 15^2$ et 30^2, respectivement).
Il y a donc 8 diviseurs positifs de 900 qui sont des carrés parfaits.

(b) Dans le triangle isocèle ABC, on sait que $\angle ABC = \angle ACB$. Les côtés opposés à ces angles sont donc égaux. Donc $AC = AB$.
Or, le triangle a pour sommets $A(k,3)$, $B(3,1)$ et $C(6,k)$. Donc :

$$\begin{aligned}
AC &= AB \\
\sqrt{(k-6)^2+(3-k)^2} &= \sqrt{(k-3)^2+(3-1)^2} \\
(k-6)^2+(3-k)^2 &= (k-3)^2+(3-1)^2 \\
(k-6)^2+(k-3)^2 &= (k-3)^2+2^2 \\
(k-6)^2 &= 4
\end{aligned}$$

Donc $k-6=2$ ou $k-6=-2$, d'où $k=8$ ou $k=4$.
On peut vérifier que chaque valeur satisfait à $AC = AB$.

5. (a) La bouteille A contient 40 g de liquide dont 10 % d'acide.
Elle contient donc 0,1 × 40 g, ou 4 g d'acide et $(40 - 4)$ g, ou 36 g d'eau.
La bouteille B contient 50 g de liquide dont 20 % d'acide.
Elle contient donc 0,2 × 50 g, ou 10 g d'acide et $(50 - 10)$ g, ou 40 g d'eau.
La bouteille C contient 50 g de liquide dont 30 % d'acide.
Elle contient donc 0,3 × 50 g, ou 15 g d'acide et $(50 - 15)$ g, ou 35 g d'eau.
En tout, les trois bouteilles contiennent $(40 + 50 + 50)$ g, ou 140 g de liquide, dont $(4 + 10 + 15)$ g, ou 29 g d'acide et $(140 - 29)$ g, ou 111 g d'eau.
La chimiste crée un mélange de 60 g de liquide dont 25 % d'acide.
Ce mélange contient donc 0,25 × 60 g, ou 15 g d'acide et $(60 - 15)$ g, ou 45 g d'eau.
Puisque les trois bouteilles contenaient 140 g de liquide au départ et que le nouveau mélange contient 60 g de liquide, il reste donc $(140 - 60)$ g, ou 80 g de liquide dans les trois bouteilles.
Puisque les trois bouteilles contenaient au départ 29 g d'acide et que le mélange contient 15 g d'acide, il reste donc $(29 - 15)$ g, ou 14 g d'acide dans les bouteilles.
Le nouveau mélange formé du restant des liquides des trois bouteilles contient donc $\dfrac{14 \text{ g}}{80 \text{ g}}$ d'acide, ou 0,175 d'acide, ou 17,5 % d'acide.

(b) Puisque $3x + 4y = 10$, alors $4y = 10 - 3x$.
Lorsque $3x + 4y = 10$, on a :

$$\begin{aligned}
x^2 + 16y^2 &= x^2 + (4y)^2 \\
&= x^2 + (10 - 3x)^2 \\
&= x^2 + (9x^2 - 60x + 100) \\
&= 10x^2 - 60x + 100 \\
&= 10(x^2 - 6x + 10) \\
&= 10(x^2 - 6x + 9 + 1) \\
&= 10((x - 3)^2 + 1) \\
&= 10(x - 3)^2 + 10
\end{aligned}$$

Puisque $(x-3)^2 \geq 0$, la plus petite valeur possible de $10(x-3)^2 + 10$ est $10(0) + 10$, ou 10.
Cette valeur est atteinte lorsque $(x - 3)^2 = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = 3$.
Donc, lorsque $3x + 4y = 10$, l'expression $x^2 + 16y^2$ a une valeur minimale de 10.

6. (a) *Solution 1*
Soit d le nombre de boules dorées dans le sac.
On suppose que Firmin plonge son bras dans le sac et sort deux boules l'une après l'autre.
Il y a 40 choix pour la première boule et dans chaque cas, 39 choix pour la deuxième boule.
En tout, il y a 40(39) choix de deux boules l'une après l'autre.
Si Firmin sort deux boules dorées, il y a d choix pour la première boule dorée et dans chaque cas, $d - 1$ choix pour la deuxième boule dorée. En tout, il y a $d(d - 1)$ choix de deux boules dorées l'une après l'autre.
On sait que la probabilité de sortir deux boules dorées du sac est de $\dfrac{5}{12}$.
Or, il y a 40(39) choix équiprobables de deux boules et $d(d - 1)$ choix favorables de deux boules dorées. Donc $\dfrac{d(d-1)}{40(39)} = \dfrac{5}{12}$, ce qui est équivalent à $d(d - 1) = \dfrac{5}{12}(40)(39)$, ou $d(d - 1) = 650$.

On cherche deux entiers consécutifs ayant un produit de 650. Puisque $\sqrt{650} = 25{,}49\ldots$, alors les deux entiers sont probablement 25 et 26. On vérifie que $25 \times 26 = 650$.
Donc $d = 26$. (Ou $d^2 - d - 650 = 0$, d'où $(d-26)(d+25) = 0$. Donc $d = 26$ ou $d = -25$. Puisque $d > 0$, alors $d = 26$.)
Il y a donc 26 boules dorées dans le sac.

Solution 2
Soit d le nombre de boules dorées dans le sac.
On suppose que Firmin plonge son bras dans le sac et sort deux boules simultanément.
Puisqu'il y a 40 boules dans le sac, il y a $\binom{40}{2}$ choix possibles de deux boules.
Puisqu'il y a d boules dorées dans le sac, il y a $\binom{d}{2}$ choix possibles de deux boules dorées.
On sait que la probabilité de sortir deux boules dorées du sac est de $\frac{5}{12}$.
Or, il y a $\binom{40}{2}$ choix équiprobables possibles de deux boules et $\binom{d}{2}$ choix favorables de deux boules dorées. Donc $\dfrac{\binom{d}{2}}{\binom{40}{2}} = \dfrac{5}{12}$, ce qui est équivalent à $\binom{d}{2} = \frac{5}{12}\binom{40}{2}$.
Puisque $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, l'équation précédente est équivalente à $\dfrac{d(d-1)}{2} = \dfrac{5}{12}\dfrac{40(39)}{2}$, ou $\dfrac{d(d-1)}{2} = 325$.
Donc $d(d-1) = 650$.
On cherche deux entiers consécutifs ayant un produit de 650. Puisque $\sqrt{650} = 25{,}49\ldots$, alors les deux entiers sont probablement 25 et 26. On vérifie que $25 \times 26 = 650$.
Donc $d = 26$. (Ou $d^2 - d - 650 = 0$, d'où $(d-26)(d+25) = 0$. Donc $d = 26$ ou $d = -25$. Puisque $d > 0$, alors $d = 26$.)
Il y a donc 26 boules dorées dans le sac.

(b) Soit a le premier terme de la suite géométrique et r la raison géométrique (la constante utilisée pour multiplier chaque terme).
La suite de n termes est donc $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}$.
En général, le $k^{\text{ième}}$ terme est $t_k = ar^{k-1}$; donc le $n^{\text{ième}}$ terme est $t_n = ar^{n-1}$.
Puisque $t_1 t_n = 3$, alors $a \cdot ar^{n-1} = 3$, ou $a^2 r^{n-1} = 3$.
Puisque $t_1 t_2 \cdots t_{n-1} t_n = 59\,049$, alors :

$$\begin{aligned}
(a)(ar)\cdots(ar^{n-2})(ar^{n-1}) &= 59\,049 \\
a^n r r^2 \cdots r^{n-2} r^{n-1} &= 59\,049 \qquad \text{(puisque le facteur } a \text{ parait } n \text{ fois dans le M.G.)} \\
a^n r^{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)} &= 59\,049 \\
a^n r^{\frac{1}{2}(n-1)(n)} &= 59\,049
\end{aligned}$$

puisque $1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n)$.
Puisque $a^2 r^{n-1} = 3$, alors $(a^2 r^{n-1})^n = 3^n$, ou $a^{2n} r^{(n-1)(n)} = 3^n$.
Puisque $a^n r^{\frac{1}{2}(n-1)(n)} = 59\,049$, alors $\left(a^n r^{\frac{1}{2}(n-1)(n)}\right)^2 = 59\,049^2$, ou $a^{2n} r^{(n-1)(n)} = 59\,049^2$.
En comparant les équations des deux lignes précédentes, on obtient $3^n = 59\,049^2$.

Or :

$$59\,049 = 3(19\,683) = 3^2(6561) = 3^3(2187) = 3^4(729) = 3^5(243) = 3^6(81) = 3^6 3^4 = 3^{10}$$

Puisque $59\,049 = 3^{10}$, alors $59\,049^2 = 3^{20}$, d'où $3^n = 3^{20}$, ou $n = 20$.

7. (a) Soit $a = x - 2013$ et $b = y - 2014$.
L'équation donnée devient $\dfrac{ab}{a^2+b^2} = -\dfrac{1}{2}$, d'où $2ab = -a^2 - b^2$, ou $a^2 + 2ab + b^2 = 0$.
Cette équation est équivalente à $(a+b)^2 = 0$ ou $a + b = 0$.
On reporte $a = x - 2013$ et $b = y - 2014$ dans cette équation pour obtenir
$x - 2013 + y - 2014 = 0$, ou $x + y = 4027$.

(b) Soit $a = \log_{10} x$.
L'équation $(\log_{10} x)^{\log_{10}(\log_{10} x)} = 10\,000$ devient $a^{\log_{10} a} = 10^4$.
On prend le logarithme de base 10 de chaque membre de l'équation, tout en utilisant le fait que $\log_{10}(a^b) = b\log_{10} a$, pour obtenir $(\log_{10} a)(\log_{10} a) = 4$ ou $(\log_{10} a)^2 = 4$.
Donc $\log_{10} a = \pm 2$, d'où $\log_{10}(\log_{10} x) = \pm 2$.

Si $\log_{10}(\log_{10} x) = 2$, alors $\log_{10} x = 10^2 = 100$, d'où $x = 10^{100}$.
Si $\log_{10}(\log_{10} x) = -2$, alors $\log_{10} x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$, d'où $x = 10^{1/100}$.
Les nombres réels x qui vérifient l'équation sont 10^{100} et $10^{1/100}$.

On peut vérifier :
Si $x = 10^{100}$, alors $\log_{10} x = 100$.
Donc $(\log_{10} x)^{\log_{10}(\log_{10} x)} = 100^{\log_{10} 100} = 100^2 = 10\,000$.
Si $x = 10^{1/100}$, alors $\log_{10} x = 1/100 = 10^{-2}$.
Donc $(\log_{10} x)^{\log_{10}(\log_{10} x)} = (10^{-2})^{\log_{10}(10^{-2})} = (10^{-2})^{-2} = 10^4 = 10\,000$.

8. (a) On utilise la loi du cosinus dans le triangle ABD pour déterminer la longueur de BD :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2(AB)(AD)\cos(\angle BAD)$$

On sait que $AB = 75$ and $AD = 20$. Il nous faut la valeur de $\cos(\angle BAD)$.
Or :

$$\begin{aligned}\cos(\angle BAD) &= \cos(\angle BAC + \angle EAD)\\ &= \cos(\angle BAC)\cos(\angle EAD) - \sin(\angle BAC)\sin(\angle EAD)\\ &= \frac{AC}{AB}\frac{AD}{AE} - \frac{BC}{AB}\frac{ED}{AE}\end{aligned}$$

puisque les triangles ABC et ADE sont rectangles.
Puisque $AB = 75$ et $BC = 21$, alors d'après le théorème de Pythagore, on a

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{75^2 - 21^2} = \sqrt{5625 - 441} = \sqrt{5184} = 72$$

puisque $AC > 0$.
Puisque $AC = 72$ et $CE = 47$, alors $AE = AC - CE$, d'où $AE = 25$.
Puisque $AE = 25$ et $AD = 20$, alors d'après le théorème de Pythagore, on a

$$ED = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{625 - 400} = \sqrt{225} = 15$$

puisque $ED > 0$.

Donc :

$$\cos(\angle BAD) = \frac{AC}{AB}\frac{AD}{AE} - \frac{BC}{AB}\frac{ED}{AE} = \frac{72}{75}\frac{20}{25} - \frac{21}{75}\frac{15}{25} = \frac{1440-315}{75(25)} = \frac{1125}{75(25)} = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$$

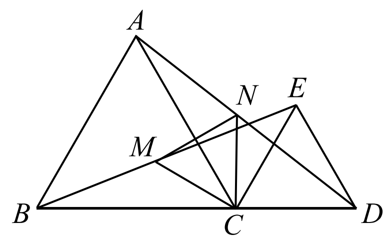
On a donc :

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2(AB)(AD)\cos(\angle BAD) \\ &= 75^2 + 20^2 - 2(75)(20)(\tfrac{3}{5}) \\ &= 5625 + 400 - 1800 \\ &= 4225 \end{aligned}$$

Puisque $BD > 0$, alors $BD = \sqrt{4225}$, ou $BD = 65$.

(b) *Solution 1*

On considère les triangles BCE et ACD.



Puisque le triangle ABC est équilatéral, alors $BC = AC$.
Puisque le triangle ECD est équilatéral, alors $CE = CD$.
Puisque BCD est un segment de droite et que $\angle ECD = 60°$, alors $\angle BCE = 180° - \angle ECD$, d'où $\angle BCE = 120°$.
Puisque BCD est un segment de droite et que $\angle BCA = 60°$, alors $\angle ACD = 180° - \angle BCA$, d'où $\angle ACD = 120°$.
Les triangles BCE et ACD sont donc isométriques (côté-angle-côté).
Puisque les triangles BCE et ACD sont isométriques et que les segments CM et CN relient le sommet C au milieu du côté opposé dans chaque triangle, alors $CM = CN$.
Puisque $\angle ECD = 60°$, alors le triangle ACD est l'image du triangle BCE par une rotation de centre C de $60°$ dans le sens des aiguilles d'une montre.
Le segment CN est l'image du segment CM par cette rotation de $60°$.
Donc $\angle MCN = 60°$.
Or, puisque $CM = CN$ et que $\angle MCN = 60°$, alors :

$$\angle CMN = \angle CNM = \tfrac{1}{2}(180° - \angle MCN) = 60°$$

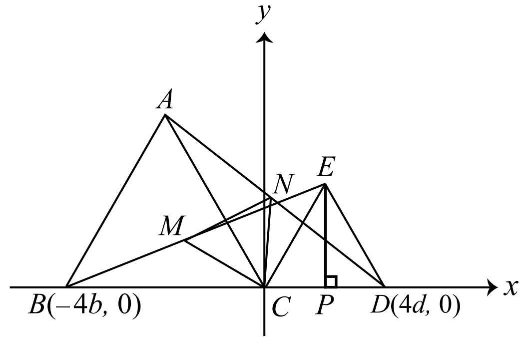
Le triangle MNC est donc équilatéral.

Solution 2

On fait appel à un repère cartésien.

On place le repère de manière que l'origine $(0, 0)$ soit au point C et que le segment BCD soit sur l'axe des abscisses. On attribue au point B les coordonnées $(-4b, 0)$ et au point D les coordonnées $(4d, 0)$, b et d étant des nombres strictement positifs.

Au point E, on abaisse une perpendiculaire EP à CD.



Puisque le triangle ECD est équilatéral, alors P est le milieu du segment CD.

Puisque C et D ont pour coordonnées respectives $(0, 0)$ et $(4d, 0)$, alors P a pour coordonnées $(2d, 0)$.

Puisque le triangle ECD est équilatéral, alors $\angle ECD = 60^\circ$. Le triangle EPC est donc un triangle remarquable 30°-60°-90° et on a donc $EP = \sqrt{3}CP$, d'où $EP = 2\sqrt{3}d$.

E a donc pour coordonnées $(2d, 2\sqrt{3}d)$.

De même, on peut démontrer que A a pour coordonnées $(-2b, 2\sqrt{3}b)$.

Or, M est le milieu du segment BE et les points B et E ont pour coordonnées respectives $(-4b, 0)$ et $(2d, 2\sqrt{3}d)$. M a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(-4b + 2d), \frac{1}{2}(0 + 2\sqrt{3}d)\right)$, ou $(-2b + d, \sqrt{3}d)$.

De plus, N est le milieu du segment AD et les points A et D ont pour coordonnées respectives $(-2b, 2\sqrt{3}b)$ et $(4d, 0)$. N a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(-2b + 4d), \frac{1}{2}(2\sqrt{3}b + 0)\right)$, ou $(-b + 2d, \sqrt{3}b)$.

On montrera que le triangle MNC est équilatéral en montrant que $CM = CN = MN$, ou que $CM^2 = CN^2 = MN^2$:

$$\begin{aligned}
CM^2 &= (-2b + d - 0)^2 + (\sqrt{3}d - 0)^2 \\
&= (-2b + d)^2 + (\sqrt{3}d)^2 \\
&= 4b^2 - 4bd + d^2 + 3d^2 \\
&= 4b^2 - 4bd + 4d^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CN^2 &= (-b + 2d - 0)^2 + (\sqrt{3}b - 0)^2 \\
&= (-b + 2d)^2 + (\sqrt{3}b)^2 \\
&= b^2 - 4bd + 4d^2 + 3b^2 \\
&= 4b^2 - 4bd + 4d^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
MN^2 &= ((-2b + d) - (-b + 2d))^2 + (\sqrt{3}d - \sqrt{3}b)^2 \\
&= (-b - d)^2 + 3(d - b)^2 \\
&= b^2 + 2bd + d^2 + 3d^2 - 6bd + 3b^2 \\
&= 4b^2 - 4bd + 4d^2
\end{aligned}$$

Donc $CM^2 = CN^2 = MN^2$ et le triangle MNC est donc équilatéral.

9. (a) Soit $S = \sin^6 1° + \sin^6 2° + \sin^6 3° + \cdots + \sin^6 87° + \sin^6 88° + \sin^6 89°$.
Puisque $\sin\theta = \cos(90° - \theta)$, alors $\sin^6\theta = \cos^6(90° - \theta)$. Donc :

$$\begin{aligned} S &= \sin^6 1° + \sin^6 2° + \cdots + \sin^6 44° + \sin^6 45° \\ &\qquad + \cos^6(90° - 46°) + \cos^6(90° - 47°) + \cdots + \cos^6(90° - 89°) \\ &= \sin^6 1° + \sin^6 2° + \cdots + \sin^6 44° + \sin^6 45° + \cos^6 44° + \cos^6 43° + \cdots + \cos^6 1° \\ &= (\sin^6 1° + \cos^6 1°) + (\sin^6 2° + \cos^6 2°) + \cdots + (\sin^6 44° + \cos^6 44°) + \sin^6 45° \end{aligned}$$

Puisque $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\sin^6 45° = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.
Or :

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)((x+y)^2 - 3xy)$$

On reporte $x = \sin^2\theta$ et $y = \cos^2\theta$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)((x+y)^2 - 3xy) \\ \sin^6\theta + \cos^6\theta &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)((\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta) \\ \sin^6\theta + \cos^6\theta &= 1(1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta) \end{aligned}$$

puisque $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.
Donc :

$$\begin{aligned} S &= (\sin^6 1° + \cos^6 1°) + (\sin^6 2° + \cos^6 2°) + \cdots + (\sin^6 44° + \cos^6 44°) + \sin^6 45° \\ &= (1 - 3\sin^2 1° \cos^2 1°) + (1 - 3\sin^2 2° \cos^2 2°) + \cdots + (1 - 3\sin^2 44° \cos^2 44°) + \tfrac{1}{8} \\ &= 44 - (3\sin^2 1° \cos^2 1° + 3\sin^2 2° \cos^2 2° + \cdots + 3\sin^2 44° \cos^2 44°) + \tfrac{1}{8} \\ &= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}(4\sin^2 1° \cos^2 1° + 4\sin^2 2° \cos^2 2° + \cdots + 4\sin^2 44° \cos^2 44°) \end{aligned}$$

Puisque $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, alors $4\sin^2\theta\cos^2\theta = \sin^2 2\theta$. Donc :

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}(4\sin^2 1° \cos^2 1° + 4\sin^2 2° \cos^2 2° + \cdots + 4\sin^2 44° \cos^2 44°) \\ &= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}(\sin^2 2° + \sin^2 4° + \cdots + \sin^2 88°) \\ &= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}(\sin^2 2° + \sin^2 4° + \cdots + \sin^2 44° + \sin^2 46° + \cdots + \sin^2 86° + \sin^2 88°) \\ &= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}(\sin^2 2° + \sin^2 4° + \cdots + \sin^2 44° + \\ &\qquad \cos^2(90° - 46°) + \cdots + \cos^2(90° - 86°) + \cos^2(90° - 88°)) \\ &= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}(\sin^2 2° + \sin^2 4° + \cdots + \sin^2 44° + \cos^2 44° + \cdots + \cos^2 4° + \cos^2 2°) \\ &= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}((\sin^2 2° + \cos^2 2°) + (\sin^2 4° + \cos^2 4°) + \cdots + (\sin^2 44° + \cos^2 44°)) \\ &= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}(22) \qquad (\text{puisque } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1) \\ &= \tfrac{353}{8} - \tfrac{132}{8} \\ &= \tfrac{221}{8} \end{aligned}$$

Puisqu'on cherche $S = \dfrac{m}{n}$, on peut choisir $m = 221$ et $n = 8$.

(b) On montrera d'abord, de deux façons différentes, que $f(n) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$.

<u>1re méthode</u>
Soit un entier formé de n chiffres tel que la somme de ces chiffres est égale à 5. Voici les choix possibles de chiffres non nuls qui ont une somme de 5 :

$$5 \quad 4,1 \quad 3,2 \quad 3,1,1 \quad 2,2,1 \quad 2,1,1,1 \quad 1,1,1,1,1$$

Chaque choix peut correspondre à plus d'un entier de n chiffres, car les chiffres non nuls peuvent être placés dans plus d'une position. Pour chaque choix, on compte le nombre d'entiers possibles de n chiffres en déterminant le nombre a d'arrangements des chiffres non nuls (p. ex., dans le cas des chiffres 4 et 1, il y a 2 arrangements, soit 1 4 et 4 1). Le premier chiffre d'un tel arrangement sera le premier des n chiffres de l'entier à partir de la gauche. Pour chacun des a arrangements, on comptera ensuite le nombre b de façons de placer les autres chiffres non nuls dans les $n-1$ positions qui restent (p. ex., pour l'arrangement 1 4, le chiffre 1 occupe la 1re position et le chiffre 4 peut occuper n'importe quelle des $n-1$ positions suivantes ; ainsi $b = n-1$). Les autres positions seront occupées par le chiffre 0. Pour chaque choix, le nombre d'entiers sera égal à ab. On résume les cas au moyen d'un tableau. Chaque total est indiqué et développé sous la forme d'une fraction ayant un dénominateur de 24 :

Choix des chiffres non nuls qui ont une somme de 5	a	b	ab
5	1	1	$1 = \dfrac{24}{24}$
$4, 1$	2	$(n-1)$	$2(n-1) = \dfrac{48n-48}{24}$
$3, 2$	2	$(n-1)$	$2(n-1) = \dfrac{48n-48}{24}$
$3, 1, 1$	3	$\dbinom{n-1}{2}$	$3\dbinom{n-1}{2} = \dfrac{36n^2-108n+72}{24}$
$2, 2, 1$	3	$\dbinom{n-1}{2}$	$3\dbinom{n-1}{2} = \dfrac{36n^2-108n+72}{24}$
$2, 1, 1, 1$	4	$\dbinom{n-1}{3}$	$4\dbinom{n-1}{3} = \dfrac{16n^3-96n^2+176n-96}{24}$
$1, 1, 1, 1, 1$	1	$\dbinom{n-1}{4}$	$\dbinom{n-1}{4} = \dfrac{n^4-10n^3+35n^2-50n+24}{24}$

(On remarque que dans les 2e et 3e choix, il faut que $n \geq 2$; dans les 4e et 5e choix, il faut que $n \geq 3$; dans le 6e choix, il faut que $n \geq 4$; dans le 7e choix, il faut que $n \geq 5$. Or dans chaque cas, la formule peut tout de même servir, car pour chaque valeur inférieure de n, la formule donne une valeur de 0. Dans le 1er choix, on dit que $b = 1$, puisqu'on doit avoir ab=1, car il n'y a qu'un nombre possible, soit le nombre formé du chiffre 5 suivi de $n-1$ zéros.)

$f(n)$ est la somme des expressions dans la dernière colonne du tableau. Donc :

$$f(n) = \frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

2e méthode

On établit d'abord une correspondance entre chaque entier de n chiffres dont les chiffres ont une somme de 5 et chaque arrangement de cinq 1 et $(n-1)$ X qui commence par le chiffre 1.

On comptera ensuite les entiers en comptant les arrangements.

Étant donné un entier de n chiffres dont les chiffres ont une somme de 5, on écrit un arrangement en suivant la règle suivante :

> Le nombre de chiffres 1 à la gauche du premier X correspond au premier chiffre de l'entier, le nombre de chiffres 1 entre le premier X et le deuxième X correspond au deuxième chiffre de l'entier et ainsi de suite. Ainsi le nombre de chiffres 1 à la droite du $(n-1)^{\text{ième}}$ X représente le $n^{\text{ième}}$ chiffre de l'entier.

Par exemple, l'entier 1010020001 correspond à l'arrangement 1XX1XXX11XXXX1.
Ainsi chaque entier de n chiffres dont les chiffres ont une somme de 5 correspond à un arrangement de ce type.
De la même façon, chaque arrangement de ce type correspond à un entier de n chiffres dont les chiffres ont une somme de 5. Il suffit de compter le nombre de chiffres 1 avant le premier X et d'écrire ce nombre comme premier chiffre de l'entier, de compter le nombre de chiffres 1 entre le premier X et le deuxième X et d'écrire ce nombre comme deuxième chiffre de l'entier, ainsi de suite. Puisque cinq chiffres 1 sont utilisés, on obtient un entier de n chiffres dont les chiffres ont une somme de 5.
Il y a donc une correspondance biunivoque entre les entiers et les arrangements.
Donc $f(n)$, qui représente le nombre de tels entiers dont les n chiffres ont une somme de 5, représente aussi le nombre de tels arrangements.
Chaque arrangement est composé de 5 chiffres 1 et de $n-1$ X et chaque arrangement commence par un chiffre 1. Pour compter le nombre de tels arrangements, il faut compter le nombre de permutations de $n-1$ X et de 4 chiffres 1. Ceci correspond au nombre de façons de choisir les 4 positions des chiffres 1 parmi les $n+3$ positions disponibles (car $(n-1)+4=n+3$). Ce nombre correspond à $\binom{n+3}{4}$.
Donc $f(n)=\binom{n+3}{4}=\dfrac{(n+3)!}{4!(n-1)!}=\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)(n)}{4!}=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$.

On doit maintenant déterminer combien des entiers n, de 1 à 2014, sont tels que le chiffre des unités de $f(n)$ est égal à 1.
On sait que $f(n)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$ est un entier pour toute valeur entière positive de n, car il correspond au nombre d'objets ayant une certaine propriété.
Si le chiffre des unités de n est 0 ou 5, alors n est un multiple de 5.
Si le chiffre des unités de n est 2 ou 7, alors $n+3$ est un multiple de 5.
Si le chiffre des unités de n est 3 ou 8, alors $n+2$ est un multiple de 5.
Si le chiffre des unités de n est 4 ou 9, alors $n+1$ est un multiple de 5.
Donc si le chiffre des unités de n est 0, 2, 3, 4, 5, 7, 8 ou 9, alors $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un multiple de 5 et $f(n)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$ est aussi un multiple de 5, puisque le dénominateur ne contient aucun diviseur 5 qui peut diviser le facteur 5 du numérateur.
Donc si le chiffre des unités de n est 0, 2, 3, 4, 5, 7, 8 ou 9, alors $f(n)$ est divisible par 5 et il ne peut donc pas avoir un chiffre des unités égal à 1.

Il reste à considérer les cas où le chiffre des unités de n est 1 ou 6 ; ce sont les seules valeurs qui pourraient faire en sorte que $f(n)$ a un chiffre des unités égal à 1.
On remarque que $3f(n)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8}$, ce qui est un entier positif pour toute valeur entière positive de n.

On remarque aussi que si $f(n)$ a un chiffre des unités égal à 1, alors $3f(n)$ a un chiffre des unités égal à 3, et que si $3f(n)$ a un chiffre des unités égal à 3, alors $f(n)$ doit avoir un chiffre des unités égal à 1.
Donc, déterminer le nombre de valeurs de n pour lesquelles $f(n)$ a un chiffre des unités égal à 1 est équivalent à déterminer le nombre de valeurs de n pour lesquelles $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8}$ a un chiffre des unités égal à 3.

On considère les entiers n en groupes de 40. (Ce choix est intuitif, puisque le problème semble traiter des multiples de 5 et des multiples de 8 et $5 \times 8 = 40$.)
Si n a un chiffre des unités égal à 1, on doit avoir $n = 40k + 1$ ou $n = 40k + 11$ ou $n = 40k + 21$ ou $n = 40k + 31$, k étant un entier supérieur ou égal à 0.
Si n a un chiffre des unités égal à 6, on doit avoir $n = 40k + 6$ ou $n = 40k + 16$ ou $n = 40k + 26$ ou $n = 40k + 36$, k étant un entier supérieur ou égal à 0.

Si $n = 40k + 1$, alors :

$$\begin{aligned} 3f(n) &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8} \\ &= \frac{(40k+1)(40k+2)(40k+3)(40k+4)}{8} \\ &= (40k+1)(20k+1)(40k+3)(10k+1) \end{aligned}$$

Or $40k+1$ a un chiffre des unités égal à 1, $20k+1$ a un chiffre des unités égal à 1, $40k+3$ a un chiffre des unités égal à 3 et $10k+1$ a un chiffre des unités égal à 1. Donc, le produit de ces expressions a un chiffre des unités égal à $(1)(1)(3)(1)$, ou 3.
On traite les sept autres cas de la même façon et on résume les résultats dans le tableau suivant :

n	$3f(n)$ simplifié	chiffre des unités de $3f(n)$
$40k+1$	$(40k+1)(20k+1)(40k+3)(10k+1)$	3
$40k+11$	$(40k+11)(10k+3)(40k+13)(20k+7)$	3
$40k+21$	$(40k+21)(20k+11)(40k+23)(10k+6)$	8
$40k+31$	$(40k+31)(10k+8)(40k+33)(20k+17)$	8
$40k+6$	$(20k+3)(40k+7)(10k+2)(40k+9)$	8
$40k+16$	$(10k+4)(40k+17)(20k+9)(40k+19)$	8
$40k+26$	$(20k+13)(40k+27)(10k+7)(40k+29)$	3
$40k+36$	$(10k+9)(40k+37)(20k+19)(40k+39)$	3

(On remarque, par exemple, que si $n = 40k + 16$, la forme simplifiée de $3f(n)$ est $(10k + 4)(40k + 17)(20k + 9)(40k + 19)$, de sorte que le chiffre des unités de $3f(n)$ est le chiffre des unités de $(4)(7)(9)(9)$, c'est-à-dire le chiffre des unités de 2268, qui est 8.)

Donc, $f(n)$ a un chiffre des unités égal à 1 lorsque $n = 40k + 1$ ou $n = 40k + 11$ ou $n = 40k + 26$ ou $n = 40k + 36$, k étant un entier supérieur ou égal à 0.
Il y a 4 telles valeurs de n entre chaque paire de multiples consécutifs de 40.
Puisque $2000 = 50 \times 40$, alors 2000 est le 50^e^ multiple de 40. Il y a donc 50×4 entiers n, ou 200 entiers n inférieurs à 2000 pour lesquels le chiffre des unités de $f(n)$ est égal à 1.
De 2000 à 2014, il y a deux autres entiers, soit $n = 40(50) + 1$ et $n = 40(50) + 11$, ou $n = 2001$ et $n = 2011$.
En tout, 202 des entiers $f(1), f(2), \ldots, f(2014)$ ont un chiffre des unités égal à 1.

10. Dans cette solution, on utilise BH pour représenter « bonbon haricot » ou « bonbons haricots ». On utilise T1 pour représenter un « mouvement de Type 1 », T2 pour représenter un « mouvement de Type 2 » et ainsi de suite.
On utilise P0 pour représenter « position 0 », P1 pour représenter « position 1 » et ainsi de suite.
À n'importe quel moment donné, on représente les positions des BH par un n-uplet d'entiers non négatifs qui indiquent les nombres de BH respectifs en P0, P1, P2, etc. Par exemple, le quadruplet $(0,0,1,2,1)$ indique 0 BH en P0, 0 BH en P1, 1 BH en P2, 2 BH en P3 et 1 BH en P4.
   (a) On procède à rebours à partir de l'état final $(0,0,0,0,0,1)$.
   Le seul mouvement qui aurait pu mener à 1 BH en P5 est T5.
   Si on annule ce mouvement, on enlève 1 BH de P5 et on ajoute 1 BH à P4 et 1 BH à P3, ce qui donne les positions $(0,0,0,1,1,0)$.
   Le seul mouvement qui aurait pu mener à 1 BH en P4 est T4.
   Si on annule ce mouvement, on enlève 1 BH de P4 et on ajoute 1 BH à P2 et 1 BH à P3, ce qui donne les positions $(0,0,1,2,0,0)$.
   Les seuls mouvements qui auraient pu mener à 2 BH en P3 sont 2 T3.
   Si on annule ces mouvements, on enlève 2 BH de P3 et on ajoute 2 BH à P1 et 2 BH à P2, ce qui donne les positions $(0,2,3,0,0,0)$.
   Les seuls mouvements qui auraient pu mener à 3 BH en P2 sont 3 T2.
   Si on annule ces mouvements, on arrive aux positions $(3,5,0,0,0,0)$.
   Les seuls mouvements qui auraient pu mener à 5 BH en P1 sont 5 T1.
   Si on annule ces mouvements, on enlève 5 BH de P1 et on ajoute 10 BH à P0, ce qui donne les positions $(13,0,0,0,0,0)$.
   Donc si $N = 13$, Fanny peut gagner la joute en faisant les mouvements précédents dans l'ordre inverse.
   Ainsi à partir de $(13,0,0,0,0,0)$, 5 T1 donneront $(3,5,0,0,0,0)$, puis 3 T2 donneront $(0,2,3,0,0,0)$, puis 2 T3 donneront $(0,0,1,2,0,0)$, puis T4 donnera $(0,0,0,1,1,0)$ et T5 donnera $(0,0,0,0,0,1)$.
   (b) <u>Considérations initiales</u>
   Premièrement, on remarque que si Fanny a N BH au départ (N étant un entier fixe strictement positif quelconque), alors la joute est terminée après au plus $N-1$ mouvements (puisqu'elle mange exactement un BH à chaque mouvement).
   Deuxièmement, on remarque que les positions des BH à l'état final de même qu'à n'importe quel état intermédiaire (c.-à-d. après un certain nombre de mouvements) doivent être dans la liste P0, P1, …, P$(N-1)$, puisque chaque BH peut se déplacer d'au plus 1 position vers la droite lors d'un mouvement ; donc aucun BH ne peut se déplacer de plus de $N-1$ positions vers la droite dans au plus $N-1$ mouvements.
   Ainsi si on a N BH au départ, n'importe quel état peut être représenté par un N-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1})$, a_i étant le nombre de BH en Pi dans cet état.

   <u>Suite de Fibonacci et Propriété importante #1 (PI1)</u>
   La suite de Fibonacci, $F_1, F_2, F_3, \ldots$, est définie par $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ($n \geq 3$).
   Le nombre initial N de BH et le nombre de BH dans diverses positions sont reliés au moyen de la suite de Fibonacci de la façon suivante :
   À n'importe quel moment entre l'état initial (N BH en P0) et l'état final, s'il y a a_i BH en Pi pour chaque i de 0 à $N-1$, alors :

$$N = a_0F_2 + a_1F_3 + \cdots + a_{N-2}F_N + a_{N-1}F_{N+1} \qquad (*)$$

En effet :

- La formule est vraie pour l'état initial, car on a alors $(a_0, a_1, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1}) = (N, 0, \ldots, 0, 0)$ et $F_2 = 1$. Donc, le membre de droite de $(*)$ est égal à $N(1) + 0$, ou N.
- Un T1 ne change pas la valeur du membre de droite de $(*)$: Puisqu'un T1 change l'état $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1})$ à l'état $(a_0-2, a_1+1, a_2, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1})$, le membre de droite de $(*)$ change de
$$a_0F_2 + a_1F_3 + a_2F_4 + \cdots + a_{N-2}F_N + a_{N-1}F_{N+1}$$
à
$$(a_0 - 2)F_2 + (a_1 + 1)F_3 + a_2F_4 + \cdots + a_{N-2}F_N + a_{N-1}F_{N+1},$$
soit une différence de $-2F_2 + F_3$, ou $-2(1) + 2$, ou 0.
- Un Ti ($i \geq 2$) ne change pas la valeur du membre de droite de $(*)$: Puisqu'un Ti change l'état $(a_0, a_1, \ldots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_i, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1})$ à l'état $(a_0, a_1, \ldots, a_{i-2}-1, a_{i-1}-1, a_i+1, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1})$, le membre de droite de $(*)$ change de
$$a_0F_2 + a_1F_3 + \cdots + a_{i-2}F_i + a_{i-1}F_{i+1} + a_iF_{i+2} + \cdots + a_{N-2}F_N + a_{N-1}F_{N+1}$$
à
$$a_0F_2+a_1F_3+\cdots+(a_{i-2}-1)F_i+(a_{i-1}-1)F_{i+1}+(a_i+1)F_{i+2}+\cdots+a_{N-2}F_N+a_{N-1}F_{N+1},$$
soit une différence de $-F_i - F_{i+1} + F_{i+2}$, ou 0 puisque $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$.

Ceci nous confirme que le membre de droite de $(*)$ commence à N et ne change pas après n'importe quel mouvement.
Donc lors de n'importe quel état $(a_0, a_1, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1})$ après un départ de N BH en P0, il est vrai que :
$$N = a_0F_2 + a_1F_3 + \cdots + a_{N-2}F_N + a_{N-1}F_{N+1} \qquad (*)$$

Pour montrer qu'il n'y a qu'un état final possible lorsque Fanny peut gagner la joute, on supposera qu'il y a deux état finals à partir de N BH et on montrera que les deux sont les mêmes.

Propriété importante #2 (PI2)
On fait appel à une propriété des nombres de Fibonacci selon laquelle deux sommes de trois nombres non consécutifs de Fibonacci ou moins ne peuvent être égales si les nombres de Fibonacci utilisés dans les sommes ne sont pas les mêmes :

> Soit x, y, z des entiers strictement positifs de manière que $2 \leq x < y < z$ et que x, y, z ne comportent aucune paire d'entiers consécutifs.
> Alors $F_z < F_y + F_z < F_x + F_y + F_z < F_{z+1}$.

Puisque chaque nombre de Fibonacci est un entier strictement positif, alors $F_z < F_y + F_z < F_x + F_y + F_z$. On doit donc démontrer que $F_x + F_y + F_z < F_{z+1}$:

> Puisque x, y, z ne comportent aucune paire d'entiers consécutifs et que $x < y < z$, alors $y < z - 1$.
> Puisque y et z sont des entiers strictement positifs, alors $y \leq z - 2$.
> On a aussi $x < y - 1 \leq z - 3$.

Puisque x et z sont des entiers tels que $x < z - 3$, alors $x \leq z - 4$.
Puisque la suite de Fibonacci est croissante à partir de F_2, alors :

$$F_x + F_y + F_z \leq F_{z-4} + F_{z-2} + F_z < F_{z-3} + F_{z-2} + F_z = F_{z-1} + F_z = F_{z+1}$$

Puisqu'il y a un signe $<$ dans cette série d'égalités et d'inégalités, alors $F_x + F_y + F_z < F_{z+1}$, ce qu'il fallait démontrer.

Suite de la démonstration

D'après l'énoncé du problème, on a une position gagnante à l'état final s'il reste au plus trois BH, chacun dans une position distincte, de manière qu'il n'y ait pas de bonbons en positions consécutives.

On suppose qu'à partir de N BH en P0, on peut obtenir un état final avec $a_d = 1$, a_b et a_c étant chacun égal à 0 ou à 1 et tous les autres a_i étant nuls, et un autre état final avec $a_D = 1$, a_B et a_C étant chacun égal à 0 ou à 1 et tous les autres a_i étant nuls.

D'après PI1, on a $N = a_b F_{b+2} + a_c F_{c+2} + F_{d+2}$ et $N = a_B F_{B+2} + a_C F_{C+2} + F_{D+2}$, d'où $a_b F_{b+2} + a_c F_{c+2} + F_{d+2} = a_B F_{B+2} + a_C F_{C+2} + F_{D+2}$.

On soustrait de cette dernière équation des nombres de Fibonacci qui se trouvent dans chaque membre. (On rappelle que chaque terme de chaque membre est soit un nombre de Fibonacci, soit un 0 et que les nombres de Fibonacci dans un même membre de l'équation sont distincts.)

S'il ne reste aucun nombre de Fibonacci dans chaque membre, alors les deux états finals sont les mêmes.

S'il reste des nombres de Fibonacci dans un membre ou l'autre de l'équation, il doit y en avoir dans les deux membres, autrement on aurait un nombre non nul dans un membre égal à 0 dans l'autre.

Soit F_k le plus grand nombre de Fibonacci dans le membre de gauche (M.G.) et F_m le plus grand nombre de Fibonacci dans le membre de droite (M.D.).

Puisqu'on a soustrait les nombres communs aux deux membres, alors $k \neq m$. On peut supposer que $k < m$. Puisque k et m sont des entiers, alors $k \leq m - 1$.

On remarque que le M.D. doit être supérieur ou égal à F_m, puisqu'il inclut F_m.

Puisque le M.G. comprend au plus trois nombres de Fibonacci et que ceux-ci ne peuvent être consécutifs (puisque b, c, d ne sont pas consécutifs) et que le plus grand est F_k, alors d'après PI2, le M.G. est inférieur à F_{k+1}.

Puisque $k + 1 \leq m$, le M.G. est inférieur à F_m.

Puisque le M.G. est inférieur à F_m et que le M.D. est supérieur ou égal à F_m, on a une contradiction, puisque on doit avoir M.G. = M.D.

Donc, il ne peut rester de nombres de Fibonacci dans un membre ou dans l'autre.

En d'autres mots, les positions des BH dans les deux états finals sont les mêmes et il ne peut donc y avoir qu'un état final.

Donc si Fanny peut gagner la joute, il n'y a qu'un état final possible.

(c) D'après l'énoncé du problème et PI1, on sait que Fanny peut seulement gagner une joute qui commence avec N BH en P0 si N est égal à la somme d'au plus trois nombres de Fibonacci distincts parmi lesquels il n'y a pas deux nombres de Fibonacci consécutifs.

Pour déterminer l'entier positif N le plus près de 2014 pour lequel Fanny peut gagner la joute, on déterminera l'entier positif le plus près de 2014 qui peut être exprimé comme la somme d'au plus trois nombres de Fibonacci, parmi lesquels il n'y a pas deux nombres de Fibonacci consécutifs.

On écrit les nombres de Fibonacci jusqu'à ce qu'on en obtienne un qui est supérieur à 2014 :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584$$

On remarque que $1597 + 377 + 34 = 2008$, ce qui est à une distance de 6 du nombre 2014. On démontrera qu'il est impossible d'obtenir une somme plus près de 2014. En d'autres mots, on démontrera qu'il est impossible d'obtenir une somme égale à un entier de 2009 à 2019.

Supposons que l'on puisse obtenir une somme égale à un entier de 2009 à 2019.
Le nombre de Fibonacci 2584 est trop grand pour paraître dans la somme.
Si la somme n'inclut aucun nombre de Fibonacci supérieur à 987, alors la plus grande somme que l'on puisse obtenir est $987 + 377 + 144 = 1508$, ce qui n'est pas suffisant.
Donc, il faut inclure le nombre 1597 pour atteindre une somme égale à un entier de 2009 à 2019.
Or, 1587 seul est insuffisant. Si on ajoute un ou deux nombres de Fibonacci, leur somme doit être dans l'intervalle de $2009 - 1597$ à $2019 - 1597$, c'est-à-dire de 412 à 422.
On ne peut utiliser un nombre de Fibonacci supérieur à 377, sinon la somme serait trop grande.
Si la somme de un ou des deux nombres est supérieure à 233, alors la somme est au plus égale à $233 + 89$, ou 322, ce qui n'est pas dans l'intervalle voulu.
On doit donc inclure 377 dans la somme qui reste.
Le nombre ou les deux nombres de Fibonacci que l'on ajoute à la somme doivent avoir une somme dans l'intervalle de $412 - 377$ à $422 - 377$, ou de 35 à 45.
Il n'y a aucun nombre de Fibonacci dans cet intervalle. Donc, il est impossible d'obtenir une somme d'au plus trois nombres de Fibonacci, parmi lesquels il n'y a pas deux nombres consécutifs, de manière à obtenir une somme plus près de 2014 que 2008.

On remarque que $2008 = 1597 + 377 + 34$. Puisque $F_9 = 34$, $F_{14} = 377$ et $F_{17} = 1597$, la position gagnante correspondante serait formée de 1 BH dans chacune de P7, P12 et P15. Pour compléter la démonstration, il faut montrer qu'il est possible d'atteindre cet état :

> On commence par l'état final avec un 1 BH dans chacune de P7, P12 et P15 et on procède à rebours comme dans la partie (a).
> Puisqu'il y a 1 BH en P15, il doit provenir d'un T15.
> Si on annule ce mouvement, on obtient 1 BH dans chacune de P7, P12, P13 et P14. On remarque que le BH le plus à droite est en P14.
> Puisqu'il y a 1 BH en P14, il doit provenir d'un T14.
> On annule ce mouvement et on annule les mouvements qui ont mené à un BH dans la position la plus à droite. Ainsi on ramène progressivement tous les BH en P0.
> Pour gagner la joute où $N = F_9 + F_{14} + F_{17}$, Fanny utilise les mêmes mouvements dans l'ordre inverse, comme dans la partie (a).
> De cette manière, elle atteindra un état final avec 1 BH dans chacune de P7, P12 et P15.

Donc si $N = F_9 + F_{14} + F_{17}$, Fanny peut gagner la joute.
Donc, $N = 2008$ est l'entier positif le plus près de 2014 pour lequel Fanny peut gagner la joute en commençant avec N BH en P0.

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2013

le mercredi 17 avril 2013
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 18 avril 2013
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) L'expression $\sqrt{113+x}$ est un entier lorsque $113+x$ est un carré parfait.
Pour déterminer le plus petit entier strictement positif x pour lequel $113+x$ est un carré parfait, on cherche d'abord le plus petit carré parfait supérieur à 113.
Puisque $10^2 = 100$ et $11^2 = 121$, le plus petit carré parfait supérieur à 113 est 121.
On a donc $113 + x = 121$, d'où $x = 8$.

(b) La moyenne de 3 et de 11 est égale à $\frac{1}{2}(3+11)$, ou 7. Donc $a = 7$.
D'après la consigne, la moyenne de 7 et de b est égale à 11.
On a donc $\frac{1}{2}(7+b) = 11$, d'où $7+b = 22$, ou $b = 15$.
(On aurait pu conclure que puisque 7 est 4 de moins que la moyenne de 11, alors b doit être 4 de plus que 11. Donc $b = 11+4$, ou $b = 15$.)

(c) Soit c l'âge de Charlot, en années, et b l'âge de Bella, en années.
D'après la première phrase, on a $c = 30 + b$.
D'après la deuxième phrase, on a $c = 6b$.
On reporte $c = 6b$ dans l'équation $c = 30 + b$ pour obtenir $6b = 30 + b$, d'où $5b = 30$, ou $b = 6$.
Puisque $c = 30 + b$, alors $c = 36$. Charlot a donc 36 ans.

2. (a) Puisque $\dfrac{21}{x} = \dfrac{7}{y}$, alors $21 = \dfrac{7x}{y}$. Donc $\dfrac{x}{y} = \dfrac{21}{7}$, ou $\dfrac{x}{y} = 3$.

(b) *Solution 1*
Puisque

$$\frac{1}{3} \approx 0{,}3333 \qquad \frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad \frac{1}{5} = 0{,}2 \qquad \frac{1}{6} \approx 0{,}1667$$

alors $\dfrac{1}{5} < 0{,}2013$ et $0{,}2013 < \dfrac{1}{4}$. Donc, n doit être égal à 4.
(On devrait aussi remarquer que $\dfrac{1}{n}$ diminue à mesure que n augmente. Il s'agit donc de la seule valeur de n qui vérifie les conditions.)

Solution 2
Puisque $\dfrac{1}{n+1} < 0{,}2013$, alors $n+1 > \dfrac{1}{0{,}2013}$, ou $n > \dfrac{1}{0{,}2013} - 1 \approx 3{,}9677$.
Puisque $\dfrac{1}{n} > 0{,}2013$, alors $n < \dfrac{1}{0{,}2013} \approx 4{,}9677$.
Puisque n est un entier strictement positif qui est

i. plus petit qu'un nombre à peu près égal à 4,9677, et
ii. plus grand qu'un nombre à peu près égal à 3,9677,

alors $n = 4$.

(c) Puisque AH est perpendiculaire à BC, alors l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(BC)(AH)$.
Or, on sait que cette aire est égale à 84 et que $AH = 8$. Donc $84 = \frac{1}{2}(BC)(8)$, ou $4 \cdot BC = 84$, d'où $BC = 21$.
Le triangle AHB est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, puisque $BH > 0$:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$$

(On aurait pu reconnaitre deux des côtés du triangle rectangle remarquable 6-8-10.)
Puisque $BC = 21$ et $BH = 6$, alors $HC = BC - BH$, d'où $HC = 21 - 6$, ou $HC = 15$.

Le triangle AHC est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, puisque $AC > 0$:

$$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$$

Le périmètre du triangle ABC est égal à $AB + BC + AC$, ou $10 + 21 + 17$, ou 48.

3. (a) La suite de Fibonacci commence par les termes $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ Les huit premiers termes sont donc impair, impair, pair, impair, impair, pair, impair, impair.
Si x et y sont deux termes consécutifs de la suite, alors le terme suivant est $x + y$.
On considère n'importe quels deux entiers x et y.
Si x et y sont pairs, alors $x + y$ est pair. Si x et y sont impairs, alors $x + y$ est pair.
Si x est pair et y est impair, alors $x+y$ est impair. Si x est impair et y est pair, alors $x+y$ est impair.
Donc, la parité ou l'imparité de deux termes consécutifs x et y de la suite de Fibonacci détermine si le terme suivant $x + y$ est pair ou impair.
De plus, si deux termes consécutifs ont la même parité ou imparité que deux termes consécutifs précédents, un motif répétitif est créé.
Par exemple, les 4^{e} et 5^{e} termes sont « impair, impair », de même que les 1er et 2^{e} termes.
Le motif « impair, impair, pair » est donc répété. Ce motif a une longueur de 3 termes.
Puisque 99 est un multiple de 3, alors le 99^{e} terme est le troisième terme du motif répété.
Chaque répétition du motif contient deux termes impairs.
Donc, les 99 premiers termes de la suite de Fibonacci contiennent 2×33 termes impairs, c'est-à-dire 66 termes impairs.
Puisque le 100^{e} terme de la suite est le premier terme d'une répétion du motif, il est impair.
Dans les 100 premiers termes de la suite de Fibonacci, il y a donc $66 + 1$ termes impairs, ou 67 termes impairs.

(b) Soit a le premier terme de cette suite arithmétique et soit d la différence constante entre n'importe quels deux termes consécutifs. (Cette différence constante est appelée *raison arithmétique*.)
Les quatre premiers termes sont donc $a, a + d, a + 2d, a + 3d$.
D'après les renseignements donnés, on a $a + (a + 2d) = 6$ et $(a + d) + (a + 3d) = 20$.
La première équation devient $2a + 2d = 6$, ou $a + d = 3$.
La deuxième équation devient $2a + 4d = 20$, ou $a + 2d = 10$.
Donc $(a + 2d) - (a + d) = 10 - 3$, d'où $d = 7$.
Puisque $a + d = 3$ et $d = 7$, alors $a = -4$.
Le dixième terme de la suite est donc $a + 9d$, c'est-à-dire $-4 + 9(7)$, ou 59.

4. (a) Il y a cinq chiffres impairs, soit 1, 3, 5, 7 et 9.
On subdivise les entiers strictement positifs inférieurs à 1000 en trois catégories : ceux d'un chiffre, ceux de deux chiffres et ceux de trois chiffres.
Il y a cinq entiers impairs positifs d'un chiffre, soit 1, 3, 5, 7 et 9.
On considère les entiers positifs de deux chiffres dont les deux chiffres sont impairs.
Un tel entier est de la forme XY, X et Y étant des chiffres.
Le chiffre X peut prendre cinq valeurs, puisqu'il doit être impair. Pour chacune de ces valeurs, le chiffre Y peut aussi prendre cinq valeurs.
Il y a donc 5×5 valeurs, ou 25 entiers positifs de deux chiffres dont les deux chiffres sont impairs.
On considère les entiers positifs de trois chiffres dont les trois chiffres sont impairs.

Un tel entier est de la forme XYZ, X, Y et Z étant des chiffres.
Le chiffre X peut prendre cinq valeurs, puisqu'il doit être impair. Pour chacune de ces valeurs, le chiffre Y peut aussi prendre cinq valeurs. Pour chacune de ces 5×5 valeurs, le chiffre Z peut prendre cinq valeurs.
Il y a donc $5 \times 5 \times 5$ valeurs, ou 125 entiers positifs de trois chiffres dont les trois chiffres sont impairs.
En tout, le nombre d'entiers positifs inférieurs à 1000 dont tous les chiffres sont impairs est égal à $5 + 25 + 125$, ou 155 .

(b) On additionne les deux termes du membre de droite de la deuxième équation pour obtenir $\frac{4}{7} = \frac{b+a}{ab}$.
Puisque $a + b = 16$, alors $\frac{4}{7} = \frac{16}{ab}$, d'où $ab = \frac{16(7)}{4}$, ou $ab = 28$.
On a donc $a + b = 16$ et $ab = 28$.
D'après la première équation, $b = 16 - a$.
On reporte $b = 16 - a$ dans la deuxième équation pour obtenir $a(16 - a) = 28$, ou $16a - a^2 = 28$, ou $a^2 - 16a + 28 = 0$.
Par factorisation, on obtient $(a - 14)(a - 2) = 0$.
Donc $a = 14$ ou $a = 2$.
Si $a = 14$, alors $b = 16 - a$, ou $b = 2$.
Si $a = 2$, alors $b = 16 - a$, ou $b = 14$.
Les couples (a, b) qui vérifient le système d'équations sont $(14, 2)$ et $(2, 14)$.
(On peut vérifier que $\frac{1}{2} + \frac{1}{14} = \frac{7}{14} + \frac{1}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$.)

5. (a) On remplit un tableau des 36 résultats possibles du jet des deux dés et des sommes qui en résultent :

	2	3	5	7	11	13
2	4	5	7	9	13	15
3	5	6	8	10	14	16
5	7	8	10	12	16	18
7	9	10	12	14	18	20
11	13	14	16	18	22	24
13	15	16	18	20	24	26

Parmi les 36 sommes, six sont des nombres premiers (deux sommes chacune de 5, 7 et 13).
La probabilité d'obtenir une somme qui est un nombre premier est donc égale à $\frac{6}{36}$, ou $\frac{1}{6}$.
(On remarque que chaque somme est supérieure ou égale à 4. Chacune doit donc être impaire pour être un nombre premier. Puisque la somme de deux nombres impairs est paire, il suffit de vérifier les sommes d'un résultat pair et d'un résultat impair, c'est-à-dire les membres de la première rangée et de la première colonne.)

(b) On détermine d'abord les coordonnées de S.
Pour ce faire, on écrit l'équation de la parabole sous forme canonique en complétant le carré :

$$y = -x^2+4x+1 = -(x^2-4x-1) = -(x^2-4x+2^2-2^2-1) = -((x-2)^2-5) = -(x-2)^2+5$$

Le sommet S a donc pour coordonnées $(2, 5)$.
On détermine ensuite les coordonnées de A et de B.
Puisque A et B sont les points d'intersection de la droite d'équation $y = -x + 1$ et de la

parabole d'équation $y = -x^2 + 4x + 1$, leurs coordonnées vérifient ces deux équations.
Par comparaison des y, on a $-x + 1 = -x^2 + 4x + 1$, ou $x^2 - 5x = 0$, ou $x(x - 5) = 0$.
Donc $x = 0$ ou $x = 5$.
Lorsque $x = 0$, alors $y = -x + 1$, d'où $y = 0 + 1$, ou $y = 1$. Le point A, qui est situé sur l'axe des ordonnées, a pour coordonnées $(0, 1)$.
Lorsque $x = 5$, alors $y = -x + 1$, d'où $y = -5 + 1$, ou $y = -4$. Le point B a pour coordonnées $(5, -4)$.
On a donc les points $S(2, 5)$, $A(0, 1)$ et $B(5, -4)$. Donc :

$$\begin{aligned} AS^2 &= (0-2)^2 + (1-5)^2 = 20 \\ BS^2 &= (5-2)^2 + (-4-5)^2 = 90 \\ AB^2 &= (0-5)^2 + (1-(-4))^2 = 50 \end{aligned}$$

Donc $AS^2 + BS^2 - AB^2 = 20 + 90 - 50$, ou $AS^2 + BS^2 - AB^2 = 60$.

6. (a) Puisque ABC est un quart d'une pizza circulaire de centre A et de rayon 20 cm, alors $AC = AB = 20$ cm.
On sait que $\angle CAB = 90°$ (un quart de 360°).
Puisque $\angle CAB = 90°$ et que A, B et C sont situés sur le cercle qui délimite le plat, alors CB est un diamètre du plat. (Il s'agit d'une propriété des cercles : Si X, Y et Z sont trois points sur un cercle de manière que $\angle ZXY = 90°$, alors YZ doit être un diamètre du cercle.)
Puisque le triangle CAB est rectangle et isocèle, alors $CB = \sqrt{2}AC$, ou $CB = 20\sqrt{2}$ cm.
Donc, le plat a pour rayon $\frac{1}{2}CB$, c'est-à-dire $10\sqrt{2}$ cm.
Le plat circulaire a donc une aire égale à $\pi(10\sqrt{2}\text{ cm})^2$, ou $200\pi\text{ cm}^2$.
L'aire du morceau de pizza est celle d'un quart de cercle de rayon 20 cm. Elle est donc égale à $\frac{1}{4}\pi(20\text{ cm})^2$, ou $100\pi\text{ cm}^2$.
La fraction du plat recouvert par le morceau de pizza est égale à l'aire du morceau divisée par l'aire du plat. Elle est égale à $\dfrac{100\pi\text{ cm}^2}{200\pi\text{ cm}^2}$, ou $\dfrac{1}{2}$.

(b) Soit x m la longueur AF.
Puisque AB a une longueur de 8 m, alors FB a une longueur de $(8 - x)$ m.
Le triangle MAF est rectangle et il a un angle de 60°. Il s'agit donc d'un triangle remarquable 30°-60°-90°. Puisque MF est opposé à l'angle de 60° et que AF est opposé à l'angle de 30°, alors $MF = \sqrt{3}AF$.
Donc $MF = \sqrt{3}x$ m.
Puisque $MP = 2$ m, alors $PF = MF - MP$, d'où $PF = (\sqrt{3}x - 2)$ m.
On considère le triangle BFP, qui est rectangle en F. On a :

$$\tan\theta = \frac{PF}{FB} = \frac{(\sqrt{3}x - 2)\text{ m}}{(8 - x)\text{ m}} = \frac{\sqrt{3}x - 2}{8 - x}$$

Donc $(8 - x)\tan\theta = \sqrt{3}x - 2$, ou $8\tan\theta + 2 = \sqrt{3}x + (\tan\theta)x$.
On a donc $8\tan\theta + 2 = x(\sqrt{3} + \tan\theta)$, ou $x = \dfrac{8\tan\theta + 2}{\tan\theta + \sqrt{3}}$.
Donc $MF = \sqrt{3}x$, ou $MF = \dfrac{8\sqrt{3}\tan\theta + 2\sqrt{3}}{\tan\theta + \sqrt{3}}$ m.

7. (a) Il découle de l'équation donnée que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} - \tan x &= 3 \\
\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} &= 3 \\
1 - \sin x &= 3\cos x \qquad (\text{puisque } \cos x \neq 0) \\
(1-\sin x)^2 &= 9\cos^2 x \qquad (\text{on élève les deux membres au carré}) \\
1 - 2\sin x + \sin^2 x &= 9(1-\sin^2 x) \\
10\sin^2 x - 2\sin x - 8 &= 0 \\
5\sin^2 x - \sin x - 4 &= 0 \\
(5\sin x + 4)(\sin x - 1) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $\sin x = -\frac{4}{5}$ ou $\sin x = 1$.
Si $\sin x = 1$, alors $\cos x = 0$ et $\tan x$ n'est pas définie, ce qui est contraire à l'équation donnée. Cette valeur est donc rejetée.
Donc $\sin x = -\frac{4}{5}$.
(On peut vérifier que si $\sin x = -\frac{4}{5}$, alors $\cos x = \pm\frac{3}{5}$. Alors $\cos x = \frac{3}{5}$ vérifie l'équation donnée, puisque dans ce cas, on a $\frac{1}{\cos x} = \frac{5}{3}$ et $\tan x = -\frac{4}{3}$ et ces deux fractions ont une différence de 3.)

(b) Puisque $f(x) = ax + b$, alors $y = ax + b$ est une équation qui définit la fonction f. On peut alors déterminer l'équation de $g = f^{-1}$ en changeant l'un pour l'autre le x et le y dans cette équation. On obtient $x = ay + b$. On isole y : $ay = x - b$, ou $y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$.
Donc $f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$.
On remarque que $a \neq 0$. (Si $a = 0$, alors la représentation graphique de f serait définie par $y = b$, ce qui donnerait une droite horizontale. Une telle fonction n'admet aucune fonction réciproque.)
L'équation $f(x) - g(x) = 44$ devient donc $(ax + b) - \left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) = 44$, ou $\left(a - \frac{1}{a}\right)x + \left(b + \frac{b}{a}\right) = 0x + 44$. Cette équation doit être vérifiée par toutes les valeurs de x.
On peut continuer de deux façons.

1re façon : En comparant les coefficients
Puisque l'équation

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)x + \left(b + \frac{b}{a}\right) = 0x + 44$$

est vérifiée par toutes les valeurs de x, alors les coefficients de l'expression du membre de gauche doivent être les mêmes que ceux de l'expression du membre de droite.
On a donc $a - \frac{1}{a} = 0$ et $b + \frac{b}{a} = 44$.
D'après la première de ces deux équations, on a $a = \frac{1}{a}$, ou $a^2 = 1$. Donc $a = 1$ ou $a = -1$.

Si $a = 1$, l'équation $b + \dfrac{b}{a} = 44$ devient $b + b = 44$, d'où $b = 22$.
Si $a = -1$, l'équation $b + \dfrac{b}{a} = 44$ devient $b - b = 44$, ce qui n'admet aucune solution.
On a donc $a = 1$ et $b = 22$, d'où $f(x) = x + 22$.

<u>2e façon : À l'aide de valeurs particulières de x</u>
Puisque l'équation

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)x + \left(b + \frac{b}{a}\right) = 0x + 44$$

est vérifiée par toutes les valeurs de x, alors elle est vérifiée par n'importe quelle valeur de x de notre choix.
Si on choisit $x = 0$, l'équation devient $0 + \left(b + \dfrac{b}{a}\right) = 44$, ou $b + \dfrac{b}{a} = 44$.
Si on choisit $x = b$, l'équation devient $\left(a - \dfrac{1}{a}\right)b + \left(b + \dfrac{b}{a}\right) = 44$, ou $ab + b = 44$.
On peut récrire la première de ces équations sous la forme $\dfrac{ab+b}{a} = 44$.
On reporte $ab + b = 44$ dans cette équation pour obtenir $\dfrac{44}{a} = 44$, d'où $a = 1$.
Puisque $a = 1$, l'équation $ab + b = 44$ devient $2b = 44$, ou $b = 22$.
Donc $f(x) = x + 22$.

Donc la seule fonction affine f pour laquelle l'équation $f(x) - g(x) = 144$ est vérifiée pour toutes les valeurs de x est la fonction définie par $f(x) = x + 22$.

8. (a) On factorise le membre de gauche de l'équation pour obtenir $a(a^2 + 2b) = 2013$.
On écrit ensuite l'entier 2013 en factorisation première : $2013 = 3 \times 671 = 3 \times 11 \times 61$. (On peut facilement obtenir le facteur 3 en utilisant le test de divisibilité par 3. On obtient $2013 = 3 \times 673$. On peut obtenir le facteur 11 en utilisant le test de divisibilité par 11 ou en divisant successivement par les nombres premiers.)
Puisque $2013 = 3 \times 11 \times 61$, les diviseurs positifs de 2013 sont :

$$1, 3, 11, 33, 61, 183, 671, 2013$$

Puisque a et b sont des entiers strictement positifs, alors a et $a^2 + 2b$ le sont aussi.
Puisque a et b sont des entiers strictement positifs, alors $a^2 \geq a$ et $2b > 0$, d'où $a^2 + 2b > a$.
Puisque $a(a^2 + 2b) = 2013$, alors a et $a^2 + 2b$ doivent former une paire de diviseurs complémentaires de 2013, c'est-à-dire une paire d'entiers dont le produit est égal à 2013, avec $a < a^2 + 2b$.
On remplit un tableau des diverses possibilités :

a	$a^2 + 2b$	$2b$	b
1	2013	2012	1006
3	671	662	331
11	183	62	31
33	61	-1028	rejeté

Le dernier cas est rejeté, puisque b doit être strictement positif.
Donc, les trois paires de diviseurs complémentaires qui vérifient l'équation sont $(1, 1006)$, $(3, 331)$ et $(11, 31)$.
(On peut vérifier par substitution que chaque couple vérifie l'équation.)

(b) On transforme successivement l'équation donnée en équations équivalentes :

$$\begin{array}{rcll}
\log_2(2^{x-1}+3^{x+1}) & = & 2x-\log_2(3^x) & \\
\log_2(2^{x-1}+3^{x+1})+\log_2(3^x) & = & 2x & \\
\log_2((2^{x-1}+3^{x+1})3^x) & = & 2x & \text{(on a utilisé } \log_2 A+\log_2 B=\log_2 AB) \\
(2^{x-1}+3^{x+1})3^x & = & 2^{2x} & \text{(puisque M.G. = M.D., alors } 2^{\text{M.G.}}=2^{\text{M.D.}}) \\
2^{-1}2^x3^x+3^13^x3^x & = & 2^{2x} & \\
\frac{1}{2}\cdot 2^x3^x+3\cdot 3^{2x} & = & 2^{2x} & \\
2^x3^x+6\cdot 3^{2x} & = & 2\cdot 2^{2x} & \text{(on a multiplié chaque membre par 2)} \\
2^x3^x2^{-2x}+6\cdot 3^{2x}2^{-2x} & = & 2 & \text{(on a divisé chaque membre par } 2^{2x}\neq 0) \\
2^{-x}3^x+6\cdot 3^{2x}2^{-2x} & = & 2 & \\
\left(\frac{3}{2}\right)^x+6\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} & = & 2 &
\end{array}$$

On reporte $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ dans l'équation, sachant que $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2=t^2$.
On obtient les équations équivalentes suivantes :

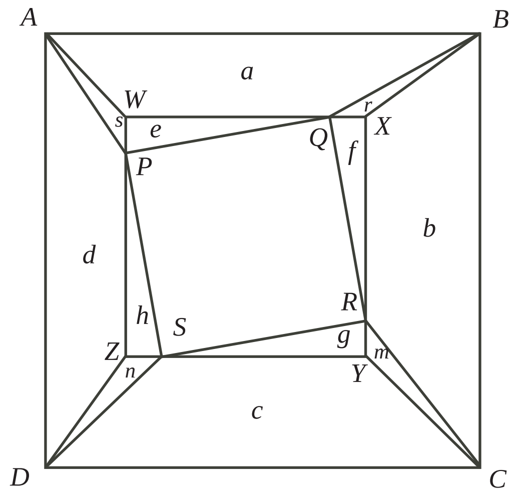
$$\begin{array}{rcl}
t+6t^2 & = & 2 \\
6t^2+t-2 & = & 0 \\
(3t+2)(2t-1) & = & 0
\end{array}$$

Donc $t=-\frac{2}{3}$ ou $t=\frac{1}{2}$.
Puisque $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x>0$, il faut que $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{1}{2}$.
Donc :

$$x=\log_{3/2}(1/2)=\frac{\log(1/2)}{\log(3/2)}=\frac{\log 1-\log 2}{\log 3-\log 2}=\frac{-\log 2}{\log 3-\log 2}=\frac{\log 2}{\log 2-\log 3}$$

9. (a) On suppose que les segments parallèles EF et WX sont séparés par une distance de x.
Le trapèze $EFXW$ a donc une hauteur de x.
Puisque le carré $EFGH$ a des côtés de longueur 10 et que le carré $WXYZ$ a des côtés de longueur 6, alors les segments ZY et HG sont séparés par une distance de $10-6-x$, ou $4-x$.
On rappelle que l'aire d'un trapèze est égale à la moitié du produit de sa hauteur et de la somme des longueurs des côtés parallèles.
L'aire du trapèze $EFXW$ est donc égale à $\frac{1}{2}x(EF+WX)$, ou $\frac{1}{2}x(10+6)$, ou $8x$.
L'aire du trapèze $GHZY$ est égale à $\frac{1}{2}(4-x)(HG+ZY)$, ou $\frac{1}{2}(4-x)(10+6)$, ou $32-8x$.
Donc, la somme de l'aire du trapèze $EFXW$ et de l'aire du trapèze $GHZY$ est égale à $8x+(32-8x)$, ou 32.
Cette somme est constante. Elle ne dépend donc pas de la position du carré $WXYZ$ à l'intérieur du carré $EFGH$.

(b) On « emboite » le carré $PQRS$ by en traçant des segments horizontaux et verticaux à partir de ses sommets de manière à former le rectangle $WXYZ$, comme dans la figure ci-dessous. (Puisque les quadrilatères $ABQP$, $BCRQ$, $CDSR$ et $DAPS$ sont convexes, toutes les configurations possibles ressembleront à celles de la figure.) On nomme aussi les différentes aires.



Puisque WX est parallèle à AB, alors le quadrilatère $ABXW$ est un trapèze. De même, les quadrilatères $BCYX$, $CDZY$ et $DAWZ$ sont des trapèzes.
La notation $|ABQP|$ représente l'aire du quadrilatère $ABQP$. Les autres aires sont notées de façon semblable.
Soit x la longueur des côtés du carré $ABCD$ et y la longueur des côtés du carré $PQRS$.
Soit $\angle WPQ = \theta$.
Puisque les triangles WPQ, XQR, YRS et ZSP sont rectangles et que chacun des angles du carré $PQRS$ mesure $90°$, alors $\angle WPQ = \angle XQR = \angle YRS = \angle ZSP = \theta$. L'exemple suivant le démontre :

$$\angle XQR = 180° - \angle PQR - \angle WQP = 90° - (180° - \angle PWQ - \angle WPQ) = 90° - (90° - \theta) = \theta$$

D'après cette propriété et puisque $PQ = QR = RS = SP = y$, on peut conclure que les quatre triangles WPQ, XQR, YRS et ZSP sont isométriques.
Donc :

i. les quatre aires e, f, g et h sont égales (c.-à-d. que $e = f = g = h$),

ii. $PZ = QW = RX = SY = y \sin\theta$ et

iii. $WP = XQ = YR = ZS = y\cos\theta$.

D'après ces deux dernières propriétés, on peut conclure que $WZ = XW = YX = ZY$. Par exemple, on a $WZ = WP + PZ = ZS + SY = ZY$. Donc $WXYZ$ est un carré. Soit z la longueur de ses côtés.

On veut démontrer que $(a + r) + (c + n)$ est égal à $(b + m) + (d + s)$.
On remarque que la somme de ces deux quantités est égale à l'aire de la surface entre les carrés $ABCD$ et $WXYZ$. Elle est donc égale à $x^2 - z^2$.
Pour démontrer que les deux quantités sont égales, il suffit donc de démontrer que $(a + r) + (c + n)$ est égal à $\frac{1}{2}(x^2 - z^2)$.
Soit k la hauteur du trapèze $ABXW$ et l la hauteur du trapèze $ZYCD$.
Donc $|ABXW| = a + r = \frac{1}{2}k(AB + WX) = \frac{1}{2}k(x + z)$.
De plus, $|ZYCD| = c + n = \frac{1}{2}l(DC + ZY) = \frac{1}{2}l(x + z)$.

Puisque AB, WX, ZY et DC sont parallèles, alors la somme des hauteurs du trapèze $ABXW$, du carré $WXYZ$ et du trapèze $ZYCD$ est égale à la hauteur du carré $ABCD$.
Donc $k+z+l=x$, ou $k+l=x-z$.
Donc :

$$(a+r)+(c+n)=\frac{1}{2}k(x+z)+\frac{1}{2}l(x+z)=\frac{1}{2}(x+z)(k+l)=\frac{1}{2}(x+z)(x-z)=\frac{1}{2}(x^2-z^2)$$

Donc $(a+r)+(c+n)=(b+m)+(d+s)$. On nomme cette équation $(*)$.

On veut démontrer que $r+n=m+s$.
On sait que $r=|\triangle QXB|$. On considère la base QX de ce triangle. La hauteur correspondante est égale à celle du trapèze $ABXW$, c'est-à-dire à k.
Donc $r=\frac{1}{2}(y\cos\theta)k$.
On sait que $n=|\triangle SZD|$. On considère la base SZ de ce triangle. La hauteur correspondante est égale à celle du trapèze $ZYCD$, c'est-à-dire à l.
Donc $n=\frac{1}{2}(y\cos\theta)l$.
D'après ces deux dernières équations, on a :

$$n+r=\frac{1}{2}(y\cos\theta)k+\frac{1}{2}(y\cos\theta)l=\frac{1}{2}y\cos\theta(k+l)=\frac{1}{2}y\cos\theta(x-z)$$

On remarque que cette somme dépend seulement de la longueur des côtés des carrés et de l'angle de rotation du carré intérieur. Elle est donc indépendante de la position du carré $PQRS$ à l'intérieur du carré $ABCD$.
On peut donc répéter cette démarche de manière à obtenir la même expression pour $m+s$.
Donc $n+r=m+s$. On nomme cette équation $(**)$.

On soustrait $(*)-(**)$, membre par membre, pour obtenir $a+c=b+d$.
On tient compte de tous ces résultats pour obtenir :

$$\begin{aligned}&(|ABQP|+|CDSR|)-(|BCRQ|+|APSD|)\\&\quad=\ (a+e+s+c+g+m)-(b+f+r+d+h+n)\\&\quad=\ ((a+c)-(b+d))+((m+s)-(n+r))+((e+g)-(f+h))\\&\quad=\ 0+0+0\end{aligned}$$

car $a+c=b+d$ et $n+r=m+s$ et $e=f=g=h$.
Donc $|ABQP|+|CDSR|=|BCRQ|+|APSD|$, ce qu'il fallait démontrer.

10. Dans ce qui suit, on utilisera *partition* au lieu de l'expression *partition multiplicative*. De plus, les nombres qui paraissent dans une partition seront appelés les *parties* de la partition.

   (a) On détermine le nombre de partitions de 64 en considérant le nombre de parties dans les diverses partitions. On remarque que 64 est une puissance de 2. Donc, tout diviseur de 64 est aussi une puissance de 2. Puisque l'ordre des facteurs n'importe pas, on on écrit les parties en ordre croissant de manière à déterminer les parties plus facilement.

      i. Une partie. Il y a une possibilité, soit 64.

      ii. Deux parties. Il y a trois possibilités, soit 2×32, 4×16 et 8×8.

      iii. Trois parties. On considère d'abord les plus petites premières et deuxièmes parties. On fixe la première partie, tout en ajustant les deuxième et troisième parties. On augmente ensuite la première partie pour recommencer.
      On obtient $2 \times 2 \times 16$, $2 \times 4 \times 8$ et $4 \times 4 \times 4$.

      iv. Quatre parties. Une telle partition doit inclure au moins deux facteurs 2 ; autrement, il faudrait au moins trois parties avec un facteur supérieur ou égal à 4, ce qui serait trop grand. Avec deux facteurs 2, les deux autres parties ont un produit de 16.
      On obtient $2 \times 2 \times 2 \times 8$ et $2 \times 2 \times 4 \times 4$.

      v. Cinq parties. Une telle partition doit inclure au moins trois facteurs 2 ; autrement, il faudrait au moins trois parties avec un facteur supérieur ou égal à 4, ce qui serait trop grand. Avec trois facteurs 2, les deux autres parties ont un produit de 8.
      On obtient $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 4$.

      vi. Six parties. Puisque $64 = 2^6$, il y a une seule possibilité, soit $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

   Donc $P(64) = 1 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1$, ou $P(64) = 11$.

   (b) On remarque que $1000 = 10^3 = (2 \cdot 5)^3 = 2^3 5^3$.
   On détermine la valeur de $P(p^3 q^3)$, p et q étant deux nombres premiers distincts. On verra que cette valeur ne dépend pas de p, ni de q. Cette valeur sera donc la valeur de $P(1000)$, puisque la factorisation première de 1000 est de cette forme.

   Soit $n = p^3 q^3$, p et q étant deux nombres premiers distincts.
   L'entier n admet trois facteurs premiers p.
   Dans une partition, ces facteurs peuvent paraitre ensemble en formant une partie (sous la forme p^3), ils peuvent paraitre en formant deux parties distinctes (sous les formes p et p^2), ou ils peuvent pararaitre en formant trois parties (sous les formes p, p et p). Ce sont les seules façons de séparer les trois facteurs p.
   De même, n admet trois facteurs premiers q et ces trois facteurs peuvent paraitre de trois façons semblables aux précédentes.
   On détermine $P(p^3 q^3)$ en considérant le nombre de parties divisibles par p et le nombre de parties divisibles par q et en comptant le nombre de partitions dans chaque cas. En d'autres mots, on remplit le tableau suivant :

Nombre de parties divisibles par p

Nombre de parties divisibles par q		1	2	3
	1			
	2			
	3			

   On remarque que le tableau est symétrique, puis que l'on peut changer les facteurs p et q l'un pour l'autre.

On considère divers cas à partir de la diagonale descendante (de gauche à droite) et les parties du tableau en dessous de cette diagonale.

1er cas : Une partie est divisible par p, l'autre partie est divisible par q

La partition doit être p^3q^3 (c.-à-d. le nombre n lui-même) ou $p^3 \times q^3$.
Il y a donc deux partitions dans ce cas.

2e cas : Une partie est divisible par p, deux parties sont divisibles par q

Les trois facteurs p paraissent ensemble sous la forme p^3. Les trois facteurs q paraissent sous les formes q et q^2.
Le facteur p^3 peut paraitre ou non dans une des parties divisibles par q.
On obtient les partitions $p^3 \times q \times q^2$, $p^3q \times q^2$ et $q \times p^3q^2$.
Il y a trois partitions dans ce cas. De même, il y a trois partitions lorsqu'une partie est divisible par q et deux parties sont divisibles par p.

3e cas : Une partie est divisible par p, trois parties sont divisibles par q

Les trois facteurs p paraissent ensemble sous la forme p^3. Les trois facteurs q paraissent sous les formes q, q et q.
Le facteur p^3 peut paraitre ou non dans une des parties divisibles par q.
On obtient les partitions $p^3 \times q \times q \times q$ et $p^3q \times q \times q$.
(On remarque que l'on peut changer l'un pour l'autre les trois diviseurs q et il suffit donc de placer p^3 avec l'un d'entre eux.)
Il y a deux partitions dans ce cas. De même, il y a deux partitions lorsqu'une partie est divisible par q et trois parties sont divisibles par p.

4e cas : Deux parties sont divisibles par p, deux parties sont divisibles par q

Les trois facteurs p peuvent paraitre sous les formes p et p^2. Les trois facteurs q paraissent sous les formes q et q^2.
Les facteurs p et p^2 peuvent paraître ou non dans une des parties divisibles par q.
S'il n'y a aucune partie qui est un multiple de p et de q, il y a une seule partition, soit $p \times p^2 \times q \times q^2$.
S'il y a une partie qui est un multiple de p et de q, on a deux choix quant à la puissance de p et deux choix quant à la puissance de q. (Il n'y a aucun choix par rapport aux autres parties.) Il y a donc 2×2 partitions, c'est-à-dire 4 partitions :

$$p^2q^2 \times p \times q \qquad pq^2 \times p^2 \times q \qquad p^2q \times p \times q^2 \qquad pq \times p^2 \times q^2$$

S'il y a deux parties qui sont des multiples de p et de q, il y a deux choix par rapport à la puissance de p dans la partie qui contient q. Il y a donc deux partitions, soit $pq \times p^2q^2$ et $p^2q \times pq^2$.
Il y a sept partitions dans ce cas.

5e cas : Deux parties sont divisibles par p, trois parties sont divisibles par q

Les trois facteurs p paraissent sous les formes p et p^2. Les trois facteurs q paraissent sous les formes q, q et q.
Les facteurs p et p^2 peuvent paraitre ou non dans une des parties divisibles par q.
S'il n'y a aucune partie qui est un multiple de p et de q, il y a une seule partition, soit $p \times p^2 \times q \times q \times q$.
S'il y a une partie qui est un multiple de p et de q, on a deux choix quant à la puissance de p qui paraitra dans cette partie (puisque les puissances de q sont identiques).
Il y a donc deux telles partitions, soit $p^2q \times p \times q \times q$ et $pq \times p^2 \times q \times q$.
S'il y a deux parties qui sont des multiples de p et de q, il y a une partition, soit $pq \times p^2q \times q$, puisque les puissances de q sont identiques .
Il y a quatre partitions dans ce cas. De même, il y a quatre partitions lorsque deux parties

sont divisibles par q et trois parties sont divisibles par p.

6[e] cas : Trois parties sont divisibles par p, trois parties sont divisibles par q

Les trois facteurs p paraissent sous les formes p, p et p. Les trois facteurs q paraissent sous les formes q, q et q.

Il peut y avoir 0, 1, 2 ou 3 parties de la partition qui sont des multiples de p et de q. Puisque les puissances de p et de q sont identiques, cela détermine les partions. Les partitions sont :

$$p \times p \times p \times q \times q \times q \qquad p \times p \times pq \times q \times q \qquad p \times pq \times pq \times q \qquad pq \times pq \times pq$$

Il y a quatre partitions dans ce cas.

On remplit le tableau :

Nombre de parties divisibles par q \ Nombre de parties divisibles par p	1	2	3
1	2	3	2
2	3	7	4
3	2	4	4

On additionne les nombres du tableau pour obtenir $P(p^3q^3) = 31$.
Donc $P(1000) = 31$.

(c) Comme dans la partie (b), la valeur de $P(n)$ dépend seulement de la structure de la factorisation première de n et non pas des nombres premiers dans la factorisation première.
Donc $P(4 \times 5^m) = P(2^2 \times 5^m) = P(p^2q^m)$, p et q étant n'importe quels nombres premiers distincts.
Donc $P(4 \times 5^m) = P(p^2q^m) = P(5^2 \times 2^m) = P(25 \times 2^m)$.
On compte le nombre de partitions multiplicatives de $N = 5^2 \times 2^m$ en considérant la position et les nombres de facteurs 2 et 5 dans les partitions.
Puisque N admet deux facteurs 5, ces facteurs peuvent paraitre dans une même partie ou dans deux parties distinctes.
On remarque que chaque facteur de N est un produit de la forme 5^j2^k, j et k étant des entiers tels que $0 \leq j \leq 2$ et $0 \leq k \leq m$.

On compte d'abord le nombre de partitions dans lesquelles les deux 5 paraissent dans la même partie.
On considère une telle partition.
Dans cette partition, la partie qui contient les deux 5 sera de la forme 5^22^k, k étant un entier tels que $0 \leq k \leq m$.
La partition sera donc de la forme $5^22^k \times \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ étant une partition de 2^{m-k} (c.-à-d. des autres facteurs de N).
Puisque l'ordre des parties n'importe pas, il y a $P(2^{m-k})$ telles partitions $\mathcal{P}$. Il s'agit donc du nombre de partitions de N de cette forme.
Puisque k varie de 0 à m, alors le nombre de partitions dans lesquelles les deux 5 paraissent dans la même partie est égal à :

$$P(2^m) + P(2^{m-1}) + \cdots + P(2^1) + P(2^0)$$

On compte ensuite le nombre de partitions dans lesquelles les deux 5 paraissent dans des parties distinctes.
On considère une telle partition.

Dans cette partition, les deux parties qui contiennent un 5 seront de la forme 5×2^a et 5×2^b, a et b étant des entiers tels que $0 \leq a, b \leq m$ et $a + b \leq m$.
Puisque l'ordre des parties n'importe pas, on peut restreindre davantage les valeurs de a et de b en exigeant que $0 \leq a \leq b \leq m$ et $a+b \leq m$ pour éviter de compter des partitions deux fois.
Cette partition sera donc de la forme $(5 \times 2^a) \times (5 \times 2^b) \times \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ étant une partition de 2^{m-a-b} (c.-à-d. des autres facteurs de N).
Puisque l'ordre des parties n'importe pas, il y a $P(2^{m-a-b})$ telles partitions $\mathcal{P}$, ce qui est donc égal au nombre de partitions de N de cette forme.

Pour déterminer le nombre total de partitions, dans ce cas, il faut additionner les valeurs de $P(2^{m-a-b})$ pour tous les couples possibles (a, b) tels que $0 \leq a \leq b \leq m$ et $a + b \leq m$.
Pour ce faire, on considère les valeurs possibles de s, où $s = a+b$, et on compte le nombre de couples (a, b) qui correspondent à cette somme.
Si $s = a + b = 0$, il y a un couple (a, b), soit $(0, 0)$.
Si $s = a + b = 1$, il y a un couple (a, b), soit $(0, 1)$.
Si $s = a + b = 2$, il y a deux couples (a, b), soit $(0, 2)$ et $(1, 1)$.
De façon générale, si s est pair, alors $\frac{1}{2}s$ est un entier et il y a alors $(\frac{1}{2}s + 1)$ couples (a, b), soit :

$$(0, s), (1, s-1), (2, s-2), \ldots, (\tfrac{1}{2}s - 1, \tfrac{1}{2}s + 1), (\tfrac{1}{2}s, \tfrac{1}{2}s)$$

Toute grande valeur de a donnerait une valeur de b inférieure à celle de a.
De façon générale, si s est impair, alors $\frac{1}{2}(s-1)$ est un entier et il y a alors $(\frac{1}{2}(s-1)+1)$ couples, ou $\frac{1}{2}(s + 1)$ couples (a, b), soit :

$$(0, s), (1, s-1), (2, s-2), \ldots, (\tfrac{s-3}{2}, \tfrac{s+3}{2}), (\tfrac{s-1}{2}, \tfrac{s+1}{2})$$

Toute grande valeur de a donnerait une valeur de b inférieure à celle de a.
Pour résumer, si $s = a + b$ est pair, il y a $\frac{1}{2}s + 1$ couples (a, b) et si $s = a + b$ est impair, il y a $\frac{1}{2}(s + 1)$ couples (a, b).
Donc, à mesure que s augmente, à partir de 0, les nombres de couples (a, b) forment la suite $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$
Le terme de cette suite qui correspond à la valeur de $a + b$ donne le nombre de fois que $P(2^{m-a-b})$ doit être inclu dans le compte du nombre total de partitions dans ce cas.
En d'autres mots, si $a+b = 0$, il y a $1 \times P(2^m)$ partitions ; si $a+b = 1$, il y a $1 \times P(2^{m-1})$ partitions ; si $a + b = 2$, il y a $2 \times P(2^{m-2})$ partitions ; et ainsi de suite.
On peut récrire cela de façon plus compacte en disant que pour une valeur donnée de s, le nombre de couples (a, b) est égal à $\left\lfloor \dfrac{s+2}{2} \right\rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ étant le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x). Le nombre de partitions est donc égal à $\left\lfloor \dfrac{s+2}{2} \right\rfloor \times P(2^{m-s})$.
Dans ce cas, le nombre total de partitions de N est égal à :

$$1 \times P(2^m) + 1 \times P(2^{m-1}) + 2 \times P(2^{m-2}) + 2 \times P(2^{m-3}) + \cdots + \left\lfloor \frac{s+2}{2} \right\rfloor \times P(2^{m-s}) + \cdots$$

$$+ \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \times P(2^1) + \left\lfloor \frac{m+2}{2} \right\rfloor \times P(2^0)$$

On considère maintenant les deux cas, tout en additionnant les expressions correspondantes pour les nombres de partitions. Le nombre total de partitions est donc :

$$2\times P(2^m)+2\times P(2^{m-1})+3\times P(2^{m-2})+3\times P(2^{m-3})+\cdots+\left(1+\left\lfloor\frac{s+2}{2}\right\rfloor\right)\times P(2^{m-s})+\cdots$$
$$+\left(1+\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor\right)\times P(2^1)+\left(1+\left\lfloor\frac{m+2}{2}\right\rfloor\right)\times P(2^0)$$

La suite d'entiers demandée est donc :

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= 2 \\ a_2 &= 3 \\ a_3 &= 3 \\ &\vdots \\ a_s &= 1+\left\lfloor\frac{s+2}{2}\right\rfloor \\ &\vdots \end{aligned}$$

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2012

le mercredi 11 avril 2012

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 12 avril 2012

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Jean achète 10 sacs contenant chacun 20 pommes, pour un total de 10×20 pommes, ou 200 pommes. Il mange 8 pommes par jour. Puisque $200 \div 8 = 25$, Jean met 25 jours pour manger les 10 sacs de pommes.

   (b) On a :

$$\begin{aligned}
&\sin(0^\circ) + \sin(60^\circ) + \sin(120^\circ) + \sin(180^\circ) + \sin(240^\circ) + \sin(300^\circ) + \sin(360^\circ) \\
&\quad = 0 + \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} + 0 + (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}) + (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}) + 0 \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

   On peut aussi remarquer que $\sin(60^\circ) = -\sin(300^\circ)$, $\sin(120^\circ) = -\sin(240^\circ)$ et $\sin(0^\circ) = \sin(180^\circ) = \sin(360^\circ) = 0$, ce qui donne une somme de 0.

   (c) Les entiers ont une somme de 420 et une moyenne de 60. Puisque $420 \div 60 = 7$, l'ensemble contient 7 entiers. Or, un des nombres est 120. Les 6 autres entiers ont donc une somme de $420 - 120$, ou 300. Ces 6 nombres ont une moyenne de $300 \div 6$, ou 50.

2. (a) On a $ax + ay = 4$, ou $a(x + y) = 4$.
   Puisque $x + y = 12$, la dernière équation devient $12a = 4$, d'où $a = \frac{4}{12}$, ou $a = \frac{1}{3}$.

   (b) Puisque les droites sont parallèles, elles ont la même pente.
   On récrit les équations sous la forme $y = mx + b$.
   L'équation $4x + 6y = 5$ devient $6y = -4x + 5$, ou $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$.
   L'équation $6x + ky = 3$ devient $ky = -6x + 3$, ou $y = -\frac{6}{k}x + \frac{3}{k}$ si $k \neq 0$. Or, puisque la première droite n'est pas verticale, la seconde ne l'est pas et on a donc $k \neq 0$.
   Donc $-\frac{2}{3} = -\frac{6}{k}$, d'où $\frac{k}{6} = \frac{3}{2}$, ou $k = 6 \times \frac{3}{2}$, ou $k = 9$.

   (c) On additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $x + x^2 = 2$, ou $x^2 + x - 2 = 0$. On factorise pour obtenir $(x + 2)(x - 1) = 0$, d'où $x = -2$ ou $x = 1$.
   Or, on peut écrire la première équation sous forme $y = -x$. Donc si $x = -2$, on a $y = 2$ et si $x = 1$, on a $y = -1$.
   Les solutions sont $(-2, 2)$ et $(1, -1)$.
   (On peut vérifier que ces couples satisfont aux deux équations.)

3. (a) Puisque le sel compte pour 25 % de la masse de la solution et que la solution a une masse de 200 g, alors le sel compte pour $\frac{1}{4}$ de la masse, soit 50 g. L'eau compte pour le reste de la solution, soit 150 g.
   Lorsqu'on ajoute de l'eau, la masse du sel ne change pas. On veut donc que les 50 g de sel comptent pour 10 % (ou $\frac{1}{10}$) de la masse de la solution finale.
   La solution finale aura donc une masse de 10×50 g, ou 500 g.
   L'eau qu'il faut ajouter a donc une masse de $(500 - 200)$ g, ou 300 g.

   (b) La formule correcte est $F = \frac{9}{5}C + 32$.
   D'après les renseignements donnés, Gaby utilise la formule $f = 2C + 30$.
   On détermine une formule pour l'erreur en fonction de C en déterminant d'abord les cas où $f < F$. Cette inégalité est équivalente à $2C + 30 < \frac{9}{5}C + 32$, qui est équivalente à $\frac{1}{5}C < 2$, qui est équivalente à $C < 10$. On a donc $f < F$ lorsque $C < 10$.
   Donc lorsque $-20 \leq C < 10$, l'erreur est égale à : $F - f = (\frac{9}{5}C + 32) - (2C + 30) = 2 - \frac{1}{5}C$
   Lorsque $10 \leq C \leq 35$, l'erreur est égale à : $f - F = (2C + 30) - (\frac{9}{5}C + 32) = \frac{1}{5}C - 2$

   Dans le premier intervalle, $-20 \leq C < 10$, l'erreur r est égale à $2 - \frac{1}{5}C$. Or, l'équation $r = 2 - \frac{1}{5}C$ représente une droite de pente négative. L'erreur r augmente donc lorsque C

diminue. Dans cet intervalle, la valeur maximale de r est donc atteinte lorsque la valeur de C est la plus petite, soit lorsque $C = -20$. Dans ce cas, l'erreur maximale est égale à $r = 2 - \frac{1}{5}(-20)$, ou $2 + 4$, ou 6.
Dans le deuxième intervalle, $10 \leq C \leq 35$, l'erreur est égale à $\frac{1}{5}C - 2$. Or, l'équation $r = \frac{1}{5}C - 2$ représente une droite de pente positive. L'erreur r augmente donc lorsque C augmente. Dans cet intervalle, la valeur maximale de r est donc atteinte lorsque la valeur de C est la plus grande, soit lorsque $C = 35$. Dans ce cas, l'erreur maximale est égale à $\frac{1}{5}(35) - 2$, ou $7 - 2$, ou 5.

Dans l'intervalle complet, $-20 \leq C \leq 35$, la plus grande erreur que Gaby peut obtenir est une erreur de 6.

4. (a) *Solution 1*
La parabole d'équation $y = 2(x-3)(x-5)$ a pour abscisses à l'origine 3 et 5. Par symétrie, l'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = 4$.
Une droite horizontale qui coupe la parabole le fait à des points équidistants de l'axe de symétrie. Puisque la droite d'équation $y = k$ coupe la parabole aux points A et B et que $AB = 6$, alors A et B doivent tous deux être situés à 3 unités de l'axe de symétrie.
Donc, les abscisses de A et de B doivent être $4 - 3$ et $4 + 3$, c'est-à-dire 1 et 7.
Donc, A et B ont pour coordonnées $(1, k)$ et $(7, k)$.
Puisque ces points sont sur la parabole, leurs coordonnées vérifient l'équation de la parabole. Avec le point $(1, k)$, on a donc $k = 2(1 - 3)(1 - 5)$, d'où $k = 16$.
(On aurait obtenu la même valeur de k en utilisant le point $(7, k)$.)

Solution 2
Soit x_A et x_B les abscisses respectives de A et de B. On peut supposer que A est situé à la gauche de B, c'est-à-dire que $x_A < x_B$. Puisque le segment AB est horizontal et que $AB = 6$, alors $x_B - x_A = 6$.
Puisque A et B sont sur la droite d'équation $y = k$, leurs coordonnées respectives sont (x_A, k) et (x_B, k). Puisque ces points sont sur la parabole d'équation $y = 2(x - 3)(x - 5)$, on peut déterminer x_A et x_B en posant $y = k$ dans cette équation. L'équation devient alors $k = 2(x - 3)(x - 5)$, ou $k = 2(x^2 - 8x + 15)$, ou $2x^2 - 16x + (30 - k) = 0$.
On utilise la formule pour résoudre l'équation du second degré :

$$x_A, x_B = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(2)(30 - k)}}{2(2)}$$

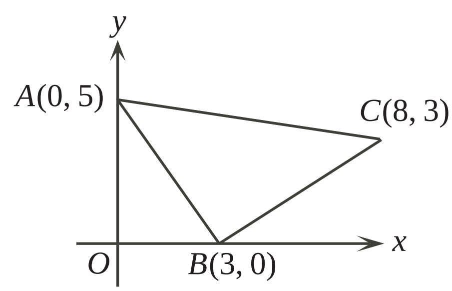
Donc $x_A = \dfrac{16 - \sqrt{16^2 - 4(2)(30 - k)}}{2(2)}$ et $x_B = \dfrac{16 + \sqrt{16^2 - 4(2)(30 - k)}}{2(2)}$.
Puisque $x_B - x_A = 6$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{16 + \sqrt{16^2 - 4(2)(30 - k)}}{2(2)} - \frac{16 - \sqrt{16^2 - 4(2)(30 - k)}}{2(2)} &= 6 \\
\frac{2\sqrt{16^2 - 4(2)(30 - k)}}{2(2)} &= 6 \\
\sqrt{256 - (240 - 8k)} &= 12 \\
\sqrt{16 + 8k} &= 12 \\
16 + 8k &= 144 \\
8k &= 128 \\
k &= 16
\end{aligned}$$

Donc $k = 16$.
On peut vérifier que la droite d'équation $y = 16$ coupe la parabole d'équation $y = 2(x-3)(x-5)$ aux points $(1, 16)$ et $(7, 16)$ qui sont distants l'un de l'autre de 6 unités.

(b) Soit $n = (3a + 6a + 9a + 12a + 15a) + (6b + 12b + 18b + 24b + 30b)$.
On simplifie l'expression pour obtenir $n = 45a + 90b$.
On factorise le membre de droite pour obtenir $n = 45(a + 2b)$, ou $n = 3^2 5^1(a + 2b)$.
Si $a + 2b = 5$, on obtient alors $n = 3^2 5^2$, ou $n = (3 \times 5)^2$, ce qui est un carré parfait.
On trouve par tâtonnements deux couples (a, b) d'entiers strictement positifs qui vérifient $a + 2b = 5$, par exemple $(a, b) = (3, 1)$ et $(a, b) = (1, 2)$.
Une autre valeur de $a + 2b$ pour laquelle n est un carré parfait est $a + 2b = 20$, puisqu'on a alors : $n = 3^2 5^1 20 = 3^2 5^1 2^2 5^1 = 3^2 2^2 5^2 = (3 \times 2 \times 5)^2$
On trouve par tâtonnements un couple (a, b) qui vérifie $a + 2b = 20$, par exemple $(18, 1)$.
Donc, les couples $(3, 1)$, $(1 ,2)$ et $(18, 1)$ vérifient la condition du problème.
(Il y a un nombre infini d'autres tels couples.)

5. (a) *Solution 1*
On calcule d'abord la longueur des côtés du triangle ABC :



$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(0-3)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{34} \\ BC &= \sqrt{(3-8)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{34} \\ AC &= \sqrt{(0-8)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{68} \end{aligned}$$

Puisque $AB = BC$ et $AC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}BC$, le triangle ABC est un triangle isocèle rectangle en B.
(Il est semblable au triangle remarquable 1-1-$\sqrt{2}$.)
Donc $\angle ACB = 45°$.

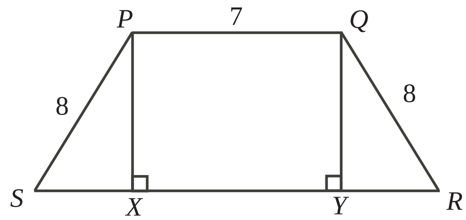
Solution 2
Comme dans la solution 1, on a $AB = BC = \sqrt{34}$.
Le segment AB a pour pente $\frac{5-0}{0-3}$, ou $-\frac{5}{3}$. Le segment BC a pour pente $\frac{0-3}{3-8}$, ou $\frac{3}{5}$.
Puisque ces pentes ont un produit de -1, alors AB et BC sont perpendiculaires.
Le triangle ABC est donc rectangle en B.
Puisque $AB = BC$, ABC est un triangle rectangle isocèle. Donc $\angle ACB = 45°$.

Solution 3
Comme dans la solution 1, on a $AB = BC = \sqrt{34}$ et $AC = \sqrt{68}$.
On utilise la loi du cosinus :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2(AC)(BC)\cos(\angle ACB) \\ 34 &= 68 + 34 - 2(\sqrt{68})(\sqrt{34})\cos(\angle ACB) \\ 0 &= 68 - 2(\sqrt{2}\sqrt{34})(\sqrt{34})\cos(\angle ACB) \\ 0 &= 68 - 68\sqrt{2}\cos(\angle ACB) \\ 68\sqrt{2}\cos(\angle ACB) &= 68 \\ \cos(\angle ACB) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Puisque $\cos(\angle ACB) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et que $0° < \angle ACB < 180°$, alors $\angle ACB = 45°$.

(b) Aux points P et Q, on abaisse des perpendiculaires PX et QY au côté SR.



Puisque PQ est parallèle à SR ($PQRS$ étant un trapèze) et que PX et QY sont perpendiculaires à SR, alors $PQYX$ est un rectangle.
Donc $XY = PQ = 7$ et $PX = QY$.
Puisque les triangles PXS et QYR sont rectangles et que $PS = QR$ et $PX = QY$, ces triangles sont isométriques et on a donc $SX = YR$.
Puisque $XY = 7$ et $SR = 15$, alors $SX + 7 + YR = 15$, d'où $2 \times SX = 8$, ou $SX = 4$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PXS, on a :

$$PX^2 = PS^2 - SX^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$$

Or, PR est l'hypoténuse du triangle rectangle PXR.
Puisque $PR > 0$, alors d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$PR = \sqrt{PX^2 + XR^2} = \sqrt{48 + (7+4)^2} = \sqrt{48 + 11^2} = \sqrt{48 + 121} = \sqrt{169} = 13$$

Donc $PR = 13$.

6. (a) *Solution 1*
Il y a deux possibilités : ou bien chaque joueur gagne 3 parties, ou bien un joueur gagne plus de parties que l'autre.
Or, la probabilité pour que chacun gagne 3 des 6 parties est de $\frac{5}{16}$. Donc, la probabilité pour qu'un joueur gagne plus de parties que l'autre est de $1 - \frac{5}{16}$, ou $\frac{11}{16}$.
Puisque Blaise et Pierre sont de force égale et que chacun peut aussi bien gagner une partie que l'autre, chacun peut aussi bien gagner plus de parties que l'autre.
Donc, la probabilité pour que Blaise gagne plus de parties que Pierre est de $\frac{1}{2} \times \frac{11}{16}$, ou $\frac{11}{32}$.

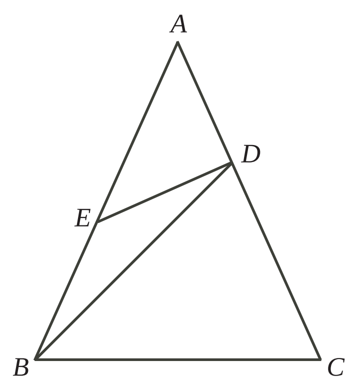
Solution 2
On considère le résultat de 6 parties comme une suite de 6 lettres, tous des B ou des P, chaque B représentant une victoire de Blaise et chaque P représentant une victoire de Pierre. Il y a 2^6 telles suites, c'est-à-dire 64 suites possibles. Puisque Blaise et Pierre sont de force égale, les 64 suites sont équiprobables.
Puisque les garçons jouent 6 parties, Blaise gagne plus de parties que Pierre s'il gagne 4, 5 ou 6 parties.
Il y a exactement 1 des 64 résultats qui représente 6 victoires pour Blaise, soit la suite BBBBBB.
Il y a 6 résultats qui représentent 5 victoires de Blaise (et une victoire de Pierre). Ce sont les suites PBBBBB, BPBBBB, BBPBBB, BBBPBB, BBBBPB, BBBBBP.
Le nombre de résultats qui représentent 4 victoires de Blaise (et deux victoires de Pierre) est égal au nombre de façons de placer 4 B et 2 P en ligne, soit $\binom{6}{2}$, ou 15.
En tout, il y a $(1+6+15)$, ou 22 résultats favorables pour que Blaise gagne plus de parties que Pierre. La probabilité pour que Blaise gagne plus de parties que Pierre est donc de $\frac{22}{64}$, ou $\frac{11}{32}$.

(b) On manipule l'équation en utilisant les règles d'algèbre et des exposants :

$$\begin{aligned}
3^{x+2} + 2^{x+2} + 2^x &= 2^{x+5} + 3^x \\
3^x 3^2 + 2^x 2^2 + 2^x &= 2^x 2^5 + 3^x \\
9(3^x) + 4(2^x) + 2^x &= 32(2^x) + 3^x \\
8(3^x) &= 27(2^x) \\
\frac{3^x}{2^x} &= \frac{27}{8} \\
\left(\frac{3}{2}\right)^x &= \left(\frac{3}{2}\right)^3
\end{aligned}$$

Puisque les bases sont égales et que les deux membres de l'équation sont égaux, il faut que les exposants soient égaux. Donc $x = 3$.

7. (a) Puisque $AB = AC$, le triangle ABC est isocèle et on a donc $\angle ABC = \angle ACB$. Soit $\angle BAC = \theta$.



Les mesures des angles du triangle ABC ont une somme de $180°$.
Donc $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180°$.

Puisque le triangle est isocèle, $2\angle ACB + \theta = 180°$.
Donc $\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180° - \theta)$, ou $\angle ABC = \angle ACB = 90° - \frac{1}{2}\theta$.

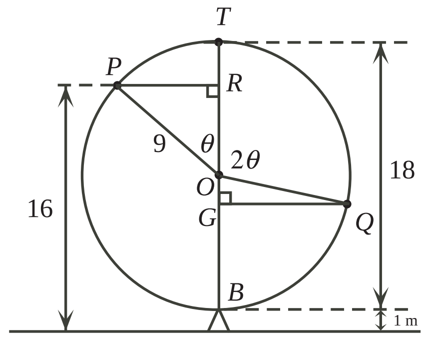
Or, le triangle BCD aussi est isocèle, avec $BC = BD$. Donc $\angle CDB = \angle DCB = 90° - \frac{1}{2}\theta$.

Puisque les mesures des angles du triangle BCD ont une somme de $180°$, alors :

$$\angle CBD = 180° - \angle DCB - \angle CDB = 180° - (90° - \tfrac{1}{2}\theta) - (90° - \tfrac{1}{2}\theta) = \theta$$

Or $\angle EBD = \angle ABC - \angle DBC$. Donc $\angle EBD = (90° - \frac{1}{2}\theta) - \theta$, ou $\angle EBD = 90° - \frac{3}{2}\theta$.
Puisque $BE = ED$, alors $\angle EDB = \angle EBD = 90° - \frac{3}{2}\theta$.
Puisque $\angle BED = 180° - \angle EBD - \angle EDB$, alors $\angle BED = 180° - (90° - \frac{3}{2}\theta) - (90° - \frac{3}{2}\theta)$, ou $\angle BED = 3\theta$.

(b) Soit O le centre de la grande roue et B le point le plus bas sur la roue.
Puisque la roue a un rayon de 9 m (la moitié du diamètre de 18 m) et que B est situé à 1 m au-dessus du sol, O est à 10 m au-dessus du sol.
Soit $\angle TOP = \theta$.

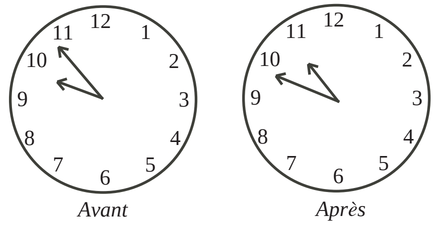


Puisque la grande roue tourne à une vitesse constante, l'angle de rotation effectué en 8 secondes est 2 fois l'angle de rotation effectué en 4 secondes. Donc $\angle TOQ = 2\theta$.
Au point P, on abaisse une perpendiculaire PR à TB et au point Q, on abaisse une perpendiculaire QG à TB.
Puisque P est à 16 m au-dessus du sol et que O est à 10 m au-dessus du sol, alors $OR = 6$ m.
Puisque OP est un rayon du cercle, alors $OP = 9$ m.
Dans le triangle rectangle ORP, on a : $\cos\theta = \dfrac{OR}{OP} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$
Puisque $\cos\theta = \frac{2}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(45°)$, alors $\theta > 45°$.
Donc $2\theta > 90°$, ce qui indique que le point Q est plus bas que O.
Puisque $\angle TOQ = 2\theta$, alors $\angle QOG = 180° - 2\theta$.
La hauteur de Karl au-dessus du sol, au point Q, est de 1 m plus la longueur de BG.
Or $BG = OB - OG$ et $OB = 9$ m.
Dans le triangle rectangle QOG, on a :

$$OG = OQ\cos(\angle QOG) = 9\cos(180° - 2\theta) = -9\cos(2\theta) = -9(2\cos^2\theta - 1)$$

Puisque $\cos\theta = \frac{2}{3}$, alors $OG = -9(2(\frac{2}{3})^2 - 1)$ m, ou $OG = -9(\frac{8}{9} - 1)$ m, ou $OG = 1$ m.
Donc $BG = (9-1)$ m, ou $BG = 8$ m. Donc, Q est situé à $(1+8)$ m, ou 9 m au-dessus du sol.

8. (a) *Solution 1*
Chacune des deux aiguilles tourne à une vitesse constante. Puisque la petite aiguille accomplit $\frac{1}{12}$ d'une rotation en 1 heure et que la grande aiguille accomplit 1 rotation en 1 heure, alors la grande aiguille tourne 12 fois plus vite que la petite aiguille.



On suppose que la petite aiguille balaie un angle de $x°$ entre les situations *Avant* et *Après*. Pendant ce temps, la grande aiguille balaie un angle de $(360-x)°$, puisque ces deux angles ont une somme de 360°.
Puisque la grande aiguille tourne 12 fois plus vite que la petite aiguille, alors $360 - x = 12x$.

Donc $13x = 360$, d'où $x = \frac{360}{13}$.
Dans une heure, la petite aiguille balaie un angle de $\frac{1}{12}$ de 360°, ou 30°.
Puisque la petite aiguille a bougé pendant t heure, alors $30t = \frac{360}{13}$. Donc $t = \frac{360}{30(13)}$, ou $t = \frac{12}{13}$.

Solution 2
On suppose que Noémie commence à peindre x heure après 9 h 00 ($0 < x < 1$) et qu'elle cesse de peindre y heure après 10 h 00 ($0 < y < 1$).
Puisqu'elle peint pendant t heure, alors $t = (1 - x) + y$, car elle peint pendant $(1 - x)$ heure jusqu'à 10 h 00, puis pendant y heure jusqu'à ce qu'elle cesse.
Chacune des deux aiguilles tourne à une vitesse constante.
La grande aiguille balaie un angle de 360° en une heure, tandis que la petite aiguille balaie un angle de $\frac{1}{12}$ de 360°, ou 30° en une heure.
Donc, en x heure ($0 < x < 1$), la grande aiguille balaie un angle de $(360x)^\circ$ et la petite aiguille balaie un angle de $(30x)^\circ$.
Dans la figure *Avant*, la grande aiguille est à $(360x)^\circ$ après la position 12 h 00.
Dans la figure *Après*, la petite aiguille est à $(360y)^\circ$ avant la position 12 h 00.
La position 9 h 00 est à $9 \times 30^\circ$, ou 270° après la position 12 h 00 et la position 10 h 00 est à $10 \times 30^\circ$, ou 300° après la position 12 h 00.
Donc dans la figure *Avant*, la petite aiguille est à $270^\circ + (30x)^\circ$ après la position 12 h 00 et dans la figure *Après*, la petite aiguille est à $300^\circ + (30y)^\circ$ après la position 12 h 00.
Puisque les aiguilles ont changé de position l'une pour l'autre, entre la figure *Avant* et la figure *Après*, il y a égalité entre les positions correspondantes. Donc $(360x)^\circ = 300^\circ + (30y)^\circ$ (ou $360x = 300 + 30y$) et $(360y)^\circ = 270^\circ + (30x)^\circ$ (ou $360y = 270 + 30x$).
On divise chaque membre des deux équations par 30 pour obtenir $12x = 10 + y$ et $12y = 9 + x$.
On soustrait la deuxième équation de la première, membre par membre, pour obtenir $12x - 12y = 10 + y - 9 - x$, ou $-1 = 13y - 13x$.
Donc $y - x = -\frac{1}{13}$ et on a donc $t = (1 - x) + y$, ou $t = 1 + y - x$, d'où $t = 1 - \frac{1}{13}$, ou $t = \frac{12}{13}$.

(b) On manipule l'équation donnée, tout en obtenant une suite d'équations équivalentes :

$$\begin{aligned}
\log_{5x+9}(x^2+6x+9) + \log_{x+3}(5x^2+24x+27) &= 4 \\
\frac{\log(x^2+6x+9)}{\log(5x+9)} + \frac{\log(5x^2+24x+27)}{\log(x+3)} &= 4 \qquad \text{(formule pour le changement de base)} \\
\frac{\log((x+3)^2)}{\log(5x+9)} + \frac{\log((5x+9)(x+3))}{\log(x+3)} &= 4 \qquad \text{(on a factorisé)} \\
\frac{2\log(x+3)}{\log(5x+9)} + \frac{\log(5x+9)+\log(x+3)}{\log(x+3)} &= 4 \qquad \text{(lois des logarithmes)} \\
2\left(\frac{\log(x+3)}{\log(5x+9)}\right) + \frac{\log(5x+9)}{\log(x+3)} + \frac{\log(x+3)}{\log(x+3)} &= 4 \qquad \text{(addition de fractions à rebours)}
\end{aligned}$$

On reporte $t = \dfrac{\log(x+3)}{\log(5x+9)}$ dans cette équation pour obtenir :

$$\begin{aligned}
2t + \frac{1}{t} + 1 &= 4 \\
2t^2 + 1 + t &= 4t \\
2t^2 - 3t + 1 &= 0 \\
(2t-1)(t-1) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $t = 1$ ou $t = \frac{1}{2}$.
Si $\dfrac{\log(x+3)}{\log(5x+9)} = 1$, alors $\log(x+3) = \log(5x+9)$. Donc $x+3 = 5x+9$, d'où $4x = -6$, ou $x = -\frac{3}{2}$.
Si $\dfrac{\log(x+3)}{\log(5x+9)} = \dfrac{1}{2}$, alors $2\log(x+3) = \log(5x+9)$. Donc $\log((x+3)^2) = \log(5x+9)$, ou $(x+3)^2 = 5x+9$, ou $x^2+6x+9 = 5x+9$, ou $x^2+x = 0$, ou $x(x+1) = 0$. Donc $x = 0$ ou $x = -1$.
Il y a donc trois valeurs possibles de x, soit 0, -1 et $-\frac{3}{2}$.
On vérifie chacune de ces valeurs dans l'équation donnée :
Si $x = 0$, le membre de gauche de l'équation est égal à $\log_9 9 + \log_3 27$, ou $1+3$, ou 4.
Si $x = -1$, le membre de gauche de l'équation est égal à $\log_4 4 + \log_2 8$, ou $1+3$, ou 4.
Si $x = -\frac{3}{2}$, le membre de gauche de l'équation est égal à $\log_{3/2}(9/4) + \log_{3/2}(9/4)$, ou $2+2$, ou 4.
Les racines de l'équation donnée sont donc 0, -1 et $-\frac{3}{2}$.

9. (a) On suppose qu'il y a r rangées et c colonnes de chaises dans l'auditorium.
Il y a donc rc chaises en tout.
Chaque chaise est soit vide, soit occupée par un garçon, soit occupée par une fille.
Puisqu'il y a 14 garçons assis dans chaque rangée, il y a $14r$ chaises occupées par des garçons.
Puisqu'il y a 10 filles assises dans chaque colonne, il y a $10c$ chaises occupées par des filles.
Puisqu'il y a 3 chaises vides, on peut dire que le nombre de chaises est égal à $14r+10c+3$.
Donc $rc = 14r + 10c + 3$.
On cherche les entiers strictement positifs r et c qui vérifient cette équation. Or, puisqu'il y a 14 garçons dans chaque rangée, il doit y avoir au moins 14 colonnes (d'où $c \geq 14$) et puisqu'il y a 10 filles dans chaque colonne, il doit y avoir au moins 10 rangées (d'où $r \geq 10$).
L'équation devient :

$$\begin{aligned}
rc &= 14r + 10c + 3 \\
rc - 14r &= 10c + 3 \\
r(c-14) &= 10c + 3 \\
r &= \frac{10c+3}{c-14} \\
r &= \frac{10c - 140 + 143}{c-14} \\
r &= \frac{10c-140}{c-14} + \frac{143}{c-14} \\
r &= 10 + \frac{143}{c-14}
\end{aligned}$$

Puisque r est un entier, alors $10 + \dfrac{143}{c-14}$ est un entier. Donc, $\dfrac{143}{c-14}$ doit être un entier.
Donc, $c-14$ est un diviseur de 143. Puisque $c \geq 14$, alors $c - 14 \geq 0$. Donc, $c-14$ est un diviseur positif de 143.
En factorisation première, $143 = 11 \times 13$. Les diviseurs positifs de 143 sont donc 1, 11, 13, 143.

On remplit un tableau avec les valeurs possibles de $c - 14$, de même que les valeurs correspondantes de c, de r (que l'on obtient à l'aide de l'équation $r = 10 + \frac{143}{c-14}$) et de rc :

$c - 14$	c	r	rc
1	15	153	2295
11	25	23	575
13	27	21	567
143	157	11	1727

Donc, les valeurs possibles de rc sont 567, 575, 1727 et 2295. Donc, la plus petite valeur possible pour le nombre de chaises est 567.
(Défi : Créer un arrangement rectangulaire de 27 colonnes et 21 rangées qui répond aux données du problème.)

(b) *Solution 1*
Soit $|PMQN|$ l'aire du quadrilatère $PMQN$, $|\triangle APD|$ l'aire du triangle APD, et ainsi de suite.
On veut démontrer que $|PMQN| = |\triangle APD| + |\triangle BQC|$.
Cela est équivalent à démontrer que

$$|PMQN| + |\triangle DPN| + |\triangle CQN| = |\triangle APD| + |\triangle DPN| + |\triangle BQC| + |\triangle CQN|,$$

ce qui est équivalent à démontrer que

$$|\triangle DMC| = |\triangle DAN| + |\triangle CBN|,$$

car le quadrilatère $PMQN$, le triangle DPN et le triangle CQN forment ensemble le triangle DMC, les triangles APD et DPN forment le triangle DAN et que les triangles BQC et CQN forment le triangle CBN.
Soit x la longueur de DC et tx la longueur de DN, t étant un nombre quelconque tel que $0 < t < 1$.
Or $NC = DC - DN$. Donc $NC = x - tx$, ou $NC = (1 - t)x$.
Soit a la hauteur de A par rapport à DC, b la hauteur de B par rapport à DC et m la hauteur de M par rapport à DC. On a donc la situation suivante :

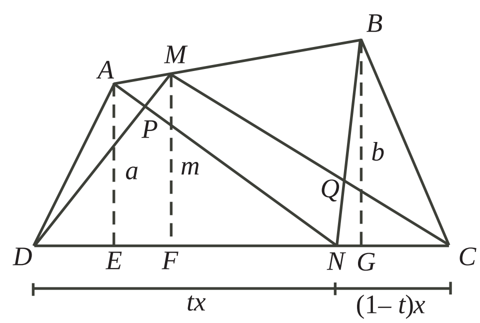


Figure 1

Donc $|\triangle DAN| = \frac{1}{2}(tx)(a)$ et $|\triangle CBN| = \frac{1}{2}((1 - t)x)b$, d'où :

$$|\triangle DAN| + |\triangle CBN| = \tfrac{1}{2}(txa + (1 - t)xb) = \tfrac{1}{2}x(ta + (1 - t)b)$$

De plus, $|\triangle DMC| = \frac{1}{2}xm$.
Pour démontrer que $|\triangle DMC| = |\triangle DAN| + |\triangle CBN|$, il faut démontrer que $\frac{1}{2}xm$ est égal à $\frac{1}{2}x(ta + (1 - t)b)$, ce qui est équivalent à démontrer que $m = ta + (1 - t)b$.

Dans la figure 2, on a tracé un segment horizontal du point A au segment BG. Il coupe MF en R et BG en S.
Puisque MF et BG sont verticaux et que AS est horizontal, AS est perpendiculaire aux deux autres segments.
Puisque $AE = a$, $MF = m$ et $BG = b$, alors $MR = m - a$ et $BS = b - a$.

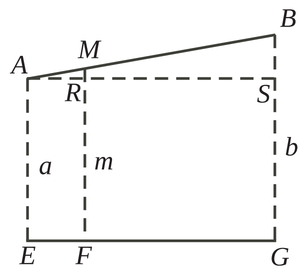
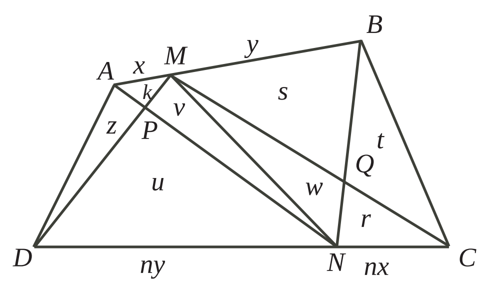


Figure 2

Or, les triangles ARM et ASB sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils partagent l'angle A.
Donc $\dfrac{MR}{BS} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{NC}{DC}$.
Puisque $MR = m - a$ et $BS = b - a$, alors $\dfrac{MR}{BS} = \dfrac{m-a}{b-a}$.
Puisque $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{NC}{DC}$, alors $\dfrac{MR}{BS} = \dfrac{(1-t)x}{x} = 1 - t$.
On compare les deux expressions pour $\dfrac{MR}{BS}$ et on obtient $\dfrac{m-a}{b-a} = (1-t)$, ou $m - a = (b-a)(1-t)$, ou $m = a + b(1-t) + (t-1)a$, ou $m = ta + (1-t)b$, ce qu'il fallait démontrer.

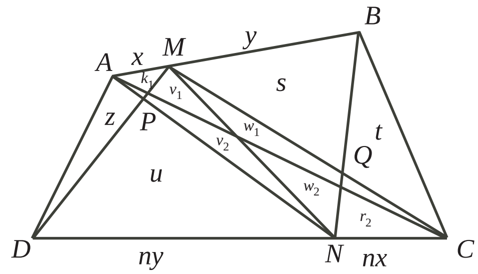
On a donc démontré que $|PMQN| = |\triangle APD| + |\triangle BQC|$.

Solution 2
Soit $AM = x$ et $MB = y$. Donc $AB = x + y$, d'où $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{x}{x+y}$.
Soit $NC = nx$, n étant un nombre réel quelconque.
Puisque $\dfrac{NC}{DC} = \dfrac{AM}{AB}$, alors $\dfrac{nx}{DC} = \dfrac{x}{x+y}$, d'où $DC = n(x+y)$.
Puisque $DN = DC - NC$, alors $DN = n(x+y) - nx$, ou $DN = ny$.
On joint M et N et on nomme les aires comme dans la figure suivante :



On utilise à plusieurs reprises le fait que si deux triangles ont la même hauteur, le rapport de leur aire est égal au rapport de leur base.
Par exemple, les triangles MDN et MNC ont la même hauteur par rapport au segment DC et au sommet commun M. Donc, le rapport de leur aire est égal au rapport de leur base. C'est-à-dire que $\dfrac{w+r}{u+v} = \dfrac{nx}{ny} = \dfrac{x}{y}$. Donc $w + r = \dfrac{x}{y}(u+v)$.

De plus, le rapport de l'aire du triangle NAM à l'aire du triangle NMB est égal au rapport de AM à MB.
On a donc $\dfrac{k+v}{s+w} = \dfrac{x}{y}$, ou $k+v = \dfrac{x}{y}(s+w)$.
On joint ensuite A et C et on renomme les aires des régions divisées par ce segment comme dans la figure suivante :



(Le petit triangle entre les triangles d'aires k_1 et z a pour aire k_2 et le petit triangle entre les triangles d'aires r_2 et t a pour aire r_1.)
On considère les triangles ANC et ADN.
Le rapport de leur aire est égal au rapport de leur base.
Donc $\dfrac{k_2+v_2+w_2+r_2}{z+u} = \dfrac{nx}{ny} = \dfrac{x}{y}$, d'où $k_2+v_2+w_2+r_2 = \dfrac{x}{y}(z+u)$.
On considère les triangles CAM et CMB.
Le rapport de leur aire est égal au rapport de leur base.
Donc $\dfrac{k_1+v_1+w_1+r_1}{s+t} = \dfrac{x}{y}$, d'où $k_1+v_1+w_1+r_1 = \dfrac{x}{y}(s+t)$.
On additionne les équations $k_2+v_2+w_2+r_2 = \dfrac{x}{y}(z+u)$ et $k_1+v_1+w_1+r_1 = \dfrac{x}{y}(s+t)$, membre par membre, pour obtenir :

$$(k_1+k_2)+(v_1+v_2)+(w_1+w_2)+(r_1+r_2) = \frac{x}{y}(s+t+z+u)$$

ou

$$k+v+w+r = \frac{x}{y}(s+t+z+u)$$

Puisque $k+v = \dfrac{x}{y}(s+w)$ et $w+r = \dfrac{x}{y}(u+v)$, alors

$$\frac{x}{y}(s+w) + \frac{x}{y}(u+v) = \frac{x}{y}(s+t+z+u)$$

ou

$$s+w+u+v = s+t+z+u$$

ou

$$w+v = t+z$$

Or, $w+v$ est l'aire du quadrilatère $PMQN$, z est l'aire du triangle APD et t est l'aire du triangle BQC. Donc, l'aire du quadrilatère $PMQN$ est égale à l'aire du triangle APD plus celle du triangle PQC, ce qu'il fallait démontrer.

10. (a) Les suites Eden sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sont :

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 1,2 \quad 1,4 \quad 3,4 \quad 1,2,3 \quad 1,2,5 \quad 1,4,5 \quad 3,4,5 \quad 1,2,3,4 \quad 1,2,3,4,5$$

Il y en a 12.

Voici pourquoi ce sont les seules suites Eden sur l'ensemble donné.

i. Une suite Eden de longueur 1 est formée d'un seul entier impair. Les choix possibles sont 1, 3 et 5.

ii. Une suite Eden de longueur 2 est formée d'un entier impair suivi d'un entier pair plus grand. Puisque 2 et 4 sont les seuls entiers pairs, les seules suites possibles sont 1, 2 et 1, 4 et 3, 4.

iii. Une suite Eden de longueur 3 est formée d'une suite Eden de longueur 2 à laquelle on ajoute un entier impair plus grand. À partir de la suite 1, 2, on peut former 1, 2, 3 et 1, 2, 5. À partir de la suite 1, 4, on peut former 1, 4, 5. À partir de la suite 3, 4, on peut former 3, 4, 5.

iv. Une suite Eden de longueur 4 est formée d'une suite Eden de longueur 3 à laquelle on ajoute un entier pair plus grand. Puisque 2 et 4 sont les seuls entiers pairs, la seule suite possible est 1, 2, 3, 4.

v. Une suite Eden de longueur 5 sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ doit être formée des cinq éléments. Il s'agit donc de la suite 1, 2, 3, 4, 5.

(b) On démontrera que pour tout entier n $(n \geq 3)$, on a $e(n) = e(n-1) + e(n-2) + 1$.
Ainsi en posant $e(18) = m$, on a $e(19) = e(18) + e(17) + 1$, ou $e(19) = m + 4181$ et :

$$e(20) = e(19) + e(18) + 1 = (m + 4181) + m + 1$$

Puisque $e(20) = 17\,710$, alors $17\,710 = 2m + 4182$, ou $2m = 13\,528$, ou $m = 6764$.
Donc $e(18) = 6764$ et $e(19) = 6764 + 4181$, ou $e(19) = 10\,945$.

Il reste à démontrer que pour tout entier n $(n \geq 3)$, on a $e(n) = e(n-1) + e(n-2) + 1$.

Pour simplifier la lecture, on utilise les abréviations suivantes :

i. SE signifie "suite Eden"

ii. SE(m) signifie "suite Eden sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$

iii. SEP et SEI signifient respectivement "suite Eden de longueur paire" et "suite Eden de longueur impaire"

iv. SEP(m) et SEI(m) signifient respectivement "suite Eden de longueur paire sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$" et "suite Eden de longueur impaire sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$"

1re méthode

Étant donné un entier strictement positif n, soit $A(n)$ le nombre de SEP(n) et $B(n)$ le nombre de SEI(n).
Donc pour chaque entier strictement positif n, on a $e(n) = A(n) + B(n)$.
On remarque aussi que pout tout entier positif n $(n \geq 2)$, on a $e(n) \geq e(n-1)$, $A(n) \geq A(n-1)$ et $B(n) \geq B(n-1)$. En effet, chaque SE($n-1$) est aussi une SE(n), car elle vérifie les trois conditions. Il y a donc au moins autant de SE(n) que de SE($n-1$). (On peut utiliser le même argument pour démontrer qu'il y a au moins autant de SEP(n) que de SEP($n-1$) et au moins autant de SEI(n) que de SEI($n-1$).)

On sait que pour tout entier positif k, $2k+1$ est un entier impair et $2k$ est un entier pair.
Pour tout entier strictement positif k, on a :

(i) $A(2k+1) = A(2k)$

(ii) $B(2k) = B(2k-1)$

(iii) $A(2k) = A(2k-1) + B(2k-1)$

(iv) $B(2k+1) = A(2k) + B(2k) + 1$

Voici pourquoi :

(i) Une SEP doit avoir un nombre pair comme dernier élément. Donc, une SEP$(2k+1)$ ne peut contenir le nombre $2k+1$ sans contenir un nombre pair plus grand, ce qu'elle ne peut faire, étant limitée par le nombre $2k+1$.
Donc, le plus grand terme d'une SEP$(2k+1)$ ne peut dépasser $2k$, ce qui fait qu'elle est aussi une ES$(2k)$.
Donc $A(2k+1) \leq A(2k)$.
Or on sait déjà que $A(2k+1) \geq A(2k)$. Donc $A(2k+1) = A(2k)$.

(ii) Une SEI doit avoir un nombre impair comme dernier élément. Donc, une SEI$(2k)$ ne peut contenir le nombre $2k$ sans contenir un nombre impair plus grand, ce qu'elle ne peut faire, étant limitée par le nombre $2k$.
Donc, le plus grand terme d'une SEI$(2k)$ ne peut dépasser $2k-1$, ce qui fait qu'elle est aussi une SEI$(2k-1)$.
Donc $B(2k) \leq B(2k-1)$.
Or on sait déjà que $B(2k) \geq B(2k-1)$. Donc $B(2k) = B(2k-1)$.

(iii) Une SEP$(2k)$ peut comprendre le nombre $2k$ ou pas.
Si elle comprend $2k$, alors en enlevant le nombre $2k$, on obtient une SEI$(2k-1)$. De plus, chaque SEI$(2k-1)$ peut être obtenue de cette façon.
Dans ce cas, le nombre de suites est donc égal à $B(2k-1)$.
Si une telle suite ne comprend pas $2k$, on peut alors la considérer comme une SEP$(2k-1)$. On sait que toute SEP$(2k-1)$ est une SEP$(2k)$.
Dans ce cas, le nombre de suites est donc égal à $A(2k-1)$.
Donc $A(2k) = A(2k-1) + B(2k-1)$.

(iv) Ou bien SEI$(2k+1)$ est une suite d'un seul terme, soit $2k+1$, ou bien elle comprend le nombre $2k+1$ et d'autres termes, ou bien elle ne comprend pas le nombre $2k+1$.
Il y a 1 suite dans ce premier cas.
Comme dans (iii), il y a $A(2k)$ suites dans le deuxième cas et $B(2k)$ suites dans le troisième cas.
Donc $B(2k+1) = 1 + A(2k) + B(2k)$.

On utilise ces propriétés comme suit. Pour tout entier strictement positif k, on a :

$$\begin{aligned} e(2k+1) &= A(2k+1) + B(2k+1) \\ &= A(2k) + (A(2k) + B(2k) + 1) \\ &= (A(2k) + B(2k)) + A(2k) + 1 \\ &= e(2k) + (A(2k-1) + B(2k-1)) + 1 \\ &= e(2k) + e(2k-1) + 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e(2k) &= A(2k) + B(2k) \\ &= (A(2k-1) + B(2k-1)) + B(2k-1) \\ &= e(2k-1) + (A(2k-2) + B(2k-2) + 1) \\ &= e(2k-1) + e(2k-2) + 1 \end{aligned}$$

Donc pour tout entier n ($n \geq 3$), on a $e(n) = e(n-1)+e(n-2)+1$, ce qu'il fallait démontrer.

2e méthode
Soit n un entier, $n \geq 3$. On considère les SE(n).
On peut placer une telle suite dans une des catégories suivantes :

(i) La suite composée du terme 1 (il y a 1 telle suite)

(ii) Les suites qui commencent par le nombre 1 et qui ont plus de 1 terme

(iii) Les suites qui ne commencent pas par le nombre 1

On démontrera que dans la catégorie (ii), il y a $e(n-1)$ suites et que dans la catégorie (iii), il y a $e(n-2)$ suites. On aura ainsi démontré que $e(n) = 1 + e(n-1) + e(n-2)$.

(ii) On considère l'ensemble P des SE(n) qui commencent par 1.
On enlève le terme 1 de chacune de ces suites et on considère l'ensemble Q de suites qui en résultent. On remarque que les ensembles P et Q ont le même nombre de suites. Chaque suite dans Q est formée de nombres de l'ensemble $\{2, 3, \ldots, n\}$, elle est croissante, ses termes en positions impaires sont pairs et ses termes en positions paires sont impairs (puisque chaque terme de la suite correspondante dans P a été poussé d'une position vers la gauche).
Il y a une correspondance biunivoque entre les suites de Q et les SE($n-1$) (l'ensemble des SE($n-1$) sera appelé R) et il y a donc $e(n-1)$ suites dans Q (et donc $e(n-1)$ suites dans P).
On peut démontrer la correspondance biunivoque en soustrayant 1 de chaque terme de chaque suite dans Q, de manière à former un nouvel ensemble S de suites. Chaque suite dans S est distincte, elle est formée de nombres de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, elle est croissante, ses termes en positions paires sont pairs et ses termes en positions impaires sont impairs (puisque chaque terme d'une suite de Q a été diminué de 1). De plus, on peut obtenir chaque suite de R de cette façon (puisque en ajoutant 1 à chaque terme d'une telle SE, on obtient une suite distincte de Q).
Donc, le nombre de suites dans cette catégorie est égal à $e(n-1)$.

(iii) Soit T l'ensemble des SE(n) qui ne commencent pas par 1.
Puisque chacune des suites dans T ne commence pas par 1, chaque nombre de ces suites est supérieur ou égal à 3. Donc, chaque suite dans T est formée de nombres de l'ensemble $\{3, 4, \ldots, n\}$, elle est croissante, ses termes en positions paires sont pairs et ses termes en positions impaires sont impairs.
Il y a une correspondance biunivoque entre les suites de T et les SE($n-2$) (l'ensemble des SE($n-2$) sera appelé U) et il y a donc $e(n-2)$ suites dans U et dans T.
On peut démontrer la correspondance biunivoque en soustrayant 2 de chaque terme de chaque suite dans T, de manière à former un nouvel ensemble V de suites. Chaque suite dans V est distincte, elle est formée de nombres de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n-2\}$, elle est croissante, ses termes en positions paires sont pairs et ses termes en positions impaires sont impairs (puisque chaque terme d'une suite de T a été réduit de 2). De plus, on peut obtenir chaque suite de U de cette façon (puisque en ajoutant 2 à chaque terme d'une telle SE, on obtient une suite distincte de U).
Donc, le nombre de suites dans cette catégorie est égal à $e(n-2)$.

On a donc démontré que $e(n) = 1 + e(n-1) + e(n-2)$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Concours Euclide 2011

le mardi 12 avril 2011

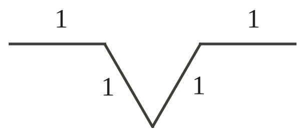
Solutions

1. (a) Puisque $(x+1)+(x+2)+(x+3) = 8+9+10$, alors $3x+6 = 27$, d'où $3x = 21$, ou $x = 7$.

   (b) Puisque $\sqrt{25+\sqrt{x}} = 6$, alors le carré du membre de gauche est égal au carré du membre de droite. Donc $25+\sqrt{x} = 36$, d'où $\sqrt{x} = 11$.
   Puisque $\sqrt{x} = 11$, alors $x = 121$.
   On vérifie : $\sqrt{25+\sqrt{121}} = \sqrt{25+11} = \sqrt{36} = 6$

   (c) Puisque le point $(a, 2)$ est le point d'intersection des droites d'équations $y = 2x - 4$ et $y = x + k$, les coordonnées de ce point doivent vérifier les deux équations.
   D'après la première équation, on a $2 = 2a - 4$, d'où $2a = 6$, ou $a = 3$.
   Les coordonnées $(3, 2)$ vérifient aussi l'équation $y = x + k$. Donc $2 = 3 + k$, d'où $k = -1$.

2. (a) Puisque le carré a des côtés de longueur 3 et qu'on a enlevé de chaque côté un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur 1, alors les deux parties qui restent de chaque côté du carré ont chacune une longueur de 1.
   De plus, les deux côtés de chaque triangle équilatéral ont une longueur de 1, comme l'indique la figure suivante.



   Chacun des 16 segments qui forment la figure a donc une longueur de 1. La figure a donc un périmètre de 16.

   (b) Puisque $DC = DB$, le triangle CDB est isocèle et $\angle DBC = \angle DCB = 15^\circ$.
   Donc $\angle CDB = 180^\circ - \angle DBC - \angle DCB$, d'où $\angle CDB = 150^\circ$.
   Les trois angles au point D forment un angle plein. Donc :

$$\angle ADC = 360^\circ - \angle ADB - \angle CDB = 360^\circ - 130^\circ - 150^\circ = 80^\circ$$

   (c) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle EAD, on a $EA^2 + AD^2 = ED^2$, ou $12^2 + AD^2 = 13^2$. Puisque $AD > 0$, $AD = \sqrt{169-144}$, ou $AD = 5$.
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ACD, on a $AC^2 + CD^2 = AD^2$, ou $AC^2 + 4^2 = 5^2$. Puisque $AC > 0$, $AC = \sqrt{25-16}$, ou $AC = 3$.
   (On aurait pu déterminer la longueur de AD et celle de AC en reconnaissant les triangles rectangles remarquables 3-4-5 et 5-12-13.)
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, on a $AB^2 + BC^2 = AC^2$, ou $AB^2 + 2^2 = 3^2$. Puisque $AB > 0$, $AB = \sqrt{9-4}$, ou $AB = \sqrt{5}$.

3. (a) *Solution 1*
   Pour que la valeur de $15 - \dfrac{y}{x}$ soit aussi grande que possible, il faut soustraire le moins possible de 15. On veut donc que $\dfrac{y}{x}$ prenne une valeur aussi petite que possible.
   Or, le numérateur et le dénominateur sont positifs. La fraction prend sa valeur minimale lorsque le numérateur est aussi petit que possible et que le dénominateur est aussi grand que possible.
   Puisque $2 \le x \le 5$ et $10 \le y \le 20$, on choisit donc $x = 5$ et $y = 10$.
   La valeur maximale de $15 - \dfrac{y}{x}$ est donc égale à $15 - \dfrac{10}{5}$, ou 13.

Solution 2
Puisque y est positif et que $2 \leq x \leq 5$, alors $15 - \dfrac{y}{x} \leq 15 - \dfrac{y}{5}$ pour tout x dans l'intervalle $2 \leq x \leq 5$.
Puisque $10 \leq y \leq 20$, alors $15 - \dfrac{y}{5} \leq 15 - \dfrac{10}{5}$ pour tout y dans l'intervalle $10 \leq y \leq 20$.
Donc pour tout x et tout y dans ces intervalles, on a $15 - \dfrac{y}{x} \leq 15 - \dfrac{10}{5}$, ou $15 - \dfrac{y}{x} \leq 13$.
La valeur maximale est donc égale à 13 (que l'on obtient lorsque $x = 5$ et $y = 10$).

(b) *Solution 1*
On additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir

$$(f(x) + g(x)) + (f(x) - g(x)) = (3x + 5) + (5x + 7),$$

ou $2f(x) = 8x + 12$, d'où $f(x) = 4x + 6$.
Puisque $f(x) + g(x) = 3x + 5$, alors $g(x) = 3x + 5 - f(x)$, d'où $g(x) = 3x + 5 - (4x + 6)$, ou $g(x) = -x - 1$.
(On peut aussi déterminer $g(x)$ en soustrayant les deux équations, membre par membre, puis en utilisant la deuxième des équations données.)
Puisque $f(x) = 4x + 6$, alors $f(2) = 14$.
Puisque $g(x) = -x - 1$, alors $g(2) = -3$.
Donc $2f(2)g(2) = 2 \times 14 \times (-3)$, ou $2f(2)g(2) = -84$.

Solution 2
Puisque les fonctions f et g vérifient les deux équations pour toutes les valeurs de x, on pose $x = 2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} f(2) + g(2) &= 11 \\ f(2) - g(2) &= 17 \end{aligned}$$

On additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $2f(2) = 28$, ou $f(2) = 14$.
Puisque $f(2) + g(2) = 11$, alors $g(2) = 11 - f(2)$. Donc $g(2) = 11 - 14$, ou $g(2) = -3$.
(On peut aussi déterminer $g(2)$ en soustrayant les deux équations, membre par membre, puis en utilisant la deuxième des équations données.)
Donc $2f(2)g(2) = 2 \times 14 \times (-3)$, ou $2f(2)g(2) = -84$.

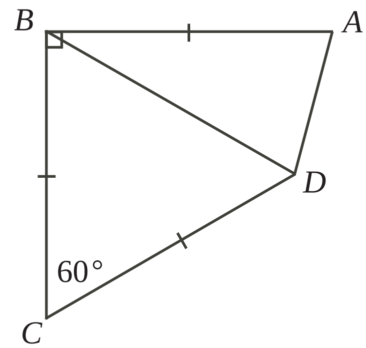
4. (a) On considère le choix de trois nombres à la fois.
Voici les ensembles possibles qui peuvent être choisis :

$\{1,2,3\}$ $\{1,2,4\}$ $\{1,2,5\}$ $\{1,3,4\}$ $\{1,3,5\}$ $\{1,4,5\}$ $\{2,3,4\}$ $\{2,3,5\}$ $\{2,4,5\}$ $\{3,4,5\}$

Dans chaque cas, les trois nombres ont été placés en ordre croissant, comme on doit le faire selon l'énoncé.
Il y a donc 10 ensembles possibles de trois nombres qui peuvent être choisis.
Parmi ces ensembles, 4 forment une suite arithmétique, soit $\{1,2,3\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,3,4\}$ et $\{3,4,5\}$.
Donc, la probabilité pour que les trois nombres choisis forment une suite arithmétique est égale à $\frac{4}{10}$, ou $\frac{2}{5}$.

(b) *Solution 1*

On joint les points B et D.



On considère le triangle CBD.
Puisque $CB = CD$, alors $\angle CBD = \angle CDB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCD)$,
d'où $\angle CBD = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ)$, ou $\angle CBD = 60^\circ$.
Le triangle BCD est donc équilateral, d'où $BD = BC = CD = 6$.
On considère le triangle DBA.
On a $\angle DBA = 90^\circ - \angle CBD$. Donc $\angle DBA = 90^\circ - 60^\circ$, ou $\angle DBA = 30^\circ$.
Puisque $BD = BA = 6$, alors $\angle BDA = \angle BAD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DBA)$.
Donc $\angle BDA = \angle BAD = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ)$, ou $\angle BDA = \angle BAD = 75^\circ$.
On calcule la longueur de AD.

1re méthode

D'après la loi des sinus dans le triangle DBA, on a $\dfrac{AD}{\sin(\angle DBA)} = \dfrac{BA}{\sin(\angle BDA)}$.

Donc $AD = \dfrac{6\sin(30^\circ)}{\sin(75^\circ)}$, d'où $AD = \dfrac{6 \times \frac{1}{2}}{\sin(75^\circ)}$, ou $AD = \dfrac{3}{\sin(75^\circ)}$.

2e méthode

Au point B, on abaisse une perpendiculaire BP à AD. Puisque le triangle BDA est isocèle, P est le milieu de AD. Donc $AD = 2AP$.
Or, BP est aussi la bissectrice de l'angle DBA. Donc $\angle ABP = 15^\circ$.
De plus, $AP = BA\sin(\angle ABP)$, d'où $AP = 6\sin(15^\circ)$.
Donc $AD = 2AP$, d'où $AD = 12\sin(15^\circ)$.

3e méthode

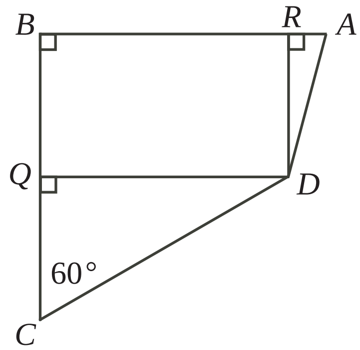
On utilise la loi du cosinus dans le triangle DBA :

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2(AB)(BD)\cos(\angle ABD) \\ &= 6^2 + 6^2 - 2(6)(6)\cos(30^\circ) \\ &= 72 - 72(\tfrac{\sqrt{3}}{2}) \\ &= 72 - 36\sqrt{3} \end{aligned}$$

Puisque $AD > 0$, alors $AD = \sqrt{36(2-\sqrt{3})}$, ou $AD = 6\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Solution 2

Au point D, on abaisse des perpendiculaires respectives DQ et DR à BC et à BA.



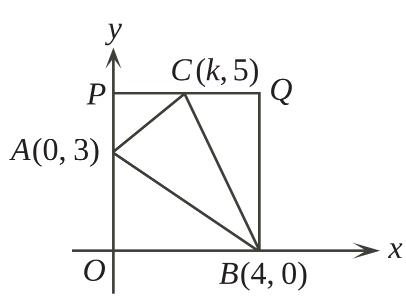
Donc $CQ = CD\cos(\angle DCQ)$, d'où $CQ = 6\cos(60°)$, ou $CQ = 6 \times \frac{1}{2}$, ou $CQ = 3$.
De plus, $DQ = CD\sin(\angle DCQ)$, d'où $DQ = 6\sin(60°)$, ou $DQ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, ou $DQ = 3\sqrt{3}$.
Puisque $BC = 6$ et que $BQ = BC - CQ$, alors $BQ = 6 - 3$, ou $BQ = 3$.
Puisque le quadrilatère $BQDR$ a trois angles droits, son quatrième angle doit aussi être droit. Il s'agit donc d'un rectangle.
Donc $RD = BQ = 3$ et $RB = DQ = 3\sqrt{3}$.
Puisque $AB = 6$, alors $AR = AB - RB$, d'où $AR = 6 - 3\sqrt{3}$.
Puisque le triangle ARD est rectangle en R, on a, par le théorème de Pythagore (puisque $AD > 0$) :

$$AD = \sqrt{RD^2 + AR^2} = \sqrt{3^2 + (6 - 3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 36 - 36\sqrt{3} + 27} = \sqrt{72 - 36\sqrt{3}}$$

On peut aussi écrire $AD = \sqrt{36(2 - \sqrt{3})}$, ou $AD = 6\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

5. (a) Soit n le nombre initial et N le nombre obtenu lorsqu'on renverse l'ordre des chiffres. Puisqu'on cherche le plus grand entier n, on suppose que $n > 0$.
On veut que l'augmentation, de n à N, soit égale à 75 % de la valeur de n. Il faut donc que N soit égal à 175 % de n, c'est-à-dire que $N = \frac{7}{4}n$.
Soit a le chiffre des dizaines du nombre n et b le chiffre des unités. Donc $n = 10a + b$.
Or, b est le chiffre des dizaines du nombre N et a est le chiffre des unités. Donc $N = 10b+a$.
On veut que $10b + a = \frac{7}{4}(10a + b)$, ou $4(10b + a) = 7(10a + b)$. Donc $40b + 4a = 70a + 7b$, ou $33b = 66a$, ou $b = 2a$.
Donc, n'importe quel entier $n = 10a + b$ dont les chiffres vérifient $b = 2a$ satisfait à la condition donnée.
Puisque a et b sont des chiffres, on a $b < 10$, d'où $a < 5$. Les valeurs possibles de n sont 12, 24, 36 et 48.
Le plus grand des nombres est 48.

(b) On inscrit le triangle dans un rectangle en traçant une droite horizontale au point C et une droite verticale au point B. Ces droites se coupent en Q. La droite horizontale coupe l'axe des ordonnées en P.



P a la même ordonnée que C, soit 5. P a donc pour coordonnées $(0,5)$.
Q a la même abscisse que B et la même ordonnée que C. Q a donc pour coordonnées $(4,5)$.
Le rectangle $OPQB$ mesure donc 4 sur 5. Il a une aire de 4×5, ou 20.
Or, le rectangle est formé de quatre triangles. La somme de leur aire est donc égale à 20.
On considère chacun de ces triangles :

- Le triangle ABC a une aire de 8 (donné).
- Le triangle AOB est rectangle en O. Il a une base OB de 4 et une hauteur OA de 3. Il a donc une aire de $\frac{1}{2} \times 4 \times 3$, ou 6.
- Le triangle APC est rectangle en P. Il a une base PC de longueur k et une hauteur AP de longueur $5-3$, ou 2. Il a donc une aire de $\frac{1}{2} \times k \times 2$, ou k.
- Le triangle CQB est rectangle en Q. Il a une base CQ de longueur $4-k$ et une hauteur QB de longueur $5-0$, ou 5. Il a donc une aire de $\frac{1}{2} \times (4-k) \times 5$, ou $10 - \frac{5}{2}k$.

Puisque la somme de ces aires est égale à 20, alors $8+6+k+10-\frac{5}{2}k = 20$, ou $4 = \frac{3}{2}k$, d'où $k = \frac{8}{3}$.

6. (a) *Solution 1*

Soit d km la distance du point A au point B.
Soit v_c la vitesse à laquelle le radeau est déplacé par le courant lorsque Serge ne rame pas, v_r la vitesse à laquelle le radeau avance lorsque Serge rame sans courant, et v_{r+c} la vitesse à laquelle le radeau avance lorsque Serge rame avec le courant.
Lorsque Serge rame avec le courant, le radeau met 18 minutes pour se rendre de A à B. Donc $v_{r+c} = \dfrac{d}{18}$ km/min.
Le radeau met 30 minutes pour se rendre de A à B lorsqu'il se laisse transporter par le courant sans que Serge ne rame. Donc $v_c = \dfrac{d}{30}$ km/min.
Or $v_r = v_{r+c} - v_c = \dfrac{d}{18} - \dfrac{d}{30} = \dfrac{5d}{90} - \dfrac{3d}{90} = \dfrac{2d}{90} = \dfrac{d}{45}$ km/min.
Serge pourrait donc parcourir les d km de A à B en ramant, sans courant, à une vitesse de $\dfrac{d}{45}$ km/min. Il mettrait donc 45 minutes pour déplacer le radeau de A à B en ramant sans courant.

Solution 2

Soit d km la distance du point A au point B, r km/h la vitesse du courant et s km/h la vitesse à laquelle Serge peut déplacer le radeau en ramant sans courant.
Puisque le courant met 30 minutes (ou $\dfrac{1}{2}$ h) pour déplacer le radeau de A à B, alors $\dfrac{d}{r} = \dfrac{1}{2}$.
Lorsque Serge rame avec le courant, la vitesse du radeau est égale à la vitesse du courant plus celle à laquelle le radeau se déplace lorsque Serge rame sans courant, soit $(s+r)$ km/h.
Puisque le radeau met 18 minutes (ou $\dfrac{3}{10}$ h) pour se rendre de A à B lorsque Serge rame avec le courant, alors $\dfrac{d}{r+s} = \dfrac{3}{10}$.

Le temps qu'il faut pour déplacer le radeau de A à B en ramant sans courant est égal à $\frac{d}{s}$ h.

Puisque $\frac{d}{r} = \frac{1}{2}$, alors $\frac{r}{d} = 2$.

Puisque $\frac{d}{r+s} = \frac{3}{10}$, alors $\frac{r+s}{d} = \frac{10}{3}$.

Donc $\frac{s}{d} = \frac{r+s}{d} - \frac{r}{d}$, d'où $\frac{s}{d} = \frac{10}{3} - 2$, ou $\frac{s}{d} = \frac{4}{3}$.

Donc $\frac{d}{s} = \frac{3}{4}$. Serge mettrait donc $\frac{3}{4}$ d'heure, ou 45 minutes, pour déplacer le radeau de A à B en ramant sans courant.

Solution 3

Soit d km la distance du point A au point B, r km/h la vitesse du courant et s km/h la vitesse à laquelle Serge peut déplacer le radeau en ramant sans courant.

Puisque le courant met 30 minutes (ou $\frac{1}{2}$ h) pour déplacer le radeau de A à B, alors $\frac{d}{r} = \frac{1}{2}$.

Lorsque Serge rame avec le courant, la vitesse du radeau est égale à la vitesse du courant plus celle à laquelle le radeau se déplace lorsque Serge rame sans courant, soit $(s + r)$ km/h.

Puisque le radeau met 18 minutes (ou $\frac{3}{10}$ h) pour se rendre de A à B lorsque Serge rame avec le courant, alors $\frac{d}{r+s} = \frac{3}{10}$, ou $d = \frac{3}{10}(r + s)$.

Puisque $d = \frac{1}{2}r$ et $d = \frac{3}{10}(r + s)$, alors $\frac{1}{2}r = \frac{3}{10}(r + s)$, d'où $5r = 3r + 3s$, ou $s = \frac{2}{3}r$.

Pour déplacer le radeau de A à B en ramant sans courant, Serge mettrait, $\frac{d}{s}$ heures, c'est-à-dire $\frac{\frac{1}{2}r}{\frac{2}{3}r}$ h, ou $\frac{3}{4}$ h, ou 45 minutes.

(b) Premièrement, on remarque que $a \neq 0$. (Si $a = 0$, l'équation $y = a(x-2)(x-6)$ deviendrait $y = 0$, ce qui est l'équation de l'axe des abscisses.)

Deuxièmement, quelle que soit la valeur de a ($a \neq 0$), la parabole a pour abscisses à l'origine 2 et 6. Elle coupe donc l'axe des abscisses aux points $(2, 0)$ et $(6, 0)$. Soit $K(2, 0)$ et $L(6, 0)$. On a donc $KL = 4$.

Troisièmement, puisque la parabole a pour abscisses à l'origine 2 et 6, alors par symétrie, le sommet de la parabole a pour abscisse $\frac{1}{2}(2 + 6)$, ou 4. L'axe de symétrie de la parabole a donc pour équation $x = 4$.

Puisque l'axe de symétrie de la parabole est vertical, alors si la parabole coupe les deux côtés verticaux du carré, les points d'intersection seront à la même hauteur. De même, si la parabole coupe le côté horizontal supérieur du carré, les points d'intersection seront à la même hauteur. Dans chaque cas, les points d'intersection seront à la même distance de l'axe de symétrie qui a pour équation $x = 4$.

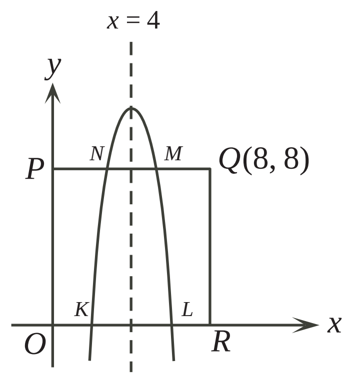
Quatrièmement, on rappelle qu'un trapèze dont les bases ont pour longueurs a et b a une aire égale à $\frac{1}{2}h(a + b)$, h étant la hauteur.

On considère trois cas.

1^er^ cas : $a < 0$

La parabole est ouverte vers le bas.

Puisque la parabole coupe le carré en quatre points, elle doit couper PQ aux points M et N. (Elle ne peut pas couper les côtés verticaux du carré, puisque en montant, les points de la parabole se rapprochent de l'axe de symétrie.)



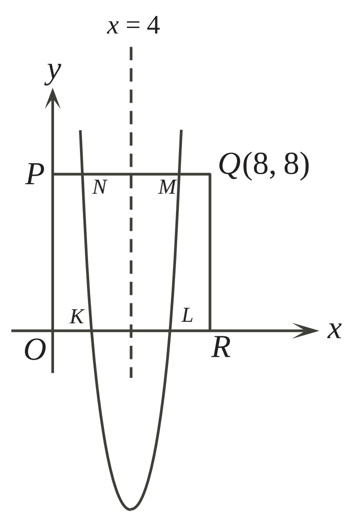
Puisque la parabole est ouverte vers le bas, on a $MN < KL = 4$.

Puisque la hauteur du trapèze est la même que celle du carré, soit 8, alors l'aire du trapèze, qui est égale à $\frac{1}{2}h(KL + MN)$, doit être inférieure à $\frac{1}{2}(8)(4 + 4)$, ou 32.

Puisque l'aire doit être égale à 36, ce cas n'est pas possible.

2^e^ cas : $a > 0$; M et N situés sur PQ

Il s'agit de la situation suivante :



Le trapèze a une hauteur de 8 ; $KL = 4$; M est le symétrique de N par rapport à l'axe de symétrie d'équation $x = 4$.

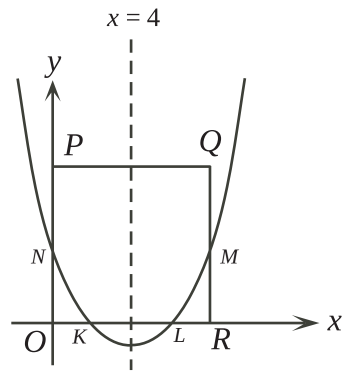
Puisque le trapèze a une aire de 36, alors $\frac{1}{2}h(KL + MN) = 36$, d'où $\frac{1}{2}(8)(4 + MN) = 36$, ou $4 + MN = 9$, ou $MN = 5$.

M et N sont donc situés à $\frac{5}{2}$ unités de l'axe de symétrie. N a donc pour coordonnées $(\frac{3}{2}, 8)$.

Puisque ce point est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation $y = a(x-2)(x-6)$. Donc $8 = a(\frac{3}{2} - 2)(\frac{3}{2} - 6)$, d'où $8 = a(-\frac{1}{2})(-\frac{9}{2})$, ou $8 = \frac{9}{4}a$, ou $a = \frac{32}{9}$.

3^e cas : $a > 0$; M et N sont situés sur QR et PO respectivement

Il s'agit de la situation suivante :



On a $KL = 4$ et $MN = 8$. De plus, M et N ont la même ordonnée.
Puisque le trapèze a une aire de 36, alors $\frac{1}{2}h(KL + MN) = 36$, d'où $\frac{1}{2}h(4 + 8) = 36$, ou $6h = 36$, ou $h = 6$.
N a donc pour coordonnées $(0, 6)$.
Puisque ce point est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation $y = a(x-2)(x-6)$.
Donc $6 = a(0 - 2)(0 - 6)$, ou $6 = 12a$, ou $a = \frac{1}{2}$.

Les valeurs possibles de a sont donc $\frac{32}{9}$ et $\frac{1}{2}$.

7. (a) *Solution 1*

On considère une population de 100 personnes de 75 ans.
Les chances pour que ces 100 personnes vivent au moins 10 ans de plus sont de 50 %. Donc dans 10 ans, il restera 50 personnes (50 % de 100 personnes). Elles auront 85 ans.
Les chances pour que les 100 mêmes personnes vivent au moins 15 ans de plus sont de 20 %. Donc dans 15 ans, il restera 20 personnes. Elles auront 90 ans.
Les chances pour qu'une personne de 80 ans vive au moins 10 ans de plus sont de 25 %, ou de $\frac{1}{4}$. Donc, $\frac{1}{4}$ des personnes de 80 ans vivront jusqu'à 90 ans. Puisque 20 des 100 personnes initiales vivront jusqu'à 90 ans, il y en a 80 (4 fois plus) qui vivront jusqu'à 80 ans.
Pour résumer, parmi les 100 personnes de 75 ans, il y en aura 80 qui seront vivantes à l'âge de 80 ans, 50 qui seront vivantes à l'âge de 85 ans et 20 qui seront vivantes à l'âge de 90 ans.
Puisque 50 des 80 personnes vivantes à l'âge de 80 ans seront encoure vivantes à l'âge de 85 ans, la probabilité pour qu'une personne de 80 ans vive au moins 5 ans de plus est de $\frac{50}{80}$, ou $\frac{5}{8}$, ou 62,5 %.

Solution 2

Soit p la probabilité pour qu'une personne de 75 ans vive jusqu'à l'âge de 80 ans, q la probabilité pour qu'une personne de 80 ans vive jusqu'à l'âge de 85 ans et r la probabilité pour qu'une personne de 85 ans vive jusqu'à l'âge de 90 ans.
On cherche la valeur de q.
Pour qu'une personne de 75 ans vive au moins 10 ans de plus, elle doit vivre 5 ans de plus (jusqu'à l'âge de 80 ans), puis 5 ans de plus (jusqu'à l'âge de 85 ans). La probabilité pour que cela se produise est égale à pq. Or dans l'énoncé, on dit que cette probabilité est égale à 50 %, ou 0,5. Donc $pq = 0{,}5$.
Pour qu'une personne de 75 ans vive au moins 15 ans de plus, elle doit vivre 5 ans de plus (jusqu'à l'âge de 80 ans), puis 5 ans de plus (jusqu'à l'âge de 85 ans) et 5 ans de plus

(jusqu'à l'âge de 90 ans). La probabilité pour que cela se produise est égale à pqr. Or dans l'énoncé, on dit que cette probabilité est égale à 20 %, ou 0,2. Donc $pqr = 0{,}2$
De même, la probabilité pour qu'une personne de 80 ans vive 10 ans de plus est de 25 %. Donc $qr = 0{,}25$.
Puisque $pqr = 0{,}2$ et $pq = 0{,}5$, alors $r = \dfrac{pqr}{pq}$, d'où $r = \dfrac{0{,}2}{0{,}5}$, ou $r = 0{,}4$.
Puisque $qr = 0{,}25$ et $r = 0{,}4$, alors $q = \dfrac{qr}{r}$, d'où $q = \dfrac{0{,}25}{0{,}4}$, ou $q = 0{,}625$.
Donc, la probabilité pour qu'une personne de 80 ans vive au moins 5 ans de plus est de 0,625, ou 62,5 %.

(b) D'après les lois des logarithmes, l'équation donnée est équivalente à
$2^{2\log_{10} x} = 3(2 \cdot 2^{\log_{10} x}) + 16$, ou $(2^{\log_{10} x})^2 = 6 \cdot 2^{\log_{10} x} + 16$.
Posons $u = 2^{\log_{10} x}$. L'équation devient $u^2 = 6u + 16$, ou $u^2 - 6u - 16 = 0$.
On factorise pour obtenir $(u - 8)(u + 2) = 0$, d'où $u = 8$ ou $u = -2$.
Puisque $2^a > 0$ pour tout nombre réel a, alors $u > 0$. On rejette donc $u = -2$.
On a donc $u = 8$, ou $2^{\log_{10} x} = 8$, d'où $\log_{10} x = 3$.
Donc $x = 1000$.

8. (a) On détermine d'abord le premier nombre de la 50$^{\text{e}}$ rangée.
Puisque les nombres de la 1$^{\text{re}}$ colonne forment une suite arithmétique avec une raison de 3, alors le 50$^{\text{e}}$ nombre de la 1$^{\text{re}}$ colonne (c.-à-d. le premier nombre de la 50$^{\text{e}}$ rangée) est égal à $4 + 49(3)$, ou 151.
On détermine ensuite la raison de la suite arithmétique formée par les nombres de la 50$^{\text{e}}$ rangée en déterminant le 2$^{\text{e}}$ nombre de la 50$^{\text{e}}$ rangée.
Puisque les nombres de la 2$^{\text{e}}$ colonne forment une suite arithmétique avec une raison de 5, alors le 50$^{\text{e}}$ nombre de la 2$^{\text{e}}$ colonne (c.-à-d. le 2$^{\text{e}}$ nombre de la 50$^{\text{e}}$ rangée) est égal à $7 + 49(5)$, ou 252.
La suite arithmétique formée par les nombres de la 50$^{\text{e}}$ rangée a donc une raison égale à $252 - 151$, ou 101.
Le 40$^{\text{e}}$ nombre de la 50$^{\text{e}}$ rangée (c.-à-d. le nombre situé dans la 50$^{\text{e}}$ rangée et dans la 40$^{\text{e}}$ colonne) est donc égal à $151 + 39(101)$, ou 4090.

(b) On utilise la même méthode que dans la partie (a).
On détermine d'abord le premier nombre de la $R^{\text{ième}}$ rangée.
Puisque les nombres de la 1$^{\text{re}}$ colonne forment une suite arithmétique avec une raison de 3, alors le $R^{\text{ième}}$ nombre de la 1$^{\text{re}}$ colonne (c.-à-d. le premier nombre de la $R^{\text{ième}}$ rangée) est égal à $4 + (R - 1)(3)$, ou $4 + 3R - 3$, ou $3R + 1$.
On détermine ensuite la raison de la suite arithmétique formée par les nombres de la $R^{\text{ième}}$ rangée en déterminant le 2$^{\text{e}}$ nombre de la $R^{\text{ième}}$ rangée.
Puisque les nombres de la 2$^{\text{e}}$ colonne forment une suite arithmétique avec une raison de 5, alors le $R^{\text{ième}}$ nombre de la 2$^{\text{e}}$ colonne (c.-à-d. le 2$^{\text{e}}$ nombre de la $R^{\text{ième}}$ rangée) est égal à $7 + (R - 1)(5)$, ou $7 + 5R - 5$, ou $5R + 2$.
La suite arithmétique formée par les nombres de la $R^{\text{ième}}$ rangée a donc une raison égale à $(5R + 2) - (3R + 1)$, ou $2R + 1$.
Donc, le $C^{\text{ième}}$ nombre de la $R^{\text{ième}}$ rangée (c.-à-d. le nombre situé dans la $R^{\text{ième}}$ rangée et dans la $C^{\text{ième}}$ colonne) est égal à :

$$3R + 1 + (C - 1)(2R + 1) = 3R + 1 + 2RC + C - 2R - 1 = 2RC + R + C$$

(c) Soit N un terme du tableau, situé dans la $R^{\text{ième}}$ rangée et dans la $C^{\text{ième}}$ colonne.
D'après la partie (b), $N = 2RC + R + C$ et $2N + 1 = 4RC + 2R + 2C + 1$.
Or $4RC + 2R + 2C + 1 = 2R(2C + 1) + 2C + 1 = (2R + 1)(2C + 1)$.
Puisque R et C sont des entiers et que $R \geq 1$ et $C \geq 1$, alors $2R + 1$ et $2C + 1$ sont des entiers, chacun supérieur ou égal à 3.
Donc $2N + 1$, qui est égal à $(2R + 1)(2C + 1)$, est le produit de deux entiers supérieurs à 1. Il est donc un nombre composé.

9. (a) Si $n = 2011$, alors $8n - 7 = 16\,081$. Donc $\sqrt{8n-7} \approx 126{,}81$.
Donc $\dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \approx \dfrac{1+126{,}81}{2} \approx 63{,}9$.
Donc $g(2011) = 2(2011) + \left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8(2011)-7}}{2} \right\rfloor = 4022 + \lfloor 63{,}9 \rfloor = 4022 + 63 = 4085$.

(b) On cherche une valeur de n pour laquelle $f(n) = 100$, c'est-à-dire pour laquelle :

$$2n - \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor = 100 \qquad (*)$$

On résout d'abord l'équation

$$2x - \frac{1+\sqrt{8x-7}}{2} = 100 \qquad (**)$$

parce que les membres de gauche de $(*)$ et de $(**)$ sont assez semblables et les solutions respectives devraient être assez rapprochées les unes des autres. On considérera des entiers n qui sont près des solutions de l'équation $(**)$ et on vérifiera si ce sont des solutions de l'équation $(*)$. L'équation $(**)$ devient :

$$\begin{aligned}
4x - (1+\sqrt{8x-7}) &= 200 \\
4x - 201 &= \sqrt{8x-7} \\
(4x-201)^2 &= 8x - 7 \\
16x^2 - 1608x + 40\,401 &= 8x - 7 \\
16x^2 - 1616x + 40\,408 &= 0 \\
2x^2 - 202x + 5051 &= 0
\end{aligned}$$

Donc :

$$x = \frac{202 \pm \sqrt{202^2 - 4(2)(5051)}}{2(2)} = \frac{202 \pm \sqrt{396}}{4} = \frac{101 \pm \sqrt{99}}{2}$$

d'où $x \approx 55{,}47$ ou $x \approx 45{,}53$.
On vérifie si $n = 55$, qui est près de 55,47, satisfait à l'équation $(*)$:

$$f(55) = 2(55) - \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8(55)-7}}{2} \right\rfloor = 110 - \left\lfloor \frac{1+\sqrt{433}}{2} \right\rfloor$$

Puisque $\sqrt{433} \approx 20{,}8$, alors $\dfrac{1+\sqrt{433}}{2} \approx 10{,}9$, d'où $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{433}}{2} \right\rfloor = 10$.
Donc $f(55) = 110 - 10$, ou $f(55) = 100$.
Donc, 55 est une valeur de n pour laquelle $f(n) = 100$.

(c) On veut démontrer que chaque entier strictement positif m est un élément de l'image de f ou un élément de l'image de g, mais non pas un élément des deux.

On tente d'abord de mieux comprendre, dans l'expression qui définit chaque fonction, le terme qui comprend $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor$. Par exemple, étant donné un entier k ($k \geq 1$), on cherche les valeurs entières de n pour lesquelles $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor = k$.

D'après la définition de $\lfloor x \rfloor$, l'équation $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor = k$ est équivalente à l'inéquation $k \leq \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} < k+1$. On a donc :

$$\begin{array}{ccccc} 2k & \leq & 1+\sqrt{8n-7} & < & 2k+2 \\ 2k-1 & \leq & \sqrt{8n-7} & < & 2k+1 \\ 4k^2-4k+1 & \leq & 8n-7 & < & 4k^2+4k+1 \\ 4k^2-4k+8 & \leq & 8n & < & 4k^2+4k+8 \\ \frac{1}{2}(k^2-k)+1 & \leq & n & < & \frac{1}{2}(k^2+k)+1 \end{array}$$

Soit T_k le $k^{\text{ième}}$ nombre triangulaire. Donc $T_k = \frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}(k^2+k)$ ($k \geq 0$) et $T_{k-1} = \frac{1}{2}(k-1)(k) = \frac{1}{2}(k^2-k)$.

Donc $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor = k$ lorsque $T_{k-1}+1 \leq n < T_k+1$.

Puisque n est un entier, alors $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor = k$ est vérifié lorsque $T_{k-1}+1 \leq n \leq T_k$.

Lorsque $k=1$, l'intervalle est $T_0+1 \leq n \leq T_1$ (ou $1 \leq n \leq 1$). Lorsque $k=2$, l'intervalle est $T_1+1 \leq n \leq T_2$ (ou $2 \leq n \leq 3$). Lorsque $k=3$, l'intervalle est $T_2+1 \leq n \leq T_3$ (ou $4 \leq n \leq 6$). À mesure que k augmente, les intervalles incluent tous les entiers positifs n et les intervalles ne chevauchent pas.

On peut donc déterminer l'image des fonctions f et g en examinant les valeurs de $f(n)$ et de $g(n)$ lorsque n est situé dans chacun des intervalles.

Pour chaque entier non négatif k, soit $\mathcal{R}_k$ l'ensemble des entiers supérieurs à k^2 et inférieurs ou égaux à $(k+1)^2$. Donc $\mathcal{R}_k = \{k^2+1, k^2+2, \ldots, k^2+2k, k^2+2k+1\}$.

Par exemple, $\mathcal{R}_0 = \{1\}$, $\mathcal{R}_1 = \{2,3,4\}$, $\mathcal{R}_2 = \{5,6,7,8,9\}$, et ainsi de suite. Chaque entier strictement positif paraît dans exactement un de ces ensembles.

Pour chaque entier non négatif k, soit $\mathcal{S}_k = \{k^2+2, k^2+4, \ldots, k^2+2k\}$ et soit $\mathcal{Q}_k = \{k^2+1, k^2+3, \ldots, k^2+2k+1\}$. Par exemple, $\mathcal{S}_0 = \{\}$, $\mathcal{S}_1 = \{3\}$, $\mathcal{S}_2 = \{6,8\}$, $\mathcal{Q}_0 = \{1\}$, $\mathcal{Q}_1 = \{2,4\}$, $\mathcal{Q}_2 = \{5,7,9\}$, et ainsi de suite. On remarque que $\mathcal{R}_k = \mathcal{Q}_k \cup \mathcal{S}_k$ et chaque entier strictement positif paraît dans exactement un des ensembles $\mathcal{Q}_k$ ou dans exactement un des ensembles $\mathcal{S}_k$. Il n'y a aucun chevauchement entre ces ensembles. En effet, il n'y en a aucun entre des ensembles distincts $\mathcal{S}_k$, aucun entre des ensembles distincts $\mathcal{Q}_k$ et aucun entre un ensemble $\mathcal{Q}_k$ et un ensemble $\mathcal{S}_k$.

On détermine d'abord l'image de la fonction g.

Lorsque $T_{k-1}+1 \leq n \leq T_k$, on a $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor = k$. Donc :

$$\begin{array}{ccccc} 2T_{k-1}+2 & \leq & 2n & \leq & 2T_k \\ 2T_{k-1}+2+k & \leq & 2n+\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor & \leq & 2T_k+k \\ k^2-k+2+k & \leq & g(n) & \leq & k^2+k+k \\ k^2+2 & \leq & g(n) & \leq & k^2+2k \end{array}$$

On remarque que lorsque n est dans l'intervalle $T_{k-1}+1 \leq n \leq T_k$ et que sa valeur augmente de 1, la valeur de $2n$ augmente de 2 et celle de $g(n)$ augmente de 2 également (à cause du terme $2n$ dans l'expression qui définit $g(n)$).
Donc pour les valeurs de n dans cet intervalle, les valeurs de $g(n)$ sont $k^2+2, k^2+4, k^2+6, \ldots, k^2+2k$. Donc dans cet intervalle, l'image de g est l'ensemble $\mathcal{S}_k$.
À mesure que k prend pour valeurs tous les entiers strictement positifs (c.-à-d. que à mesure que ces intervalles recouvrent le domaine de g), on voit que l'image de g est formée des entiers des ensembles $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \ldots$ (On pourrait aussi inclure l'ensemble $\mathcal{S}_0$ dans cette liste, puisqu'il s'agit de l'ensemble vide.)

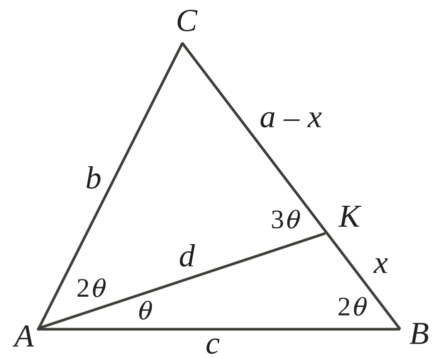
On remarque aussi que $f(1) = 2 - \left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8-7}}{2} \right\rfloor$, ou $f(1) = 1$. Il s'agit du seul élément de l'ensemble $\mathcal{Q}_0$.
Lorsque $k \geq 1$ et $T_k + 1 \leq n \leq T_{k+1}$, on a $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor = k+1$, d'où :

$$\begin{array}{ccccc} 2T_k+2 & \leq & 2n & \leq & 2T_{k+1} \\ 2T_k+2-(k+1) & \leq & 2n-\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor & \leq & 2T_{k+1}-(k+1) \\ k^2+k+2-k-1 & \leq & f(n) & \leq & (k+1)(k+2)-k-1 \\ k^2+1 & \leq & f(n) & \leq & k^2+2k+1 \end{array}$$

On remarque que lorsque n est dans cet intervalle et que sa valeur augmente de 1, la valeur de $2n$ augmente de 2 et celle de $f(n)$ augmente de 2 également.
Donc pour les valeurs de n dans cet intervalle, les valeurs de $f(n)$ sont $k^2+1, k^2+3, k^2+5, \ldots, k^2+2k+1$. Donc dans cet intervalle, l'image de f est l'ensemble $\mathcal{Q}_k$.
À mesure que k prend pour valeurs tous les entiers strictement positifs (c.-à-d. que à mesure que ces intervalles recouvrent le domaine de f), on voit que l'image de f est formé des entiers des ensembles $\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \ldots$

Donc, l'image de f est formée des entiers des ensembles $\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \ldots$ et l'image de g est formée des entiers des ensembles $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots$ Ces images comprennent tous les entiers strictement positifs et ne chevauchent pas.

10. (a) Soit $\angle KAB = \theta$.
Puisque $\angle KAC = 2\angle KAB$, alors $\angle KAC = 2\theta$ et $\angle BAC = \angle KAC + \angle KAB$, ou $\angle BAC = 3\theta$.
Puisque $3\angle ABC = 2\angle BAC$, alors $\angle ABC = \frac{2}{3} \times 3\theta$, ou $\angle ABC = 2\theta$. Puisque l'angle AKC est extérieur au triangle AKB, alors $\angle AKC = \angle KAB + \angle ABC$, d'où $\angle AKC = 3\theta$.
On a donc la situation suivante :



Or, les triangles CAK et CBA sont semblables, puisqu'ils on un angle commun C et que $\angle CAK = \angle CBA$.

Donc $\dfrac{AK}{BA} = \dfrac{CA}{CB}$, ou $\dfrac{d}{c} = \dfrac{b}{a}$, d'où $d = \dfrac{bc}{a}$.

De même, $\dfrac{CK}{CA} = \dfrac{CA}{CB}$, ou $\dfrac{a-x}{b} = \dfrac{b}{a}$, d'où $a - x = \dfrac{b^2}{a}$, ou $x = a - \dfrac{b^2}{a}$, ou $x = \dfrac{a^2-b^2}{a}$, ce qu'il fallait démontrer.

(b) D'après la partie (a), on a $bc = ad$ et $a^2 - b^2 = ax$. Donc :

$$\text{M.G.} = (a^2-b^2)(a^2-b^2+ac) = (ax)(ax+ac) = a^2x(x+c)$$

et

$$\text{M.D.} = b^2c^2 = (bc)^2 = (ad)^2 = a^2d^2$$

Pour démontrer que M.G. = M.D., il faut démontrer que $x(x+c) = d^2$ (puisque $a > 0$).

<u>1re méthode : On utilise la loi des sinus.</u>

On développe d'abord une formule pour $\sin 3\theta$, que l'on utilisera par la suite :

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta) \\ &= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta \\ &= 2\sin\theta\cos^2\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta \\ &= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta \\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \end{aligned}$$

Puisque $\angle AKB = 180^\circ - \angle KAB - \angle KBA$, ou $\angle AKB = 180^\circ - 3\theta$, on a, par la loi des sinus dans le triangle AKB :

$$\frac{x}{\sin\theta} = \frac{d}{\sin 2\theta} = \frac{c}{\sin(180^\circ - 3\theta)}$$

Puisque $\sin(180^\circ - X) = \sin X$, alors $\sin(180^\circ - 3\theta) = \sin 3\theta$, d'où $x = \dfrac{d\sin\theta}{\sin 2\theta}$ et $c = \dfrac{d\sin 3\theta}{\sin 2\theta}$. On a donc :

$$\begin{aligned} x(x+c) &= \frac{d\sin\theta}{\sin 2\theta}\left(\frac{d\sin\theta}{\sin 2\theta} + \frac{d\sin 3\theta}{\sin 2\theta}\right) \\ &= \frac{d^2\sin\theta}{\sin^2 2\theta}(\sin\theta + \sin 3\theta) \\ &= \frac{d^2\sin\theta}{\sin^2 2\theta}(\sin\theta + 3\sin\theta - 4\sin^3\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d^2 \sin\theta}{\sin^2 2\theta}(4\sin\theta - 4\sin^3\theta) \\
&= \frac{4d^2 \sin^2\theta}{\sin^2 2\theta}(1-\sin^2\theta) \\
&= \frac{4d^2 \sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2 2\theta} \\
&= \frac{4d^2 \sin^2\theta\cos^2\theta}{(2\sin\theta\cos\theta)^2} \\
&= \frac{4d^2 \sin^2\theta\cos^2\theta}{4\sin^2\theta\cos^2\theta} \\
&= d^2
\end{aligned}$$

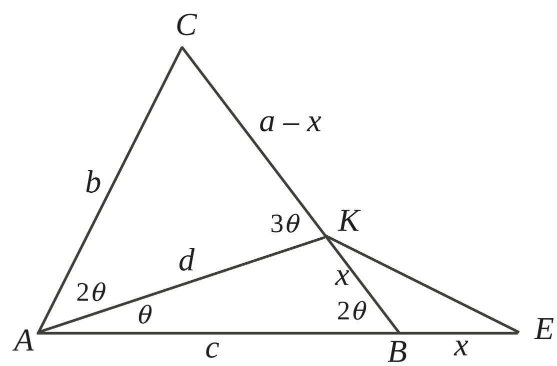
Ceci complète la démonstration.

On aurait pu utiliser la formule $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ pour démontrer que $\sin 3\theta + \sin\theta = 2\sin 2\theta\cos\theta$, d'où :

$$\sin\theta(\sin 3\theta + \sin\theta) = \sin\theta(2\sin 2\theta\cos\theta) = 2\sin\theta\cos\theta\sin 2\theta = \sin^2 2\theta$$

2^e^ méthode : On prolonge AB.

On prolonge le segment AB jusqu'au point E de manière que $BE = BK = x$. On trace aussi le segment KE.

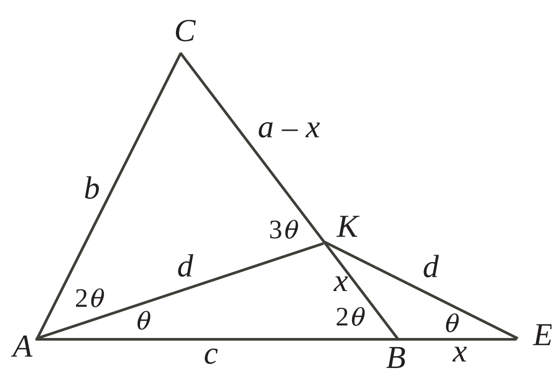


Le triangle KBE est isocèle et on a donc $\angle BKE = \angle KEB$.

Puisque l'angle KBA est extérieur au triangle KBE, alors $\angle KBA = 2\angle KEB$, ou $\angle KBA = 2\theta$.

Donc $\angle KEB = \angle BKE$. Donc $\angle KAE = \angle KEA = \theta$.

Le triangle KAE est donc isocèle et on a $KE = KA = d$.



Les triangles KAE et BKE sont semblables, puisque chacun a deux angles θ.
Donc $\frac{KA}{BK} = \frac{AE}{KE}$, ou $\frac{d}{x} = \frac{c+x}{d}$, d'où $d^2 = x(x+c)$.

3[e] méthode : On utilise la loi du cosinus et la loi des sinus.
On utilise la loi du cosinus dans le triangle AKB :

$$\begin{aligned} AK^2 &= BK^2 + BA^2 - 2(BA)(BK)\cos(\angle KBA) \\ d^2 &= x^2 + c^2 - 2cx\cos(2\theta) \\ d^2 &= x^2 + c^2 - 2cx(2\cos^2\theta - 1) \end{aligned}$$

On utilise la loi des sinus dans le triangle AKB pour obtenir $\frac{x}{\sin\theta} = \frac{d}{\sin 2\theta}$, ou $\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \frac{d}{x}$, ou $\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{d}{x}$, d'où $\cos\theta = \frac{d}{2x}$.
On reporte $\cos\theta = \frac{d}{2x}$ dans l'équation $d^2 = x^2 + c^2 - 2cx(2\cos^2\theta - 1)$:

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2 + c^2 - 2cx\left(\frac{2d^2}{4x^2} - 1\right) \\ d^2 &= x^2 + c^2 - \frac{cd^2}{x} + 2cx \\ d^2 + \frac{cd^2}{x} &= x^2 + 2cx + c^2 \\ d^2 + \frac{cd^2}{x} &= (x+c)^2 \\ xd^2 + cd^2 &= x(x+c)^2 \\ d^2(x+c) &= x(x+c)^2 \\ d^2 &= x(x+c) \qquad (\text{puisque } x + c \neq 0) \end{aligned}$$

(c) *Solution 1*
On cherche un triplet d'entiers positifs qui vérifient l'équation de la partie (b) et qui peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle.
On remarque d'abord qu'étant donné un triplet (A, B, C) de nombres réels qui vérifient l'équation de la partie (b) et un autre nombre réel k, alors le triplet (kA, kB, kC) vérifie aussi l'équation de la partie (b). En effet :

$$(k^2A^2 - k^2B^2)(k^2A^2 - k^2B^2 + kAkC) = k^4(A^2 - B^2)(A^2 - B^2 + AC) = k^4(B^2C^2) = (kB)^2(kC)^2$$

On commencera donc par chercher un triplet (a, b, c) de nombres rationnels qui vérifient l'équation de la partie (b) et qui peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle, puis on multipliera les nombres par leur dénominateur commun k de manière à obtenir un triplet (ka, kb, kc) d'entiers.
Pour le faire, on récrit l'équation de la partie (b) comme équation du second degré en c et on utilise la formule associée à cette équation pour exprimer c en fonction des autres variables.
On développe partiellement le membre de gauche de cette équation :

$$(a^2 - b^2)(a^2 - b^2) + ac(a^2 - b^2) = b^2c^2$$

On récrit ensuite pour obtenir l'équation :

$$b^2c^2 - c(a(a^2 - b^2)) - (a^2 - b^2)^2 = 0$$

D'après la formule associée à l'équation du second degré, on a :

$$c = \frac{a(a^2 - b^2) \pm \sqrt{a^2(a^2 - b^2)^2 + 4b^2(a^2 - b^2)^2}}{2b^2} = \frac{a(a^2 - b^2) \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2(a^2 + 4b^2)}}{2b^2}$$

Puisque $\angle BAC > \angle ABC$, alors $a > b$, d'où $a^2 - b^2 > 0$. Donc :

$$c = \frac{a(a^2 - b^2) \pm (a^2 - b^2)\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2b^2} = \frac{(a^2 - b^2)}{2b^2}(a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2})$$

Puisque $a^2 + 4b^2 > 0$, alors $\sqrt{a^2 + 4b^2} > a$. L'expression qui donne une valeur positive de c est donc :

$$c = \frac{(a^2 - b^2)}{2b^2}(a + \sqrt{a^2 + (2b)^2})$$

On cherche des valeurs entières de a et de b pour lesquelles on obtient une valeur rationnelle de c. On vérifiera ensuite si les nombres du triplet (a, b, c) peuvent former les longueurs des côtés d'un triangle, puis on les multipliera par un facteur commun de manière à obtenir des entiers.

La valeur de c est rationnelle si la valeur de $\sqrt{a^2 + (2b)^2}$ est un entier, c'est-à-dire si les valeurs de a et de $2b$ sont les longueurs des cathètes d'un triangle rectangle, ou les deux premiers nombres d'un triplet pythagoricien.

Puisque $\sqrt{3^2 + 4^2}$ est un entier, on pose $a = 3$ et $b = 2$, ce qui donne :

$$c = \frac{(3^2 - 2^2)}{2 \cdot 2^2}(3 + \sqrt{3^2 + 4^2}) = 5$$

On a donc $(a, b, c) = (3, 2, 5)$. Or, ces trois nombres ne peuvent pas être les longueurs des côtés d'un triangle, car $3 + 2 = 5$.

(L'inégalité du triangle nous assure que trois nombres réels strictement positifs, a, b et c, peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle si et seulement si $a + b > c$, $a + c > b$ et $b + c > a$.)

On peut tenter notre chance avec d'autres triplets pythagoriciens.

Par exemple, $15^2 + 8^2 = 17^2$. Or $a = 15$ et $b = 4$ ne donne pas une valeur de c pour laquelle les nombres a, b et c peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle.

On fait appel à $16^2 + 30^2 = 34^2$. Les valeurs $a = 16$ et $b = 15$ donnent :

$$c = \frac{(16^2 - 15^2)}{2 \cdot 15^2}(16 + \sqrt{16^2 + 30^2}) = \frac{31}{450}(16 + 34) = \frac{31}{9}$$

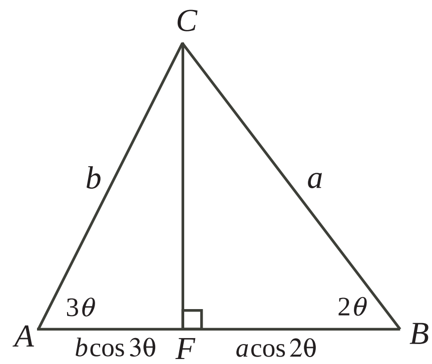
Or les nombres $(a, b, c) = (16, 15, \frac{31}{9})$ peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle, puisque $a + b > c$, $a + c > b$ et $b + c > a$.

Ces nombres vérifient l'équation de la partie (b). On les multiplie par $k = 9$ pour obtenir le triplet $(144, 135, 31)$ d'entiers qui vérifient l'équation de la partie (b) et qui peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle.

(Il est possible d'utiliser d'autre triplets pythagoriciens pour obtenir d'autres entiers qui fonctionnent.)

Solution 2

On remarque que l'équation de la partie (b) ne comporte que les variables a, b et c. Elle semble donc dépendre uniquement de la relation entre les angles CAB et CBA du triangle ABC. On se concentre donc sur le triangle ABC. On efface le segment AK et on trace la hauteur CF. On a :



Puisqu'on cherche un seul triplet qui fonctionne, on fera quelques suppositions au sujet du triangle. Cela peut éliminer les autres solutions qui ne nous intéressent pas.
On suppose que les angles A et B du triangle sont aigus, c'est-à-dire que $3\theta < 90^\circ$ et que $2\theta < 90^\circ$. On suppose donc que $\theta < 30^\circ$.
Dans le triangle ABC, on a $AF = b\cos 3\theta$, $BF = a\cos 2\theta$ et $CF = b\sin 3\theta = a\sin 2\theta$.
On a aussi $c = b\cos 3\theta + a\cos 2\theta$.
Pour trouver des entiers appropriés a, b et c, on peut chercher des entiers a et b et une mesure d'angle θ tels que $b\cos 3\theta$ et $a\cos 2\theta$ soient des entiers et que $b\sin 3\theta = a\sin 2\theta$.
On fait appel à des identités trigonométriques :

$$\begin{aligned}
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \\
\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 \\
\sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\
&\qquad \text{(d'après la partie (a), Solution 1, 1}^{\text{re}}\text{ méthode)} \\
\cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\
&= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

On cherche une mesure θ ($\theta < 30^\circ$) de manière que $\cos\theta$ soit un nombre rationnel et ensuite, des entiers a et b tels que $b\sin 3\theta = a\sin 2\theta$ et que $b\cos 3\theta$ et $a\cos 2\theta$ soient des entiers.
Puisqu'on suppose que $\theta < 30^\circ$, alors $\cos\theta > \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$.
Le nombre rationnel $\frac{7}{8}$ est celui qui a le plus petit dénominateur et qui est plus grand que $\frac{\sqrt{3}}{2}$. On cherche donc un angle aigu de mesure θ tel que $\cos\theta = \frac{7}{8}$.
On a donc $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{15}}{8}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta = 2 \times \tfrac{7}{8} \times \tfrac{\sqrt{15}}{8} = \tfrac{7\sqrt{15}}{32} \\
\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 = 2 \times \tfrac{49}{64} - 1 = \tfrac{17}{32} \\
\sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 3 \times \tfrac{\sqrt{15}}{8} - 4 \times \tfrac{15\sqrt{15}}{512} = \tfrac{33\sqrt{15}}{128} \\
\cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4 \times \tfrac{343}{512} - 3 \times \tfrac{7}{8} = \tfrac{7}{128}
\end{aligned}$$

Pour que $b\sin 3\theta = a\sin 2\theta$, il faut que $\frac{33\sqrt{15}}{128}b = \frac{7\sqrt{15}}{32}a$, ou $33b = 28a$.
Pour que $b\cos 3\theta$ et $a\cos 2\theta$ soient des entiers, il faut que $\frac{7}{128}b$ et $\frac{17}{32}a$ soient des entiers. Il faut donc que a soit divisible par 32 et que b soit divisible par 128.
Les entiers $a = 33$ et $b = 28$ vérifient l'équation $33b = 28a$.

On multiplie ces nombres par 32 et on choisit $a = 1056$ et $b = 896$, qui vérifient l'équation $33b = 28a$. De plus, b est divisible par 128 ($896 \div 128 = 7$) et a est divisible par 32 ($1056 \div 32 = 33$).
Ces valeurs de a et de b donnent $c = b\cos 3\theta + a\cos 2\theta$, d'où $c = 896 \times \frac{7}{128} + 1056 \times \frac{17}{32}$, ou $c = 610$.
On peut vérifier que le triplet $(a, b, c) = (1056, 896, 610)$ vérifie l'équation de la partie (b).
Comme il a été mentionné dans la Solution 1, on peut diviser chaque élément du triplet par 2 pour obtenir de plus petits nombres, soit $(a, b, c) = (528, 448, 305)$ qui vérifient l'équation.
D'autres valeurs de $\cos\theta$ et d'autres valeurs appropriées de a et de b nous permettraient d'obtenir d'autres triplets (a, b, c) d'entiers.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide 2010

le mercredi 7 avril 2010

Solutions

1. (a) *Solution 1*
Puisque $3^x = 27$, alors $3^{x+2} = 3^x 3^2$, d'où $3^{x+2} = 27 \cdot 9$, ou $3^{x+2} = 243$.

Solution 2
Puisque $3^x = 27$ et $27 = 3^3$, alors $x = 3$.
Donc $3^{x+2} = 3^5$, ou $3^{x+2} = 243$.

(b) Puisque $2^5 3^{13} 5^9 x = 2^7 3^{14} 5^9$, alors $x = \dfrac{2^7 3^{14} 5^9}{2^5 3^{13} 5^9}$, d'où $x = 2^2 3^1$, ou $x = 12$.

(c) Les droites d'équations $y = x + 2$ et $y = -\frac{1}{2}x + 2$ se coupent au point B sur l'axe des ordonnées. Puisque la droite d'équation $y = x + 2$ a une ordonnée à l'origine de 2, alors B a pour coordonnées $(0, 2)$.
On détermine l'abscisse à l'origine de chaque droite en posant $y = 0$.
Si $y = x + 2$ et $y = 0$, alors $x + 2 = 0$, d'où $x = -2$. Donc, A a pour coordonnées $(-2, 0)$.
Si $y = -\frac{1}{2}x + 2$ et $y = 0$, alors $0 = -\frac{1}{2}x + 2$, d'où $\frac{1}{2}x = 2$, ou $x = 4$. Donc, C a pour coordonnées $(4, 0)$.
Puisque BO est perpendiculaire à AC, on considère la base AC du triangle ABC et la hauteur correspondante BO.
On a $BO = 2$ et $AC = 4 - (-2)$, ou $AC = 6$.
Donc, l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \times AC \times BO$, ou $\frac{1}{2} \times 6 \times 2$, ou 6.

2. (a) Soit r, v et b les masses respectives des colis rouge, vert et bleu.
On sait que $r + v + b = 60$, $r + v = 25$ et $v + b = 50$.
On soustrait la deuxième équation de la première, membre par membre, pour obtenir $b = 35$ qu'on reporte dans la troisième équation. On obtient $v + 35 = 50$, d'où $v = 15$.
Donc, le colis vert a une masse de 15 kg.

(b) Soit p un palindrome qui est la somme des trois entiers consécutifs $a - 1$, a et $a + 1$.
Donc $p = (a - 1) + a + (a + 1)$, ou $p = 3a$. Donc, p est un multiple de 3.
Les plus grands palindromes inférieurs à 200 sont 191, 181 et 171.
On remarque que 191 et 181 ne sont pas divisibles par 3, mais que 171 est divisible par 3.
On peut le vérifier comme suit :

> Un entier positif est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Donc ni 191, ni 181 n'est la somme de trois entiers consécutifs.
L'entier 171 est égal à $56 + 57 + 58$. Donc, 171 est le plus grand palindrome inférieur à 200 qui est la somme de trois entiers consécutifs.

(c) *Solution 1*
Puisque $(x + 1)(x - 1) = 8$, alors $x^2 - 1 = 8$, ou $x^2 = 9$.
Donc $(x^2 + x)(x^2 - x) = x(x + 1)x(x - 1) = x^2(x + 1)(x - 1) = x^2(x^2 - 1) = 9(8) = 72$.

Solution 2
Puisque $(x + 1)(x - 1) = 8$, alors $x^2 - 1 = 8$, ou $x^2 = 9$, d'où $x = \pm 3$.
Si $x = 3$, alors $(x^2 + x)(x^2 - x) = (3^2 + 3)(3^2 - 3) = (9 + 3)(9 - 3) = 12(6) = 72$.
Si $x = -3$, alors $(x^2 + x)(x^2 - x) = ((-3)^2 + (-3))((-3)^2 - (-3)) = (9 - 3)(9 + 3) = 72$.
Dans chaque cas, $(x^2 + x)(x^2 - x) = 72$.

3. (a) *Solution 1*

L'abeille met 60 minutes pour se rendre de H à F, passe 30 minutes à F, met 45 minutes pour se rendre de F à G, passe 60 minutes à G, puis se rend de G à H.
Puisque $60+30+45+60=195$, la tournée a pris 195 minutes plus le temps que l'abeille a mis pour se rendre de G à H.
Puisque l'abeille vole à une vitesse constante, le rapport de deux distances est égal au rapport des temps correspondants. Donc $\dfrac{HF}{GF}=\dfrac{60 \text{ minutes}}{45 \text{ minutes}}=\dfrac{4}{3}$.
Puisque $\dfrac{HF}{GF}=\dfrac{4}{3}$ et que le triangle FGH est rectangle en F, il est semblable à un triangle rectangle remarquable 3-4-5. Donc $\dfrac{HG}{GF}=\dfrac{5}{3}$.
Le rapport du temps mis pour se rendre de H à G au temps mis pour se rendre de F à G est aussi égal à $\frac{5}{3}$. L'abeille a donc mis $\frac{5}{3}\times 45$ minutes, ou 75 minutes, pour se rendre de G à H.
L'abeille s'est donc absentée de la ruche pendant $(195+75)$ minutes, ou 270 minutes.

Solution 2

L'abeille met 60 minutes pour se rendre de H à F, passe 30 minutes à F, met 45 minutes pour se rendre de F à G, passe 60 minutes à G, puis se rend de G à H.
Puisque $60+30+45+60=195$, la tournée a pris 195 minutes plus le temps que l'abeille a mis pour se rendre de G à H.
Puisque l'abeille vole à une vitesse constante, le rapport de deux distances est égal au rapport des temps correspondants.
On peut donc utiliser le théorème de Pythagore en se servant des *temps* :

$$\begin{aligned}
\text{Temps de } G \text{ à } H &= \sqrt{(\text{Temps de } H \text{ à } F)^2+(\text{Temps de } F \text{ à } G)^2}\\
&= \sqrt{60^2+45^2}\\
&= \sqrt{5625}\\
&= 75
\end{aligned}$$

puisque le temps est positif.
L'abeille s'est donc absentée de la ruche pendant $(195+75)$ minutes, ou 270 minutes.

(b) *Solution 1*

Puisque $\angle OPB=90^\circ$, alors OP et PB sont perpendiculaires et le produit de leur pente est donc égal à -1.
La pente de OP est égale à $\dfrac{4-0}{p-0}$, ou $\dfrac{4}{p}$. La pente de PB est égale à $\dfrac{4-0}{p-10}$, ou $\dfrac{4}{p-10}$.
On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{4}{p}\cdot\frac{4}{p-10} &= -1\\
16 &= -p(p-10)\\
p^2-10p+16 &= 0\\
(p-2)(p-8) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $p=2$ ou $p=8$.

Solution 2

Puisque le triangle OPB est rectangle en P, alors $OP^2+PB^2=OB^2$ selon le théorème de Pythagore.

Puisque O et B ont pour coordonnées respectives $(0,0)$ et $(10,0)$, alors $OB = 10$.
De plus, $OP^2 = (p-0)^2+(4-0)^2$, ou $OP^2 = p^2+16$. De même, $PB^2 = (10-p)^2+(4-0)^2$, ou $PB^2 = p^2 - 20p + 116$.
Donc :

$$\begin{aligned}(p^2+16)+(p^2-20p+116) &= 10^2\\ 2p^2-20p+32 &= 0\\ p^2-10p+16 &= 0\\ (p-2)(p-8) &= 0\end{aligned}$$

Donc $p = 2$ ou $p = 8$.

4. (a) Supposons que Tanya a acheté x chèvres et y hélicoptères.
On a donc $19x + 17y = 201$.
Puisque x et y sont des entiers non négatifs, alors $19x \leq 201$, d'où $x \leq 10$.
Si $x = 10$, alors $17y = 201 - 19x$ devient $17y = 11$, qui n'admet aucune solution entière, puisque 11 n'est pas divisible par 17.
Si $x = 9$, alors $17y = 201 - 19x$ devient $17y = 30$, qui n'admet aucune solution entière.
Si $x = 8$, alors $17y = 201 - 19x$ devient $17y = 49$, qui n'admet aucune solution entière.
Si $x = 7$, alors $17y = 201 - 19x$ devient $17y = 68$, d'où $y = 4$.
On a $19(7) + 17(4) = 201$. Donc, Tanya a acheté 7 chèvres et 7 hélicoptères.
(On peut vérifier que si $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, l'équation n'admet aucune valeur entière de y.)

(b) *Solution 1*
On a :

$$\begin{aligned}(x+8)^4 &= (2x+16)^2\\ (x+8)^4-2^2(x+8)^2 &= 0\\ (x+8)^2((x+8)^2-2^2) &= 0\\ (x+8)^2((x+8)+2)((x+8)-2) &= 0\\ (x+8)^2(x+10)(x+6) &= 0\end{aligned}$$

Donc $x = -8$ ou $x = -10$ ou $x = -6$.

Solution 2
On a :

$$\begin{aligned}(x+8)^4 &= (2x+16)^2\\ (x+8)^4-2^2(x+8)^2 &= 0\\ (x+8)^2((x+8)^2-2^2) &= 0\\ (x+8)^2(x^2+16x+64-4) &= 0\\ (x+8)^2(x^2+16x+60) &= 0\\ (x+8)^2(x+10)(x+6) &= 0\end{aligned}$$

Donc $x = -8$ ou $x = -10$ ou $x = -6$.

Solution 3
Puisque $(x+8)^4 = (2x+16)^2$, alors $(x+8)^2 = 2x+16$ ou $(x+8)^2 = -(2x+16)$.
D'après la 1re équation, $x^2+16x+64 = 2x+16$, ou $x^2+14x+48 = 0$, ou $(x+6)(x+8) = 0$.
D'après la 2e équation, $x^2+16x+64 = -2x-16$, ou $x^2+18x+80 = 0$, ou $(x+10)(x+8) = 0$.
Donc $x = -8$ ou $x = -10$ ou $x = -6$.

5. (a) *Solution 1*

On fait appel au fait que $g(x) = g(f(f^{-1}(x)))$.
Puisque $f(x) = 2x + 1$, la fonction f est définie par $y = 2x + 1$. Donc, la fonction f^{-1} est définie par $x = 2y + 1$, ou $2y = x - 1$, ou $y = \frac{1}{2}(x - 1)$. Donc $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$.
Puisque $g(f(x)) = 4x^2 + 1$, alors :

$$\begin{aligned} g(x) &= g(f(f^{-1}(x))) \\ &= g(f(\tfrac{1}{2}(x-1))) \\ &= 4(\tfrac{1}{2}(x-1))^2 + 1 \\ &= 4 \cdot \tfrac{1}{4}(x-1)^2 + 1 \\ &= (x-1)^2 + 1 \\ &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

Solution 2

On utilise les expressions algébriques de $f(x)$ et de $g(f(x))$ pour obtenir $g(x)$.
Puisque $f(x)$ est une expression du premier degré et que $g(f(x))$ est une expression du second degré, il est probable que $g(x)$ soit une expression du second degré.
Puisque $f(x) = 2x + 1$, alors $(f(x))^2 = 4x^2 + 4x + 1$.
Puisque $g(f(x))$ n'admet aucun terme en x, on soustrait $2f(x)$ pour éliminer le terme $4x$, ce qui donne :

$$(f(x))^2 - 2f(x) = (4x^2 + 4x + 1) - 2(2x + 1) = 4x^2 - 1$$

Pour obtenir $g(f(x))$, on ajoute 2, ce qui donne $4x^2 + 1$.
Donc $g(f(x)) = (f(x))^2 - 2f(x) + 2$. Donc $g(x) = x^2 - 2x + 2$.

Solution 3

On utilise les expressions algébriques de $f(x)$ et de $g(f(x))$ pour construire celle de $g(x)$.
Puisque $f(x)$ est une expression du premier degré et que $g(f(x))$ est une expression du second degré, il est probable que $g(x)$ soit une expression du second degré.
Soit $g(x) = ax^2 + bx + c$, a, b et c étant des nombres réels. Donc :

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(2x+1) \\ &= a(2x+1)^2 + b(2x+1) + c \\ &= a(4x^2 + 4x + 1) + b(2x+1) + c \\ &= 4ax^2 + (4a + 2b)x + (a + b + c) \end{aligned}$$

Or, on sait que $g(f(x)) = 4x^2 + 1$. On compare les coefficients deux à deux pour conclure que $4a = 4$, $4a + 2b = 0$ et $a + b + c = 1$.
D'après la première équation, $a = 1$.
D'après la deuxième équation, $b = -2a$, d'où $b = -2$.
D'après la troisième équation, $c = 1 - a - b$, d'où $c = 2$.
Donc $g(x) = x^2 - 2x + 2$.

(b) *Solution 1*

Puisque les deux premiers termes ont une somme de 40 et que les trois premiers termes ont une somme de 76, le 3[e] terme est égal à $76 - 40$, ou 36.
Puisque les trois premiers termes ont une somme de 76 et que les quatre premiers termes ont une somme de 130, le 4[e] terme est égal à $130 - 76$, ou 54.
Puisque le 3[e] terme est égal à 36 et que le 4[e] terme est égal à 54, la raison géométrique de la suite est égale à $\frac{54}{36}$, ou $\frac{3}{2}$.

Donc, le 5e terme est égal à $54 \cdot \frac{3}{2}$, ou 81, et le 6e terme est égal à $81 \cdot \frac{3}{2}$, ou $\frac{243}{2}$.
Le 2e terme est égal à $36 \div \frac{3}{2}$, c'est-à-dire à $36 \cdot \frac{2}{3}$, ou 24 et le 1er terme est égal à $24 \div \frac{3}{2}$, c'est-à-dire à $24 \cdot \frac{2}{3}$, ou 16.
Les six premiers termes de la suite sont 16, 24, 36, 54, 81 et $\frac{243}{2}$.
Puisque le 1er terme est égal à 2^4 et que la raison est égale à $\frac{3}{2}$, alors le n^{ieme} terme de la suite est égal à $2^4\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$, ou $\dfrac{3^{n-1}}{2^{n-5}}$.
Lorsque $n \geq 6$, cette expression devient une fraction dont le numérateur est impair et le dénominateur est pair. Donc lorsque $n \geq 6$, le n^{ieme} terme n'est pas un entier. (Aucun entier impair n'est divisible par un entier pair.)
Donc, il y a 5 entiers dans la suite.

Solution 2
Soit a le premier terme de la suite et r la raison géométrique. (Donc, les deuxième et troisième termes sont ar et ar^2, et ainsi de suite.) D'après les renseignements donnés, on a $a + ar = 40$, $a + ar + ar^2 = 76$ et $a + ar + ar^2 + ar^3 = 130$.
On soustrait la première équation de la deuxième, membre par membre, pour obtenir $ar^2 = 36$.
On soustrait la deuxième équation de la troisième, membre par membre, pour obtenir $ar^3 = 54$. Puisque $ar^3 = 54$ et $ar^2 = 36$, alors $r = \dfrac{ar^3}{ar^2}$, d'où $r = \dfrac{54}{36}$, ou $r = \dfrac{3}{2}$.
Puisque $ar^2 = 36$ et $r = \frac{3}{2}$, alors $a(\frac{3}{2})^2 = 36$, ou $\frac{9}{4}a = 36$, d'où $a = \frac{4}{9} \cdot 36$, ou $a = 16$.
Puisque $a = 16$ et $r = \frac{3}{2}$, les six premiers termes de la suite sont 16, 24, 36, 54, 81 et $\frac{243}{2}$.
Puisque le 1er terme est égal à 2^4 et que la raison est égale à $\frac{3}{2}$, alors le n^{ieme} terme de la suite est égal à $2^4\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$, ou $\dfrac{3^{n-1}}{2^{n-5}}$.
Lorsque $n \geq 6$, cette expression devient une fraction dont le numérateur est impair et le dénominateur est pair. Donc lorsque $n \geq 6$, le n^{ieme} terme n'est pas un entier. (Aucun entier impair n'est divisible par un entier pair.)
Donc, il y a 5 entiers dans la suite.

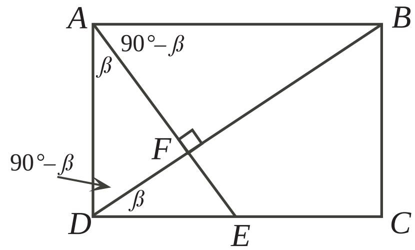
6. (a) Dans un triangle remarquable 30°-60°-90°, le rapport de la longueur de l'hypoténuse à la longueur du côté opposé à l'angle de 60° est de $2 : \sqrt{3}$.
Or, ABC, ACD, ADE, AEF, AFG et AGH sont tous des triangles remarquables 30°-60°-90°. Donc $\dfrac{AH}{AG} = \dfrac{AG}{AF} = \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
Donc $AH = \frac{2}{\sqrt{3}}AG = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 AF = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 AE = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 AD = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^5 AC = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^6 AB$.
(C'est-à-dire que pour se rendre de la longueur $AB = 1$ à la longueur AH, on multiplie successivement six fois par le facteur d'agrandissement $\frac{2}{\sqrt{3}}$.)
Donc $AH = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^6$, ou $AH = \frac{64}{27}$.

(b) *Solution 1*
Puisque le triangle AFD est rectangle en F, alors par le théorème de Pythagore :

$$AD = \sqrt{AF^2 + FD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

puisque $AD > 0$.
Soit $\angle FAD = \beta$.

Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $\angle BAF = 90^\circ - \beta$.
Puisque le triangle AFD est rectangle en F, alors $\angle ADF = 90^\circ - \beta$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $\angle BDC = 90^\circ - (90^\circ - \beta)$, ou $\angle BDC = \beta$.



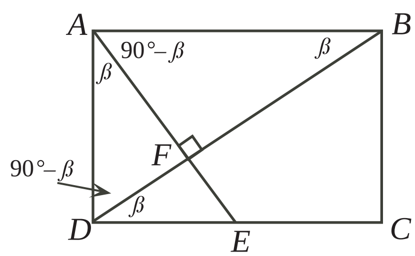
Puisque les triangles BFA, AFD et DFE sont rectangles et que chacun a un angle β ainsi qu'un angle $90^\circ - \beta$, ils sont semblables.
Donc $\dfrac{AB}{AF} = \dfrac{DA}{DF}$, d'où $AB = \frac{4(2\sqrt{5})}{2}$, ou $AB = 4\sqrt{5}$.
De même, $\dfrac{FE}{FD} = \dfrac{FD}{FA}$, d'où $FE = \frac{2(2)}{4}$, ou $FE = 1$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $BC = AD = 2\sqrt{5}$ et $DC = AB = 4\sqrt{5}$.
L'aire du quadrilatère $BCEF$ est égale à l'aire du triangle DCB moins l'aire du triangle DFE. Elle est donc égale à :

$$\tfrac{1}{2}(DC)(CB) - \tfrac{1}{2}(DF)(FE) = \tfrac{1}{2}(4\sqrt{5})(2\sqrt{5}) - \tfrac{1}{2}(2)(1) = 20 - 1 = 19$$

Solution 2
Puisque le triangle AFD est rectangle en F, alors par le théorème de Pythagore :

$$AD = \sqrt{AF^2 + FD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

puisque $AD > 0$.
Soit $\angle FAD = \beta$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $\angle BAF = 90^\circ - \beta$. Puisque le triangle BAF est rectangle en F, alors $\angle ABF = \beta$.
Puisque le triangle AFD est rectangle en F, alors $\angle ADF = 90^\circ - \beta$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $\angle BDC = 90^\circ - (90^\circ - \beta)$, ou $\angle BDC = \beta$.



Dans le triangle AFD, on a $\sin\beta = \dfrac{FD}{AD} = \dfrac{2}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \dfrac{AF}{AD} = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $\tan\beta = \dfrac{FD}{AF} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
Puisque $AF = 4$ et $\angle ABF = \beta$, alors $AB = \dfrac{AF}{\sin\beta}$, d'où $AB = \dfrac{4}{\frac{1}{\sqrt{5}}}$, ou $AB = 4\sqrt{5}$.
Puisque $FD = 2$ et $\angle FDE = \beta$, alors $FE = FD\tan\beta$, d'où $FE = 2 \cdot \frac{1}{2}$, ou $FE = 1$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $BC = AD = 2\sqrt{5}$ et $DC = AB = 4\sqrt{5}$.

L'aire du quadrilatère $BCEF$ est égale à l'aire du triangle DCB moins l'aire du triangle DFE. Elle est donc égale à :

$$\tfrac{1}{2}(DC)(CB) - \tfrac{1}{2}(DF)(FE) = \tfrac{1}{2}(4\sqrt{5})(2\sqrt{5}) - \tfrac{1}{2}(2)(1) = 20 - 1 = 19$$

7. (a) On utilise les lois des exposants. Puisque $9 = 3^2$ et $27 = 3^3$, alors :

$$\begin{aligned} 3^{x-1}9^{\frac{3}{2x^2}} &= 27 \\ 3^{x-1}(3^2)^{\frac{3}{2x^2}} &= 3^3 \\ 3^{x-1}3^{\frac{3}{x^2}} &= 3^3 \\ 3^{x-1+\frac{3}{x^2}} &= 3^3 \end{aligned}$$

Puisque deux puissances de 3 sont égales, leurs exposants doivent être égaux. Donc :

$$\begin{aligned} x - 1 + \frac{3}{x^2} &= 3 \\ x^3 - x^2 + 3 &= 3x^2 \qquad \text{(on a multiplié chaque membre par } x^2\text{)} \\ x^3 - 4x^2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Puisque l'équation est vérifiée par $x = 1$, alors $x - 1$ est un facteur du membre de gauche. On divise le membre de gauche par $x - 1$ pour obtenir l'autre facteur.
On obtient $(x - 1)(x^2 - 3x - 3) = 0$.
L'équation du second degré $x^2 - 3x - 3 = 0$ a pour racines :

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Donc, l'équation donnée a pour racines 1 et $\dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$.

(b) Aux points d'intersection des courbes, les valeurs de y sont égales.
Donc $\log_{10}(x^4) = (\log_{10} x)^3$.
Puisque $\log_{10}(a^b) = b \log_{10} a$, l'équation devient $4 \log_{10} x = (\log_{10} x)^3$.
Posons $u = \log_{10} x$. L'équation devient $4u = u^3$, ou $u^3 - 4u = 0$.
On peut factoriser le membre de gauche : $u^3 - 4u = u(u^2 - 4) = u(u + 2)(u - 2)$
L'équation devient $u(u + 2)(u - 2) = 0$, d'où $u = 0$ ou $u = -2$ ou $u = 2$.
Donc $\log_{10} x = 0$ ou $\log_{10} x = -2$ ou $\log_{10} x = 2$. Donc $x = 1$ ou $x = \frac{1}{100}$ ou $x = 100$.
Il reste à déterminer l'ordonnée des points d'intersection. Puisqu'une des courbes a pour équation $y = (\log_{10} x)^3$, on peut calculer les valeurs de y en utilisant $y = u^3$.
Les valeurs correspondantes de y sont $y = 0^3$, $y = (-2)^3$ et $y = 2^3$, c'est-à-dire $y = 0$, $y = -8$ et $y = 8$.
Les points d'intersection sont $(1, 0)$, $(\frac{1}{100}, -8)$ et $(100, 8)$.

8. (a) Si Oumar obtient 3 faces, Georges ne peut rien lancer et ne peut obtenir 1 face.
Si Oumar obtient 0, 1 ou 2 faces, Georges peut lancer à son tour et il lui est possible d'obtenir 1 face.
Voici donc les possibilités pour Georges d'obtenir exactement 1 face :
– Oumar lance 3 pièces et obtient 2 faces. Georges lance 1 pièce et obtient 1 face.
– Oumar lance 3 pièces et obtient 1 face. Georges lance 2 pièces et obtient 1 face.
– Oumar lance 3 pièces et obtient 0 face. Georges lance 3 pièces et obtient 1 face.
On détermine maintenant les probabilités.
Si on lance 3 pièces, il y a 8 résultats équiprobables possibles : FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF et PPP. Chacun de ces résultats a une probabilité de $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, ou $\frac{1}{8}$.

Donc :

– La probabilité de lancer 3 pièces et d'obtenir 0 face est égale à $\frac{1}{8}$.
– La probabilité de lancer 3 pièces et d'obtenir 1 face est égale à $\frac{3}{8}$.
– La probabilité de lancer 3 pièces et d'obtenir 2 faces est égale à $\frac{3}{8}$.
– La probabilité de lancer 3 pièces et d'obtenir 3 faces est égale à $\frac{1}{8}$.

Si on lance 2 pièces, il y a 4 résultats équiprobables possibles : FF, FP, PF et PP. Chacun de ces résultats a une probabilité de $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, ou $\frac{1}{4}$. Donc, la probabilité de lancer 2 pièces et d'obtenir 1 face est égale à $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$.

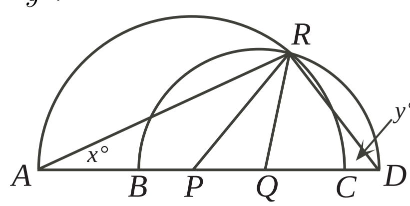
La probabilité de lancer 1 pièce et d'obtenir 1 face est égale à $\frac{1}{2}$.

Voici un résumé des possibilités :

– Oumar lance 3 pièces et obtient 2 faces (une probabilité de $\frac{3}{8}$) et Georges lance 1 pièce et obtient une face (une probabilité de $\frac{1}{2}$).
– Oumar lance 3 pièces et obtient 1 face (une probabilité de $\frac{3}{8}$) et Georges lance 2 pièces et obtient 1 face (une probabilité de $\frac{1}{2}$).
– Oumar lance 3 pièces et obtient 0 face (une probabilité de $\frac{1}{8}$) et Georges lance 3 pièces et obtient 1 face (une probabilité de $\frac{3}{8}$).

La probabilité pour que Georges obtienne exactement une face est égale à $\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8}$, ou $\frac{27}{64}$.

(b) Soit $\angle PAR = x^\circ$ et $\angle QDR = y^\circ$.



Puisque PR et PA sont des rayons du grand demi-cercle, le triangle PAR est isocèle.
Donc $\angle PRA = \angle PAR = x^\circ$.
Puisque QD et QR sont des rayons du petit demi-cercle, le triangle QRD est isocèle.
Donc $\angle QRD = \angle QDR = y^\circ$.
Les mesures d'angles du triangle ARD ont une somme de 180°.
Donc $x^\circ + (x^\circ + 40^\circ + y^\circ) + y^\circ = 180^\circ$, d'où $2x + 2y = 140$, ou $x + y = 70$.
Donc $\angle ARD = x^\circ + 40^\circ + y^\circ$, ou $\angle ARD = (x + y + 40)^\circ$, ou $\angle ARD = 110^\circ$.

9. (a) (i) *Solution 1*

$$\begin{aligned}
\text{M.G.} &= \cot\theta - \cot 2\theta \\
&= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \\
&= \frac{\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta}{\sin\theta\sin 2\theta} \\
&= \frac{\sin(2\theta-\theta)}{\sin\theta\sin 2\theta} \\
&= \frac{\sin\theta}{\sin\theta\sin 2\theta} \\
&= \frac{1}{\sin 2\theta} \\
&= \text{M.D.}
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Solution 2

$$\begin{array}{rcl} \text{M.G.} & = & \cot\theta - \cot 2\theta \\ & = & \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \\ & = & \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\cos 2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} \\ & = & \dfrac{2\cos^2\theta - \cos 2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} \\ & = & \dfrac{2\cos^2\theta - (2\cos^2\theta - 1)}{\sin 2\theta} \\ & = & \dfrac{1}{\sin 2\theta} \\ & = & \text{M.D.} \end{array}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

(ii) Selon la partie (i), on a $\dfrac{1}{\sin 8^\circ} = \cot 4^\circ - \cot 8^\circ$, $\dfrac{1}{\sin 16^\circ} = \cot 8^\circ - \cot 16^\circ$ et ainsi de suite. Donc :

$$\begin{array}{rcl} S & = & \dfrac{1}{\sin 8^\circ} + \dfrac{1}{\sin 16^\circ} + \dfrac{1}{\sin 32^\circ} + \cdots + \dfrac{1}{\sin 4096^\circ} + \dfrac{1}{\sin 8192^\circ} \\ & = & (\cot 4^\circ - \cot 8^\circ) + (\cot 8^\circ - \cot 16^\circ) + (\cot 16^\circ - \cot 32^\circ) + \\ & & \qquad \cdots + (\cot 2048^\circ - \cot 4096^\circ) + (\cot 4096^\circ - \cot 8192^\circ) \\ & = & \cot 4^\circ - \cot 8192^\circ \end{array}$$

puisque la somme est téléscopée.
Puisque la fonction cotangeante a une période de 180° et que 8100° est un multiple de 180°, alors $\cot 8192^\circ = \cot 92^\circ$.
Donc :

$$\begin{array}{rcl} S & = & \cot 4^\circ - \cot 92^\circ \\ & = & \dfrac{\cos 4^\circ}{\sin 4^\circ} - \dfrac{\cos 92^\circ}{\sin 92^\circ} \\ & = & \dfrac{\cos 4^\circ}{\sin 4^\circ} - \dfrac{-\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} \\ & = & \dfrac{\cos 4^\circ}{2\sin 2^\circ\cos 2^\circ} + \dfrac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} \\ & = & \dfrac{\cos 4^\circ + 2\sin^2 2^\circ}{2\sin 2^\circ \cos 2^\circ} \\ & = & \dfrac{(1 - 2\sin^2 2^\circ) + 2\sin^2 2^\circ}{\sin 4^\circ} \\ & = & \dfrac{1}{\sin 4^\circ} \end{array}$$

Donc $\alpha = 4^\circ$.

(b) *Solution 1*

On utilisera la notation suivante : $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$ et $C = \angle ACB$.
Il faut démontrer que $A < \frac{1}{2}(B + C)$. Puisque les mesures d'angles du triangle ABC ont une somme de 180°, alors $B+C = 180° - A$. L'inégalité est équivalente à $A < \frac{1}{2}(180° - A)$, c'est-à-dire à $\frac{3}{2}A < 90°$ ou $A < 60°$.
Il faut donc démontrer que $A < 60°$.
On sait que $a < \frac{1}{2}(b + c)$. Donc $2a < b + c$, d'où $4a^2 < b^2 + c^2 + 2bc$, puisque toutes les quantités sont positives.
D'après la loi du cosinus dans le triangle ABC, on a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Donc :

$$\begin{array}{rcll}
4a^2 & < & b^2 + c^2 + 2bc & \\
4(b^2 + c^2 - 2bc \cos A) & < & b^2 + c^2 + 2bc & \\
4b^2 + 4c^2 - 8bc \cos A & < & b^2 + c^2 + 2bc & \\
4b^2 + 4c^2 - 8bc \cos A & < & b^2 + c^2 + 2bc + 3(b - c)^2 & \text{(puisque } (b-c)^2 \geq 0) \\
4b^2 + 4c^2 - 8bc \cos A & < & b^2 + c^2 + 2bc + 3b^2 - 6bc + 3c^2 & \\
4b^2 + 4c^2 - 8bc \cos A & < & 4b^2 + 4c^2 - 4bc & \\
-8bc \cos A & < & -4bc & \\
\cos A & > & \frac{1}{2} & \text{(puisque } 8bc > 0)
\end{array}$$

Puisque $2a < b+c$, a ne peut être la longueur du plus grand côté du triangle ABC (c'est-à-dire qu'on ne peut avoir $a \geq b$ et $a \geq c$). Donc, A est la mesure d'un angle aigu.
Puisque $\cos A > \frac{1}{2}$, alors $A < 60°$.

Solution 2

On utilisera la notation suivante : $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$ et $C = \angle ACB$.
Il faut démontrer que $A < \frac{1}{2}(B + C)$. Puisque les mesures d'angles du triangle ABC ont une somme de 180°, alors $B+C = 180° - A$, l'inégalité est équivalente à $A < \frac{1}{2}(180° - A)$, c'est-à-dire à $\frac{3}{2}A < 90°$ ou $A < 60°$.
Il faut donc démontrer que $A < 60°$.
On sait que $a < \frac{1}{2}(b + c)$, d'où $2a < b + c$.
D'après la loi des sinus dans le triangle ABC, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, d'où $b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$ et $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$.
On obtient donc les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{rcll}
2a & < & b + c & \\
2a & < & \dfrac{a \sin B}{\sin A} + \dfrac{a \sin C}{\sin A} & \\
2a \sin A & < & a \sin B + a \sin C & \text{(puisque } \sin A > 0 \text{ lorsque } 0° < A < 180°) \\
2 \sin A & < & \sin B + \sin C & \text{(puisque } a > 0)
\end{array}$$

On fait appel à l'identité $\sin B + \sin C = 2 \sin \left(\dfrac{B+C}{2} \right) \cos \left(\dfrac{B-C}{2} \right)$.

Puisque $\cos \theta \leq 1$ pour tout θ, alors $\sin B + \sin C \leq 2 \sin \left(\dfrac{B+C}{2} \right) \cdot 1 = 2 \sin \left(\dfrac{B+C}{2} \right)$.

Donc :

$$\begin{aligned}
2\sin A &< \sin B + \sin C \leq 2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \\
2\sin A &< 2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \\
2\sin A &< 2\sin\left(\frac{180^\circ - A}{2}\right) \\
4\sin(\tfrac{1}{2}A)\cos(\tfrac{1}{2}A) &< 2\sin(90^\circ - \tfrac{1}{2}A) \\
2\sin(\tfrac{1}{2}A)\cos(\tfrac{1}{2}A) &< \cos(\tfrac{1}{2}A)
\end{aligned}$$

Puisque $0^\circ < A < 180^\circ$, alors $\cos(\frac{1}{2}A) > 0$, d'où $\sin(\frac{1}{2}A) < \frac{1}{2}$.
Puisque $2a < b+c$, a ne peut être la longueur du plus grand côté du triangle ABC. Donc, A est la mesure d'un angle aigu.
Donc $\frac{1}{2}A < 30^\circ$, ou $A < 60^\circ$.

10. Soit a, b et c, $(0 < a \leq b \leq c)$ les longueurs de côtés d'un triangle.
Ces longueurs forment un triangle si $c < a+b$, $b < a+c$ et $a < b+c$.
Puisque $0 < a \leq b \leq c$, on a par le fait même $b < a+c$ et $a < b+c$. Il suffira donc de vérifier $c < a+b$.
Au lieu de considérer des triangles et des ensembles de triangles de façon explicite, on considère des triplets (a,b,c) et des ensembles de triplets (a,b,c) avec les conditions qui s'imposent.
Pour chaque entier $k \geq 3$, soit S_k l'ensemble des triplets (a,b,c) d'entiers strictement positifs tels que $0 < a \leq b \leq c$, $c < a+b$ et $a+b+c = k$.
Puisque $c < a+b$ et $a+b+c=k$, alors $c+c < a+b+c = k$, d'où $2c < k$, ou $c < \frac{1}{2}k$.
Puisque $0 < a \leq b \leq c$ et $a+b+c=k$, alors $k = a+b+c \leq c+c+c$, d'où $3c \geq k$, ou $c \geq \frac{1}{3}k$.

(a) On considère $T(10)$, qui représente le nombre de triplets dans l'ensemble S_{10}.
On cherche tous les triplets possibles (a,b,c) d'entiers positifs pour lesquels $0 < a \leq b \leq c$, $c < a+b$ et $a+b+c = 10$.
Il faut que $c < \frac{10}{2} = 5$ et que $c \geq \frac{10}{3}$. Donc $c = 4$.
Il faut donc que $0 < a \leq b \leq 4$ et $a+b = 6$.
Il y a deux possibilités, soit $(a,b,c) = (2,4,4)$ et $(a,b,c) = (3,3,4)$.
Donc $T(10) = 2$.

On considère $T(11)$. On cherche tous les triplets possibles (a,b,c) d'entiers positifs pour lesquels $0 < a \leq b \leq c$, $c < a+b$ et $a+b+c = 11$.
Il faut que $c < \frac{11}{2}$ et que $c \geq \frac{11}{3}$. Donc $c = 4$ ou $c = 5$.
Si $c = 4$, il faut que $0 < a \leq b \leq 4$ et que $a+b = 7$.
Il n'y a qu'une possibilité, soit $(a,b,c) = (3,4,4)$.
Si $c = 5$, il faut que $0 < a \leq b \leq 5$ et que $a+b = 6$.
Il y a trois possibilités, soit $(a,b,c) = (1,5,5)$, $(a,b,c) = (2,4,5)$ et $(a,b,c) = (3,3,5)$.
Donc $T(11) = 4$.

On considère $T(12)$. On cherche tous les triplets possibles (a,b,c) d'entiers positifs pour lesquels $0 < a \leq b \leq c$, $c < a+b$ et $a+b+c = 12$.
Il faut que $c < \frac{12}{2}$ et que $c \geq \frac{12}{3}$. Donc $c = 4$ ou $c = 5$.
Si $c = 4$, il faut que $0 < a \leq b \leq 4$ et que $a+b = 8$.
Il y a une seule possibilité, soit $(a,b,c) = (4,4,4)$.
Si $c = 5$, il faut que $0 < a \leq b \leq 5$ et que $a+b = 7$.

Il y a deux possibilités, soit $(a,b,c)=(2,5,5)$ et $(a,b,c)=(3,4,5)$.
Donc $T(12)=3$.

(b) On démontre que $T(2m)=T(2m-3)$ en créant une correspondance biunivoque entre les triplets de S_{2m} et les triplets de S_{2m-3}.
On rappelle que S_{2m} est l'ensemble de triplets (a,b,c) d'entiers strictement positifs tels que $0<a\leq b\leq c$, $c<a+b$ et $a+b+c=2m$.
De même, S_{2m-3} est l'ensemble de triplets (A,B,C) d'entiers strictement positifs tels que $0<A\leq B\leq C$, $C<A+B$ et $A+B+C=2m-3$.

On considère un triplet (a,b,c) dans S_{2m} et un triplet correspondant $(a-1,b-1,c-1)$.
On démontrera que $(a-1,b-1,c-1)$ est dans l'ensemble S_{2m-3} :
- Puisque (a,b,c) est dans S_{2m}, alors $c<\frac{1}{2}(2m)$, ou $c<m$. Donc $b\leq c\leq m-1$, d'où $a=2m-b-c\geq 2$. Donc $a-1$, $b-1$ et $c-1$ sont des entiers strictement positifs puisque a, b et c sont des entiers positifs et que $2\leq a\leq b\leq c$.
- Puisque $2\leq a\leq b\leq c$, alors $1\leq a-1\leq b-1\leq c-1$. Donc $0<a-1\leq b-1\leq c-1$.
- Puisque $a+b+c=2m$, alors $c=2m-(a+b)$. Donc, $a+b$ et c ont la même parité. Puisque $c<a+b$, alors $c\leq a+b-2$. (En d'autres mots, il est impossible que $c=a+b-1$.) Donc $c-1\leq(a-1)+(b-1)-1$, c'est-à-dire que $c-1<(a-1)+(b-1)$.
- Puisque $a+b+c=2m$, alors $(a-1)+(b-1)+(c-1)=2m-3$.

Donc, $(a-1,b-1,c-1)$ est dans S_{2m-3}, puisqu'il satisfait aux conditions de S_{2m-3}.
On remarque aussi que deux triplets distincts de S_{2m} correspondent à deux triplets distincts de S_{2m-3}. Donc, chaque triplet de S_{2m} correspond à un triplet distinct de S_{2m-3}.
Donc $T(2m)\leq T(2m-3)$.

On considère un triplet (A,B,C) de S_{2m-3} et un triplet correspondant $(A+1,B+1,C+1)$.
On démontrera que $(A+1,B+1,C+1)$ est dans l'ensemble S_{2m} :
- Puisque (A,B,C) est dans S_{2m-3}, alors A, B et C sont des entiers strictement positifs. Donc $A+1$, $B+1$ et $C+1$ sont des entiers strictement positifs.
- Puisque $0<A\leq B\leq C$, alors $1<A+1\leq B+1\leq C+1$. Donc $0<A+1\leq B+1\leq C+1$.
- Puisque $C<A+B$, alors $C+1<(A+1)+(B+1)-1$. Donc $C+1<(A+1)+(B+1)$.
- Puisque $A+B+C=2m-3$, alors $(A+1)+(B+1)+(C+1)=2m$.

Donc $(A+1,B+1,C+1)$ est dans S_{2m}.
On remarque aussi que deux triplets distincts de S_{2m-3} correspondent à deux triplets distincts de S_{2m}. Donc, chaque triplet de S_{2m-3} correspond à un triplet distinct de S_{2m}.
Donc $T(2m-3)\leq T(2m)$.

Puisque $T(2m)\leq T(2m-3)$ et $T(2m-3)\leq T(2m)$, alors $T(2m)=T(2m-3)$.

(c) On fait appel à deux propriétés importantes :
(P1) $T(2m)=T(2m-3)$ pour tout entier m pour lequel $m\geq 3$
(P2) $T(k)\leq T(k+2)$ pour tout entier k pour lequel $k\geq 3$
La propriété (P1) a été démontrée dans la partie (b).
On démontre (P2) :

On considère un triplet (a,b,c) dans S_k et un triplet correspondant $(a,b+1,c+1)$.
On démontre que le triplet $(a,b+1,c+1)$ est dans S_{k+2} :
- Puisque a, b et c sont des entiers strictement positifs, alors a, $b+1$ et $c+1$ le sont aussi.
- Puisque $0<a\leq b\leq c$, alors $0<a\leq b+1\leq c+1$.
- Puisque $c<a+b$, alors $c+1<a+(b+1)$.
- Puisque $a+b+c=k$, alors $a+(b+1)+(c+1)=k+2$.

Donc, $(a, b+1, c+1)$ est dans l'ensemble S_{k+2}. On remarque que selon cette correspondance, des triplets distincts dans S_k correspondent à des triplets distincts dans S_{k+2}. Donc $T(k) \leq T(k+2)$.

Soit N le plus petit entiers positif n pour lequel $T(n) > 2010$.
N doit être impair :

En effet, si N était pair, alors selon (P1), on aurait $T(N-3) = T(N) > 2010$ et le nombre $n = N-3$ serait un entier positif plus petit que N pour lequel $T(n) > 2010$. Ceci contredirait la définition de N comme étant le plus petit entier positif n pour lequel $T(n) > 2010$.

On cherche donc le plus petit entier impair positif N pour lequel $T(N) > 2010$.
On remarque que si on découvre une valeur de n pour laquelle $T(n) > 2010 \geq T(n-2)$, on aura alors déterminé la valeur de n que l'on cherche :

En effet, puisque n et $n-2$ sont impairs et puisque, selon la propriété (P2), tout entier positif impair k donnera $T(k) \leq T(n-2) \leq 2010$ et tout entier positif supérieur m donnera $T(m) \geq T(n) > 2010$.

On montre que la valeur de N est 309 en montrant que $T(309) > 2010$ et $T(307) \leq 2010$. (Ce choix de $N = 309$ est expliqué plus loin.)

Calcul de $T(309)$

On sait que $\frac{309}{3} \leq c < \frac{309}{2}$, d'où $103 \leq c \leq 154$.
Pour chaque valeur admissible de c, on doit compter le nombre de couples (a, b) d'entiers strictement positifs pour lesquels $a \leq b \leq c$ et $a + b = 309 - c$.
Par exemple si $c = 154$, il faut que $a \leq b \leq 154$ et que $a + b = 155$.
On obtient ainsi les couples $(1, 154), (2, 153), \ldots, (76, 79), (77, 78)$. Il y en a 77.
De même, si $c = 153$, il faut que $a \leq b \leq 153$ et que $a + b = 156$.
On obtient ainsi les couples $(3, 153), \ldots, (77, 79), (78, 78)$. Il y en a 76.
De façon générale, si c est pair, alors la valeur minimale possible de a se produit lorsque b est aussi grand que possible, c'est-à-dire lorsque $b = c$. Donc $a \geq 309 - 2c$.
De plus, la plus grande valeur possible de a se produit lorsque a et b sont aussi près l'une de l'autre que possible. Puisque c est pair, alors $309-c$ est impair. Donc, a et b ne peuvent être égaux, mais ils peuvent différer de 1. Dans ce cas, $a = 154 - \frac{1}{2}c$ et $b = 155 - \frac{1}{2}c$.
Donc si c est pair, le nombre de couples (a, b) possibles est égal à $(154-\frac{1}{2}c)-(309-2c)+1$, ou $\frac{3}{2}c - 154$. Le nombre de triplets possibles est donc égal à $\frac{3}{2}c - 154$.
De façon générale, si c est impair, alors la valeur minimale possible de a se produit lorsque b est aussi grand que possible, c'est-à-dire lorsque $b = c$. Donc $a \geq 309 - 2c$.
De plus, la plus grande valeur possible de a se produit lorsque a et b sont aussi près l'une de l'autre que possible. Puisque c est impair, alors $309 - c$ est pair. Donc a et b peuvent être égaux. Dans ce cas, $a = \frac{1}{2}(309 - c)$.
Donc si c est impair, le nombre de couples (a, b) possibles est égal à $\frac{1}{2}(309-c)-(309-2c)+1$, ou $\frac{3}{2}c - \frac{307}{2}$. Le nombre de triplets possibles est donc égal à $\frac{3}{2}c - \frac{307}{2}$.
Les valeurs paires possibles de c sont $104, 106, \ldots, 152, 154$ (il y en a 26) et les valeurs impaires possibles de c sont $103, 105, \ldots, 151, 153$ (il y en a 26).

Donc :

$$\begin{aligned} T(309) &= \left(\tfrac{3}{2}(104) - 154\right) + \left(\tfrac{3}{2}(106) - 154\right) + \cdots + \left(\tfrac{3}{2}(154) - 154\right) + \\ &\qquad \left(\tfrac{3}{2}(103) - \tfrac{307}{2}\right) + \left(\tfrac{3}{2}(105) - \tfrac{307}{2}\right) + \cdots + \left(\tfrac{3}{2}(153) - \tfrac{307}{2}\right) \\ &= \tfrac{3}{2}(104 + 106 + \cdots + 154) - 26 \cdot 154 + \tfrac{3}{2}(103 + 105 + \cdots + 153) - 26 \cdot \tfrac{307}{2} \\ &= \tfrac{3}{2}(103 + 104 + 105 + 106 + \cdots + 153 + 154) - 26 \cdot 154 - 26 \cdot \tfrac{307}{2} \\ &= \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2}(103 + 154)(52) - 26 \cdot 154 - 26 \cdot \tfrac{307}{2} \\ &= \tfrac{3}{2}(26)(257) - 26 \cdot 154 - 26 \cdot \tfrac{307}{2} \\ &= 2028 \end{aligned}$$

Donc $T(309) > 2010$.

<u>Calcul de $T(307)$</u>

On sait que $\frac{307}{3} \le c < \frac{307}{2}$, d'où $103 \le c \le 153$.
Pour chaque valeur admissible de c, on doit compter le nombre de couples (a, b) d'entiers strictement positifs pour lesquels $a \le b \le c$ et $a + b = 307 - c$.
On utilise une méthode semblable à celle utilisée ci-haut pour $T(309)$.
Si n est pair, il y a $\frac{3}{2}c - 153$ triplets possibles.
Si n est impair, il y a $\frac{3}{2}c - \frac{305}{2}$ triplets possibles.
Les valeurs paires possibles de c sont $104, 106, \ldots, 150, 152$ (il y en a 25) et les valeurs impaires possibles de c sont $103, 105, \ldots, 151, 153$ (il y en a 26).
Donc :

$$\begin{aligned} T(307) &= \left(\tfrac{3}{2}(104) - 153\right) + \left(\tfrac{3}{2}(106) - 153\right) + \cdots + \left(\tfrac{3}{2}(152) - 153\right) + \\ &\qquad \left(\tfrac{3}{2}(103) - \tfrac{305}{2}\right) + \left(\tfrac{3}{2}(105) - \tfrac{305}{2}\right) + \cdots + \left(\tfrac{3}{2}(153) - \tfrac{305}{2}\right) \\ &= \tfrac{3}{2}(104 + 106 + \cdots + 152) - 25 \cdot 153 + \tfrac{3}{2}(103 + 105 + \cdots + 153) - 26 \cdot \tfrac{305}{2} \\ &= \tfrac{3}{2}(103 + 104 + 105 + 106 + \cdots + 152 + 153) - 25 \cdot 153 - 26 \cdot \tfrac{305}{2} \\ &= \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2}(103 + 153)(51) - 25 \cdot 153 - 26 \cdot \tfrac{305}{2} \\ &= \tfrac{3}{2}(51)(128) - 25 \cdot 153 - 26 \cdot \tfrac{305}{2} \\ &= 2002 \end{aligned}$$

Donc $T(307) < 2010$.

Donc, le plus petit entier positif n pour lequel $T(n) > 2010$ est $n = 309$.

Pour compléter, on explique comment on pouvait deviner que la réponse était située près de $N = 309$.

On considère les valeurs de $T(n)$ pour des valeurs impaires positives de n.
Dans la section (a), on a considéré les valeurs possibles de c de la plus petite (environ $\frac{1}{3}n$) à la plus grande (environ $\frac{1}{2}n$) et on a constaté que $T(11) = 1 + 3$, ou $T(11) = 4$.
Si on calcule la valeur de $T(n)$ pour quelques autres valeurs impaires de n, on obtient :

$$\begin{aligned} T(13) &= 2 + 3 = 5 \\ T(15) &= 1 + 2 + 4 = 7 \\ T(17) &= 1 + 3 + 4 = 8 \\ T(19) &= 2 + 3 + 5 = 10 \\ T(21) &= 1 + 2 + 4 + 5 = 12 \\ T(23) &= 1 + 3 + 4 + 6 = 14 \end{aligned}$$

Il semble s'y dégager une régularité : Si n est impair, $T(n)$ est à peu près égal à la somme des entiers de 1 à $\frac{1}{4}n$, avec un entier sur trois d'enlevé.
Donc, $T(n)$ est à peu près égal à $\frac{2}{3}$ de la somme des entiers de 1 à $\frac{1}{4}n$.
Donc $T(n) \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{4}n)(\frac{1}{4}n+1)$, d'où $T(n) \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{4}n)^2$, ou $T(n) \approx \frac{1}{48}n^2$.
Il est logique de chercher une valeur de n pour laquelle $T(n) \approx 2010$.
On cherche donc une valeur de n pour laquelle $\frac{1}{48}n^2 \approx 2010$, ou $n^2 \approx 96480$, ou $n \approx 310$.
Puisque n est impair, il est logique de considérer $n = 309$ et $n = 311$, comme dans la solution ci-haut.

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide 2009

le mardi 7 avril 2009

Solutions

1. (a) On écrit l'équation $6x + 3y = 21$ sous la forme $3y = -6x + 21$, ou $y = -2x + 7$.
D'après cette dernière équation, la pente est égale à -2.

(b) *Solution 1*

Puisque la droite qui passe par les points a une pente de 3, alors $\dfrac{c-0}{5-1} = 3$, d'où $\dfrac{c}{4} = 3$, ou $c = 12$.

Solution 2
Puisque la droite qui passe par les points a une pente de 3, alors lorsqu'on bouge d'une unité vers la droite sur la droite, on monte de 3 unités.
Puisque le point $(5, c)$ est situé à 4 unités à la droite du point $(1, 0)$, il est à 12 unités au-dessus de $(1, 0)$ $(3(4) = 12)$. Donc $c = 0 + 12$, ou $c = 12$.

(c) *Solution 1*

Le segment donné passe aux points $(0, 4)$ et $(8, -4)$. Sa pente est donc égale à $\dfrac{4-(-4)}{0-8}$, ou $\dfrac{8}{-8}$, ou -1.
Puisque le segment a une ordonnée à l'origine de 4, la droite qui passe aux points A et B a pour l'équation $y = -x + 4$.
Puisque le point (k, k) est situé sur la droite, alors $k = -k + 4$, d'où $2k = 4$, ou $k = 2$.

Solution 2
Soit K le point (k, k).
Puisque K est situé sur le segment AB, alors les segments AK et AB ont la même pente.
Le segment AB joint les points $(0, 4)$ et $(8, -4)$. Sa pente est donc égale à $\dfrac{4-(-4)}{0-8}$, ou $\dfrac{8}{-8}$, ou -1.
Le segment AK joint les points $(0, 4)$ et (k, k). Sa pente est donc égale à $\dfrac{k-4}{k-0}$.
Donc $\dfrac{k-4}{k} = -1$, d'où $k - 4 = -k$, ou $2k = 4$. Donc $k = 2$.

2. (a) *Solution 1*

La somme des racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ est égale à $-\dfrac{b}{a}$.
La somme des racines de l'équation donnée est donc égale à $-\left(\frac{(-6)}{1}\right)$, ou 6.

Solution 2
Puisque $x^2 - 6x - 7 = 0$, alors $(x - 7)(x + 1) = 0$, d'où $x = 7$ ou $x = -1$.
Les racines sont donc 7 et -1. Leur somme est égale à 6.

(b) *Solution 1*

Le produit des racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ est égal à $\dfrac{c}{a}$.
Le produit des racines de l'équation donnée est donc égal à $\frac{-20}{5}$, ou -4.

Solution 2
Puisque $5x^2 - 20 = 0$, alors $x^2 - 4 = 0$, ou $(x - 2)(x + 2) = 0$. Donc $x = 2$ ou $x = -2$.
Les racines sont 2 et -2 et leur produit est égal à -4.

(c) *Solution 1*
Puisque $x^3 - 6x^2 + 5x = 0$, alors $x(x^2 - 6x + 5) = 0$, ou $x(x - 5)(x - 1) = 0$. Donc $x = 0$, $x = 1$ ou $x = 5$.

Les racines sont 0, 1 et 5. Leur moyenne est égale à $\frac{1}{3}(0+1+5)$, ou $\frac{1}{3}(6)$, ou 2.

Solution 2

La somme des racines de l'équation cubique $a^3 + bx^2 + cx + d = 0$ est égale à $-\dfrac{b}{a}$.

La somme des trois racines de l'équation donnée est donc égale à $-\left(\frac{-6}{1}\right)$, ou 6.

Puisque la moyenne de trois nombres est égale à leur somme divisée par 3, la moyenne des racines est égale à $\frac{6}{3}$, ou 2.

3. (a) Puisque $AB = AD = BD$, le triangle BDA est équilatéral.
Donc $\angle ABD = \angle ADB = \angle DAB = 60^\circ$.
De plus, $\angle DAE = 180^\circ - \angle ADE - \angle AED$, ou $\angle DAE = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ$, ou $\angle DAE = 30^\circ$.
Puisque CAE est un segment de droite, alors $\angle CAD = 180^\circ - \angle DAE$, d'où $\angle CAD = 180^\circ - 30^\circ$, ou $\angle CAD = 150^\circ$.
Puisque $AC = AD$, le triangle CAD est isocèle. Donc $\angle CDA = \angle DCA$.
Puisque la somme des mesures d'angles du triangle CAD est égale à 180° et que $\angle CDA = \angle DCA$, alors :

$$\angle CDA = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle CAD) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$$

Donc $\angle CDB = \angle CDA + \angle ADB$, d'où $\angle CDB = 15^\circ + 60^\circ$, ou $\angle CDB = 75^\circ$.

(b) *Solution 1*

Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $AB = CD = 40$ et $AD = BC = 30$.
D'après le théorème de Pythagore, $BD^2 = AD^2 + AB^2$, d'où :

$$BD = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50$$

On calcule l'aire du triangle ADB de deux façons.
En utilisant la base AB et la hauteur AD, l'aire est égale à $\frac{1}{2}(40)(30)$, ou 600.
En utilisant la base DB et la hauteur AF, l'aire est égale à $\frac{1}{2}(50)x$, ou $25x$.
Donc $25x = 600$, d'où $x = \frac{600}{25}$, ou $x = 24$.

Solution 2

Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $AB = CD = 40$ et $AD = BC = 30$.
D'après le théorème de Pythagore, $BD^2 = AD^2 + AB^2$, d'où :

$$BD = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50$$

Le triangle DAB est rectangle en A. Donc $\sin(\angle ADB) = \dfrac{AB}{BD}$, d'où $\sin(\angle ADB) = \frac{40}{50}$, ou $\sin(\angle ADB) = \frac{4}{5}$.
Or, le triangle ADF est rectangle en F et $\angle ADF = \angle ADB$.
Donc $\sin(\angle ADF) = \dfrac{AF}{AD}$, d'où $\sin(\angle ADF) = \dfrac{x}{30}$.
Donc $\dfrac{x}{30} = \dfrac{4}{5}$, d'où $x = \frac{4}{5}(30)$, ou $x = 24$.

Solution 3

Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $AB = CD = 40$ et $AD = BC = 30$.
D'après le théorème de Pythagore, $BD^2 = AD^2 + AB^2$, d'où :

$$BD = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50$$

Or, les triangles BFA et BAD sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont un angle commun en B.

Donc $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AD}{BD}$, d'où $\dfrac{x}{30} = \dfrac{40}{50}$, ou $x = \dfrac{30(40)}{50}$, ou $x = 24$.

4. (a) *Solution 1*

La somme des termes d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes et de la moyenne du premier et du dernier terme.
Soit n le nombre de termes de la suite. Donc $\frac{1}{2}(1+19)n = 70$, d'où $10n = 70$, ou $n = 7$.

Solution 2

Soit n le nombre de termes de la suite et d la raison arithmétique (c.-à-d. la différence entre deux termes consécutifs).
Puisque le premier terme est 1 et que le $n^{\text{ième}}$ terme est 19, alors $1 + (n-1)d = 19$, d'où $(n-1)d = 18$.
Puisque la somme des termes de la suite est égale à 70, alors $\frac{1}{2}n(1 + 1 + (n-1)d) = 70$.
Donc $\frac{1}{2}n(2 + 18) = 70$, d'où $10n = 70$, ou $n = 7$.

(b) *Solution 1*

L'égalité donnée est vérifiée par toutes les valeurs de x.
Donc si $x = -3$, l'égalité devient $a(-3 + b(0)) = 2(3)$, d'où $-3a = 6$, ou $a = -2$.
Si $x = 0$, l'égalité devient $-2(0 + b(3)) = 2(6)$, d'où $-6b = 12$, ou $b = -2$.
Donc $a = -2$ et $b = -2$.

Solution 2

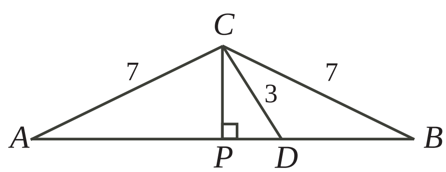
On développe les deux membres de l'égalité :

$$\begin{aligned} a(x + b(x+3)) &= 2(x+6) \\ a(x + bx + 3b) &= 2x + 12 \\ ax + abx + 3ab &= 2x + 12 \\ (a + ab)x + 3ab &= 2x + 12 \end{aligned}$$

Puisque l'égalité est vérifiée par toutes les valeurs de x, alors les coefficients du membre de gauche doivent être égaux à ceux du membre de droite. Donc $a + ab = 2$ et $3ab = 12$.
D'après la deuxième équation, $ab = 4$ et la première équation devient $a+4 = 2$, ou $a = -2$.
Puisque $ab = 4$, alors $-2b = 4$, ou $b = -2$.
Donc $a = b = -2$.

5. (a) *Solution 1*

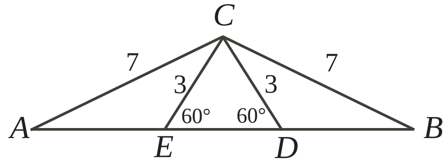
Au point C, on abaisse une perpendiculaire CP au côté AD.



Puisque le triangle ACB est isocèle, alors $AP = PB$.
Puisque le triangle CDP est un triangle remarquable 30°-60°-90°, alors $PD = \frac{1}{2}(CD) = \frac{3}{2}$.
Donc $AP = AD - PD$, d'où $AP = 8 - \frac{3}{2}$, ou $AP = \frac{13}{2}$.
Puisque $DB = PB - PD$, alors $DB = AP - PD$, d'où $DB = \frac{13}{2} - \frac{3}{2}$, ou $DB = 5$.

Solution 2

Puisque le triangle ACB est symétrique par rapport à la droite verticale qui passe par C, on fait subir à CD une réflexion par rapport à cette droite. On obtient donc l'image E de D sur AD de manière que $CE = 3$ et $\angle CED = 60°$.



Le triangle CDE a donc deux angles de $60°$ et son troisième angle doit donc mesurer $60°$. Le triangle est donc équilatéral.
Donc $ED = CD = CE = 3$, d'où $DB = AE = AD - ED = 8 - 3 = 5$.

Solution 3
$\angle CDB = 180° - \angle CDA$, d'où $\angle CDB = 180° - 60°$, ou $\angle CDB = 120°$. Selon la loi du cosinus dans le triangle CDB :

$$\begin{aligned} CB^2 &= CD^2 + DB^2 - 2(CD)(DB)\cos(\angle CDB) \\ 7^2 &= 3^2 + DB^2 - 2(3)(DB)\cos(120°) \\ 49 &= 9 + DB^2 - 6(DB)\left(-\tfrac{1}{2}\right) \\ 0 &= DB^2 + 3DB - 40 \\ 0 &= (DB - 5)(DB + 8) \end{aligned}$$

Puisque $DB > 0$, alors $DB = 5$.

(b) *Solution 1*
Puisque le triangle ABC est rectangle en C, alors $\sin B = \cos A$.
Puisque $2\sin B = 3\tan A$, alors $2\cos A = \dfrac{3\sin A}{\cos A}$, d'où $2\cos^2 A = 3\sin A$.
D'après l'identité de Pythagore, $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, d'où $2 - 2\sin^2 A = 3\sin A$ ou $2\sin^2 A + 3\sin A - 2 = 0$, ou $(2\sin A - 1)(\sin A + 2) = 0$.
Puisque l'angle A est aigu, la valeur de $\sin A$ est entre 0 et 1. Donc, $(\sin A + 2) \neq 0$ et on a donc $(2\sin A - 1) = 0$, d'où $\sin A = \frac{1}{2}$.
Puisque l'angle A est aigu, donc $\angle A = 30°$.

Solution 2
Puisque le triangle ABC est rectangle en C, alors $\sin B = \dfrac{b}{c}$ et $\tan A = \dfrac{a}{b}$.
L'équation $2\sin B = 3\tan A$ devient $\dfrac{2b}{c} = \dfrac{3a}{b}$, ou $2b^2 = 3ac$.
D'après le théorème de Pythagore, $b^2 = c^2 - a^2$ et l'équation précédente devient ainsi $2c^2 - 2a^2 = 3ac$, ou $2c^2 - 3ac - 2a^2 = 0$. On factorise pour obtenir $(c - 2a)(2c + a) = 0$.
Puisque a et c sont positifs, alors $c = 2a$.
Puisque le triangle ABC est rectangle, la relation $c = 2a$ indique que le triangle ABC est un triangle remarquable $30°$-$60°$-$90°$ et que $\angle A = 30°$.

6. (a) Le nombre d'entiers de 100 à 999 est égal à $999 - 100 + 1$, ou 900.
On considère un entier n dans cet intervalle. Soit a, b et c ses chiffres, a étant le chiffre des centaines.
On a donc $0 \leq b, c \leq 9$ et $1 \leq a \leq 9$.
Pour que $a + b + c = 24$, il faut que les chiffres, dans n'importe quel ordre, soient $9, 9, 6$ ou $9, 8, 7$ ou $8, 8, 8$. (Il est clair qu'on ne peut avoir trois chiffres 9. Si deux chiffres égalent 9, l'autre chiffre doit être un 6. Si un seul chiffre égale 9, les deux autres doivent avoir une somme de 15 et ils doivent donc être 7 et 8. Si aucun chiffre n'égale 9, les trois chiffres doivent égaler 8 pour avoir une somme de 24.)
Si les chiffres sont 9, 9 et 6, il y a 3 arrangements : 996, 969, 699

Si les chiffres sont 9, 8 et 7, il y a 6 arrangements : 987, 978, 897, 879, 798, 789
Si les chiffres sont 8, 8 et 8, il y a 1 seul arrangement : 888
Il y a donc 10 entiers n (soit $3+6+1$) dans l'intervalle de 100 à 999 dont la somme des chiffres est égale à 24.
Il y a donc 24 choix favorables sur 900 choix possibles. La probabilité de choisir un entier n dont la somme des chiffres est égale à 24 est donc égale à $\frac{10}{900}$, ou $\frac{1}{90}$.

(b) Puisque Alice conduit à une vitesse de 60 km/h, elle parcourt 1 km à chaque minute.
Puisqu'elle a parcouru la distance de G à F en 45 minutes, alors il y a une distance de 45 km de G à F.
Soit d km la distance de E à G et B km/h la vitesse de Bob.
Puisque Bob a parcouru la distance de G à E en 20 minutes (ou $\frac{1}{3}$ d'une heure), alors $\dfrac{d}{B}=\dfrac{1}{3}$. Donc $d=\frac{1}{3}B$.
Pour parcourir la distance de F à G, Bob a mis $\dfrac{45}{B}$ heures. Pour parcourir la distance de E à G, Alice a mis $\dfrac{d}{60}$ heures.
Puisque Alice et Bob ont mis le même temps pour se rendre à G, alors $\dfrac{d}{60}=\dfrac{45}{B}$, d'où $Bd=45(60)$, ou $Bd=2700$.
Donc $B\left(\frac{1}{3}B\right)=2700$, d'où $B^2=8100$, ou $B=90$ puisque $B>0$.
Donc, Bob a conduit sa voiture à une vitesse de 90 km/h.

7. (a) On écrit l'équation de la parabole donnée sous forme canonique en complétant le carré :

$$y=x^2-2x+4=x^2-2x+1-1+4=(x-1)^2+3$$

La parabole donnée a donc pour sommet $(1,3)$.
Puisque l'image de cette parabole par la translation a pour abscisses à l'origine 3 et 5, son équation est $y=1(x-3)(x-5)$, ou $y=x^2-8x+15$.
On écrit cette équation sous forme canonique en complétant le carré :

$$y=x^2-8x+15=x^2-8x+16-16+15=(x-4)^2-1$$

L'image de la parabole initiale a donc pour sommet $(4,-1)$.
Puisque le point $(1,3)$ subit une translation de p unités vers la droite et de q unités vers le bas pour arriver au point $(4,-1)$, alors $p=3$ et $q=4$.

(b) On détermine d'abord les coordonnées du point A.
Le triangle ABC a une aire de 4. On considère sa base AC. Sa hauteur correspondante est donc la distance du point B à l'axe des abscisses.
Soit $(a,0)$ les coordonnées de A. Le triangle a donc une base de $4-a$ et une hauteur de 4.
Donc $\frac{1}{2}(4-a)(4)=4$, d'où $4-a=2$, ou $a=2$.
Donc, A a pour coordonnées $(2,0)$.

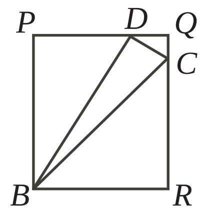
On détermine ensuite l'équation de la parabole.
Puisque la parabole a pour abscisses à l'origine 2 et 4, son équation est de la forme $y=k(x-2)(x-4)$.
Puisque la parabole passe au point $(0,-4)$, alors $-4=k(-2)(-4)$, d'où $k=-\frac{1}{2}$.
La parabole a donc pour équation $y=-\frac{1}{2}(x-2)(x-4)$.

On détermine ensuite les coordonnées du sommet D de la parabole.

Puisque la parabole a pour abscisses à l'origine 2 et 4, l'abscisse du sommet est égale à la moyenne de ces nombres, soit 3.
Puisque D est sur la parabole, alors $y = -\frac{1}{2}(3-2)(3-4)$, ou $y = -\frac{1}{2}(1)(-1)$, ou $y = \frac{1}{2}$.
Le sommet D de la parabole a donc pour coordonnées $(3, \frac{1}{2})$.

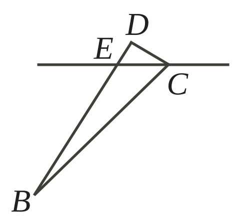
On détermine ensuite l'aire du triangle BDC dont les sommets ont pour coordonnées $B(0,-4)$, $D(3, \frac{1}{2})$ et $C(4,0)$.

Méthode 1
On trace le rectangle dont les côtés horizontaux sont sur les droites d'équations $y = \frac{1}{2}$ et $y = -4$ et les côtés verticaux sont sur les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$. On le nomme $BPQR$.



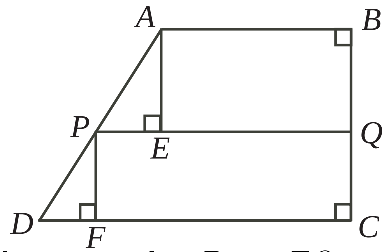
L'aire du triangle BDC est égale à l'aire du rectangle moins l'aire des triangles BPD, DQC et CRB.
Le rectangle $BPQR$ a une hauteur de $4 + \frac{1}{2}$, ou $\frac{9}{2}$ et une base de 4.
Le triangle BPD a une hauteur de $\frac{9}{2}$ et une base de 3.
Le triangle DQC a une hauteur de $\frac{1}{2}$ et une base de 1.
Le triangle CRB a une hauteur de 4 et une base de 4.
Donc, l'aire du triangle BDC est égale à $4(\frac{9}{2}) - \frac{1}{2}(\frac{9}{2})(3) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})(1) - \frac{1}{2}(4)(4)$, ou $18 - \frac{27}{4} - \frac{1}{4} - 8$, ou 3.

Méthode 2
On détermine les coordonnées du point E où le segment BD coupe l'axe des abscisses. L'aire du triangle BDC est alors égale à la somme de l'aire du triangle ECB et de celle du triangle ECD.



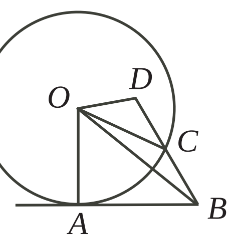
Puisque B et D ont pour coordonnées respectives $(0,-4)$ et $(3, \frac{1}{2})$, la pente de BD est égale à $\dfrac{\frac{1}{2} - (-4)}{3-0}$, ou $\dfrac{\frac{9}{2}}{3}$, ou $\dfrac{3}{2}$.
Puisque $B(0,-4)$ est situé sur l'axe des ordonnées, alors la droite qui passe aux points B et D a pour équation $y = \frac{3}{2}x - 4$.
Pour déterminer l'abscisse de E, posons $y = 0$. On obtient $0 = \frac{3}{2}x - 4$, ou $\frac{3}{2}x = 4$, d'où $x = \frac{8}{3}$.
On considère EC comme base de chacun des petits triangles. Or $EC = 4 - \frac{8}{3}$, ou $EC = \frac{4}{3}$.
Donc, l'aire du triangle ECD est égale à $\frac{1}{2}(\frac{4}{3})(\frac{1}{2})$, ou $\frac{1}{3}$.
L'aire du triangle ECB est égale à $\frac{1}{2}(\frac{4}{3})(4)$, ou $\frac{8}{3}$.
Donc, l'aire du triangle BDC est égale à $\frac{1}{3} + \frac{8}{3}$, ou 3.

8. (a) Puisque PQ est parallèle à AB, il est parallèle à DC et perpendiculaire à BC.
Aux points A et P, on abaisse des perpendiculaires respectives AE à PQ et PF à DC.



$ABQE$ et $PQCF$ sont donc des rectangles. Donc $EQ = x$ et $FC = r$, d'où $PE = r - x$ et $DF = y - r$.
Soit $BQ = b$ et $QC = c$. Donc $AE = b$ et $PF = c$.
L'aire du trapèze $ABQP$ est égale à $\frac{1}{2}(x+r)b$. Celle du trapèze $PQCD$ est égale à $\frac{1}{2}(r+y)c$.
Puisque ces aires sont égales, $\frac{1}{2}(x+r)b = \frac{1}{2}(r+y)c$, d'où $\dfrac{x+r}{r+y} = \dfrac{c}{b}$.
Puisque AE est parallèle à PF, alors $\angle PAE = \angle DPF$ et les triangles AEP et PFD sont semblables.
Donc $\dfrac{AE}{PE} = \dfrac{PF}{DF}$, d'où $\dfrac{b}{r-x} = \dfrac{c}{y-r}$, ou $\dfrac{c}{b} = \dfrac{y-r}{r-x}$.
Puisque $\dfrac{x+r}{r+y} = \dfrac{c}{b}$ et $\dfrac{c}{b} = \dfrac{y-r}{r-x}$, donc $\dfrac{x+r}{r+y} = \dfrac{y-r}{r-x}$, d'où $(x+r)(r-x) = (r+y)(y-r)$.
Cette équation devient $r^2 - x^2 = y^2 - r^2$, d'où $2r^2 = x^2 + y^2$, ce qu'il fallait démontrer.

(b) On joint O aux points A, B et C.



Puisque AB est tangent au cercle en A, alors $\angle OAB = 90^\circ$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OAB, $OA^2 + AB^2 = OB^2$, d'où $r^2 + p^2 = OB^2$.
Dans le triangle ODC, on a $OD = DC = q$ et $OC = r$.
D'après la loi du cosinus dans ce triangle :

$$\begin{aligned}
OC^2 &= OD^2 + DC^2 - 2(OD)(DC)\cos(\angle ODC) \\
r^2 &= q^2 + q^2 - 2q^2\cos(\angle ODC) \\
\cos(\angle ODC) &= \frac{2q^2 - r^2}{2q^2}
\end{aligned}$$

Or $\angle ODB = \angle ODC$. D'après la loi du cosinus dans le triangle ODB :

$$\begin{aligned}
OB^2 &= OD^2 + DB^2 - 2(OD)(DB)\cos(\angle ODB) \\
&= q^2 + (2q)^2 - 2(q)(2q)\left(\frac{2q^2 - r^2}{2q^2}\right) \\
&= q^2 + 4q^2 - 2(2q^2 - r^2) \\
&= q^2 + 2r^2
\end{aligned}$$

Puisque $OB^2 = r^2 + p^2$ et $OB^2 = q^2 + 2r^2$, alors $r^2 + p^2 = q^2 + 2r^2$, d'où $p^2 = q^2 + r^2$, ce qu'il fallait démontrer.

9. (a) On écrit d'abord chaque logarithme sous la forme d'un logarithme de base 2 :

$$\begin{aligned} 1+\log_4 x &= 1+\frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 1+\frac{\log_2 x}{2} = 1+\tfrac{1}{2}\log_2 x \\ \log_8 4x &= \frac{\log_2 4x}{\log_2 8} = \frac{\log_2 4+\log_2 x}{3} = \tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}\log_2 x \end{aligned}$$

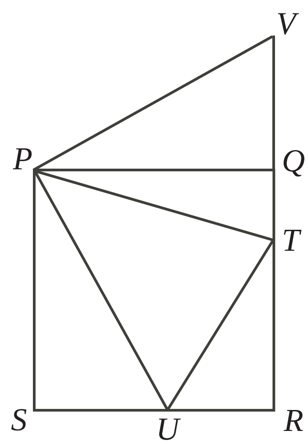
Soit $y=\log_2 x$. Les trois termes sont donc y, $1+\frac{1}{2}y$ et $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}y$. Puisqu'ils forment une suite géométrique, alors :

$$\begin{aligned} y(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}y) &= (1+\tfrac{1}{2}y)^2 \\ \tfrac{2}{3}y+\tfrac{1}{3}y^2 &= 1+y+\tfrac{1}{4}y^2 \\ 8y+4y^2 &= 12+12y+3y^2 \\ y^2-4y-12 &= 0 \\ (y-6)(y+2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $y=6$ ou $y=-2$, d'où $\log_2 x=6$ ou $\log_2 x=-2$. Donc $x=2^6$ ou $x=2^{-2}$, d'où $x=64$ ou $x=\frac{1}{4}$.

(b) *Solution 1*

On fait subir au triangle PSU une rotation de centre P et de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Son image est le triangle PQV. On remarque que le point V est situé sur le prolongement de RQ. (Cette rotation permet en quelque sorte de juxtaposer les triangles PSU et QPT.)



D'après la rotation, $PV=PU$.

De plus, $\angle VPT=\angle VPQ+\angle QPT=\angle UPS+\angle QPT$, d'où $\angle VPT=90^\circ-\angle UPT$, ou $\angle VPT=90^\circ-45^\circ$, ou $\angle VPT=45^\circ$.

Donc les triangles PTU et PTV sont congruents (deux côtés et l'angle compris).

Le périmètre du triangle RUT est donc égal à :

$$\begin{aligned} UR+RT+UT &= UR+RT+TV \\ &= UR+RT+TQ+QV \\ &= UR+RQ+SU \\ &= SU+UR+RQ \\ &= SR+RQ \\ &= 8 \end{aligned}$$

Puisque le périmètre du triangle RUT est égal à 8, il ne varie pas et le périmètre maximal possible est égal à 8.

Solution 2
Soit $\angle SPU = \theta$.
Donc $\tan\theta = \dfrac{SU}{PS}$, d'où $SU = 4\tan\theta$.
Puisque $SR = 4$, alors $UR = SR - SU$, d'où $UR = 4 - 4\tan\theta$.
Puisque $\angle UPT = 45^\circ$, alors $\angle QPT = 90^\circ - 45^\circ - \theta$, ou $\angle QPT = 45^\circ - \theta$.
Donc $\tan(45^\circ - \theta) = \dfrac{QT}{PQ}$, d'où $QT = 4\tan(45^\circ - \theta)$.
Puisque $QR = 4$, alors $RT = 4 - 4\tan(45^\circ - \theta)$.
Or $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$. Donc $\tan(45^\circ - \theta) = \dfrac{\tan(45^\circ) - \tan\theta}{1 + \tan(45^\circ)\tan\theta} = \dfrac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$, puisque $\tan(45^\circ) = 1$.
Donc $RT = 4 - 4\left(\dfrac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}\right)$, d'où $RT = \dfrac{4 + 4\tan\theta}{1 + \tan\theta} - \dfrac{4 - 4\tan\theta}{1 + \tan\theta}$, ou $RT = \dfrac{8\tan\theta}{1 + \tan\theta}$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle URT, on a :

$$\begin{aligned}
UT &= \sqrt{UR^2 + RT^2} \\
&= \sqrt{(4 - 4\tan\theta)^2 + \left(\frac{8\tan\theta}{1 + \tan\theta}\right)^2} \\
&= 4\sqrt{(1 - \tan\theta)^2 + \left(\frac{2\tan\theta}{1 + \tan\theta}\right)^2} \\
&= 4\sqrt{\left(\frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan\theta}\right)^2 + \left(\frac{2\tan\theta}{1 + \tan\theta}\right)^2} \\
&= 4\sqrt{\frac{1 - 2\tan^2\theta + \tan^4\theta + 4\tan^2\theta}{(1 + \tan\theta)^2}} \\
&= 4\sqrt{\frac{1 + 2\tan^2\theta + \tan^4\theta}{(1 + \tan\theta)^2}} \\
&= 4\sqrt{\frac{(1 + \tan^2\theta)^2}{(1 + \tan\theta)^2}} \\
&= 4\left(\frac{1 + \tan^2\theta}{1 + \tan\theta}\right)
\end{aligned}$$

Donc, le périmètre du triangle URT est égal à :

$$\begin{aligned}
UR + RT + UT &= 4 - 4\tan\theta + \frac{8\tan\theta}{1 + \tan\theta} + 4\left(\frac{1 + \tan^2\theta}{1 + \tan\theta}\right) \\
&= 4\left(\frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan\theta} + \frac{2\tan\theta}{1 + \tan\theta} + \frac{1 + \tan^2\theta}{1 + \tan\theta}\right) \\
&= 4\left(\frac{2 + 2\tan\theta}{1 + \tan\theta}\right) \\
&= 8
\end{aligned}$$

Ce périmètre est égal à 8 peu importe la mesure de θ. Le périmètre maximal possible est donc égal à 8.

10. Partout dans cette solution, on représente l'état des n assiettes par une chaîne de longueur n formée des chiffres 0 et 1 (appelée *chaîne binaire*) . Chaque chaîne aura la forme $p_1p_2\cdots p_n$, où le $r^{\text{ième}}$ chiffre à partir de la gauche, soit p_r, est égal à 1 si la $r^{\text{ième}}$ assiette contient un cadeau et à 0 si elle n'en contient pas. On dira qu'une chaîne binaire de longueur n est *permise* si elle satisfait à la condition donnée, soit que deux chiffres adjacents ne peuvent tous deux égaler 1. Il faut noter que le chiffre p_n est adjacent au chiffre p_1 ; on ne peut donc pas avoir $p_1 = p_n = 1$.

(a) Supposons que $p_1 = 1$.
Donc $p_2 = p_7 = 0$ et la chaîne est donc de la forme $10p_3p_4p_5p_60$.
Puisque $k = 3$, alors deux des chiffres p_3, p_4, p_5, p_6 égalent 1, de manière que deux chiffres adjacents ne soient pas tous deux 1.
Les chaînes possibles sont 1010100, 1010010 et 1001010.

Supposons que $p_1 = 0$. Donc, p_2 peut égaler 1 ou 0.
Si $p_2 = 1$, alors $p_3 = 0$. La chaîne est donc de la forme $010p_4p_5p_6p_7$. Cette chaîne a la même forme que la chaîne du cas précédent après une rotation d'une position autour du cercle. Il y a donc 3 chaînes possibles.
Si $p_2 = 0$, alors la chaîne est de la forme $00p_3p_4p_5p_6p_7$ et trois des chiffres p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 égalent 1, de façon que deux chiffres adjacents ne soient pas tous deux 1.
Il y a une seule chaîne possible, soit 0010101.
En tout, il y a 7 chaînes possibles. Donc $f(7, 3) = 7$.

(b) *Solution 1*
Dans une chaîne possible $p_1p_2\cdots p_{n-1}p_n$, (p_1, p_n) est égal à $(1, 0)$, $(0, 1)$ ou $(0, 0)$.
Soit $g(n, k, 1, 0)$ le nombre de chaînes possibles de longueur n qui contiennent k fois le chiffre 1 et de manière que $(p_1, p_n) = (1, 0)$.
On définit $g(n, k, 0, 1)$ et $g(n, k, 0, 0)$ de façon semblable.
On remarque que $f(n, k) = g(n, k, 1, 0) + g(n, k, 0, 1) + g(n, k, 0, 0)$.

On considère les chaînes comptées dans $g(n, k, 0, 1)$.
Puisque $p_n = 1$, alors $p_{n-1} = 0$. Puisque $p_1 = 0$, alors p_2 peut égaler 0 ou 1.
On retranche le premier et le dernier chiffre de chacune de ces chaînes.
On obtient des chaînes de la forme $p_2p_3\cdots p_{n-2}p_{n-1}$, c'est-à-dire des chaînes de longueur $n - 2$ qui contiennent $k - 1$ fois le chiffre 1.
Puisque $p_{n-1} = 0$, alors le premier chiffre et le dernier chiffre ne peuvent tous deux être 1.
De plus, puisque les chaînes précédentes ne contenaient pas deux 1 consécutifs, alors il en est de même pour ces chaînes.
Donc, les chaînes de la forme $p_2p_3\cdots p_{n-2}p_{n-1}$ sont des chaînes permises de longueur $n-2$, elles contiennent $k-1$ fois le chiffre 1 et elles sont telles que $p_{n-1} = 0$ et $p_2 = 1$ ou $p_2 = 0$.
Le nombre de telles chaînes avec $p_2 = 1$ et $p_{n-1} = 0$ est égal à $g(n - 2, k - 1, 1, 0)$ et le nombre de telles chaînes avec $p_2 = 0$ et $p_{n-1} = 0$ est égal à $g(n - 2, k - 1, 0, 0)$.
Donc $g(n, k, 0, 1) = g(n - 2, k - 1, 1, 0) + g(n - 2, k - 1, 0, 0)$.

On considère les chaînes comptées dans $g(n, k, 0, 0)$.
Puisque $p_1 = 0$ et $p_n = 0$, on peut retrancher p_n pour obtenir des chaînes de la forme $p_1p_2\cdots p_{n-1}$ de longueur $n-1$ qui contiennent k fois le chiffre 1. Ces chaînes sont permises, puisque $p_1 = 0$ et que les chaînes initiales sont permises.
On remarque que $p_1 = 0$ et que p_{n-1} est égal à 0 ou à 1.
Les chaînes de la forme $p_1p_2\cdots p_{n-1}$ sont des chaînes permises de longueur $n - 1$ et qui contiennent k fois le chiffre 1, qui commencent par un 0, et qui se terminent par un 0 ou un 1.
Le nombre de telles chaînes avec $p_1 = 0$ et $p_{n-1} = 0$ est égal à $g(n-1, k, 0, 0)$ et le nombre

de telles chaînes avec $p_1 = 0$ et $p_{n-1} = 1$ est égal à $g(n-1, k, 0, 1)$.
Donc $g(n, k, 0, 0) = g(n-1, k, 0, 0) + g(n-1, k, 0, 1)$.

On considère les chaînes comptées dans $g(n, k, 1, 0)$.
Dans ces chaînes, on a $p_1 = 1$ et $p_n = 0$. Donc, p_{n-1} peut égaler 0 ou 1. On traite de ces deux cas séparément.
Si $p_{n-1} = 0$, les chaînes de la forme $p_1p_2 \cdots p_{n-1}$ sont des chaînes permises de longueur $n-1$, et qui contiennent k fois le chiffre 1, qui commencent par un 1 et qui se terminent par un 0.
Donc, le nombre $g(n, k, 1, 0)$ de telles chaînes avec $p_{n-1} = 0$ est égal à $g(n-1, k, 1, 0)$.
Si $p_{n-1} = 1$, les chaînes de la forme $p_2p_3 \cdots p_{n-1}$ sont de longueur $n-2$ et elles commencent par un 0 et se terminent par un 1. Elles contiennent $k-1$ fois le chiffre 1 (puisqu'on a retranché le premier 1) et elles sont permises puisque les chaînes initiales sont permises.
Donc, le nombre $g(n, k, 1, 0)$ de chaînes permises dans lesquelles $p_{n-1} = 1$ est égal à $g(n-2, k-1, 0, 1)$.
Donc :

$$\begin{aligned} f(n,k) &= g(n,k,1,0) + g(n,k,0,1) + g(n,k,0,0) \\ &= (g(n-1,k,1,0) + g(n-2,k-1,0,1)) \\ &\quad +(g(n-2,k-1,1,0) + g(n-2,k-1,0,0)) \\ &\quad +(g(n-1,k,0,0) + g(n-1,k,0,1)) \\ &= (g(n-1,k,1,0) + g(n-1,k,0,1) + g(n-1,k,0,0)) \\ &\quad +(g(n-2,k-1,0,1) + g(n-2,k-1,1,0) + g(n-2,k-1,0,0)) \\ &= f(n-1,k) + f(n-2,k-1) \end{aligned}$$

Solution 2
On développe une formule pour $f(n, k)$ en comptant les chaînes permises.
On considère les chaînes permises de longueur n qui contiennent k fois le chiffre 1. On a $p_n = 0$ ou $p_n = 1$.

On considère d'abord le cas où $p_n = 0$. (On remarque que p_1 peut égaler 0 ou 1.)
Ces chaînes sont de la forme $p_1p_2p_3 \cdots p_{n-1}0$.
Dans ce cas, les chiffres 1 sont toujours suivis d'un 0 et on peut donc construire ces chaînes en juxtaposant des groupes $\underline{10}$ et des chiffres 0. Dans ces juxtapositions, les chiffres 1 seront toujours précédés et suivis d'un 0.
On peut donc construire ces chaînes au moyen de k groupes $\underline{10}$ et de $n-2k$ chiffres 0. Chaque chaîne aura donc k fois le chiffre 1 et $k+(n-2k)$ fois, ou $n-k$ fois le chiffre 0.
On remarque que chaque chaîne construite de cette façon sera permise et se terminera par un 0 et que toute chaîne permise peut être construite de cette façon.
Le nombre d'arrangements de k groupes $\underline{10}$ et de $n-2k$ zéros est égal à $\binom{k+(n-2k)}{k}$, ou $\binom{n-k}{k}$.
On considère ensuite le cas où $p_n = 1$.
Il faut alors que $p_{n-1} = p_1 = 0$, puisque ces deux chiffres sont adjacents à p_n.
Ces chaînes sont toutes de la forme $0p_2p_3 \cdots 01$.
On considère les chaînes obtenues en retranchant le premier et le dernier chiffre de ces chaînes.
Ces nouvelles chaînes sont de longueur $n-2$, elles contiennent $k-1$ fois le chiffre 1, elles se terminent par un 0, et commencent par un 0 ou un 1.

Puisque les chiffres 1 sont toujours suivis d'un 0, on peut construire ces chaînes en juxtaposant des groupes 10 et des chiffres 0. Toute juxtaposition formera une chaîne permise, puisque chaque 1 sera précédé et suivi d'un 0.

D'après le cas précédent, le nombre de combinaisons de $k-1$ blocs et de $(n-2)-(k-1)$ zéros est égal à $\binom{(n-2)-(k-1)}{k-1}$ ou $\binom{n-k-1}{k-1}$. Il y a donc $\binom{n-k-1}{k-1}$ telles chaînes.

Donc le nombre total de chaînes est égal à $f(n,k) = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}$.

Pour démontrer l'identité requise, on utilisera l'identité $\binom{m}{r} = \binom{m-1}{r} + \binom{m-1}{r-1}$, appelée identité de Pascal, qui sera démontrée plus loin.

On a :

$$\begin{aligned}
&f(n-1,k) + f(n-2,k-1)\\
&= \binom{(n-1)-k}{k} + \binom{(n-1)-k-1}{k-1} + \binom{(n-2)-(k-1)}{k-1} + \binom{(n-2)-(k-1)-1}{(k-1)-1}\\
&= \binom{n-k-1}{k} + \binom{n-k-2}{k-1} + \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-2}{k-2}\\
&= \binom{n-k-1}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-2}{k-1} + \binom{n-k-2}{k-2}\\
&= \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \qquad \text{(d'après l'identitié de Pascal)}\\
&= f(n,k)
\end{aligned}$$

On démontre l'identité de Pascal en commençant par le membre de droite :

$$\begin{aligned}
\binom{m-1}{r} + \binom{m-1}{r-1} &= \frac{(m-1)!}{r!(m-r-1)!} + \frac{(m-1)!}{(r-1)!(m-r)!}\\
&= \frac{(m-1)!(m-r)}{r!(m-r-1)!(m-r)} + \frac{r(m-1)!}{r(r-1)!(m-r)!}\\
&= \frac{(m-1)!(m-r)}{r!(m-r)!} + \frac{r(m-1)!}{r!(m-r)!}\\
&= \frac{(m-1)!(m-r+r)}{r!(m-r)!}\\
&= \frac{(m-1)!m}{r!(m-r)!}\\
&= \frac{m!}{r!(m-r)!}\\
&= \binom{m}{r}
\end{aligned}$$

(c) On utilise la formule pour $f(n,k)$ qui a été développée dans la Solution 2 de la partie (b). Pour étudier la divisibilité, on la simplifie d'abord :

$$\begin{aligned}
f(n,k) &= \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\\
&= \frac{(n-k)!}{k!(n-k-k)!} + \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!((n-k-1)-(k-1))!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} + \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} \\
&= \frac{(n-k-1)!(n-k)}{k!(n-2k)!} + \frac{(n-k-1)!k}{k!(n-2k)!} \\
&= \frac{(n-k-1)!(n-k+k)}{k!(n-2k)!} \\
&= \frac{n(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} \\
&= \frac{n(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-2k+2)(n-2k+1)}{k!}
\end{aligned}$$

L'expression de $f(n,k)$ sous la forme du quotient de deux produits simplifie le regard qu'on porte sur la divisibilité.
On remarque que $2009 = 41 \times 49$, ou $2009 = 7^2 \times 41$. Pour que $f(n,k)$ soit un multiple de 2009, il faut que $f(n,k)$ soit divisible par 41 et deux fois par 7. Il faut donc que le numérateur de $f(n,k)$ contienne un diviseur 41 de plus et deux diviseurs 7 de plus que le dénominateur.
Puisqu'on cherche à minimiser $n+k$, on utilise des valeurs de n et de k aussi petites que possible.
Si $n = 49$ et $k = 5$, alors :

$$f(49,5) = \frac{49(43)(42)(41)(40)}{5!} = \frac{49(43)(42)(41)(40)}{5(4)(3)(2)(1)} = 49(43)(14)(41)$$

Cette expression est divisible par 2009.
On démontre que le couple $(49,5)$ produit la valeur minimale de $n+k$.

On examine les cas possibles en considérant séparément les facteurs 41 et 7. On commence par le facteur 41.
Le numérateur est divisible par 41 si n est divisible par 41 ou si un des facteurs de l'expression $(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-2k+1)$ est divisible par 41.

1[er] cas : n est divisible par 41

On sait déjà que $n = 82$ est trop grand. On considère donc $n = 41$. D'après la définition de $f(n,k)$, on a $k \leq 20$, car on ne peut placer plus de 20 cadeaux dans 41 assiettes.
Le numérateur de $f(41,k)$ est le produit du nombre 41 et de $k-1$ entiers consécutifs dont le plus grand est $40-k$.
Or, il faut que le numérateur contienne au moins deux diviseurs 7 de plus que le dénominateur. Puisque le numérateur contient le produit de $k-1$ entiers consécutifs et que le dénominateur est le produit de k entiers consécutifs, alors le dénominateur contiendra au moins autant de diviseurs 7 que le numérateur (puisque le dénominateur est le produit d'un plus grand nombre d'entiers consécutifs). Donc, il est impossible que le numérateur contienne même un diviseur 7 de plus que le dénominateur.
Donc si $n = 41$, alors $f(n,k)$ ne peut être divisible par 2009.

2[e] cas : n n'est pas divisible par 41

Le nombre 41 doit donc paraître comme facteur dans l'expression

$$(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-2k+1)$$

car un multiple comme 82 ferait en sorte que n serait supérieur à 82, ce qui ne minimiserait pas la valeur de $n+k$. On cherche donc des valeurs de n et de k qui produisent un facteur 41 dans cette expression.
On remarque que dans l'expression, $n-k-1$ est le plus grand facteur et $n-2k+1$ est le plus petit.
Puisque 41 paraît dans l'expression, on a $n-2k+1 \leq 41$ (d'où $n \leq 40+2k$) et $41 \leq n-k-1$ (d'où $n \geq 42+k$).
On combine ces deux restrictions pour obtenir $42+k \leq n \leq 40+2k$.

On se penche maintenant sur les diviseurs 7.
Ou bien n n'est pas divisible par 7 ou bien n est divisible par 7.

- Si n n'est pas divisible par 7, le nombre 7 doit être deux fois un diviseur de l'expression :

$$(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-2k+1)$$

  Donc $k \geq 8$ (pour qu'il y ait deux multiples de 7 dans l'expression de $k-1$ entiers consécutifs) ou un des facteurs est un multiple de 49.
  - Si $k \geq 8$, alors $n \geq 42+k \geq 50$. Donc $n+k \geq 58$, ce qui n'est pas une valeur minimale.
  - Si un des facteurs est un multiple de 49, alors 49 doit paraître dans la liste. Donc $n-2k+1 \leq 49$ (d'où $n \leq 48+2k$) et $49 \leq n-k-1$ (d'où $n \geq 50+k$).
    Or, on sait déjà que $42+k \leq n \leq 40+2k$ et on a maintenant $50+k \leq n \leq 48+2k$. Ces deux intervalles chevauchent si $50+k \leq 40+2k$, où $k \geq 10$, ce qui implique que $n \geq 50+k \geq 60$, ou $n+k \geq 70$, ce qui n'est pas une valeur minimale.
- On considère le cas où n est divisible par 7.
  On doit avoir $42+k \leq n \leq 40+2k$ (pour inclure 41 dans les facteurs) et n doit être un multiple de 7.
  Puisque k est supérieur ou égal à 2 par définition, alors $n \geq 42+k \geq 44$, et n est donc supérieur ou égal à 49.
  Si n était supérieur ou égal à 56, on n'aurait pas une valeur minimale de $n+k$.
  Il faut donc que $n = 49$. Il n'est donc pas nécessaire de chercher un autre multiple de 7.
  Pour compléter ce cas, il faut déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle 49 est dans l'intervalle de $42+k$ à $40+2k$, car il faut que $42+k \leq n \leq 40+2k$.
  Cette valeur de k est $k=5$, ce qui donne $n+k = 49+5$, ou $n+k = 54$.

Puisqu'on a déjà démontré que $f(49,5)$ est divisible par 2009, 54 est bien la valeur minimale de $n+k$.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide 2008

le mardi 15 avril 2008

Solutions

1. (a) *Solution 1*

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADB :

$$AB^2 = BD^2 + DA^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

Donc $AB = \sqrt{225} = 15$, puisque $AB > 0$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADC :

$$DC^2 = CA^2 - AD^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256$$

Donc $DC = \sqrt{256} = 16$, puisque $AD > 0$.
Le périmètre du triangle ABC est égal à :

$$AB + BC + CA = AB + (BD + DC) + CA = 15 + (9 + 16) + 20 = 60$$

Solution 2

Puisque $BD : DA = 9 : 12 = 3 : 4$ et que le triangle BDA est rectangle en B, alors le triangle ADB est semblable à un triangle 3-4-5. Donc $AB = \frac{5}{3}BD$, ou $AB = 15$.
Puisque $CA : DA = 20 : 12 = 5 : 3$ et que le triangle ADC est rectangle en D, alors le triangle ADC est semblable à un triangle 3-4-5. Donc $DC = \frac{4}{5}CA$, ou $DC = 16$.
Donc, le périmètre du triangle ABC est égal à :

$$AB + BC + CA = AB + (BD + DC) + CA = 15 + (9 + 16) + 20 = 60$$

(b) *Solution 1*

Puisque $P(5, 4)$ est le milieu du segment qui joint les points $A(a, 0)$ et $B(8, b)$, alors 5 est égal à la moyenne des abscisses de A et de B et 4 est égal à la moyenne des ordonnées de A et de B.
Donc $5 = \frac{1}{2}(a + 8)$, d'où $10 = a + 8$, ou $a = 2$.
De plus, $4 = \frac{1}{2}(0 + b)$, d'où $8 = 0 + b$, ou $b = 8$.
Donc $a = 2$ et $b = 8$.

Solution 2

$P(5, 4)$ est le milieu du segment qui joint les points $A(a, 0)$ et $B(8, b)$.
Pour se rendre de A à P, il faut se déplacer de 4 unités vers le haut (et d'une certaine distance vers la droite). Il faut donc faire de même pour se déplacer de P à B. L'ordonnée de B est donc égale à $4 + 4$, ou 8. Donc $b = 8$.
Pour se rendre de P à B, il faut se déplacer de 3 unités vers la droite (et de 4 unités vers le haut). Il faut donc faire de même pour se déplacer de A à P. L'abscisse de A est donc égale à $5 - 3$, ou 2. Donc $a = 2$.
Donc $a = 2$ et $b = 8$.

(c) Puisque la droite d'équation $ax + y = 30$ passe au point $(6, 12)$, alors $6a + 12 = 30$, d'où $6a = 18$, ou $a = 3$.
La deuxième droite a donc pour équation $x + 3y = k$. Puisqu'elle passe au point $(6, 12)$, alors $6 + 3(12) = k$, ou $k = 42$.

2. (a) *Solution 1*
Puisque le point $(c, 7)$ est situé sur la parabole, alors $7 = (c - 2)(c - 8) + 7$, d'où $(c - 2)(c - 8) = 0$.
Donc $c = 2$ ou $c = 8$. Puisque $c \neq 2$, alors $c = 8$.

Solution 2
La parabole a pour équation $y = (x - 2)(x - 8) + 7$, c'est-à-dire $y = x^2 - 10x + 16 + 7$, ou $y = x^2 - 10x + 23$.
On complète le carré :

$$y = x^2 - 10x + 25 - 25 + 23 = (x - 5)^2 - 2$$

Donc, l'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = 5$.
Puisque le point $(2, 7)$ est situé sur la parabole et qu'il se trouve à 3 unités à la gauche de l'axe de symétrie, alors le point $(5 + 3, 7)$, ou $(8, 7)$, est lui aussi situé sur la parabole.
Donc $c = 8$.

(b) *Solution 1*
Puisque les points $(2, 7)$ et $(8, 7)$ sont situés sur la parabole, l'axe de symétrie est situé à mi-chemin entre ces deux points. Il a donc pour équation $x = 5$.
Puisque le sommet de la parabole est situé sur l'axe de symétrie, il a pour abscisse 5.
Son ordonnée est égale à $y = (5 - 2)(5 - 8) + 7$, soit $y = -9 + 7$, ou $y = -2$.
Le sommet a donc pour coordonnées $(5, -2)$.

Solution 2
La parabole a pour équation $y = (x - 2)(x - 8) + 7$, c'est-à-dire $y = x^2 - 10x + 16 + 7$, ou $y = x^2 - 10x + 23$.
On complète le carré :

$$y = x^2 - 10x + 25 - 25 + 23 = (x - 5)^2 - 2$$

Le sommet a donc pour coordonnées $(5, -2)$.

(c) Puisque la droite passe par les points $A(5, 0)$ et $B(4, -1)$, sa pente est égale à $\dfrac{0 - (-1)}{5 - 4}$, soit $\frac{1}{1}$, ou 1.
L'équation de la droite est donc de la forme $y = x + b$.
Puisque le point $A(5, 0)$ est situé sur la droite, alors $0 = 5 + b$, ou $b = -5$. La droite a

donc pour équation $y = x - 5$.

Aux points où la droite coupe la parabole, on a :

$$\begin{aligned} (x-2)(x-8)+7 &= x-5 \\ x^2-10x+16+7 &= x-5 \\ x^2-11x+28 &= 0 \\ (x-4)(x-7) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x = 4$ ou $x = 7$.

Or, on connaît déjà le point dont $x = 4$. On considère donc $x = 7$.

Pour déterminer l'ordonnée de ce point, il est plus facile d'utiliser l'équation de la droite que celle de la parabole. On a donc $y = 7 - 5$, ou $y = 2$.

Les coordonnées du deuxième point sont donc $(7, 2)$.

3. (a) *Solution 1*

Soit x le nombre au milieu du cadre.

Les deux autres nombres de la rangée du milieu sont donc $x - 1$ et $x + 1$.

Les deux autres nombres de la colonne de gauche sont $(x - 1) - 7$ et $(x - 1) + 7$, soit $x - 8$ et $x + 6$, puisque les nombres d'une colonne augmentent de 7 à chaque ligne. Les deux autres nombres de la première rangée sont donc $x - 7$ et $x - 6$, tandis que les deux autres nombres de la troisième rangée sont $x + 7$ et $x + 8$.

Donc, la somme des nombres à l'intérieur du cadre est égale à

$x + x - 1 + x + 1 + x - 8 + x - 7 + x - 6 + x + 6 + x + 7 + x + 8$, ou $9x$.

Donc, la somme des nombres à l'intérieur du cadre est 9 fois le nombre du milieu.

(On peut le vérifier en examinant l'exemple donné. On aurait pu voir, au départ, que la moyenne des nombres dans cadre est égale au nombre du milieu.)

Si la somme des nombres à l'intérieur du cadre est égale à 279, le nombre du milieu doit être égal à $\frac{1}{9}(279)$, ou 31. (On peut le vérifier en plaçant le cadre à cet endroit et en additionnant les nombres à l'intérieur du cadre.)

Solution 2

Si on place le cadre dans la position indiquée au départ et qu'on fait glisser le cadre d'une position vers la gauche, la somme des nombres dans le cadre est diminuée de 9, car chaque nombre est diminué de 1. De même, si on fait glisser le cadre d'une position vers la droite, la somme est augmentée de 9.

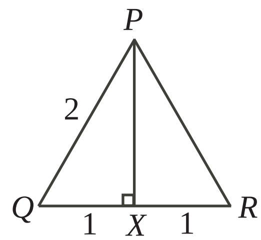
Si on fait glisser le cadre d'une position vers le bas, chaque nombre est augmenté de 7 et la somme est donc augmentée de 63. De même, si on fait glisser le cadre d'une position vers le haut, la somme est diminuée de 63.

Au départ, la somme des nombres dans le cadre est égale à 108. Pour obtenir une somme de 279, il faut l'augmenter de $279 - 108$, ou 171.

Or, $171 = 3(63) - 2(9)$. Donc, si on fait glisser le cadre de 3 positions vers le bas, puis de 2 positions vers la gauche, la somme sera augmentée de 171 et deviendra égale à 279.
Le nouveau nombre au milieu du cadre sera égal à $12 + 3(7) - 2$, ou 31.

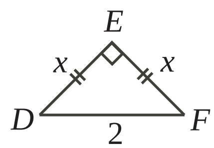
(b) Dans la Figure A, le cercle a un rayon de 1, puisqu'il a un diamètre de 2. Son aire est donc égale à $\pi(1)^2$, ou π, soit environ 3,14.

Dans la Figure B, le losange a une aire qui est égale à deux fois l'aire d'un triangle équilatéral dont les côtés ont une longueur de 2.
On considère un triangle équilatéral PQR dont les côtés ont une longueur de 2.
On trace une hauteur PX.
Puisque le triangle PQR est équilatéral, alors $QX = XR = \frac{1}{2}QR = 1$.



Puisque $\angle PQR = 60°$, le triangle PQX est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $PX = \sqrt{3}QX$, d'où $PX = \sqrt{3}(1)$, ou $PX = \sqrt{3}$.
L'aire du triangle PQR est donc égale à $\frac{1}{2}(2)(\sqrt{3})$, ou $\sqrt{3}$.
L'aire de la Figure B est donc égale à $2\sqrt{3}$, soit environ 3,46.

Dans la Figure C, le carré a une aire qui est égale à deux fois l'aire d'un triangle rectangle isocèle ayant une hypoténuse de longueur 2. Soit $DE = EF = x$.



Puisque le triangle est un triangle remarquable 45°-45°-90°, alors $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(2)$, ou $x = \sqrt{2}$.
L'aire de ce triangle est égale à $\frac{1}{2}(\sqrt{2})(\sqrt{2})$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(2)$, ou 1.
Donc, la Figure C a une aire de 2.

Puisque $2 < \pi < 2\sqrt{3}$ (car $2 < 3{,}14 < 3{,}46$), la Figure C a la plus petite aire et la Figure B a la plus grande aire.

4. (a) Puisque $PF = 20$ m et $\angle PAF = 40°$, alors $\dfrac{PF}{AF} = \tan(40°)$, d'où $AF = \dfrac{20 \text{ m}}{\tan(40°)}$.

Puisque le point B est situé à mi-chemin entre A et F, alors $BF = \frac{1}{2}AF = \dfrac{10 \text{ m}}{\tan(40°)}$ et on a donc :

$$\tan(\angle FBP) = \frac{PF}{BF} = \frac{20 \text{ m}}{\left(\frac{10 \text{ m}}{\tan(40°)}\right)} = 2\tan(40°) \approx 1{,}678$$

Donc $\angle FBP \approx 59{,}21°$. Au degré près, l'angle FBP mesure 59°.

(b) D'après la loi du cosinus dans le triangle CBA :

$$\begin{aligned} CA^2 &= CB^2 + BA^2 - 2(CB)(BA)\cos(\angle CBA) \\ CA^2 &= 16^2 + 21^2 - 2(16)(21)\cos(60^\circ) \\ CA^2 &= 256 + 441 - 2(16)(21)(\tfrac{1}{2}) \\ CA^2 &= 256 + 441 - (16)(21) \\ CA^2 &= 361 \\ CA &= \sqrt{361} = 19 \qquad \text{(puisque } CA > 0\text{)} \end{aligned}$$

Dans le triangle CAD, $\angle CDA = 180^\circ - \angle DCA - \angle DAC$, d'où $\angle CDA = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ$, ou $\angle CDA = 105^\circ$.

D'après la loi des sinus dans le triangle CDA :

$$\begin{aligned} \frac{CD}{\sin(\angle DAC)} &= \frac{CA}{\sin(\angle CDA)} \\ CD &= \frac{19\sin(30^\circ)}{\sin(105^\circ)} \\ CD &= \frac{19(\frac{1}{2})}{\sin(105^\circ)} \\ CD &= \frac{19}{2\sin(105^\circ)} \\ CD &\approx 9{,}835 \end{aligned}$$

Au dixième près, CD a une longueur de 9,8.

(On aurait pu utiliser

$$\begin{aligned} \sin(105^\circ) &= \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin(60^\circ)\cos(45^\circ) + \cos(60^\circ)\sin(45^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

pour obtenir $CD = \dfrac{19}{2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)} = \dfrac{19\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$, puis calculer une valeur approximative de cette valeur exacte.)

5. (a) Au point C, on abaisse une perpendiculaire PC à AB. On a donc $CP = 12$.
Puisque le cercle de centre A est tangent au cercle de centre C, alors AC est égal à la somme des rayons de ces cercles. Donc $AC = 4 + 9$, ou $AC = 13$. De même, $BC = 13$.
Les triangles APC et BPC sont congruents (ce sont deux triangles rectangles avec un côté commun et dont les hypoténuses ont la même longueur). Donc $BP = AP$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle APC :

$$AP^2 = AC^2 - PC^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$$

Donc $AP = 5$ (puisque $AP > 0$).
Donc $BP = AP = 5$ et $AB = 10$.
Puisque la puce met 5 secondes pour franchir une distance de 10, alors en 1 seconde, elle parcourt une distance de 2.

(b) Le sommet de la parabole est situé sur l'axe des abscisses si l'équation

$$kx^2 + (5k+3)x + (6k+5) = 0$$

admet deux racines réelles égales. Son discriminant doit donc être égal à 0. Donc :

$$\begin{aligned}(5k+3)^2 - 4k(6k+5) &= 0\\ 25k^2 + 30k + 9 - 24k^2 - 20k &= 0\\ k^2 + 10k + 9 &= 0\\ (k+1)(k+9) &= 0\end{aligned}$$

Donc $k = -1$ ou $k = -9$.

6. (a) Puisque $f(x) = f(x-1) + f(x+1)$, alors $f(x+1) = f(x) - f(x-1)$. On a donc :

$$\begin{aligned}f(1) &= 1\\ f(2) &= 3\\ f(3) &= f(2) - f(1) = 3 - 1 = 2\\ f(4) &= f(3) - f(2) = 2 - 3 = -1\\ f(5) &= f(4) - f(3) = -1 - 2 = -3\\ f(6) &= f(5) - f(4) = -3 - (-1) = -2\\ f(7) &= f(6) - f(5) = -2 - (-3) = 1 = f(1)\\ f(8) &= f(7) - f(6) = 1 - (-2) = 3 = f(2)\end{aligned}$$

Pour chaque entier n, la valeur de $f(n)$ dépend uniquement de la valeur de la fonction pour les deux entiers précédents, soit $f(n-1)$ et $f(n-2)$. Puisque $f(7) = f(1)$ et $f(8) = f(2)$, les valeurs de f sont cycliques et se répéteront en un cycle de longueur 6.
Puisque 2008 est 4 de plus qu'un multiple de 6 ($2008 = 4 + 2004 = 4 + 6(334)$), alors $f(2008) = f(2008 - 6(334))$, d'où $f(2008) = f(4)$, ou $f(2008) = -1$.

(b) Puisque a, b et c forment une suite arithmétique, alors $b - a = c - b$. Soit $d = b - a = c - b$.
Donc $a = b - d$ et $c = b + d$.
Puisque $a + b + c = 60$, alors $(b - d) + b + (b + d) = 60$, d'où $3b = 60$, ou $b = 20$.
Les nombres a, b, c deviennent donc $20 - d$, 20, $20 + d$.
(On aurait pu écrire les nombres a, b, c sous la forme a, $a + d$, $a + 2d$ et obtenir le même résultat.)

On a donc $a-2=20-d-2$ et $c+3=20+d+3$, c'est-à-dire $a-2=18-d$ et $c+3=23+d$. On peut donc écrire les nombres $a-2$, b, $c+3$ sous la forme $18-d$, 20, $23+d$.

Puisque ces trois nombres forment une suite géométrique, alors :

$$\begin{aligned} \frac{20}{18-d} &= \frac{23+d}{20} \\ 20^2 &= (23+d)(18-d) \\ 400 &= -d^2-5d+414 \\ d^2+5d-14 &= 0 \\ (d+7)(d-2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $d=-7$ ou $d=2$.

Si $d=-7$, alors $a=27$, $b=20$ et $c=13$.

Si $d=2$, alors $a=18$, $b=20$ et $c=22$.

(On peut vérifier que dans chaque cas, les nombres $a-2, b, c+3$ forment une suite géométrique.)

7. (a) Puisque les trois multiples consécutifs de 3 ont une moyenne de a, alors le nombre du milieu est égal à a. Les trois multiples, dans l'ordre, sont $a-3, a, a+3$.

Puisque quatre multiples consécutifs de 4 ont une moyenne de $a+27$, alors le nombre $a+27$ est à mi-chemin entre les deuxième et troisième des quatre nombres. Puisqu'il y a une différence de 4 entre deux multiples consécutifs, alors le deuxième multiple est égal à $(a+27)-2$, ou $a+25$, et le troisième est égal à $(a+27)+2$, ou $a+29$. Les quatre multiples sont, dans l'ordre, $a+21$, $a+25$, $a+29$, $a+33$.

(Dans ces deux raisonnements, on a utilisé le fait que si une liste contient un nombre impair d'entiers, alors il y a un entier au milieu et si une liste contient un nombre pair d'entiers, alors le « milieu » de la liste se trouve entre deux des entiers de la liste.)

Le plus petit de ces sept entiers est $a-3$ et le plus grand est $a+33$.

La moyenne de ces deux entiers est égale à $\frac{1}{2}(a-3+a+33)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(2a+30)$, ou $a+15$.

Puisque $a+15=42$, alors $a=27$.

(b) Supposons que Bruno enlève la boule numéro x de son sac et que Crystel enlève la boule numéro y de son sac.

Alors $b=1+2+3+4+5+6+7+8+9-x$, ou $b=45-x$.

De plus, $c=1+2+3+4+5+6+7+8+9-y$, ou $c=45-y$.

Donc $b-c=(45-x)-(45-y)$, d'où $b-c=y-x$.

Puisque $1\leq x\leq 9$ et $1\leq y\leq 9$, alors $-8\leq y-x\leq 8$.

(En effet, $y-x$ admet une valeur maximale lorsque y est à son maximum, soit $y=9$, et x est à son minimum, soit $x=1$, et on a alors $y-x\leq 9-1=8$. De même, $y-x\geq -8$.)

Puisque $b-c$, qui est égal à $y-x$, peut prendre des valeurs de -8 à 8, alors pour être un multiple de 4, il doit être égal à -8, -4, 0, 4 ou 8.

Bruno et Crystel enlèvent chacun une boule parmi les 9 boules de leur sac et la chaque boule a la même chance d'être choisie. La probabilité de choisir n'importe quelle boule en particulier est donc égale à $\frac{1}{9}$. La probabilité de choisir deux boules en particulier (une boule de chaque sac) est donc égale à $\frac{1}{9} \times \frac{1}{9}$, c'est-à-dire $\frac{1}{81}$.

Pour calculer la probabilité demandée, il faut compter le nombre de couples (x, y) tels que $y-x$ est égal à -8, -4, 0, 4 ou 8, et multiplier ce nombre par $\frac{1}{81}$.

<u>1^{re} méthode</u>

Si $y-x=-8$, alors (x, y) doit être égal à $(9, 1)$.

Si $y-x=8$, alors (x, y) doit être égal à $(1, 9)$.

Si $y-x=-4$, alors (x, y) peut être égal à $(5, 1), (6, 2), (7, 3), (8, 4), (9, 5)$.

Si $y-x=4$, alors (x, y) peut être égal à $(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8), (5, 9)$.

Si $y-x=0$, alors (x, y) peut être égal à $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)$, ou $(9, 9)$.

Il y a donc 21 couples (x, y). La probabilité demandée est donc égale à $\frac{21}{81}$, ou $\frac{7}{27}$.

<u>2^e méthode</u>

Si $x=9$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 9, 5 ou 1.

Si $x=8$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 8 ou 4.

Si $x=7$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 7 ou 3.

Si $x=6$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 6 ou 2.

Si $x=5$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 9, 5 ou 1.

Si $x=4$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 8 ou 4.

Si $x=3$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 7 ou 3.

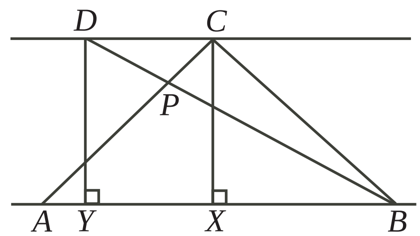
Si $x=2$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 6 ou 2.

Si $x=1$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 9, 5 ou 1.

Il y a donc 21 couples (x, y). La probabilité demandée est donc égale à $\frac{21}{81}$, ou $\frac{7}{27}$.

8. (a) Puisque $AC=CB$, le triangle ACB est isocèle et rectangle. Donc $\angle CAB = \angle CBA = 45°$.

Aux points C et D, on abaisse des perpendiculaires CX et DY à AB.



Puisque le triangle ACB est isocèle, alors $AX = XB = \frac{1}{2}AB$, d'où $AX = XB = 1$.

Puisque $\angle CAX = 45°$, alors le triangle AXC est isocèle et rectangle. Donc $CX = AX = 1$.

Puisque AB est parallèle à DC, alors $DY = CX = 1$.

On considère le triangle BDY. On sait que $\angle DYB = 90°$, $DB = 2$ et $DY = 1$.

Le triangle BDY est un triangle remarquable 30°-60°-90°, puisque la longueur d'une cathète et celle de l'hypoténuse ont un rapport de 1 : 2.

Donc $\angle DBY = 30°$, et $\angle DBC = \angle CBA - \angle DBY$, d'où $\angle DBC = 45° - 30°$, ou $\angle DBC = 15°$.

(b) *Solution 1*

Soit $AP = x$ et $QP = h$.

Puisque QP est parallèle à CB, alors QP est perpendiculaire à BA.

On considère le trapèze $CBPQ$. Il a des bases de longueurs 4 et h et une hauteur de 5. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(4+h)(5)$. On peut aussi calculer l'aire du trapèze en additionnant l'aire du triangle CBR (qui est égale à $\frac{1}{2}(4)(3)$), celle du triangle CRQ (qui est égale à 5) et celle du triangle RPQ (qui est égale à $\frac{1}{2}(2)(h)$). Donc :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(4+h)(5) &= \tfrac{1}{2}(4)(3) + 5 + \tfrac{1}{2}(2)(h) \\ 20 + 5h &= 12 + 10 + 2h \\ 3h &= 2 \\ h &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Les triangles APQ et ABC sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont un angle commun en A. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{AP}{PQ} &= \frac{AB}{BC} \\ (AP)(BC) &= (PQ)(AB) \\ 4x &= \tfrac{2}{3}(x+5) \\ 4x &= \tfrac{2}{3}x + \tfrac{10}{3} \\ \tfrac{10}{3}x &= \tfrac{10}{3} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Donc $AP = x = 1$.

Solution 2

Soit $AP = x$ et $QP = h$.

Puisque QP est parallèle à CB, alors QP est perpendiculaire à BA.

Puisque le triangle ABC est rectangle en B, son aire est égale à $\frac{1}{2}(4)(5+x)$, ou $10 + 2x$. Or, l'aire du triangle ABC est aussi égale à la somme de l'aire des quatre triangles qui le forment : le triangle CBR (qui a une aire de $\frac{1}{2}(4)(3)$), le triangle CRQ (qui a une aire de 5), le triangle QPR (qui a une aire de $\frac{1}{2}h(2)$) et le triangle QPA (qui a une aire de $\frac{1}{2}xh$). Donc $10 + 2x = 6 + 5 + h + \frac{1}{2}xh$, d'où $xh - 4x + 2h + 2 = 0$.

Les triangles APQ et ABC sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont un angle commun en A. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{AP}{PQ} &= \frac{AB}{BC} \\ (AP)(BC) &= (PQ)(AB) \\ x(4) &= h(x+5) \\ 4x &= hx+5h \\ -5h &= hx-4x \end{aligned}$$

On reporte $hx-4x=-5h$ dans l'équation $xh-4x+2h+2=0$ pour obtenir $-5h+2h+2=0$, d'où $3h=2$, ou $h=\frac{2}{3}$.
On reporte $h=\frac{2}{3}$ dans l'équation $-5h=hx-4x$: $-5(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}x-4x$, d'où $-\frac{10}{3}=-\frac{10}{3}x$, ou $x=1$.
Donc $AP=x=1$.

9. (a) Le logarithme base 10 du membre de gauche de l'équation est égal au logarithme base 10 du membre de droite :

$$\begin{aligned} \log_{10}(2^{x+2}5^{6-x}) &= \log_{10}(10^{x^2}) \\ \log_{10}(2^{x+2})+\log_{10}(5^{6-x}) &= x^2 \\ (x+2)\log_{10}2+(6-x)\log_{10}5 &= x^2 \\ x(\log_{10}2-\log_{10}5)+(2\log_{10}2+6\log_{10}5) &= x^2 \\ x^2-x(\log_{10}2-\log_{10}5)-(2\log_{10}2+6\log_{10}5) &= 0 \end{aligned}$$

Or $\log_{10}2+\log_{10}5=\log_{10}10=1$. Donc $\log_{10}5=1-\log_{10}2$. L'équation devient donc :

$$x^2-x(2\log_{10}2-1)-(6-4\log_{10}2)=0$$

Il s'agit d'une équation du second degré en x. Elle admet donc un maximum de deux racines rélles.
D'après la formule :

$$\begin{aligned} x &= \frac{(2\log_{10}2-1)\pm\sqrt{(2\log_{10}2-1)^2-4(1)(-(6-4\log_{10}2))}}{2(1)} \\ &= \frac{(2\log_{10}2-1)\pm\sqrt{4(\log_{10}2)^2-4\log_{10}2+1+24-16\log_{10}2}}{2} \\ &= \frac{(2\log_{10}2-1)\pm\sqrt{4(\log_{10}2)^2-20\log_{10}2+25}}{2} \\ &= \frac{(2\log_{10}2-1)\pm\sqrt{(2\log_{10}2-5)^2}}{2} \\ &= \frac{(2\log_{10}2-1)\pm(5-2\log_{10}2)}{2} \qquad \text{(puisque } 5-2\log_{10}2>0\text{)} \end{aligned}$$

Donc

$$x = \frac{(2\log_{10} 2 - 1) + (5 - 2\log_{10} 2)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

ou

$$x = \frac{(2\log_{10} 2 - 1) - (5 - 2\log_{10} 2)}{2} = \frac{4\log_{10} 2 - 6}{2} = 2\log_{10} 2 - 3$$

(À n'importe quel moment, on aurait pu calculer une approximation des racines à l'aide d'une calculatrice.)

(b) Premièrement, on récrit le système d'équations sous la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccc} x & + & \log_{10} x & = & y-1 \\ (y-1) & + & \log_{10}(y-1) & = & z-2 \\ (z-2) & + & \log_{10}(z-2) & = & x \end{array}$$

Deuxièmement, on définit $a = x$, $b = y - 1$ et $c = z - 2$, ce qui nous permet d'écrire le système sous la forme :

$$a + \log_{10} a = b \qquad (1)$$

$$b + \log_{10} b = c \qquad (2)$$

$$c + \log_{10} c = a \qquad (3)$$

Troisièmement, on remarque que $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ est une solution, puisque
$1 + \log_{10} 1 = 1 + 0 = 1$.
Si $a > 1$, alors $\log_{10} a > 0$. D'après l'équation (1), on a :

$$b = a + \log_{10} a > a + 0 = a > 1$$

Donc $\log_{10} b > 0$. D'après l'équation (2), on a :

$$c = b + \log_{10} b > b + 0 = b > a > 1$$

Donc $\log_{10} c > 0$. D'après l'équation (3), on a :

$$a = c + \log_{10} c > c + 0 = c > b > a > 1$$

On a donc $a > c > b > a$, qui est une contradiction.
Donc, a ne peut être supérieur à 1.
Si $0 < a < 1$ (a ne peut être négatif), alors $\log_{10} a < 0$. D'après l'équation (1), on a :

$$b = a + \log_{10} a < a + 0 = a < 1$$

Donc $\log_{10} b < 0$. D'après l'équation (2), on a :

$$c = b + \log_{10} b < b + 0 = b < a < 1$$

Donc $\log_{10} c < 0$. D'après l'équation (3), on a :

$$a = c + \log_{10} c > c + 0 = c < b < a < 1$$

On a donc $a < c < b < a$, qui est une contradiction.

Donc, a ne peut être inférieur à 1 non plus.

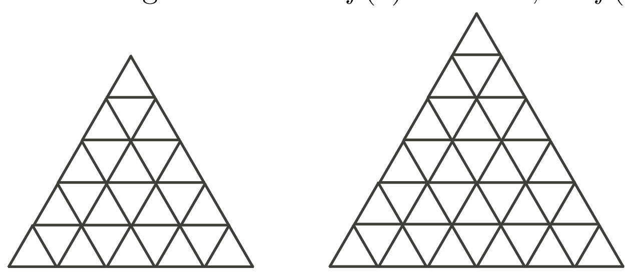
Donc, a doit être égal à 1.

Puisque $a = 1$, alors d'après l'équation (1), $b = a + \log_{10} a$, d'où $b = 1 + \log_{10} 1$, ou $b = 1 + 0$, ou $b = 1$. De la même manière, d'après l'équation (2), on obtient $c = 1$.

Donc, la seule solution du système est $(a, b, c) = (1, 1, 1)$.

Puisque $(a, b, c) = (x, y - 1, z - 2)$, alors $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

10. (a) Pour $n = 5$, il y a 10 triangles renversés ayant des côtés de longueur 1 et 3 triangles renversés ayant des côtés de longueur 2. Donc $f(5) = 10 + 3$, ou $f(5) = 13$.



Pour $n = 6$, il y a 15 triangles renversés ayant des côtés de longueur 1, 6 triangles renversés ayant des côtés de longueur 2 et 1 triangle renversé ayant des côtés de longueur 3. Donc $f(6) = 15 + 6 + 1$, ou $f(6) = 22$.

(b) *Solution 1*

On détermine une expression pour $f(2k)$ et une autre pour $f(2k - 1)$, en fonction de k, puis on utilise ces expressions pour montrer que $f(2k) - f(2k - 1) = k^2$.

On considère un grand triangle ayant des côtés de longueur n. (Plus tard, on considérera deux cas, selon que n est pair ou impair.)

La $i^{\text{ième}}$ ligne horizontale, à partir du haut, sera appelé « rangée i ». On remarque que la rangée i a une longueur i. Dans cette rangée, les points où les lignes obliques coupent la rangée i seront appelés, de gauche à droite, « point 0 », « point 1 », et ainsi de suite jusqu'au « point i ». (On utilisera la variable j pour décrire un point général dans cette rangée.)

On considère d'abord les triangles renversés ayant des côtés de longueur $m = 1$. On les compte en comptant les endroits où leur sommet inférieur peut être situé.

Il n'y a aucun sommet inférieur possible dans la rangée 1.

Il y a un sommet inférieur possible dans la rangée 2, soit au point $j = 1$.

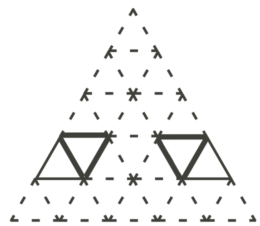
Il y a deux sommets inférieurs possibles dans la rangée 3, soit aux points $j = 1$ et $j = 2$.

On continue de cette manière, jusqu'à la rangée n qui contient $n - 1$ sommets inférieurs possibles, soit aux points $j = 1$ jusqu'à $j = n - 1$.

De façon générale, il y a $i - 1$ sommets inférieurs possibles dans la rangée i :

Pour le voir, on montre que le sommet inférieur le plus à gauche est au point $j = 1$ et que le sommet inférieur le plus à droite est au point $j = i - 1$. On obtient les autres sommets en faisant subir des translations vers la droite au premier triangle renversé.

Le sommet inférieur le plus à gauche est au point $j = 1$, car on obtient le premier triangle renversé en traçant un segment de longueur 1, du point 0 au point 1, de manière à former un parallélogramme qui contient un triangle debout et un triangle renversé.



Le parallélogramme est le premier qui puisse être tracé dans cette rangée, à l'intérieur du grand triangle. Le triangle renversé qu'il contient est donc le premier qui puisse être tracé dans cette rangée. Son sommet inférieur est au point $j = 1$. (En d'autres mots, on ne peut pas tracer un triangle renversé plus à gauche.)

De même, le sommet inférieur le plus à droite est au point $j = i - 1$. On peut le voir en traçant un parallélogramme à droite.

Puisqu'il y a $i-1$ triangles par rangée dans les rangées de $i = 2$ à $i = n$, le nombre total de triangles renversés ayant des côtés de longueur $m = 1$ est égal à $1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)$, ou $\frac{1}{2}(n-1)(n)$.

On considère des triangles renversés ayant des côtés de longueur m. Dans la rangée i, le premier sommet inférieur sera au point $j = m$ et le dernier sera au point $j = i - m$.
Il faut que $m \leq i - m$ (ou $2m \leq i$) pour que le premier sommet inférieur soit à gauche du dernier.
Dans la rangée i, le nombre de sommets inférieurs possibles est égal à $(i - m) - m + 1$, ou $i + 1 - 2m$.
(Lorsque $i = 2m$ (c'est-à-dire la plus petite valeur possible de i), le nombre de sommets inférieurs possibles est égal à $2m + 1 - 2m$, ou 1.
Lorsque $i = n$ (c'est-à-dire la plus grande valeur possible de i), le nombre de sommets inférieurs possibles est égal à $n + 1 - 2m$.)

Étant donné une valeur particulière strictement positive de n, quelles sont les valeurs possibles de m ? Il est clair que $m \geq 1$.
Si $n = 2k$, k étant un entier strictement positif quelconque, alors $2m \leq n = 2k$, puisque le plus grand triangle renversé possible aura son sommet inférieur dans la rangée du bas, d'où $m \leq k$.

Si $n = 2k - 1$, k étant un entier strictement positif quelconque, alors $2m \leq n = 2k - 1$, d'où $m \leq k - 1$.

Donc, étant donné une valeur particulière de m, le nombre total de triangles renversés ayant des côtés de longueur m est égal à

$$1 + 2 + \cdots + (n + 1 - 2m) = \tfrac{1}{2}(n + 1 - 2m)(n + 2 - 2m) \qquad (*)$$

ce qui correspond à la somme des valeurs de l'expression $i + 1 - 2m$ de $i = 2m$ à $i = n$, car on considère toutes les positions possibles du sommet inférieur.

Si $n = 2k$, les valeurs possibles de m sont les entiers de $m = 1$ à $m = k$. On additionne donc les valeurs du membre de droite de $(*)$ pour les valeurs de m, de $m = 1$ à $m = k$:

$$\begin{aligned}
f(2k) &= \sum_{m=1}^{k} \tfrac{1}{2}(2k + 1 - 2m)(2k + 2 - 2m) \\
&= \sum_{l=1}^{k} \tfrac{1}{2}(2l - 1)(2l) \qquad \text{(en posant } l = k + 1 - m) \\
&= \sum_{l=1}^{k} (2l - 1)(l) \\
&= \sum_{l=1}^{k} (2l^2 - l) \\
&= 2\sum_{l=1}^{k} l^2 - \sum_{l=1}^{k} l \\
&= 2\left(\tfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\right) - \tfrac{1}{2}k(k+1) \\
&= k(k+1)\left(\tfrac{1}{3}(2k+1) - \tfrac{1}{2}\right) \\
&= k(k+1)\left(\tfrac{2}{3}k - \tfrac{1}{6}\right) \\
&= \frac{k(k+1)(4k-1)}{6}
\end{aligned}$$

Si $n = 2k - 1$, les valeurs possibles de m sont les entiers de $m = 1$ à $m = k - 1$.
On additionne donc les valeurs du membre de droite de $(*)$ pour les valeurs de m, de $m = 1$ à $m = k - 1$:

$$\begin{aligned}
f(2k-1) &= \sum_{m=1}^{k-1} \tfrac{1}{2}(2k-2m)(2k+1-2m) \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} \tfrac{1}{2}(2l)(2l+1) \qquad \text{(en posant } l = k-m\text{)} \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} l(2l+1) \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} (2l^2+l) \\
&= 2\sum_{l=1}^{k-1} l^2 + \sum_{l=1}^{k-1} l \\
&= 2\left(\tfrac{1}{6}(k-1)(k)(2k-1)\right) + \tfrac{1}{2}(k-1)(k) \\
&= k(k-1)\left(\tfrac{1}{3}(2k-1) + \tfrac{1}{2}\right) \\
&= k(k-1)\left(\tfrac{2}{3}k + \tfrac{1}{6}\right) \\
&= \frac{k(k-1)(4k+1)}{6}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
f(2k) - f(2k-1) &= \frac{k(k+1)(4k-1)}{6} - \frac{k(k-1)(4k+1)}{6} \\
&= \tfrac{1}{6}k((k+1)(4k-1) - (k-1)(4k+1)) \\
&= \tfrac{1}{6}k((4k^2+3k-1) - (4k^2-3k-1)) \\
&= \tfrac{1}{6}k(6k) \\
&= k^2
\end{aligned}$$

Solution 2

Comme dans la Solution 1, on peut montrer que si $n = 2k$, on peut placer des triangles renversés ayant des côtés de longueur $m = 1$ à $m = k$ et si $n = 2k-1$, on peut placer des triangles renversés ayant des côtés de longueur $m = 1$ à $m = k-1$.

On considère $f(2k)-f(2k-1)$. Pour calculer cette valeur, on calculera combien de triangles renversés *de plus* on pourra placer dans un grand triangle de grandeur $n = 2k$ que dans un grand triangle de grandeur $n = 2k-1$.

Puisque le grand triangle de grandeur $2k-1$ peut être placé dans le grand triangle de grandeur $2k$ en faisant coïncider leur sommet supérieur, alors tous les nouveaux triangles renversés à l'intérieur du grand triangle de grandeur $n = 2k$ auront leur sommet inférieur dans la dernière rangée, soit la rangée $n = 2k$.

On compte ce nombre de triangles en considérant les valeurs possibles de m.

Si $m = 1$, la Solution 1 nous dit que le nombre de tels triangles est égal à $2k+1-2(1)$, ou $2k-1$.

Si $m = 2$, le nombre de tels triangles est égal à $2k + 1 - 2(2)$, ou $2k - 3$.

Pour une valeur particulière de m, le nombre de tels triangles est égal à $2k + 1 - 2m$.

La valeur de $f(2k) - f(2k-1)$ est égale à la somme des valeurs de $2k+1-2m$ pour toutes les valeurs possibles de m.

Donc :

$$\begin{aligned} f(2k) - f(2k-1) &= \sum_{m=1}^{k}(2k+1-2m) \\ &= \sum_{m=1}^{k}(2k+1) - 2\sum_{m=1}^{k} m \\ &= k(2k+1) - 2\left(\tfrac{1}{2}k(k+1)\right) \\ &= 2k^2 + k - (k^2 + k) \\ &= k^2 \end{aligned}$$

(c) D'après la Solution 1 de (b), on sait que

$$f(2k) = \frac{k(k+1)(4k-1)}{6} \qquad \text{et} \qquad f(2k-1) = \frac{k(k-1)(4k+1)}{6}$$

On utilise chacune de ces expressions pour exprimer $f(n)$ en fonction de n.

Si n est pair, alors $n = 2k$, d'où $k = \frac{1}{2}n$. Donc :

$$f(n) = f(2k) = \frac{\frac{1}{2}n(\frac{1}{2}n+1)(4(\frac{1}{2}n)-1)}{6} = \frac{\frac{1}{2}n(\frac{1}{2}n+1)(2n-1)}{6} = \frac{n(n+2)(2n-1)}{24}$$

Si n est impair, alors $n = 2k-1$, d'où $k = \frac{1}{2}(n+1)$. Donc :

$$\begin{aligned} f(n) &= f(2k-1) = \frac{\frac{1}{2}(n+1)(\frac{1}{2}(n+1)-1)(4(\frac{1}{2}(n+1))+1)}{6} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(n+1)(\frac{1}{2}(n+1)-1)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n-1)(2n+3)}{24} \end{aligned}$$

<u>1^er cas : n est pair</u>

Si $f(n)$ est divisible par n, alors $f(n) = nq$, q étant un entier positif quelconque. Donc :

$$\begin{aligned} nq &= \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} \\ 24nq &= n(n+2)(2n-1) \\ 24q &= (n+2)(2n-1) \qquad \text{(puisque } n \neq 0\text{)} \end{aligned}$$

Il faut donc que $(n+2)(2n-1)$ soit un multiple de 24.

Puisque $2n-1$ est impair, il faut que $n+2$ soit un multiple de 8, c'est-à-dire que $n+2 = 8a$, a étant un entier positif quelconque. Donc $n = 8a - 2$.

Donc $24q = 8a(2(8a-2)-1)$, ou $3q = a(16a-5)$.

Il faut aussi que $a(16a-5)$ soit un multiple de 3.

Puisque 3 est un nombre premier, alors a doit être divisible par 3 ou $16a-5$, que l'on peut exprimer sous la forme $3(5a-2)+(a+1)$, doit être divisible par 3.
Si a est divisible par 3, alors $a=3b$, b étant un entier positif quelconque.
Si $16a-5$ est divisible par 3, alors $a+1$ est divisible par 3, car d'après l'identité $16a-5=3(5a-2)+(a+1)$, on a $a+1=(16a-5)-3(5a-2)$ et $a+1$ est la différence de deux multiples de 3. Donc $a+1=3b$, b étant un entier positif quelconque. Donc $n=8(3b)-2=24b-2$ ou $n=8(3b-1)-2=24b-10$, b étant un entier positif quelconque.
On a démontré que si $f(n)$ est divisible par n, alors $n=24b-2$ ou $n=24b-10$, b étant un entier positif quelconque. On vérifie que $f(n)$ est divisible par n si $n=24b-2$ ou $n=24b-10$, b étant *n'importe quel* entier positif.
Si $n=24b-2$, alors

$$f(n)=f(24b-2)=\frac{(24b-2)(24b)(48b-5)}{24}=b(24b-2)(48b-5)$$

et $f(n)$ est divisible par $24b-2$ pour n'importe quelle valeur entière positive de b, ce qui veut dire que dans ce cas, $f(n)$ est divisible par n.
Si $n=24b-10$, alors

$$f(n)=f(24b-10)=\frac{(24b-10)(24b-8)(48b-21)}{24}=(24b-10)(3b-1)(16b-7)$$

et $f(n)$ est divisible par $24b-10$ pour n'importe quelle valeur entière positive de b, ce qui veut dire que dans ce cas, $f(n)$ est divisible par n.
Donc, si n est pair, $f(n)$ est divisible par n si $n=24b-2$ ou $n=24b-10$, b étant n'importe quel entier positif.

<u>2^e cas : n est impair</u>
Si $f(n)$ est divisible par n, alors $f(n)=nq$, q étant un entier positif quelconque. Donc :

$$\begin{aligned}
nq &= \frac{(n+1)(n-1)(2n+3)}{24}\\
24nq &= (n+1)(n-1)(2n+3)\\
24nq &= (n^2-1)(2n+3)\\
24nq &= 2n^3+3n^2-2n-3\\
3 &= 2n^3+3n^2-2n-24nq\\
3 &= n(2n^2+3n-2-24q)
\end{aligned}$$

Puisque le membre de droite est divisible par n, le membre de gauche doit l'être aussi. Donc, n est un diviseur de 3. Donc $n=1$ ou $n=3$.

Donc $f(n)$ est divisible par n si $n=1$, $n=3$, $n=24b-10$ ou $n=24b-2$, b étant n'importe quel entier positif.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide 2007

le mardi 17 avril 2007

Solutions

1. (a) Puisque le point $(a-1, a+1)$ est situé sur la droite d'équation $y = 2x - 3$, alors $a + 1 = 2(a-1) - 3$, ou $a + 1 = 2a - 5$, d'où $a = 6$.

(b) *Solution 1*

Pour se rendre de P à Q, on se déplace de 3 unités vers la droite et de 4 unités vers le haut. Puisque $PQ = QR$ et que R est sur le même segment de droite que P et Q, on se déplace de la même façon pour se rendre de Q à R.

Donc, pour se rendre de $Q(0, 4)$ à R, on se déplace de 3 unités vers la droite et de 4 unités vers le haut. Les coordonnées de R sont donc $(3, 8)$.

Solution 2

La droite qui passe par les points $P(-3, 0)$ et $Q(0, 4)$ a une ordonnée à l'origine de 4 et une pente de $\dfrac{4-0}{0-(-3)}$, ou $\dfrac{4}{3}$. Son équation est donc $y = \frac{4}{3}x + 4$.

Donc R a pour coordonnées $(a, \frac{4}{3}a + 4)$, a étant un nombre positif quelconque.

Puisque $PQ = QR$, alors $PQ^2 = QR^2$. Donc :

$$\begin{aligned}
(-3)^2 + 4^2 &= a^2 + \left(\tfrac{4}{3}a + 4 - 4\right)^2 \\
25 &= a^2 + \tfrac{16}{9}a^2 \\
\tfrac{25}{9}a^2 &= 25 \\
a^2 &= 9
\end{aligned}$$

Puisque a est positif, alors $a = 3$.

Les coordonnées de R sont donc $(3, \frac{4}{3}(3) + 4)$, ou $(3, 8)$.

(c) Puisque $OP = 9$, alors P a pour coordonnées $(9, 0)$.

Puisque $OP = 9$ et $OA = 15$, alors d'après le théorème de Pythagore, on a $AP^2 = OA^2 - OP^2$, c'est-à-dire $AP^2 = 15^2 - 9^2$, ou $AP^2 = 144$. Donc $AP = 12$.

Puisque P a pour coordonnées $(9, 0)$ et que A est situé à 12 unités au-dessus de P, alors A a pour coordonnées $(9, 12)$.

Puisque $PB = 4$, alors B a pour coordonnées $(13, 0)$.

La droite qui passe par $A(9, 12)$ et $B(13, 0)$ a pour pente $\dfrac{12-0}{9-13}$, ou -3. Son équation est donc $y - 0 = -3(x - 13)$, ou $y = -3x + 39$.

2. (a) Puisque $\cos(\angle BAC) = \dfrac{AB}{AC}$, $\cos(\angle BAC) = \frac{5}{13}$ et $AB = 10$, alors $AC = \frac{13}{5}AB$, c'est-à-dire que $AC = 26$.

Puisque le triangle ABC est rectangle en B alors, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AC^2 - AB^2$, c'est-à-dire que $BC^2 = 26^2 - 10^2$, ou $BC^2 = 576$. Puisque $BC > 0$, alors $BC = 24$.

Donc $\tan(\angle ACB) = \dfrac{AB}{BC}$, d'où $\tan(\angle ACB) = \frac{10}{24}$, ou $\tan(\angle ACB) = \frac{5}{12}$.

(b) Puisque $2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{25}{16}$ et que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (d'où $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$), alors :

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x + (1 - \sin^2 x) &= \tfrac{25}{16} \\ \sin^2 x &= \tfrac{25}{16} - 1 \\ \sin^2 x &= \tfrac{9}{16} \\ \sin x &= \pm\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Puisque $0° < x < 90°$, alors $\sin x > 0$. Donc $\sin x = \frac{3}{4}$.

(c) Puisque le triangle ABC est isocèle et rectangle, alors $\angle BAC = 45°$.
De plus, $AC = \sqrt{2}AB$, d'où $AC = \sqrt{2}(2\sqrt{2})$, ou $AC = 4$.
Puisque $\angle EAB = 75°$ et $\angle BAC = 45°$, on a $\angle CAE = \angle EAB - \angle BAC$, d'où $\angle CAE = 30°$.
Puisque le triangle AEC est rectangle et qu'il admet un angle de $30°$, il est donc un rectangle remarquable $30°$-$60°$-$90°$.
Donc $EC = \frac{1}{2}AC = 2$ (puisque EC est opposé à l'angle de $30°$) et $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$, d'où $AE = 2\sqrt{3}$ (puisque AE est opposé à l'angle de $60°$).
Dans le triangle CDE, on a $ED = DC$ et $\angle EDC = 60°$. Le triangle CDE est donc équilateral. Donc $ED = CD = EC = 2$.
Le périmètre de $ABCDE$ est donc égal à $AB + BC + CD + DE + EA$, soit $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 + 2 + 2\sqrt{3}$, ou $4 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$.

3. (a) D'après les renseignements, le premier terme de la suite est égal à 2007 et chaque autre terme peut être obtenu à partir du terme précédent.
Le deuxième terme est égal à $2^3 + 0^3 + 0^3 + 7^3$, soit $8 + 0 + 0 + 343$, ou 351.
Le troisième terme est égal à $3^3 + 5^3 + 1^3$, soit $27 + 125 + 1$, ou 153.
Le quatrième terme est égal à $1^3 + 5^3 + 3^3$, soit $1 + 125 + 27$, ou 153.
Puisqu'on a deux termes consécutifs égaux, tous les termes qui suivent sont égaux. En effet, chacun de ces termes est égal à 153 et donne 153 comme terme suivant.
Donc, le 2007$^{\text{e}}$ terme est égal à 153.

(b) Le n^{e} terme de la suite A est égal à $n^2 - 10n + 70$.
La suite B, qui est arithmétique, a pour premier terme 5 et pour raison 10. Son n^{e} terme est donc égal à $5 + 10(n - 1)$, ou $10n - 5$. (On voit que cette formule génère les premiers termes.)
Pour que le n^{e} terme de la suite A soit égal au n^{e} terme de la suite B, il faut que :

$$\begin{aligned} n^2 - 10n + 70 &= 10n - 5 \\ n^2 - 20n + 75 &= 0 \\ (n-5)(n-15) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $n = 5$ ou $n = 15$. Les 5$^{\text{e}}$ et 15$^{\text{e}}$ termes des deux suites sont donc égaux.

4. (a) *Solution 1*

On a :

$$\begin{aligned} 2+\sqrt{x-2} &= x-2 \\ \sqrt{x-2} &= x-4 \\ x-2 &= (x-4)^2 \\ x-2 &= x^2-8x+16 \\ 0 &= x^2-9x+18 \\ 0 &= (x-3)(x-6) \end{aligned}$$

Donc $x = 3$ ou $x = 6$. On vérifie, car on a élevé chaque membre au carré, ce qui a pu introduire de nouvelles racines.
Lorsque $x = 3$, le membre de gauche est égal à $2+\sqrt{1}$, ou 3, et le membre de droite est égal à 1. On rejette donc $x = 3$.
Lorsque $x = 6$, le membre de gauche est égal à $2+\sqrt{4}$, ou 4, et le membre de droite est égal à 4. Donc, la seule racine est 6.

Solution 2

Posons $u = \sqrt{x-2}$.
L'équation devient $2+u = u^2$, ou $u^2 - u - 2 = 0$, ou $(u-2)(u+1) = 0$.
Donc $u = 2$ ou $u = -1$.
Or, on ne peut avoir $\sqrt{x-2} = -1$ (car une racine carrée doit être non négative).
Donc $\sqrt{x-2} = 2$, d'où $x-2 = 4$, ou $x = 6$.
On peut vérifier que 6 est bien une racine.

(b) *Solution 1*

D'après la figure, la parabole a pour abscisses à l'origine 3 et -3.
Donc, l'équation de la parabole est de la forme $y = a(x-3)(x+3)$, a étant un nombre quelconque.
Le triangle ABC a une base AB de longueur 6 et une hauteur correspondante OC de longueur h, O étant l'origine.
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(AB)h$, ou $3h$. Or, on sait que cette aire est égale à 54. Donc $3h = 54$, d'où $h = 18$.
Le point C a donc pour coordonnées $(0,-18)$. Puisque C est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation de la parabole.
Donc $-18 = a(0-3)(0+3)$, d'où $-18 = -9a$, ou $a = 2$.
L'équation de la parabole est donc $y = 2(x-3)(x+3)$, ou $y = 2x^2 - 18$.

Solution 2

D'après la figure, la parabole a pour abscisses à l'origine 3 et -3.

Le triangle ABC a une base AB de longueur 6 et une hauteur correspondante OC de longueur h, O étant l'origine.

L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(AB)h$, ou $3h$. Or, on sait que cette aire est égale à 54. Donc $3h = 54$, d'où $h = 18$.

La parabole a donc pour sommet $C(0,-18)$. Son équation est donc de la forme

$y = a(x - 0)^2 - 18$.

(Puisque les abscisses à l'origine de la parabole égalent 3 et -3, alors par symétrie, le sommet doit être situé sur l'axe des ordonnées. C est donc le sommet.)

Puisque le point $B(3, 0)$ est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation. Donc $0 = a(3)^2 - 18$, d'où $9a = 18$, ou $a = 2$.

L'équation de la parabole est donc $y = 2x^2 - 18$.

5. (a) Puisque $\dfrac{72°}{360°} = \dfrac{1}{5}$, la longueur de l'arc du secteur est égale à $\dfrac{1}{5}$ de la circonférence d'un cercle de rayon 5.

La longueur de l'arc est donc égale à $\frac{1}{5}(2\pi(5))$, ou 2π.

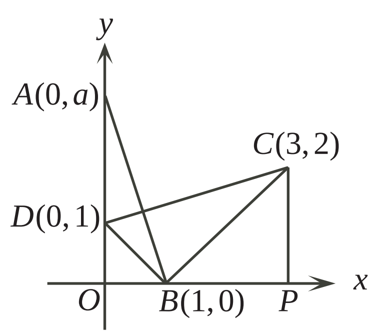
Le périmètre du secteur est donc égal à $5 + 5 + 2\pi$, ou $10 + 2\pi$.

(b) Puisque le triangle AOB est rectangle en O, son aire est égale à $\frac{1}{2}(AO)(OB)$, soit $\frac{1}{2}a(1)$, ou $\frac{1}{2}a$.

On doit ensuite déterminer l'aire du triangle BCD.

1re approche : À partir de l'aire d'un trapèze

Au point C, on abaisse une perpendiculaire CP à l'axe des abscisses. On a $P(3, 0)$.



Donc, $DOPC$ est un trapèze ayant pour bases DO de longueur 1 et PC de longueur 2. Sa hauteur OP (qui est bien perpendiculaire aux bases) a une longueur de 3.

L'aire du trapèze est égale à $\frac{1}{2}(DO + PC)(OP)$, soit $\frac{1}{2}(1 + 2)(3)$, ou $\frac{9}{2}$.

Or, l'aire du triangle BCD est égale à l'aire du trapèze $DOPC$ moins l'aire des triangles DOB et BPC.

Le triangle DOB est rectangle en O. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(DO)(OB)$, soit $\frac{1}{2}(1)(1)$, ou $\frac{1}{2}$.

Le triangle BPC est rectangle en P. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(BP)(PC)$, soit $\frac{1}{2}(2)(2)$, ou 2.

Donc, l'aire du triangle DBC est égale à $\frac{9}{2} - \frac{1}{2} - 2$, ou 2.

(Pour calculer l'aire du triangle DBC, on aurait pu, au point C, abaisser une perpendiculaire CQ à l'axe des ordonnées de manière à créer un rectangle $QOPC$.)

2[e] approche : On utilise le fait que le triangle DBC est rectangle.

La pente du segment DB est égale à $\frac{1-0}{0-1}$, ou -1.

La pente du segment BC est égale à $\frac{2-0}{3-1}$, ou 1.

Puisque le produit de ces pentes est égal à -1, alors DB et BC sont perpendiculaires.

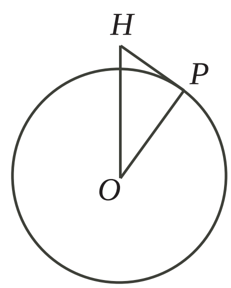
L'aire du triangle DBC est égale à $\frac{1}{2}(DB)(BC)$.

Or $DB = \sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}$, ou $\sqrt{2}$, et $BC = \sqrt{(3-1)^2+(2-0)^2}$, ou $\sqrt{8}$.

Donc, l'aire du triangle DBC est égale à $\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{8}$, ou 2.

Puisque l'aire du triangle AOB est égale à celle du triangle DBC, alors $\frac{1}{2}a = 2$, d'où $a = 4$.

6. (a) Soit O le centre de la planète, H l'habitacle de l'hélicoptère de notre héros hardi et P le point le plus éloigné que le Petit Prince puisse voir sur la surface de la planète.



HP est tangent à la surface de la planète (autrement le Petit Prince pourrait voir plus loin). Donc le rayon OP est perpendiculaire à la tangente HP.

On sait que $OP = 24$ km.

Puisque l'hélicoptère plane à une hauteur de 2 km, alors $OH = 26$ km $(24 + 2)$.

Donc $HP^2 = OH^2 - OP^2$, c'est-à-dire que $HP^2 = 26^2 - 24^2$, ou $HP^2 = 100$. Donc $HP = 10$ km.

Le Petit Prince peut donc voir à une distance de 10 km.

(b) Puisqu'on connaît la mesure de l'angle ADB, on peut déterminer les distances AD et BD, puis utiliser la loi du cosinus pour déterminer la distance AB.

Dans le triangle DBE, $\angle DBE = 180° - 20° - 70°$, ou $\angle DBE = 90°$. Le triangle DBE est rectangle et on a donc $BD = 100\cos(20°)$, ou $BD \approx 93{,}969$.

Dans le triangle DAC, $\angle DAC = 180° - 50° - 45°$, ou $\angle DAC = 85°$.

D'après la loi des sinus, $\frac{AD}{\sin(50°)} = \frac{CD}{\sin(85°)}$. Donc $AD = \frac{150\sin(50°)}{\sin(85°)}$, ou $AD \approx 115{,}346$.

D'après la loi du cosinus dans le triangle ABD, on a :

$$\begin{array}{rcl} AB^2 & = & AD^2 + BD^2 - 2(AD)(BD)\cos(\angle ADB) \\ AB^2 & \approx & (115{,}346)^2 + (93{,}969)^2 - 2(115{,}346)(93{,}969)\cos(35^\circ) \\ AB^2 & \approx & 4377{,}379 \\ AB & \approx & 66{,}16 \end{array}$$

Donc, la distance de A à B est d'environ 66 m.

7. (a) On utilise les lois des logarithmes :

$$\begin{array}{rcl} (\sqrt{x})^{\log_{10} x} & = & 100 \\ \log_{10}\left((\sqrt{x})^{\log_{10} x}\right) & = & \log_{10} 100 \\ (\log_{10} x)(\log_{10}\sqrt{x}) & = & 2 \\ (\log_{10} x)(\log_{10} x^{\frac{1}{2}}) & = & 2 \\ (\log_{10} x)(\frac{1}{2}\log_{10} x) & = & 2 \\ (\log_{10} x)^2 & = & 4 \\ \log_{10} x & = & \pm 2 \\ x & = & 10^{\pm 2} \end{array}$$

Donc $x = 100$ ou $x = \frac{1}{100}$.
(On peut vérifier en reportant chaque valeur dans l'équation initiale.)

(b) *Solution 1*

On peut supposer, sans perte de généralité, que le carré $ABCD$ a des côtés de longueur 1.
Soit $BF = a$ et $\angle CFB = \theta$.
Puisque le triangle CBF est rectangle en B, alors $\angle BCF = 90^\circ - \theta$.
Puisque GCF est une droite, alors $\angle GCD = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \theta)$, ou $\angle GCD = \theta$.
Puisque les triangles GDC et CBF sont rectangles et qu'ils ont chacun un angle θ, ils sont semblables.
Donc $\dfrac{GD}{DC} = \dfrac{BC}{BF}$, ou $\dfrac{GD}{1} = \dfrac{1}{a}$, d'où $GD = \dfrac{1}{a}$.
Donc $AF = AB + BF$, ou $AF = 1 + a$, et $AG = AD + DG$, ou $AG = 1 + \dfrac{1}{a} = \dfrac{a+1}{a}$.
Donc $\dfrac{1}{AF} + \dfrac{1}{AG} = \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{a}{a+1}$, c'est-à-dire que $\dfrac{1}{AF} + \dfrac{1}{AG} = \dfrac{a+1}{a+1} = 1$.
Donc $\dfrac{1}{AF} + \dfrac{1}{AG} = \dfrac{1}{AB}$.

Solution 2

On ajoute un repère cartésien de manière que A soit à l'origine, que AF soit sur la partie positive de l'axe des abscisses, que AG soit sur la partie positive de l'axe des ordonnées et que B ait pour coordonnées $(1, 0)$. Donc C a pour coordonnées $(1, 1)$.

Soit m la pente de la droite qui passe par les points G et F.
Puisque cette droite passe par le point (1,1), elle a pour équation $y - 1 = m(x - 1)$, ou $y = mx + (1 - m)$.
L'ordonnée à l'origine de la droite est égale à $1-m$. Donc, G a pour coordonnées $(0, 1-m)$.
L'abscisse à l'origine de la droite est égale à $\frac{m-1}{m}$. Donc, F a pour coordonnées $\left(\frac{m-1}{m}, 0\right)$.
(On sait que $m \neq 0$, car la droite ne peut être horizontale.)
Donc :

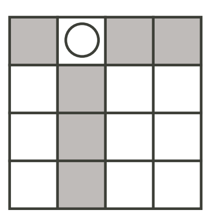
$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{AG} = \frac{m}{m-1} + \frac{1}{1-m} = \frac{m}{m-1} + \frac{-1}{m-1} = \frac{m-1}{m-1} = 1 = \frac{1}{AB}$$

Solution 3
On joint les points A et C.
On sait que la somme de l'aire des triangles GCA et FCA est égale à l'aire du triangle GAF.
L'aire du triangle GCA est égale à $\frac{1}{2}(AG)(DC)$ (on prend AG pour base et DC est perpendiculaire à AG).
De même, l'aire du triangle FCA est égale à $\frac{1}{2}(AF)(CB)$.
De plus, l'aire du triangle GAF est égale à $\frac{1}{2}(AG)(AF)$.
On a donc :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(AG)(DC) + \tfrac{1}{2}(AF)(CB) &= \tfrac{1}{2}(AG)(AF) \\ \frac{(AG)(DC)}{(AG)(AF)(AB)} + \frac{(AF)(CB)}{(AG)(AF)(AB)} &= \frac{(AG)(AF)}{(AG)(AF)(AB)} \\ \frac{1}{AF} + \frac{1}{AG} &= \frac{1}{AB} \end{aligned}$$

puisque $AB = DC = CB$.

8. (a) On place les pièces de monnaie une à la fois.
On place d'abord une pièce au hasard dans une case du quadrillage.
Il reste 15 cases dans lesquelles on peut placer la 2^e^ pièce ; or, 6 de ces 15 cases sont dans la même ligne ou dans la même colonne que la 1^re^ pièce. On peut donc placer la 2^e^ pièce dans une de 9 cases.



Donc, la probabilité pour que les deux pièces ne soient pas dans la même ligne, ni dans la même colonne est égale à $\frac{9}{15}$, ou $\frac{3}{5}$.
Il reste 14 cases dans lesquelles on peut placer la 3^e^ pièce ; or, 6 de ces 14 cases sont dans

la même ligne ou dans la même colonne que la 1$^{\text{re}}$ pièce et 4 autres de ces cases sont dans la même ligne ou la même colonne que la 2$^{\text{e}}$ pièce. Donc, la probabilité pour que la troisième pièce soit placée dans une ligne différente et dans une colonne différente que les deux premières pièces est égale à $\frac{4}{14}$, ou $\frac{2}{7}$.

Donc, la probabilité pour que les trois pièces soient dans des lignes différentes et des colonnes différentes est égale à $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$, ou $\frac{6}{35}$.

(b) Soit $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

Puisque DG est parallèle à AC, $\angle BDG = \angle BAC$ et $\angle DGB = \angle ACB$. Donc, le triangle DGB est semblable au triangle ACB.

De même, les triangles AED et ECF sont semblables au triangle ABC.

Soit $DB = kc$ $(0 < k < 1)$.

Donc, le rapport des longueurs des côtés du triangle DGB à celles des côtés correspondants du triangle ACB est égal à $k : 1$. Donc $BG = ka$ et $DG = kb$.

De plus, le rapport de l'aire des triangles est égal à $k^2 : 1$. Puisque l'aire du triangle ACB est égale à 1, l'aire du triangle DGB est égale à k^2.

Puisque $AB = c$ et $DB = kc$, alors $AD = (1-k)c$. En utilisant les triangles semblables, comme ci-haut, on a $DE = (1-k)a$ et $AE = (1-k)b$. De plus, l'aire du triangle ADE est égale à $(1-k)^2$.

Puisque $AC = b$ et $AE = (1-k)b$, alors $EC = kb$. En utilisant les triangles semblables, on a $EF = kc$ et $FC = ka$. De plus, l'aire du triangle ECF est égale à k^2.

Or, l'aire du trapèze $DEFG$ est égale à l'aire du grand triangle moins celle des trois petits triangles. Elle est donc égale à $1 - k^2 - k^2 - (1-k)^2$, ou $2k - 3k^2$.

Par définition, on sait que $k \geq 0$. Puisque le point G est situé à la gauche du point F, alors $BG + FC \leq BC$, d'où $ka + ka \leq a$, c'est-à dire que $2ka \leq a$, ou $k \leq \frac{1}{2}$.

Soit $f(k) = 2k - 3k^2$. Puisque la courbe représentative de la fonction f est une parabole ouverte vers le bas, la valeur maximale de f est obtenue au sommet de la parabole. L'abscisse du sommet est égale à $-\frac{2}{2(-3)}$, ou $\frac{1}{3}$. Cette valeur est située dans l'intervalle où k est définie, soit $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$. Or, $f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} - 3(\frac{1}{9})$, ou $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

Donc, l'aire maximale du trapèze est égale à $\frac{1}{3}$.

9. (a) Le sommet de la 1$^{\text{re}}$ parabole a pour abscisse $-\frac{1}{2}b$.

Puisque chaque parabole passe au point P, alors :

$$\begin{aligned}
f\left(-\tfrac{1}{2}b\right) &= g\left(-\tfrac{1}{2}b\right) \\
\tfrac{1}{4}b^2 + b(-\tfrac{1}{2}b) + c &= -\tfrac{1}{4}b^2 + d(-\tfrac{1}{2}b) + e \\
\tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{2}b^2 + c &= -\tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{2}bd + e \\
\tfrac{1}{2}bd &= e - c \\
bd &= 2(e-c)
\end{aligned}$$

(On obtient le même résultat en employant l'abscisse du sommet de la 2$^{\text{e}}$ parabole.)

(b) *Solution 1*

Le sommet P de la 1re parabole a pour abscisse $-\frac{1}{2}b$. Son ordonnée est donc égale à $f(-\frac{1}{2}b)$, soit $\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}b^2 + c$, ou $-\frac{1}{4}b^2 + c$.

Le sommet Q de la 2e parabole a pour abscisse $\frac{1}{2}d$. Son ordonnée est donc égale à $g(\frac{1}{2}d)$, soit $-\frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{2}d^2 + c$, ou $\frac{1}{4}d^2 + e$.

La droite qui passe par les points P et Q a donc pour pente :

$$\begin{aligned}
\frac{(-\frac{1}{4}b^2 + c) - (\frac{1}{4}d^2 + e)}{-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d} &= \frac{-\frac{1}{4}(b^2 + d^2) - (e - c)}{-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d} \\
&= \frac{-\frac{1}{4}(b^2 + d^2) - \frac{1}{2}bd}{-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d} \\
&= \frac{-\frac{1}{4}(b^2 + 2bd + d^2)}{-\frac{1}{2}(b + d)} \\
&= \frac{1}{2}(b + d)
\end{aligned}$$

Son équation est donc :

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}(b + d)(x - (-\frac{1}{2}b)) + (-\frac{1}{4}b^2 + c) \\
&= \frac{1}{2}(b + d)x + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}bd - \frac{1}{4}b^2 + c \\
&= \frac{1}{2}(b + d)x + \frac{1}{4}bd + c \\
&= \frac{1}{2}(b + d)x + \frac{1}{2}(e - c) + c \\
&= \frac{1}{2}(b + d)x + \frac{1}{2}(e + c)
\end{aligned}$$

L'ordonnée à l'origine de la droite est donc égale à $\frac{1}{2}(e + c)$.

Solution 2

Les paraboles ont pour équation respective $y = x^2 + bx + c$ et $y = -x^2 + dx + e$.

Aux points d'intersection, pour une même valeur de x, on a une même valeur de y.

On peut donc additionner les deux équations, membre par membre, pour obtenir $2y = (b + d)x + (c + e)$, ou $y = \frac{1}{2}(b + d)x + \frac{1}{2}(c + e)$.

Cette dernière équation est l'équation d'une droite.

Les coordonnées des points P et Q, qui vérifient l'équation de chaque parabole, doivent donc vérifier l'équation de cette droite.

Il s'agit donc de la droite qui passe par P et Q.

La droite qui passe par les points P et Q a donc pour pente $\frac{1}{2}(b + d)$ et pour ordonnée à l'origine $\frac{1}{2}(c + e)$.

10. (a) Puisque le cercle et les demi-droites XY et XZ sont fixes, alors $XY + XZ$ est fixe.

Puisque les tangentes VT et VY sont issues du même point V, alors $VT = VY$.

Puisque les tangentes WT et WZ sont issues du même point W, alors $WT = WZ$.

Le périmètre du triangle VXW est donc égal à :

$$\begin{aligned} XV + XW + VW &= XV + XW + VT + WT \\ &= XV + XW + VY + WZ \\ &= XV + VY + XW + WZ \\ &= XY + XZ \end{aligned}$$

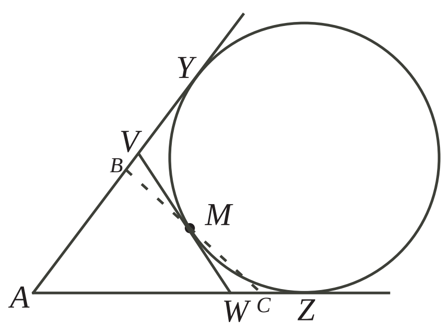
D'après le premier énoncé, le périmètre est constant.

Donc, le périmètre du triangle VXW est toujours égal à $XY + XZ$ et cette quantité est indépendante de la position de T.

(b) *Solution 1*

Il est possible de tracer un cercle qui est tangent aux demi-droites AB et AC, qui passe par le point M et dont le centre est situé à l'extérieur du triangle ABC. (On peut s'en convaincre en imaginant un cercle qui est tangent aux deux demi-droites et que l'on déplace en faisant bouger son centre sur la bissectrice de l'angle BAC, à l'extérieur du triangle ABC, tout en s'assurant que le cercle soit agrandi ou diminué de manière à demeurer tangent aux deux demi-droites, jusqu'à ce que le cercle passe par M.) Soit Y et Z les points de contact respectifs du cercle et des demi-droites AB et AC.

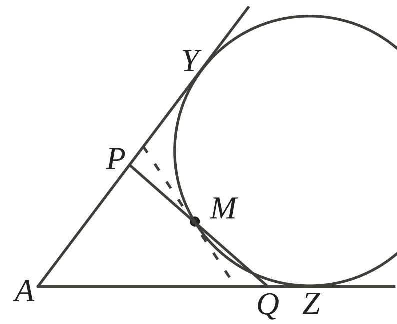
Au point M, on trace une tangente au cercle. La tangente coupe la demi-droite AB en V et la demi-droite AC en W.



On démontrera que le triangle AVW est le triangle qui a le plus petit périmètre parmi les triangles ayant pour sommet A, un sommet situé sur la demi-droite AB, un sommet situé sur la demi-droite AC et dont un côté passe par M.

D'après la partie (a), on sait que le périmètre du triangle AVW est égal à $AY + AZ$.

On considère un autre triangle APQ obtenu en traçant une autre droite qui passe par M. Cette droite PMQ ne peut être elle aussi tangente au cercle. Elle doit donc couper le cercle en deux endroits, soit en M et un autre point).



Or, il existe un autre cercle qui est tangent à cette droite ainsi qu'aux demi-droites AB et AC aux points respectifs Y' et Z', soit le cercle exinscrit au triangle APQ dans l'angle A. Puisque PMQ coupe le cercle initial en deux points, le nouveau cercle est formé en faisant glisser le cercle initial vers la droite, tout en l'agrandissant pour qu'il demeure tangent aux deux demi-droites. Donc, Y' et Z' seront plus éloignés, sur les demi-droites AB et AC, que Y et Z.
Le périmètre du triangle APQ est égal à $AY' + AZ'$, selon la partie (a).
Puisque $AY' + AZ' > AY + AZ$, le périmètre du triangle APQ est plus grand que celui du triangle AVW.
Donc, le périmètre est un minimum lorsque le point M est tangent au cercle.

Il reste à déterminer le périmètre du triangle AVW. Il suffit de déterminer la longueur de AZ. En effet, puisque le pérmiètre du triangle AVW est égal à $AY+AZ$ et que $AY = AZ$, le périmètre du triangle AVW est égal à deux fois la longueur AZ.
On calcule d'abord la mesure de l'angle VAW (ou BAC) en utilisant la loi du cosinus :

$$\begin{aligned}
BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC)\cos(\angle BAC) \\
14^2 &= 10^2 + 16^2 - 2(10)(16)\cos(\angle BAC) \\
196 &= 356 - 320\cos(\angle BAC) \\
320\cos(\angle BAC) &= 160 \\
\cos(\angle BAC) &= \tfrac{1}{2} \\
\angle BAC &= 60^\circ
\end{aligned}$$

On place la figure dans un plan cartésien de manière que A soit à l'origine $(0, 0)$ et que AC soit situé sur la partie positive de l'axe des abscisses. C a donc pour coordonnées $(16, 0)$.
Puisque $\angle BAC = 60^\circ$ et que $AB = 10$, alors B a pour coordonnées $(10\cos(60^\circ), 10\sin(60^\circ))$, ou $(5, 5\sqrt{3})$.
Puisque M est le milieu du segment BC, il a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(5 + 16), \frac{1}{2}(5\sqrt{3} + 0)\right)$, ou $\left(\frac{21}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$.
Soit O le centre du cercle qui est tangent aux demi-droites AB et AC, qui passe par M et dont le centre est situé à l'extérieur du triangle ABC. Soit r son rayon.
Puisque le cercle est tangent aux demi-droites AB et AC, le centre du cercle est situé sur la bissectrice de l'angle BAC. Il est donc situé sur la droite qui passe à l'origine et

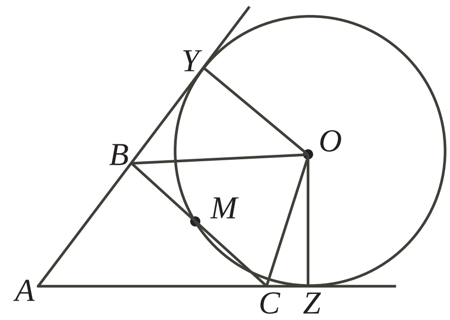
qui forme un angle de 30° avec la partie positive de l'axe des abscisses. La pente de cette droite est donc égale à $\tan(30°)$, ou $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Le centre O a donc une ordonnée égale à r, puisque le rayon de O à AZ est perpendiculaire à l'axe des abscisses. Donc, O a pour coordonnées $(\sqrt{3}r, r)$ et Z a pour coordonnées $(\sqrt{3}r, 0)$.
Le périmètre du triangle en question est égal à $2AZ$, ou $2\sqrt{3}r$.
Puisque le cercle a pour centre $(\sqrt{3}r, r)$ et pour rayon r, son équation est
$(x-\sqrt{3}r)^2+(y-r)^2=r^2$.
Puisque M est situé sur le cercle, ses coordonnées vérifient l'équation, ce qui nous donne une équation en r :

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{21}{2}-\sqrt{3}r\right)^2+\left(\tfrac{5}{2}\sqrt{3}-r\right)^2 &= r^2\\
\tfrac{441}{4}-21\sqrt{3}r+3r^2+\tfrac{75}{4}-5\sqrt{3}r+r^2 &= r^2\\
3r^2-26\sqrt{3}r+129 &= 0\\
(\sqrt{3}r)^2-2(13)(\sqrt{3}r)+169-40 &= 0\\
(\sqrt{3}r-13)^2 &= 40\\
\sqrt{3}r-13 &= \pm 2\sqrt{10}\\
r &= \frac{13\pm 2\sqrt{10}}{\sqrt{3}}\\
r &= \frac{13\sqrt{3}\pm 2\sqrt{30}}{3}
\end{aligned}$$

(Pour résoudre l'équation, on aurait pu utiliser la formule au lieu de compléter le carré.)
On choisit $r=\dfrac{13\sqrt{3}+2\sqrt{30}}{3}$, puisqu'on cherche le plus grand des deux cercles qui passent par M et qui sont tangents aux deux demi-droites. (Le plus petit des deux cercles est inscrit dans le triangle ABC, tandis que le plus grand est exinscrit.)
Le plus petit périmètre possible est donc égal à $2\sqrt{3}r$, c'est-à-dire à $\dfrac{26(3)+4\sqrt{90}}{3}$, ou $26+4\sqrt{10}$.

Solution 2
Comme dans la Solution 1, on démontre que le plus petit périmètre possible du triangle APQ est égal à $AY+AZ$.
On cherche ensuite à déterminer la longueur AY.
Comme dans la Solution 1, on peut démontrer que $\angle YAZ = 60°$.
Soit O le centre du cercle qui est tangent aux demi-droites AB et AC, qui passe par M et dont le centre est situé à l'extérieur du triangle ABC. Soit r son rayon.
Puisque le cercle est tangent à AY et à AZ aux points respectifs Y et Z, alors OY est perpendiculaire à AY et OZ est perpendiculaire à AZ.
Le segment qui joint O à A est sur la bissectrice de l'angle YAZ (puisque le cercle est tangent à AY et à AZ). Donc $\angle YAO = 30°$.

Donc $AY = \sqrt{3}(YO)$, d'où $AY = \sqrt{3}r$. De plus, $AZ = AY = \sqrt{3}r$.
On joint ensuite O à B et à C.



Puisque $AB = 10$, alors $BY = AY - AB$, ou $BY = \sqrt{3}r - 10$.
Puisque $AC = 10$, alors $CZ = AZ - AC$, ou $CZ = \sqrt{3}r - 16$.
Puisque le triangle OBY est rectangle en Y, alors :

$$OB^2 = BY^2 + OY^2 = (\sqrt{3}r - 10)^2 + r^2$$

Puisque le triangle OCZ est rectangle en Z, alors :

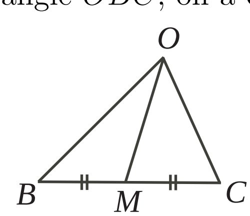
$$OC^2 = CZ^2 + OZ^2 = (\sqrt{3}r - 16)^2 + r^2$$

Puisque $BM = MC$, dans le triangle OBC, alors $OB^2 + OC^2 = 2BM^2 + 2OM^2$. (On le démontre quelques lignes plus loin, à la fin de la solution.)
Donc :

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}r - 10)^2 + r^2 + (\sqrt{3}r - 16)^2 + r^2 &= 2(7^2) + 2r^2 \\
3r^2 - 20\sqrt{3}r + 100 + r^2 + 3r^2 - 32\sqrt{3}r + 256 + r^2 &= 98 + 2r^2 \\
6r^2 - 52\sqrt{3}r + 258 &= 0 \\
3r^2 - 26\sqrt{3}r + 129 &= 0
\end{aligned}$$

Comme dans la Solution 1, $r = \dfrac{13\sqrt{3} + 2\sqrt{30}}{3}$. Le plus périmètre possible est donc égal à $2\sqrt{3}r$, c'est-à-dire à $\dfrac{26(3) + 4\sqrt{90}}{3}$, ou $26 + 4\sqrt{10}$.

Il reste à démontrer que dans le triangle OBC, on a $OB^2 + OC^2 = 2BM^2 + 2OM^2$.



D'après la loi du cosinus dans le triangle OBM :

$$OB^2 = OM^2 + BM^2 - 2(OM)(BM)\cos(\angle OMB)$$

D'après la loi du cosinus dans le triangle OCM :

$$OC^2 = OM^2 + CM^2 - 2(OM)(CM)\cos(\angle OMC)$$

Or $BM = CM$ et $\angle OMC = 180^\circ - \angle OMB$, d'où $\cos(\angle OMC) = -\cos(\angle OMB)$.
Les deux équations deviennent :

$$\begin{aligned} OB^2 &= OM^2 + BM^2 - 2(OM)(BM)\cos(\angle OMB) \\ OC^2 &= OM^2 + BM^2 + 2(OM)(BM)\cos(\angle OMB) \end{aligned}$$

On les additionne, membre par membre, pour obtenir $OB^2 + OC^2 = 2OM^2 + 2BM^2$, ce qu'il fallait démontrer.
(On remarque que ce résultat est vrai pour la médiane de n'importe quel triangle.)

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide 2006

le mercredi 19 avril 2006

Solutions

1. (a) RÉPONSE : 0

Solution 1

Puisque $3x - 3y = 24$, alors $x - y = 8$.
Pour obtenir l'abscisse à l'origine, on pose $y = 0$ et on obtient $x = 8$.
Pour obtenir l'ordonnée à l'origine, on pose $x = 0$ et on obtient $y = -8$.
La somme de l'abscisse à l'origine et de l'ordonnée à l'origine est égale à $8 + (-8)$, ou 0.

Solution 2

Pour obtenir l'abscisse à l'origine, on pose $y = 0$ et on obtient $3x = 24$, d'où $x = 8$.
Pour obtenir l'ordonnée à l'origine, on pose $x = 0$ et on obtient $-3y = 24$, d'où $y = -8$.
La somme de l'abscisse à l'origine et de l'ordonnée à l'origine est égale à $8 + (-8)$, ou 0.

Solution 3

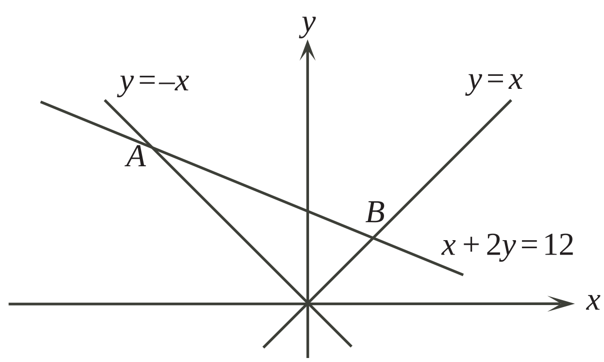
Puisque $3x - 3y = 24$, alors $x - y = 8$, ou $y = x - 8$.
D'après cette dernière équation, l'ordonnée à l'origine est égale à -8. Pour obtenir l'abscisse à l'origine, on pose $y = 0$ et on obtient $x = 8$.
La somme de l'abscisse à l'origine et de l'ordonnée à l'origine est égale à $8 + (-8)$, ou 0.

(b) RÉPONSE : 20

Puisque les droites se coupent au point (1,1), ces coordonnées vérifient l'équation de chaque droite.
D'après l'équation de la première droite, on a $p(1) = 12$, ou $p = 12$.
D'après l'équation de la deuxième droite, on a $2(1) + q(1) = 10$, d'où $q = 8$.
Donc $p + q = 20$.

(c) *Solution 1*

B est le point d'intersection des droites définies par $y = x$ et $x + 2y = 12$. Pour déterminer ses coordonnées, on reporte $y = x$ dans la deuxième équation pour obtenir $x + 2x = 12$, d'où $x = 4$.



Puisque $y = x$, B a pour coordonnées (4,4).
A est le point d'intersection des droites définies par $y = -x$ et $x+2y = 12$. Pour déterminer ses coordonnées, on reporte $y = -x$ dans la deuxième équation pour obtenir $x - 2x = 12$, d'où $x = -12$.
Puisque $y = -x$, A a pour coordonnées $(-12,12)$.
La longueur du segment AB est égale à la distance entre A et B.
Donc, $AB = \sqrt{(4 - (-12))^2 + (4 - 12)^2}$, c'est-à-dire que $AB = \sqrt{16^2 + (-8)^2}$, d'où $AB = \sqrt{320}$, ou $AB = 8\sqrt{5}$.

Solution 2
On détermine les coordonnées de A et de B comme dans la Solution 1.
Puisque la droite d'équation $y = x$ a une pente de 1 et que la droite d'équation $y = -x$ a une pente de -1 et que le produit de ces pentes est égal à -1, les droites sont perpendiculaires. Donc $\angle AOB = 90°$, O étant l'origine.
Puisque B a pour coordonnées (4,4), alors $OB = \sqrt{4^2 + 4^2}$, ou $OB = \sqrt{32}$. Puisque A a pour coordonnées $(-12{,}12)$, alors $OA = \sqrt{(-12)^2 + 12^2}$, ou $OA = \sqrt{288}$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AOB, $AB = \sqrt{OB^2 + OA^2}$, c.-à-d. que $AB = \sqrt{32 + 288}$, ou $AB = \sqrt{320}$, d'où $AB = 8\sqrt{5}$.

2. (a) Réponse : 9
Pour que la moyenne des deux chiffres soit égale à 5, leur somme doit être égale à 10.
Les entiers positifs de deux chiffres dont la somme des chiffres est égale à 10 sont 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91. Il y en a 9.

(b) Réponse : $n = 45$
Solution 1
Supposons que le nombre n s'écrit AB, A et B étant des chiffres. On a donc $n = 10A+B$.
La moyenne des chiffres de n est égale à $\dfrac{A+B}{2}$.
Or, placer une virgule décimale entre les chiffres de n équivaut à diviser n par 10. Le nombre obtenu est égal à $\dfrac{10A+B}{10}$.
On cherche donc les valeurs de A et de B pour lesquelles :

$$\begin{aligned} \frac{10A+B}{10} &= \frac{A+B}{2} \\ 10A+B &= 5(A+B) \\ 5A &= 4B \end{aligned}$$

Puisque A et B sont des chiffres tels que $5A = 4B$, il n'y a qu'une seule possibilité, soit $A = 4$ et $B = 5$. Donc $n = 45$.
(On peut vérifier que la moyenne des chiffres de n est égale à 4,5, soit le nombre obtenu lorsqu'on place une virgule décimale entre les chiffres de n.)

Solution 2
Lorsqu'on calcule la moyenne de deux chiffres, on obtient soit un entier, soit la moitié d'un entier, c'est-à-dire un nombre de la forme a,5.
Les moyennes possibles sont donc : 0,5 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,0 ; 2,5 ; 3,0 ; 3,5 ; 4,0 ; 4,5 ; 5,0 ; 5,5 ; 6,0 ; 6,5 ; 7,0 ; 7,5 ; 8,0 ; 8,5 ; 9,0 (Il est impossible d'obtenir une moyenne de 0,0, car les deux chiffres ne peuvent pas tous les deux être 0.)
Dans cette liste, le seul nombre qui est égal à la moyenne des deux chiffres qui le forment est 4,5.
Donc $n = 45$. (On l'a obtenu en enlevant la virgule décimale de 4,5.)

(c) *Solution 1*
Puisque les trois premiers entiers ont une moyenne de 28, ils ont une somme de 3(28), ou 84. Puisque les cinq entiers ont une moyenne de 34, ils ont une somme de 5(34), ou 170.
Or, la différence entre ces deux sommes doit être égale à $s+t$. On a donc $s+t = 170-84$,

ou $s + t = 86$.
La moyenne de s et de t est donc égale à $\dfrac{s+t}{2}$, ou 43.

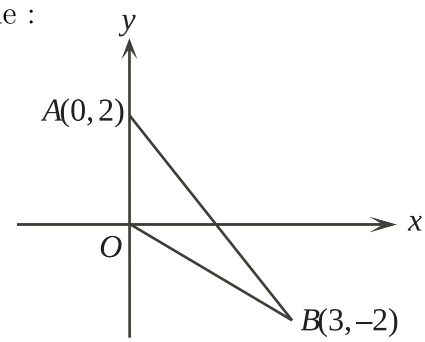
Solution 2
Soit a, b et c les trois premiers entiers. On a donc $\dfrac{a+b+c}{3} = 28$, ou $a+b+c = 84$.
De plus, $\dfrac{a+b+c+s+t}{5} = 34$, ou $a+b+c+s+t = 170$.
Donc $s+t = (a+b+c+s+t) - (a+b+c)$, d'où $s+t = 170 - 84$, ou $s+t = 86$.
La moyenne de s et de t est donc égale à $\dfrac{s+t}{2}$, ou 43.

Solution 3
Soit M la moyenne de s et de t.
Puisque la moyenne des trois premiers entiers est égale à 28, que la moyenne de s et de t est égale à M et que la moyenne des cinq nombres est égale à 34, alors 34 doit être situé, sur la droite numérique, à $\frac{2}{5}$ de la distance de 28 à M. Or sur la droite numérique, la distance de 28 à 34 est égale à 6. Donc, la distance de 28 à M doit être égale à $\frac{5}{2}(6)$, ou 15. Donc, la moyenne M de s et de t est égale à $28 + 15$, ou 43.

3. (a) RÉPONSE : $(21, -1)$
Solution 1
Les abscisses à l'origine de la parabole sont 20 et 22.
Par symétrie, l'abscisse du sommet est égale à la moyenne des abscisses à l'origine, soit à $\frac{1}{2}(20 + 22)$, ou 21.
Lorsque $x = 21$, $y = (21 - 20)(21 - 22)$, ou $y = -1$.
Les coordonnées du sommet sont $(21, -1)$.

Solution 2
On développe le membre de droite de l'équation pour obtenir $y = x^2 - 42x + 440$.
On détermine l'équation canonique en complétant le carré :
$y = x^2 - 2(21)x + 21^2 - 21^2 + 440$, d'où $y = (x - 21)^2 - 441 + 440$, ou $y = (x - 21)^2 - 1$.
D'après cette équation, les coordonnées du sommet sont $(21, -1)$.

(b) La parabole d'équation $y = x^2 + 2$ a pour sommet $A(0,2)$.
On détermine l'équation canonique de la parabole définie par $y = x^2 - 6x + 7$ en complétant le carré. On obtient $y = (x - 3)^2 - 9 + 7$, d'où $y = (x - 3)^2 - 2$.
Cette parabole a pour sommet $B(3, -2)$.
Le triangle OAB a pour sommets $O(0,0)$, $A(0,2)$ et $B(3, -2)$.
Voici une esquisse du triangle :



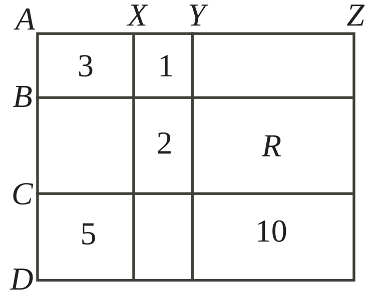
La base OA a une longueur de 2 et la hauteur correspondante est égale à la distance du

sommet B à l'axe des ordonnées, soit 3.
Donc, l'aire du triangle OAB est égale à $\frac{1}{2}(2)(3)$, ou 3.

4. (a) RÉPONSE : $R = 12$

Solution 1

On nomme certains points de la figure.



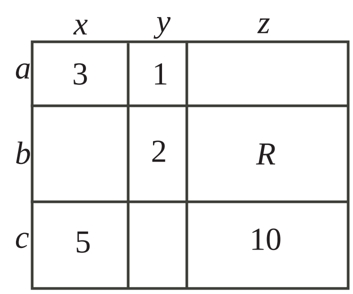
Les trois rectangles qui forment une colonne ont la même largeur. Le rapport de leur aire est donc égal au rapport de leur hauteur. Selon la colonne du milieu, on a donc $AB : BC = 1 : 2$.
Dans la première colonne, l'aire du rectangle du milieu doit donc être le double de l'aire du rectangle du haut. On a donc $BC : CD = 6 : 5$.
D'après la troisième colonne, on a $R : 10 = 6 : 5$, d'où $R = 12$.

Solution 2

Soit x la largeur de la première colonne.
Puisque le rectangle en haut à gauche a une aire de 3, la rangée du haut a une hauteur de $\dfrac{3}{x}$.
Puisque le rectangle en bas à gauche a une aire de 5, la rangée du bas a une hauteur de $\dfrac{5}{x}$.
Puisque la rangée du haut a une hauteur de $\dfrac{3}{x}$ et que le rectangle au milieu de la rangée du haut a une aire de 1, la colonne du milieu a une largeur de $\dfrac{x}{3}$.
Puisque le rectangle au milieu de la deuxième rangée a une aire de 2, la rangée du milieu a donc une hauteur de $\dfrac{6}{x}$.
Puisque la rangée du bas a une hauteur de $\dfrac{5}{x}$ et que le rectangle en bas à droite a une aire de 10, alors la troisième colonne a une largeur de $2x$.
Puisque le rectangle R a une hauteur de $\dfrac{6}{x}$ et une largeur de $2x$, son aire est égale à 12.

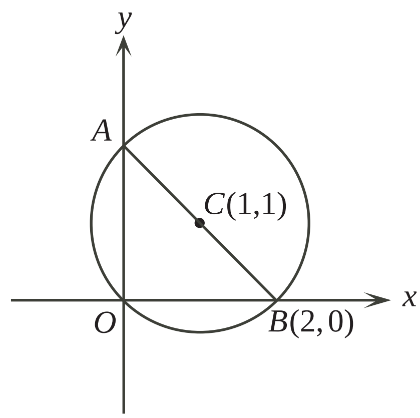
Solution 3

Soit a, b, c, x, y et z les longueurs indiquées.



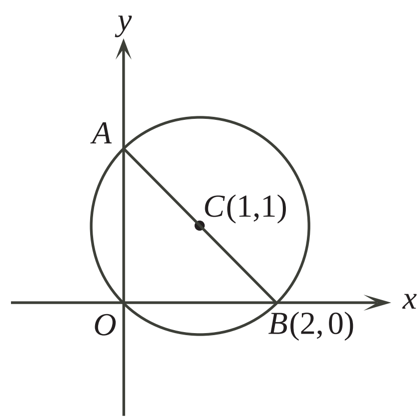
On a donc $ax = 3$, $ay = 1$, $by = 2$, $bz = R$, $cx = 5$ et $cz = 10$.
On cherche la valeur de bz.
Or $bz = \dfrac{(ax)(by)(cz)}{(ay)(cx)}$, c'est-à-dire que $bz = \dfrac{(3)(2)(10)}{(1)(5)}$, d'où $bz = 12$. Donc $R = 12$.

(b) *Solution 1*
Puisque $\angle AOB = 90°$, AB est un diamètre du cercle.
On trace le diamètre AB.

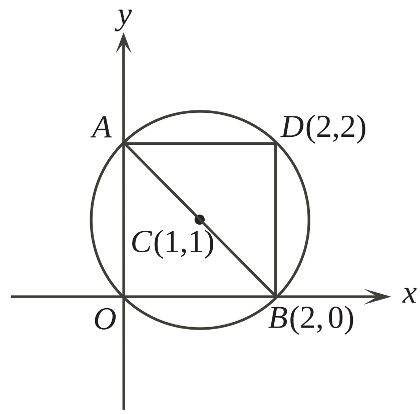


Puisque C est le centre du cercle et que AB est un diamètre, alors C est le milieu du segment AB. Les coordonnées de A sont donc (0,2).
L'aire de la partie du cercle qui se trouve dans le quadrant I est donc égale à l'aire du triangle AOB plus l'aire du demi-cercle au-dessus de AB.
Le rayon du cercle est égal à la distance de C à B, soit $\sqrt{(1-2)^2 + (1-0)^2}$, ou $\sqrt{2}$. L'aire du demi-cercle est donc égale à $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2})^2$, ou π.
L'aire du triangle AOB est égale à $\frac{1}{2}(OB)(AO)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(2)(2)$, ou 2.
La partie du cercle qui se trouve dans le quadrant I a donc une aire de $\pi + 2$.

Solution 2
Puisque $\angle AOB = 90°$, AB est un diamètre du cercle. On trace le diamètre AB.



Puisque C est le centre du cercle et que AB est un diamètre, alors C est le milieu du segment AB. Les coordonnées de A sont donc (0,2).
Donc $AO = BO$.
Par symétrie, le point $D(2,2)$ est sur le cercle. Il nous permet donc de « compléter le carré ».



Le carré a une aire de 4.
Le rayon du cercle est égal à la distance de C à B, soit $\sqrt{(1-2)^2+(1-0)^2}$, ou $\sqrt{2}$. L'aire du demi-cercle est donc égale à $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2})^2$, ou π.
La partie du cercle à l'extérieur du carré a une aire de $2\pi - 4$. Cette partie est divisée en quatre portions ayant chacune une aire de $\frac{1}{4}(2\pi-4)$, ou $\frac{1}{2}\pi - 1$. Or, deux de ces portions sont les seules parties du cercle à l'extérieur du quadrant I.
Donc, la partie du cercle qui se trouve dans le quadrant I a une aire de $2\pi - 2(\frac{1}{2}\pi - 1)$, ou $\pi + 2$.

Voici deux autres façons de déterminer les coordonnées de A :

i. Le rayon OC a une longueur de $\sqrt{1^2+1^2}$, ou $\sqrt{2}$. Puisque le cercle a pour centre (1,1) et pour rayon $\sqrt{2}$, son équation est $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.
Pour déterminer l'ordonnée de A, on pose $x=0$. On obtient $(0-1)^2+(y-1)^2=2$, d'où $(y-1)^2=1$. Donc $y=0$ ou $y=2$. Puisque $y=0$ donne l'ordonnée du point O, $y=2$ donne celle de A. Les coordonnées de A sont donc (0,2).

ii. Puisque O et A sont sur le cercle et que le déplacement horizontal de chaque point à C est égal à 1, alors le déplacement vertical de O à C, soit 1, doit étre le même que celui de C à A. Les coordonnées de A sont donc (0,2).

5. (a) RÉPONSE : $\frac{2}{5}$
Puisqu'il y a 5 façons de choisir a et 3 façons de choisir b, il y a 15 façons de choisir a et b.
Si a est pair, alors a^b doit être pair ; si a est impair, a^b doit être impair.
Donc, les choix de a et de b pour lesquels a^b est un nombre pair sont ceux pour lesquels a est pair. Il y en a 6. En effet, il y a 2 choix pour la valeur de a et pour chacun de ces choix, il y a 3 choix pour la valeur de b. (On remarque que la valeur de b n'a aucun effet sur la parité de a^b. La probabilité dépend donc du choix de a seulement.)
La probabilité est donc égale à $\frac{6}{15}$, ou $\frac{2}{5}$.

(b) Au départ, il y a 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts dans le sac. La probabilité de choisir un chapeau bleu est donc égale à $\frac{4}{6}$, ou $\frac{2}{3}$. Le chapeau bleu serait alors remplacé par un chapeau vert et il y aurait alors 3 chapeaux bleus et 3 chapeaux verts dans le sac. Pour revenir à la situation de départ, soit 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts, il faudrait enlever un chapeau vert et le remplacer par un chapeau bleu. Puisque le sac contient 3 chapeaux de chaque couleur, la probabilité de choisir un chapeau vert est égale à $\frac{1}{2}$. La probabilité de choisir un chapeau bleu, suivi d'un chapeau vert est donc égale à $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$.

Au départ, il y a 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts dans le sac. La probabilité de choisir un chapeau vert est égale à $\frac{2}{6}$, ou $\frac{1}{3}$. Le chapeau vert serait alors remplacé par un chapeau bleu et il y aurait alors 5 chapeaux bleus et 1 chapeau vert dans le sac.
Pour revenir à la situation de départ, soit 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts, il faudrait enlever un chapeau bleu et le remplacer par un chapeau vert. Puisque le sac contient 5 chapeaux bleus et 1 chapeau vert, la probabilité de choisir un chapeau bleu est égale à $\frac{5}{6}$.
Donc, la probabilité de choisir un chapeau vert, suivi d'un chapeau bleu est donc égale à $\frac{1}{3} \times \frac{5}{6}$, ou $\frac{5}{18}$.

Ce sont les deux seules façons de revenir à la situation initiale après deux tours, soit enlever un chapeau bleu, suivi d'un vert, ou enlever un chapeau vert, suivi d'un bleu.
Donc, la probabilité pour qu'après deux tours, le sac contienne de nouveau 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts est égale à $\frac{1}{3} + \frac{5}{18}$, ou $\frac{11}{18}$.

6. (a) RÉPONSE : $a = 1$

On additionne les deux équations, membre par membre :

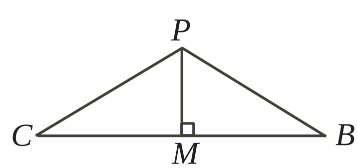
$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y &= \tfrac{3}{2}a + \tfrac{1}{2}a^2 \\
2 &= \tfrac{3}{2}a + \tfrac{1}{2}a^2 \\
4 &= 3a + a^2 \\
0 &= a^2 + 3a - 4 \\
0 &= (a+4)(a-1)
\end{aligned}$$

Donc $a = -4$ ou $a = 1$.
Or, $a = -4$ doit être rejeté, car la 1re équation deviendrait $\sin^2 x + \cos^2 y = -6$, dont le membre de gauche est positif et le membre de droite est négatif.
La seule valeur possible de a est 1.

(Si $x = 90°$ et $y = 45°$, on obtient $\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{2}$ et $\cos^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}$, ce qui confirme que $a = 1$ est possible.)

(b) D'après les renseignements donnés, $PC = PB$.
Si on réussit à connaître la longueur PC, on peut déterminer la valeur de h, puisqu'on connaît déjà la longueur AC.

Le triangle CPB est isocèle, car $PC = PB$. De plus, $BC = 2$ et $\angle BPC = 120°$. Puisque ce triangle est isocèle, $\angle PCB = \angle PBC = 30°$.



On joint P au milieu M de BC. Puisque le triangle PCB est isocèle, PM est perpendiculaire à BC. Le triangle PMC est donc un triangle remarquable 30°-60°-90° et $CM = 1$.
Donc $PC = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
(On peut utiliser plusieurs autres approches pour calculer la longueur PC.)

Puisque le triangle APC est rectangle, $AP^2 = AC^2 - PC^2$. Donc $h^2 = 2^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$, d'où $h^2 = 4 - \frac{4}{3}$, ou $h^2 = \frac{8}{3}$. Donc $h = \sqrt{\frac{8}{3}}$, ou $h = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$, d'où $h = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

7. (a) RÉPONSE : $k = 233$

Solution 1

On calcule les 15 premiers termes, tout en les écrivant sous la forme du produit d'un entier et d'une puissance de 10 :

$$2, 5, 10, 5 \times 10, 5 \times 10^2, 5^2 \times 10^3, 5^3 \times 10^5, 5^5 \times 10^8, 5^8 \times 10^{13}, 5^{13} \times 10^{21}, 5^{21} \times 10^{34},$$
$$5^{34} \times 10^{55}, 5^{55} \times 10^{89}, 5^{89} \times 10^{144}, 5^{144} \times 10^{233}$$

Puisque le 15^e terme est égal au produit d'un entier impair et de 10^{233}, il se termine avec 233 zéros.

Solution 2

Pour calculer le 6^e terme, on multiplie 50×500 et on obtient 25×1000.
Le 4^e terme et le 5^e terme sont tous deux formés d'un entier impair suivi d'un nombre de zéros. Leur produit est donc formé d'un entier impair suivi d'un nombre de zéros
Cette régularité se poursuivra. Donc, à partir du 6^e terme, le nombre de zéros à la fin du terme est égal à la somme des nombres de zéros à la fin des deux termes précédents.
Donc, à partir du 4^e terme, le nombre de zéros à la fin des termes est égal à :

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233$$

Il y a donc 233 zéros à la fin du 15^e terme.

(b) *Solution 1*

Puisque a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, il existe un nombre d pour lequel $b = a + d$ et $c = a + 2d$.
Donc :

$$\begin{aligned}
a^2 - bc &= a^2 - (a+d)(a+2d) = a^2 - a^2 - 3ad - 2d^2 = -3ad - 2d^2 \\
b^2 - ac &= (a+d)^2 - a(a+2d) = a^2 + 2ad + d^2 - a^2 - 2ad = d^2 \\
c^2 - ab &= (a+2d)^2 - a(a+d) = a^2 + 4ad + 4d^2 - a^2 - ad = 3ad + 4d^2
\end{aligned}$$

On a donc :

$$(b^2 - ac) - (a^2 - bc) = d^2 - (-3ad - 2d^2) = 3d^2 + 3ad$$

et

$$(c^2 - ab) - (b^2 - ac) = (3ad + 4d^2) - d^2 = 3d^2 + 3ad$$

Donc $(b^2 - ac) - (a^2 - bc) = (c^2 - ab) - (b^2 - ac)$. La suite $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ est donc arithmétique.

Solution 2

Puisque a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, il existe un nombre d pour lequel $a = b - d$ et $c = b + d$.
Donc :

$$\begin{aligned}
a^2 - bc &= (b-d)^2 - b(b+d) = b^2 - 2bd + d^2 - b^2 - bd = -3bd + d^2 \\
b^2 - ac &= b^2 - (b-d)(b+d) = b^2 - b^2 + d^2 = d^2 \\
c^2 - ab &= (b+d)^2 - (b-d)b = b^2 + 2bd + d^2 - b^2 + bd = 3bd + d^2
\end{aligned}$$

On a donc :

$$(b^2 - ac) - (a^2 - bc) = d^2 - (-3bd + d^2) = 3bd$$

et

$$(c^2 - ab) - (b^2 - ac) = (3bd + d^2) - d^2 = 3bd$$

Donc $(b^2 - ac) - (a^2 - bc) = (c^2 - ab) - (b^2 - ac)$. La suite $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ est donc arithmétique.

Solution 3

Pour montrer que $a^2 - bc$, $b^2 - ac$ et $c^2 - ab$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, on peut démontrer que $(c^2 - ab) + (a^2 - bc) = 2(b^2 - ac)$.

Puisque a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, $a + c = 2b$.

Or :

$$\begin{aligned}
(c^2 - ab) + (a^2 - bc) &= c^2 + a^2 - b(a+c) \\
&= c^2 + a^2 + 2ac - b(a+c) - 2ac \\
&= (c+a)^2 - b(a+c) - 2ac \\
&= (c+a)(a+c-b) - 2ac \\
&= 2b(2b-b) - 2ac \\
&= 2b^2 - 2ac \\
&= 2(b^2 - ac)
\end{aligned}$$

Donc, $a^2 - bc$, $b^2 - ac$ et $c^2 - ab$ forment une suite arithmétique.

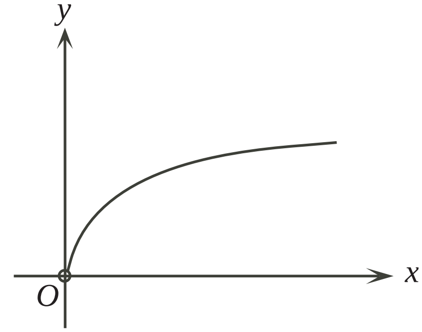
8. (a) On transforme l'équation, avec les lois des logarithmes, de manière à pouvoir isoler y :

$$\begin{aligned}
\log_2 x - 2\log_2 y &= 2 \\
\log_2 x - \log_2(y^2) &= 2 \\
\log_2\left(\frac{x}{y^2}\right) &= 2 \\
\frac{x}{y^2} &= 2^2 \\
\tfrac{1}{4}x &= y^2 \\
y &= \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{x}
\end{aligned}$$

Puisque le domaine de la fonction $\log_2$ est l'ensemble des réels strictement positifs, on doit avoit $x > 0$ et $y > 0$. On a donc :

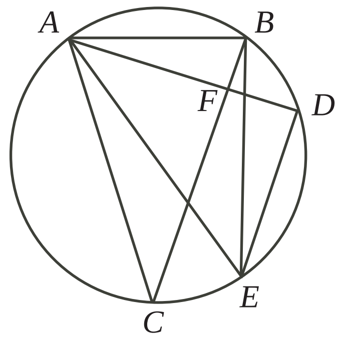
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{x} \quad (x > 0)$$

Voici une esquisse du graphique de cette fonction :



(b) *Solution 1*

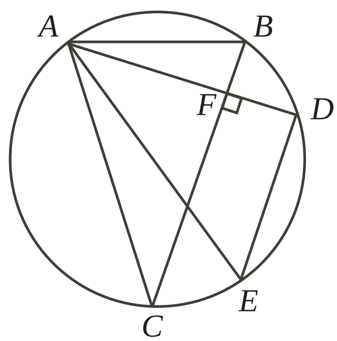
On trace les segments AE et AC.



Puisque DE est parallèle à BC et que AD est perpendiculaire à BC, alors AD est perpendiculaire à DE, c'est-à-dire que $\angle ADE = 90°$.
Donc, AE est un diamètre.
Or, les angles EAC et EBC sont congrus, puisqu'ils interceptent le même arc EC.
Donc $\angle EAC + \angle ABC = \angle EBC + \angle ABC = \angle EBA$. Ce dernier angle mesure 90°, puisque AE est un diamètre.

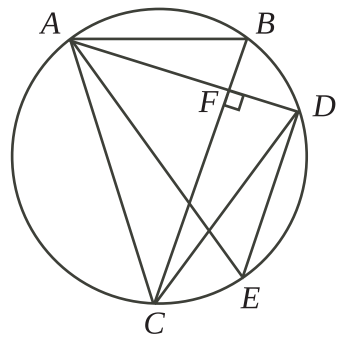
Solution 2

On trace les segments AE et AC.



Puisque DE est parallèle à BC et que AD est perpendiculaire à BC, alors AD est perpendiculaire à DE, c'est-à-dire que $\angle ADE = 90°$.
Donc, AE est un diamètre.
Donc $\angle ECA = 90°$.
Or, les angles ABC et AEC sont congrus, puisqu'ils interceptent le même arc AC.
Donc $\angle EAC + \angle ABC = \angle EAC + \angle AEC = 180° - \angle ECA$, d'après la somme de la mesure des angles du triangle AEC.
Puisque $\angle ECA = 90°$, alors $\angle EAC + \angle AEC = 90°$.

Solution 3
On trace les segments AE, AC et CD.



Puisque DE est parallèle à BC et que AD est perpendiculaire à BC, alors AD est perpendiculaire à DE, c'est-à-dire que $\angle ADE = 90°$.
Donc, AE est un diamètre.
Or, les angles ABC et ADC sont congrus, puisqu'ils interceptent le même arc AC.
De plus, les angles EAC et EDC sont congrus, puisqu'ils interceptent le même arc EC.
Donc $\angle EAC + \angle ABC = \angle EDC + \angle ADC = \angle ADE = 90°$.

9. (a) *Solution 1*
Puisque $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, alors $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^6 x + (1-\sin^2 x)^3 + k(\sin^4 x + (1-\sin^2 x)^2) \\ &= \sin^6 x + 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x + k(\sin^4 x + 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \\ &= (1+k) - (3+2k)\sin^2 x + (3+2k)\sin^4 x \end{aligned}$$

Si $3+2k=0$, c'est-à-dire si $k=-\frac{3}{2}$, alors $f(x)=1+k$, ou $f(x)=-\frac{1}{2}$ pour toutes les valeurs de x. Si $k=-\frac{3}{2}$, la fonction est donc constante pour toutes les valeurs de x.
(Si $k \neq -\frac{3}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} f(0) &= 1+k \\ f\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) &= (1+k) - (3+2k)\left(\tfrac{1}{2}\right) + (3+2k)\left(\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}k \\ f\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) &= (1+k) - (3+2k)\left(\tfrac{1}{4}\right) + (3+2k)\left(\tfrac{1}{16}\right) = \tfrac{7}{16} + \tfrac{5}{8}k \end{aligned}$$

Ces trois valeurs ne peuvent être égales pour une même valeur de k. Donc, $f(x)$ n'est pas constante si $k \neq -\frac{3}{2}$.)

Solution 2
Puisque $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) + k(\sin^4 x + \cos^4 x) \\ &= (\sin^4 + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 3\sin^2 x\cos^2 x) \\ &\qquad k(\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x) \\ &= ((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x) + k((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x) \\ &= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x + k(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x) \\ &= (1+k) - (3+2k)\sin^2 x\cos^2 x \end{aligned}$$

Si $3+2k=0$, c'est-à-dire si $k=-\frac{3}{2}$, alors $f(x)=1+k$, ou $f(x)=-\frac{1}{2}$ pour toutes les valeurs de x. Si $k=-\frac{3}{2}$, la fonction est donc constante pour toutes les valeurs de x. (On peut vérifier, comme dans la Solution 1, que si $k \neq -\frac{3}{2}$, $f(x)$ n'est pas constante.)

Solution 3
Pour que $f(x)$ soit constante, il faut que $f'(x) = 0$ pour toutes les valeurs de x.
Par dérivation en chaîne, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6\sin^5 x\cos x - 6\cos^5 x\sin x + k(4\sin^3 x\cos x - 4\cos^3 x\sin x) \\ &= 2\sin x\cos x(3(\sin^4 x - \cos^4 x) + 2k(\sin^2 x - \cos^2 x)) \\ &= 2\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x)(3(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2k) \\ &= 2\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x)(3 + 2k) \end{aligned}$$

Si $3 + 2k = 0$, c'est-à-dire si $k = -\frac{3}{2}$, alors $f'(x) = 0$ pour toutes les valeurs de x. La fonction est alors constante pour toutes les valeurs de x.
(Si $3 + 2k \neq 0$, on peut choisir $x = \frac{1}{6}\pi$, par exemple, pour montrer que $f'(\frac{1}{6}\pi) \neq 0$ et que $f(x)$ n'est pas constante.)

(b) *Solution 1*
On utilise l'expression simplifiée de $f(x)$ de la partie (a), Solution 1 :

$$f(x) = (1 + k) - (3 + 2k)\sin^2 x + (3 + 2k)\sin^4 x$$

On veut donc résoudre :

$$\begin{aligned} 0{,}3 - (1{,}6)\sin^2 x + (1{,}6)\sin^4 x &= 0 \\ 16\sin^4 x - 16\sin^2 x + 3 &= 0 \\ (4\sin^2 x - 3)(4\sin^2 x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Donc. $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ ou $\sin^2 x = \frac{3}{4}$. Donc $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ ou $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc :

$$x = \tfrac{1}{6}\pi + 2\pi k, \tfrac{5}{6}\pi + 2\pi k, \tfrac{7}{6}\pi + 2\pi k, \tfrac{11}{6}\pi + 2\pi k, \tfrac{1}{3}\pi + 2\pi k, \tfrac{2}{3}\pi + 2\pi k, \tfrac{4}{3}\pi + 2\pi k, \tfrac{5}{3}\pi + 2\pi k$$

$(k \in \mathbb{Z})$

Solution 2
On utilise l'expression simplifiée de $f(x)$ de la partie (a), Solution 2 :

$$f(x) = (1 + k) - (3 + 2k)\sin^2 x\cos^2 x$$

On veut donc résoudre :

$$\begin{aligned} 0{,}3 - (1{,}6)\sin^2 x\cos^2 x &= 0 \\ 0{,}3 - (1{,}6)\sin^2 x(1 - \sin^2 x) &= 0 \\ 1{,}6\sin^4 x - 1{,}6\sin^2 x + 0{,}3 &= 0 \end{aligned}$$

On continue comme dans la Solution 1.

Solution 3
On utilise l'expression simplifiée de $f(x)$ de la partie (a), Solution 2 :

$$f(x) = (1 + k) - (3 + 2k)\sin^2 x\cos^2 x$$

On utilise l'identité $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ pour simplifier $f(x)$ davantage :

$$f(x) = (1+k) - \tfrac{1}{4}(3+2k)\sin^2 2x$$

On veut donc résoudre :

$$\begin{aligned} 0{,}3 - \tfrac{1}{4}(1{,}6)\sin^2 2x &= 0 \\ 4\sin^2 2x &= 3 \\ \sin^2 2x &= \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Donc $\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc :

$$2x = \tfrac{1}{3}\pi + 2\pi k, \tfrac{2}{3}\pi + 2\pi k, \tfrac{4}{3}\pi + 2\pi k, \tfrac{5}{3}\pi + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ou

$$x = \tfrac{1}{6}\pi + \pi k, \tfrac{1}{3}\pi + \pi k, \tfrac{2}{3}\pi + \pi k, \tfrac{5}{6}\pi + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(Bien qu'elle paraisse différente, cette solution est conforme à la Solution 1, puisque chacune des quatre familles de racines comporte « $+\pi k$ » et dans la Solution 1, chacune des huit familles de racines comporte « $+2\pi k$ ».)

(c) *Solution 1*
On utilise l'expression simplifiée de $f(x)$ de la partie (a), Solution 2 :

$$f(x) = (1+k) - (3+2k)\sin^2 x + (3+2k)\sin^4 x$$

On veut déterminer les valeurs de k de manière qu'il existe un nombre réel c pour lequel $f(c) = 0$. (De la partie (a), il n'existe pas un nombre réel c pour lequel $f(c) = 0$ si $k = -\frac{3}{2}$.)
Soit $u = \sin^2 x$.
Alors u prend toutes les valeurs dans l'intervalle de 0 à 1, car $\sin x$ prend toutes les valeurs dans l'intervalle de -1 à 1.
On cherche les valeurs de k pour lesquelles l'équation

$$(3+2k)u^2 - (3+2k)u + (1+k) = 0 \qquad (*)$$

admet une racine dans l'intervalle $0 \le u \le 1$.
On doit d'abord s'assurer que l'équation (*) admet des racines réelles, c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} (3+2k)^2 - 4(3+2k)(1+k) &\ge 0 \\ (3+2k)(3+2k-4(1+k)) &\ge 0 \\ (3+2k)(-1-2k) &\ge 0 \\ (3+2k)(1+2k) &\le 0 \end{aligned}$$

Cette condition est vérifiée dans l'intervalle $-\frac{3}{2} < k \le -\frac{1}{2}$ (puisque $k \ne -\frac{3}{2}$).
Ensuite, on détermine les valeurs de k pour lesquelles l'équation (*) admet des racines dans l'intervalle $0 \le u \le 1$. On peut supposer que $-\frac{3}{2} < k \le -\frac{1}{2}$.
On résout l'équation (*) à l'aide de la formule pour une équation du second degré :

$$u = \frac{(3+2k) \pm \sqrt{(3+2k)^2 - 4(3+2k)(1+k)}}{2(3+2k)}$$

ou

$$u = \frac{(3+2k) \pm \sqrt{-(3+2k)(1+2k)}}{2(3+2k)} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1+2k}{3+2k}}$$

Puisque $k > -\frac{3}{2}$, alors $3+2k > 0$.
Pour que u soit dans l'intervalle de 0 à 1, il faut que :

$$0 \le \sqrt{-\frac{1+2k}{3+2k}} \le 1$$

ou

$$0 \le -\frac{1+2k}{3+2k} \le 1$$

Puisque $-\frac{3}{2} < k \le -\frac{1}{2}$, alors $3+2k > 0$ et $1+2k \le 0$. Donc, l'inéquation de gauche est vérifiée.
On résout $-\dfrac{1+2k}{3+2k} \le 1$, ou $-(1+2k) \le (3+2k)$ (on peut multiplier chaque membre par $(3+2k)$, car l'expression ne prend aucune valeur négative). On obtient $-4 \le 4k$, ou $k \ge -1$. Donc, l'inéquation de droite est vérifiée si $k \ge -1$ et $-\frac{3}{2} < k \le -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si $-1 \le k \le -\frac{1}{2}$.

Solution 2
On utilise l'expression simplifiée de $f(x)$ de la partie (b), Solution 3 :

$$f(x) = (1+k) - \tfrac{1}{4}(3+2k)\sin^2 2x$$

Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, il faut résoudre :

$$(1+k) - \tfrac{1}{4}(3+2k)\sin^2 2x = 0$$

ou

$$\sin^2 2x = \frac{4(1+k)}{3+2k}$$

Cette équation admet des racines réelles (des valeurs de $\sin 2x$, puis des valeurs de x), si :

$$0 \le \frac{4(1+k)}{3+2k} \le 1$$

Si $3+2k > 0$, on peut multiplier les membres de l'inéquation par $3+2k$ pour obtenir :

$$0 \le 4(1+k) \le 3+2k$$

L'inéquation de gauche donne $k \ge -1$ et celle de droite donne $k \le -\frac{1}{2}$.
On obtient $-1 \le k \le -\frac{1}{2}$.

Si $3+2k < 0$, on peut multiplier les membres de l'inéquation par $3+2k$ pour obtenir :

$$0 \ge 4(1+k) \ge 3+2k$$

L'inéquation de gauche donne $k \le -1$ et celle de droite donne $k \ge -\frac{1}{2}$. Ceci est impossible.
Si $3+2k = 0$, on a vu dans la partie (a) que $f(x)$ est constante et pas égal à 0.

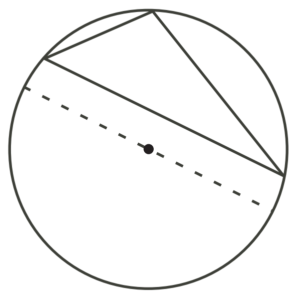
Alors, $-1 \le k \le -\frac{1}{2}$.

10. Partout, dans ce qui suit, on utilisera les propriétés suivantes :

Lorsqu'un triangle acutangle est inscrit dans un cercle : le centre du cercle est situé à l'intérieur du triangle ; chaque côté du triangle définit un grand arc dans lequel est inscrit l'angle opposé au côté ; les sommets du triangle divisent le cercle en trois arcs qui sont chacun moins d'un demi-cercle.

Comment le sait-on ?

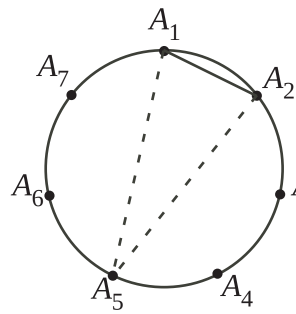
On considère une corde qui n'est pas un diamètre. Un angle qui intercepte la corde et qui est inscrit dans le grand arc est aigu ; un angle qui intercepte la corde et qui est inscrit dans le petit arc est obtus.
On considère maintenant un triangle acutangle inscrit dans le cercle. Puisque chaque angle du triangle est aigu, chacun est inscrit dans le grand arc défini par le côté opposé. De même, un arc de cercle délimité par deux sommets consécutifs doit être un petit arc, puisqu'il est intercepté par un angle aigu.
Si le centre du cercle était à l'extérieur du triangle, on pourrait tracer un diamètre complètement à l'extérieur du triangle.



Un des angles aigus du triangle intercepterait alors une corde, tout en étant inscrit dans le petit arc défini par la corde, ce qui contredit la premier énoncé ci-haut.
Le centre du cercle est donc situé à l'intérieur du triangle.

(a) Puisque $N = 7$, on peut choisir les 3 sommets d'un triangle parmi 7 points. On peut le faire de $\binom{7}{3}$ façons, c'est-à-dire de 35 façons. On peut donc former 35 triangles. On détermine le nombre de ces triangles qui sont acutangles.

Soit A_1 le premier sommet d'un triangle.
On construit le triangle en choisissant les deux autres sommets dans le sens des aiguilles d'une montre dans la figure qui suit.
On choisit ces sommets en tenant compte de la longueur de l'arc depuis le sommet précédent — chacun de ces arcs doit être plus petit qu'un demi-cercle.
Puisqu'il y a 7 points placés à intervalles réguliers, on suppose que la circonférence a une longueur de 7. Chaque arc délimité par deux sommets consécutifs doit avoir une longueur de 3 ou moins.
Le deuxième sommet peut donc être A_2, A_3 ou A_4.
Si on choisit A_2, le troisième sommet doit être A_5 pour que les deux autres arcs aient une longueur de 3 ou moins. (La figure suivante le montre bien.)



Si on choisit A_3, le troisième sommet doit être A_5 ou A_6.
Si on choisit A_4, le troisième sommet doit être A_5, A_6 ou A_7.
On peut donc former 6 triangles acutangles qui ont A_1 pour premier sommet.

On peut recommencer en choisissant chacun des 6 autres points comme premier sommet, pour un total de 7×6 triangles acutangles, c'est-à-dire 42 triangles acutangles.
Or, chaque triangle a alors été compté 3 fois, car chacun de ses sommets aura été choisi comme premier sommet. Le nombre total de triangles acutangles possibles est égal à $\frac{42}{3}$, ou 14.
La probabilité de choisir un triangle acutangle est donc égale à $\frac{14}{35}$, ou $\frac{2}{5}$.

(b) *Solution 1*
Puisque $N = 2k$, on peut choisir les 3 sommets d'un triangle parmi $2k$ points. On peut donc choisir $\binom{2k}{3}$ triangles, c'est-à-dire $\dfrac{2k(2k-1)(2k-2)}{6}$ triangles en tout.
On détermine le nombre de triangles acutangles comme dans la partie (a), en déterminant le nombre de triangles acutangles qui ont un premier sommet en A_1, en multipliant ce nombre par $2k$, puis en divisant par 3.

Soit A_1 le 1$^{\text{er}}$ sommet d'un triangle et soit $2k$ la circonférence du cercle.
Le point A_{k+1} est diamétralement opposé à A_1.
Puisque le triangle ne peut être situé d'un côté d'un diamètre, le 2$^{\text{e}}$ sommet doit être choisi parmi les points A_2, A_3, ..., A_k. Le 3$^{\text{e}}$ sommet doit être choisi parmi les points A_{k+2}, A_{k+3}, ..., A_{2k}, de manière que les trois arcs soient moins longs qu'un demi-cercle.
Si le 2$^{\text{e}}$ sommet est A_2, peu importe le point choisi pour le 3$^{\text{e}}$ sommet, un des arcs, soit de A_2 au 3$^{\text{e}}$ sommet ou du 3$^{\text{e}}$ sommet à A_1, aura une longueur plus grande que k. Il n'y a donc aucune possibilité pour un 3$^{\text{e}}$ sommet d'un triangle acutangle.
Si le 2$^{\text{e}}$ sommet est A_3, le 3$^{\text{e}}$ sommet doit être A_{k+2}. En effet, l'arc entre les 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ sommets a alors une longueur de $k-1$, de même que l'arc entre les 3$^{\text{e}}$ et 1$^{\text{er}}$ sommets. Il y a donc une possibilité pour le 3$^{\text{e}}$ sommet.
Si le 2$^{\text{e}}$ sommet est A_4, le 3$^{\text{e}}$ sommet doit être A_{k+2} ou A_{k+3}. En effet, si le 3$^{\text{e}}$ sommet est A_{k+2}, l'arc entre les 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ sommets a une longueur de $k-2$ et l'arc entre les 3$^{\text{e}}$ et 1$^{\text{er}}$ sommets a une longueur de $k-1$. Si le 3$^{\text{e}}$ sommet est A_{k+3}, l'arc entre les 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ sommets a une longueur de $k-1$ et l'arc entre les 3$^{\text{e}}$ et 1$^{\text{er}}$ sommets a une longueur de $k-2$. Si le 3$^{\text{e}}$ sommet est un autre point, un des deux arcs sera plus long que $k-1$.
De façon générale, si le 2$^{\text{e}}$ sommet est A_i $(3 \le i \le k)$ et le 3$^{\text{e}}$ sommet est A_j, la longueur d'arc de A_i à A_j et la longueur d'arc de A_j à A_1 doivent être inférieures à k. Donc $j-i<k$ et $(2k+1)-j<k$, d'où $j<i+k$ et $k+1<j$, ou $k+1<j<k+i$. Le nombre de possibilités pour j est égal à $(k+i-1)-(k+1)$, ou $i-2$.
À mesure que i avance de 3 à k, les valeurs de $i-2$ avancent de 1 à $k-2$, ce qui donne

un total de $1 + 2 + \cdots + (k-2)$ triangles acutangles, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(k-2)(k-1)$ triangles acutangles dont le premier sommet est A_1.
En tout, il y a $\frac{1}{3}(2k) \times \frac{1}{2}(k-2)(k-1)$ triangles acutangles, c'est-à-dire $\frac{1}{6}(2k)(k-2)(k-1)$ triangles acutangles.

La probabilité pour que le triangle soit acutangle est donc égale à $\dfrac{\frac{1}{6}(2k)(k-2)(k-1)}{\frac{1}{6}(2k)(2k-1)(2k-2)}$, ou $\dfrac{k-2}{4k-2}$.

Solution 2
Comme dans la Solution 1, si $N = 2k$, il y a $\binom{2k}{3}$ triangles en tout.
On détermine le nombre de triangles acutangles qui ont un sommet en A_1.
Soit $2k$ la circonférence du cercle.
Les sommets de n'importe quel triangle divisent la circonférence en trois longueurs, soit a, b et c, à partir de A_1 en procédant dans le sens des aiguilles d'une montre.
On veut compter le nombre de triangles acutangles formés de cette manière, puis multiplier ce nombre par $\dfrac{2k}{3}$, comme dans la Solution 1, pour obtenir le nombre total de triangles acutangles.
On cherche les solutions de l'équation $a + b + c = 2k$ $(a,b,c \geq 1)$. (Ces solutions correspondent à des partitions du cercle.) Puisqu'on cherche des triangles acutangles, on doit aussi avoir $a,b,c < k$ (ceci a été établi dans le préambule). Chaque solution de l'équation correspond à un triangle particulier et vice-versa.

Il faut donc établir le nombre de solutions de l'équation $a + b + c = 2k$, $(1 \leq a,b,c < k)$.
On considère la transformation définie par $a' = k - a$, $b' = k - b$ et $c' = k - c$.
Puisque $a,b,c < k$, alors $a',b',c' > 0$.
De plus, $a + b + c = 2k$ si et seulement si $3k - (a + b + c) = k$ si et seulement si $(k - a) + (k - b) + (k - c) = k$ si et seulement si $a' + b' + c' = k$.
La transformation établit donc une correspondance biunivoque entre les triangles acutangles que l'on cherche et *tous* les triangles dont les sommets sont choisis parmi k points et dont un sommet est A_1. (Puisque la transformation peut être renversée, il s'agit d'une correspondance biunivoque, c'est-à-dire d'une bijection.)

Le nombre total de tels triangles est égal à $\binom{k-1}{2}$, puisqu'on choisit 2 sommets parmi $k - 1$ points.
Donc, le nombre total de triangles acutangles ayant un sommet au point A_1 est égal à $\binom{k-1}{2}$. Le nombre total de triangles acutangles est donc égal à $\dfrac{2k}{3}\binom{k-1}{2}$, c'est-à-dire à $\dfrac{2k}{3}\dfrac{(k-1)(k-2)}{2}$, ou $\dfrac{k(k-1)(k-2)}{3}$. Pour obtenir la probabilité, on divise par $\binom{2k}{3}$.
On obtient $\dfrac{6}{(2k)(2k-1)(2k-2)} \dfrac{k(k-1)(k-2)}{3}$, ou $\dfrac{k-2}{4k-2}$.

(c) D'après (b), la probabilité est égale à $\dfrac{k-2}{4k-2}$.

On cherche les valeurs de k pour lesquelles $\dfrac{k-2}{4k-2} = \dfrac{a}{2007}$, a étant un entier strictement positif.

On utilise le produit en croix pour obtenir $2007(k-2) = a(4k-2)$.
Puisque le membre de droite est pair, le membre de gauche doit être pair. Donc $k-2$ est pair, d'où k est pair. Posons $k = 2m$, m étant un entier positif, $m \geq 1$.
Donc $2007(2m-2) = a(8m-2)$, ou $2007(m-1) = a(4m-1)$.
Puisque

$$(4m-1) - 4(m-1) = 3 \qquad (*)$$

les diviseurs communs possibles de $4m-1$ et de $m-1$ sont 1 et 3 (puisqu'un diviseur commun de $4m-1$ et de $m-1$ doit aussi être un diviseur de 3 selon (*)).
On a donc PGCD($4m-1$,$m-1$) = 1, ou PGCD($4m-1$,$m-1$) = 3.

Si PGCD($4m-1$,$m-1$) = 1 alors $4m-1$ et $m-1$ n'admettent aucun diviseur commun autre que 1. Puisque $2007(m-1) = a(4m-1)$, alors $4m-1$ est un diviseur de $2007(m-1)$ et $4m-1$ est donc un diviseur de 2007, puisque $4m-1$ et $m-1$ n'admettent aucun diviseur commun.
Or $2007 = 9 \times 223 = 3^2 \times 223$. Les diviseurs positifs de 2007 sont donc 1, 3, 9, 223, 669 et 2007.
Les diviseurs de la forme $4m-1$, m étant un entier positif quelconque, sont 3, 233 et 2007.
On a donc :

$4m-1$	3	233	2007
m	1	56	502
a	0	495	2004
k		112	1004

(Si $m = 1$, alors $a = 0$, ce qui est inadmissible. Il n'y a alors aucune valeur de k.)

Si PGCD($4m-1$,$m-1$) = 3, alors $m-1$ est divisible par 3.
Donc $m-1 = 3p$, p étant un entier non négatif.
Donc $4m-1 = 12p+3$ et l'équation $2007(m-1) = a(4m-1)$ devient $2007(3p) = a(12p+3)$, ou $2007p = a(4p+1)$.
Remarquer que PGCD($4p+1$,p) = 1, puisque PGCD($12p+3, 3p$) = 3.
Puisque $4p+1$ est un diviseur de $2007p$ et que $4p+1$ et p n'admettent aucun diviseur commun, alors $4p+1$ est un diviseur de 2007.
Les diviseurs de 2007 de la forme $4p+1$ sont 1, 9 et 669. On a donc :

$4p+1$	1	9	669
p	0	2	167
m	1	7	502
a	0	446	501
k		14	1004

(Si $m = 1$, alors $a = 0$, ce qui est inadmissible. Il n'y a alors aucune valeur de k.)

Donc, les valeurs possibles de k sont 14, 112 et 1004.

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide 2005

Le mardi 19 avril 2005

Solutions

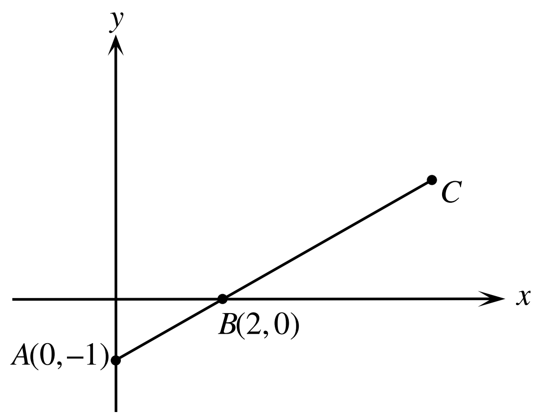
1. (a) RÉPONSE : $a = 5$

Puisque le point (a, a) est situé sur la droite d'équation $3x - y = 10$, alors $3a - a = 10$, d'où $2a = 10$, ou $a = 5$.

(b) RÉPONSE : $(6, 2)$

Solution 1

Pour passer du point A au point B, on monte de 1 unité et on bouge de 2 unités vers la droite.

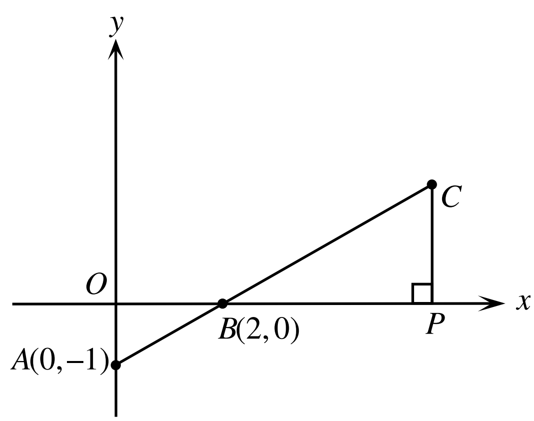


Puisque le point C est situé sur la même droite que A et B, alors pour passer du point B au point C, on monte deux fois de 1 unité et on bouge deux fois de 2 unités vers la droite, c'est-à-dire que l'on monte de 2 unités et on bouge de 4 unités vers la droite.

Les coordonnées de C sont donc $(6, 2)$.

Solution 2

Soit O l'origine. Au point C, on abaisse une perpendiculaire CP à l'axe des abscisses.



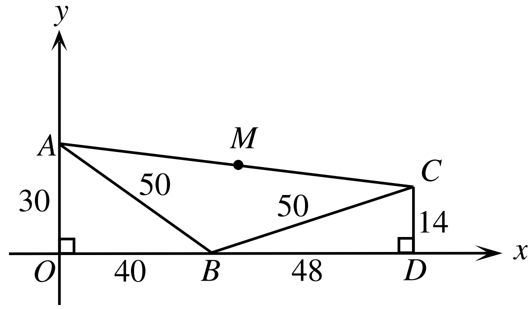
Les triangles AOB et CPB sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et que les angles ABO et CBP sont congrus (ils sont opposés par le sommet).

Puisque $BC = 2AB$, alors $CP = 2AO$, d'où $CP = 2(1)$, ou $CP = 2$. De même, $BP = 2BO$, d'où $BP = 2(2)$, ou $BP = 4$.

Donc, les coordonnées de C sont $(2 + 4, 0 + 2)$, ou $(6, 2)$.

(c) Selon le théorème de Pythagore, $AO^2 = AB^2 - OB^2$, d'où $AO^2 = 50^2 - 40^2$, ou $AO^2 = 900$. Donc $AO = 30$. Les coordonnées de A sont donc $(0, 30)$.

Selon le théorème de Pythagore, $CD^2 = CB^2 - BD^2$, d'où $CD^2 = 50^2 - 48^2$, ou $CD^2 = 196$. Donc $CD = 14$.



Donc, les coordonnées de C sont $(40 + 48, 14)$, ou $(88, 14)$.
Puisque M est le milieu du segment AC, ses coordonnées sont $\left(\frac{1}{2}(0 + 88), \frac{1}{2}(30 + 14)\right)$, ou $(44, 22)$.

2. (a) Réponse : $x = -2$

Solution 1
Puisque $y = 2x + 3$, alors $4y = 4(2x + 3)$, ou $4y = 8x + 12$.
Puisque $4y = 8x + 12$ et $4y = 5x + 6$, alors $8x + 12 = 5x + 6$, d'où $3x = -6$, ou $x = -2$.

Solution 2
On a $4y = 5x + 6$, d'où $y = \frac{5}{4}x + \frac{6}{4}$, ou $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$.
Puisque $y = 2x + 3$ et $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$, alors $2x + 3 = \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$, d'où $\frac{3}{4}x = -\frac{3}{2}$, ou $x = -2$.

Solution 3
Puisque la deuxième équation a un terme « $5x$ », on multiplie chaque membre de la première équation par $\frac{5}{2}$ pour obtenir un terme $5x$. On obtient $\frac{5}{2}y = 5x + \frac{15}{2}$.
On soustrait, membre par membre, de l'équation $4y = 5x + 6$ pour obtenir $\frac{3}{2}y = -\frac{3}{2}$, d'où $y = -1$.
Puisque $y = -1$, alors $-1 = 2x + 3$, d'où $2x = -4$, ou $x = -2$.

(b) Réponse : $a = 6$

Solution 1
On additionne les trois équations, membre par membre, pour obtenir
$a - 3b + b + 2b + 7c - 2c - 5c = -10 + 3 + 13$, ou $a = 6$.

Solution 2
On multiplie chaque membre de la deuxième équation par 3 pour obtenir $3b - 6c = 9$.
On additionne cette équation à la première, membre par membre, pour obtenir $c = -1$.
On reporte $c = -1$ dans la deuxième équation pour obtenir $b - 2(-1) = 3$, d'où $b = 1$.
On reporte $c = -1$ et $b = 1$ dans la troisième équation pour obtenir $a + 2(1) - 5(-1) = 13$, d'où $a = 6$.

(c) *Solution 1*
Soit J la note de Jean et M celle de Marie.
Puisque deux fois la note de Jean est 60 de plus que celle de Marie, alors $2J = M + 60$.
Puisque deux fois la note de Marie est 90 de plus que celle de Jean, alors $2M = J + 90$.
On additionne ces équations, membre par membre, pour obtenir $2J + 2M = M + J + 150$, ou $J + M = 150$. Donc $\dfrac{J + M}{2} = 75$.
La moyenne des deux notes est égale à 75.

(On remarque qu'on n'a pas déterminé la note de chacun.)

Solution 2
Soit J la note de Jean et M celle de Marie.
Puisque deux fois la note de Jean est 60 de plus que celle de Marie, alors $2J = M + 60$, ou $M = 2J - 60$.
Puisque deux fois la note de Marie est 90 de plus que celle de Jean, alors $2M = J + 90$.
On reporte $M = 2J - 60$ dans l'équation $2M = J + 90$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} 2(2J-60) &= J+90 \\ 4J-120 &= J+90 \\ 3J &= 210 \\ J &= 70 \end{aligned}$$

On reporte $J = 70$ dans l'équation $M = 2J - 60$ pour obtenir $M = 80$.
La moyenne des deux notes, c'est-à-dire la moyenne de 70 et de 80, est égale à 75.

3. (a) Réponse : $x = 50$
On simplifie en utilisant les lois des exposants :

$$2^x = 2(16^{12}) + 2(8^{16}) = 2((2^4)^{12}) + 2((2^3)^{16}) = 2(2^{48}) + 2(2^{48}) = 4(2^{48}) = 2^2(2^{48}) = 2^{50}$$

Donc $x = 50$.

(b) *Solution 1*
On factorise le membre de gauche de l'équation $(f(x))^2 - 3f(x) + 2 = 0$ pour obtenir $(f(x) - 1)(f(x) - 2) = 0$.
Donc $f(x) = 1$ ou $f(x) = 2$.
Si $f(x) = 1$, alors $2x - 1 = 1$, d'où $x = 1$.
Si $f(x) = 2$, alors $2x - 1 = 2$, d'où $x = \frac{3}{2}$.
Les valeurs de x sont 1 et $\frac{3}{2}$.

Solution 2
On reporte $f(x) = 2x - 1$ dans l'équation $(f(x))^2 - 3f(x) + 2 = 0$:

$$\begin{aligned} (2x-1)^2 - 3(2x-1) + 2 &= 0 \\ 4x^2 - 4x + 1 - 6x + 3 + 2 &= 0 \\ 4x^2 - 10x + 6 &= 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 &= 0 \\ (x-1)(2x-3) &= 0 \end{aligned}$$

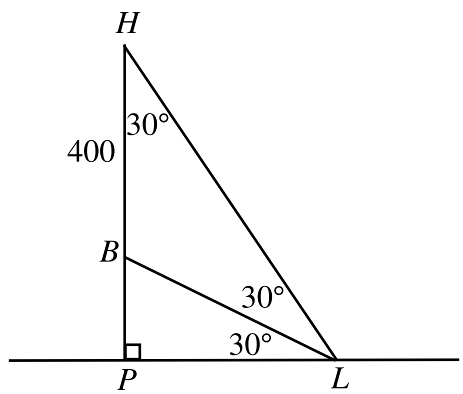
Donc, $x = 1$ ou $x = \frac{3}{2}$.

4. (a) Réponse : $\frac{14}{15}$
Solution 1
Les deux billets choisis peuvent être : $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(2,6)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(4,5)$, $(4,6)$ ou $(5,6)$.
Il y a 15 choix. (Puisque les deux billets sont choisis en même temps, le couple $(2,4)$ est

considéré le même que le couple $(4, 2)$.)
Les choix pour lesquels le plus petit des numéros est inférieur ou égal à 4 sont $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$ et $(4, 6)$.
Il y en a 14.
La probabilité est donc égale à $\frac{14}{15}$.

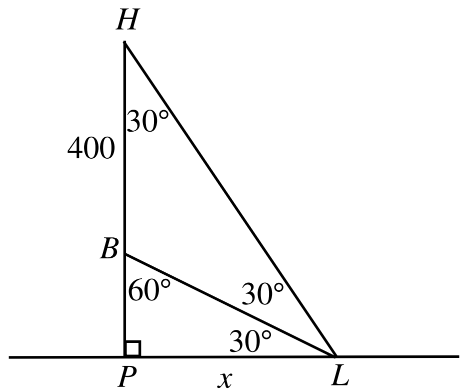
Solution 2
On détermine la probabilité pour que le plus petit numéro ne soit PAS inférieur ou égal à 4.
Le plus petit numéro doit être au moins 5.
Puisque deux numéros distincts sont choisis, ils doivent être 5 et 6.
Comme dans la Solution 1, on détermine qu'il y a 15 choix possibles.
Donc, la probabilité pour que le plus petit numéro ne soit PAS inférieur ou égal à 4 est égale à $\frac{1}{15}$. La probabilité pour que le plus petit numéro choisi soit inférieur ou égal à 4 est donc égale à $1 - \frac{1}{15}$, ou $\frac{14}{15}$.

(b) *Solution 1*
Puisque $\angle HLP = 60^\circ$ et $\angle BLP = 30^\circ$, alors $\angle HLB = 30^\circ$.
Puisque $\angle HLP = 60^\circ$ et $\angle HPL = 90^\circ$, alors $\angle LHP = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ$, d'où $\angle LHP = 30^\circ$.



Le triangle HBL est donc isocèle et $BL = HB = 400$ m.
Dans le triangle BLP, $BL = 400$ m et $\angle BLP = 30^\circ$.
Donc $LP = BL\cos(30^\circ)$ m, d'où $LP = 400\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ m, ou $LP = 200\sqrt{3}$ m.
Donc, la distance entre les points L et P est de $200\sqrt{3}$ m.

Solution 2
Puisque $\angle HLP = 60^\circ$ et $\angle BLP = 30^\circ$, alors $\angle HLB = 30^\circ$.
Puisque $\angle HLP = 60^\circ$ et $\angle HPL = 90^\circ$, alors $\angle LHP = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ$, d'où $\angle LHP = 30^\circ$.
De plus, $\angle LBP = 60^\circ$.
Soit $LP = x$.



Puisque BLP est un triangle remarquable 30°-60°-90°, alors $BP : LP = 1 : \sqrt{3}$.
Donc $BP = \frac{1}{\sqrt{3}}LP$, ou $BP = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.
Puisque HLP est un triangle remarquable 30°-60°-90°, alors $HP : LP = \sqrt{3} : 1$.
Donc $HP = \sqrt{3}LP$, ou $HP = \sqrt{3}x$.
Or $HP = HB + BP$. Donc :

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x &= 400 + \frac{1}{\sqrt{3}}x \\ 3x &= 400\sqrt{3} + x \\ 2x &= 400\sqrt{3} \\ x &= 200\sqrt{3}\end{aligned}$$

Donc, la distance entre les points L et P est de $200\sqrt{3}$ m.

5. (a) Réponse : (6,5)
Après 2 mouvements, la chèvre s'est déplacée de $1 + 2$ unités, ou 3 unités.
Après 3 mouvements, elle s'est déplacée de $1 + 2 + 3$ unités, ou 6 unités.
De même, après n mouvements, la chèvre s'est déplacée de $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ unités.
On cherche la valeur de n pour laquelle $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ est égal à 55.
La façon la plus rapide de déterminer la valeur de n est d'additionner les entiers jusqu'à ce que la somme égale 55. On obtient $n = 10$.
(On aurait pu obtenir la valeur de n en se souvenant que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ et en résolvant l'équation $\frac{1}{2}n(n + 1) = 55$.)
Il faut déterminer les coordonnées du point où la chèvre se trouve après ces 10 mouvements.
On considère d'abord l'abscisse de ce point.
Depuis son départ du point $(0, 0)$, la chèvre s'est déplacée de 2 unités vers la droite, de 4 unités vers la gauche, de 6 unités vers la droite, de 8 unités vers la gauche et de 10 unités vers la droite. L'abscisse de sa position est donc égale à $2 - 4 + 6 - 8 + 10$, ou 6.
De même, l'ordonnée de sa position est égale à $1 - 3 + 5 - 7 + 9$, ou 5.
Après ses 10 mouvements, la chèvre se trouve au point $(6, 5)$.

(b) *Solution 1*
La suite 4, $4r$, $4r^2$ est arithmétique si la différence entre $4r^2$ et $4r$ est égale à la différence

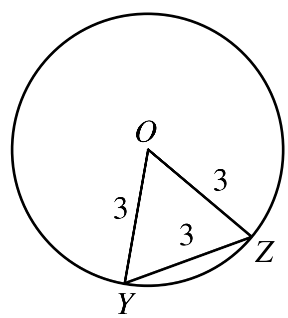
entre $4r$ et 4, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned} 4r^2 - 4r &= 4r - 4 \\ 4r^2 - 8r + 4 &= 0 \\ r^2 - 2r + 1 &= 0 \\ (r-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

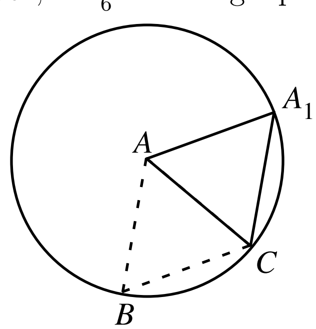
Donc, la seule valeur de r est 1.

Solution 2
La suite 4, $4r$, $4r^2$ est arithmétique s'il existe un nombre d tel que $4r = 4+d$ et $4r^2 = 4+2d$. (On dit que d est la raison arithmétique de cette suite.)
On a donc $d = 4r - 4$ et $2d = 4r^2 - 4$, ou $d = 2r^2 - 2$.
Puisque le membre de gauche des équations $d = 4r - 4$ et $d = 2r^2 - 2$ est le même, alors $2r^2 - 2 = 4r - 4$. Donc $2r^2 - 4r + 2 = 0$, ou $r^2 - 2r + 1 = 0$, d'où $(r-1)^2 = 0$.
Donc, la seule valeur de r est 1.

6. (a) RÉPONSE : 4π
On remarque d'abord que si un triangle équilatéral dont les côtés ont une longueur de 3 est placé dans un cercle de rayon 3 de manière que deux des sommets soient situés sur le cercle, alors le troisième sommet est situé au centre du cercle.
En effet, si on place les sommets Y et Z d'un tel triangle XYZ sur le cercle et que l'on joint Y et Z au centre O, alors $OY = OZ = 3$. Le triangle OYZ est alors équilatéral, puisque ses trois côtés ont une longueur de 3. Les triangles XYZ et OYZ sont donc identiques et les points X et O sont les mêmes.

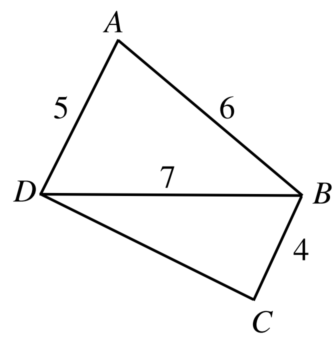


Donc, au départ, A est situé au centre du cercle.
Lorsque le triangle subit une rotation de centre C, le point B trace un arc de cercle de rayon 3. Cet arc est une fraction de cercle. De quelle fraction s'agit-il ?
Lorsque le point A atteint le point A_1 sur le cercle, le triangle AA_1C est équilatéral, car il s'agit de l'image du triangle équilatéral initial par une rotation. Donc $\angle A_1CA = 60°$. L'angle de rotation est donc de $60°$, ou $\frac{1}{6}$ d'un angle plein.



Le point B a donc tracé $\frac{1}{6}$ d'un cercle de rayon 3.
Le point A a aussi tracé un arc de la même longueur. Lorsque le point A atteint le cercle, les points A et C sont sur le cercle et le point B doit être au centre du cercle.
Donc, lors de la rotation suivante, B trace $\frac{1}{6}$ d'un cercle en se rendant sur le cercle.
La troisième rotation est de centre B. Donc, B ne se déplace pas. Après trois rotations, le point A sera au centre et les points B et C seront sur le cercle. Le triangle aura alors subi l'équivalent d'une rotation de 180° dont le centre est le centre du cercle.
Donc, pour retourner à sa position initiale, le triangle doit subir trois autres rotations. Le point B agira de la même façon que pendant les trois premières rotations.
Au total, le point B trace donc 4 arcs dont la longueur est $\frac{1}{6}$ de la circonférence d'un cercle de rayon 3.
La distance totale parcourue par le point B est égale à $4(\frac{1}{6})(2\pi(3))$, ou 4π.

(b) Pour déterminer la longueur du côté CD, il faut d'abord déterminer la mesure d'un des angles du triangle BCD. (On déterminera son cosinus.)
Or, on sait que $\angle A + \angle C = 180°$. Si on connaît $\angle A$, on connaîtra $\angle C$.



D'après la loi du cosinus dans le triangle ABD :

$$\begin{aligned} 7^2 &= 5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos(\angle A) \\ 49 &= 61 - 60\cos(\angle A) \\ \cos(\angle A) &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Puisque $\angle A + \angle C = 180°$, alors $\cos(\angle C) = -\cos(180° - \angle A)$. Puisque $\cos(\angle A) = \frac{1}{5}$, alors $\cos(\angle C) = -\frac{1}{5}$.
(On aurait pu déterminer la mesure de l'angle A à partir de $\cos(\angle A) = \frac{1}{5}$ pour ensuite calculer la mesure de l'angle C, mais il aurait fallu utiliser des approximations.)
D'après la loi du cosinus dans le triangle BCD :

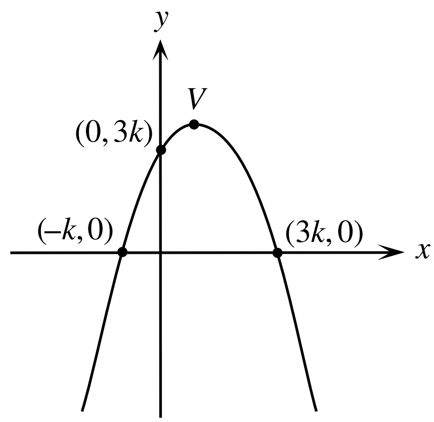
$$\begin{aligned} 7^2 &= 4^2 + CD^2 - 2(4)(CD)\cos(\angle C) \\ 49 &= 16 + CD^2 - 8(CD)\left(-\frac{1}{5}\right) \\ 0 &= 5CD^2 + 8CD - 165 \\ 0 &= (5CD + 33)(CD - 5) \end{aligned}$$

Donc $CD = -\frac{33}{5}$ ou $CD = 5$. (On aurait pu résoudre l'équation en utilisant la formule.)
On rejette la première racine, car la longueur doit être positive. Donc $CD = 5$.

(On aurait pu utiliser $\cos(\angle C) = -\frac{1}{5}$ pour déterminer $\sin(\angle C)$ et utiliser la loi des sinus dans le triangle BCD pour déterminer $\angle BDC$, ce qui aurait donné $\angle DBC$, nous permettant ainsi de calculer CD en utilisant la loi des sinus. Cependant, cette approche aurait fait intervenir des valeurs approximatives.)

7. (a) RÉPONSE : Maximum = 5, Minimum = 1
On récrit $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x + 2$ en complétant le carré pour obtenir $f(x) = (\sin x - 1)^2 + 1$.
Puisque $(\sin x - 1)^2 \geq 0$, alors $f(x) \geq 1$; on a $f(x) = 1$ lorsque $\sin x = 1$ (ce qui se produit, par exemple, lorsque $x = \frac{\pi}{2}$).
La valeur minimale de $f(x)$ est donc égale à 1.
La valeur maximale $f(x)$ se produit lorsque l'expression $(\sin x - 1)^2$ admet une valeur maximale.
Puisque $-1 \leq \sin x \leq 1$, alors $(\sin x - 1)^2$ admet une valeur maximale lorsque $\sin x = -1$ (par exemple, lorsque $x = \frac{3\pi}{2}$). Dans ce cas, $(\sin x - 1)^2 = 4$ et $f(x) = 5$.
La valeur maximale de $f(x)$ est égale à 5.

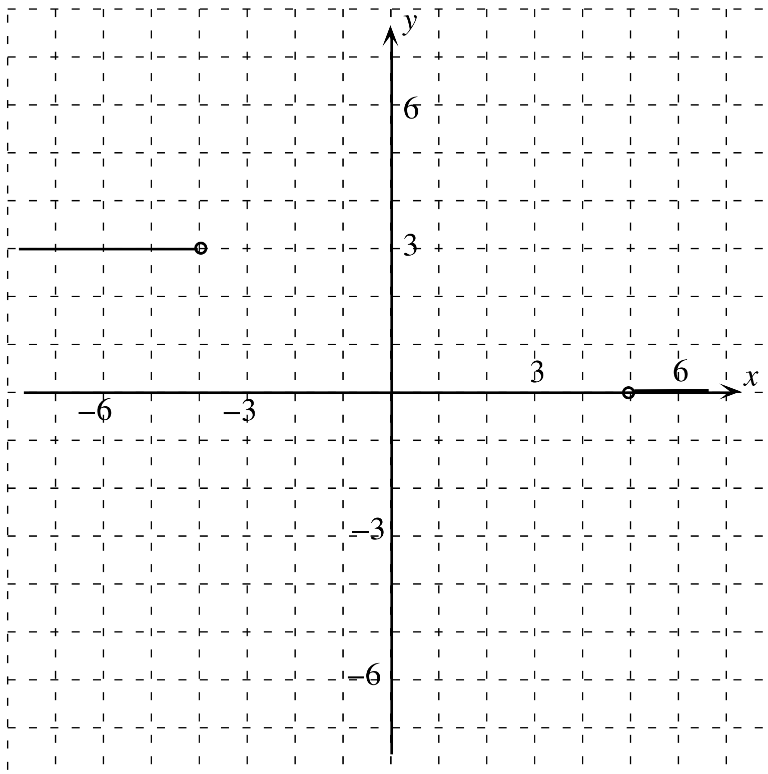
(b) D'après la figure, les abscisses à l'origine de la parabole sont $-k$ et $3k$.



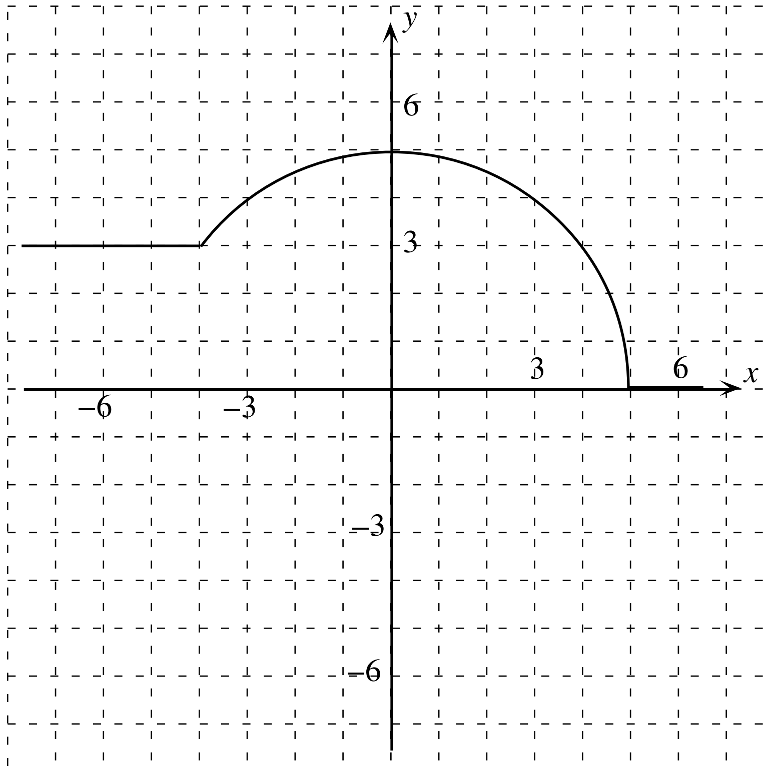
Puisque l'équation de la parabole est $y = -\frac{1}{4}(x - r)(x - s)$, on peut donc l'écrire sous forme $y = -\frac{1}{4}(x - (-k))(x - 3k)$.
Puisque le point $(0, 3k)$ est situé sur la parabole, alors $3k = -\frac{1}{4}(0+k)(0-3k)$, ou $12k = 3k^2$, d'où $k^2 - 4k = 0$, ou $k(k - 4) = 0$.
Donc $k = 0$ ou $k = 4$.
Puisque les points d'intersection de la parabole et de l'axe des abscisses sont distincts, on ne peut avoir $k = 0$ (autrement les deux points seraient identiques).
Donc $k = 4$.
L'équation de la parabole est donc $y = -\frac{1}{4}(x + 4)(x - 12)$, ou $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 12$.
Il reste à déterminer les coordonnées du sommet V.
Puisque les abscisses à l'origine de la parabole sont -4 et 12, l'abscisse du sommet est égale à la moyenne de -4 et de 12, soit 4.
(On aurait pu utiliser le fait que l'abscisse du sommet est égale à $-\dfrac{b}{2a}$, ou $-\dfrac{2}{2(-\frac{1}{4})}$.)
L'ordonnée du sommet est égale à $-\frac{1}{4}(4^2) + 2(4) + 12$, ou 16.
Les coordonnées du sommet sont $(4, 16)$.

8. (a) On examine la fonction dans chacun des intervalles.
Si $x < -4$, alors $f(x) = 4$. Puisque $g(x) = \sqrt{25 - [f(x)]^2}$, alors $g(x) = \sqrt{25 - 4^2}$, d'où $g(x) = 3$.

Dans l'intervalle $x < -4$, le graphique de $y = g(x)$ est la droite horizontale d'équation $y = 3$.
Si $x > 5$, alors $f(x) = -5$. Puisque $g(x) = \sqrt{25 - [f(x)]^2}$, alors $g(x) = \sqrt{25 - (-5)^2}$, d'où $g(x) = 0$.
Dans l'intervalle $x > 5$, le graphique de $y = g(x)$ est la droite horizontale d'équation $y = 0$.
Voici la représentation graphique à ce point :

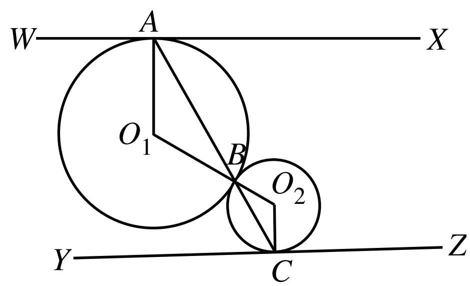


Si $-4 \leq x \leq 5$, alors $f(x) = -x$. Puisque $g(x) = \sqrt{25 - [f(x)]^2}$, alors $g(x) = \sqrt{25 - (-x)^2}$, ou $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$.
L'équation $y = g(x)$ définit un demi-cercle de centre à l'origine et de rayon 5. En effet, puisque $y = \sqrt{25 - x^2}$, alors $y^2 = 25 - x^2$, d'où $x^2 + y^2 = 25$. Cette équation définit le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 5. Puisque y est égal à la racine carrée positive, l'équation définit le demi-cercle supérieur.
Il reste à vérifier la valeur de la fonction aux extrémités des intervalles.
Lorsque $x = -4$, on a $g(-4) = \sqrt{25 - (-4))^2}$, ou $g(-4) = 3$.
Lorsque $x = 5$, on a $g(5) = \sqrt{25 - 5^2}$, ou $g(5) = 0$.
La partie du demi-cercle définie dans l'intervalle $-4 \leq x \leq 5$ rejoint donc les deux autres branches du graphique.
Le graphique de la relation définie par $y = g(x)$ est donc :



(b) *Solution 1*

Soit O_1 et O_2 le centre respectif des cercles.
On trace AO_1, BO_1, BO_2 et CO_2.
Soit W et X deux points situés de part et d'autre de A sur la première tangente. Soit Y et Z deux points situés de part et d'autre de C sur la deuxième tangente.



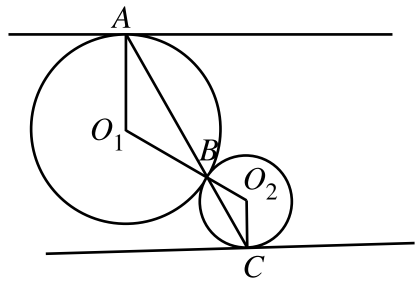
Soit $\angle XAB = \theta$.
Puisque WX est tangent en A au cercle de centre O_1, alors O_1A est perpendiculaire à WX. Donc $\angle O_1AB = 90^\circ - \theta$.
Puisque O_1A et O_1B sont deux rayons, ils sont congrus et le triangle AO_1B est isocèle. Donc $\angle O_1BA = \angle O_1AB = 90^\circ - \theta$.
Puisque les deux cercles sont tangents en B, alors O_1BO_2 est un segment de droite, c'est-à-dire que les points O_1, B et O_2 sont alignés.
Les angles O_2BC et O_1BA sont congrus puisqu'ils sont opposés par le sommet.
Donc $\angle O_2BC = \angle O_1BA = 90^\circ - \theta$.
Comme ci-dessus, puisque $O_2B = O_2C$, alors $\angle O_2CB = \angle O_2BC = 90^\circ - \theta$.
Puisque YZ est tangent en C au cercle de centre O_2, alors O_2C est perpendiculaire à YZ. Donc, $\angle YCB = 90^\circ - \angle O_2CB$, ou $\angle YCB = \theta$.
Puisque $\angle XAB = \angle YCB$, alors WX est parallèle à YZ (angles alternes-internes).

Solution 2

Soit O_1 et O_2 le centre respectif des cercles.

On trace AO_1, BO_1, BO_2 et CO_2.

Puisque AO_1 et BO_1 sont les rayons d'un même cercle, alors $AO_1 = BO_1$. Le triangle AO_1B est donc isocèle et $\angle O_1AB = \angle O_1BA$.



Puisque BO_2 et CO_2 sont les rayons d'un même cercle, alors $BO_2 = CO_2$. Le triangle BO_2C est donc isocèle et $\angle O_2BC = \angle O_2CB$.

Puisque les deux cercles sont tangents en B, alors O_1BO_2 est un segment de droite, c'est-à-dire que le segment qui joint O_1 et O_2 passe aussi par le point de contact des deux cercles.

Donc $\angle O_1BA = \angle O_2BC$ (angles alternes-internes).

Donc $\angle O_1AB = \angle O_1BA = \angle O_2BC = \angle O_2CB$.

Donc, les triangles AO_1B et BO_2C sont semblables. Donc $\angle AO_1B = \angle BO_2C$, ou $\angle AO_1O_2 = \angle CO_2O_1$.

Donc, AO_1 est parallèle à CO_2 (angles alternes-internes).

Or, A et C sont des points de contact, AO_1 est perpendiculaire à la tangente en A et CO_2 est perpendiculaire à la tangente en C.

Puisque AO_1 et CO_2 sont parallèles, les tangentes doivent être parallèles.

9. (a) *Solution 1*

On a $(x-p)^2 + y^2 = r^2$ et $x^2 + (y-p)^2 = r^2$. Donc, aux points d'intersection, on a :

$$\begin{aligned} (x-p)^2 + y^2 &= x^2 + (y-p)^2 \\ x^2 - 2px + p^2 + y^2 &= x^2 + y^2 - 2py + p^2 \\ -2px &= -2py \end{aligned}$$

Donc $x = y$ (on suppose que $p \neq 0$, autrement les deux cercles coïncideraient).

L'équation $(x-p)^2 + y^2 = r^2$ devient alors $(x-p)^2 + x^2 = r^2$, c'est-à-dire $2x^2 - 2px + (p^2 - r^2) = 0$, ou $x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - r^2) = 0$. Puisque les points d'intersection ont pour abscisse respective a et b, alors a et b sont les deux solutions de cette équation.

On utilise la relation entre le produit et la somme des racines et les coefficients de l'équation pour obtenir $a + b = p$ et $ab = \frac{1}{2}(p^2 - r^2)$.

(On aurait pu résoudre l'équation et déterminer ces expressions directement.)

On a donc $a + b = p$.

De plus, $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, c'est-à-dire que $a^2 + b^2 = p^2 - 2\left(\frac{1}{2}(p^2 - r^2)\right)$, d'où $a^2 + b^2 = r^2$.

Solution 2

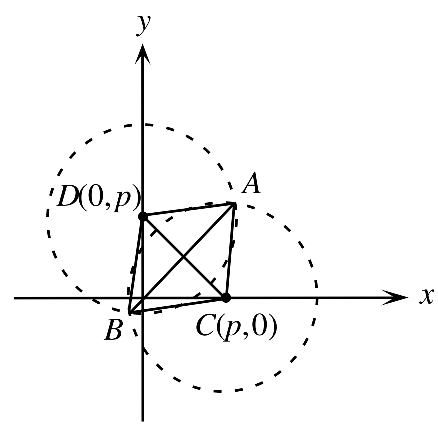
D'après les équations, un cercle est l'image de l'autre par une réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$. Les points d'intersection sont donc situés sur la droite d'équation $y = x$. Donc, A a pour coordonnées (a, a) et B a pour coordonnées (b, b).

On a donc $(a-p)^2+a^2=r^2$ et $(b-p)^2+b^2=r^2$.
On soustrait les équations, membre par membre, pour obtenir :

$$\begin{aligned}(b-p)^2-(a-p)^2+b^2-a^2 &= 0\\ ((b-p)-(a-p))((b-p)+(a-p))+(b-a)(b+a) &= 0\\ (b-a)(a+b-2p)+(b-a)(b+a) &= 0\\ (b-a)(a+b-2p+b+a) &= 0\\ 2(b-a)(a+b-p) &= 0\end{aligned}$$

Puisque $a\neq b$, alors $a+b=p$, ou $a-p=-b$.
On reporte $a-p=-b$ dans l'équation $(a-p)^2+a^2=r^2$ pour obtenir $(-b)^2+a^2=r^2$, ou $a^2+b^2=r^2$.

(b) On a la situation suivante :



On sait que C a pour coordonnées $(p,0)$ et que D a pour coordonnées $(0,p)$.
Donc, la pente du segment CD est égale à -1.
Puisque les points A et B sont situés sur la droite d'équation $y=x$, alors la pente du segment AB est égale à 1.
Donc, AB est perpendiculaire à CD. Donc, $CADB$ est un losange (ses côtés sont des rayons congrus) et son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(AB)(CD)$.
(On peut le démontrer en découpant le quadrilatère $CADB$ en deux triangles, CAB et DAB.)
Puisque C a pour coordonnées $(p,0)$ et que D a pour coordonnées $(0,p)$, alors
$CD=\sqrt{p^2+(-p)^2}$, ou $CD=\sqrt{2p^2}$.
(On ne sait pas si p est positif, donc cette expression n'est pas nécessairement égale à $\sqrt{2}p$.)
Puisque A a pour coordonnées (a,a) et que B a pour coordonnées (b,b), alors :

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(a-b)^2+(a-b)^2}\\ &= \sqrt{2a^2-4ab+2b^2}\\ &= \sqrt{2(a^2+b^2)-4ab}\\ &= \sqrt{2r^2-4\left(\frac{1}{2}(p^2-r^2)\right)}\\ &= \sqrt{4r^2-2p^2}\end{aligned}$$

L'aire du quadrilatère $CADB$ est égale à $\frac{1}{2}(AB)(CD)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-2p^2}\sqrt{2p^2}$, ou $\sqrt{2r^2p^2-p^4}$.

Pour que cette aire soit un maximum, il faut que $2r^2p^2 - p^4$, ou $2r^2(p^2) - (p^2)^2$ soit un maximum.
Puisque la valeur de r est fixe, le polynôme $2r^2(p^2) - (p^2)^2$, en p, est de la forme bicarrée. En posant $q = p^2$, il devient $-q^2 + 2r^2q$. Donc, l'équation $Q = -q^2 + 2r^2q$ définit une fonction du second degré. Puisque le coefficient de q^2 est négatif, la parabole représentative est ouverte vers le bas.
La valeur maximale de Q correspond donc à l'ordonnée du sommet de la parabole. L'abscisse du sommet est égale à $-\dfrac{2r^2}{2(-1)}$, ou r^2. Q admet donc une valeur maximale lorsque $q = r^2$. L'aire du quadrilatère est donc maximale lorsque $p^2 = r^2$.
Puisque $p^2 = r^2$, alors $(a+b)^2 = p^2 = r^2$, d'où $a^2 + 2ab + b^2 = r^2$.
Puisque $a^2 + b^2 = r^2$, alors $2ab = 0$. Donc, $a = 0$ ou $b = 0$, ce qui implique que les coordonnés de A ou de B sont $(0, 0)$, c'est-à-dire que A ou B est situé à l'origine.

(c) Dans la partie (b), on a déterminé que $AB = \sqrt{4r^2 - 2p^2}$, ou $AB = \sqrt{2}\sqrt{2r^2 - p^2}$.
Puisque r et p sont des entiers supérieurs à 1, alors $2r^2 - p^2 \neq 0$. Donc, la valeur minimale non nulle de l'expression $2r^2 - p^2$ est 1, puisque $2r^2 - p^2$ est un entier.
Donc, la distance minimale possible entre A et B est égale à $\sqrt{2}\sqrt{1}$, ou $\sqrt{2}$.
Il reste à trouver une valeur entière de p et de r pour lesquelles la distance est égale à $\sqrt{2}$.
Si $r = 5$ et $p = 7$, alors $2r^2 - p^2 = 1$ et $AB = \sqrt{2}$.
(L'équation $2r^2 - p^2 = 1$, ou l'équation équivalente $p^2 - 2r^2 = -1$ admet une infinité de solutions. Une telle équation est appelée une équation de Pell.)

10. (a) On calcule la valeur directement.
Lors de sa 1re traversée, de gauche à droite, Joséphine ferme toutes les portes de numéro pair et elle laisse ouvertes les portes de numéro impair.
La 2e traversée va de droite à gauche. Au départ, les portes 1, 3, ..., 47, 49 sont ouvertes.
Pendant sa 2e traversée, elle ferme les portes 47, 43, 39, ..., 3.
La 3e traversée va de gauche à droite. Au départ, les portes 1, 5, ..., 45, 49 sont ouvertes.
Pendant sa 3e traversée, elle ferme les portes 5, 13, ..., 45.
Les portes 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49 restent ouvertes.
Pendant sa 4e traversée, de droite à gauche, elle ferme les portes 41, 25 et 9. Les portes 1, 17, 33 et 49 restent ouvertes.
Pendant sa 5e traversée, de gauche à droite, elle ferme les portes 17 et 49. Les portes 1 et 33 restent ouvertes.
Pendant sa 6e traversée, de droite à gauche, elle ferme la porte 1. La porte 33 reste ouverte.
Donc $f(50) = 33$.

(b) et (c) *Solution 1*
On remarque d'abord que si n est pair, c'est-à-dire si $n = 2k$, alors
$f(n) = f(2k) = f(2k-1) = f(n-1)$. Ce résultat est justifié dans la Solution 2.
Donc, il suffit de déterminer des valeurs impaires de n dans les parties (b) et (c).

On suppose qu'il existe une valeur de n pour laquelle $f(n) = 2005$, c'est-à-dire pour laquelle la porte 2005 est la dernière porte ouverte.
Pendant sa 1re traversée, Joséphine ferme chaque deuxième porte. Elle ferme donc toutes les portes ayant un numéro m tel que $m \equiv 0 \pmod 2$.
Les portes ouvertes correspondent aux numéros m tels que $m \equiv 1 \pmod 4$

ou $m \equiv 3 \pmod 4$.
Pendant sa 2^e traversée, de droite à gauche, elle ferme chaque deuxième porte restée ouverte.
Après avoir fermé la première porte, elle ferme donc chaque quatrième porte de la rangée initiale.
Or, on veut que la porte 2005 reste ouverte et on sait que $2005 \equiv 1 \pmod 4$. Elle doit donc fermer toutes les portes numéro m tel que $m \equiv 3 \pmod 4$.
Les portes ouvertes correspondent à des numéros m tels que $m \equiv 1 \pmod 4$, c'est-à-dire tels que $m \equiv 1 \pmod 8$ ou $m \equiv 5 \pmod 8$.
Pendant sa 3^e traversée, de gauche à droite, elle ferme chaque deuxième porte restée ouverte.
Après avoir fermé la première porte, elle ferme donc chaque huitième porte de la rangée initiale.
Puisque la porte 1 est ouverte, elle ferme la porte 5 et toutes les portes numéro m tel que $m \equiv 5 \pmod 8$.
Or, puisque $2005 \equiv 5 \pmod 8$, elle ferme la porte 2005 pendant cette traversée.
Donc, il n'existe aucun entier positif n pour lequel $f(n) = 2005$.

On démontre maintenant qu'il existe un nombre infini de valeurs entières de n pour lesquelles $f(n) = f(2005)$.
On construit un tableau qui indique ce qui arrive lorsqu'il y a 2005 casiers. On indique le numéro de la traversée, sa direction, la 1^{re} porte ouverte à partir de la gauche, la 1^{re} porte ouverte à partir de la droite, toutes les portes ouvertes avant la traversée, les portes qui se fermeront pendant la traversée et les portes qui resteront ouvertes après la traversée.

Trav. n°	Dir.	Ouv. G	Ouv. D	Sont ouvertes	Seront fermées	Resteront ouvertes
1	G à D	1	2005	TOUTES	$\equiv 0 \pmod 2$	$\equiv 1 \pmod 2$
2	D à G	1	2005	$\equiv 1, 3 \pmod 4$	$\equiv 3 \pmod 4$	$\equiv 1 \pmod 4$
3	G à D	1	2005	$\equiv 1, 5 \pmod 8$	$\equiv 5 \pmod 8$	$\equiv 1 \pmod 8$
4	D à G	1	2001	$\equiv 1, 9 \pmod{16}$	$\equiv 9 \pmod{16}$	$\equiv 1 \pmod{16}$
5	G à D	1	2001	$\equiv 1, 17 \pmod{32}$	$\equiv 17 \pmod{32}$	$\equiv 1 \pmod{32}$
6	D à G	1	1985	$\equiv 1, 33 \pmod{64}$	$\equiv 33 \pmod{64}$	$\equiv 1 \pmod{64}$
7	G à D	1	1985	$\equiv 1, 65 \pmod{128}$	$\equiv 65 \pmod{128}$	$\equiv 1 \pmod{128}$
8	D à G	1	1921	$\equiv 1, 129 \pmod{256}$	$\equiv 1 \pmod{256}$	$\equiv 129 \pmod{256}$
9	G à D	129	1921	$\equiv 129, 385 \pmod{512}$	$\equiv 385 \pmod{512}$	$\equiv 129 \pmod{512}$
10	D à G	129	1665	$\equiv 129, 641 \pmod{1024}$	$\equiv 129 \pmod{1024}$	$\equiv 641 \pmod{1024}$
11	G à D	641	1665	$\equiv 641, 1665 \pmod{2048}$	$\equiv 1665 \pmod{2048}$	$\equiv 641 \pmod{2048}$

Puisqu'il n'y a qu'un entier, de 1 à 2005, qui est congruent à $641 \pmod{2048}$, alors il n'y a qu'un casier ouvert, soit le numéro 641.
On remarque que pendant n'importe quelle traversée numéro s, l'ensemble des portes qui se fermeront dépend du numéro de la première porte ouverte à partir de la gauche si s est impair, du numéro de la première porte ouverte à partir de la droite si s est pair et du nombre auquel ce numéro est congruent modulo 2^s.

On considère $n = 2005 + 2^{2a}$, $2^{2a} > 2005$; donc $a \geq 6$.
On montrera que $f(n) = f(2005) = 641$. (Dans la Solution 2, on justifie ce choix des valeurs de n.)
Supposons que l'on construit un tableau comme le précédent pour déterminer $f(n)$.
Pendant les 11 premières traversées, les données du tableau seront les mêmes, à l'exception

du numéro de la première porte ouverte à partir de la droite, qui serait augmenté de 2^{2a}.
Qu'arrive-t-il après la 11^e traversée ?
Après la 11^e traversée, les portes ouvertes ont un numéro congruent à $641 \pmod{2048}$. La première porte ouverte à partir de la gauche est la porte 641 et la première porte ouverte à partir de la droite est la porte numéro $2^{2a} + 641$.
Au début de la 12^e traversée, les portes ouvertes ont un numéro congruent à 641 ou à $2689 \pmod{2^{12}}$.
Puisque le numéro de la première porte ouverte à partir de la droite, soit $(2^{2a} + 641)$, est congruent à $641 \pmod{2^{12}}$, alors les portes dont le numéro est congruent à $2689 \pmod{2^{12}}$ sont fermées pendant cette traversée. Les portes dont le numéro est congruent à $641 \pmod{2^{12}}$ sont laissées ouvertes
Donc, après cette 12^e traversée, les numéros des portes ouvertes sont 641, $641 + 2^{12}$, $641 + 2(2^{12})$, $641 + 3(2^{12})$, $\ldots$, $641 + 2^{2a-12}(2^{12}) = 641 + 2^{2a}$.
Le nombre de portes ouvertes est égal à $2^{2a-12} + 1$.

Il reste à prouver que si le nombre de portes ouvertes est égal à un nombre de la forme $2^{2c}+1$, alors la dernière porte qui restera ouverte est la première à partir de la gauche. En effet, parmi les portes ouvertes après les $(2^{2a-12}+1)$ premières (c'est-à-dire 2 exposant pair plus 1), la porte ouverte la plus à gauche sera la dernière porte ouverte, en l'occurrence, la porte numéro 641. On aura alors $f(2^{2a} + 2005) = 641 = f(2005)$.

On considère donc une rangée de $2^{2c} + 1$ portes ouvertes.
On remarque que pendant une traversée, si le nombre de portes ouvertes est impair, alors on fermera la moitié du « nombre de portes ouvertes moins 1 » et que la première et la dernière porte resteront ouvertes.
Donc, 2^{2c-1} portes sont fermées pendant la traversée, ce qui laisse $2^{2c} + 1 - 2^{2c-1}$ portes, ou $2^{2c-1} + 1$ portes ouvertes. Il reste donc un nombre impair de portes ouvertes.
Pendant la traversée suivante, 2^{2c-2} portes seront fermées (puisqu'il y a un nombre impair de portes ouvertes au départ), ce qui laisse $2^{2c-2} + 1$ portes ouvertes.
On continue de la sorte jusqu'à ce qu'il y ait $2^1 + 1$ portes, ou 3 portes ouvertes avant d'entreprendre une traversée de numéro pair (de droite à gauche). Donc, la porte du milieu est fermée pendant cette avant-dernière traversée.
Pendant la dernière traversée, de gauche à droite, la deuxième porte est fermée et la première reste ouverte.
Donc, si on a $2^{2c} + 1$ portes ouvertes, la première porte, à partir de la gauche, sera la dernière porte ouverte.

On reporte ce résultat à la situation précédente. Donc, la dernière des $2^{2a-12} + 1$ portes qui restera ouverte est la première à partir de la gauche, soit la porte numéro 641. Donc $f(2^{2a} + 2005) = 641 = f(2005)$ si $a \geq 6$.

Il y a donc un nombre infini de valeurs entières de n pour lesquelles $f(n) = f(2005)$.

Solution 2

On calcule d'abord $f(n)$ pour les valeurs de n de 1 à 32, pour dévlopper un sens de ce qui se passe. On obtient successivement 1, 1, 3, 3, 1, 1, 3, 3, 9, 9, 11, 11, 9, 9, 11, 11, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 3, 3, 9, 9, 11, 11, 9, 9, 11, 11.

Ces résultats nous feront voir des régularités possibles.

On établit ensuite deux formules de récurrence pour $f(n)$.

D'après les résultats, il semble bien que $f(2m) = f(2m-1)$.
On doit démontrer que c'est toujours vrai.
On considère une rangée de $2m$ portes ouvertes.
Pendant la 1re traversée, Joséphine ferme toutes les portes dont le numéro est pair, laissant ouvertes les portes dont le numéro est égal à 1, 3, ..., ou $2m-1$.
Or, s'il y avait eu $2m-1$ portes ouvertes au départ, les mêmes portes resteraient ouvertes après la première traversée.
Donc, au début de la 2e traversée, les mêmes portes sont ouvertes, que Joséphine ait commencé avec $2m$ portes ouvertes ou avec $2m-1$ portes ouvertes.
Donc $f(2m) = f(2m-1)$.
Il suffit donc d'examiner les valeurs de $f(n)$ lorsque n est impair.

On démontre ensuite que $f(2m-1) = 2m+1-2f(m)$.
(Il est utile de lier $n = 2m-1$ à un nombre plus petit.)
Si on commence avec $2m-1$ portes ouvertes, les numéros des portes ouvertes à la fin de la 1re traversée sont 1, 3, ..., $2m-1$. Il y a alors m portes ouvertes.
Soit $f(m) = p$. Comme Joséphine s'apprête à faire sa 2e traversée, de droite à gauche, on peut considérer qu'il s'agit d'une 1re traversée devant une rangée de m portes ouvertes.
La dernière porte qui restera ouverte est donc la $p^{\text{ième}}$ porte ouverte, à partir de la droite,
En comptant à partir de la droite, la première porte ouverte est la porte numéro $2m-1$, c'est-à-dire numéro $2m+1-2(1)$; la deuxième est la porte numéro $2m-3$, c'est-à-dire numéro $2m+1-2(2)$, et ainsi de suite. La $p^{\text{ième}}$ porte ouverte est la porte numéro $2m+1-2p$.
Donc, la dernière porte qui restera ouverte est la porte numéro $2m+1-2p$.
Donc $f(2m-1) = 2m+1-2p = 2m+1-2f(m)$.

On utilise cette formule de façon répétée pour obtenir deux autres formules de récurrence :

$$\begin{aligned}
f(4k+1) &= f(2(2k+1)-1) \\
&= 2(2k+1)+1-2f(2k+1) \\
&= 4k+3-2f(2(k+1)-1) \\
&= 4k+3-2(2(k+1)+1-2f(k+1)) \\
&= 4k+3-2(2k+3-2f(k+1)) \\
&= 4f(k+1)-3
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f(4k+3) &= f(2(2k+2)-1) \\
&= 2(2k+2)+1-2f(2k+2) \\
&= 4k+5-2f(2k+1) \\
&= 4k+5-2f(2(k+1)-1) \\
&= 4k+5-2(2(k+1)+1-2f(k+1)) \\
&= 4k+5-2(2k+3-2f(k+1)) \\
&= 4f(k+1)-1
\end{aligned}$$

En examinant la liste des 32 premières valeurs de $f(n)$, il semble que la valeur de $f(n)$ ne peut pas être égale à un multiple de 8 plus 5, ni à un multiple de 8 plus 7. On le démontre en utilisant les formules de récurrence :

$$\begin{aligned}
f(8l+1) &= 4f(2l+1)-3 \qquad \text{(puisque } 8l+1 = 4(2l)+1) \\
&= 4(2l+3-2f(l+1))-3 \\
&= 8l+9-8f(l+1) \\
&= 8(l-f(l+1))+9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(8l+3) &= 4f(2l+1)-1 \qquad \text{(puisque } 8l+3 = 4(2l)+3) \\
&= 4(2l+3-2f(l+1))-1 \\
&= 8l+11-8f(l+1) \\
&= 8(l-f(l+1))+11
\end{aligned}$$

De même, $f(8l+5) = 8l+9-8f(l+1)$ et $f(8l+7) = 8l+11-8f(l+1)$.
Puisque n'importe quel entier impair positif n peut s'écrire sous la forme $8l+1$, $8l+3$, $8l+5$ ou $8l+7$, alors pour n'importe quel entier impair positif n, $f(n)$ est 9 ou 11 de plus qu'un multiple de 8.
Donc, pour n'importe quel entier impair positif n, $f(n)$ ne peut être égal à 2005, car 2005 n'est pas égal à 9 ou 11 de plus qu'un multiple de 8.
Puisqu'il suffit d'examiner les valeurs impaires de n, il n'existe aucun entier positif n pour lequel $f(n) = 2005$.

On démontre maintenant qu'il existe un nombre infini de valeurs entières de n pour lesquelles $f(n) = f(2005)$.
On examine de nouveau la liste des 32 premières valeurs de $f(n)$ et en posant la conjecture suivante :

$$f(2005) = f(2005 + 2^{2a})$$

si $2^{2a} > 2005$. (On peut formuler cette conjecture en comparant $f(1)$ et $f(5)$, $f(3)$ et $f(7)$, puis en comparant successivement $f(1)$ et $f(17)$, $f(2)$ et $f(18)$, ..., $f(15)$ et $f(31)$. De fait, il semble que $f(m+2^{2a}) = f(m)$ si $2^{2a} > m$.)

On utilise les formules de récurrence :

$$\begin{aligned}
f(2005+2^{2a}) &= 4f(502+2^{2a-2})-3 && (2005+2^{2a}=4(501+2^{2a-2})+1) \\
&= 4f(501+2^{2a-2})-3 \\
&= 4(4f(126+2^{2a-4})-3)-3 && (501+2^{2a-2}=4(125+2^{2a-4})+1) \\
&= 16f(126+2^{2a-4})-15 \\
&= 16f(125+2^{2a-4})-15 \\
&= 16(4f(32+2^{2a-6})-3)-15 && (125+2^{2a-4}=4(31+2^{2a-6})+1) \\
&= 64f(32+2^{2a-6})-63 \\
&= 64f(31+2^{2a-6})-63 \\
&= 64(4f(8+2^{2a-8})-1)-63 && (31+2^{2a-6}=4(7+2^{2a-8})+3) \\
&= 256f(8+2^{2a-8})-127 \\
&= 256f(7+2^{2a-8})-127 \\
&= 256(4f(2+2^{2a-10})-1)-127 && (7+2^{2a-8}=4(1+2^{2a-10})+3) \\
&= 1024f(2+2^{2a-10})-383 \\
&= 1024f(1+2^{2a-10})-383
\end{aligned}$$

(Remarquer qu'on aurait pu utiliser les mêmes expressions, sans les puissances de 2, pour démontrer que $f(2005) = 1024f(1) - 383$, ou $f(2005) = 641$.)

Or, $f(2^{2b} + 1) = 1$ pour chaque entier positif b.
En effet, on peut le démontrer par récurrence.
Si $b = 1$, on sait que $f(5) = 1$.
Supposons que le résultat est vrai si $b = B - 1$, B étant un entier tel que $B \geq 2$.
Selon l'hypothèse d'induction, $f(2^{2B} + 1) = f(4(2^{2B-2}) + 1)$, c'est-à-dire que $f(2^{2B} + 1) = 4f(2^{2B-2} + 1) - 3$, d'où $f(2^{2B} + 1) = 4(1) - 3$, ou $f(2^{2B} + 1) = 1$.

Donc si $a \geq 6$, alors $f(1 + 2^{2a-10}) = f(1 + 2^{2(a-5)})$, d'où $f(1 + 2^{2a-10}) = 1$.
Donc $f(2005+2^{2a}) = 1024(1)-383$, ou $f(2005+2^{2a}) = 641$. Donc $f(2005+2^{2a}) = f(2005)$.
Il existe donc un nombre infini de valeurs entières de n pour lesquelles $f(n) = f(2005)$.

Solution 3
On trouve une formule pour $f(n)$ par induction et on la démontre en utilisant le raisonnement par récurrence et les formules de la Solution 2.
On écrit l'entier positif n selon sa représentation binaire :

$$n = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-1} + b_{2p} \cdot 2^{2p}$$

Chaque coefficient, $b_0, b_1, \cdots, b_{2p}$, est égal à 0 ou à 1 ; de plus, $b_{2p} = 1$ ou $b_{2p} = 0$ et $b_{2p-1} = 1$.
Sous forme binaire, n est égal à $(b_{2p}b_{2p-1} \cdots b_1b_0)_2$ ou à $(b_{2p-1} \cdots b_1b_0)_2$.
On pose la conjecture suivante : Si n est impair (ce qui implique que $b_0 = 1$), alors :

$$f(n) = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_3 \cdot 2^3 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-1}$$

L'expression est donc égale à l'expression binaire de n dont on a enlevé les puissances de 2 affectées d'exposants pairs. En effet, or remarque que $7 = 4 + 2 + 1$ et que $f(7) = 2 + 1$; $13 = 8 + 4 + 1$ et $f(13) = 8 + 1$; $27 = 16 + 8 + 2 + 1$ et $f(27) = 8 + 2 + 1$.
On sait déjà que si n est pair, alors $f(n) = f(n - 1)$ (on l'a démontré dans la Solution 2).

Pour l'instant, on suppose que la formule est démontrée. Elle le sera plus loin.

On peut résoudre les parties (b) et (c) rapidement.
On cherche des valeurs de n pour lesquelles $f(n) = 2005$.
On écrit 2005 comme une somme de puissances de 2, ce qui est équivalent à la notation binaire :

$$2005 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 4 + 1$$

Puisque cette expression utilise des puissances de 2 affectées d'exposants pairs, alors il n'existe aucune valeur de n pour laquelle $f(n) = 2005$.

On doit démontrer qu'il existe un nombre infini de valeurs entières de n pour lesquelles $f(n) = f(2005)$.
On remarque d'abord que si $n = 2005 + 2^{2a}$, $a \geq 6$, alors les 11 derniers chiffres binaires de n sont les mêmes que ceux de 2005 et que les seuls 1 dans la représentation binaire de $n = 2005 + 2^{2a}$ qui sont dans des positions correspondant à une puissance de 2 affectée d'un exposant impair sont ceux qui proviennent de la portion 2005 (puisque le « 1 » supplémentaire de 2^{2a} correspond à une puissance de 2 affectée d'un exposant pair).
Puisque l'on calcule $f(2005 + 2^{2a})$ en regardant les puissances de 2 affectées d'un exposant impair, alors $f(2005 + 2^{2a}) = f(2005)$ pour tout entier $a \geq 6$.
Donc, il existe un nombre infini de valeurs entières de n pour lesquelles $f(n) = f(2005)$.

Il reste à démontrer que la formule pour $f(n)$ est vraie. On utilise le raisonnement par récurrence.
D'après la liste des 31 premières valeurs de $f(n)$ dans la Solution 2, on voit que la formule est vraie pour les premières valeurs impaires de n.
On suppose que la formule est vraie pour toutes les valeurs impaires de n jusqu'à $n = N-2$, N étant un entier impair positif quelconque.
On considère $n = N$.

1[er] cas : $N = 4q + 1$

On peut écrire :

$$N = 1 + b_2 \cdot 2^2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-1} + b_{2p} \cdot 2^{2p}$$

Donc :

$$q = b_2 + b_3 \cdot 2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2}$$

On remarque que $q < N - 2$, puisque $4q + 1 = N$, d'où $q = \frac{1}{4}N - \frac{1}{4}$.
D'après les formules de la Solution 2, $f(N) = f(4q + 1) = 4f(q + 1) - 3$.
Si q est pair, alors $b_2 = 0$.
Donc $q + 1$ est impair et $q + 1 = 1 + b_3 \cdot 2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2}$.
Si q est impair, alors $b_2 = 1$. Donc $q = 1 + b_3 \cdot 2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2}$ et $q + 1$ est pair, d'où $f(q + 1) = f(q)$.
Dans chacun de ces deux cas, on a $f(q+1) = f(1+b_3 \cdot 2+\cdots+b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2})$, d'où $f(q + 1) = 1 + b_3 \cdot 2 + b_5 \cdot 2^3 + \cdots b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3}$ selon l'hypothèse de récurrence.
Donc $f(N) = 4(1 + b_3 \cdot 2 + b_5 \cdot 2^3 + \cdots b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3}) - 3$,
ou $f(N) = 1 + b_3 \cdot 2^3 + b_5 \cdot 2^5 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-1}$, puisque $b_1 = 0$.
Donc, la formule est vraie pour $n = N$.

2[e] cas : $N = 4q + 3$

On peut écrire :

$$N = 1 + 2 + b_2 \cdot 2^2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-1} + b_{2p} \cdot 2^{2p}$$

Donc :

$$q = b_2 + b_3 \cdot 2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2}$$

On remarque que $q < N - 2$, puisque $4q + 3 = N$.
D'après les formules de la Solution 2, $f(N) = f(4q + 3) = 4f(q + 1) - 1$.
Si q est pair, alors $b_2 = 0$.
Donc $q + 1$ est impair et $q + 1 = 1 + b_3 \cdot 2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2}$.
Si q est impair, alors $b_2 = 1$. Donc $q = 1 + b_3 \cdot 2 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2}$ et $q + 1$ est pair, d'où $f(q + 1) = f(q)$.
Dans chacun de ces deux cas, on a $f(q+1) = f(1+b_3 \cdot 2+\cdots+b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3} + b_{2p} \cdot 2^{2p-2})$, d'où $f(q + 1) = 1 + b_3 \cdot 2 + b_5 \cdot 2^3 + \cdots b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3}$ selon l'hypothèse de récurrence.
Donc $f(N) = 4(1 + b_3 \cdot 2 + b_5 \cdot 2^3 + \cdots b_{2p-1} \cdot 2^{2p-3}) - 1$, ou $f(N) = 1 + 2 + \cdot b_3 \cdot 2^3 + b_5 \cdot 2^5 + \cdots + b_{2p-1} \cdot 2^{2p-1}$.
Donc, la formule est vraie pour $n = N$.

Donc, la formule est vraie pour toutes les valeurs impaires de n jusqu'à N.
Selon le principe du raisonnement par récurrence, la formule est vraie pour toutes les valeurs impaires de n. Cela complète la démonstration.

Solution 4
On remarque que si $n = 2k$ est pair, alors $f(n) = f(2k) = f(2k-1) = f(n-1)$. Voir la justification dans la Solution 2.
Il suffit donc de considérer les valeurs impaires de n dans les parties (b) et (c).

On écrit n sous forme binaire, soit $n = (b_{2p}b_{2p-1}\cdots b_2b_11)_2$, chaque chiffre étant égal à 0 ou à 1. On accepte que $b_{2p} = 0$ si $b_{2p-1} = 1$. Puisque n est impair, le dernier chiffre doit être égal à 1.
On pose la conjecture suivante :
Si $n = (b_{2p}b_{2p-1}\cdots b_2b_11)_2$, alors $f(n) = (b_{2p-1}0b_{2p-3}0\cdots b_30b_11)_2$. Dans la représentation binaire de n, chaque chiffre qui correspond à une puissance de 2 affectée d'un exposant pair est remplacé par le chiffre 0 pour donner la représentation binaire de $f(n)$.

Pour l'instant, on suppose que la formule est démontrée. Elle le sera plus loin.

On peut démontrer les parties (b) et (c) rapidement.
On cherche des valeurs de n pour lesquelles $f(n) = 2005$.
Puisque $2005 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 4 + 1$, alors $2005 = (11111010101)_2$.
Dans la représentation binaire de 2005, les chiffres en positions paires, à partir de la droite, ne sont pas tous des 0. Donc, 2005 ne peut pas correspondre à une valeur de $f(n)$, quelle que soit la valeur de n.

Pourquoi y a-t-il un nombre infini de valeurs de n pour lesquelles $f(n) = 2005$?
On considère une valeur particulière de n pour laquelle $n = 2005 + 2^{2a}$, $2^{2a} > 2005$ (c'est-à-dire que $n \geq 6$).
La représentation binaire de n est alors $n = (10\cdots011111010101)_2$, le premier 1, à gauche, correspondant à une puissance de 2 affectée d'un exposant pair. Dans l'évaluation de $f(n)$, ce chiffre est donc remplacé par 0.
Donc $f(n) = (00\cdots001010000001)_2$, d'où $f(n) = (1010000001)_2$, ce qui est égal à $f(2005)$.
Il existe donc un nombre infini de valeurs entières de n pour lesquelles $f(n) = f(2005)$.

Il reste à démontrer que la formule pour $f(n)$ est vraie.
On écrit les entiers de 1 à n sous forme binaire :

$$\begin{array}{cccccc}
\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \vdots & & & \\
\ldots & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & 1
\end{array}$$

Lorsque Joséphine fait une traversée de numéro impair, elle va de gauche à droite, ce qui correspond à descendre la liste. Lorsque la traversée a un numéro pair, elle va de droite à gauche, ce qui correspond à remonter la liste.

Pendant la 1$^{\text{re}}$ traversée, elle enlève chaque deuxième nombre en descendant la liste. Elle

enlève donc chaque nombre pair, c'est-à-dire chaque nombre qui est congruent à $2 \pmod 2$, ou chaque nombre dont le chiffre des unités est égal à 0.
Après la 1[re] traversée, les nombres qui restent ont un 1 pour chiffre des unités et leur deuxième chiffre (celui qui correspond à 2^1) alterne entre 0 et 1, puisque les nombres de la liste alternent entre $1 \pmod 4$ et $3 \pmod 4$.

Pendant la 2[e] traversée, en remontant dans la liste, elle enlève chaque deuxième nombre qui reste. Puisque les nombres qui restent ont leurs deux derniers chiffres qui alternent entre 01 et 11 et que le dernier nombre de la liste n'est pas enlevé, alors elle laisse tous les nombres qui se terminent par $b_1 1$.
(Puisqu'elle enlève chaque quatrième nombre de la liste initiale, les deux derniers chiffres des nombres qui restent doivent être identiques.)
Les nombres qui restent dans la liste doivent donc tous être congruents à un même nombre, soit un nombre impair modulo 4.

On considère la 3[e] traversée.
Puisque un nombre sur quatre de la liste initiale est encore dans la liste, alors le premier nombre qui reste dans la liste est inférieur à 4.
Puisque chaque nombre qui reste dans la liste est congruent à un même nombre impair modulo 4, alors leurs trois derniers chiffres alternent entre $0b_1 1$ et $1b_1 1$ (leurs deux derniers chiffres sont les mêmes pour chaque nombre).
Puisque le premier nombre est inférieur à 4, il se termine en $0b_1 1$.
Puisqu'on enlève chaque deuxième nombre, on enlève donc chaque nombre qui se termine en $1b_1 1$, tout en laissant tous les nombres dont les trois derniers chiffres sont $0b_1 1$. Donc, tous les nombres qui restent sont congruents à un même nombre modulo 8.
Quel est le dernier nombre qui reste dans la liste ?
Si le dernier nombre de la liste, avant cette traversée, était $...b_3 0 b_1 1$ (c.-à-d. que $b_2 = 0$), alors ce nombre est encore le dernier.
Si le dernier nombre de la liste, avant cette traversée, était $...b_3 1 b_1 1$ (c.-à-d. que $b_2 = 1$), alors l'avant-dernier nombre était $(...b_3 1 b_1 1)_2 - 4$, ou $(...b_3 0 b_1 1)_2$, et c'est ce nombre qui reste aprés la traversée. Dans un cas comme dans l'autre, le dernier nombre de la liste est $...b_3 0 b_1 1$.

On considère maintenant une traversée générale de numéro pair, c'est-à-dire de numéro $2m$. Joséphine monte donc dans la liste.
Le dernier nombre de la liste (c.-à-d. le premier nombre rencontré) est $...b_{2m-1} 0 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$ et les nombres qui restent dans la liste ont leurs quatre derniers chiffres qui alternent entre $...10 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$ et $...00 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$ (puisque chaque $(2^{2m-1})^{\text{ième}}$ nombre de la liste initiale est encore dans la liste).
Puisque le dernier nombre de la liste n'est pas enlevé, on enlève tous les nombres dont le $(2m-1)^{\text{ième}}$ chiffre est différent de celui du dernier nombre. Il reste donc tous les nombres qui se terminent par $...b_{2m-1} 0 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$. Il reste donc chaque $(2^{2m})^{\text{ième}}$ nombre de la liste initiale.
Puisque tous les nombres qui restent sont impairs, alors le plus petit nombre qui reste est plus petit que 2^{2m}. Il se termine donc par $...0 b_{2m-1} 0 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$.

Dans la traversée suivante (de numéro impair), la liste contient, en alternance, tous les nombres qui se terminent par $...0 b_{2m-1} 0 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$ ou $...1 b_{2m-1} 0 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$.
Puisque le premier nombre rencontré se termine par $...0 b_{2m-1} 0 b_{2m-3} 0 \cdots b_3 0 b_1 1$, alors on

enlève tous les nombres qui se terminent par $...1b_{2m-1}0b_{2m-3}0\cdots b_30b_11$, tout en laissant ceux qui se terminent par $...0b_{2m-1}0b_{2m-3}0\cdots b_30b_11$, c'est-à-dire chaque $(2^{2m+1})^{\text{ième}}$ nombre de la liste initiale.
Avant cette dernière traversée, le dernier nombre de la liste était
$...b_{2m+1}b_{2m}b_{2m-1}0b_{2m-3}0\cdots b_30b_11$.
Après cette traversée, le dernier nombre de la liste est $...b_{2m+1}0b_{2m-1}0b_{2m-3}0\cdots b_30b_11$, selon un argument semblable à celui utilisé pour la 3e traversée.

Le procédé se poursuit de la même façon et le dernier nombre qui restera dans la liste sera $b_{2p-1}0b_{2p-3}0\cdots b_30b_11$. Donc $f(n) = (b_{2p-1}0b_{2p-3}0\cdots b_30b_11)_2$

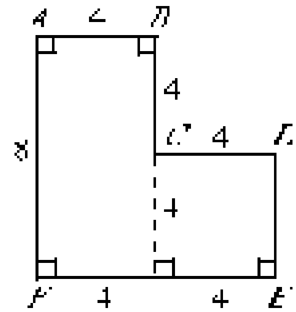
Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre
en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Euclide 2004

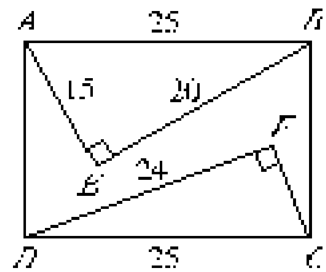
pour les prix du
The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and
COMPUTING

1. a) Puisque tous les angles sont droits, $BC = DE = 4$.
On prolonge BC, de manière à former un rectangle de dimensions 8 sur 4 et un carré de dimensions 4 sur 4. L'aire de $ABCDEF$ est donc égale à $(8)(4)+(4)(4)$, ou 48.



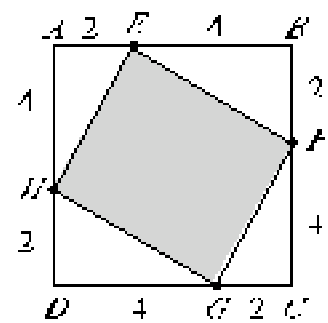
RÉPONSE : 48

b) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABE, $AB^2 = 15^2 + 20^2$, d'où $AB = 25$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, $CD = AB = 25$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle CFD, $25^2 = 24^2 + CF^2$, d'où, $CF = 7$.

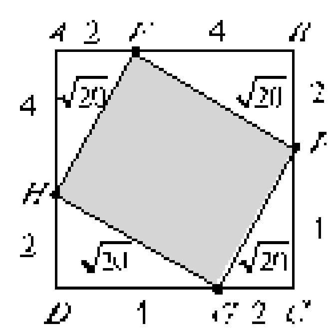


RÉPONSE : 7

c) *Solution 1*
Puisque $ABCD$ est un carré de dimensions 6 sur 6 et que les rapports $AE : EB$, $BF : FC$, $CG : GD$ et $DH : HA$ égalent tous 1 : 2, alors $AE = BF = CG = DH = 2$ et $EB = FC = GD = HA = 4$.
Chacun des triangles HAE, EBF, FCG et GDH est donc rectangle avec des cathètes de longueurs 2 et 4.
L'aire de $EFGH$ est égale à l'aire du carré $ABCD$ moins l'aire des quatre triangles. Elle est donc égale à
$6^2 - 4\left[\frac{1}{2}(2)(4)\right]$, ou 20.



Solution 2
Puisque $ABCD$ est un carré de dimensions 6 sur 6 et que les rapports $AE : EB$, $BF : FC$, $CG : GD$ et $DH : HA$ égalent tous 1 : 2, alors $AE = BF = CG = DH = 2$ et $EB = FC = GD = HA = 4$.
Chacun des triangles HAE, EBF, FCG et GDH est donc rectangle avec des cathètes de longueurs 2 et 4.
D'après le théorème de Pythagore, l'hypoténuse de chacun de ces triangles est égale à $\sqrt{2^2 + 4^2}$, ou $\sqrt{20}$.

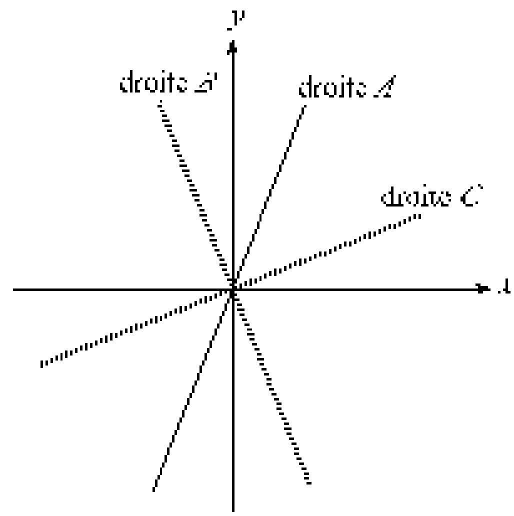


Puisque les triangles *HAE* et *EBF* sont congruents (on sait que leurs côtés sont congrus deux à deux), alors $\angle AHE = \angle BEF$. Puisque $\angle AHE + \angle AEH = 90^\circ$, alors $\angle BEF + \angle AEH = 90^\circ$. Donc $\angle HEF = 90^\circ$.
Le losange *EFGH* est donc un carré dont les côtés ont une longueur de $\sqrt{20}$.
L'aire de *EFGH* est donc égale à $\left(\sqrt{20}\right)^2$, ou 20 unités carrées.

2. a) On écrit l'équation $3x - y = 6$ sous la forme $y = 3x - 6$, ce qui indique que l'ordonnée à l'origine de la droite est égale à –6.
La droite horizontale, qui a la même ordonnée à l'origine, a donc pour équation $y = -6$.

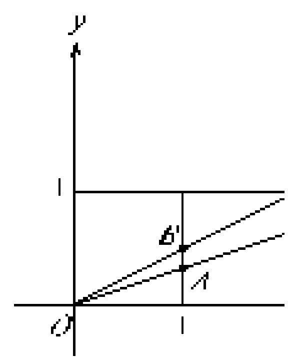
RÉPONSE : $y = -6$

b) Lorsque la droite *A*, d'équation $y = 2x$, est réfléchie par rapport à l'axe des ordonnées, son image, la droite *B*, a pour équation $y = -2x$, car la pente change de signe.
Puisque la droite *B* a une pente de –2 et que les droites *B* et *C* sont perpendiculaires, la pente de la droite *C* est égale à $\frac{1}{2}$ (une pente est l'opposée de l'inverse de l'autre).



RÉPONSE : $\frac{1}{2}$

c) *Solution 1*
Le segment *OP* a une pente de $\frac{1}{2}$. Le point *B* est situé sur ce même segment et son abscisse est égale à 1. Son ordonnée est donc égale à $\frac{1}{2}$.
Le segment *OQ* a une pente de $\frac{1}{3}$. Le point *A* est situé sur ce même segment et son abscisse est égale à 1. Son ordonnée est donc égale à $\frac{1}{3}$.



Puisque les points *A* et *B* ont la même abscisse, la longueur *AB* est égale à $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, ou $\frac{1}{6}$.

Solution 2
La droite qui passe par l'origine O et le point P a une équation de la forme $y = mx$.
Puisque le point $P(2,1)$ est sur la droite, alors $1 = m(2)$, d'où $m = \frac{1}{2}$. L'équation de la droite est donc $y = \frac{1}{2}x$. Puisque B est sur cette droite et que son abscisse est égale à 1, ses coordonnées vérifient l'équation : $y = \frac{1}{2}(1)$. Ses coordonnées sont donc $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.
De même, la droite qui passe par O et par Q a pour équation $y = \frac{1}{3}x$ et les coordonnées du point A sont $\left(1, \frac{1}{3}\right)$.
Puisque les points A et B ont la même abscisse, la longueur AB est égale à $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, ou $\frac{1}{6}$.

3. a) *Solution 1*
Soit a le 3^{e} terme et d la raison (le terme constant qui est additionné au terme précédent).
Les cinq termes sont donc $a - 2d$, $a - d$, a, $a + d$, $a + 2d$.
D'après les renseignements, on a $(a - 2d) + (a - d) = 2$ et $(a + d) + (a + 2d) = -18$, c.-à-d.
$2a - 3d = 2$ et $2a + 3d = -18$.
Pour déterminer le 3^{e} terme, soit a, on additionne ces deux équations, membre par membre, pour obtenir $4a = -16$, d'où $a = -4$.
Le 3^{e} terme est égal à -4.

Solution 2
Soit a le 1er terme et d la raison (le terme constant qui est additionné au terme précédent).
Les cinq termes sont donc a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, $a + 4d$.
D'après les renseignements, on a $a + (a + d) = 2$ et $(a + 3d) + (a + 4d) = -18$, c.-à-d.
$2a + d = 2$ et $2a + 7d = -18$.

On soustrait ces équations, membre par membre, pour obtenir $6d = -20$, d'où $d = -\frac{10}{3}$.
On reporte $d = -\frac{10}{3}$ dans la première équation pour obtenir $2a + \left(-\frac{10}{3}\right) = 2$, d'où $a = \frac{8}{3}$.
Le 3^{e} terme est égal à $a + 2d$, c.-à-d. à $\frac{8}{3} + 2\left(-\frac{10}{3}\right)$, ou -4.

RÉPONSE : -4

b) *Solution 1*
Puisque $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ et $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, alors
$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$.
On a donc $(x + y)^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 4(56)$, d'où $(x + y)^2 = 256$.
Donc $x + y = 16$ ou $x + y = -16$.

Les deux valeurs possibles de $x + y$ sont 16 et –16.

Solution 2

D'après la 1[re] équation, on a $x = y + 4\sqrt{2}$. On reporte cette expression dans la 2[e] équation :

$$\left(y + 4\sqrt{2}\right)y = 56$$

$$y^2 + 4\sqrt{2}y - 56 = 0$$

$$y = \frac{-4\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 - 4(1)(-56)}}{2}$$

$$y = \frac{-4\sqrt{2} \pm \sqrt{256}}{2}$$

$$y = -2\sqrt{2} \pm 8$$

Si $y = -2\sqrt{2} + 8$, alors $x = \left(-2\sqrt{2} + 8\right) + 4\sqrt{2}$, d'où $x = 2\sqrt{2} + 8$. Donc $x + y = 16$.

Si $y = -2\sqrt{2} - 8$, alors $x = \left(-2\sqrt{2} - 8\right) + 4\sqrt{2}$, d'où $x = 2\sqrt{2} - 8$. Donc $x + y = -16$.

Les deux valeurs possibles de $x + y$ sont 16 et –16.

4. a) *Solution 1*

L'expérience admet 36 résultats possibles équiprobables.

Pour que le produit de deux entiers positifs, chacun inférieur ou égal à 6, soit divisible par 5, il faut qu'au moins un des nombres soit égal à 5.

Les résultats favorables sont

$$(1,5),\ (2,5),\ (3,5),\ (4,5),\ (5,5),\ (6,5),\ (5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,6).$$

Il y en a onze. La probabilité pour que le produit soit divisible par 5 est égale à $\frac{11}{36}$.

Solution 2

Pour que le produit de deux entiers positifs, chacun inférieur ou égal à 6, soit divisible par 5, il faut qu'au moins un des nombres soit égal à 5.

Lorsqu'on jète deux dés, la probabilité pour que le premier indique un 5 et que le deuxième indique n'importe quel nombre de 1 à 6 est égale à $\frac{1}{6} \times 1$, ou $\frac{1}{6}$.

De même, la probabilité pour que le premier dé indique n'importe quel nombre et que le deuxième indique un 5 est égale à $1 \times \frac{1}{6}$, ou $\frac{1}{6}$.

Si on additionne ces probabilités, on a compté deux fois la probabilité pour que les deux dés indiquent un 5. Cette probabilité est égale à $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$, ou $\frac{1}{36}$.

La probabilité pour que le produit soit divisible par 5 est égale à $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36}$, ou $\frac{11}{36}$.

RÉPONSE : $\frac{11}{36}$

b) On utilise $f(x) = x^2 - x + 2$ et $g(x) = ax + b$ pour obtenir une expression pour $f\big(g(x)\big)$.

$$\begin{aligned}
f\big(g(x)\big) &= f(ax+b) \\
&= (ax+b)^2 - (ax+b) + 2 \\
&= a^2x^2 + 2abx + b^2 - ax - b + 2 \\
&= a^2x^2 + (2ab - a)x + \left(b^2 - b + 2\right)
\end{aligned}$$

Or, on sait que $f\big(g(x)\big) = 9x^2 - 3x + 2$. Les coefficients correspondants sont donc égaux deux à deux.

$$\begin{aligned}
a^2 &= 9 && (1) \\
2ab - a &= -3 && (2) \\
b^2 - b + 2 &= 2 && (3)
\end{aligned}$$

D'après la 1re équation, $a = 3$ ou $a = -3$.
D'après la 3e équation, $b^2 - b = 0$ ou $b(b-1) = 0$. Donc, $b = 0$ ou $b = 1$.
Il y a donc 4 couples (a, b) qui satisfont à deux des équations. On vérifie lesquels satisfont aussi à la 2e équation.
La 2e équation peut s'écrire sous forme $a(2b-1) = -3$. Si $a = 3$, alors $b = 0$. Si $a = -3$, alors $b = 1$.
Les couples (a, b) qui vérifient les conditions initiales sont $(3, 0)$ et $(-3, 1)$.

5. a)

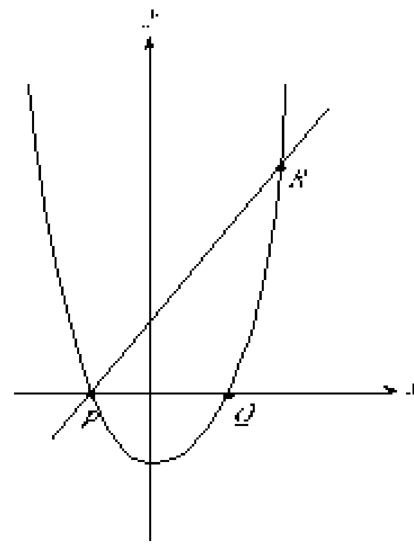
$$\begin{aligned}
16^x &= 2^{x+5} - 2^{x+4} \\
\left(2^4\right)^x &= 2^{x+4}\left(2^1 - 1\right) \\
2^{4x} &= 2^{x+4}(1) \\
2^{4x} &= 2^{x+4} \\
4x &= x + 4 \\
3x &= 4 \\
x &= \tfrac{4}{3}
\end{aligned}$$

RÉPONSE : $x = \frac{4}{3}$

b) Le point P est le point d'intersection de la droite d'équation $y = 3x + 3$ et de l'axe des abscisses. Ses coordonnées sont donc $(-1, 0)$.

Puisque ce point est sur la parabole, il vérifie son équation $y = x^2 + tx - 2$. On a donc :

$$0 = (-1)^2 + t(-1) - 2$$
$$0 = 1 - t - 2$$
$$t = -1$$



La parabole a donc pour équation $y = x^2 - x - 2$ ou $y = (x+1)(x-2)$ (la factorisation a été facilité par notre connaissance d'une abscisse à l'origine). La deuxième abscisse à l'origine est donc égale à 2 et les coordonnées de Q sont $(2, 0)$.

Il reste à déterminer les coordonnées du point R. Puisque R est un point d'intersection de la droite et de la parabole, on a, au point R :

$$3x + 3 = x^2 - x - 2$$
$$0 = x^2 - 4x - 5$$
$$0 = (x+1)(x-5)$$

Donc, $x = -1$ ou $x = 5$.

(Une fois de plus, la factorisation a été facilitée par notre connaissance d'une des racines, soit –1.) Puisque –1 est l'abscisse de P, l'abscisse de R est égale à 5. Puisque R est situé sur la droite, alors $y = 3(5) + 3$, ou $y = 18$. Les coordonnées de R sont $(5, 18)$.

On peut maintenant calculer l'aire du triangle PQR. Le triangle a une base PQ de longueur de 3 et une hauteur correspondante de 18. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(3)(18)$, ou 27.

Donc, $t = -1$ et l'aire du triangle PQR est égale à 27.

6. a) Pour utiliser le plus grand nombre possible de pièces de monnaie, Laure doit utiliser autant de pièces que possible qui ont une petit valeur.

Peut-elle payer 1,34 \$ sans utiliser la pièce de 1 \$? La valeur totale des autres pièces de monnaie est égale à $3(0{,}25\ \$) + 3(0{,}10\ \$) + 3(0{,}05\ \$) + 5(0{,}01\ \$)$, ou 1,25 \$. Laure doit donc utiliser la pièce de 1 \$. Elle doit maintenant utiliser le plus grand nombre possible de pièces pour faire 0,34 \$.

Laure doit utiliser 4 pièces de 1 ¢. Elle a maintenant utilisé 5 pièces et il lui reste 0,30 $ à combler.
Pour le faire en utilisant le plus grand nombre possible des pièces de 25 ¢, de 10 ¢ et de 5 ¢, elle devrait utiliser 2 pièces de 5 ¢ et 2 pièces de 10 ¢, c'est-à-dire 4 pièces de monnaie pour un total de 9 pièces. En effet, si elle utilise une pièce de 25 ¢, il suffit d'utiliser une seule autre pièce de 5 ¢, c'est-à-dire 2 pièces de plus pour un total de 7 pièces. De plus, il est impossible d'utiliser une seule pièce de 10 ¢.
Le plus grand nombre de pièces de monnaie qu'elle peut utiliser est 9.

RÉPONSE : 9

b) Les dimensions initiales de l'image sont de 10 cm sur 15 cm. Lorsqu'on les augmente de n %, les nouvelles dimensions sont de $10\left(1+\frac{n}{100}\right)$ sur $15\left(1+\frac{n}{100}\right)$.
Lorsque la résolution initiale est diminuée de n %, la nouvelle résolution est de $75\left(1-\frac{n}{100}\right)$ pixels/cm. (n ne peut être supérieur à 100, car la résolution ne peut être diminuée de plus de 100 %.)
Le nombre de pixels de la nouvelle image est égal à

$$\left[10\left(1+\frac{n}{100}\right)\times 75\left(1-\frac{n}{100}\right)\right]\times\left[15\left(1+\frac{n}{100}\right)\times 75\left(1-\frac{n}{100}\right)\right].$$

Puisque l'image sera formée de 345 600 pixels, alors :

$$\begin{aligned}
\left[10\left(1+\frac{n}{100}\right)\times 75\left(1-\frac{n}{100}\right)\right]\times\left[15\left(1+\frac{n}{100}\right)\times 75\left(1-\frac{n}{100}\right)\right] &= 345\,600\\
843\,750\left(1+\frac{n}{100}\right)^2\left(1-\frac{n}{100}\right)^2 &= 345\,600\\
\left(1-\frac{n^2}{100^2}\right)^2 &= 0{,}4096\\
1-\frac{n^2}{100^2} &= 0{,}64 \qquad (n \le 100)\\
n^2 &= 0{,}36\times 100^2\\
n &= 0{,}6\times 100 \qquad (n>0)\\
n &= 60
\end{aligned}$$

Donc $n = 60$.

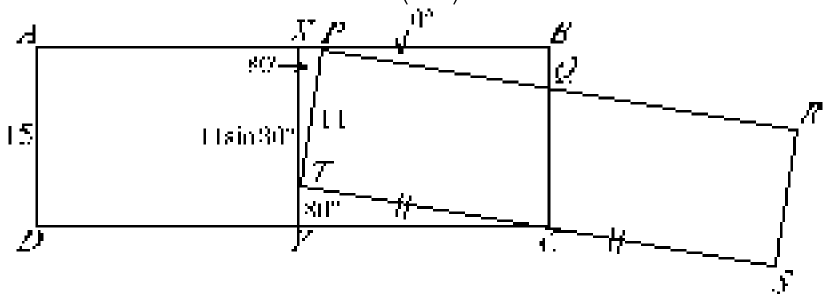
7. a) On calcule d'abord la longueur AC en utilisant la loi du cosinus :

$$\begin{aligned}
AC^2 &= 7^2+8^2-2(7)(8)\cos(120^\circ)\\
AC^2 &= 49+64-112\left(-\tfrac{1}{2}\right)\\
AC^2 &= 169\\
AC &= 13
\end{aligned}$$

Puisque ABC est un triangle rectangle isocèle, alors $x = \sqrt{2}(AC)$, ou $x = 13\sqrt{2}$.

RÉPONSE : $x = 13\sqrt{2}$

b) Au point T, on mène une perpendiculaire à AB. Elle coupe AB en X et CD en Y.
Puisque $\angle TPR = 90°$ et que $\angle BPQ = 10°$, alors $\angle XPT = 80°$. Donc $XT = 11\sin(80°)$.
Puisque $XY = 15$, alors $TY = 15 - 11\sin(80°)$.



Puisque le triangle XPT est rectangle et que $\angle XPT = 80°$, alors $\angle XTP = 10°$.
Puisque $\angle XTP = 10°$ et $\angle TYC = 90°$, alors $\angle YTC = 80°$.

Donc, $TC = \dfrac{TY}{\cos(80°)}$, ou $TC = \dfrac{15 - 11\sin(80°)}{\cos(80°)}$.

Puisque $TS = 2TC$, alors $TS = \dfrac{30 - 22\sin(80°)}{\cos(80°)}$, ou $TS \approx 47{,}9949$.

Arrondie au dixième de centimètre près, la longueur du tiroir est de 48,0 cm.
[Il y a plusieurs autres démarches possibles.]

8. a) On considère le membre de droite de l'identité :

$$\begin{aligned} T^3 + bT + c &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 + b\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c \\ &= \left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c \\ &= x^6 + 3x^2 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^6} + b\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c \\ &= x^6 + \frac{1}{x^6} + (b+3)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c \end{aligned}$$

Pour que cette expression soit égale à $x^6 + \dfrac{1}{x^6}$ pour toutes les valeurs de x, il faut que $b + 3 = 0$ et que $c = 0$. Donc, $b = -3$ et $c = 0$.

b) *Solution 1*

On considère l'équation $x^3 + \frac{1}{x^3} = 2\sqrt{5}$, tout en élevant chaque membre au carré :

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$$

$$x^6 + 2 + \frac{1}{x^6} = 20$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = 18$$

D'après l'identité de la partie a), on a $x^6 + \frac{1}{x^6} = T^3 - 3T$, où $T = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

L'équation précédente devient donc $T^3 - 3T = 18$.

On aimerait factoriser le membre de gauche de l'équation $T^3 - 3T - 18 = 0$.

Par tâtonnements, on conclut que $T = 3$ vérifie l'équation. Selon le théorème de factorisation, $(T - 3)$ est un facteur du membre de gauche.

On obtient $(T-3)\left(T^2 + 3T + 6\right) = 0$, d'où $T = 3$ ou $T^2 + 3T + 6 = 0$. Or, cette dernière équation n'admet aucune racine réelle, car son discriminant, soit $3^2 - 4(1)(6)$, est négatif.

Donc $T = 3$, c'est-à-dire que $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$.

Solution 2

Soit $t = x + \frac{1}{x}$. On a vu, en a), que $x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ est une identité.

On peut conclure que $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$ est une identité.

L'équation $x^3 + \frac{1}{x^3} = 2\sqrt{5}$ peut donc s'écrire sous la forme $t^3 - 3t = 2\sqrt{5}$ ou $t^3 - 3t - 2\sqrt{5} = 0$.

Puisque $\left(\sqrt{5}\right)^3 = 5\sqrt{5}$, on voit que $t = \sqrt{5}$ vérifie l'équation. Selon le théorème de factorisation, $\left(t - \sqrt{5}\right)$ est un facteur du membre de gauche. Par tâtonnements, on obtient $\left(t - \sqrt{5}\right)\left(t^2 + \sqrt{5}t + 2\right) = 0$, d'où $t = \sqrt{5}$ ou $t^2 + \sqrt{5}t + 2 = 0$. Or, cette dernière équation n'admet aucune racine réelle, car son discriminant, soit $\left(\sqrt{5}\right)^2 - 4(1)(2)$, est négatif.

Donc $t = \sqrt{5}$, ou $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$.

On élève chaque membre au carré pour obtenir :

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=5$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=3$$

Solution 3

On considère l'équation $x^3+\frac{1}{x^3}=2\sqrt{5}$ et on élève chaque membre au carré :

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$$

$$x^6+2+\frac{1}{x^6}=20$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}=18$$

D'après la partie a), en posant $T=x^2+\frac{1}{x^2}$, cette équation devient $T^3-3T-18=0$.

Comme dans la solution 1, on obtient $T=3$, c'est-à-dire que $x^2+\frac{1}{x^2}=3$.

9. a) *Solution 1*

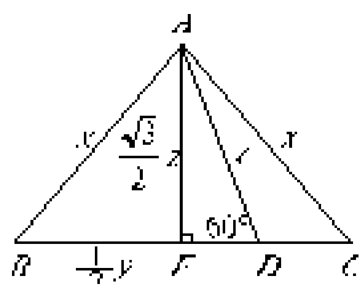
Au point A, on abaisse une perpendiculaire AE à BC.

Dans le triangle ABE, on a $AE^2=x^2-\frac{1}{4}y^2$.

Dans le triangle ADE, on a $AE=\frac{\sqrt{3}}{2}z$.

Donc $AE^2=\frac{3}{4}z^2$.

On a donc $x^2-\frac{1}{4}y^2=\frac{3}{4}z^2$ ou $4x^2-y^2=3z^2$.



Si $x=7$ et $z=5$, alors :

$$196-y^2=75$$

$$y^2=121$$

$$y=11$$

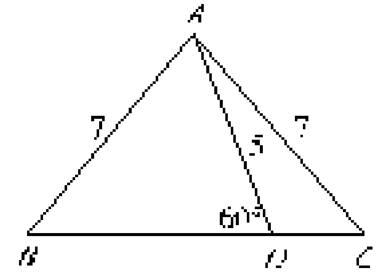
Le triplet de Kirk pour lequel $x=7$ et $z=5$ est $(7,11,5)$.

Solution 2

D'après la loi du cosinus dans le triangle ADB :

$$7^2 = 5^2 + BD^2 - 2(5)(BD)\cos(60^\circ)$$
$$0 = BD^2 - 5BD - 24$$
$$0 = (BD - 8)(BD + 3)$$

Puisque BD est une longueur positive, alors $BD = 8$.



D'après la loi du cosinus dans le triangle ADC :

$$7^2 = 5^2 + DC^2 - 2(5)(DC)\cos(120^\circ)$$
$$0 = DC^2 + 5DC - 24$$
$$0 = (DC + 8)(DC - 3)$$

Puisque DC est une longueur positive, alors $DC = 3$. Donc, $y = 8 + 3$, ou $y = 11$.
Le triplet de Kirk pour lequel $x = 7$ et $z = 5$ est $(7, 11, 5)$.

b) *Solution 1*

D'après la solution 1 de la partie a), on a $4x^2 - y^2 = 3z^2$. Puisque $z = 5$, alors :

$$4x^2 - y^2 = 75$$
$$(2x + y)(2x - y) = 75$$

Les facteurs $2x + y$ et $2x - y$ représentent des entiers positifs et leur produit doit donc égaler 75. On remarque que la valeur de l'expression $2x + y$ est toujours supérieure à celle de $2x - y$. Les diviseurs de 75 sont 1, 3, 5, 15, 25 et 75.
On examine les possibilités et on résout les systèmes d'équations correspondants :

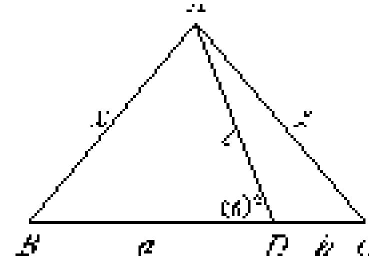
$2x + y$	$2x - y$	x	y
75	1	19	37
25	3	7	11
15	5	5	5

Les autres triplets de Kirk pour lesquels $z = 5$ sont $(19, 37, 5)$ et $(7, 11, 5)$.

Solution 2

Soit $BD = a$ et $DC = b$.
D'après la loi du cosinus dans les triangles ABD et ADC :

$x^2 = 5^2 + a^2 - 2(5)(a)\cos(60^\circ)$, ou
$x^2 = a^2 - 5a + 25$ et
$x^2 = 5^2 + b^2 - 2(5)(b)\cos(120^\circ)$, ou
$x^2 = b^2 + 5b + 25$



On soustrait la deuxième équation de la première, membre par membre :

$$0 = a^2 - b^2 - 5a - 5b$$
$$0 = (a+b)(a-b-5)$$
$$0 = y(a-b-5)$$

Puisque y ne peut être nul, alors $a = b + 5$.
Puisque $y = a + b$, alors $y = 2b + 5$, ou $2b = y - 5$.
Puisque $x^2 = b^2 + 5b + 25$, alors :

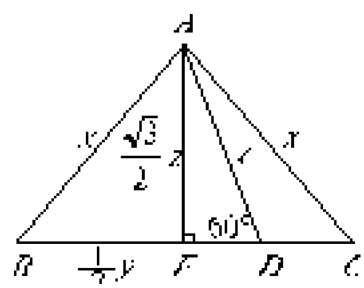
$$4x^2 = 4b^2 + 20b + 100$$
$$4x^2 = (y-5)^2 + 10(y-5) + 100$$
$$4x^2 = y^2 + 75$$
$$4x^2 - y^2 = 75$$

On continue comme dans la solution 1.
Les autres triplets de Kirk pour lesquels $z = 5$ sont $(19, 37, 5)$ et $(7, 11, 5)$.

c) Pour déterminer le triplet de Kirk demandé, il faut d'abord une démarche pour déterminer des triplets de Kirk. On utilise la démarche de la solution 1 de la partie b).
Au point A, on abaisse une perpendiculaire AF à BC.
Puisque le triangle ABC est isocèle, F est le milieu de BC.
Le triangle AFD est un triangle remarquable 30°–60°–90° et on a $AD = z$.
Donc, $FD = \frac{1}{2}z$ et $AF = \frac{\sqrt{3}}{2}z$.

Le triangle ABF est rectangle en F et on a $AF = \frac{\sqrt{3}}{2}z$, $AB = x$ et $BF = \frac{1}{2}y$.
D'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2$$
$$4x^2 - y^2 = 3z^2$$
$$(2x+y)(2x-y) = 3z^2$$



Les facteurs $2x + y$ et $2x - y$ représentent des entiers positifs et leur produit doit donc être égal à $3z^2$. On remarque que la valeur de l'expression $2x + y$ est toujours supérieure à celle de $2x - y$. Puisque z est un nombre premier, les facteurs de $3z^2$ sont 1, 3, z, $3z$, z^2 et $3z^2$. (On remarquera que si z est égal à 2, ces facteurs ne sont pas en ordre ascendant; si z est égal à 3, certains facteurs sont répétés.)
On examine les possibilités et on résout les systèmes d'équations correspondants :

$2x+y$	$2x-y$	x	y
$3z^2$	1	$\frac{3z^2+1}{4}$	$\frac{3z^2-1}{2}$
z^2	3	$\frac{z^2+3}{4}$	$\frac{z^2-3}{2}$
$3z$	z	z	z

Les deux seuls triplets de Kirk qui correspondent à une valeur particulière de z sont donc $\left(\frac{3z^2+1}{4}, \frac{3z^2-1}{2}, z\right)$ et $\left(\frac{z^2+3}{4}, \frac{z^2-3}{2}, z\right)$.

On cherche le triplet de Kirk pour lequel la valeur de $\cos(\angle ABC)$ est le plus rapprochée possible de 0,99.

D'après le triangle ABF, on a $\cos(\angle ABC) = \frac{\frac{1}{2}y}{x}$.

Pour le 1er triplet, on a donc $\cos(\angle ABC) = \frac{3z^2-1}{3z^2+1}$, ou $\cos(\angle ABC) = 1 - \frac{2}{3z^2+1}$.

Pour le 2e triplet, on a $\cos(\angle ABC) = \frac{z^2-3}{z^2+3}$ ou $\cos(\angle ABC) = 1 - \frac{6}{z^2+3}$.

Pour que $\cos(\angle ABC)$ soit près de 0,99, il faut que $\frac{2}{3z^2+1}$ ou $\frac{6}{z^2+3}$ soit près de 0,01.

Il faut donc que $3z^2+1$ soit près de 200 ou que z^2+3 soit près de 600.

Dans le 1er cas, on voit que $3(8)^2+1=193$ et que $3(9)^2+1=244$. Puisque z doit être un nombre premier, on vérifie les choix $z=7$ et $z=11$. En utilisant $\cos(\angle ABC) = \frac{3z^2-1}{3z^2+1}$, on obtient $\cos(\angle ABC) \approx 0{,}986487$ si $z=7$ et $\cos(\angle ABC) \approx 0{,}994506$ si $z=11$.

Dans le 2e cas, on voit que $24^2+3=579$ et que $25^2+3=628$. Puisque z doit être un nombre premier, on vérifie les choix $z=23$ et $z=29$. En utilisant $\cos(\angle ABC) = \frac{z^2-3}{z^2+3}$, on obtient $\cos(\angle ABC) \approx 0{,}988722$ si $z=23$ et $\cos(\angle ABC) \approx 0{,}993644$ si $z=29$.

La valeur de $\cos(\angle ABC)$ semble être le plus rapprochée possible de 0,99 lorsque $z=23$.

Il faut vérifier que cette valeur de z donne bien un triplet de Kirk! Dans le 2e cas, en utilisant $z=23$, on obtient le triplet $(133, 263, 23)$.

Le triplet de Kirk $(133, 263, 23)$ fait en sorte que la valeur de $\cos(\angle ABC)$ est le plus rapprochée possible de 0,99.

(Remarque : On aurait pu suivre une approche semblable à celle de la solution 2 de la partie b), obtenir l'équation $4x^2 - y^2 = 3z^2$ et continuer comme ci-haut.)

10. a) On commence par placer les deux 4. De façon systématique, on les place dans toutes les paires de positions, soit 1 et 5, 2 et 6, 3 et 7, 4 et 8. Dans chaque cas, on tente de placer les deux 3 dans chaque paire de positions disponibles, puis on cherche à placer les deux 2, puis les deux 1.
(On peut réduire le travail en remarquant que si on a une suite de Skolem, on peut en obtenir une autre en renversant l'ordre des nombres. Ainsi il suffit de placer les deux 4 dans les positions 1 et 5 ou 2 et 6. Les autres résultats viendront en renversant l'ordre.)
Les six suites de Skolem d'ordre 4 sont :
(4, 2, 3, 2, 4, 3, 1, 1) et en ordre renversé, (1, 1, 3, 4, 2, 3, 2, 4)
(4, 1, 1, 3, 4, 2, 3, 2) et en ordre renversé, (2, 3, 2, 4, 3, 1, 1, 4)
(3, 4, 2, 3, 2, 4, 1, 1) et en ordre renversé, (1, 1, 4, 2, 3, 2, 4, 3)

b) Dans une telle suite de Skolem d'ordre 9, il y aura 18 positions à remplir, avec 10 nombres impairs et 8 nombres pairs.
Puisque $s_{18} = 8$, on aura $s_{10} = 8$, puisque les 8 seront séparés de 8 positions.
D'après la condition III, il ne doit y avoir qu'un terme impair entre les deux 8. Or il ne reste que 6 nombres pairs à placer et 7 positions entre les 8. On doit donc placer tous les nombres pairs entre les deux 8. La seule façon de le faire, tout en respectant la condition ii, est de placer les 6 à côté des 8, puis les 4 à côté des 6, puis les 2 à côté des 4.
La suite, encore incomplète, a la forme :
(__, __, 1, __, __, __, __, __, __, 8, 6, 4, 2, __, 2, 4, 6, 8)
Il reste à placer les nombres 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9, et les positions disponibles sont 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14.
Puisque les deux 9 doivent être séparés de 9 positions, on doit les placer dans les positions 5 et 14. On a donc :
(__, __, 1, __, 9, __, __, __, __, 8, 6, 4, 2, 9, 2, 4, 6, 8)

Le 1 qui reste doit être placé dans la position 2 ou 4. Si on le place dans la position 2, les deux 7 doivent être placés dans les positions 1 et 8, ce qui donne :
(7, 1, 1, __, 9, __, __, 7, __, 8, 6, 4, 2, 9, 2, 4, 6, 8)
Or, si on place les deux 5, on ne peut plus placer les deux 3. De même, si on place les deux 3, on ne peut plus placer les deux 5.
Le 1 doit donc être placé dans la position 4, ce qui donne :
(__, __, 1, 1, 9, __, __, __, __, 8, 6, 4, 2, 9, 2, 4, 6, 8)
Il reste à placer les nombres 3, 3, 5, 5, 7, 7 dans les positions 1, 2, 6, 7, 8, 9.
On doit placer les deux 3 dans les positions 6 et 9, puis les deux 7 dans les positions 1 et 8, puis les deux 5 dans les positions 2 et 7.
La seule suite de Skolem d'ordre 9 qui vérifie les trois conditions est :

(7, 5, 1, 1, 9, 3, 5, 7, 3, 8, 6, 4, 2, 9, 2, 4, 6, 8)

c) *Solution 1*

Supposons qu'il existe une suite de Skolem d'ordre n, n étant un nombre de la forme $4k+2$ ou $4k+3$. (On traite les deux cas simultanément.)
Soit P_1 la position du premier 1 de la suite. La position du deuxième 1 est donc P_1+1.
De même, soit P_2, P_3, …, P_n la position respective du premier 2, du premier 3, …, du premier n. La position respective du deuxième nombre correspondant est donc P_2+2, P_3+3, …, P_n+n.
Or, les nombres P_1, P_2, P_3, …, P_n, P_1+1, P_2+2, P_3+3, …, P_n+n sont un arrangement des numéros de toutes les positions, c'est-à-dire des nombres 1, 2, …, $2n$.

$$P_1+P_2+\ldots+P_n+(P_1+1)+(P_2+2)+\ldots+(P_n+n)=1+2+\ldots+2n$$
$$2(P_1+P_2+\ldots+P_n)+(1+2+\ldots+n)=1+2+..+2n$$

Donc :
$$2(P_1+P_2+\ldots+P_n)+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2n(2n+1)}{2}$$
$$2(P_1+P_2+\ldots+P_n)+\frac{n(n+1)}{2}=n(2n+1) \qquad (**)$$

Remarque : On a utilisé deux fois l'identité $1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

On examine maintenant la parité dans l'égalité (**) pour chacun des deux cas qui nous concernent.

Si $n=4k+2$, alors $\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{(4k+2)(4k+3)}{2}$, ou $\dfrac{n(n+1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$, ce qui est le produit de deux entiers impairs. Ce produit est donc impair. De plus, on a $n(2n+1)=(4k+2)(8k+5)$, ce qui est le produit d'un entier pair et d'un entier impair. Ce produit est donc pair.
L'égalité (**) a donc la forme (nombre pair) + (nombre impair) = (nombre pair), ce qui est une contradiction.

Si $n=4k+3$, alors $\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{(4k+3)(4k+4)}{2}$, ou $\dfrac{n(n+1)}{2}=(4k+3)(2k+2)$, ce qui est le produit d'un entier impair et d'un entier pair. Ce produit est donc pair. De plus, on a $n(2n+1)=(4k+3)(8k+7)$, ce qui est le produit de deux entiers impairs. Ce produit est donc impair.
L'égalité (**) a donc la forme (nombre pair) + (nombre pair) = (nombre impair), ce qui est une contradiction.

Dans les deux cas, on obtient une contradiction. Il n'existe donc aucune suite de Skolem d'ordre n si n est un nombre de la forme $4k+2$ ou $4k+3$, k étant un entier non négatif.

Solution 2

Supposons qu'il existe une suite de Skolem d'ordre n, n étant un nombre de la forme $4k+2$ ou $4k+3$.

Soit l un entier de 1 à n.

Si l est pair, alors les positions des deux l diffèrent d'un nombre pair, soit l. Les deux positions ont donc chacune un numéro pair ou chacune un numéro impair.

Si l est impair, alors les positions des deux l diffèrent d'un nombre impair, soit l. Une des positions a donc un numéro pair et l'autre, un numéro impair.

1er cas : $n = 4k+2$

De 1 à n, il y a $2k+1$ nombres pairs, soit 2, 4, …, $4k+2$, et $2k+1$ nombres impairs, soit 1, 3, …, $4k+1$.

Les numéros de position dans une suite de Skolem d'ordre $n = 4k+2$ sont les entiers 1, 2, …, $8k+4$. Il y a donc $4k+2$ numéros de position pairs et $4k+2$ numéros de position impairs.

Or, selon ce qui précède, les $2k+1$ nombres impairs de la suite donnent $2k+1$ numéros de position impairs et $2k+1$ numéros de position pairs, c'est-à-dire un nombre impair de numéros de position impairs et un nombre impair de numéros de position pairs.

Chaque nombre pair de la suite contribue deux numéros de position impairs ou deux numéros de position pairs. En d'autres mots, les nombres pairs de la suite contribuent un nombre pair de numéros de position impairs.

Le nombre total de numéros de position impairs est égal à la somme d'un nombre impair et d'un nombre pair, ce qui en fait un nombre impair. On a donc une contradiction, car on sait qu'il y a $4k+2$ numéros de position impairs.

2e cas : $n = 4k+3$

De 1 à n, il y a $2k+1$ nombres pairs, soit 2, 4, …, $4k+2$, et $2k+2$ nombres impairs, soit 1, 3, …, $4k+3$.

Les numéros de position dans une suite de Skolem d'ordre $n = 4k+3$ sont les entiers 1, 2, …, $8k+6$. Il y a donc $4k+3$ numéros de position pairs et $4k+3$ numéros de position impairs.

Or, selon les premières lignes de la solution, les $2k+2$ nombres impairs de la suite produisent $2k+2$ numéros de position impairs et $2k+2$ numéros de position pairs, c'est-à-dire un nombre pair de numéros de position impairs et un nombre pair de numéros de position pairs.

Chaque nombre pair de la suite contribue deux numéros de position impairs ou deux numéros de position impairs. En d'autres mots, tous les nombres pairs de la suite contribueront un nombre pair de numéros de position impairs.
Le nombre total de numéros de position impairs est donc la somme de deux nombres pairs, ce qui en fait un nombre pair. On a donc une contradiction, car on sait qu'il y a $4k+3$ numéros de position impairs.

Dans les deux cas, on a une contradiction. Il n'existe donc aucune suite de Skolem d'ordre n, si n est un nombre de la forme $4k+2$ or $4k+3$, k étant un entier non négatif.

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre
en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Euclide 2003

pour les prix du
The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. a) *Solution 1*

Puisque la parabole a pour abscisses à l'origine 2 et 4, son axe de symétrie a pour équation $x = 3$.
Le point $(0, 8)$ est sur la parabole. Son image, par une réflexion par rapport à la droite d'équation $x = 3$, est le point $(6, 8)$. Donc $a = 6$.

Solution 2

Puisque la parabole a pour abscisses à l'origine 2 et 4, son équation est de la forme $y = A(x-2)(x-4)$.
Puisque le point $(0, 8)$ est sur la parabole, on a $8 = A(-2)(-4)$, d'où $A = 1$.
L'équation est donc $y = (x-2)(x-4)$, ou $y = x^2 - 6x + 8$.
Puisque le point $(0, 8)$ est sur la parabole, on a :

$$8 = a^2 - 6a + 8$$
$$0 = a^2 - 6a$$
$$0 = a(a-6)$$

Puisque $a \neq 0$, alors $a = 6$. RÉPONSE : $a = 6$

b) *Solution 1*

Puisque l'équation admet deux racines égales, l'expression du membre de gauche doit être un carré parfait. Puisque le premier coefficient est 1 et que le deuxième coefficient est 6, l'expression doit être $(x+3)^2$, ou $x^2 + 6x + 9$. En comparant les expressions, on obtient $k = 9$.

Solution 2

Puisque l'équation du second degré admet deux racines égales, son discriminant est nul.
Donc $6^2 - 4(1)(k) = 0$, d'où $4k = 36$, ou $k = 9$. RÉPONSE : $k = 9$

c) Puisque le point $(1, 4)$ est sur la parabole, on a $4 = 1^2 - 3(1) + c$, d'où $c = 6$.
Pour déterminer les points d'intersection de la droite et de la parabole, on pose :

$$2x + 2 = x^2 - 3x + 6$$
$$0 = x^2 - 5x + 4$$
$$0 = (x-1)(x-4)$$

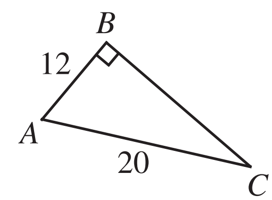
Donc $x - 1 = 0$ ou $x - 4 = 0$. Les points d'intersection ont donc pour abscisse respective $x = 1$ et $x = 4$. On reporte $x = 4$ dans l'équation $y = 2x + 2$ pour obtenir $y = 10$.
Le deuxième point d'intersection est donc $(4, 10)$.

2. a) On écrit l'équation sous la forme :

$$3\sin(x) = \cos(15°)$$
$$\sin(x) = \frac{1}{3}\cos(15°)$$
$$\sin(x) \approx 0,3220$$

Donc $x = 18,8^\circ$. RÉPONSE : $x = 18,8^\circ$

b) *Solution 1*



Puisque $\sin C = \dfrac{AB}{AC}$, alors $AB = AC\sin C$, d'où $AB = 20\left(\frac{3}{5}\right)$, ou $AB = 12$.

D'après le théorème de Pythagore, on a $BC^2 = AC^2 - AB^2$, d'où $BC^2 = 20^2 - 12^2$, ou $BC^2 = 256$. Donc $BC = 16$.

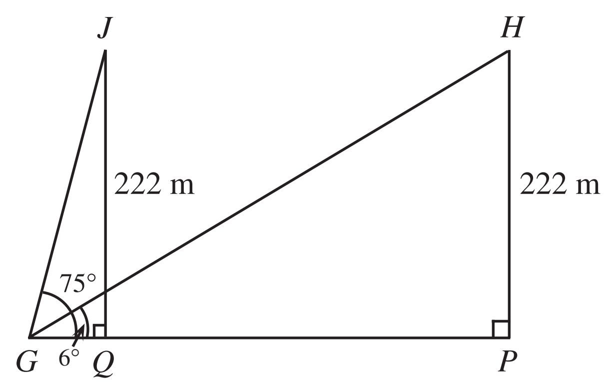
Solution 2

Puisque $\cos C = \dfrac{BC}{AC}$, alors $BC = AC\cos C$.

Puisque $\sin C = \frac{3}{5}$ et que $\cos^2 C = 1 - \sin^2 C$, alors $\cos^2 C = 1 - \frac{9}{25}$, d'où $\cos^2 C = \frac{16}{25}$, ou $\cos C = \frac{4}{5}$. (On remarque que $\cos C$ est positif puisque l'angle C est aigu.)

Donc $BC = 20\left(\frac{4}{5}\right)$, ou $BC = 16$. RÉPONSE : $BC = 16$

c) Soit G le point où se trouve la chèvre, H la position de l'hélicoptère lors de la première mesure, P le point sur terre directement en dessous de H, J la position de l'hélicoptère une minute plus tard et Q le point sur terre directement en dessous de J.



D'après la première position, on a $\tan(6°) = \dfrac{HP}{PG}$, d'où $PG = \dfrac{222}{\tan(6°)}$, ou $PG \approx 2112,19$ m.

D'après la deuxième position, on a $\tan(75°) = \dfrac{JQ}{QG}$, d'où $QG = \dfrac{222}{\tan(75°)}$, ou $QG \approx 59,48$ m.

Pendant la minute entre les deux mesures, l'hélicoptère a parcouru $2112,19 - 59,48$, ou 2052,71 m, c'est-à-dire 2,0527 km.

Dans une heure, l'hélicoptère parcourt $60(2{,}0527)$, ou 123,162 km.
L'hélicoptère avance donc à une vitesse de 123 km/h.

3. a) Puisqu'on cherche la valeur de $f(9)$, on pose $x = 3$ dans la formule de récurrence pour obtenir $f(9) = 2f(3) + 3$.
On a donc besoin de la valeur de $f(3)$. En posant $x = 0$ dans la formule de récurrence, on obtient $f(3)$ dans le membre de gauche et $f(0)$, dont on connaît la valeur, dans le membre de droite. On a donc $f(3) = 2f(0) + 3$, d'où $f(3) = 2(6) + 3$, ou $f(3) = 15$.
Donc $f(9) = 2(15) + 3$, ou $f(9) = 33$. RÉPONSE : $f(9) = 33$

b) *Solution 1*
On détermine les expressions pour $f(x)$ et $g(x)$ en résolvant le système d'équations.
On divise chaque membre de la deuxième équation par 2 pour obtenir
$f(x) + 2g(x) = x^2 + 2$.
On soustrait cette équation de la première pour obtenir $g(x) = x + 4$.
On reporte $g(x) = x + 4$ dans l'équation précédente pour obtenir $f(x) + 2(x+4) = x^2 + 2$, d'où $f(x) = x^2 - 2x - 6$.
On cherche les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = g(x)$:

$$x^2 - 2x - 6 = x + 4$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x-5)(x+2) = 0$$

Donc $x = 5$ ou $x = -2$.
Les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = g(x)$ sont -2 et 5.

Solution 2
Au lieu de résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, on résout l'équation $f(x) - g(x) = 0$. On cherche une expression pour $f(x) - g(x)$ en manipulant les équations données.
Après un peu de manipulations, on découvre que :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 2(2f(x) + 4g(x)) - 3(f(x) + 3g(x)) \\ &= 2\left(2x^2 + 4\right) - 3\left(x^2 + x + 6\right) \\ &= x^2 - 3x - 10 \end{aligned}$$

Posons $f(x) - g(x) = 0$. Donc $x^2 - 3x - 10 = 0$, ou $(x-5)(x+2) = 0$.
Donc $x = 5$ ou $x = -2$.
Les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = g(x)$ sont -2 et 5.

4. a) *Solution 1*

Soit A, B, C, D et E les cinq patineuses, D et E étant les Canadiennes.
Il y a 5 façons de choisir la gagnante. Pour chaque choix, il y a 4 choix pour la deuxième. Pour chacun de ces choix, il y a 3 choix pour la troisième et ainsi de suite. Il y a donc $5!$, soit $5\times4\times3\times2\times1$, ou 120 façons de placer les patineuses en ordre.
Si les Canadiennes ne remportent aucune médaille, A, B et C doivent prendre les trois premières positions, tandis que D et E doivent prendre les deux dernières.
Il y a $3!$, ou 6 façons de placer A, B et C dans les trois premières positions. Pour chacune de ces façons, il y a $2!$, ou 2 façons de placer D et E dans les deux dernières positions. Il y a donc 6×2, ou 12 façons de placer les patineuses de manière que les Canadiennes ne remportent aucune médaille.
La probabilité pour qu'aucune Canadienne ne remporte une médaille est égale à :

$$\frac{\text{nombre de positions où les Canadiennes ne remportent aucune médaille}}{\text{nombre total de façons de placer les patineuses en ordre}},$$

c'est-à-dire à $\frac{12}{120}$, ou $\frac{1}{10}$.

Solution 2

Soit A, B, C, D et E les cinq patineuses, D et E étant les Canadiennes. Dans une course, deux patineuses doivent terminer en 4^e et 5^e positions. Puisque les cinq patineuses ont la même chance de terminer dans n'importe quelle position, toutes les paires de patineuses ont la même chance de finir dans les 4^e et 5^e positions. Or on peut former dix paires de patineuses parmi les cinq finalistes, soit {A, B}, {A, C}, {A, D}, {A, E}, {B, C}, {B, D}, {B, E}, {C, D}, {C, E} et {D, E}.
Une seule de ces paires est formée de Canadiennes. La probabilité pour qu'aucune des Canadiennes ne remporte une médaille est donc égale à $\frac{1}{10}$, puisqu'il y a un choix sur dix.

RÉPONSE : $\frac{1}{10}$

b) *Solution 1*

Puisque le plus petit commun multiple de 3, 5, 10 et 15 est 30, on peut compter le nombre d'entiers, de 1 à 30, qui vérifient la condition et multiplier ce nombre par 10 pour obtenir le nombre d'entiers, de 1 à 300, qui vérifient la condition. En effet, si on ajoute un multiple de 30 à un entier qui vérifie la condition, le nouvel entier vérifiera aussi la condition. De plus, si on ajoute un multiple de 30 à un entier qui ne vérifie pas la condition, le nouvel entier ne vérifiera pas la condition.
De 1 à 30, les entiers 3, 5, 6, 9, 12, 18, 21, 24, 25 et 27 sont des multiples de 3 ou de 5, sans être des multiples de 10 ou de 15. Il y a 10 tels entiers.
Il y a donc 100 entiers, de 1 à 300, qui sont des multiples de 3 ou de 5, sans être des multiples de 10 ou de 15.

Solution 2

On détermine le nombre d'entiers en comptant attentivement.

Il y a 100 entiers, de 1 à 300, qui sont des multiples de 3.

Il y a 60 entiers, de 1 à 300, qui sont des multiples de 5.

On a donc 160 candidats. Or les multiples de 15 ont été comptés deux fois, soit comme multiples de 3 et comme multiples de 5. Il y a 20 entiers, de 1 à 300, qui sont des multiples de 15. Il faudra donc soustraire 40 candidats. Il en reste donc 120.

Les multiples de 10 ont été comptés une fois chacun comme multiples de 5. Il y a 30 entiers, de 1 à 300, qui sont des multiples de 10. Il faudra donc soustraire 30 candidats. Or certains de ces multiples ont déjà été enlevés, par exemple l'entier 30. Parmi les 30 multiples de 10, il y en a 10 qui sont des multiples de 15 et qui ont déjà été enlevés. Il reste donc 20 candidats à enlever.

Il reste donc 100 entiers qui sont des multiples de 3 ou de 5, sans être des multiples de 10 ou de 15.

5\. a) Puisque le signe change à tous les trois termes, il semble approprié d'examiner les termes en groupes de six.

La somme des 6 premiers termes est égale à $1+3+5-7-9-11$, ou -18.

La somme des 6 termes suivants est égale à $13+15+17-19-21-23$, ou -18.

On constate que chacun des trois premiers termes du deuxième groupe de 6 termes est 12 de plus que le terme correspondant du premier groupe. De même, chacun des trois derniers termes du deuxième groupe est 12 de moins que le terme correspondant du premier groupe. La somme du deuxième groupe est donc égale à celle du premier. Il en est de même pour les groupes subséquents de six termes.

Dans les 300 termes, il y a 50 groupes de six termes. La somme est donc égale à $50(-18)$, ou -900. RÉPONSE : -900

b) Soit a le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités. Selon les renseignements, on a :

$$a^2+10b=b^2+10a$$
$$a^2-b^2-10a+10b=0$$
$$(a+b)(a-b)-10(a-b)=0$$
$$(a-b)(a-b-10)=0$$

Donc $a=b$ ou $a+b=10$.

L'entier peut donc être égal à 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82 ou 91. Il suffit maintenant de déterminer les nombres premiers parmi ces nombres.

On rejète d'abord les multiples de 11 supérieurs à 11, ainsi que les nombres pairs. Il reste alors 11, 19, 37, 73 et 91.

Tous ces nombres sont premiers, à l'exception de 91 qui est égal à 13×7.

Les nombres premiers sont donc 11, 19, 37 et 73.

6. a) *Solution 1*

En 24 minutes, le nombre d'atomes initial de l'isotope A est diminué de moitié quatre fois. Le nombre initial d'atomes est donc 2^4, ou 16 fois le nombre d'atomes après 24 minutes.

Au début, il y a deux fois plus d'atomes d'isotope A que d'atomes d'isotope B. Au début, il y avait donc 8 fois plus d'atomes d'isotope B qu'après 24 minutes, ce dernier étant le même que le nombre d'atomes d'isotope A. Le nombre d'atomes d'isotope B a donc diminué de moitié 3 fois en 24 minutes. Les atomes de l'isotope B mettent donc 8 minutes pour diminuer de moitié.

Solution 2

Au début, il y a deux fois plus d'atomes d'isotope A que d'atomes d'isotope B. Soit $2x$ et x les nombres respectifs d'atomes au début.

Puisque les atomes d'isotope A diminuent de moitié à toutes les 6 minutes, après 24 minutes, le nombre d'atomes de cet isotope sera égal à $2x\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Soit T le nombre de minutes que mettent les atomes d'isotope B pour diminuer de moitié.

Après 24 minutes, le nombre d'atomes sera égal à $x\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{T}}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
2x\left(\frac{1}{2}\right)^4 &= x\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{T}} \\
\left(\frac{1}{2}\right)^3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{T}} \\
3 &= \frac{24}{T} \\
T &= 8
\end{aligned}$$

Les atomes de l'isotope B mettent donc 8 minutes pour diminuer de moitié.

RÉPONSE : 8 minutes

b) *Solution 1*

On utilise les lois $\log_{10} A + \log_{10} B = \log_{10} AB$ et $\log_{10} A - \log_{10} B = \log_{10} \frac{A}{B}$ pour écrire les deux équations sous la forme :

$$\begin{aligned}
\log_{10}\left(x^3y^2\right) &= 11 \\
\log_{10}\left(\frac{x^2}{y^3}\right) &= 3
\end{aligned}$$

On écrit ces équations sous forme exponentielle :

$$x^3y^2 = 10^{11}$$
$$\frac{x^2}{y^3} = 10^3$$

Selon la première équation, x est positif et selon la deuxième, y est positif.
Pour éliminer les y, on élève les deux membres de la première équation au cube et on élève les deux membres de la deuxième équation au carré :

$$x^9y^6 = 10^{33}$$
$$\frac{x^4}{y^6} = 10^6$$

On multiplie les deux équations, membre par membre, pour obtenir $x^{13} = 10^{39}$, d'où $x = 10^3$. On reporte $x = 10^3$ dans l'équation $x^3y^2 = 10^{11}$ pour obtenir $y^2 = 10^2$, d'où $y = \pm 10$. Or puisque y est positif, on a $y = 10$.
La solution du système est $x = 10^3$ et $y = 10$.

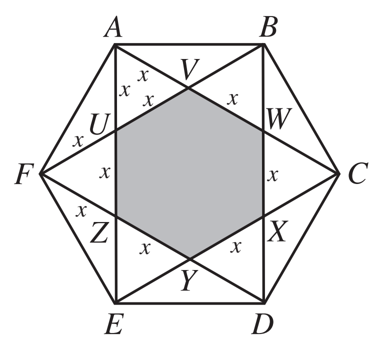
Solution 2
Puisque le domaine du logarithme est l'ensemble des nombres positifs, les expressions $\log_{10}\left(x^3\right)$ et $\log_{10}\left(y^3\right)$ indiquent que les valeurs de x et de y sont positives.
On utilise la loi $\log_{10}\left(a^b\right) = b\log_{10} a$ pour écrire les équations sous forme :

$$3\log_{10} x + 2\log_{10} y = 11$$
$$2\log_{10} x - 3\log_{10} y = 3$$

On multiplie chaque membre de la première équation par 3 et chaque membre de la deuxième équation par 2. On additionne les équations, membre par membre, pour obtenir $13\log_{10} x = 39$, ou $\log_{10} x = 3$. On reporte $\log_{10} x = 3$ dans la première équation pour obtenir $\log_{10} y = 1$.
Donc $x = 10^3$ et $y = 10$.

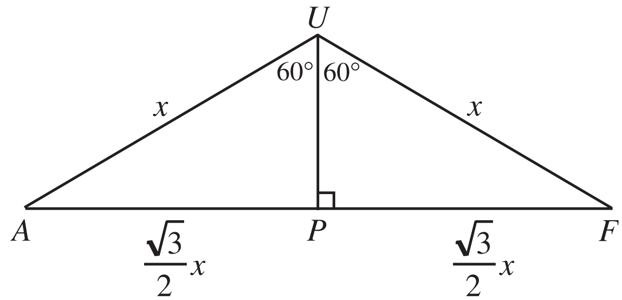
7. a) *Solution 1*

Soit U, V, W, X, Y et Z les sommets de l'hexagone ombré indiqués dans le diagramme.
Par symétrie, les triangles UVA, VWB, WXC, XYD, YZE et ZUF sont des triangles équilatéraux congruents.
Pour déterminer le rapport de l'aire des hexagones, on détermine d'abord le rapport de la longueur de leurs côtés.
Soit x la longueur des côtés de l'hexagone ombré. Donc $AU = UF = x$.



L'angle AUF est le supplément de l'angle AUV du triangle équilatéral UVA. Donc $\angle AUF = 120°$.

On abaisse une perpendiculaire UP du sommet U au côté AB. UP divise le triangle en deux triangles 30°-60°-90°. On a donc $AP = PF = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, d'où $AF = \sqrt{3}x$. Le rapport de la longueur des côtés des hexagones est égal à $\sqrt{3}x : x$, ou $\sqrt{3}:1$.

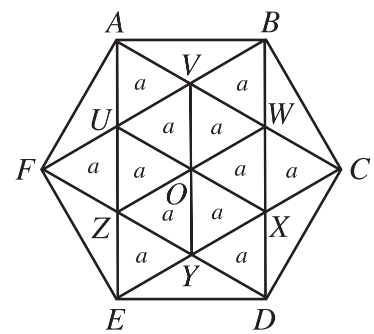


Le rapport de l'aire des hexagones est donc égal à $\left(\sqrt{3}\right)^2 : 1^2$, ou $3:1$.

Puisque le grand hexagone a une aire de 36, l'hexagone ombré a une aire de 12.

Solution 2

Soit U, V, W, X, Y et Z les sommets de l'hexagone ombré indiqués dans le diagramme.

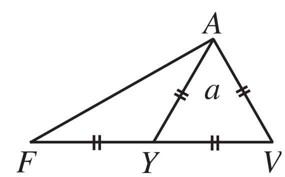


Par symétrie, les triangles UVA, VWB, WXC, XYD, YZE et ZUF sont des triangles équilatéraux congruents.

On trace les diagonales UX, VY et WZ de l'hexagone ombré. Ces diagonales sont concourantes en O. Ces diagonales divisent l'hexagone ombré en six triangles équilatéraux congruents aux triangles équilatéraux précédents.

Soit a l'aire de chacun de ces triangles. Le triangle AUF a aussi une aire de a.

En effet, puisque $FU = AU = UV$ (ce sont des longueurs des côtés de deux triangles équilatéraux congruents), AU est donc une médiane du triangle AFV et elle divise l'aire de ce triangle en deux aires égales.



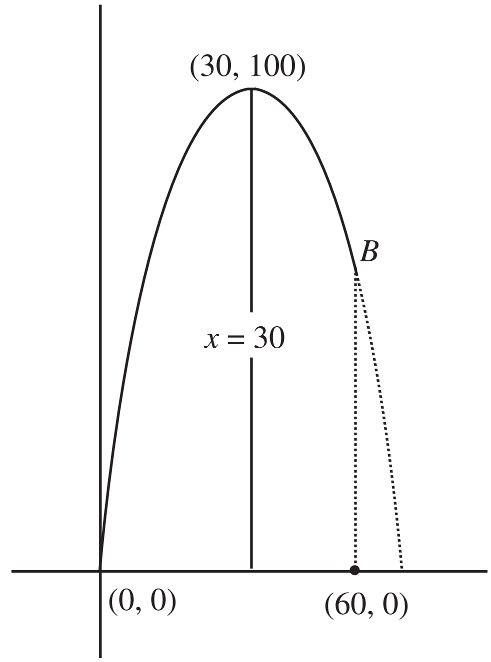
L'aire du triangle AFU est donc égale à a. Il en est de même pour les triangles AVB, BWC, CXD, DYE et EZF.

Le grand hexagone est donc divisé en 18 triangles ayant la même aire, a. Donc $a = 2$.

L'hexagone ombré est divisé en six triangles ayant une aire de 2. Son aire est donc égale à 12.

RÉPONSE : 12

b) On place un repère cartésien sur la trajectoire comme dans le diagramme. La bouche du canon est au point $(0,0)$. Puisque la hauteur maximale de 100 m est atteinte au-dessus d'un point au sol à 30 m du canon, l'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = 30$ et la parabole a pour abscisse à l'origine 60. L'équation de la parabole a donc la forme $y = ax(x-60)$. Puisque la parabole passe par le point $(30,100)$, on a $100 = a(30)(30-60)$, ou $100 = -900a$, d'où $a = -\frac{1}{9}$.
L'équation de la parabole est donc $y = -\frac{1}{9}x(x-60)$.



(On pourrait aussi dire que puisque la parabole a pour sommet $(30,100)$, elle a une équation de la forme $y = a(x-30)^2 + 100$. Puisqu'elle passe par le point $(0,0)$, on a $0 = a(0-30)^2 + 100$, ou $0 = 900a + 100$, d'où $a = -\frac{1}{9}$. L'équation de la parabole est donc $y = -\frac{1}{9}(x-30)^2 + 100$.)

Pour déterminer la distance horizontale du canon jusqu'au filet, posons $y = 64$, puisque Bibi s'accroche au filet à une hauteur de 64 m. On a donc :

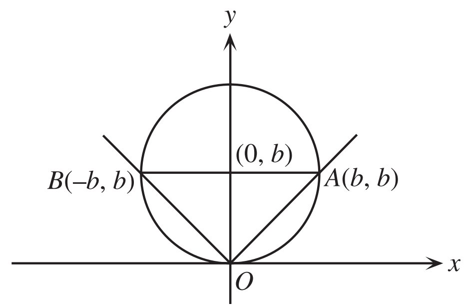
$$64 = -\frac{1}{9}x(x-60)$$
$$0 = x^2 - 60x + 576$$
$$0 = (x-12)(x-48)$$

Donc $x = 12$ ou $x = 48$.
Puisque Bibi s'est accrochée au filet après avoir atteint une hauteur maximale, on a $x = 48$. La distance horizontale du canon jusqu'au filet est égale à 48 m.

8. a) Puisque le cercle et la représentation graphique de $y = |x|$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, chaque point d'intersection est le symétrique d'un autre point d'intersection par rapport à l'axe des ordonnées. Puisque l'origine est un point d'intersection, il doit y avoir trois points d'intersection.
Soit $(0,b)$ le centre du cercle. Puisque le cercle passe par l'origine, son rayon est égal à b et b est positif. L'équation du cercle est donc $x^2 + (y-b)^2 = b^2$.
Pour déterminer un autre point d'intersection, on considère le premier quadrant. Dans ce quadrant, l'équation $y = |x|$ devient $y = x$. Au point d'intersection, on a :

$$x^2+(x-b)^2=b^2$$
$$2x^2-2bx=0$$
$$2x(x-b)=0$$

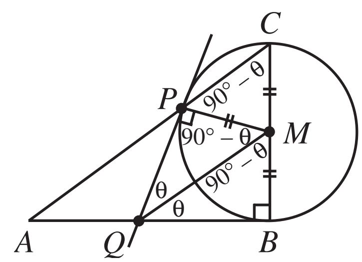
Donc $x=0$ ou $x=b$. On a donc un point d'intersection en $(0,0)$ et un autre en (b,b).
Par symétrie, il y a aussi un point d'intersection en $(-b,b)$.



Puisque le rayon du cercle est égal à b, l'aire du cercle est égale à πb^2.
Le triangle OAB a une base AB de longueur $2b$. Sa hauteur correspondante est la distance entre l'origine et le point $(0,b)$. Elle est égale à b. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}b(2b)$, ou b^2.
Le rapport de l'aire du triangle à l'aire du cercle est égal à $b^2:\pi b^2$, ou $1:\pi$.

b) *Solution 1*

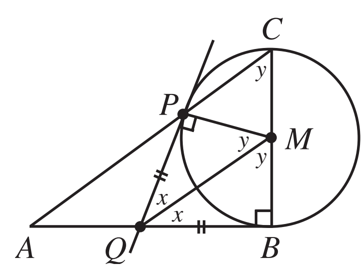
Puisque M est le milieu du côté BC et que le cercle a pour diamètre BC, son centre est M.
On joint P et M. Puisque PQ est tangent au cercle, PM est perpendiculaire à PQ.
Puisque PM et BM sont des rayons du cercle, $PM = MB$.
Puisque les triangles QPM et QBM sont rectangles et qu'ils ont deux paires de côtés congrus deux à deux, ils sont congruents.



Soit $\angle MQB = \angle MQP = \theta$. Donc $\angle QMB = \angle QMP = 90° - \theta$.
Donc $\angle PMC = 180° - \angle PMQ - \angle BMQ$, d'où $\angle PMC = 180° - (90° - \theta) - (90° - \theta)$, ou $\angle PMC = 2\theta$.
Or le triangle PMC est isocèle, car les côtés PM et CM sont des rayons.
Donc $\angle CPM = \frac{1}{2}(180° - \angle PMC)$, d'où $\angle CPM = 90° - \theta$.
Donc $\angle CPM = \angle PMQ$. Puisque les droites AC et QM sont coupées par la sécante PM et que $\angle CPM = \angle PMQ$, les segments AC et QM sont parallèles.

Solution 2

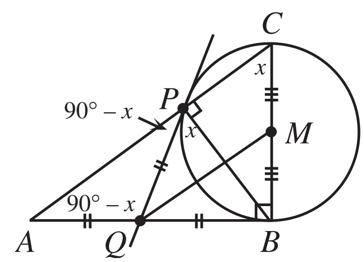
On trace le segment PM.
Puisque les tangentes QP et QB se coupent en Q, alors $QP = QB$.
Puisque le segment QM joint le point d'intersection des tangentes et le centre du cercle, alors par symétrie, $\angle PQM = \angle BQM$ et $\angle PMQ = \angle BMQ$.



Soit $\angle PQM = \angle BQM = x$ et $\angle PMQ = \angle BMQ = y$.
Puisque le triangle QMB est rectangle, $x + y = 90°$.

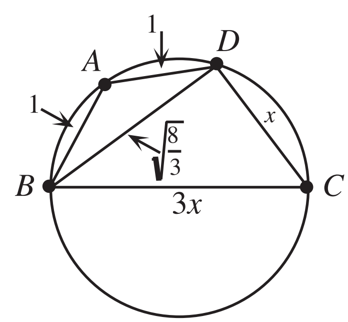
Puisque l'angle au centre PMB, de mesure $2y$, intercepte la corde PB, l'angle inscrit PCB mesure y.
Donc $\angle ACB = \angle QMB$ et QM est donc parallèle à AC.

Solution 3



On trace le segment PB.
L'angle QPB, formé par la tangente QP et la corde PB, et l'angle inscrit PCB, qui intercepte la corde, sont congrus. Soit $\angle QPB = \angle PCB = x$.
Puisque BC est un diamètre, $\angle CPB = 90°$. Donc $\angle APB = 90°$. Donc $\angle APQ = 90° - x$.
D'après le triangle ABC, $\angle BAC = 90° - x$. Dans le triangle APQ, on a donc $\angle APQ = \angle PAQ = 90° - x$. Le triangle est donc isocèle et $AQ = PQ$.
Puisque QP et QB sont des tangentes, alors $QP = QB$. Donc $AQ = QB$ et Q est le milieu du segment AB.
Le segment QM joint les milieux de deux côtés du triangle ABC. Il est donc parallèle au côté AC. (Ce résultat est bien connu. On peut le démontrer facilement en démontrant que les triangles ABC et QBM sont semblables, d'où $\angle CAB = \angle MQB$.)

9. *Solution 1*



On considère le triangle ABD. Puisqu'on connaît la longueur de deux de ses côtés et le cosinus de l'angle qu'ils forment, on peut déterminer la longueur du côté BD au moyen de la loi du cosinus.

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{BA^2 + AD^2 - 2(BA)(AD)\cos\angle BAD} \\ &= \sqrt{2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

Soit $x = \cos\angle ABC$. Donc $CD = x$.
Puisque le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible, $\angle ADC = 180° - \angle ABC$.
Donc $\cos\angle ADC = -\cos\angle ABC$, d'où $\cos\angle ADC = -x$.
De même, $\cos\angle BCD = -\cos\angle BAD$, d'où $\cos\angle BCD = \frac{1}{3}$.
On utilise simultanément la loi des cosinus dans les triangles ADC et ABC, puisque le côté AC est commun au deux triangles.

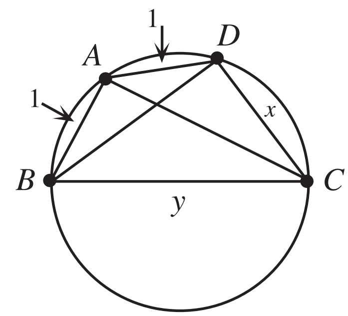
$$1^2 + x^2 - 2(1)(x)\cos\angle ADC = 1^2 + BC^2 - 2(1)(BC)\cos\angle ABC$$
$$1^2 + x^2 - 2(1)(x)(-x) = 1^2 + BC^2 - 2(1)(BC)(x)$$

On tentera d'exprimer BC en fonction de x.

$$0 = BC^2 - 2(BC)x - 3x^2$$
$$0 = (BC - 3x)(BC + x)$$

Donc $BC = 3x$ ou $BC = -x$. Ce dernier résultat est rejeté car x et BC sont positifs.
Puisque les longueurs des côtés CD et BC sont dans un rapport $1:3$ et que $\cos\angle BCD = \frac{1}{3}$, le triangle BCD doit être rectangle. (On pourrait aussi utiliser la loi du cosinus pour démontrer que $BD^2 = 8x^2$, d'où $CD^2 + BD^2 = BC^2$.)
Puisque le triangle BCD est rectangle en D, le côté BC est un diamètre du cercle circonscrit.

Solution 2
Soit $x = CD = \cos\angle ABC$ et $y = BC$.



Puisque les angles opposés d'un quadrilatère inscriptible sont supplémentaires, leurs cosinus sont l'opposé l'un de l'autre. Donc $\cos\angle ADC = -x$ et $\cos\angle BCD = \frac{1}{3}$.
On utilise simultanément la loi des cosinus dans les triangles ADC et ABC, puisque le côté AC est commun au deux triangles. On fait de même dans les triangles ADB et CDB, puisque le côté BD est commun aux deux triangles.
On a donc :

$$\begin{aligned} 1^2 + x^2 - 2(1)(x)\cos\angle ADC &= 1^2 + y^2 - 2(1)(y)\cos\angle ABC \\ 1 + x^2 - 2x(-x) &= 1 + y^2 - 2y(x) \\ 0 &= y^2 - 2xy - 3x^2 \\ 0 &= (y-3x)(y+x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos\angle BAD &= x^2 + y^2 - 2xy\cos\angle BCD \\ 2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) &= x^2 + y^2 - 2xy\left(\frac{1}{3}\right) \\ \frac{8}{3} &= x^2 + y^2 - \frac{2}{3}xy \end{aligned}$$

D'après la première équation, on a $y = 3x$ ou $y = -x$. Cette dernière est rejetée puisque x et y représentent des longueurs et leurs valeurs doivent alors être positives. On reporte $y = 3x$ dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} &= x^2 + (3x)^2 - \frac{2}{3}x(3x) \\ \frac{8}{3} &= 8x^2 \\ x^2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Puisque x est positif, on a $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Donc $y = \frac{3}{\sqrt{3}}$, ou $y = \sqrt{3}$.

Selon la loi du cosinus, employée ci-haut dans le triangle ABD, on a $BD = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Dans le triangle BCD, on a donc $BC = \sqrt{3}$, $CD = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $BD = \sqrt{\frac{8}{3}}$. Donc $BC^2 = CD^2 + BD^2$ et le triangle est donc rectangle en D. BC est donc le diamètre du cercle.

10. a) Pour démontrer que 8 est un entier sauvage, on doit partager les entiers de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ en trois ensembles qui vérifient les critères.

Puisque la somme des entiers de 1 à 8 est égale à 36, la somme des éléments des ensembles A, B et C doit être égale à 12 selon le premier critère.

Selon le quatrième critère, l'ensemble C doit contenir les nombres 3 et 6.

Selon le deuxième critère, l'ensemble A ne peut contenir que 1, 3, 5 et 7. Puisque la somme de ses éléments est égale à 12 et puisque 3 appartient à C, on a $A = \{5, 7\}$.

Pour que C contienne 3 et 6 et que la somme de ses éléments soit égale à 12, on doit avoir $C = \{1, 2, 3, 6\}$. On a alors $B = \{4, 8\}$ et les trois ensembles satisfont aux quatre critères.

Donc 8 est un entier sauvage.

b) On adopte la stratégie suivante : On place d'abord les multiples de 3 dans l'ensemble C, on place ensuite les autres nombres pairs dans l'ensemble B et on place tous les autres nombres, de 1 à n, dans l'ensemble A. La somme des éléments des ensembles ne sera pas la même, mais on pourra probablement faire bouger certains nombres d'un ensemble à un autre de manière que les sommes soient égales. (On remarquera qu'il est impossible d'ajouter des éléments à A ou à B et qu'il est impossible d'en enlever de C.) On utilisera le symbole $|C|$ pour représenter la somme des éléments de l'ensemble C.

Puisqu'on considère les entiers n pairs et que l'on veut examiner les multiples de 3 , de 1 à n, il semble utile de considérer n comme un nombre de la forme $6k$, $6k+2$ ou $6k+4$, k étant un entier strictement positif. Cela nous permettra de déterminer rapidement le plus grand multiple de 3 dans l'ensemble.

1er cas : $n = 6k$

Dans ce cas, C contient au départ tous les entiers 3, 6, 9, …, $6k$. On voit que la somme des éléments de C est supérieure à un tiers de la somme des entiers de 1 à $6k$. Puisqu'il est impossible d'enlever des éléments de C, il est impossible de faire en sorte que la somme des éléments soit la même pour A, B et C. Dans ce cas, n ne peut être un entier sauvage.

2e cas : $n = 6k+4$

La somme des entiers de 1 à n, c'est-à-dire de 1 à $6k+4$, est égale à $\dfrac{(6k+4)(1+6k+4)}{2}$, c'est-à-dire à $18k^2+27k+10$, ou $3\left(6k^2+9k+3\right)+1$. Cette somme n'est pas divisible par 3 et le premier critère ne peut être respecté. Dans ce cas, n ne peut être un entier sauvage.

3e cas : $n = 6k+2$

La somme des entiers de 1 à n, c'est-à-dire de 1 à $6k+2$, est égale à $\dfrac{(6k+2)(6k+3)}{2}$, ou $18k^2+15k+3$. Pour que la somme des éléments soit la même pour A, B et C, elle devra être égale à $6k^2+5k+1$.

Puisque C contient au moins les entiers 3, 6, 9, …, $6k$, $|C|$ est supérieure ou égale à $3(1+2+3+\ldots+2k)$, c'est-à-dire à $3\frac{(2k)(2k+1)}{2}$, ou $6k^2+3k$.

Puisque A contient au plus les entiers 1, 3, 5, 7, …, $6k+1$, mais qu'il ne contient pas les multiples impairs de 3, soit les entiers 3, 9, 15, …, $6k-3$, alors :

$$\begin{aligned}|A| &\le (1+3+5+\ldots+6k+1)-(3+9+\ldots+6k-3)\\ &= \frac{(3k+1)[1+(6k+1)]}{2}-\frac{k[3+(6k-3)]}{2}\\ &= (3k+1)(3k+1)-k(3k)\\ &= 6k^2+6k+1\end{aligned}$$

Puisque B contient au plus les entiers 2, 4, 6, …, $6k+2$, mais qu'il ne contient pas les multiples pairs de 3, soit les entiers 6, 12, 18, …, $6k$, alors :

$$\begin{aligned}|B| &\le (2+4+6+\ldots+6k+2)-(6+12+18+\ldots+6k)\\ &= \frac{(3k+1)[2+(6k+2)]}{2}-\frac{k(6+6k)}{2}\\ &= (3k+1)(3k+2)-k(3+3k)\\ &= 6k^2+6k+2\end{aligned}$$

Pour que la somme des éléments soit la même pour A, B et C, il manque $2k+1$ à $|C|$. De plus, il faudra enlever k à $|A|$ et il faudra enlever $k+1$ à $|B|$. Puisqu'on suppose que n est un entier sauvage, il est possible de le faire. Puisque B ne contient que des entiers pairs, $k+1$ doit être pair et k doit donc être impair. On peut donc écrire $k=2l+1$, pour un entier l quelconque. On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{n+4}{12} &= \frac{(6k+2)+4}{12}\\ &= \frac{6(2l+1)+6}{12}\\ &= l+1\end{aligned}$$

Donc, $\frac{n+4}{12}$ est un entier.

On a donc démontré que si n est un entier sauvage pair, alors $\frac{n+4}{12}$ est un entier.

c) D'après b), pour que n soit un entier sauvage pair il faut que $\frac{n+4}{12}$ soit un entier. Les seuls entiers pairs, inférieurs à 100, qui vérifient cette condition sont 8, 20, 32, 44, 56, 68, 80 et 92. On sait déjà que 8 est un entier sauvage. On vérifie les autres possibilités en se référant à la solution de b). Après une première distribution, il fallait enlever k à $|A|$ et enlever $k+1$ à $|B|$. On utilise le tableau suivant.

n	k	Somme k qu'il faut soustraire de $\|A\|$	Somme $k+1$ qu'il faut soustraire de $\|B\|$	Est-il possible de le faire?
20	3	3	4	Non. On ne peut retirer de A des éléments dont la somme est 3.
32	5	5	6	Oui. On retire 5 de A et on retire 2 et 4 de B.
44	7	7	8	Oui. On retire 7 de A et 8 de B.
56	9	9	10	Non. On ne peut retirer de A des éléments dont la somme est 9.
68	11	11	12	Oui. On retire 11 de A et on retire 4 et 8 de B.
80	13	13	14	Oui. On retire 13 de A et 14 de B.
92	15	15	16	Non. On ne peut retirer de A des éléments dont la somme est 15.

Les seuls éléments sauvages inférieurs à 100 sont 8, 32, 44, 68 et 80.

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2002 Solutions

Concours Euclide

(12^e année – Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. a) *Solution 1* (À l'aide de la formule pour le milieu d'un segment)

Puisque M est le milieu du segment de droite qui joint R et S, alors l'abscisse de M est :

$$7=\frac{1+a}{2}$$
$$14=1+a$$
$$a=13$$

Solution 2 (À l'aide des pentes)

Puisque la pente de RM est égale à la pente de MS, alors :

$$\frac{3}{6}=\frac{3}{a-7}$$
$$a-7=6$$
$$a=13$$

Solution 3 (À l'aide des distances)

Puisque $RM=MS$, alors $RM^2=MS^2$, d'où :

$$6^2+3^2=(a-7)^2+3^2$$
$$0=a^2-14a+13$$
$$0=(a-13)(a-1)$$

Donc $a=13$ ou $a=1$. On rejette $a=1$, puisque le point $(1,10)$ n'est pas situé sur la droite.

Donc $a=13$. Réponse : $a=13$

b) Le triangle PQR a une base de 8 et une hauteur de $k-2$ (puisque $k>0$).

Puisque le triangle a une aire de 24 :

$$\frac{1}{2}(8)(k-2)=24$$
$$4k-8=24$$
$$4k=32$$
$$k=8$$

Réponse : $k=8$

c) On détermine d'abord le point d'intersection des droites définies par $y=2x+3$ et $y=8x+15$. Au point d'intersection, on a :

$$2x+3=8x+15$$
$$-12=6x$$
$$x=-2$$

On reporte $x=-2$ dans la première équation pour obtenir $y=2(-2)+3$, ou $y=-1$. Le point d'intersection est $(-2,-1)$. Puisque les trois droites sont concourantes, ce point vérifie l'équation de la troisième droite. Donc :

$$-1 = 5(-2) + b$$
$$b = 9$$

La valeur de b est 9.

2. a) *Solution 1*

Puisque $x = 4$ est une racine, alors $4^2 - 3(4) + c = 0$, d'où $c = -4$.
L'équation du second degré est $x^2 - 3x - 4 = 0$. On peut l'écrire sous forme $(x-4)(x+1) = 0$. (On remarque qu'il est facile de factoriser car on connaît une des racines au départ.) La deuxième racine est $x = -1$.

Solution 2

La somme des racines de l'équation $x^2 - 3x + c = 0$ est égale à $-\left(\frac{-3}{1}\right)$, ou 3. Puisqu'une des racines est égale à $x = 4$, l'autre doit être égale à $x = -1$.

Réponse : $x = -1$

b) *Solution 1*

Puisque les deux expressions sont identiques, elles doivent prendre les mêmes valeurs quelle que soit la valeur de x. Si on reporte $x = 2$, on obtient :

$$\frac{2(2^2)+1}{2^2-3} = 2 + \frac{A}{2^2-3}$$
$$9 = 2 + A$$
$$A = 7$$

Solution 2

On écrit la deuxième expression sous forme fractionnaire.

$$2 + \frac{A}{x^2-3} = \frac{2(x^2-3)}{x^2-3} + \frac{A}{x^2-3}$$
$$= \frac{2x^2 - 6 + A}{x^2-3}$$

On compare les deux expressions : $\dfrac{2x^2+1}{x^2-3} = \dfrac{2x^2-6+A}{x^2-3}$

Puisque les deux expressions sont identiques, les numérateurs doivent être identiques.
Donc $-6 + A = 1$, d'où $A = 7$.

Solution 3

On transforme la première expression :

$$\frac{2x^2+1}{x^2-3}=\frac{2x^2-6+7}{x^2-3}$$
$$=\frac{2\left(x^2-3\right)+7}{x^2-3}$$
$$=2+\frac{7}{x^2-3}$$

Donc $A=7$.

Réponse : $A=7$

c) *Solution 1*

On peut écrire l'équation de la parabole initiale sous la forme $y=\left(x-3\right)\left(x-1\right)$, ce qui indique que la parabole passe par les points $(3,0)$ et $(1,0)$.

Lorsqu'on fait subir à la parabole une translation de 5 unités vers la droite, ces points ont pour images respectives $(8,0)$ et $(6,0)$.

L'équation de l'image de la parabole est donc $y=(x-8)(x-6)$, ou $y=x^2-14x+48$.

Donc $d=48$.

Solution 2

On peut écrire l'équation de la parabole initiale sous la forme $y=\left(x-2\right)^2-1$, ce qui indique que le sommet de la parabole est le point $\left(2,-1\right)$. L'image de ce sommet par la translation est le point $\left(7,-1\right)$. Puisque ce point est sur l'image de la parabole, il en vérifie l'équation $y=x^2-14x+d$. Donc :

$$-1=7^2-14\left(7\right)+d$$
$$-1=49-98+d$$
$$d=48$$

[Voici une version plus facile de cette solution. Puisque $(7,-1)$ est le sommet de l'image, l'équation de l'image est $y=(x-7)^2-1$, ou $y=x^2-14x+48$. Donc $d=48$.]

Solution 3

Soit (X,Y) l'image du point (x,y) par la translation. Donc $(X,Y)=(x+5,y)$, ou $\left(x,y\right)=\left(X-5,Y\right)$. On reporte $\left(x,y\right)=\left(X-5,Y\right)$ dans l'équation de la parabole initiale pour obtenir :

$$Y=\left(X-5\right)^2-4\left(X-5\right)+3$$
$$=X^2-10X+25-4X+20+3$$
$$=X^2-14X+48$$

Cette équation définit une relation entre les coordonnées des points de l'image. On la compare à l'équation $y=x^2-14x+d$ pour obtenir $d=48$.

3. a) On écrit dans un tableau les valeurs possibles de a, b et c telles que $a = b + c$:

a	b	c
2	1	1
3	1	2
3	2	1
4	1	3
4	2	2
4	3	1

Il y a 6 résultats qui vérifient l'équation. La probabilité pour que l'enfant gagne un jouet est égale à $\frac{6}{64}$, ou $\frac{3}{32}$.

Réponse : $\frac{3}{32}$

b) Puisque le produit des trois entiers est égal à 216, alors :

$$a(ar)(ar^2) = 216$$
$$a^3r^3 = 216$$
$$(ar)^3 = 6^3$$
$$ar = 6$$

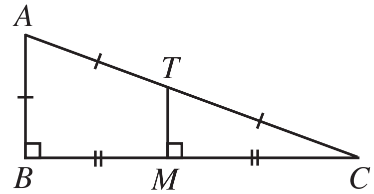
On sait que a est positif. Puisque la suite est croissante, $r > 1$. Donc $a < 6$.
On attribue à a les valeurs de 1 à 5. Dans chaque cas, on calcule la valeur de r, à partir de $ar = 6$, et celle de ar^2 qui doit être un entier.

a	r	ar	ar^2
1	6	6	36
2	3	6	18
3	2	6	12
4	$\frac{3}{2}$	6	9
5	$\frac{6}{5}$	6	$\frac{36}{5}$

Les suites qui vérifient les conditions sont :

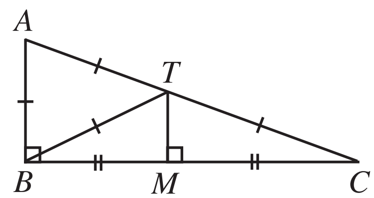
1, 6, 36;
2, 6, 18;
3, 6, 12;
4, 6, 9.

4. a) *Solution 1*



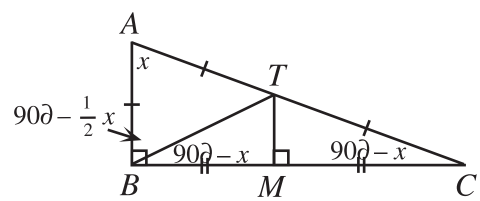
Puisque MT est la médiatrice de BC, alors $BM = MC$ et TM est perpendiculaire à BC.
Les triangles CMT et CBA sont semblables, puisqu'ils partagent un angle et qu'ils ont chacun un angle droit.
Puisque $\frac{CM}{CB} = \frac{1}{2}$, alors $\frac{CT}{CA} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{2}$, d'où $CT = AT = AB$.
Donc $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$, d'où $\sin(-ACB) = \frac{1}{2}$.
Donc $-ACB = 30^\circ$.

Solution 2



Puisque TM est parallèle à AB et que $CM = MB$, alors $CT = TA = AB$.
On joint le point T au point B.
Puisque $-ABC = 90^\circ$, alors AC est le diamètre d'un cercle de centre T et qui passe par les points A, C et B.
Donc $TA = TB = TC$ (ce sont des rayons), et le triangle ABT est donc équilatéral.
Donc $-BAC = 60^\circ$, d'où $-ACB = 30^\circ$.

Solution 3



On joint le point T au point B.
Soit $-BAC = x∂$. Donc $-ACB = 90^\circ - x∂$.
Comme dans la Solution 1 ou la Solution 2, le triangle ABT est isocèle. Donc $-ABT = 90^\circ - \frac{1}{2}x∂$.
Puisque les triangles TBM et TCM sont congruents (ils sont rectangles et ont deux paires de côtés congrus), alors $-TBC = -ACB = 90^\circ - x∂$.
On a :

$$-ABT + -TBC = 90∂$$

$$\left(90 - \frac{1}{2}x\right) + (90 - x) = 90$$

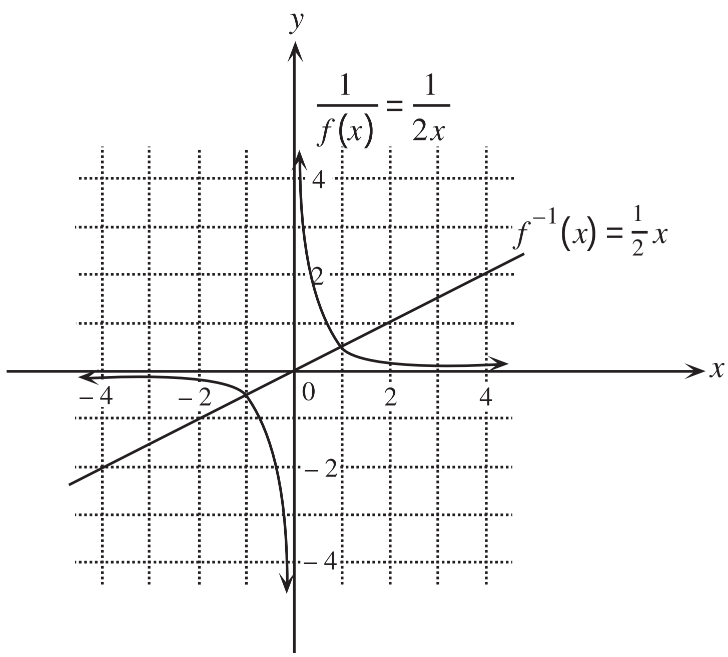
$$90 = \frac{3}{2}x$$

$$x = 60$$

Donc $-ACB = 30^\circ$.

Réponse : $-ACB = 30^\circ$

b) i



ii *Solution 1*

D'après les représentations graphiques, les points pour lesquels $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$ sont $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

Solution 2

On détermine d'abord les expressions qui définissent $f^{-1}(x)$ et $\frac{1}{f(x)}$.

Puisque *f* est définie par l'équation $y = 2x$, f^{-1} est définie par $x = 2y$, ou $y = \frac{1}{2}x$, ce qui donne $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.

De plus, $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x}$.

Pour les points d'intersection, posons :

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2x}$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

On reporte ces valeurs dans l'équation $y = \frac{1}{2}x$ pour obtenir les points $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

iii Puisque $f(x) = 2x$, alors $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)}\right) &= f^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) \\ &= f^{-1}(1) \\ &= \frac{1}{2}(1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a obtenu $f^{-1}(1)$ à partir de $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ ou de la représentation graphique.

5. a) On a :

$$\begin{aligned} \log_5(x+3) + \log_5(x-1) &= 1 \\ \log_5\big((x+3)(x-1)\big) &= 1 \\ \log_5\left(x^2 + 2x - 3\right) &= 1 \\ x^2 + 2x - 3 &= 5 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ (x+4)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x = -4$ ou $x = 2$. On peut reporter ces valeurs dans l'équation initiale pour vérifier que $x = 2$ est une solution et que $x = -4$ est rejeté, puisque le logarithme d'un nombre négatif n'est pas défini.

Réponse : $x = 2$

b) i On reporte les valeurs du tableau dans l'équation pour obtenir :

$$2{,}75 = a(3{,}00)^b$$

$$3{,}75 = a(6{,}00)^b$$

On peut procéder de deux façons pour déterminer b.

Méthode 1 pour déterminer b

On divise la deuxième équation par la première, membre par membre.

$$\frac{3,75}{2,75}=\frac{a(6,00)^b}{a(3,00)^b}$$

$$\frac{3,75}{2,75}=\frac{(6,00)^b}{(3,00)^b}$$

$$\frac{3,75}{2,75}=\left(\frac{6,00}{3,00}\right)^b$$

$$\frac{3,75}{2,75}=2^b$$

$$2^b\approx 1,363636$$

Donc :

$$\log\left(2^b\right)\approx\log(1,363636)$$

$$b\log(2)\approx\log(1,363636)$$

$$b\approx\frac{\log(1,363636)}{\log(2)}$$

$$b\approx 0,4475$$

Méthode 2 pour déterminer b

On a :

$$2,75=a(3,00)^b \qquad\qquad 3,75=a(6,00)^b$$

$$\log(2,75)=\log\left(a(3,00)^b\right) \qquad\qquad \log(3,75)=\log\left(a(6,00)^b\right)$$

$$\log(2,75)=\log(a)+\log\left((3,00)^b\right) \quad \text{et} \quad \log(3,75)=\log(a)+\log\left((6,00)^b\right)$$

$$\log(2,75)=\log(a)+b\log(3,00) \qquad\qquad \log(3,75)=\log(a)+b\log(6,00)$$

On soustrait la première équation de la deuxième, membre par membre :

$$\log(3,75)-\log(2,75)=b\left(\log(6,00)-\log(3,00)\right)$$

$$b=\frac{\log(3,75)-\log(2,75)}{\log(6,00)-\log(3,00)}$$

$$b\approx 0,4475$$

Quelle que soit la méthode choisie, on reporte cette valeur dans la première équation :

$$2,75\approx a(3,00)^{0,4475}$$

$$a\approx\frac{2,75}{(3,00)^{0,4475}}$$

$$a\approx 1,6820$$

Au centième près, on a $a=1,68$ et $b=0,45$.

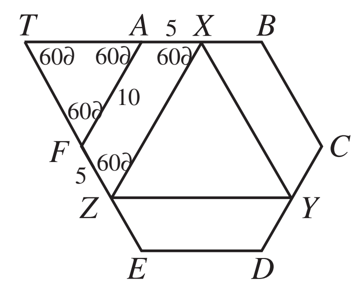
ii Pour déterminer le temps pour faire cuire une oie de 8,00 kg, on reporte $m = 8.00$ dans la formule :

$$\begin{aligned} t &= am^b \\ &\approx 1{,}68(8{,}00)^{0{,}45} \\ &\approx 4{,}2825 \end{aligned}$$

Il faudra faire cuire l'oie pendant environ 4,28 h.

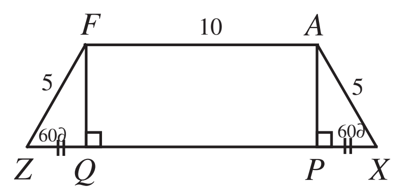
6\. a) *Solution 1*

On prolonge *XA* et *ZF* jusqu'au point d'intersection *T*.
Par symétrie, $\angle AXZ = \angle FZX = 60^\circ$ et $\angle TAF = \angle TFA = 60^\circ$. Les triangles TAF et TXZ sont donc équilatéraux.
Puisque $AF = 10$, alors $TA = 10$. Donc $TX = 15$. Puisque $XZ = TX$, alors $XZ = 15$.



Solution 2

On considère le quadrilatère *AXZF*.
Puisque *ABCDEF* est un hexagone régulier, $\angle FAX = \angle AFZ = 120^\circ$.
On a $AF = 10$. Puisque *X* et *Z* sont les milieux de côtés de l'hexagone, alors $AX = FZ = 5$.



Par symétrie, $\angle AXZ = \angle FZX = 60^\circ$ et *AXZF* est donc un trapèze.
On abaisse aux points *A* et *F* des perpendiculaires *AP* et *FQ* au côté *XZ*.
Par symétrie, $PX = QZ$. Donc :

$$\begin{aligned} PX &= AX\cos 60^\circ \\ &= 5\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Puisque *APQF* est un rectangle, $PQ = 10$. Donc :

$$\begin{aligned} XZ &= XP + PQ + QZ \\ &= \frac{5}{2} + 10 + \frac{5}{2} \\ &= 15 \end{aligned}$$

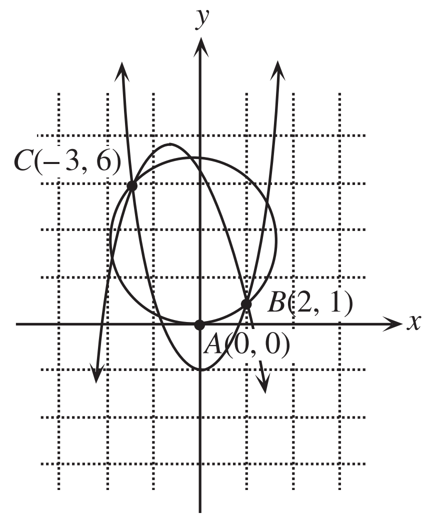
Réponse : $XZ = 15$

b) On détermine d'abord les coordonnées des trois points par lesquels passe le cercle.
Le premier point est l'origine, $(0,0)$.

Les deux autres points sont les points d'intersection des paraboles définies par $y = x^2 - 3$ et $y = -x^2 - 2x + 9$. Aux points d'intersection, on a :

$$\begin{aligned} x^2 - 3 &= -x^2 - 2x + 9 \\ 2x^2 + 2x - 12 &= 0 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x+3)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

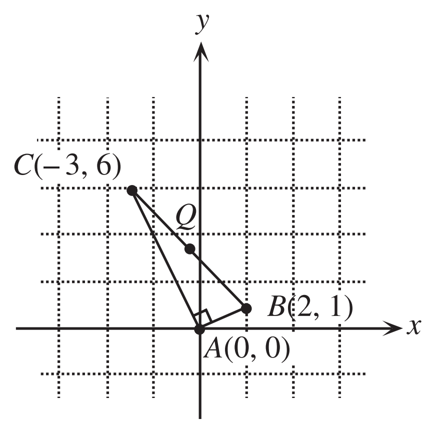
Donc $x = -3$ ou $x = 2$.
On reporte ces valeurs dans une des équations.
Si $x = 2$, on a $y = 2^2 - 3$, ou $y = 1$. Si $x = -3$, on a $y = (-3)^2 - 3$, ou $y = 6$. Les points d'intersection sont $(2,1)$ et $(-3,6)$.
Le cercle passe donc par les points $A(0,0)$, $B(2,1)$ et $C(-3,6)$.
Soit $Q(a,b)$ le centre du cercle.



Il y a plusieurs façons de déterminer les coordonnées du centre du cercle.

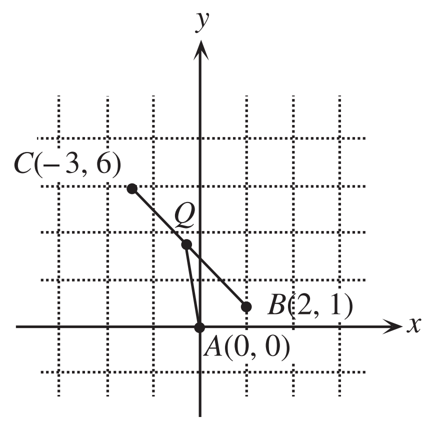
Méthode 1 $(\angle CAB = 90^\circ)$

On remarque que le segment AB a une pente de $\frac{1}{2}$ et que le segment AC a une pente de -2. Puisque le produit de ces pentes est égal à -1, les segments sont perpendiculaires. Donc $\angle BAC = 90^\circ$.
Puisque BC est une corde du cercle et qu'au point A, sur le cercle, l'angle BAC mesure 90°, alors BC est un diamètre du cercle. Le centre du cercle est donc le milieu du diamètre BC, c'est-à-dire le point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.



Méthode 2 (Rayons congrus)

Puisque Q est équidistant des points A, B et C, alors $QA^2 = QB^2 = QC^2$, ou $a^2 + b^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 = (a+3)^2 + (b-6)^2$.



D'après la première équation, on a :

$$a^2 + b^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2$$
$$4a + 2b = 5 \quad (1)$$

D'après la deuxième équation, on a :

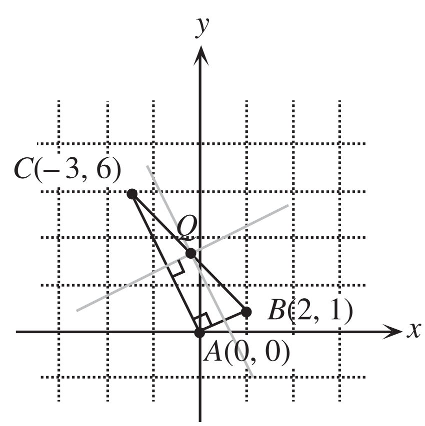
$$(a-2)^2 + (b-1)^2 = (a+3)^2 + (b-6)^2$$
$$-10a + 10b = 40$$
$$b = a + 4 \quad (2)$$

Puisque Q vérifie les équations (1) et (2), on reporte $b = a + 4$ dans l'équation (1) pour obtenir $4a + 2(a+4) = 5$, d'où $6a = -3$, ou $a = -\frac{1}{2}$. Donc $b = -\frac{1}{2} + 4$, ou $b = \frac{7}{2}$.

Le centre du cercle est le point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Méthode 3 (Médiatrices)

On détermine les équations des médiatrices des cordes AB et AC du cercle. Le centre est le point d'intersection de ces droites..



Puisque AB a une pente de $\frac{1}{2}$, sa médiatrice a une pente de -2. Puisque le milieu de AB a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, l'équation de la médiatrice est $y - \frac{1}{2} = -2(x-1)$, ou $y = -2x + \frac{5}{2}$.

Puisque AC a une pente de -2, sa médiatrice a une pente de $\frac{1}{2}$.

Puisque le milieu de AB a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$, l'équation de la médiatrice est $y - 3 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)$, ou $y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$.

Au point d'intersection de ces médiatrices, on a :

$$-2x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$$
$$-\frac{5}{4} = \frac{5}{2}x$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

Donc $y = -2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}$, ou $y = \frac{7}{2}$ et les coordonnées du centre sont $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

7. a) *Solution 1*

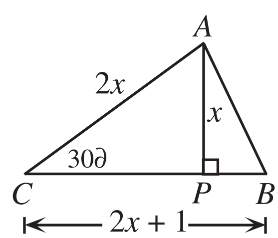
On utilise une formule bien connue pour l'aire d'un triangle : $A = \frac{1}{2}ab\sin C$

$$18 = \frac{1}{2}(2x+1)(2x)\sin 30^\circ$$
$$36 = (2x+1)(2x)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$0 = 2x^2 + x - 36$$
$$0 = (2x+9)(x-4)$$

Donc $x = 4$ ou $x = -\frac{9}{2}$. Puisque x doit être positif, alors $x = 4$.

Solution 2

On trace la hauteur AP. Dans le triangle APC, on a :



$$AP = AC\sin 30^\circ = 2x\left(\frac{1}{2}\right) = x$$

Aire du triangle $ABC = \frac{1}{2}(BC)(AP)$

$$18 = \frac{1}{2}(2x+1)(x)$$
$$0 = 2x^2 + x - 36$$
$$0 = (2x+9)(x-4)$$

Donc $x = 4$ ou $x = -\frac{9}{2}$. Puisque x doit être positif, alors $x = 4$.

Réponse : $x = 4$

b) Soit L la longueur de l'échelle.

Donc $AC = L\cos 70^\circ$ et $BC = L\sin 70^\circ$.

De même, $A'C = L\cos 55^\circ$ et $B'C = L\sin 55^\circ$.

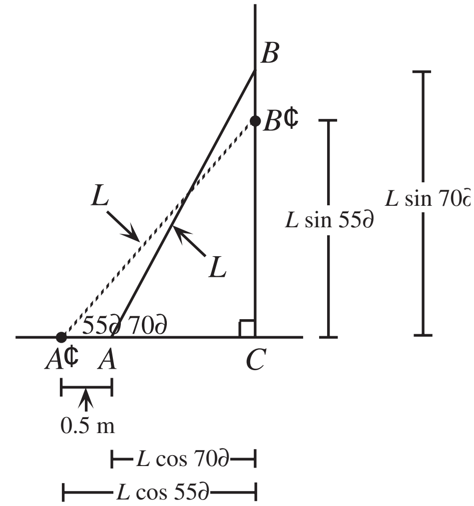
Puisque $A'A = 0{,}5$, alors :

$0{,}5 = L\cos 55^\circ - L\cos 70^\circ$

$$L = \frac{0{,}5}{\cos 55^\circ - \cos 70^\circ} \qquad (*)$$

Donc :

$$\begin{aligned} BB' &= BC - B'C \\ &= L\sin 70^\circ - L\sin 55^\circ \\ &= L\left(\sin 70^\circ - \sin 55^\circ\right) \\ &= \frac{(0{,}5)\left(\sin 70^\circ - \sin 55^\circ\right)}{\left(\cos 55^\circ - \cos 70^\circ\right)} \qquad \text{(à cause de (*))} \\ &\approx 0{,}2603 \text{ m} \end{aligned}$$



Au centimètre près, l'autre extrémité de l'échelle parcourt une distance de 26 cm le long du mur.

8. a) *Solution 1*

Le nombre total de parties est égal à $\frac{1}{2} \times 5 \times 20$, ou 50. En effet, chacune des 5 équipes joue 20 parties et si on calcule 5×20, on compte chaque partie deux fois.

À chaque partie, il y a une défaite ou un match nul.

D'après la colonne des défaites, le nombre de défaites est égal à $44 + y$. D'après la dernière colonne, le nombre de matchs nuls est égal à $\frac{1}{2}(11 + z)$, puisqu'à chaque match nul, on attribue le match nul à deux équipes. Donc :

$$\begin{aligned} 50 &= 44 + y + \tfrac{1}{2}(11 + z) \\ 100 &= 88 + 2y + 11 + z \\ 1 &= 2y + z \end{aligned}$$

Puisque y et z ne peuvent être négatifs, on a $z = 1$ et $y = 0$. Donc $x = 19$, puisque l'équipe E joue 20 parties.

Solution 2

Dans n'importe quelle partie, on attribue un match nul à chaque équipe ou une victoire à une équipe et une défaite à l'autre. Donc :

$$\begin{aligned} 25 + x &= 44 + y \\ x - y &= 19 \qquad (1) \end{aligned}$$

Puisque l'équipe E a joué 20 parties, alors :

$$x + y + z = 20 \qquad (2)$$

D'après l'équation (1), x doit être supérieur ou égal à 19. D'après l'équation (2), x doit être inférieur ou égal à 20.
De plus, on sait que le nombre total de matchs nuls attribués est pair. Donc $11+z$ est pair et z est donc impair.
Puisque x est supérieur ou égal à 19, alors selon l'équation (2), z doit être inférieur ou égal à 1.
Donc $z=1$. Donc $x=19$ et $y=0$.

Solution 3
Dans n'importe quelle partie, on attribue un match nul à chaque équipe ou une victoire à une équipe et une défaite à l'autre. Donc :

$$25+x=44+y$$

$$x-y=19 \qquad (1)$$

Puisque l'équipe E a joué 20 parties, alors :

$$x+y+z=20 \qquad (2)$$

D'après l'équation (1), x doit être supérieur ou égal à 19. D'après l'équation (2), x doit être inférieur ou égal à 20.
Supposons que $x=20$. D'après l'équation (2), $y=z=0$, ce qui contredit l'équation (1).
On doit donc avoir $x=19$. D'après l'équation (1), $y=0$. D'après l'équation (2), $z=1$.
(Ces trois valeurs vérifient les équations (1) et (2).)

b) *Solution 1*
Supposons qu'une telle suite existe : a, b, c, d. (Preuve par contradiction)
Puisque la somme de n'importe quels deux termes consécutifs est positive, on a $a+b>0$, $b+c>0$ et $c+d>0$. On additionne ces inégalités, membre par membre, pour obtenir $(a+b)+(b+c)+(c+d)>0$, ou $a+2b+2c+d>0$.
Or puisque la somme de n'importe quels trois termes consécutifs est négative, on a $a+b+c<0$ et $b+c+d<0$. On additionne ces inégalités, membre par membre, pour obtenir $(a+b+c)+(b+c+d)<0$, ou $a+2b+2c+d<0$.
On a une contradiction, puisque les deux conditions, $a+2b+2c+d>0$ et $a+2b+2c+d<0$, ne peuvent pas être vérifiées toutes les deux.
La supposition initiale doit donc être fausse. Il est donc impossible de créer une telle suite.

Solution 2
Supposons qu'une telle suite existe : a, b, c, d. (Preuve par contradiction)
On considère deux cas.

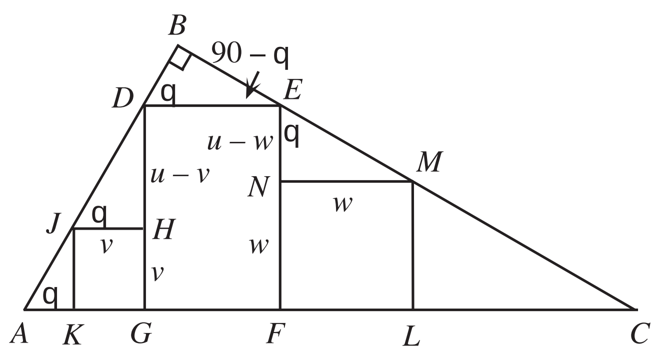
1[er] cas : $a \le 0$

Dans ce cas, on a $b > 0$, puisque $a + b > 0$.
Puisque $a + b + c < 0$, il faut donc que $c < 0$.
Puisque $c + d > 0$, alors $d > 0$.
Puisque $b > 0$ et $c + d > 0$, alors $b + c + d > 0$.
Or selon la définition de la suite, on doit avoir $b + c + d < 0$, ce qui est une contradiction.
Donc aucune telle suite n'existe si $a \le 0$.

2[e] cas : $a > 0$

Dans ce cas, on ne sait pas si b est positif ou négatif. Cependant, puisque $a + b > 0$ et $a + b + c < 0$, alors $c < 0$.
Puisque $c < 0$, $b + c > 0$ et $c + d > 0$, alors $b > 0$ et $d > 0$.
Puisque $c + d > 0$ et $b > 0$, alors $b + c + d > 0$.
On a de nouveau une contradiction.
Donc aucune telle suite n'existe si $a > 0$.

9. a) Soit $\angle BAC = \theta$. À cause des segments parallèles, on a $\angle DJH = \angle BDE = \theta$.
Donc $\angle BED = 90^\circ - \theta$, d'où $\angle NEM = \theta$, car $\angle DEF = 90^\circ$.
Puisque $DG = u$ et $HG = v$, alors $DH = u - v$.
De même, $EN = u - w$.

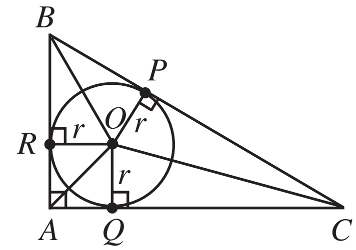


Dans les triangles DHJ et MNE, on a $\tan\theta = \dfrac{u - v}{v}$ et $\tan\theta = \dfrac{w}{u - w}$. Donc :

$$\frac{u - v}{v} = \frac{w}{u - w}$$
$$(u - v)(u - w) = vw$$
$$u^2 - uv - uw + vw = vw$$
$$u(u - v - w) = 0$$

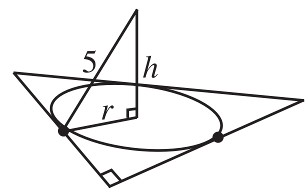
Puisque $u \neq 0$, alors $u - v - w = 0$, ou $u = v + w$.
[Remarque : Si $u = 0$, la hauteur du rectangle *DEFG* est nulle, c'est-à-dire que les points *D* et *A* coïncident, de même que les points *E* et *C*. On a alors $v = w = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a alors plus de carrés.]

b) On considère la section de la sphère par le plan qui contient le triangle. Cette section est un cercle. Ce cercle est tangent aux trois côtés du triangle. Il est donc le cercle inscrit dans le triangle. Soit *O* le centre du cercle et *r* son rayon. On cherche à déterminer la valeur de *r*.



On joint le point O aux trois points de tangence, P, Q et R, ainsi qu'aux trois sommets A, B et C. Les rayons OP, OQ et OR sont perpendiculaires aux côtés du triangle. On considère les triangles AOB, BOC et COA. Ces triangles ont des bases respectives de 15, 9 et 12 et une hauteur r. Puisque l'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles AOB, BOC et COA, alors :

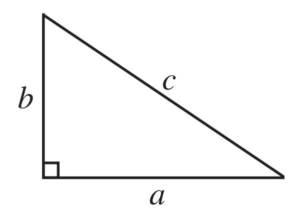
$$\frac{1}{2}(9)(12) = \frac{1}{2}(9)(r) + \frac{1}{2}(12)(r) + \frac{1}{2}(15)(r)$$
$$54 = \frac{1}{2}r(9+12+15)$$
$$r = 3$$



On joint le centre du cercle à celui de la sphère. Soit h la distance entre les deux centres. Le segment qui joint les centres est perpendiculaire au plan formé par le triangle. On a donc un triangle rectangle formé par les deux centres et n'importe quel point sur le cercle. D'après la relation de Pythagore :

$$h^2 + 3^2 = 5^2$$
$$h = 4$$

Le haut de la sphère est donc à une distance de 9 unités du plan formé par le triangle.



10. a) On considère un triangle de Pythagore dont les longueurs des côtés sont des entiers a, b et c qui vérifient $a^2 + b^2 = c^2$. Pour démontrer qu'il s'agit aussi d'un triangle de Héron, il suffit de démontrer que l'aire est un entier. Puisque celle-ci est égale à $\frac{1}{2}ab$, il suffit de démontrer que a ou b est un entier pair.

Supposons que a et b sont impairs. (Preuve par contradiction)
Puisque a^2 et b^2 sont impairs et que $a^2 + b^2 = c^2$, alors c^2 doit être pair.
Soit $a = 2k+1$, $b = 2l+1$ et $c = 2m$. Donc :

$$(2k+1)^2 + (2l+1)^2 = (2m)^2$$
$$4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 = 4m^2$$
$$4\left(k^2 + k + l^2 + l\right) + 2 = 4\left(m^2\right)$$

On remarque que le membre de droite est un multiple de 4, tandis que le membre de gauche ne l'est pas. On a donc une contradiction.
Donc *a* ou *b* doit être pair et l'aire du triangle est donc un entier.
Donc chaque triangle de Pythagore est aussi un triangle de Héron.

b) On examine les premiers triplets pythagoriciens et on remarque une régularité :

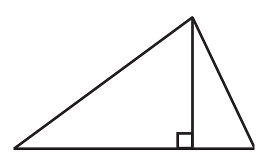
3	4	5	On a $3^2 = 4 + 5$.
5	12	13	On a $5^2 = 12 + 13$.
6	8	10	Ne suit pas la régularité.
7	24	25	On a $7^2 = 24 + 25$.

Il semble que l'on puisse former un triplet pythagoricien avec n'importe quel nombre impair supérieur à 1 comme longueur du plus petit côté.
On remarque aussi que les longueurs des deux autres côtés sont des entiers consécutifs dont la somme est égale au carré de la longueur du premier côté.
Cette régularité se poursuit-elle pour les autres nombres impairs?
Posons $a = 2k + 1$, $k \Delta 1$. (Cette formule génère tous les entiers impairs *a* supérieurs à 1.)
Est-il toujours possible de déterminer une valeur de *b* de manière que $c = b + 1$ et $a^2 + b^2 = c^2$?
On considère l'équation :

$$(2k+1)^2 + b^2 = (b+1)^2$$
$$4k^2 + 4k + 1 + b^2 = b^2 + 2b + 1$$
$$4k^2 + 4k = 2b$$
$$b = 2k^2 + 2k$$

Il est donc possible de déterminer une valeur de *b* pour que l'équation soit vérifiée.
Chaque entier impair *a* supérieur à 1 peut être la longueur d'un côté d'un triangle de Pythagore. Il suffit de définir $a = 2k + 1$, $b = 2k^2 + 2k$ et $c = 2k^2 + 2k + 1$. (On peut vérifier que ces nombres vérifient la relation $a^2 + b^2 = c^2$!)

c) On formera un triangle en joignant deux triangles de Pythagore le long d'un côté de même longueur. Puisque chaque triangle de Pythagore est aussi un triangle de Héron, le nouveau triangle aura des côtés de longueurs entières et une aire qui est un entier. Il sera donc un triangle de Héron. On fait de nouveau une liste de triplets pythagoriciens.



3	4	5
5	12	13
6	8	10
7	24	25
8	15	17

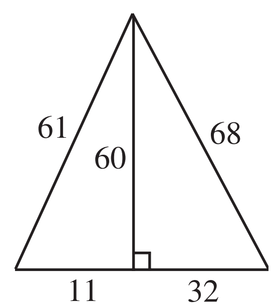
9	40	41
10	24	26
11	60	61

On sait que si on multiplie les longueurs des côtés de n'importe quel triangle de Pythagore par un même entier positif, on obtient un autre triangle de Pythagore. Ceci nous permettra de créer deux triangles de Pythagore ayant une longueur de côté commune.

Si on joint deux triangles de Pythagore le long d'un côté de longueur commune, l'hypoténuse de chaque triangle devient un côté du nouveau triangle. Puisqu'aucune longueur de côté du nouveau triangle ne peut être divisible par 3, 5, 7 ou 11, on ne peut utiliser les triangles 3-4-5, 6-8-10 ou 7-24-25 de la liste ci-dessus.

On multipliera les longueurs des côtés du triangle 8-15-17 par 4, pour obtenir un triangle 32-60-68 que l'on joindra au triangle 11-60-61 comme l'illustre le diagramme suivant. On obtient un triangle 43-61-68 dont l'aire est un entier, car sa hauteur est un nombre pair.

Le triangle 43-61-68 est donc un triangle de Héron.



[On remarquera qu'il s'agit du seul triangle de Héron qui vérifie la condition.]

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2000 Solutions

Concours Euclide

(12e année – Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

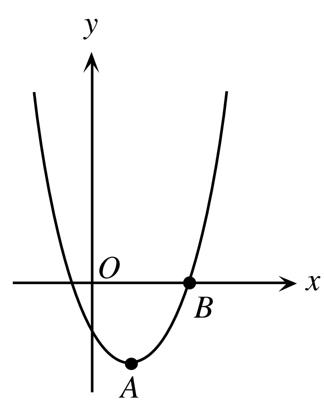
1. a) Si $x+27^{\frac{1}{3}}=125^{\frac{1}{3}}$, quelle est la valeur de x?

Solution
$125^{\frac{1}{3}}=5$ et $27^{\frac{1}{3}}=3$
L'équation est donc $x+3=5$, d'où $x=2$.

b) La droite d'équation $y=ax+c$ passe par le point $(1,5)$ et elle est parallèle à la droite d'équation $y=2x$. Quelle est la valeur de c?

Solution
La droite d'équation $y=2x$ a une pente de 2. Puisque les droites sont parallèles, l'autre droite a une pente de 2. Son équation a donc la forme $y=2x+c$. Puisque le point $(1,5)$ est sur la droite, $5=2(1)+c$, d'où $c=3$.

c) La parabole d'équation $y=(x-2)^2-16$ a pour sommet A et elle croise l'axe des x au point B, comme l'indique le diagramme. Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points A et B.

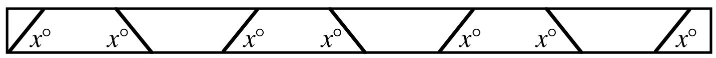


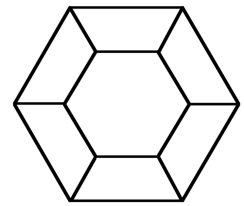
Solution
Pour un point sur l'axe des x, on a $y=0$, d'où $(x-2)^2-16=0$.

$$[(x-2)-4][(x-2)+4]=0$$

Donc $x=6$ ou $x=-2$.
Les coordonnées du point B sont donc $(6,0)$.
Le sommet de la parabole est le point $A(2,-16)$.
La droite qui passe par les points $A(2,-16)$ et $B(6,0)$ a pour pente $\frac{-16-0}{2-6}$, ou 4.
La droite a donc pour équation $\frac{y-0}{x-6}=4$, ou $y=4x-24$.

2. a) On a découpé six morceaux identiques d'une planche de bois, comme l'indique le premier diagramme. Chaque trait de scie a été fait à un angle de $x°$. Les morceaux sont ensuite rassemblés pour former un cadre hexagonal illustré dans le deuxième diagramme. Quelle est la valeur de x?



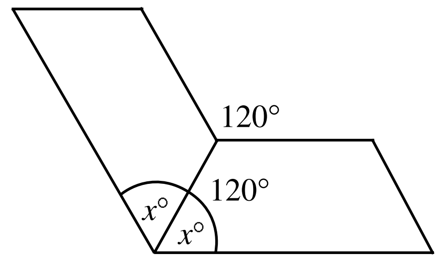


Solution

Chaque angle intérieur d'un hexagone régulier mesure 120°.

Lorsqu'on place deux morceaux pour former le cadre, on a : $2x = 120$ (en degrés)

$x = 60$



b) Si $\log_{10} x = 3 + \log_{10} y$, quelle est la valeur de $\frac{x}{y}$?

Solution

L'équation devient :

$$\log_{10} x - \log_{10} y = 3$$

$$\log_{10}\left(\frac{x}{y}\right) = 3$$

$$\frac{x}{y} = 10^3, \text{ ou } \frac{x}{y} = 1000$$

c) Si $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$, déterminer toutes les valeurs de l'expression $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Solution 1 'En prenant le carré de chaque membre'

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{13}{6}\right)^2$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{169}{36}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{169}{36} - \frac{72}{36}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{97}{36}$$

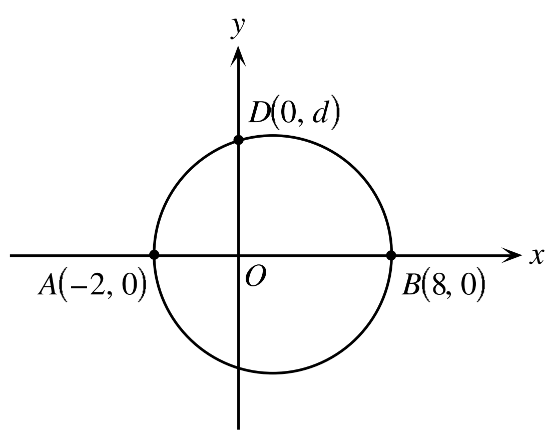
Solution 2 ‘En multipliant chaque membre par $6x$’

$$6x\left(x+\frac{1}{x}\right)=6x\left(\frac{13}{6}\right)$$
$$6x^2+6=13x$$
$$6x^2-13x+6=0$$
$$(3x-2)(2x-3)=0$$
$$x=\frac{2}{3} \text{ ou } x=\frac{3}{2}$$

Si $x=\frac{2}{3}$, alors : $x^2+\frac{1}{x^2}$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{4}{9}+\frac{9}{4}$$
$$=\frac{81+16}{36}$$
$$=\frac{97}{36}$$

Si $x=\frac{3}{2}$, alors : $x^2+\frac{1}{x^2}$
$$=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{9}{4}+\frac{4}{9}$$
$$=\frac{97}{36}$$

3. a) Le diagramme illustre un cercle de diamètre AB. Le cercle croise la partie positive de l’axe des y au point $D(0, d)$. Quelle est la valeur de d?



Solution 1

D’après le diagramme, le cercle a un rayon de 5 et son centre est le point $(3, 0)$. Donc :

$$(0-3)^2+(d-0)^2=5^2$$
$$9+d^2=25$$
$$d^2=16$$

Puisque $d>0$, $d=4$.

Solution 2

Puisque AB est un diamètre du cercle, l'angle ADB intercepte un demi-cercle et il est donc droit. De plus, $\angle AOD = 90°$.

Les triangles ADO et DBO sont donc semblables car deux de leurs angles sont congrus deux à deux.

Donc $\dfrac{OD}{AO} = \dfrac{BO}{OD}$, d'où $d^2 = 2(8)$.

Donc $d^2 = 16$

Puisque $d > 0$, $d = 4$.

Solution 3

Comme dans la solution 2, $\angle ADB = \angle AOD = \angle BOD = 90°$.

Dans le triangle AOD, on a donc $AD^2 = 4 + d^2$.

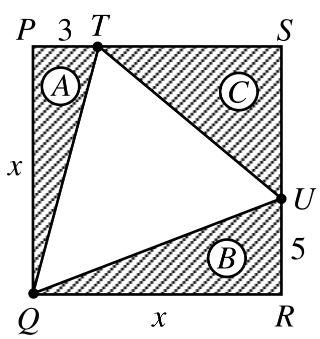
Dans le triangle BOD, on a $DB^2 = 64 + d^2$.

Dans le triangle ADB, on a $\left(4 + d^2\right) + \left(64 + d^2\right) = 100$.

$$2d^2 = 32$$

Puisque $d > 0$, $d = 4$.

b) Le diagramme illustre un carré $PQRS$, ayant des côtés de longueur x. Le carré est subdivisé en quatre régions triangulaires de manière que l'aire de Ⓐ + l'aire de Ⓑ = l'aire de Ⓒ. Si $PT = 3$ et $RU = 5$, déterminer la valeur de x.



Solution

Puisque les côtés du carré ont pour longueur x, $TS = x - 3$ et $US = x - 5$.

Aire du triangle $A = \dfrac{1}{2}(3)(x)$.

Aire du triangle $B = \dfrac{1}{2}(5)(x)$

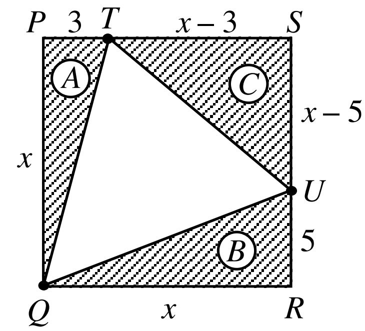
Aire du triangle $C = \dfrac{1}{2}(x-5)(x-3)$

D'après les renseignements :

$$\frac{1}{2}(3x)+\frac{1}{2}(5x)=\frac{1}{2}(x-5)(x-3)$$
$$3x+5x=x^2-8x+15$$
$$x^2-16x+15=0$$
$$(x-15)(x-1)=0$$
$$x=15 \text{ ou } x=1$$

Donc $x=15$, puisque $x=1$ est inadmissible.

Diagramme



4. a) On jette un dé juste, dont les numéros 1, 2, 3, 4, 6 et 8 sont inscrits sur ses six faces. Après ce jet, si un numéro impair paraît sur la face supérieure, tous les numéros impairs sur le dé sont doublés; si un numéro pair paraît sur la face supérieure, tous les numéros pairs sont divisés par 2. Si on jette un tel dé deux fois de suite, quelle est la probabilité d'obtenir un 2 sur le deuxième jet?

Solution

Deux résultats sont possibles sur le premier jet, soit pair et impair.

Première possibilité : 'Le premier jet donne un numéro impair'

La probabilité pour que le premier jet donne un numéro impair est égale à $\frac{1}{3}$.

On double alors tous les numéros impairs sur le dé pour obtenir 2, 2, 6, 4, 6, 8.

La probabilité d'obtenir un 2 sur le deuxième jet est égale à $\frac{1}{3}$.

La probabilité d'obtenir un numéro impair suivi d'un 2 est donc égale à $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$, ou $\frac{1}{9}$.

Deuxième possibilité : 'Le premier jet donne un numéro pair'

La probabilité pour que le premier jet donne un numéro pair est égale à $\frac{2}{3}$.

On divise alors tous les numéros pairs sur le dé pour obtenir 1, 1, 3, 2, 3, 4.

La probabilité d'obtenir un 2 sur le deuxième jet est égale à $\frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir un numéro pair suivi d'un 2 est donc égale à $\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}$, ou $\frac{1}{9}$.

Au départ, la probabilité d'obtenir un 2 sur le deuxième jet est égale à $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$, ou $\frac{2}{9}$.

b) Le tableau ci-dessous donne les résultats de fin de saison 1998 de sept équipes de la ligue de cricket d'Angleterre. À la fin de la saison, chaque équipe avait joué 17 matchs. Le nombre total de points remportés par chaque équipe est indiqué dans la dernière colonne. Chacune des V victoires rapporte v points, chacun des N matchs nuls rapporte n points, chacun des A lancers bonis rapporte a points et chacun des B bonis de batte rapporte b points, v, n, a et b étant des entiers strictement positifs. *Aucun point* n'est accordé pour une défaite. Déterminer les valeurs de v, n, a et b si le total des points est accordé selon la formule :
Points $= v \times V + n \times N + a \times A + b \times B$

Résultats de fin de saison

	V	*Défaites*	*N*	*A*	*B*	*Points*
Sussex	6	7	4	30	63	201
Warks	6	8	3	35	60	200
Som	6	7	4	30	54	192
Derbys	6	7	4	28	55	191
Kent	5	5	7	18	59	178
Worcs	4	6	7	32	59	176
Glam	4	6	7	36	55	176

Solution

On peut déterminer la valeur des inconnues de plusieurs façons.
La façon la plus efficace est de faire appel à des équations ayant plusieurs coefficients en commun. Voici une telle façon de s'y prendre.

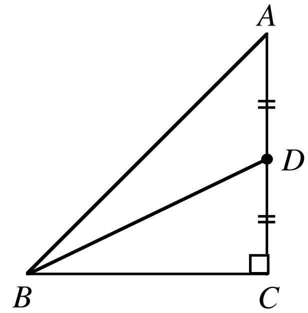
Les résultats de Sussex donnent l'équation : $6v + 4n + 30a + 63b = 201$
Les résultats de Som donnent l'équation : $6v + 4n + 30a + 54b = 192$
On soustrait, membre par membre, pour obtenir : $9b = 9$, d'où $b = 1$

Sachant que $b = 1$:
Les résultats de Derbys donnent l'équation : $6v + 4n + 28a + 55 = 191$
$$6v + 4n + 28a = 136 \qquad (1)$$
Les résultats de Sussex donnent l'équation : $6v + 4n + 30a + 63 = 201$
$$6v + 4n + 30a = 138 \qquad (2)$$
On soustrait, membre par membre, l'équation (1) de l'équation (2) pour obtenir $2a = 2$, d'où $a = 1$.
On peut déterminer les valeurs de n et de v en reportant $a = 1$ et $b = 1$ dans des équations appropriées.
Les résultats de Som donnent l'équation : $6v + 4n + 84 = 192$
$$6v + 4n = 108 \qquad (3)$$
Les résultats de Warks donnent l'équation : $6v + 3n + 95 = 200$

$$6v + 3n = 105 \qquad (4)$$

On soustrait, membre par membre, l'équation (4) de l'équation (3), pour obtenir $n = 3$.
On reporte $n = 3$ dans (3) pour obtenir $6v + 4(3) = 108$, d'où $v = 16$.
On a donc $v = 16$, $n = 3$, $a = b = 1$.

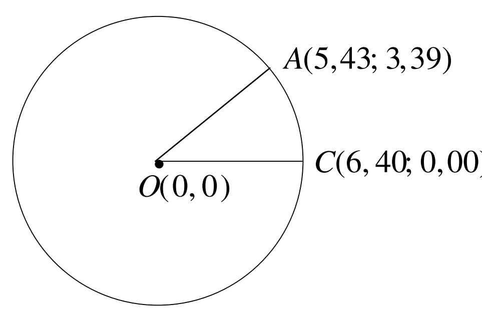
5. a) Dans le diagramme, on a $AD = DC$, $\sin \angle DBC = 0{,}6$ et $\angle ACB = 90°$. Quelle est la valeur de $\tan \angle ABC$?



Solution

Soit $DB = 10$.
Puisque $\sin \angle DBC = 0{,}6$, $DC = AD = 6$.
D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = 10^2 - 6^2$, ou 64.
Donc $BC = 8$.
Donc $\tan \angle ABC = \frac{12}{8}$, ou $\frac{3}{2}$.

b) Le diagramme représente une coupe transversale de la Terre. Les axes de coordonnées sont placés pour que le centre de la Terre soit situé au point $O(0, 0)$. Le Cap Canaveral est situé au point $C(6{,}40; 0{,}00)$. Une navette spaciale est forcée d'atterrir sur une île au point $A(5{,}43; 3{,}39)$. Chaque unité représente 1000 km. Déterminer la distance entre l'île et le Cap Canaveral, telle que mesurée sur la surface courbe de la Terre. Exprimer la réponse aux 10 km près.



Solution

$$\tan \angle AOC = \frac{3{,}39}{5{,}43}$$
$$\angle AOC = 31{,}98°$$

$$\overset{\frown}{AC} = \frac{31,98}{360}[(2\pi)(6,40)]$$
$$= 3,57 \text{ unités}$$

La distance est d'environ 3570 km.

6. a) L'expression $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x. Par exemple, $\lfloor 3 \rfloor = 3$ et $\lfloor 2,6 \rfloor = 2$. Si x est un nombre positif tel que $x\lfloor x \rfloor = 17$, quelle est la valeur de x?

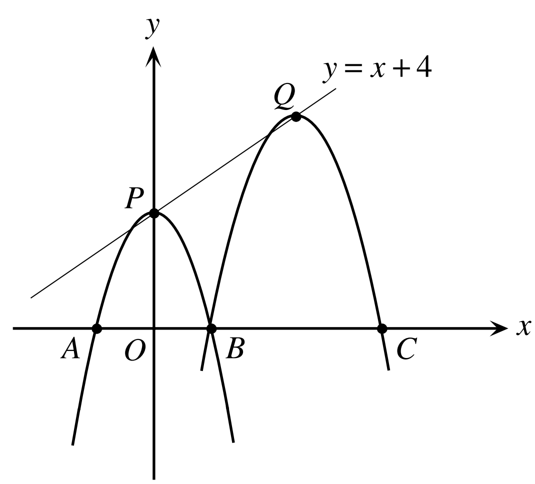
Solution

On peut conclure que $4 < x < 5$. En effet, si $x \le 4$, alors $x\lfloor x \rfloor \le 16$ et si $x \ge 5$, alors $x\lfloor x \rfloor \ge 25$.

Donc $\lfloor x \rfloor = 4$

L'équation $x\lfloor x \rfloor = 17$ devient $4x = 17$, d'où $x = 4,25$.

b) La parabole d'équation $y = -x^2 + 4$ a pour sommet P et elle croise l'axe des x aux points A et B. La parabole subit une translation de manière que son sommet se promène le long de la droite d'équation $y = x + 4$ jusqu'au point Q. Dans cette position, la parabole croise l'axe des x aux points B et C. Déterminer les coordonnées du point C.



Solution 1

La parabole d'équation $y = -x^2 + 4$ a pour sommet $P(0, 4)$ et elle croise l'axe des x aux points $A(-2, 0)$ et $B(2, 0)$.

Le point $B(2, 0)$, qui est aussi situé sur la deuxième parabole, est l'image d'un point B' sur la parabole initiale d'équation $y = -x^2 + 4$. Pour déterminer les coordonnées de B', on déterminera le point d'intersection de la droite de pente 1 qui passe au point $B(2, 0)$ et de la parabole d'équation $y = -x^2 + 4$.

L'équation de cette droite est $y = x - 2$.

Aux points d'intersection, on a : $x - 2 = -x^2 + 4$

$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

Donc $x = -3$ ou $x = 2$.

Si $x = 2$, alors $y = 0$, ce qui correspond au point B.

Si $x = -3$, alors $y = -5$. Les coordonnées de B' sont donc $(-3, -5)$.

Puisque le point $(-3, -5)$ a pour image le point $(2, 0)$, la translation qui transforme la

parabole d'équation $y = -x^2 + 4$ en une parabole de sommet Q est définie par
$(x, y) \to (x+5, y+5)$.

On peut compléter la solution de plusieurs façons.

1re façon
D'après la formule $(x, y) \to (x+5, y+5)$, $P(0, 4) \to Q(5, 9)$.

Puisque C est le symétrique du point B par rapport à l'axe de symétrique de la parabole, c.-à-d. la droite d'équation $x = 5$, les coordonnées du point C sont $(8, 0)$.

2e façon
Puisque les coordonnées de B' sont donc $(-3, -5)$, alors C' est le symétrique du point B' par rapport à l'axe des y. Les coordonnées de C' sont donc $(3, -5)$.
D'après la formule $(x, y) \to (x+5, y+5)$, les coordonnées du point C sont $(8, 0)$.

3e façon
D'après la formule $(x, y) \to (x+5, y+5)$, $P(0, 4) \to Q(5, 9)$.

L'équation de l'image de la parabole est donc $y = -(x-5)^2 + 9$.

Pour déterminer ses abscisses à l'origine, posons $-(x-5)^2 + 9 = 0$.

$$(x-5)^2 = 9$$
$$x - 5 = \pm 3$$

Donc $x = 8$ ou $x = 2$. Cette dernière est l'abscisse du point B.
Les coordonnées du point C sont $(8, 0)$.

Solution 2
La translation qui déplace la parabole de sommet P sur la parabole de sommet Q est exprimée par la formule $(x, y) \to (x+t, y+t)$, car la droite d'équation $y = x + 4$ a une pente de 1.
Le point $B(2, 0)$, situé sur la parabole de sommet Q, est l'image d'un point $B'(2-t, -t)$ sur la parabole de sommet P. Il vérifie donc l'équation de cette parabole.

$$-t = -(2-t)^2 + 4$$
$$-t = -4 + 4t - t^2 + 4$$
$$t^2 - 5t = 0$$
$$t(t-5) = 0$$

Donc $t = 0$ ou $t = 5$. On rejette $t = 0$ qui représente une translation nulle.
Les coordonnées du point B' sont $(-3, -5)$.
Soit $(c, 0)$ les coordonnées du point C.
Ce point est l'image d'un point de coordonnées $(c-5, -5)$ sur la parabole de sommet P.
Il vérifie donc son équation.

$$-5 = -(c-5)^2 + 4$$
$$(c-5)^2 = 9$$

Donc $c - 5 = 3$ ou $c - 5 = -3$.

$c = 8$ ou $c = 2$

Les coordonnées du point C sont $(8, 0)$.

Solution 3

La translation qui déplace la parabole de sommet P sur la parabole de sommet Q est exprimée par la formule $(x, y) \to (x + t, y + t)$, car la droite d'équation $y = x + 4$ a une pente de 1.

Puisque le sommet P a pour coordonnées $(0, 4)$, les coordonnées de Q sont $(p, p + 4)$.

L'équation de la parabole de sommet Q est donc $y = -(x - p)^2 + p + 4$.

Puisque le point $(2, 0)$ est sur cette parabole :

$$0 = -(2 - p)^2 + p + 4$$

$$p^2 - 5p = 0$$

$$p(p - 5) = 0$$

Donc $p = 0$ ou $p = 5$. La première solution est rejetée puisqu'elle représente la translation nulle.

Les coordonnées du point Q sont donc $(5, 9)$.

Comme dans la solution 1, les coordonnées du point C sont $(8, 0)$.

7. a) Un cube a des arêtes de longueur n, n étant un entier. Trois faces qui se rencontrent au même sommet sont peintes en rouge. On coupe ensuite le cube en n^3 petits cubes ayant des arêtes de longueur 1. Déterminer la valeur de n, sachant qu'exactement 125 de ces petits cubes n'ont aucune face rouge.

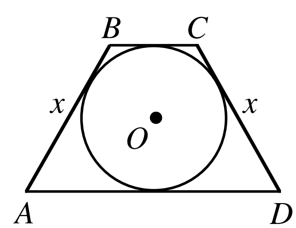
Solution

Si on retire les petits cubes qui ont au moins une face peinte en rouge, il reste un cube plus petit de dimensions $(n - 1) \times (n - 1) \times (n - 1)$.

Donc $(n - 1)^3 = 125$.

$$n = 6$$

b) On considère un trapèze isocèle $ABCD$ ayant une aire de 80 unités carrées et tel que $AB = CD = x$. Un cercle de centre O et de rayon 4 est tangent aux quatre côtés du trapèze. Déterminer la valeur de x.

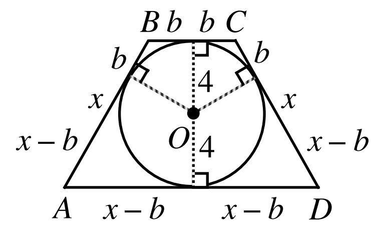


Solution

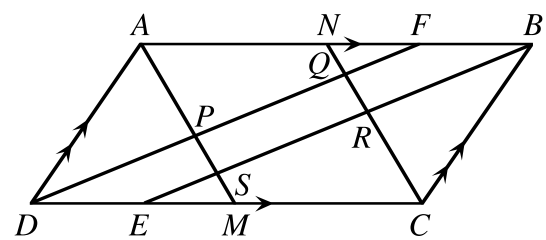
Le diagramme ci-contre indique les longueurs de certains segments. On a eu recours aux propriétés des tangentes à un cercle.

L'aire du trapèze $ABCD$ est égale à :

$$\frac{1}{2}(8)(BC + AD)$$
$$= 4(2b + 2x - 2b)$$
$$= 8x$$
Donc $8x = 80$.
$x = 10$

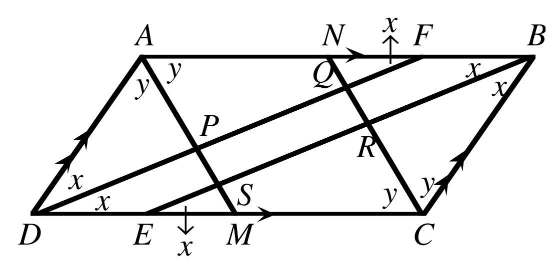


8. On considère un parallélogramme $ABCD$, où $AB = a$ et $BC = b$, $a > b$. Les points d'intersection des bissectrices des angles du parallélogramme forment un quadrilatère $PQRS$.
   a) Démontrer que $PQRS$ est un rectangle.
   b) Démontrer que $PR = a - b$.

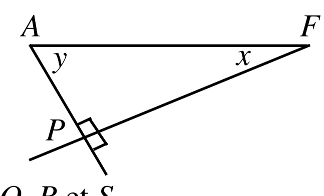


Solution

a) Les côtés opposés d'un parallélogramme sont congrus.
Puisque DF et BE sont les bissectrices de deux angles congrus, $\angle ADF = \angle CDF = \angle ABE = \angle CBE = x°$.
Puisque les angles sont alternes-internes, $\angle CDF = \angle AFD = x°$.
Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires.
Donc $2x + 2y = 180$, d'où $x + y = 90$.

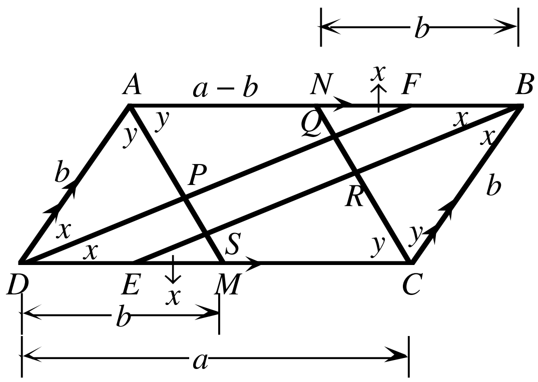


Donc dans le triangle PAF, $\angle APF = 90°$.



De la même manière, les angles sont droits aux points Q, R et S.
Le quadrilatère $PQRS$ est donc un rectangle.

b) Puisque AM est la bissectrice de l'angle DAB, $\angle DAM = \angle BAM = y°$.
Puisque ce sont des angles alternes-internes, $\angle DMA = \angle BAM = y°$.
Le triangle ADM est donc isocèle.
De la même manière, le triangle CBN est isocèle. On a donc les grandeurs suivantes.



$AN = a - b$

Les triangles ADM et CBN sont donc congruents.
Aussi, à cause des angles correspondants, les segments AM et NC sont parallèles.
Les triangles ADP et CBR sont semblables, puisque leurs angles sont congrus deux à deux.
Puisque $AD = BC$, les triangles sont congruents. Donc $AP = CR$.
Puisque le triangle CBR est isocèle, la bissectrice BR est aussi la médiatrice de CN.
Donc $QR = RC = AP$.
Le quadrilatère $APRN$ a donc des côtés, AP et RN, qui sont parallèles et congrus.
Il est donc un parallélogramme.
Puisque $AN = a - b$, alors $PR = a - b$.

9. Une permutation des entiers 1, 2, ..., n est un classement de ces entiers dans un certain ordre. Par exemple, $(3,1,2)$ et $(2,1,3)$ sont deux permutations des entiers 1, 2, 3. On dit qu'une permutation $(a_1, a_2, ..., a_n)$ des entiers 1, 2, ..., n est *fantastique* si $a_1 + a_2 + ... + a_k$ est divisible par k, pour ***chaque*** valeur de k de 1 à n. Par exemple, $(3,1,2)$ est une permutation fantastique de 1, 2, 3 car 3 est divisible par 1, $3+1$ est divisible par 2 et $3+1+2$ est divisible par 3. Par contre, la permutation $(2,1,3)$ n'est pas fantastique car $2+1$ n'est pas divisible par 2.
   a) Démontrer qu'il n'existe aucune permutation fantastique si $n = 2000$.
   b) Existe-t-il une permutation fantastique si $n = 2001$? Expliquer sa réponse.

Solution

a) Pour qu'il y ait une permutation fantastique lorsque $n = 2000$, il faut que $1+2+3+\ldots+2000$ soit divisible par 2000. Or :

$$\begin{aligned} 1+2+3+\ldots+2000 &= \frac{2000\times 2001}{2} \\ &= 1000\times 2001 \end{aligned}$$

Ce nombre n'est pas divisible par 2000.
Il n'existe donc aucune permutation fantastique si $n = 2000$.

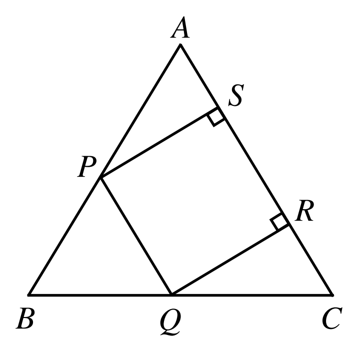
b) Soit la permutation $(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{2001})$.

$$\begin{aligned} t_1+t_2+t_3+\ldots+t_{2001} &= 1+2+3+\ldots+2001 \\ &= \frac{2001\times 2002}{2} \\ &= 2001\times 1001 \end{aligned}$$

Ce nombre est divisible par 2001.

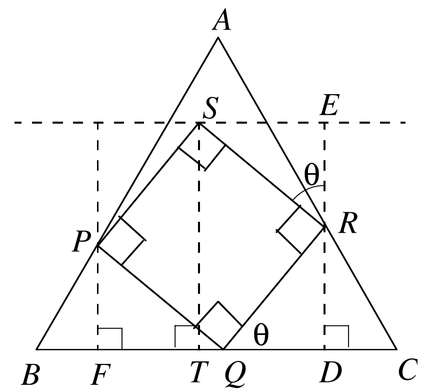
Si la permutation est fantastique, $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{2000}$ doit être divisible par 2000.
Puisque $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{2001} = 2001 \times 1001$, alors
$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{2000} = 2001 \times 1001 - t_{2001}$.
Puisque $2001 \times 1001 = 2\,003\,001$, t_{2001} doit être un entier de la forme $k001$, k étant un chiffre impair, pour que $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{2000}$ soit divisible par 2000.
Le seul entier, inférieur ou égal à 2001, qui vérifie cette propriété, est 1001.
Donc $t_{2001} = 1001$.
Donc $2001 \times 1001 = 2\,003\,001 - 1001$
$= 2\,002\,000$.
Si la permutation est fantastique, on doit obtenir un multiple de 1999 lorsqu'on soustrait t_{2000} de cette somme.
Or le plus grand multiple de 1999, inférieur à $2\,002\,000$, est 1999×1001, ou $2\,000\,999$.
Si tel est le cas, alors $t_{2000} = 2\,002\,000 - 2\,000\,999$, c'est-à-dire que $t_{2000} = 1001$. Ce résultat est impossible car $t_{2000} \neq t_{2001}$.
Si on choisit des multiples de 1999 qui sont inférieurs à $2\,002\,000$, alors les valeurs de t_{2000} seront supérieures à 2001, ce qui impossible.
Il n'existe donc aucune permutation fantastique si $n = 2001$.

10. Un triangle équilatéral ABC a des côtés de longueur 2. Un carré $PQRS$ est tel que le P est situé sur le côté AB, Q est situé sur le côté BC et les sommets R et S sont situés sur le côté AC. On fait bouger les points P, Q, R et S de manière que P, Q et R demeurent sur les côtés du triangle, tandis que le point S se déplace du côté AC au côté AB en passant par l'intérieur du triangle. Si les points P, Q, R et S forment continuellement les sommets d'un carré, démontrer que le chemin tracé par le point S est un segment de droite parallèle au côté BC.



Dans cette solution, on établit que la distance du point S à BC est égale à $s(\sin\theta + \cos\theta)$ et on démontre que cette expression est constante.

Solution



Soit $\angle RQC = \theta$. Au point S, on abaisse une perpendiculaire à BC jusqu'à T sur BC.
Donc $\angle PQB = 180° - 90° - \theta$, ou
$\angle PQB = 90° - \theta$.
Soit s la longueur d'un côté du carré.
Au point S, on trace une droite parallèle à la base BC.
Au point R, on trace un segment DE, perpendiculaire à BC, de D sur BC jusqu'à E sur la droite parallèle.
Au point P, on abaisse un segment perpendiculaire à BC, jusqu'au point F sur BC.
Dans le triangle RQD, on a $RD = s\sin\theta$.
Puisque $\angle QRD = 90° - \theta$, alors $\angle SRE = \theta$.
Dans le triangle SER, on a $ER = s\cos\theta$.
La distance de S à BC est égale à : $RD + ER = s\sin\theta + s\cos\theta$.
Il faut démontrer que cette expression est constante.
Nous allons exprimer les longueurs DC, DQ, TF et FB en fonction de s.

Puisque le triangle RDC est un triangle $30°$ - $60°$ - 90, $\dfrac{DC}{RD} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Puisque $RD = s\sin\theta$, alors $DC = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(s\sin\theta)$, ou $DC = \dfrac{\sqrt{3}}{3}s\sin\theta$.

Dans le triangle RDQ, $\dfrac{QD}{RQ} = \cos\theta$, d'où $QD = s\cos\theta$.

Dans le triangle PFQ, $\sin\theta = \dfrac{FQ}{s}$ et $\cos\theta = \dfrac{PF}{s}$, d'où $FQ = s\sin\theta$ et $PF = s\cos\theta$.

Dans le triangle PFB, $\dfrac{BF}{PF} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $BF = \dfrac{1}{\sqrt{3}}s\cos\theta$ ou $BF = \dfrac{\sqrt{3}}{3}s\cos\theta$.

Puisque $DC + QD + FQ + BF = 2$, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}s\sin\theta + s\cos\theta + s\sin\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{3}s\cos\theta = 2$.

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(s\cos\theta + s\sin\theta) + (s\cos\theta + s\sin\theta) = 2$$

$$s\cos\theta + s\sin\theta = \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)}$$

Donc $s\cos\theta + s\sin\theta$ est une constante et le chemin tracé par le point S est donc un segment de droite parallèle au côté BC.

Remarque Bon nombre de personnes nous ont fait part de l'impossibilité de résoudre le problème selon les données de l'énoncé. Si on lit bien l'énoncé, on doit conclure que les dimensions du carré *varient*, ce qui permet l'existence du carré pendant que les sommets bougent.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1999 Solutions

Concours Euclide

(12^{e} année – Sec. V)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

1. a) Si $x^{-1}=3^{-1}+4^{-1}$, quelle est la valeur de x?

Solution

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{x}=\frac{7}{12}$$
$$x=\frac{12}{7}$$

b) Si le point $P(-3,2)$ est situé sur la droite d'équation $3x+7ky=5$, quelle est la valeur de x?

Solution

Puisque P est situé sur la droite, ses coordonnées vérifient l'équation.
Donc : $3(-3)+7k(2)=5$

$$14k=14$$
$$k=1$$

c) Déterminer toutes les valeurs possibles de $1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}$, sachant que $x^2-x-2=0$.

Solution 1

$$x^2-x-2=0$$
$$(x-2)(x+1)=0$$
$$x=2 \text{ ou } x=-1$$

On reporte $x=2$ dans $1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}$ pour obtenir $1-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$, ou -1.
On reporte $x=-1$ dans $1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}$ pour obtenir $1+1-6$, ou -4.
Les valeurs possibles sont -1 et -4.

Solution 2

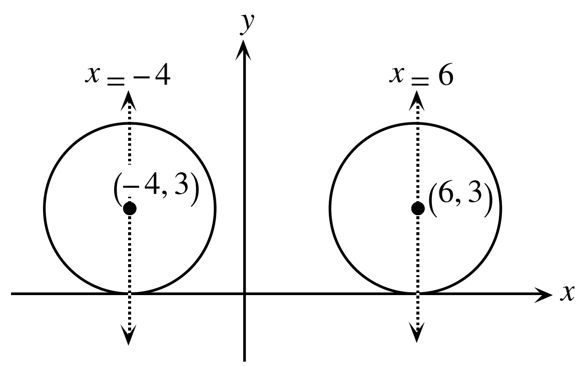
$$1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}=\frac{x^2-x-6}{x^2}$$
$$=\frac{\left(x^2-x-2\right)-4}{x^2}$$
$$=\frac{-4}{x^2} \quad (\text{puisque } x^2-x-2=0)$$

Or comme dans la solution 1, l'équation $x^2-x-2=0$ a pour solutions $x=2$ et $x=-1$.
On reporte $x=2$ dans $\frac{-4}{x^2}$ pour obtenir $\frac{-4}{4}$, ou -1.
On reporte $x=-1$ dans $\frac{-4}{x^2}$ pour obtenir $\frac{-4}{1}$, ou -4.

Les valeurs possibles sont –1 et –4.

2. a) On fait bouger le cercle d'équation $(x+4)^2+(y-3)^2=9$ horizontalement jusqu'à ce que son centre soit situé sur la droite d'équation $x=6$. Sur quelle distance le centre du cercle bouge-t-il?

Solution
Le cercle a pour centre le point $(-4, 3)$.
Comme l'indique le diagramme, le centre bouge sur une distance de 10 unités.

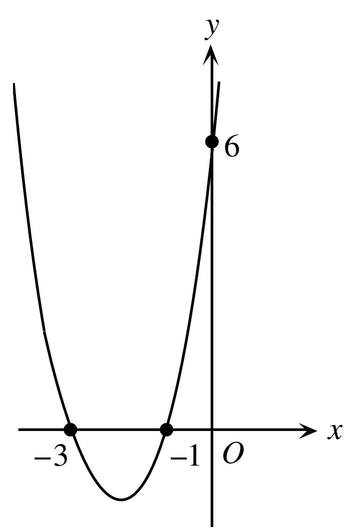


b) La parabole d'équation $y=(x-1)^2-4$ croise l'axe des *x* aux points *P* et *Q*. Soit (a, b) le milieu du segment PQ. Quelle est la valeur de *a*?

Solution 1
Aux points *P* et *Q*, on a $y=0$.
Donc $0=(x-1)^2-4$, d'où $x=3$ ou $x=-1$.
Le milieu du segment PQ a pour abscisse $a=\dfrac{3+(-1)}{2}$, ou $a=1$.

Solution 2
Puisque la parabole a pour sommet $(1, -4)$, alors par symétrie, $a=1$.

c) La courbe représente une fonction polynôme du second degré. Déterminer une équation qui représente cette fonction.



Solution 1

Soit $y = ax^2 + bx + c$ l'équation de la fonction.

Puisque les points $(-3, 0)$, $(-1, 0)$ et $(0, 6)$ sont sur la parabole, ils vérifient l'équation.

On reporte $(0, 6)$ dans l'équation pour obtenir $6 = 0 + 0 + c$, d'où $c = 6$.

On reporte $(-3, 0)$ et $(-1, 0)$ dans l'équation $y = ax^2 + bx + 6$ pour obtenir :

$0 = 9a - 3b + 6$

et $0 = a - b + 6$

On résout le système pour obtenir $a = 2$, $b = 8$.

L'équation est $y = 2x^2 + 8x + 6$.

Solution 2

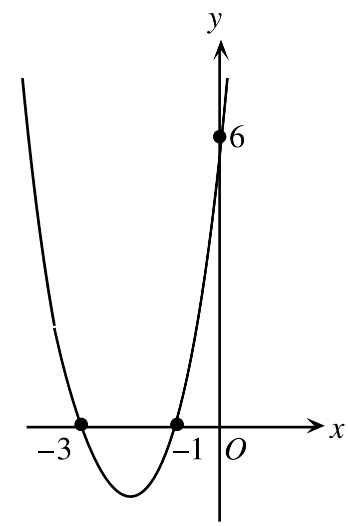
Puisque la courbe a pour abscisses à l'origine -3 et -1, son équation a la forme $y = k(x+3)(x+1)$.

Puisque le point $(0, 6)$ est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation. Donc :

$6 = k(0+3)(0+1)$

$k = 2$

L'équation est $y = 2(x+3)(x+1)$.



Solution 3

Par symétrie, le sommet de la parabole a pour abscisse -2.

Son équation a donc la forme $y = a(x+2)^2 + c$.

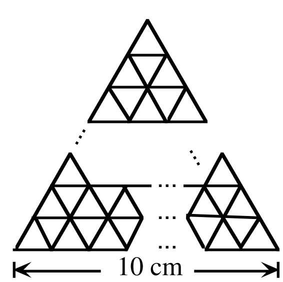
Puisque le point $(0, 6)$ est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation : $6 = 4a + c$

Puisque le point $(-1, 0)$ est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation : $0 = a + c$

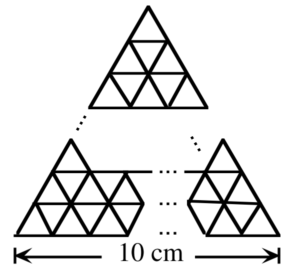
On résout le système pour obtenir $a = 2$, $c = -2$.

L'équation est $y = 2(x+2)^2 - 2$.

3. a) On place des triangles équilatéraux ayant des côtés de 1 cm comme dans le diagramme. Combien faut-il de ces triangles pour recouvrir l'intérieur d'un triangle équilatéral ayant des côtés de 10 cm?



Solution1



On procède rangée par rangée pour découvrir une régularité. Dans la première rangée du haut, il y a 1 triangle. Dans les deux premières rangées, il y a 2^2, ou 4 triangles. Dans les trois premières rangées, il y a 3^2, ou 9 triangles. Donc dans les 10 premières rangées, il y a 10^2, ou 100 triangles.

Solution 2

Puisque le grand triangle est semblable au petit, le rapport des aires de ces triangles est égal au rapport des carrés des longueurs des côtés, c'est-à-dire $10^2 : 1^2$ ou $100:1$. Le grand triangle contient donc 100 petits triangles.

b) Alphaville et Betaville avaient la même population à la fin de 1995. La population d'Alphaville a diminué de 2,9 % en 1996. Elle a augmenté de 8,9 % en 1997, puis elle a augmenté de 6,9 % en 1998. La population de Betaville a augmenté de $r\%$ à chacune de ces trois années. Si les deux villes ont encore des populations égales à la fin de 1998, déterminer la valeur de r au dixième près.

Solution

Soit P la population de chaque ville en 1995.
En 1996, la population d'Alphaville est égale à $P-(0,029)P$, ou $(0,971)P$.
En 1997, la population d'Alphaville est égale à $(0,971)P+(0,089)(0,971)P$, ou $(1,089)(0,971)P$.
En 1998, la population d'Alphaville est égale à $(1,089)(0,971)P+(0,069)(1,089)(0,971)P$, ou $(1,069)(1,089)(0,971)P$.

De même, en 1998, la population de Betaville est égale à $\left(1+\frac{r}{100}\right)^3 P$.

Puisque les deux villes ont encore des populations égales à la fin de 1998 :

$$(1,069)(1,089)(0,971)P=\left(1+\frac{r}{100}\right)^3 P$$

$$1,1303=\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$$

On peut procéder de deux façons :

1re façon

$$\sqrt[3]{1,1303}=1+\frac{r}{100}$$

$$1,0416=1+\frac{r}{100}$$

$$0,0416=\frac{r}{100}$$

$$r\approx 4,2$$

2^e^ façon

$$\log(1{,}1303) = \log\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$$

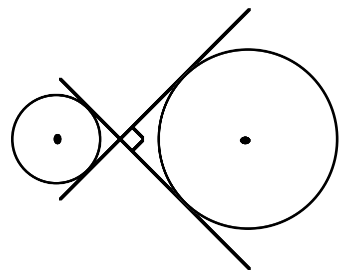
$$\log(1{,}1303) = 3\log\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$0{,}01773 = \log\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$1+\frac{r}{100} = 1{,}0416$$

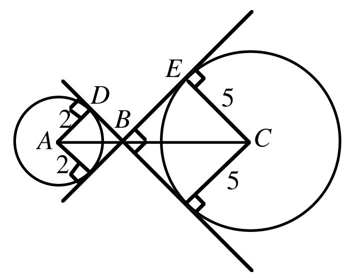
$$r \approx 4{,}2$$

4. a) Comme l'indique le diagramme, les tangentes aux cercles se croisent à un angle de $90°$. Si le petit cercle a un rayon de 2 et le grand cercle a un rayon de 5, quelle est la distance entre les centres des cercles?



Solution

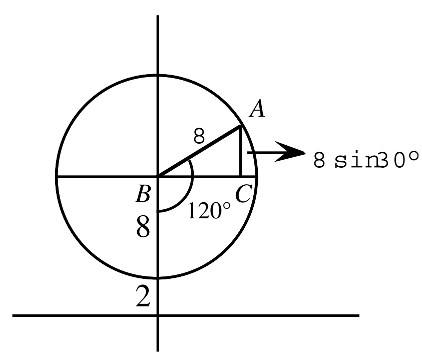
Les triangles *ABD* et *BCE* sont des triangles 90°-45°-45°. Ce sont donc des triangles isocèles rectangles. Les longueurs de leurs côtés sont donc dans le rapport $\sqrt{2}:1:1$. Donc $AB = 2\sqrt{2}$ et $BC = 5\sqrt{2}$.
La distance entre les centres est égale à $7\sqrt{2}$.



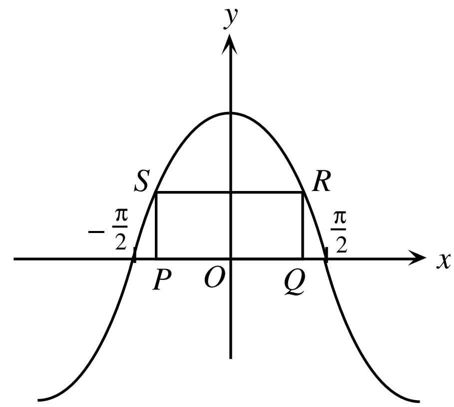
b) Une grande roue, dans une foire, a un rayon de 8 m et elle tourne à une vitesse de $12°$ par seconde. Au temps $t = 0$, un siège est situé au point le plus bas, à 2 m au-dessus du niveau du sol. Déterminer la hauteur du siège, par rapport au sol, au temps $t = 40$ secondes.

Solution

Au temps $t = 40$, la roue a tourné $40 \times 12°$, ou $480°$. Le siège est donc à $480° - 360°$, ou $120°$ de sa position de départ.
Soit *A* la position du siège au temps $t = 40$.
Le triangle ABC est rectangle et $AC = 8\sin 30°$, ou $AC = 4$.
La hauteur du siège, par rapport au sol, au temps $t = 40$ secondes, est égale à $4 + 8 + 2$, ou 14 m.

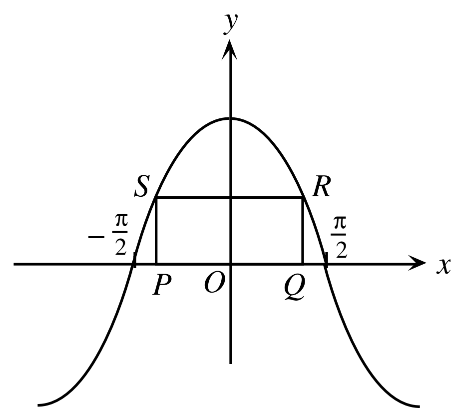


5. a) Le côté PQ du rectangle $PQRS$ est situé sur l'axe des x. Le rectangle touche la courbe définie par $y = k \cos x$ aux points S et R. Si le côté PQ a une longueur de $\frac{\pi}{3}$ et si le rectangle a une aire de $\frac{5\pi}{3}$, quelle est la valeur de k?



Solution

Puisque $PQ = \frac{\pi}{3}$, alors par symétrie, les coordonnées de R sont $\left(\frac{\pi}{6},\ k \cos \frac{\pi}{6}\right)$, ou $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\sqrt{3}k}{2}\right)$.

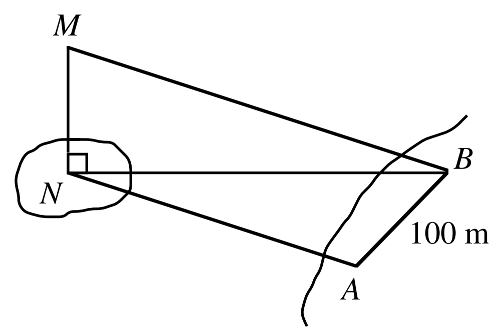


L'aire du rectangle $PQRS$ est égale à $\frac{5\pi}{3}$. Donc :

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}k}{2} = \frac{5\pi}{3}$$

$$k = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

b) Afin de déterminer la hauteur MN d'une tour sur une île, on a choisi les points A et B dans le même plan horizontal que le point N, de manière qu'il y ait une distance de 100 m entre A et B. On a ensuite obtenu les mesures suivantes : $\angle NAB = 108°$, $\angle ABN = 47°$ et $\angle MBN = 32°$. Déterminer la hauteur de la tour au mètre près.



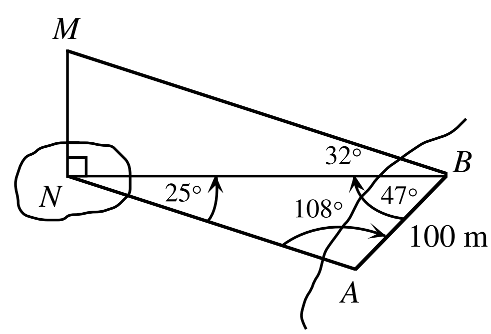
Solution

Dans le triangle BAN, $\angle BNA = 25°$.

D'après la loi des sinus :

$$\frac{NB}{\sin 108°} = \frac{100}{\sin 25°}$$

$$NB = \frac{100 \sin 108°}{\sin 25°}$$

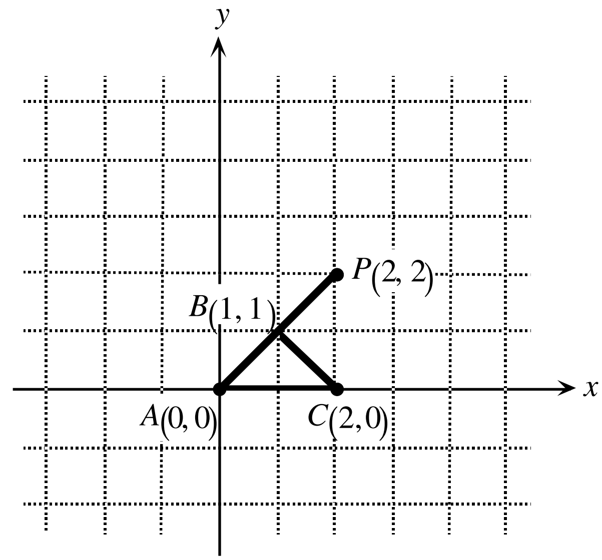


Dans le triangle MNB, $\frac{MN}{NB} = \tan 32°$.

$$MN = \frac{100 \sin 108°}{\sin 25°} \times \tan 32°$$
$$\approx 140,6$$

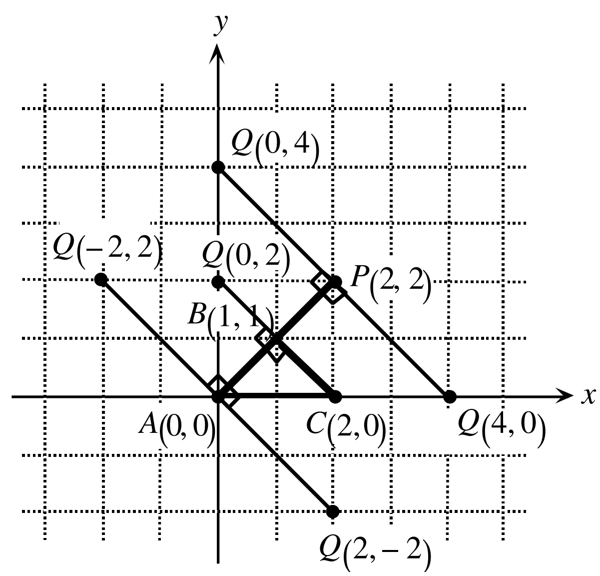
La tour a une hauteur de 141 m.

6. a) On veut choisir un point Q, dans le plan, de manière que les points A, P et Q forment un triangle semblable au triangle ABC. Quelles sont les coordonnées de toutes les positions possibles du point Q?



Solution

$Q(4, 0), Q(0, 4)$
$Q(2, 0), Q(0, 2)$
$Q(-2, 2), Q(2, -2)$



b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes définies par $y = \log_{10}(x-2)$ et $y = 1 - \log_{10}(x+1)$.

Solution

Pour un point d'intersection, on a :

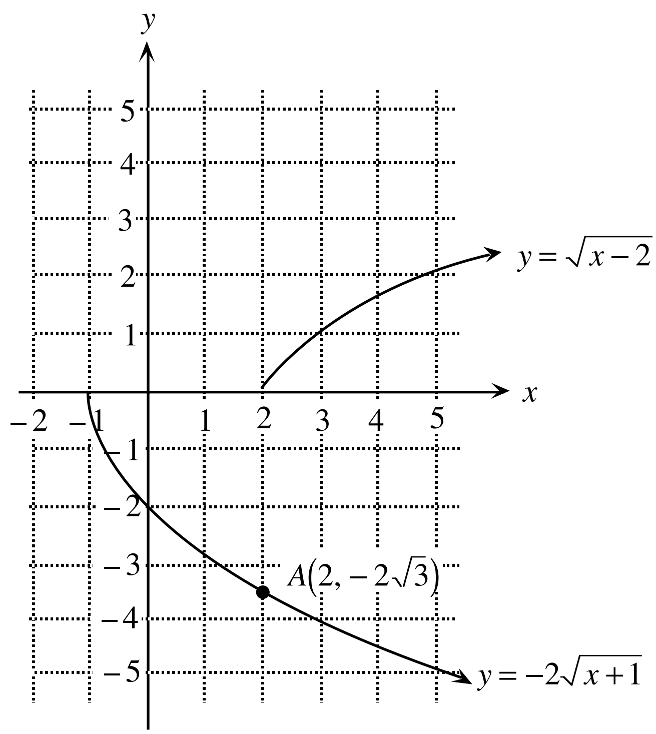
$$\log_{10}(x-2) = 1 - \log_{10}(x+1)$$
$$\log_{10}(x-2) + \log_{10}(x+1) = 1$$
$$\log_{10}\left(x^2 - x - 2\right) = 1$$
$$x^2 - x - 2 = 10$$
$$x^2 - x - 12 = 0$$
$$(x-4)(x+3) = 0$$
$$x = 4 \text{ ou } x = -3$$

Les courbes ne sont pas définies en $x = -3$.
Si $x = 4$, on a $y = \log_{10} 2$.
Les courbes admettent un point d'intersection en $\left(4, \log_{10} 2\right)$.

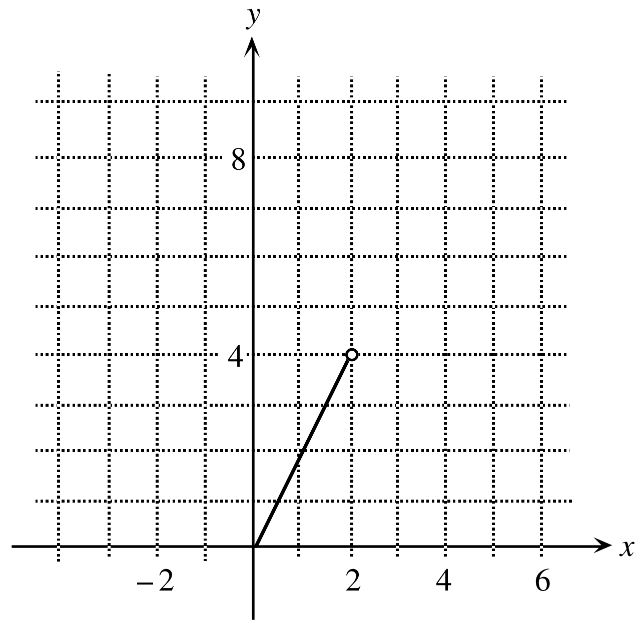
7. a) Dans le plan fourni à cet effet dans le cahier-réponse, tracer les courbes définies par $y = -2\sqrt{x+1}$ et $y = \sqrt{x-2}$. Pour quelle(s) valeur(s) de k les courbes définies par $y = -2\sqrt{x+1}$ et $y = \sqrt{x-2} + k$ se croiseront-elles? (On suppose que x et k sont des nombres réels.)

Solution

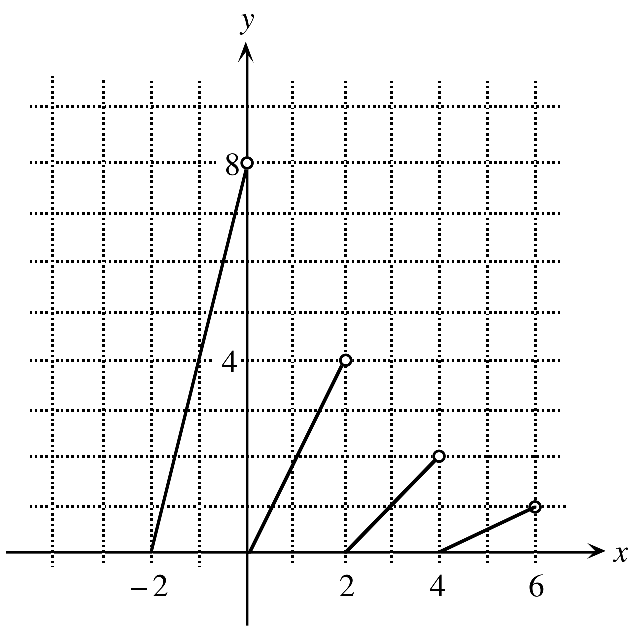
La courbe représentative de $y = \sqrt{x-2} + k$ est l'image de celle de $y = \sqrt{x-2}$ par une translation verticale. D'après le diagramme, les courbes définies par $y = -2\sqrt{x+1}$ et $y = \sqrt{x-2} + k$ se croisent si $k \le -2\sqrt{3}$.



b) Une partie de la représentation graphique de $y = f(x)$ est indiquée, pour $0 \le x < 2$.
Sachant que $f(x+2) = \frac{1}{2} f(x)$ pour toute valeur réelle de *x*, tracer la représentation graphique de $y = f(x)$ dans les intervalles $-2 \le x < 0$ et $2 \le x < 6$.



Solution



Remarque
Beaucoup de candidats ne savaient pas comment utiliser la notation $f(x+2) = \frac{1}{2} f(x)$. Voici une façon de le faire.

D'après le graphique, $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$.
On reporte $x = 0$ dans la formule pour obtenir $f(0+2) = \frac{1}{2} f(0)$, d'où $f(2) = 0$. Le point $(2, 0)$ est donc sur le graphique.
On reporte $x = 1$ dans la formule pour obtenir $f(1+2) = \frac{1}{2} f(1)$, d'où $f(3) = 1$. Le point $(3, 1)$

est donc sur le graphique.
On peut aussi prendre d'autres valeurs de x dans l'intervalle $2 \le x < 4$ pour déterminer les valeurs de $f(x)$.
On procède de la même façon dans les autres intervalles.

8. a) Pour toute valeur réelle de a, l'équation $y = x^2 + 2ax + a$ représente une parabole. Démontrer que toutes ces paraboles ont un point commun et déterminer les coordonnées de ce point.

Solution 1
Soit $a = 0$ et $a = 1$ deux valeurs de a.
Lorsque $a = 0$, on a la parabole d'équation $y = x^2$.
Lorsque $a = 1$, on a la parabole d'équation $y = x^2 + 2x + 1$.
Pour un point d'intersection, posons $x^2 = x^2 + 2x + 1$. Donc $x = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{4}$.
Ces deux paraboles admettent un point d'intersection $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
Ce point est sur chaque parabole s'il vérifie l'équation $y = x^2 + 2ax + a$ pour chaque valeur de a.
Si $x = -\frac{1}{2}$, alors :
$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2a\left(-\frac{1}{2}\right) + a \\ &= \frac{1}{4} - a + a \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$
Les paraboles admettent donc un point commun $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Remarque
On peut aussi choisir d'autres valeurs de a pour obtenir le même résultat.

Solution 2
Soit $y = x^2 + 2ax + a$ et $y = x^2 + 2bx + b$ les équations de deux paraboles distinctes de cette famille. Donc $a \ne b$.
Pour un point d'intersection, posons $x^2 + 2ax + a = x^2 + 2bx + b$.
$$\begin{aligned} 2ax - 2bx + a - b &= 0 \\ a(2x+1) - b(2x+1) &= 0 \\ (a-b)(2x+1) &= 0 \end{aligned}$$
Puisque $a \ne b$, alors $2x + 1 = 0$, d'où $x = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{4}$.
Les paraboles admettent donc un point commun $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Solution 3
On peut écrire l'équation générale de la parabole sous la forme $y = x^2 + a(2x+1)$.
Pour toute valeur de a, si $2x + 1 = 0$, alors $x = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{4}$.

Le point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ est donc sur la parabole, quelle que soit la valeur de *a*.

Solution 4
Soit (p, q) un point commun pour toute valeur de *a*.
Donc $p = q^2 + 2ap + a$.
Si $a = 0$, alors $q = p^2$.
Si $a = 1$, alors $q = p^2 + 2p + 1$.
Comme dans la solution 1, on obtient $2p + 1 = 0$, d'où $p = -\frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{4}$.
Comme dans la solution 1, on vérifie que $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ est sur la parabole quelle que soit la valeur de *a*.

b) Les sommets des paraboles de la partie a) sont situés sur une courbe. Démontrer que cette courbe est une parabole dont le sommet est le point commun de la partie a).

Solution
L'équation $y = x^2 + 2ax + a$ peut s'écrire sous la forme :

$$y = x^2 + 2ax + a^2 - a^2 + a$$
$$y = (x + a)^2 - a^2 + a$$

Pour toute valeur de *a*, le sommet de la parabole est le point $\left(-a, -a^2 + a\right)$.
Posons $x = -a$. Alors $-a^2 + a$ devient $-x^2 - x$.
Pour toute valeur de *a*, le sommet $\left(-a, -a^2 + a\right)$ de la parabole vérifie donc l'équation $y = -x^2 - x$. Il s'agit de l'équation d'une parabole.
En complétant le carré, on obtient l'équation canonique de la parabole, $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$.
Son sommet est le point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

9. Une « série du millénaire » est une série d'entiers consécutifs ayant une somme de 2000. Soit *m* le premier terme d'une série du millénaire.
   a) Déterminer la valeur minimale de *m*.
   b) Déterminer la plus petite valeur strictement positive de *m*.

Solution 1 - Parties a) et b)
Soit *m* le premier terme de la série et *k* le nombre de termes.
La série est donc $m + (m+1) + (m+2) + ... + (m + (k-1))$ et on a

$$m + (m+1) + (m+2) + ... + (m + k - 1) = 2000.$$

Cette série admet *k* termes.
La somme du premier terme et du dernier terme est égale à $(2m + k - 1)$.
Donc $\frac{k(2m + k - 1)}{2} = 2000$.

$$k(2m+k-1)=4000$$

Si k est pair, alors le nombre $(2m+k-1)$ doit être impair, puisque $2m$ est pair.
De même, si k est impair, le nombre $(2m+k-1)$ doit être pair.
Aussi, puisque k est positif, le nombre $(2m+k-1)$ est positif.
Les factorisations possibles de 4000, en deux facteurs positifs dont un des deux est impair, sont 1×4000, 5×800, 25×160 et 125×32. Le tableau suivant donne les valeurs possibles de k, de $(2m+k-1)$ et de m.

k	$2m+k-1$	m
1	4000	2000
5	800	398
25	160	68
125	32	–46
4000	1	–1999
800	5	–397
160	25	–67
32	125	47

a) La valeur minimale de m est -1999.
b) La plus petite valeur strictement positive de m est 47.

Remarque
Si la série avait été $m+(m+1)+(m+2)+\ldots+(m+k)$, on aurait obtenu l'équation $(k+1)(2m+k)=4000$ et on aurait complété le tableau pour $(k+1)$, $(2m+k)$ et m.

Solution 2 - Parties a) et b)
Soit m le premier terme de la série et n le nombre de termes.
La série est donc $m+(m+1)+(m+2)+\ldots+(m+(n-1))=4000$.
Comme dans la solution précédente, on obtient $n(2m+n-1)=4000$.
Donc $n^2+(2m-1)n-4000=0$.
Puisque n est un entier positif, l'expression du membre de gauche peut être factorisée et l'équation admet deux racines entières.
Puisque la somme des racines est égale à $-(2m-1)$, qui est un entier impair, une racine doit être paire et l'autre, impaire.
Puisque le produit des racines est égal à –4000, une des racines est un diviseur impair de 4000, soit ± 1, ± 5, ± 25 ou ± 125. Le tableau suivant donne les factorisations possibles du membre de gauche, ainsi que les valeurs correspondantes de $(2m-1)$ et de m.

Factorisations	$(2m-1)$	m
$(n-1)(n+4000)$	3999	2000
$(n-5)(n+800)$	795	398
$(n-25)(n+160)$	135	68
$(n-125)(n+32)$	-93	-46
$(n+1)(n-4000)$	-3999	-1999
$(n+5)(n-800)$	-795	-397
$(n+25)(n-160)$	-135	-67
$(n+125)(n-32)$	93	47

a) La valeur minimale de m est -1999.

b) La plus petite valeur strictement positive de m est 47.

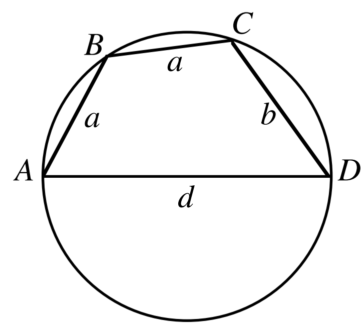
Solution 3 - Partie a)

Si le premier terme m de la suite est négatif et que l'on additionne des nombres consécutifs, la somme sera négative jusqu'à ce que l'on additionne tous les entiers de m à $|m|$. La somme sera alors 0. Pour obtenir une somme positive, il suffit alors d'ajouter le terme suivant, $|m|+1$. Ainsi si on additionne les nombres $-1999, ..., 1999, 2000$, on obtient une somme de 2000. De plus, si le premier entier m est inférieur à -1999 et que l'on additionne jusqu'à ce qu'on obtienne le terme $|m|+1$, la somme sera supérieure à 2000. La valeur minimale de m est donc -1999.

10. Le diagramme illustre un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle, de manière que son côté AD soit un diamètre du cercle. Soit $AB=a$, $BC=a$, $CD=b$ et $AD=d$. Si a, b et d sont des entiers et si $a \neq b$:

a) démontrer que d ne peut être un nombre premier;

b) déterminer la valeur *minimale* de d.



Solution

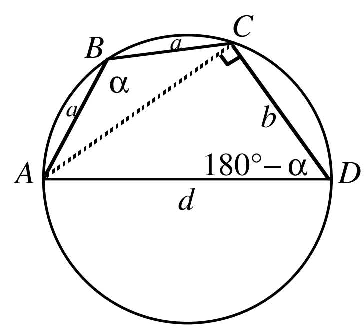
a) On joint A et C. Puisque l'angle ACD est inscrit dans un demi-cercle, $\angle ACD = 90°$.

Soit $\angle ABC = \alpha$. Puisque le quadrilatère est inscrit, $\angle CDA = 180° - \alpha$.

Dans le triangle ABC, on a

$AC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos\alpha$ (1).

Dans le triangle ACD, on a $AC^2 = d^2 - b^2$ et $\cos(180° - \alpha) = \frac{b}{d}$, d'où $\cos\alpha = -\frac{b}{d}$.



On reporte dans (1) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
d^2 - b^2 &= 2a^2 - 2a^2\left(-\frac{b}{d}\right) \\
d^3 - db^2 &= 2a^2 d + 2a^2 b \\
d\left(d^2 - b^2\right) &= 2a^2(d+b) \\
d(d+b)(d-b) &= 2a^2(d+b) \\
2a^2 &= d(d-b), \text{ puisque } d \neq b
\end{aligned}$$

On peut aussi obtenir ce résultat de la manière suivante.

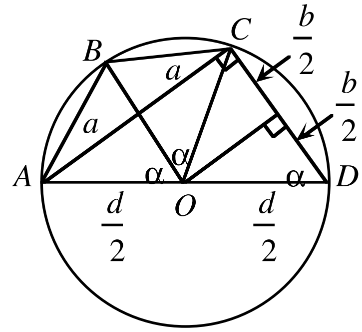
Dans le triangle OBC, on a :

$$a^2 = \frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4} - 2\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{d}{2}\right)\cos\alpha$$

$$a^2 = \frac{d^2}{2}(1 - \cos\alpha)$$

Or $\cos\alpha = \dfrac{\frac{b}{2}}{\frac{d}{2}} = \dfrac{b}{d}$.

Donc $2a^2 = d(d-b)$.



On suppose que d est un nombre premier, pour en arriver à une contradiction.
Donc $d = 2$ ou $d \geq 3$.

1er cas : $d = 2$
Puisque a et b sont des entiers et que d, étant un diamètre, est supérieur à a et à b, alors $a = b = 1$, ce qui contredit la donnée, $a \neq b$.
Donc $d \neq 2$.

2e cas : $d \geq 3$ et d est premier
On examine la relation $2a^2 = d(d-b)$, sachant que a, b et d sont des entiers. Puisque d est un facteur du membre de droite, il doit être un diviseur du membre de gauche. Puisque $d \geq 3$, d ne peut être un diviseur de 2. Donc d doit être un diviseur de a^2. De plus, puisque d est un nombre premier et qu'il est diviseur de a^2, il doit être diviseur de a. Ceci est une contradiction, car d, étant un diamètre, est supérieur à a.

La supposition que d est un nombre premier est donc fausse et d est donc un nombre composé.

Remarque
Rien, dans la démonstration précédente, ne prouve l'existence d'un tel nombre composé d. Ce sera fait dans la partie b).

Solution

b) Puisque d n'est pas premier, alors $d \neq 2$, 3, 5, 7, etc.
Posons $d = 4$.
La relation $2a^2 = d(d-b)$ devient $2a^2 = 4(4-b)$.

$$a^2 = 2(4-b)$$

Puisque d est supérieur à b, alors b est égal à 1, 2 ou 3.
Si $b = 1$, alors $a^2 = 6$, ce qui contredit que a est un entier.
Si $b = 2$, alors $a = 2$, ce qui contredit la donnée $a \neq b$.
Si $b = 3$, alors $a^2 = 2$, ce qui contredit que a est un entier.
Donc $d \neq 4$.

Posons $d = 6$.
La relation $2a^2 = d(d-b)$ devient $2a^2 = 6(6-b)$.

$$a^2 = 3(6-b)$$

Puisque d est supérieur à b, alors b est égal à 1, 2, 3, 4 ou 5.
Comme ci-haut, si b est égal à 1, 2, 4 ou 5, alors a^2 est égal à 15, 12, 6 ou 3, ce qui contredit que a est un entier. Si $b = 3$, alors $a = 3$, ce qui contredit la donnée $a \neq b$.
Donc $d \neq 6$.

Posons $d = 8$.
La relation $2a^2 = d(d-b)$ devient $2a^2 = 8(8-b)$.

$$a^2 = 4(8-b)$$

Alors $a = 2$ et $b = 7$ est une solution.
La valeur minimale de d est 8.

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

35e Anniversaire 1963 – 1998

1998 Solutions

Concours Euclide

(12e année – Sec. V)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

1. a) Si $x = 1$ est une racine de l'équation $x^2 + 2x - c = 0$, quelle est la valeur de c?

Solution 1
Puisque $x = 1$ est une racine, on a $1^2 + 2(1) - c = 0$, d'où $c = 3$.

Solution 2
On divise :

$$\begin{array}{r|l} x-1 & \overline{x^2+2x-c} \quad x+3 \\ & \underline{x^2-x} \\ & \quad 3x-c \\ & \quad \underline{3x-3} \\ & \quad -c+3 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{l|l} x^2+2x-c & \overline{x-1} \\ \underline{x^2-x} & x+3 \\ \quad 3x-c & \\ \quad \underline{3x-3} & \\ \quad -c+3 & \end{array}$$

Puisque $x = 1$ est une racine, le reste est nul et $-c + 3 = 0$.
Donc $c = 3$.

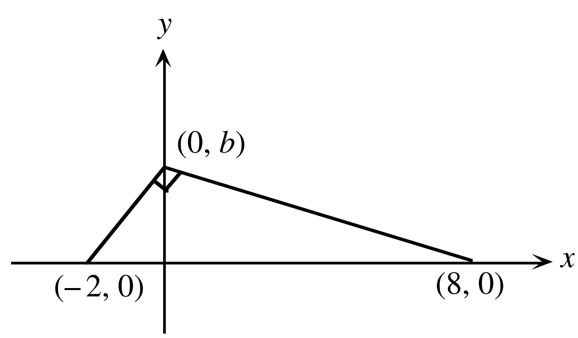
b) Si $2^{2x-4} = 8$, quelle est la valeur de x?

Solution
$2^{2x-4} = 2^3$
Donc $2x - 4 = 3$.
$x = \frac{7}{2}$

c) Deux droites perpendiculaires, ayant pour abscisses à l'origine respectives -2 et 8, se croisent au point $(0, b)$. Déterminer toutes les valeurs possibles de b.

Solution 1
Puisque les droites sont perpendiculaires, le produit de leurs pentes est égal à -1.
Donc $\frac{b}{-8} \times \frac{b}{2} = -1$.

Donc $b^2 = 16$, d'où $b = \pm 4$.



Solution 2
Puisque les droites sont perpendiculaires, le triangle illustré est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, $\left[(b-0)^2 + (0-8)^2\right] + \left[(b-0)^2 + (0+2)^2\right] = 10^2$.
Donc $2b^2 = 32$, d'où $b = \pm 4$.

Solution 3

Puisque les droites sont perpendiculaires, le triangle illustré est inscrit dans un cercle dont les sommets, $(-2, 0)$ et $(8, 0)$, sont les extrémités d'un diamètre. Ce cercle a donc pour centre $C(3, 0)$ et pour rayon $r = 5$. Son équation est $(x-3)^2 + y^2 = 25$.
Pour obtenir ses ordonnées à l'origine, posons $x = 0$.
Les ordonnées à l'origine sont 4 et -4.
Donc $b = \pm 4$.

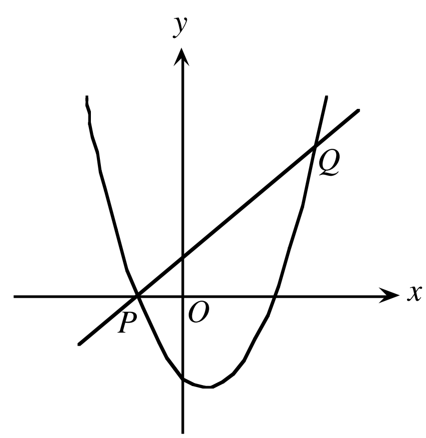
2. a) On considère la parabole définie par $y = (x-1)^2 + b$. Son sommet a pour coordonnées $(1, 3)$. Quelle est l'ordonnée à l'origine de la parabole?

Solution
Puisque le sommet de la parabole est situé en $(1, b)$, alors $b = 3$.
L'équation de la parabole est donc $y = (x-1)^2 + 3$.
Pour l'ordonnée à l'origine, posons $x = 0$.
L'ordonnée à l'origine est donc égale à 4.

b) Quelle est l'aire du triangle ABC dont les sommets sont situés en $A(-3, 1)$, $B(5, 1)$ et $C(8, 7)$?

Solution
Un diagramme nous permet de constater que l'on a un triangle ayant une base de 8 unités et une hauteur de 6 unités.
Le triangle a donc une aire de 24 unités carrées.

c) Le diagramme illustre la droite d'équation $y = x + 1$ qui croise la parabole d'équation $y = x^2 - 3x - 4$ aux points P et Q. Déterminer les coordonnées de P et de Q.



Solution
Pour un point d'intersection, on a $y = x + 1$ et $y = x^2 - 3x - 4$.
Par comparaison, on a $x + 1 = x^2 - 3x - 4$.

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$
$$(x-5)(x+1) = 0$$

Donc $x = 5$ ou $x = -1$.
Si $x = 5$, alors $y = 6$. Si $x = -1$, alors $y = 0$.
Les coordonnées sont $P(-1, 0)$ et $Q(5, 6)$.

3. a) La représentation graphique de $y = m^x$ passe par les points $(2, 5)$ et $(5, n)$. Quelle est la valeur de mn ?

Solution

Puisque $(2, 5)$ est situé sur la courbe, il vérifie l'équation et $5 = m^2$.
Puisque $(5, n)$ est situé sur la courbe, il vérifie l'équation et $n = m^5$.
Donc :

$$\begin{aligned} & mn \\ &= m(m^5) \\ &= m^6 \\ &= (m^2)^3 \\ &= 5^3 \\ &= 125 \end{aligned}$$

b) Jeanne a acheté 100 actions à la bourse, au prix de 10,00 \$ l'action. Lorsque le prix des actions a augmenté pour atteindre N \$ chacune, elle a donné toutes ses actions à la Fondation Euclide. Elle a reçu une remise d'impôt de 60 % de la valeur totale de son don. Cependant elle a dû payer un impôt de 20 % de l'augmentation de la valeur des actions. Déterminer la valeur de N si la différence entre sa remise d'impôt et l'impôt payé est de 1000 \$.

Solution

Jeanne a donné la somme de $100N$ dollars à la Fondation Euclide.
Sa remise d'impôt est égale à 60 % de $100N$, c'est-à-dire $60N$ dollars.
L'augmentation de la valeur des actions est égale à $100(N-10)$, c'est-à-dire $(100N-1000)$ dollars.
Elle a donc payé un impôt égal à 20 % de $100N-1000$, c'est-à-dire $20N-200$ dollars.
Donc $60N-(20N-200)=1000$.

$$\begin{aligned} 40N &= 800 \\ N &= 20 \end{aligned}$$

4. a) On considère la suite définie par $t_1 = 1$, $t_2 = -1$ et $t_n = \left(\frac{n-3}{n-1}\right)t_{n-2}$, où $n \geq 3$. Quelle est la valeur de t_{1998}?

Solution 1

On calcule les premiers termes : $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = 0$, $t_4 = \frac{-1}{3}$, $t_5 = 0$, $t_6 = \frac{-1}{5}$, etc.
On remarque la régularité et on obtient $t_{1998} = \frac{-1}{1997}$.

Solution 2

$$
\begin{aligned}
t_{1998} &= \frac{1995}{1997} t_{1996} \\
&= \frac{1995}{1997} \times \frac{1993}{1995} t_{1994} \\
&\vdots \\
&= \frac{1995}{1997} \cdot \frac{1993}{1995} \cdot \frac{1991}{1993} \cdots \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} t_2 \\
&= \frac{-1}{1997}
\end{aligned}
$$

b) Le n^e terme d'une suite arithmétique est défini par $t_n = 555 - 7n$.
Si $S_n = t_1 + t_2 + ... + t_n$, déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $S_n < 0$.

Solution 1

Le premier terme de la suite est $a = 548$ et la raison est $d = -7$. Donc :

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}\left[2(548) + (n-1)(-7)\right] \\
&= \frac{n}{2}\left[-7n + 1103\right]
\end{aligned}
$$

On veut que $\frac{n}{2}(-7n + 1103) < 0$.

Puisque $n > 0$, on a $-7n + 1103 < 0$.

Donc $n > 157\frac{4}{7}$.

La plus petite valeur de n pour laquelle $S_n < 0$ est 158.

Solution 2

On veut que $\sum_{k=1}^{n} t_k < 0$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n}(555 - 7k) < 0$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} 555 - 7\sum_{k=1}^{n} k &< 0 \\
555n - 7\frac{(n)(n+1)}{2} &< 0 \\
1110n - 7n^2 - 7n &< 0 \\
7n^2 - 1103n &> 0 \\
7n - 1103 &> 0 \\
n &> \frac{1103}{7}
\end{aligned}
$$

La plus petite valeur de n pour laquelle $S_n < 0$ est 158.

Solution 3

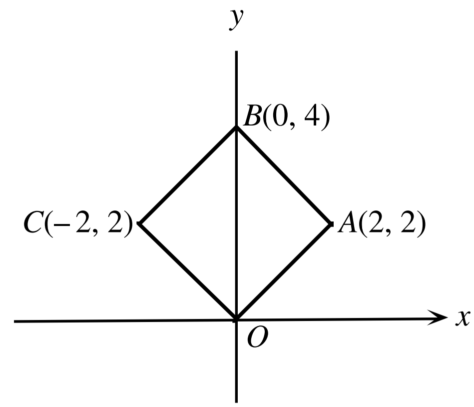
La suite est 548, 541, 534, ..., 2, -5, ..., -544, -551.

On additionne en regroupant le premier terme avec le dernier, le deuxième avec l'avant-dernier, etc.

On a alors $(548 - 551) + (541 - 544) + \ldots + (2 - 5)$. Il y a alors 79 parenthèses, chacune étant égale à -3. Cette somme est donc égale à -237.

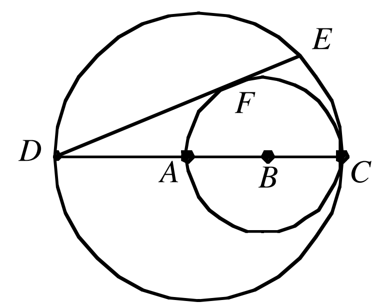
Si on avait omis le dernier terme, -551, la somme aurait été positive.
Pour une somme négative, il faut donc toutes les 79 parenthèses, c'est-à-dire 158 termes.

5. a) Le diagramme illustre un carré $OABC$ dont les coordonnées des sommets sont données. On considère le cercle dont l'aire est maximale, tout en étant situé à l'intérieur du carré. Quelle est l'équation du cercle?

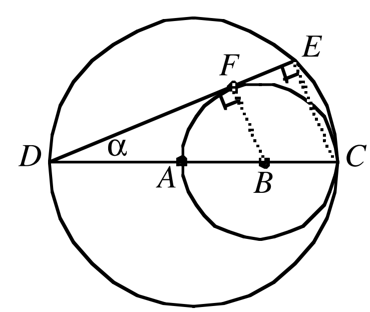


Solution
Chaque côté du carré a une longueur de $2\sqrt{2}$.
Le cercle a donc un diamètre de $2\sqrt{2}$, et un rayon de $\sqrt{2}$.
Le centre du cercle est situé en $(0, 2)$.
Son équation est donc $x^2 + (y-2)^2 = 2$ ou $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$.

b) Le diagramme illustre un grand cercle de centre A et de diamètre DC. Le petit cercle a pour centre B et pour diamètre AC. Si DE est tangent au petit cercle en F et si $DC = 12$, déterminer la longueur de DE.



Solution
On joint B et F, de même que C et E.
Puisque DFE est une tangente, FB est perpendiculaire à DE.
Puisque DC est un diamètre, $\angle DEC = 90°$.
Donc FB et EC sont parallèles.
D'après le théorème de Pythagore, $DF = \sqrt{9^2 - 3^2}$, c'est-à-dire $DF = \sqrt{72}$.
Les triangles DBF et DCE sont semblables, puisque leurs angles correspondants sont égaux.
Donc :



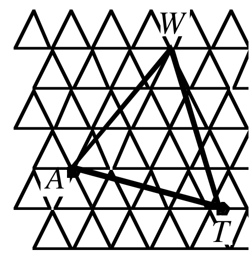
OU

$$\frac{DE}{DF}=\frac{DC}{DB}$$
$$\frac{DE}{6\sqrt{2}}=\frac{12}{9}$$
$$DE=8\sqrt{2}$$

$$\frac{EC}{FB}=\frac{12}{9}$$
$$EC=\tfrac{4}{3}FB$$
$$EC=4$$

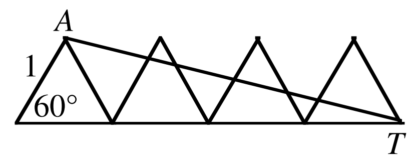
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle DCE, $DE=8\sqrt{2}$.

6. a) Le quadrillage est formé de petits triangles équilatéraux ayant des côtés de longueur 1. Les sommets du triangle WAT sont aussi des sommets des petits triangles équilatéraux. Quelle est l'aire du triangle WAT ?



Solution 1

$$AT^2 = 1^2+4^2-2(1)(4)\cos 60°$$
$$= 13$$



Par symétrie, le triangle WAT est équilatéral.

Sa hauteur est donc égale à $\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\sqrt{3}$.

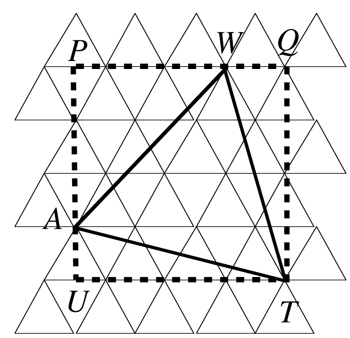
L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}\left(\sqrt{13}\right)\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\sqrt{3}\right)$ ou $\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

Solution 2

Puisque chaque petit triangle a des côtés de longueur 1, chacun a une hauteur de $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

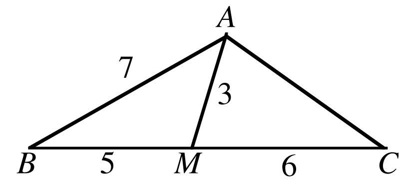
On considère le rectangle $PQTU$.

On a :



$$\begin{aligned}|\Delta WAT| &= |PQTU|-|\Delta APW|-|\Delta WQT|-|\Delta TUA|\\
&= (PQ)(QT)-\frac{1}{2}(AP)(PW)-\frac{1}{2}(WQ)(QT)-\frac{1}{2}(TU)(UA)\\
&= (3,5)\left(2\sqrt{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)(2,5)-\frac{1}{2}(1)\left(2\sqrt{3}\right)-\frac{1}{2}(3,5)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= 7\sqrt{3}-\frac{15\sqrt{3}}{4}\\
&= \frac{13\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

b) Le diagramme illustre un triangle ABC. M est un point sur BC de manière que $BM = 5$ et $MC = 6$. Si $AM = 3$ et $AB = 7$, déterminer la valeur exacte de AC.



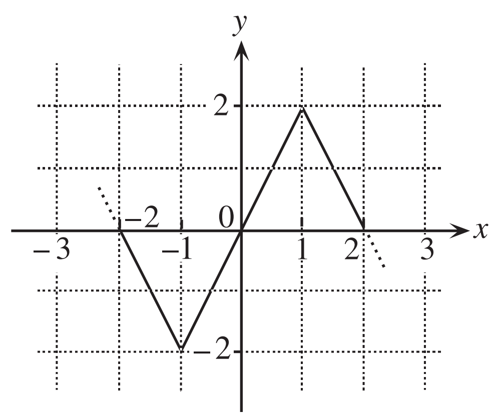
Solution

Dans le triangle ABM, $\cos B = \dfrac{3^2 - 7^2 - 5^2}{-2(7)(5)}$
$= \dfrac{13}{14}.$

Dans le triangle ABC, $AC^2 = 7^2 + 11^2 - 2(7)(11)\left(\dfrac{13}{14}\right)$
$= 27.$

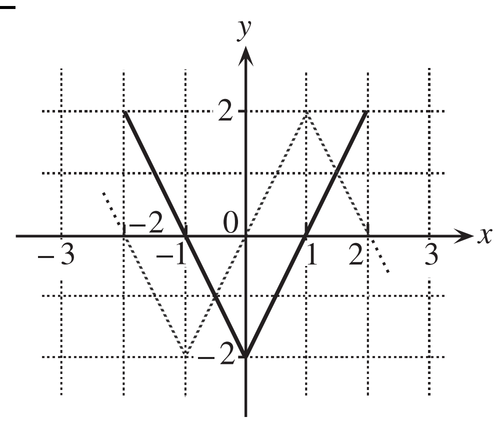
Donc $AC = \sqrt{27}$.

7. a) La fonction *f* a une période de longueur 4. Le diagramme illustre une période de $y = f(x)$. Tracer la représentation graphique de $y = \frac{1}{2}\left[f(x-1) + f(x+3)\right]$ dans l'intervalle $-2 \le x \le 2$.



Solution 1

x	$f(x)$	$f(x-1)$	$f(x+3)$	$\frac{1}{2}\left[f(x-1)+f(x+3)\right]$
-2	0	2	2	2
-1	-2	0	0	0
0	0	-2	-2	-2
1	2	0	0	0
2	0	2	2	2



On place les points dans le plan et on les joint au moyen de segments.

Solution 2

Puisque $f(x)$ a une période de 4, $f(x+3) = f(x-1)$. Donc :

$$
\begin{aligned}
y &= \tfrac{1}{2}\left[f(x-1)+f(x+3)\right]\\
&= \tfrac{1}{2}\left[f(x-1)+f(x-1)\right]\\
&= f(x-1)
\end{aligned}
$$

La représentation graphique est celle de $y = f(x-1)$ que l'on obtient en faisant subir à la courbe donnée une translation de ***1 unité*** vers la droite.

b) Déterminer toutes les solutions (x, y) du système d'équations suivant, x et y étant des nombres réels :

$$x^2 - xy + 8 = 0$$
$$x^2 - 8x + y = 0\ .$$

Solution 1

Par soustraction :

$$
\begin{array}{r}
x^2 - xy + 8 = 0\\
x^2 - 8x + y = 0\\
\hline
-xy + 8x + 8 - y = 0\\
8(1+x) - y(1+x) = 0\\
(8-y)(1+x) = 0\\
y = 8 \quad \text{ou} \quad x = -1
\end{array}
$$

Si $y = 8$, chaque équation devient $x^2 - 8x + 8 = 0$, d'où $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$.
Si $x = -1$ chaque équation devient $y + 9 = 0$, d'où $y = -9$.
Les solutions sont $(-1, -9)$, $\left(4+2\sqrt{2}, 8\right)$ et $\left(4-2\sqrt{2}, 8\right)$.

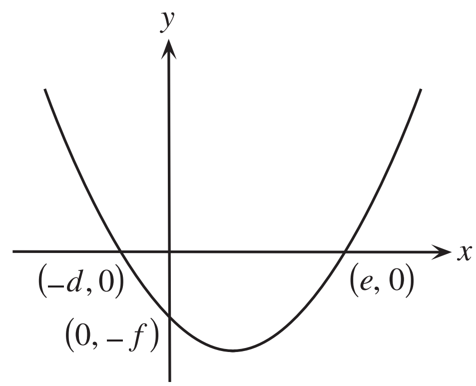
Solution 2

On isole y pour obtenir $y = \dfrac{x^2+8}{x}$ et $y = 8x - x^2$.

Donc $\dfrac{x^2+8}{x} = 8x - x^2$ ou $x^3 - 7x^2 + 8 = 0$.

On remarque que $x = -1$ est une racine.
Donc $(x+1)$ est un facteur du polynôme $x^3 - 7x^2 + 8$.
Par inspection ou par division, l'équation devient $(x+1)\left(x^2 - 8x + 8\right) = 0$.
Les racines sont $x = -1$, $x = 4 + 2\sqrt{2}$ et $x = 4 - 2\sqrt{2}$.
On les reporte dans l'équation $y = 8x - x^2$.
Les solutions du système sont $(-1, -9)$, $\left(4+2\sqrt{2}, 8\right)$ et $\left(4-2\sqrt{2}, 8\right)$.

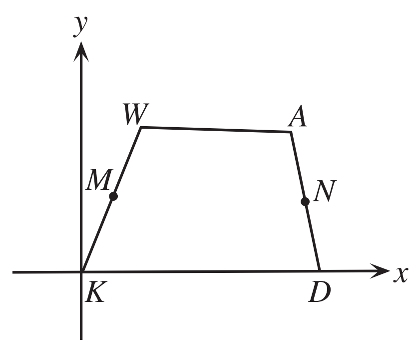
8. a) Le diagramme illustre l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par une translation. Démontrer que $de = f$.



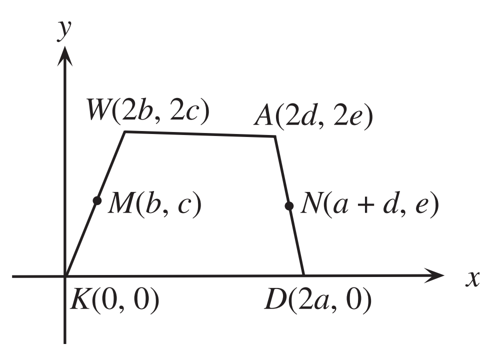
Solution

Puisque la parabole illustrée est la translation de la parabole d'équation $y = x^2$ et puisque ses abscisses à l'origine sont $-d$ et e, son équation est $y = (x+d)(x-e)$.
Pour déterminer l'ordonnée à l'origine, posons $x = 0$. On obtient alors $y = -de$.
Puisque l'ordonnée à l'origine est égale à $-f$, alors $-f = -de$ ou $f = de$.

b) *M* et *N* sont les milieux respectifs des côtés KW et AD du quadrilatère $KWAD$. Si $MN = \frac{1}{2}(AW + DK)$, démontrer que WA est parallèle à KD.



Solution 1



On place un repère cartésien de manière que *K* et *D* aient pour coordonnées $K(0,0)$ et $D(2a, 0)$. Soit $(2b, 2c)$ et $(2d, 2e)$ les coordonnées respectives de *W* et de *A*.
Les coordonnées de *M* sont donc (b, c) et celles de *N* sont $(a+d, e)$.
La pente de KD est nulle et la pente de WA est égale à $\dfrac{e-c}{d-b}$.
Puisque $MN = \frac{1}{2}(AW + DK)$, alors :

$$\sqrt{(a+d-b)^2 + (e-c)^2} = \frac{1}{2}\left(2a + \sqrt{(2d-2b)^2 + (2e-2c)^2}\right)$$
$$\sqrt{(a+d-b)^2 + (e-c)^2} = \frac{1}{2}\left(2a + 2\sqrt{(d-b)^2 + (e-c)^2}\right)$$
$$\sqrt{(a+d-b)^2 + (e-c)^2} = a + \sqrt{(d-b)^2 + (e-c)^2}$$

On élève chaque membre au carré pour obtenir :

$$(a+d-b)^2+(e-c)^2 = a^2+2a\sqrt{(d-b)^2+(e-c)^2}+(d-b)^2+(e-c)^2$$

$$a^2+2a(d-b)+(d-b)^2 = a^2+2a\sqrt{(d-b)^2+(e-c)^2}+(d-b)^2$$

On réduit et on divise chaque membre par $2a$ pour obtenir $d-b=\sqrt{(d-b)^2+(e-c)^2}$.

On élève chaque membre au carré pour obtenir $(d-b)^2=(d-b)^2+(e-c)^2$.

Donc $(e-c)^2=0$, d'où $e=c$.

Puisque $e=c$, la pente de WA est nulle et WA est parallèle à KD.

Solution 2

On joint *A* et *K*. Soit *P* le milieu de AK.

On joint ensuite *M* et *P*, *N* et *P*, de même que *M* et *N*.

P et *M* sont les milieux respectifs des côtés KA et KW du triangle KAW.

Donc $MP=\frac{1}{2}WA$ et MP est parallèle à WA.

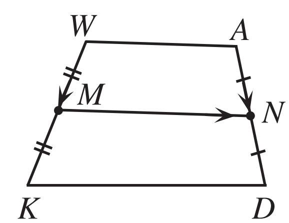
De même, dans le triangle KAD, on a $PN=\frac{1}{2}KD$ et PN est parallèle à KD.

Puisque $MN=\frac{1}{2}(AW+DK)$, alors $MP+PN=MN$.

Donc *M*, *P* et *N* ne peuvent être les sommets d'un triangle. Ils doivent être alignés.

Puisque MPN est un segment, que MP est parallèle à WA et que PN est parallèle à KD, alors WA est parallèle à KD.

Solution 3



On donne $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{ND}$ et $\overrightarrow{WM}=\overrightarrow{MK}$.

D'après la loi de Chasles :

(1) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MW}+\overrightarrow{WA}+\overrightarrow{AN}$

(2) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DN}$

On remplace $\overrightarrow{MK}$ par $-\overrightarrow{MW}$ et $\overrightarrow{DN}$ par $-\overrightarrow{AN}$ dans (2) pour obtenir $\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{MW}+\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{AN}$ (3).

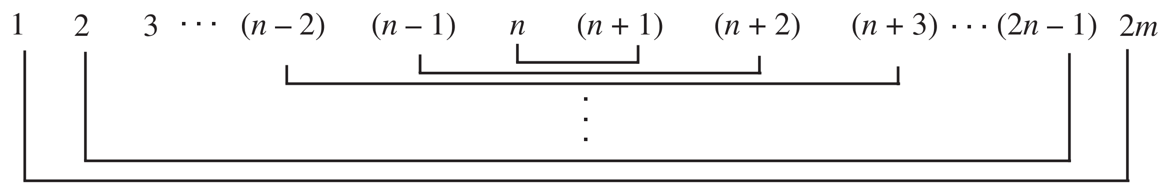
On additione (1) et (3), membre par membre, pour obtenir $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{WA}+\overrightarrow{KD}$.

Or il est donné que $2\left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|\overrightarrow{AW}\right|+\left|\overrightarrow{DK}\right|$.

D'après ces deux derniers énoncés, $\overrightarrow{MN}$ doit être parallèle à $\overrightarrow{WA}$ et à $\overrightarrow{KD}$, autrement on aurait $2\left|\overrightarrow{MN}\right|<\left|\overrightarrow{AW}\right|+\left|\overrightarrow{DK}\right|$.

Donc WA est parallèle à KD.

9. On considère les $2n$ premiers entiers positifs. On apparie les nombres, comme dans le diagramme, et on multiplie les deux nombres de chaque paire. Démontrer qu'il n'existe aucune valeur de n pour laquelle deux des n produits sont égaux.



Solution 1

On obtient la suite de produits :

$1(2n),\ 2(2n-1),\ 3(2n-2),\ \ldots,\ k(2n-k+1),\ \ldots,\ p(2n-p+1),\ \ldots,\ n(n+1)$

Supposons qu'il existe deux entiers positifs, p et k, chacun inférieur à n, tels que $k(2n-k+1)=p(2n-p+1)$.

Donc :

$$\begin{aligned} 2nk-k^2+k &= 2np-p^2+p \\ p^2-k^2+2nk-2np+k-p &= 0 \\ (p-k)(p+k)+2n(k-p)+(k-p) &= 0 \\ (p-k)\left[(p+k)-2n-1\right] &= 0 \\ (p-k)(p+k-2n-1) &= 0 \end{aligned}$$

Puisque p et k sont inférieurs à n, alors $p+k-2n-1\neq 0$.

Donc $p=k$, ce qui démontre que $k(2n-k+1)$ et $p(2n-p+1)$ représentent le même terme de la suite de produits.

Il ne peut donc pas y avoir deux produits égaux.

Solution 2

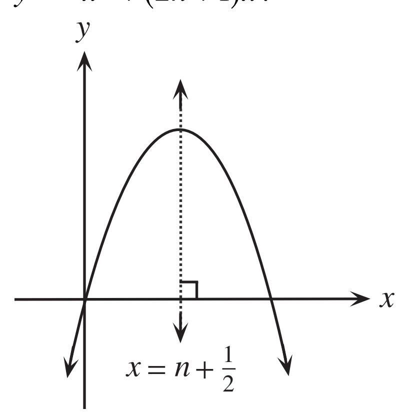
Les produits sont $1(2n+1-1)$, $2(2n+1-2)$, $3(2n+1-3)$, $\ldots$, $n(2n+1-n)$.

On considère la fonction définie par $y=x(2n+1-x)$, c'est-à-dire $y=-x^2+(2n+1)x$.

Sa représentation graphique est une parabole, ouverte vers le bas, ayant son sommet en $x=n+\frac{1}{2}$.

Les produits sont alors les ordonnées des points de la parabole en $x=1, 2, 3, \ldots, n$. Puisque ces points sont tous situés à la gauche du sommet, où la courbe est croissante, ils sont tous distincts.

Les produits sont donc distincts.



Solution 3

La somme des nombres donnés est égale à $\dfrac{2n(2n+1)}{2}$ ou $n(2n+1)$.

Leur moyenne est égale à $\dfrac{n(2n+1)}{2n}$ ou $n+\dfrac{1}{2}$.

On peut récrire les $2n$ nombres sous la forme :

$$n+\frac{1}{2}-\left(\frac{2n-1}{2}\right),\ \ldots,\ n+\frac{1}{2}-\frac{3}{2},\ n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2}+\frac{3}{2},\ \ldots,$$
$$n+\frac{1}{2}+\left(\frac{2n-1}{2}\right)$$

Si on calcule les produits, en commençant par celui du milieu et en allant vers les extrémités, on obtient :

$$P_1=\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}$$
$$P_2=\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}$$
$$\vdots$$
$$P_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2$$

Les nombres $\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2$ sont distincts, pour $k=1, 2, 3, \ldots, n$.

Les produits P_k sont donc tous distincts.

Solution 4

La suite des produits est $1(2n),\ 2(2n-1),\ 3(2n-2),\ \ldots,\ n[2n-(n-1)]$.

Elle est composée de n termes.

Lorsqu'on soustrait le k^{e} terme du $(k+1)^{\text{e}}$ terme, la différence est égale à $(k+1)[2n-k]-k[2n-(k-1)]$ ou $2(n-k)$. Puisque $n>k$, cette différence est positive.

Chaque terme de la suite des produits est donc supérieur au terme précédent.

Les produits sont donc tous distincts.

10. Les équations $x^2+5x+6=0$ et $x^2+5x-6=0$ ont ***chacune*** des solutions entières, tandis qu'une seule des équations $x^2+4x+5=0$ et $x^2+4x-5=0$ admet des solutions entières.
   a) Démontrer que si les équations $x^2+px+q=0$ et $x^2+px-q=0$ ont ***chacune*** des solutions entières, alors il existe des entiers a et b pour lesquels $p^2=a^2+b^2$. (C.-à-d. que (a, b, p) est un triplet pythagoricien.)

   b) Déterminer q en fonction de a et de b.

Solution

a) Les équations $x^2+px+q=0$ et $x^2+px-q=0$ admettent chacune des racines entières.

Les racines de $x^2+px+q=0$ sont $\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

Puisque les racines sont entières, p^2-4q est un carré parfait.

Il existe donc un entier positif m pour lequel $p^2-4q=m^2$.

De même, les racines de $x^2 + px - q = 0$ sont $\dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ et puisqu'elles sont entières, $p^2 + 4q$ doit être un carré parfait.
Il existe donc un entier positif n pour lequel $p^2 + 4q = n^2$.
On a donc, par addition, $2p^2 = m^2 + n^2$.
Or $n \geq m$, car $p^2 + 4q \geq p^2 - 4q$.
Donc
$$p^2 = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}n^2 = \left(\frac{n+m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n-m}{2}\right)^2.$$
Puisque $m^2 = p^2 - 4q$ et $n^2 = p^2 + 4q$, m^2 et n^2 ont la même parité que p^2. En effet, on obtient m^2 en soustrayant un nombre pair du nombre p^2, tandis que l'on obtient n^2 en additionnant un nombre pair à p^2. Donc m et n ont la même parité.
Donc $\dfrac{n+m}{2}$ et $\dfrac{n-m}{2}$ sont des entiers.
On a donc $p^2 = a^2 + b^2$, où $a = \dfrac{n+m}{2}$ et $b = \dfrac{n-m}{2}$.

b) Selon la partie a), $a = \dfrac{n+m}{2}$ and $b = \dfrac{n-m}{2}$, c.-à-d. $n = a + b$ et $m = a - b$.
Donc :
$$\begin{aligned} p^2 + 4q &= n^2 \\ 4q &= n^2 - p^2 \\ &= (a+b)^2 - \left(a^2 + b^2\right) \\ &= 2ab \end{aligned}$$
Donc $q = \dfrac{ab}{2}$.