Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mardi 3 avril 2024

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 4 avril 2024

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

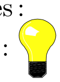
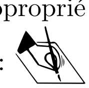
Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

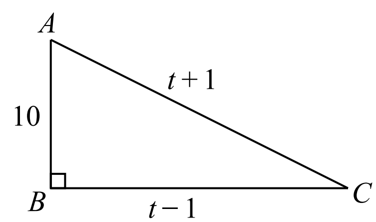
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son lieu de résidence.

1. (a) Si $x = 2$, quelle est la valeur de $\dfrac{x^4 + 3x^2}{x^2}$?

   (b) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B. De plus, $AB = 10$, $BC = t-1$ et $AC = t+1$. Quelle est la valeur de t ?



   (c) Sachant que $\dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{2y} = 14$, déterminer la valeur de y.

2. (a) Une suite de six termes est formée de manière que chaque terme, après le deuxième, est égal à la somme des deux termes précédents. Sachant que le quatrième terme est 13 et que le sixième terme est 36, quel est le premier terme de la suite ?

   (b) Pour un nombre réel $r \neq 0$, la suite $5r$, $5r^2$, $5r^3$ est telle que la somme du deuxième terme et du troisième terme est égale au carré du premier terme. Quelle est la valeur de r ?

   (c) Jacques a écrit quatre tests la semaine dernière. La moyenne de ses notes sur les premier, deuxième et troisième tests était de 65. La moyenne de ses notes sur les deuxième, troisième et quatrième tests était de 80. Sa note au quatrième test était le double de celle du premier. Déterminer sa note au quatrième test.

3. (a) La représentation graphique de l'équation $y = r(x-3)(x-r)$ coupe l'axe des ordonnées au point $(0, 48)$. Quelles sont les deux valeurs possibles de r ?

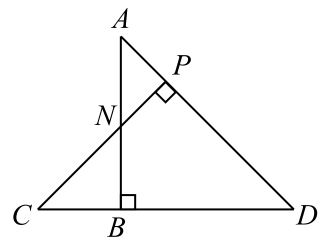
(b) Un vélo coûte B \$ avant taxes. Si la taxe de vente était de 13 %, Annemiek paierait en tout 24 \$ de plus que si la taxe de vente était de 5 %. Quelle est la valeur de B ?

(c) La fonction f est telle que :

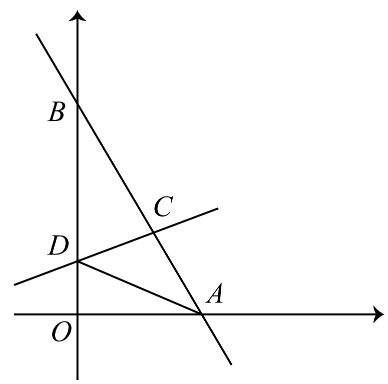
- $f(1) = 3$.
- $f(2n) = (f(n))^2$ pour tous les entiers strictement positifs n.
- $f(2m+1) = 3f(2m)$ pour tous les entiers strictement positifs m.

Déterminer la valeur de $f(2) + f(3) + f(4)$.

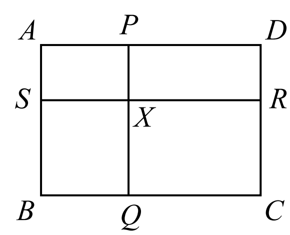
4. (a) Dans la figure ci-contre, AB est perpendiculaire à CD, CP est perpendiculaire à AD, et AB et CP se coupent en N. De plus, $\angle ADB = 45°$, $AB = 12$ et $CB = 6$. Quelle est l'aire du triangle APN ?



(b) Dans la figure ci-contre, la droite d'équation $y = -3x + 6$ coupe l'axe des abscisses en A et l'axe des ordonnées en B. Supposons que $m > 0$ et que la droite d'équation $y = mx + 1$ coupe l'axe des ordonnées en D et coupe la droite d'équation $y = -3x + 6$ en C. Si O est l'origine et que l'aire du triangle ACD est la moitié de l'aire du triangle ABO, déterminer les coordonnées de C.



5. (a) Dans la figure ci-contre, les segments PQ et RS se coupent en X et divisent le rectangle $ABCD$ en quatre petits rectangles. Les aires de ces petits rectangles sont 2, 6, 3 et a, dans un ordre quelconque. Quelles sont les trois valeurs possibles de a ?



(b) Supposons que la parabole d'équation $y = x^2 - 4tx + 5t^2 - 6t$ a deux abscisses à l'origine distinctes. Déterminer la valeur de t pour laquelle la distance entre ces deux abscisses à l'origine est aussi grande que possible.

6. (a) Il existe M entiers entre 10 000 et 100 000 qui sont des multiples de 21 et dont le chiffre des unités est 1. Quelle est la valeur de M ?

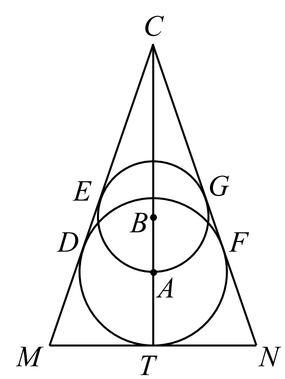
(b) Il y a N ($500 < N < 600$) élèves qui fréquentent le lycée Strickland. Parmi ces N élèves, $\frac{2}{5}$ font partie du club de sciences physiques et $\frac{1}{4}$ font partie du club de mathématiques. Dans le club de sciences physiques, le nombre d'élèves qui ne font pas partie du club de mathématiques est le double de ceux qui en font partie. Déterminer le nombre d'élèves qui ne font partie d'aucun des deux clubs.

7. (a) Arun et Bella courent sur une piste circulaire, partant de points diamétralement opposés. Arun court dans le sens des aiguilles d'une montre autour de la piste et Bella court dans le sens contraire. Arun et Bella courent à des vitesses constantes mais différentes. Ils se croisent pour la première fois après qu'Arun a couru 100 m. Ils se croisent pour la deuxième fois après que Bella a couru 150 m après leur premier point de rencontre. Quelle est la longueur de la piste ?

(b) Déterminer tous les angles θ avec $0° \leq \theta \leq 360°$ tels que

$$4^{1+\cos^3\theta} = 2^{2-\cos\theta} \cdot 8^{\cos^2\theta}$$

8. (a) Dans la figure ci-contre, le cercle de centre A a un rayon de 4 et A est situé sur le cercle de centre B et de rayon 3. La droite passant par A et par B est située le long du diamètre de chaque cercle et forme un angle droit avec MN au point T. De plus, MN est tangent au grand cercle tandis que MC et NC sont tous deux tangents aux deux cercles en points D, E, F et G, comme dans la figure ci-contre. Déterminer l'aire du triangle MNC.



(b) Determiner tous les triplets (x, y, z) de nombres réels qui vérifient le système d'équations :

$$\begin{aligned}
\log_9 x + \log_9 y + \log_3 z &= 2 \\
\log_{16} x + \log_4 y + \log_{16} z &= 1 \\
\log_5 x + \log_{25} y + \log_{25} z &= 0
\end{aligned}$$

9. Une fourmi marche le long de l'axe des abscisses en effectuant une séquence de pas de 1 unité chacun. Certains, tous, ou aucun de ces pas sont dans la direction positive de l'axe des abscisses ; certains, tous, ou aucun de ces pas sont dans la direction négative de l'axe des abscisses. La fourmi commence à marcher à partir de $x = 0$. Elle effectue n pas et s'arrête à $x = d$. Pour chaque telle séquence de pas, soit c le nombre de fois que la fourmi change de direction.

(a) Déterminer le nombre de séquences de pas différentes pour lesquelles $n = 9$ et $d = 5$.

(b) Soit $n = 9$ et $d = 3$. Déterminer le nombre de séquences pour lesquelles c est pair.

(c) Déterminer le nombre de couples (d, n) d'entiers avec $1 \leq n \leq 2024$ et $d \geq 0$ pour lesquels c est pair pour exactement la moitié des séquences de n pas qui se terminent à $x = d$.

10. Soit s et t des nombres réels avec $0 < s \leq 1$ et $0 < t \leq 1$. Les points $A(-1, 0)$, $B(0, 4)$ et $C(1, 0)$ forment le triangle ABC. Les points $S(s, 0)$ et $T(-t, 0)$ sont situés sur AC. Le point P est situé sur AB et le point Q est situé sur BC, aucun des deux n'étant un sommet du triangle ABC. Les segments de droites SP et TQ se coupent en X et divisent le triangle ABC en quatre régions. Pour certains tels couples (s, t) de nombres réels et points P et Q, les segments de droites SP et TQ divisent le triangle ABC en quatre régions de même aire. Un tel couple (s, t) est appelé un couple *équilibré*.

(a) Supposons que (s, t) est un couple équilibré avec $s = 1$ et que les segments de droites SP et TQ divisent le triangle ABC en quatre régions de même aire. Déterminer les coordonnées de P.

(b) Démontrer qu'ils existe des nombres réels d, e, f et g pour lesquels tous les couples équilibrés (s, t) vérifient une équation de la forme

$$s^2 + t^2 = dst + es + ft + g$$

et déterminer les valeurs de d, e, f et g.

(c) Déterminer une famille infinie de couples (s, t) distincts de nombres rationnels avec $0 < s \leq t \leq 1$ qui vérifient l'équation de la partie (b).

2024 Concours Euclide (français)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2024! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2024.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2024/2025
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— utiliser notre générateur de séries de problèmes gratuit pour créer des séries de problèmes afin de soutenir et d'enrichir le programme scolaire; veuillez noter que cette ressource n'est disponible qu'en anglais
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les concours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mardi 4 avril 2023
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 5 avril 2023
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1. (a) Sachant que n, $2n$, $3n$, $4n$ et $5n$ ont une moyenne de 18, quelle est la valeur de n ?

   (b) Soit $2x + y = 5$ et $x + 2y = 7$. Quelle est la moyenne de x et de y ?

   (c) Sachant que t^2, $2t$ et 3 ont une moyenne de 9 et que $t < 0$, déterminer la valeur de t.

2. (a) Si $Q(5, 3)$ est le milieu du segment de droite ayant pour extrémités $P(1, p)$ et $R(r, 5)$, quelles sont les valeurs de p et r ?

   (b) Une droite ayant une pente de 3 et une droite ayant une pente de -1 se coupent en $P(3, 6)$. Quelle est la distance entre les abscisses à l'origine des deux droites ?

   (c) Pour une certaine valeur de t, la droite d'équation $y = tx + t$ est perpendiculaire à la droite d'équation $y = 2x + 7$. Déterminer le point d'intersection de ces droites.

3. (a) Les diviseurs positifs de 6 sont 1, 2, 3 et 6. Quelle est la somme des diviseurs positifs de 64 ?

   (b) Fiona a écrit 4 entiers consécutifs sur un tableau. Son amie, Laure, efface l'un des entiers et remarque que la somme des entiers restants est égale à 847. Quel entier Laure a-t-elle effacé ?

   (c) Une suite arithmétique de 7 termes a pour premier terme r^2 et pour raison r. Les 7 termes de la suite ont une somme de 756. Déterminer toutes les valeurs possibles de r.

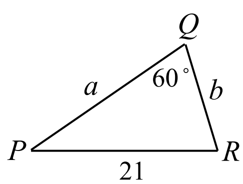
   (Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant au terme précédent une constante appelée *raison*. Par exemple, $3, 5, 7$ et 9 sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.)

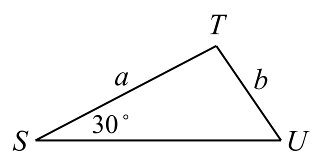
4. (a) Liang et Edmundo peignent à des vitesses différentes mais constantes. Liang peut peindre une pièce en 3 heures si elle travaille seule. Edmundo peut peindre la même pièce en 4 heures s'il travaille seul. Liang travaille seule pendant 2 heures puis s'arrête. Edmondo finit de peindre la pièce. En combien de minutes Edmundo pourra-t-il finir de peindre la pièce ?

(b) Au 1^er^ janvier 2021, un investissement avait une valeur de 400 \$.
Entre le 1^er^ janvier 2021 et le 1^er^ janvier 2022, la valeur de l'investissement a augmenté de $A\%$ (avec $A > 0$) par rapport à sa valeur au 1^er^ janvier 2021.
Entre le 1^er^ janvier 2022 et le 1^er^ janvier 2023, la valeur de l'investissement a diminué de $A\%$ par rapport à sa valeur au 1^er^ janvier 2022.
Au 1^er^ janvier 2023, l'investissement avait une valeur de 391 \$.
Déterminer toutes les valeurs possibles de A.

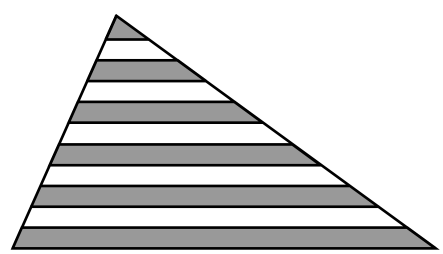
5. (a) Soit $f(x) = x^2 + (2n - 1)x + (n^2 - 22)$, n étant un entier. Quel est le plus petit entier strictement positif n pour lequel $f(x)$ n'admet aucune racine réelle ?

(b) Dans les figures ci-dessous, le triangle PQR est tel que $PQ = a$, $QR = b$, $PR = 21$ et $\angle PQR = 60°$. De plus, le triangle STU est tel que $ST = a$, $TU = b$, $\angle TSU = 30°$ et $\sin(\angle TUS) = \frac{4}{5}$. Déterminer les valeurs de a et b.

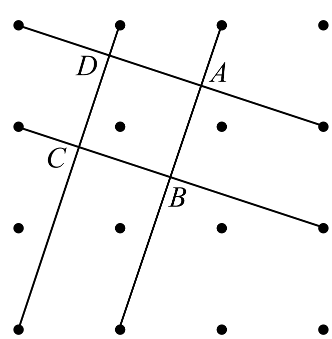




6. (a) Dans la figure ci-contre, un triangle ayant une aire de 770 cm^2 est coupé en 11 régions de même hauteur par 10 lignes qui sont toutes parallèles à la base du triangle. En partant du sommet du triangle, on voit que les régions alternent entre ombrées et non ombrées. Quelle est l'aire totale des régions ombrées ?



(b) Un treillis carré formé de 16 points est construit de sorte que les distances horizontales et verticales entre les points adjacents soient toutes exactement égales à 1 unité. Quatre paires de points sont chacune reliées par un segment de droite, comme on le voit dans la figure ci-contre. Les points d'intersection de ces segments de droites sont les sommets du carré $ABCD$. Déterminer l'aire du carré $ABCD$.



7. (a) Un sac contient 3 billes rouges et 6 billes bleues. Akshan retire une bille à la fois jusqu'à ce que le sac soit vide. Chaque bille qu'il retire est choisie au hasard parmi les billes restantes. Sachant que la première bille qu'Akshan retire du sac est rouge et que la troisième est bleue, quelle est la probabilité pour que les deux dernières billes qu'il retire soient bleues ?

(b) Déterminer le nombre de quadruplets (a, b, c, d) d'entiers strictement positifs qui vérifient $a < b < c < d$ et qui vérifient également le système d'équations suivant :

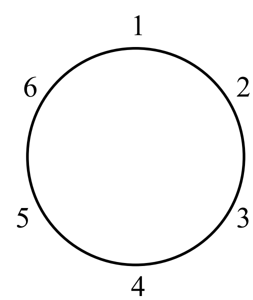
$$\begin{aligned} ac + ad + bc + bd &= 2023 \\ a + b + c + d &= 296 \end{aligned}$$

8. (a) Supposons que le triangle ABC est rectangle en B et qu'il est tel que $AB = n(n+1)$ et $AC = (n+1)(n+4)$, n étant un entier strictement positif. Déterminer le nombre d'entiers strictement positifs $n < 100\,000$ pour lesquels la longueur du côté BC est également un entier.

(b) Déterminer toutes les valeurs réelles de x qui vérifient

$$\sqrt{\log_2 x \cdot \log_2(4x) + 1} + \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2\left(\frac{x}{64}\right) + 9} = 4$$

9. Au Restaurant Canadien à Configurations Multiples, il y a des tables rondes autour desquelles sont placées des chaises. Lorsqu'une table est entourée de n chaises, n étant un entier tel que $n \geq 3$, les chaises sont numérotées en ordre croissant autour de la table (soit 1, 2, 3, $\ldots$, $n-1$, n). Une table est considérée comme étant pleine si l'on ne peut faire asseoir plus de personnes sans que deux personnes ne soient assis sur des chaises voisines. Par exemple, lorsque $n = 6$, on a des tables pleines lorsque les chaises suivantes sont occupées : $\{1, 4\}$ ou $\{2, 5\}$ ou $\{3, 6\}$ ou $\{1, 3, 5\}$ ou $\{2, 4, 6\}$. Donc, il y a 5 tables pleines différentes lorsque $n = 6$.



(a) Déterminer toutes les manières différentes dont on peut faire asseoir des personnes autour d'une table de 8 chaises de sorte que la table soit pleine. Pour chaque cas, indiquer les numéros des chaises occupées.

(b) Une table pleine autour de laquelle sont placées $6k + 5$ chaises, k étant un entier strictement positif, a t chaises occupées. Déterminer, en fonction de k, le nombre de valeurs possibles de t.

(c) Déterminer le nombre de tables pleines différentes lorsque $n = 19$.

10. Pour chaque nombre réel x, on définit $\lfloor x \rfloor$ comme étant égal au plus grand entier inférieur ou égal à x. (Ce que l'on appelle la « partie entière inférieure » de x.) Par exemple, $\lfloor 4{,}2 \rfloor = 4$, $\lfloor 5{,}7 \rfloor = 5$, $\lfloor -3{,}4 \rfloor = -4$, $\lfloor 0{,}4 \rfloor = 0$ et $\lfloor 2 \rfloor = 2$.

(a) Déterminer l'entier égal à $\left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{59}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{60}{3} \right\rfloor$.

(La somme compte 60 termes.)

(b) Déterminer un polynôme $p(x)$ tel que pour chaque entier strictement positif $m > 4$,

$$\lfloor p(m) \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{m-2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m-1}{3} \right\rfloor$$

(La somme compte $m - 1$ termes.)

Un *polynôme* $f(x)$ est une expression algébrique

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

n étant un entier quelconque avec $n \geq 0$ et $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ étant des nombres réels.

(c) Pour chaque entier n avec $n \geq 1$, on définit $f(n)$ comme étant égal à la somme infinie :

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{1^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{2^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3n}{3^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4n}{4^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5n}{5^2+1} \right\rfloor + \cdots$$

(La somme contient les termes $\left\lfloor \frac{kn}{k^2+1} \right\rfloor$ pour tous les entiers strictement positifs k et ne contient aucun autre terme.)

Soit $f(t+1) - f(t) = 2$, t étant un entier impair strictement positif. Démontrer que t est un nombre premier.

2023 Concours Euclide (français)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2023! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2023.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2023/2024
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les concours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mardi 5 avril 2022
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 6 avril 2022
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

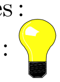
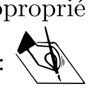
Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1. (a) Quelle est la valeur de $\dfrac{3^2 - 2^3}{2^3 - 3^2}$?

   (b) Quelle est la valeur de $\sqrt{\sqrt{81} + \sqrt{9} - \sqrt{64}}$?

   (c) Déterminer tous les nombres réels x qui vérifient $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 7}} = \dfrac{1}{4}$.

2. (a) Déterminer les trois couples (a, b) d'entiers tels que $1 < a < b$ et $ab = 2022$.

   (b) Soit c et d des entiers tels que $c > 0$, $d > 0$ et $\dfrac{2c + 1}{2d + 1} = \dfrac{1}{17}$. Quelle est la plus petite valeur possible de d ?

   (c) Soit p, r et t des nombres réels qui vérifient $(px + r)(x + 5) = x^2 + 3x + t$ pour tous les nombres réels x. Déterminer la valeur de t.

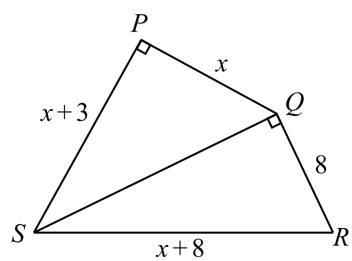
3. (a) Une grande carafe d'eau est remplie à $\frac{1}{4}$ d'eau. Après qu'on a rajouté 24 litres d'eau, la carafe est remplie à $\frac{5}{8}$. Quel est le volume de la carafe en litres ?

(b) Au début, Stéphanie a un grand nombre de ballons de soccer en sa possession. Elle en donne $\frac{2}{5}$ à Alphonso et $\frac{6}{11}$ à Christine. Le nombre de ballons qu'il lui reste est un multiple de 9. Quel est le plus petit nombre de ballons de soccer que Stéphanie aurait pu avoir au début ?

(c) Chaque élève d'un club de mathématiques fait partie soit de la section junior, soit de la section senior.
Aucun élève ne fait partie des deux sections.
Parmi les élèves de la section junior, 60 % sont gauchers et 40 % sont droitiers.
Parmi les élèves de la section senior, 10 % sont gauchers et 90 % sont droitiers.
Aucun élève du club de maths n'est à la fois gaucher et droitier.
Le nombre total d'élèves gauchers est égal au nombre total d'élèves droitiers dans le club de maths.
Déterminer le pourcentage des membres du club de mathématiques qui font partie de la section junior.

4. (a) L'hexagone $ABCDEF$ a pour sommets $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(7,2)$, $D(7,5)$, $E(3,5)$, $F(0,3)$. Quelle est l'aire de l'hexagone $ABCDEF$?

(b) Dans la figure ci-contre, le triangle PQS est rectangle en P et le triangle QRS est rectangle en Q. De plus, $PQ = x$, $QR = 8$, $RS = x + 8$, et $SP = x + 3$, x étant un nombre réel. Déterminer toutes les valeurs possibles du périmètre du quadrilatère $PQRS$.



5. (a) Une liste a_1, a_2, a_3, a_4 de nombres rationnels est telle que si l'un des termes est égal à r, alors le terme suivant est égal à $1 + \dfrac{1}{1+r}$. Par exemple, si $a_3 = \dfrac{41}{29}$, alors $a_4 = 1 + \dfrac{1}{1 + (41/29)} = \dfrac{99}{70}$. Si $a_3 = \dfrac{41}{29}$, quelle est la valeur de a_1 ?

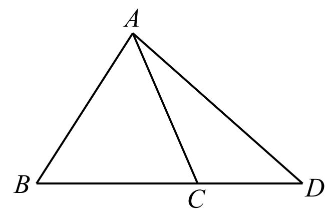
(b) Un tube cylindrique creux a un rayon de 10 mm et une hauteur de 100 mm. Le tube est placé sur une table horizontale de manière à reposer à plat sur une de ses bases circulaires. On verse de l'eau dans le tube jusqu'à une profondeur de h mm. Une tige cylindrique pleine a un rayon de 2,5 mm et une hauteur de 150 mm. La tige est placée dans le tube de manière qu'une de ses bases circulaires repose à plat sur le fond du tube. Après qu'on a placé la tige dans le tube, la profondeur de l'eau dans le tube est de 64 mm. Déterminer la valeur de h.

6. (a) Une fonction f est telle que $f\left(\dfrac{2x+1}{x}\right) = x + 6$ pour toutes les valeurs réelles de $x \neq 0$. Quelle est la valeur de $f(4)$?

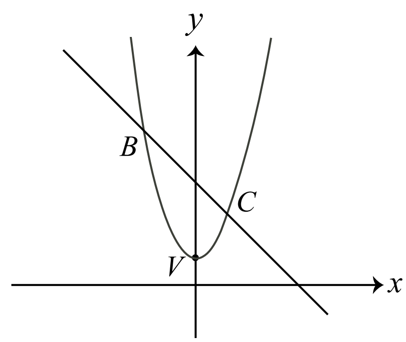
(b) Déterminer tous les nombres réels a, b et c pour lesquels la représentation graphique de la fonction $y = \log_a(x + b) + c$ passe aux points $P(3, 5)$, $Q(5, 4)$ et $R(11, 3)$.

7. (a) Un ordinateur est programmé pour choisir un entier de 1 à 99 de sorte que la probabilité qu'il choisisse l'entier x est égale à $\log_{100}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$. Supposons que la probabilité que $81 \leq x \leq 99$ est égale au double de la probabilité que $x = n$, n étant un entier. Quelle est la valeur de n ?

(b) Dans la figure ci-contre, C est situé sur le côté BD du triangle ABD. De plus, $BC = 2$, $CD = 1$, $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{3}{4}$ et $\cos(\angle ACD) = -\dfrac{3}{5}$. Déterminer la longueur de AB.



8. (a) Supposons que $a > \frac{1}{2}$ et que la parabole d'équation $y = ax^2 + 2$ a pour sommet V. La parabole coupe la droite d'équation $y = -x + 4a$ aux points B et C, comme on le voit dans la figure ci-contre. Si le triangle VBC a une aire de $\frac{72}{5}$, déterminer la valeur de a.



(b) Considérer la proposition suivante :

> Il existe un triangle non équilatéral dont les longueurs des côtés forment une suite géométrique et dont les mesures des angles forment une suite arithmétique.

Démontrer la véracité de cette proposition en trouvant un tel triangle ou réfuter la proposition en démontrant qu'il ne peut y avoir un tel triangle.

9. Soit m ($m \geq 2$) et n des entiers strictement positifs. Une *suite en dents de scie* (m, n) est une suite d'entiers consécutifs de premier terme 1 dont le nombre de dents est égal à n. Chaque dent commence à 2, monte jusqu'à m et redescend à 1. Par exemple, la suite en dents de scie $(3, 4)$ est

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & 3 & & & & 3 & & & & 3 & & & & 3 & & \\
 & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & \\
1 & & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & & 1
\end{array}$$

La suite en dents de scie $(3, 4)$ comprend 17 termes dont la moyenne est égale à $\frac{33}{17}$.

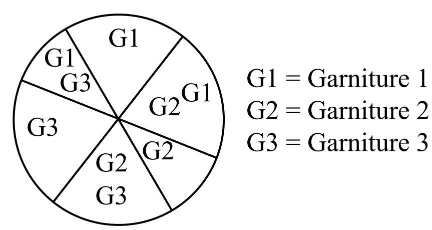
(a) Déterminer la somme des termes de la suite en dents de scie $(4, 2)$.

(b) Pour chaque entier strictement positif $m \geq 2$, déterminer une expression simplifiée représentant la somme des termes de la suite en dents de scie $(m, 3)$.

(c) Déterminer tous les couples (m, n) tels que les termes de la suite en dents de scie (m, n) ont une somme de 145.

(d) Pour tous les couples (m, n) d'entiers strictement positifs ($m \geq 2$), démontrer que la moyenne des termes de la suite en dents de scie (m, n) n'est pas un entier.

10. Dans le restaurant de pizza d'Alexis, les pizzas sont en forme de cercle et les garnitures y sont placées de manière aléatoire. Pour chaque pizza, chaque garniture est placée sur une moitié demi-circulaire choisie au hasard et le demi-cercle de chaque garniture est choisi indépendamment. Pour placer chaque garniture, Alexis dessine d'abord un diamètre dont l'angle formé avec l'horizontale est choisi au hasard et uniformément. Cela divise la pizza en deux demi-cercles. Ensuite, on choisit l'une des deux moitiés au hasard pour y placer la garniture.



(a) Pour une pizza à deux garnitures, déterminer la probabilité pour qu'au moins $\frac{1}{4}$ de la pizza soit couverte par les deux garnitures.

(b) Pour une pizza à trois garnitures, déterminer la probabilité pour qu'une région de la pizza ayant une aire non nulle soit couverte par toutes les trois garnitures. (Dans la figure ci-dessus, on voit une pizza dont aucune région n'est couverte par les trois garnitures à la fois.)

(c) Soit N un entier strictement positif. Pour une pizza à N garnitures, déterminer la probabilité, en fonction de N, qu'une région de la pizza ayant une aire non nulle soit couverte par les N garnitures à la fois.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2022! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2022.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2022/2023
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les concours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mercredi 7 avril 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 8 avril 2021
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

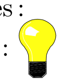
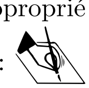
Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1. (a) Quelle est la valeur de a pour laquelle $(a - 1) + (2a - 3) = 14$?

   (b) Quelles sont les deux valeurs de c pour lesquelles $(c^2 - c) + (2c - 3) = 9$?

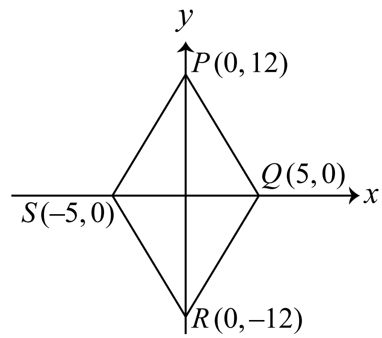
   (c) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{2x^2} = 10$.

2. (a) Quelle est la somme des chiffres de l'entier égal à $(10^3 + 1)^2$?

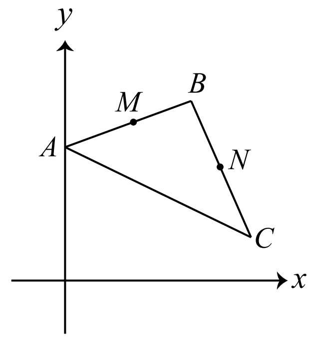
   (b) Une boulangerie vend des petits biscuits et des grands biscuits. Avant une augmentation de prix, le prix de chaque petit biscuit était de 1,50 \$ tandis que le prix de chaque grand biscuit était de 2,00 \$. La boulangerie augmente le prix de chaque petit biscuit de 10 % et celui de chaque grand biscuit de 5 %. Par quel pourcentage augmentera le coût total d'un achat de 2 petits biscuits et 1 grand biscuit ?

   (c) Qing est deux fois plus vieux que Rayna. Qing a 4 ans de moins que Paolo. L'âge moyen de Paolo, Qing et Rayna est de 13 ans. Déterminer leurs âges.

3. (a) Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un quadrilatère. Quel est le périmètre de $PQRS$?



(b) Dans la figure ci-contre, A a pour coordonnées $(0, 8)$. De plus, le milieu de AB est $M(3, 9)$ tandis que le milieu de BC est $N(7, 6)$. Quelle est la pente de AC ?



(c) La parabole d'équation $y = -2x^2 + 4x + c$ a pour sommet $S(1, 18)$. La parabole coupe l'axe des ordonnées en D et l'axe des abscisses en E et F. Déterminer l'aire du triangle DEF.

4. (a) Si $3(8^x) + 5(8^x) = 2^{61}$, quelle est la valeur du nombre réel x ?

(b) Pour certains nombres réels m et n, la liste $3n^2$, m^2, $2(n+1)^2$ est composée de trois entiers consécutifs écrits en ordre croissant. Déterminer toutes les valeurs possibles de m.

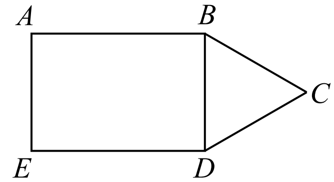
5. (a) Charlotte considère le point $(3, 5)$ et applique le processus en trois étapes (que l'on appelle $\mathcal{P}$) suivant :

Étape 1 : Le point subit une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
Étape 2 : Le point résultant subit une translation de 2 unités vers le haut.
Étape 3 : Le point résultant subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées.

En appliquant ce processus, le point $(3, 5)$ passe à $(3, -5)$, puis à $(3, -3)$ et enfin à $(-3, -3)$.

Charlotte considère ensuite un autre point, soit le point S_0. Elle applique le processus en trois étapes $\mathcal{P}$ au point S_0 pour obtenir le point S_1. Elle applique ensuite le processus $\mathcal{P}$ au point S_1 pour obtenir le point S_2. Elle applique $\mathcal{P}$ quatre fois de plus, en utilisant chaque fois la sortie précédente de $\mathcal{P}$ comme nouvelle entrée, et obtient finalement le point $S_6(-7, -1)$. Quelles sont les coordonnées du point S_0 ?

(b) Dans la figure ci-contre, $ABDE$ est un rectangle, le triangle BCD est équilatéral et AD est parallèle à BC. De plus, $AE = 2x$, x étant un nombre réel quelconque.



(i) Déterminer la longueur de AB en fonction de x.

(ii) Déterminer des entiers strictement positifs r et s pour lesquels $\dfrac{AC}{AD} = \sqrt{\dfrac{r}{s}}$.

6. (a) Supposons que $n > 5$ et que les nombres $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1}, t_n$ forment une suite arithmétique de n termes. Si $t_3 = 5$, $t_{n-2} = 95$ et que les n termes ont une somme de 1000, quelle est la valeur de n ?

(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant au terme précédent une constante appelée *raison*. Par exemple, $3, 5, 7$ et 9 sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.)

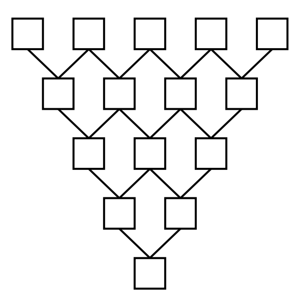
(b) On considère deux nombres réels a et r. Une suite géométrique de premier terme a et de raison r contient 4 termes. Les termes de cette suite géométrique ont une somme de $6 + 6\sqrt{2}$. Une seconde suite géométrique, également de premier terme a et de raison r, contient 8 termes. Les termes de cette seconde suite géométrique ont une somme de $30 + 30\sqrt{2}$. Déterminer toutes les valeurs possibles de a.

(Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante non nulle appelée *raison*. Par exemple, 3, -6, 12 et -24 sont les quatre premiers termes d'une suite géométrique.)

7. (a) Un sac ne contient que 3 boules vertes et 4 boules rouges. Victor retire les boules du sac au hasard, une à la fois, et les place sur une table. Chaque boule du sac a la même chance d'être choisie. Victor arrête de retirer les boules lorsqu'il y a deux boules de la même couleur sur la table. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 1 boule rouge et au moins 1 boule verte sur la table au moment où Victor arrête de retirer les boules ?

(b) Supposons que $f(a) = 2a^2 - 3a + 1$ pour tous les nombres réels a et que $g(b) = \log_{\frac{1}{2}} b$ avec $b > 0$. Déterminer toutes les valeurs de θ dans l'intervalle $0 \le \theta \le 2\pi$ qui vérifient $f(g(\sin\theta)) = 0$.

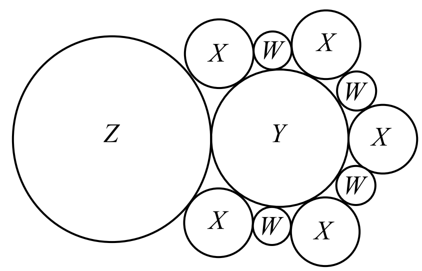
8. (a) Cinq entiers distincts doivent être choisis de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et placés dans un certain ordre dans la rangée supérieure de cases de la figure ci-contre. Chaque case qui n'est pas dans la rangée supérieure contient le produit des nombres entiers dans les deux cases qui lui sont reliées dans la rangée directement au-dessus. Déterminer le nombre de façons dont les entiers peuvent être choisis et placés dans la rangée supérieure de manière que l'entier dans la case du bas soit 9 953 280 000.



(b) Démontrer que l'entier $\dfrac{(1!)(2!)(3!)\cdots(398!)(399!)(400!)}{200!}$ est un carré parfait. (Dans cette fraction, le numérateur est le produit des factorielles des entiers de 1 à 400.)

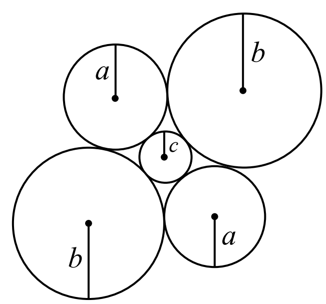
9. (a) Soit $a = 5$ et $b = 4$. Déterminer tous les couples d'entiers (K, L) pour lesquels $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$.
   (b) Pour tous les entiers K et L, démontrer qu'il existe au moins un couple d'entiers (a, b) tel que $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$.
   (c) Pour tous les entiers a et b, démontrer qu'il existe au moins un couple d'entiers (K, L) tel que $K^2 + 3L^2 = a^2 + b^2 - ab$.

10. (a) La figure ci-contre contient onze cercles de quatre tailles différentes. Chaque cercle indiqué par la lettre W est de rayon 1, chaque cercle indiqué par la lettre X est de rayon 2, le cercle indiqué par la lettre Y est de rayon 4 et le cercle indiqué par la lettre Z est de rayon r. Chacun des cercles indiqué par la lettre W ou X est tangent à trois autres cercles. Le cercle Y est tangent aux dix autres cercles. Le cercle Z est tangent à trois autres cercles. Déterminer des entiers strictement positifs s et t pour lesquels $r = \dfrac{s}{t}$.



   (b) Soit c un entier strictement positif. Soit $f(c)$ le nombre de couples d'entiers strictement positifs (a, b) avec $c < a < b$ pour lesquels on peut dessiner deux cercles de rayon a, deux cercles de rayon b et un cercle de rayon c de manière que :
   - chaque cercle de rayon a soit tangent aux deux cercles de rayon b et au cercle de rayon c et
   - chaque cercle de rayon b soit tangent aux deux cercles de rayon a et au cercle de rayon c,

   comme dans la figure ci-contre. Déterminer tous les entiers strictement positifs c pour lesquels $f(c)$ est pair.



**Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE**

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2021! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2021.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2021/2022
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mardi 7 avril 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 8 avril 2020
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1. (a) Si $x = 11$, quelle est la valeur de $\dfrac{3x+6}{x+2}$?

   (b) Quelle est l'ordonnée à l'origine de la droite qui passe aux points $A(-1, 5)$ et $B(1, 7)$?

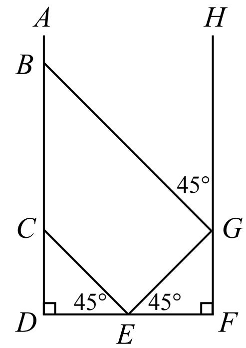
   (c) Les droites d'équations $y = 3x + 7$, $y = x + 9$ et $y = mx + 17$ se coupent toutes en un même point. Déterminer la valeur de m.

2. (a) Le nombre impair m est un entier strictement positif composé de trois chiffres distincts. Sachant que le chiffre des centaines est égal au produit des chiffres des unités et des dizaines, quel est l'entier m ?

   (b) Éléonore a un sac de 100 billes, chacune étant noire ou dorée. Le rapport du nombre de billes noires au nombre de billes dorées est de 1 : 4. Combien de billes dorées doit-elle rajouter au sac afin que ce rapport soit égal à 1 : 6 ?

   (c) Soit n un entier strictement positif et soit la valeur de $\dfrac{n^2+n+15}{n}$ un entier. Déterminer toutes les valeurs possibles de n.

3. (a) Claudette tient un pointeur laser au point C et pointe le faisceau laser vers le point E. Le faisceau heurte DF au point E et se réfléchit vers FH qu'il heurte au point G avant de se réfléchir vers AD qu'il heurte au point B, comme dans la figure ci-contre. Si $DE = EF = 1$ m, quelle est la longueur de BD en mètres ?



(b) Adèle considère les valeurs $x = 10$ et $y = 2$, et applique le procédé suivant :

> Étape 1 : On additionne x et y. Soit x égal au résultat de cette addition. La valeur de y demeure inchangée.
>
> Étape 2 : On multiplie x et y. Soit x égal au résultat de cette multiplication. La valeur de y demeure inchangée.
>
> Étape 3 : On additionne y et 1. Soit y égal au résultat de cette addition. La valeur de x demeure inchangée.

Adèle dresse la liste des valeurs de x et de y à chaque étape :

	x	y
Avant l'Étape 1	10	2
Après l'Étape 1	12	2
Après l'Étape 2	24	2
Après l'Étape 3	24	3

À partir des nouvelles valeurs de x et de y, soit $x = 24$ et $y = 3$, Adèle applique le procédé deux fois de plus. Quelle est la valeur finale de x ?

(c) Déterminer tous les entiers k pour lesquels la parabole d'équation $y = kx^2+6x+k$ a deux abscisses à l'origine distinctes étant donné que $k \neq 0$.

4. (a) Les entiers strictement positifs a et b n'ont aucun diviseur commun supérieur à 1. Sachant que b et a ont une différence de 15 et que $\frac{5}{9} < \frac{a}{b} < \frac{4}{7}$, quelle est la valeur de $\frac{a}{b}$?

(b) On considère une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 10.
On considère une suite arithmétique de raison d et de premier terme 10.
Le rapport du 6$^{\text{e}}$ terme de la suite géométrique au 4$^{\text{e}}$ terme de la suite géométrique est égal au rapport du 6$^{\text{e}}$ terme de la suite arithmétique au 4$^{\text{e}}$ terme de la suite arithmétique.
Déterminer toutes les valeurs possibles de d.

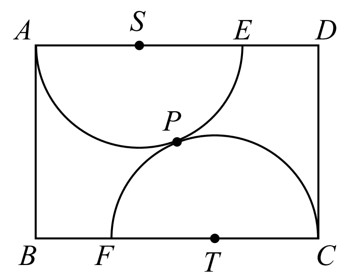
(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant au terme précédent une constante appelée *raison*. Par exemple, $3, 5, 7$ et 9 sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.
Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante non nulle appelée *raison*. Par exemple, $3, 6$ et 12 est une suite géométrique de trois termes.)

5. (a) Pour chaque nombre réel positif x, on définit $f(x)$ comme étant le nombre de nombres premiers p qui vérifient $x \leq p \leq x+10$. Quelle est la valeur de $f(f(20))$?

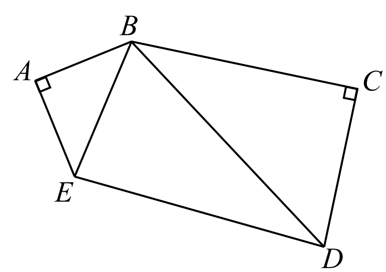
(b) Déterminer tous les triplets (x, y, z) de nombres réels qui vérifient le système d'équations :

$$\begin{aligned}(x-1)(y-2) &= 0\\(x-3)(z+2) &= 0\\x+yz &= 9\end{aligned}$$

6. (a) Dans la figure ci-contre, le rectangle $ABCD$ est tel que $AB = 4$ et $BC = 6$. Le demi-cercle de diamètre AE a pour centre S et le demi-cercle de diamètre FC a pour centre T. Les deux demi-cercles, de centres S et T, ont chacun un rayon de r et se touchent en un seul point, P. Quelle est la valeur de r ?



(b) Dans la figure ci-contre, le triangle ABE est rectangle en A et le triangle BCD est rectangle en C. De plus, $\angle ABC = 135°$ et $AB = AE = 7\sqrt{2}$. Soit $DC = 4x$, $DB = 8x$ et $DE = 8x - 6$, x étant un nombre réel quelconque. Déterminer toutes les valeurs possibles de x.



7. (a) Soit g une fonction qui vérifie $g(x) = 2x - 4$ pour tout nombre réel x et soit g^{-1} la fonction réciproque de g. Soit f une fonction qui vérifie l'équation $g(f(g^{-1}(x))) = 2x^2 + 16x + 26$ pour tout nombre réel x. Quelle est la valeur de $f(\pi)$?

(b) Déterminer tous les couples d'angles (x, y) tels que $0° \leq x < 180°$ et $0° \leq y < 180°$ qui vérifient le système d'équations :

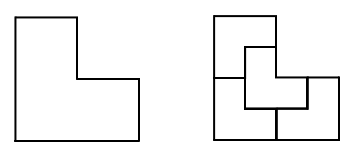
$$\log_2(\sin x \cos y) = -\frac{3}{2}$$

$$\log_2\left(\frac{\sin x}{\cos y}\right) = \frac{1}{2}$$

8. (a) Quatre joueurs de tennis, Alain, Bianca, Chen et Dave, participent à un tournoi dans lequel on joue un total de trois matchs. Tout d'abord, on choisit au hasard deux joueurs afin qu'ils s'affrontent lors d'un premier match. Les deux autres joueurs s'affrontent également lors d'un deuxième match. Les vainqueurs des deux premiers matchs s'affronteront lors d'un troisième match pour le titre de champion du tournoi. Alain, Bianca et Chen sont tous les trois des joueurs de même niveau (c.-à-d. chacun d'eux a une même probabilité de victoire contre chacun des deux autres joueurs lors d'un match, soit une probabilité de $\frac{1}{2}$). Lorsque Dave affronte chacun des trois autres joueurs, sa probabilité de victoire est égale à p, p étant un nombre réel quelconque. Déterminer la probabilité que Bianca gagne le titre de champion du tournoi. Exprimer la réponse sous la forme $\dfrac{ap^2+bp+c}{d}$, a, b, c et d étant des entiers.

(b) On aligne les microphones A, B et C en ligne droite de manière que A soit situé à 1 km à l'ouest de B et que C soit situé à 2 km à l'est de B. Une grande explosion se produit à un point P, ce dernier n'étant pas situé sur cette ligne. Le son voyage à une vitesse de $\frac{1}{3}$ km/s et a été capté par chacun des trois microphones. Le microphone B est le premier à capter le son. Le microphone A capte le son $\frac{1}{2}$ s après le microphone B tandis que le microphone C le capte 1 s après le microphone A. Déterminer la distance entre le microphone B et le point P.

9. (a) Dans la figure ci-contre, on crée une forme L à l'aide de trois carrés isométriques attenants. On subdivise ensuite la forme L en quatre L plus petits. Ensuite, chacun de ces L résultants est subdivisé de la même manière. Après qu'il y ait eu trois subdivisions, combien de L de la plus petite taille y a-t-il ?



Le L d'origine   Après la 1ère subdivision

(b) Après la troisième subdivision, combien de L de la plus petite taille sont orientés de la même manière que le L d'origine ?

(c) On effectue 2020 subdivisions en commençant par la forme L d'origine. Déterminer combien de L de la plus petite taille sont orientés de la même manière que le L d'origine.

10. Kerry a une liste de n entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dont l'arrangement est tel que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Kerry calcule la somme des entiers de chacun des $m = \frac{1}{2}n(n-1)$ couples possibles d'entiers dans sa liste. Ensuite, elle arrange les sommes telles que $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_m$. Par exemple, si la liste de Kerry est composée des trois entiers $1, 2$ et 4, il y a trois couples possibles d'entiers et donc trois sommes possibles, soit $3, 5$ et 6.

(a) Soit $n = 4$ et soit $s_1 = 8$, $s_2 = 104$, $s_3 = 106$, $s_4 = 110$, $s_5 = 112$ et $s_6 = 208$ la liste des 6 sommes des entiers de chacun des couples possibles d'entiers. Déterminer deux listes a_1, a_2, a_3, a_4 possibles.

(b) Soit $n = 5$ et soit $s_1, s_2, \ldots, s_{10}$ la liste des 10 sommes des entiers de chacun des couples possibles d'entiers. Démontrer qu'il n'y a qu'une seule liste a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 possible.

(c) Soit $n = 16$. Démontrer qu'il y a deux listes différentes, soit la liste $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ et la liste $b_1, b_2, \ldots, b_{16}$, qui auront la même liste de sommes $s_1, s_2, \ldots, s_{120}$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2020! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2020.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2020/2021
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mercredi 3 avril 2019
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 4 avril 2019
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

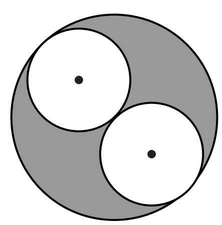
Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1. (a) Joyce a deux pots identiques. Le premier pot contient 300 mL d'eau et n'est rempli qu'à $\frac{3}{4}$. Un deuxième pot n'est rempli qu'à $\frac{1}{4}$. Quelle quantité d'eau le second pot contient-il en mL ?

   (b) Quel entier a vérifie $3 < \dfrac{24}{a} < 4$?

   (c) Si $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = 2$, déterminer toutes les valeurs possibles de x.

2. (a) Dans la figure ci-contre, deux petits cercles de rayon 1 sont tangents l'un à l'autre. Ces derniers sont aussi tangents à un cercle plus grand de rayon 2. Quelle est l'aire de la région ombrée ?



   (b) Kari fait du jogging à une vitesse constante de 8 km/h. Mo fait du jogging à une vitesse constante de 6 km/h. Kari et Mo commencent à faire du jogging en ligne droite à partir du même point de départ jusqu'au même point d'arrivée. Mo commence à faire du jogging à 10h00. Kari et Mo finissent tous les deux à 11h00. À quelle heure Kari a-t-elle commencé à faire du jogging ?

   (c) La droite d'équation $x + 3y = 7$ est parallèle à la droite d'équation $y = mx + b$. La droite d'équation $y = mx + b$ passe par le point $(9, 2)$. Déterminer la valeur de b.

3. (a) Michèle calcule la moyenne des nombres suivants :

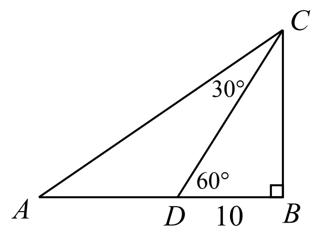
$$5, 10, 15, 16, 24, 28, 33, 37$$

Daphne enlève un nombre et calcule la moyenne des nombres restants. Daphne a calculé une moyenne qui est inférieure de 1 à celle qu'a calculé Michèle. Lequel des nombres Daphne a-t-elle enlevé ?

(b) Si $16^{\frac{15}{x}} = 32^{\frac{4}{3}}$, quelle est la valeur de x ?

(c) Étant donné que $\dfrac{2^{2022} + 2^a}{2^{2019}} = 72$. Déterminer la valeur de a.

4. (a) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B et le point D est situé sur AB. Si $DB = 10$, $\angle ACD = 30°$ et $\angle CDB = 60°$, quelle est la longueur de AD ?



(b) Les points $A(d, -d)$ et $B(-d + 12, 2d - 6)$ sont situés sur un cercle dont le centre est situé à l'origine. Déterminer les valeurs possibles de d.

5. (a) Déterminer les deux couples d'entiers positifs (a, b) qui vérifient l'équation

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{50}$$

étant donné que $a < b$.

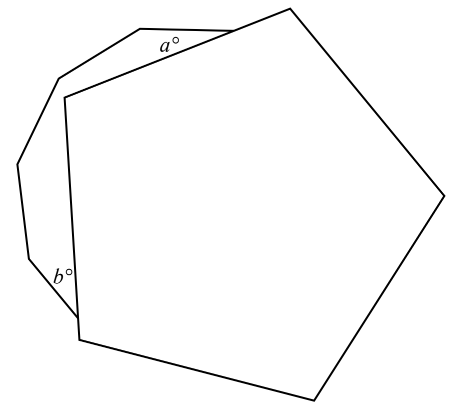
(b) On considère le système d'équations suivant :

$$c + d = 2000$$
$$\frac{c}{d} = k$$

Déterminer le nombre d'entiers k, où $k \geq 0$, qui admettraient au moins un couple d'entiers (c, d) comme solution au système.

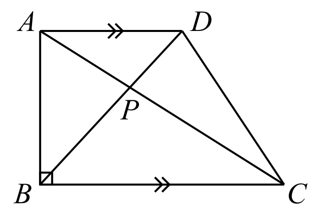
6. (a) Dans la figure ci-contre, un pentagone régulier recouvre une partie d'un autre polygone régulier. Ce polygone régulier a n côtés, dont cinq sont complètement ou partiellement visibles. Dans la figure, la somme des mesures des angles dénotés a° et b° est égale à 88°. Déterminer la valeur de n.

(Un *polygone régulier* est un polygone dont les côtés sont de même longueur et dont les angles intérieurs sont de même mesure.)



(b) Dans le trapèze $ABCD$, BC est parallèle à AD mais est perpendiculaire à AB. De plus, les longueurs de AD, de AB et de BC, forment dans cet ordre une suite géométrique. Démontrer que AC est perpendiculaire à BD.

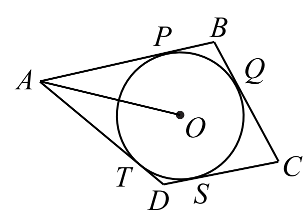
(Une *suite géométrique* est une suite numérique dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante dont la valeur n'est pas 0.)



7. (a) Déterminer tous les nombres réels x pour lesquels $2\log_2(x-1) = 1 - \log_2(x+2)$.

(b) On considère la fonction $f(x) = x^2 - 2x$. Déterminer tous les nombres réels x qui vérifient l'équation $f(f(f(x))) = 3$.

8. (a) Dans la figure ci-contre, un cercle de centre O a un rayon de 1. Les 4 côtés du quadrilatère $ABCD$ sont tangents au cercle aux points P, Q, S et T. De plus, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA$. Si $AO = 3$, déterminer la longueur de DS.



(b) Soit x une valeur qui vérifie $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et $\cos\left(\frac{3}{2}\cos x\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\sin x\right)$.

Déterminer toutes les valeurs possibles de $\sin 2x$. Exprimer la réponse de la forme $\dfrac{a\pi^2 + b\pi + c}{d}$ où a, b, c et d sont des entiers.

9. On définit $f(a,b) = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{1}{ab}$, a et b étant des entiers positifs.

Par exemple, $f(1,2)$ a une valeur de 3.

(a) Déterminer la valeur de $f(2,5)$.

(b) Déterminer tous les entiers positifs a pour lesquels $f(a,a)$ est un entier.

(c) Si a et b sont des entiers positifs et que $f(a,b)$ est un entier, démontrer que $f(a,b)$ doit être un multiple de 3.

(d) Déterminer quatre couples d'entiers positifs (a,b), où $2 < a < b$, pour lesquels $f(a,b)$ est un entier.

10. (a) Amir et Brigitte jouent à un jeu de cartes. Amir commence avec une main de 6 cartes dont 2 sont rouges, 2 sont jaunes et 2 sont vertes. Brigitte commence avec une main de 4 cartes dont 2 sont mauves et 2 sont blanches. Amir joue en premier. Amir et Brigitte jouent à tour de rôle. À chaque tour, le joueur choisit une de ses cartes au hasard et la pose sur la table. Les cartes restent sur la table pour le restant du jeu. Lorsqu'un joueur pose deux cartes de la même couleur sur la table, il gagne et le jeu se termine. Déterminer la probabilité qu'Amir soit le gagnant.

(b) Carlos a 14 pièces de monnaie numérotées de 1 à 14. Chaque pièce de monnaie a un côté que l'on surnommera ≪ pile ≫ . Lorsqu'on lance les pièces $1, 2, 3, \ldots, 13, 14$, elles tombent du côté pile dont les probabilités sont respectivement égales à $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_{13}, h_{14}$. Lorsque Carlos lance chacune des 14 pièces une seule fois, la probabilité qu'un nombre pair de pièces tombent du côté pile est égale à $\frac{1}{2}$. Existe-t-il un k de 1 à 14 pour lequel $h_k = \frac{1}{2}$? Démontrer la réponse.

(c) Serge et Lis ont chacun une machine qui peut imprimer un chiffre de 1 à 6. La machine de Serge peut imprimer les chiffres $1, 2, 3, 4, 5, 6$ dont les probabilités sont respectivement égales à p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6. La machine de Lis peut imprimer les chiffres $1, 2, 3, 4, 5, 6$ dont les probabilités sont respectivement égales à q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6. Chacune des machines imprime un chiffre. Soit $S(i)$ la probabilité que i soit la somme des deux chiffres imprimés. Si $S(2) = S(12) = \frac{1}{2}S(7)$ et que $S(7) > 0$, démontrer que $p_1 = p_6$ et que $q_1 = q_6$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2019! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2019.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— des copies gratuites des concours précédents

— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir

— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2019/2020

— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne

— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne

— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne

— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants

— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mercredi 11 avril 2018

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 12 avril 2018

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

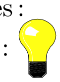
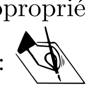
Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable, telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera, (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles
S'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

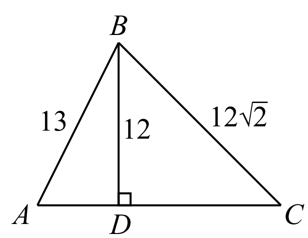
1. (a) Si $x = 11$, quelle est la valeur de $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3)$?

   (b) Si $\dfrac{a}{6} + \dfrac{6}{18} = 1$, quelle est la valeur de a ?

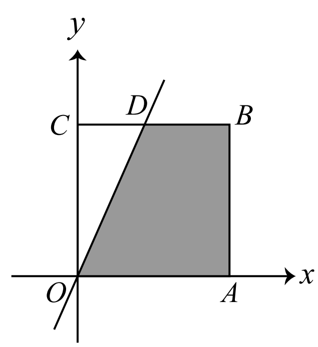
   (c) Une tablette de chocolat et deux paquets identiques de gomme à mâcher coutent 4,15 \$ en tout. Une tablette de chocolat coute 1,00 \$ de plus qu'un paquet de gomme. Déterminer le cout d'une tablette de chocolat.

2. (a) On utilise chacun des chiffres $1, 3, 5, 7$ et 9 pour former un entier de cinq chiffres. L'entier est supérieur à 80 000 et inférieur à 92 000. Le chiffre des unités est 3. Les chiffres des centaines et des dizaines, dans cet ordre, forment un entier de deux chiffres qui est divisible par 5. Quel est l'entier de cinq chiffres ?

   (b) Dans la figure ci-contre, le point D est sur AC de manière que BD soit perpendiculaire à AC. De plus, $AB = 13$, $BC = 12\sqrt{2}$ et $BD = 12$. Quelle est la longueur de AC ?



   (c) Dans la figure ci-contre, le carré $OABC$ a des côtés de longueur 6. La droite d'équation $y = 2x$ coupe CB en D. Déterminer l'aire de la région ombrée.



3. (a) Quelle est la valeur de $\left(\sqrt{4+\sqrt{4}}\right)^4$?

(b) Il existe exactement un couple (x, y) d'entiers strictement positifs pour lesquels $\sqrt{23-x} = 8 - y^2$. Quel est ce couple (x, y) ?

(c) La droite d'équation $y = mx + 2$ coupe la parabole d'équation $y = ax^2 + 5x - 2$ aux points $P(1, 5)$ et Q. Déterminer

(i) la valeur de m,

(ii) la valeur de a et

(iii) les coordonnées de Q.

4. (a) Les entiers positifs 34 et 80 ont exactement deux diviseurs communs positifs, soit 1 et 2. Combien d'entiers n dans l'intervalle $1 \leq n \leq 30$ ont pour propriété que n et 80 ont exactement deux diviseurs communs positifs ?

(b) Une fonction f est définie de manière que

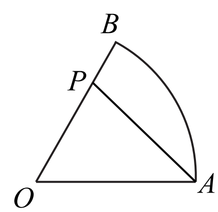
- $f(1) = 1$,
- si n est un entier pair strictement positif, alors $f(n) = f\left(\frac{1}{2}n\right)$ et
- si n est un entier impair tel que $n > 1$, alors $f(n) = f(n-1) + 1$.

Par exemple, $f(34) = f(17)$ et $f(17) = f(16) + 1$.

Déterminer la valeur de $f(50)$.

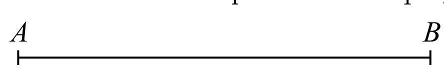
5. (a) Le triangle équilatéral PQR a un périmètre de 12. L'hexagone régulier $STUVWX$ a aussi un périmètre de 12. Quel est le rapport de l'aire du triangle PQR à l'aire de l'hexagone $STUVWX$?

(b) Dans la figure ci-contre, le secteur AOB est $\frac{1}{6}$ d'un disque complet de rayon 18. Ainsi $AO = BO = 18$. On coupe le secteur en deux régions en coupant droit du point A au point P sur OB. Les deux régions ont la même aire. Déterminer la longueur de OP.



6. (a) Combien y a-t-il d'entiers k tels que $0 < k < 18$ et $\dfrac{5\sin(10k^\circ) - 2}{\sin^2(10k^\circ)} \geq 2$?

(b) La figure suivante représente un chemin plat et droit qui joint A et B.



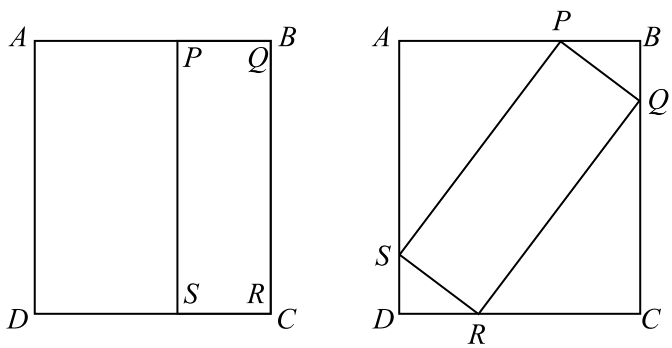
Karuna court de A à B, se retourne instantanément et revient à A en courant. Karuna court à la vitesse de 6 m/s. En partant en même temps que Karuna, Jorge court de B à A, se retourne instantanément et revient à B en courant. Jorge court de B à A à la vitesse de 5 m/s et de A à B à la vitesse de 7,5 m/s. Il y a une distance de 297 m entre A et B et chaque coureur met exactement 99 s pour terminer sa course. Déterminer les deux valeurs de t pour lesquelles Karuna et Jorge sont au même endroit sur la route après t secondes.

7. (a) Huit personnes, y compris les triplets Annie, Dany et Fannie, partent en voyage dans quatre canots. Chaque canot a deux places. Les huit personnes seront affectées de façon aléatoire aux quatre canots, deux par canot. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas deux des triplets Annie, Dany et Fannie dans un même canot ?

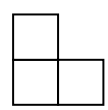
(b) La diagonale WY du carré $WXYZ$ a une pente de 2. Déterminer la somme des pentes de WX et de XY.

8. (a) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $\log_{2x}(48\sqrt[3]{3}) = \log_{3x}(162\sqrt[3]{2})$.

(b) Dans la figure suivante, le rectangle $PQRS$ est placé dans le rectangle $ABCD$ de deux manières différentes : d'abord de manière que Q soit au point B et que R soit au point C ; ensuite, de manière que P soit sur AB, que Q soit sur BC, que R soit sur CD et que S soit sur DA.



Sachant que $AB = 718$ et que $PQ = 250$, déterminer la longueur de BC.

9. Un L-triomino est composé de trois carrés unités comme ceci : 

On considère deux entiers strictement positifs, H et L. Un rectangle $H \times L$ est *pavable* s'il peut être complètement recouvert de copies non chevauchantes (chacune pouvant être tournée ou glissée) de ce L-triomino et si la somme des aires de ces L-triominos non chevauchants est égale à l'aire du rectangle (c'est-à-dire qu'aucun L-triomino n'est partiellement à l'extérieur du rectangle). Si un tel rectangle peut être pavé, un *pavage* est une configuration particulière de L-triominos qui pavent le rectangle.

(a) Tracer un pavage d'un rectangle 3×8.

(b) Déterminer tous les entiers L pour lesquels un rectangle $6 \times L$ peut être pavé, tout en justifiant sa démarche.

(c) Déterminer tous les couples (H, L) d'entiers ($H \geq 4$ et $L \geq 4$) pour lesquels un rectangle $H \times L$ peut être pavé, tout en justifiant sa démarche.

10. Dans un tableau infini de deux rangées, les nombres de la première rangée se nomment $\ldots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \ldots$ et les nombres de la deuxième rangée se nomment $\ldots, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, B_2, \ldots$ Pour chaque entier k, le nombre A_k est directement au-dessus du nombre B_k dans le tableau, comme suit :

$\ldots$	A_{-2}	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	$\ldots$
$\ldots$	B_{-2}	B_{-1}	B_0	B_1	B_2	$\ldots$

Pour chaque entier k, A_k est égal à la moyenne du nombre à sa gauche, du nombre à sa droite et du nombre au-dessous de lui ; de même, chaque B_k est égal à la moyenne du nombre à sa gauche, du nombre à sa droite et du nombre au-dessus de lui.

(a) Dans un tel tableau, on a $A_0 = A_1 = A_2 = 0$ et $A_3 = 1$.
Déterminer la valeur de A_4.
On accorde un maximum de 2 points pour cette partie.

(b) Dans un autre tel tableau, on définit $S_k = A_k + B_k$ pour chaque entier k.
Démontrer que $S_{k+1} = 2S_k - S_{k-1}$ pour chaque entier k.
On accorde un maximum de 2 points pour cette partie.

(c) On considère les deux énoncés suivants au sujet d'un troisième tel tableau :

(P) Si chaque nombre du tableau est un entier strictement positif, alors tous les nombres du tableau sont égaux.

(Q) Si chaque nombre du tableau est un nombre réel strictement positif, alors tous les nombres du tableau sont égaux.

Démontrer l'énoncé (Q).
On accorde un maximum de 6 points pour cette partie.

On accorde le maximum de 6 points pour une démonstration complète de l'énoncé (Q), que l'élève ait tenté ou non de démontrer l'énoncé (P).
On accorde 2 des 6 points pour une démonstration complète de l'énoncé (P). Dans ce cas, toute tentative de démontrer l'énoncé (Q) sera évaluée et on accordera une partie des 4 autres points en conséquence.
Des points peuvent être acccordés pour les cas où les élèves n'ont pas réussi à démontrer complètement les énoncés (P) ou (Q).

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2018! Chaque année, plus de 240 000 élèves, provenant de 75 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2018.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2018/2019
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le jeudi 6 avril 2017
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 7 avril 2017
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1. (a) Il existe un couple (a, b) d'entiers strictement positifs pour lesquels $5a + 3b = 19$. Quelles sont les valeurs de a et b ?

   (b) Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs n qui vérifient $5 < 2^n < 2017$?

   (c) Jules achète 600 euros au taux de 1 euro pour 1,50 \$. Il convertit ensuite ces 600 euros en dollars au taux de 1,00 \$ pour 0,75 euro. Combien de dollars a-t-il en moins si on compare le nombre de dollars qu'il avait avant ces deux transactions au nombre de dollars qu'il a après ces deux transactions ?

2. (a) Quelles sont toutes les valeurs de x pour lesquelles $\dfrac{5}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$ et $x \neq 0$ et $x \neq 1$?

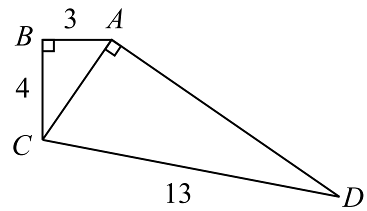
   (b) Dans un carré magique, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont la même somme. Dans le carré magique ci-contre, quelles sont les valeurs de a, b et c ?

0	20	a
c	4	
	-12	b

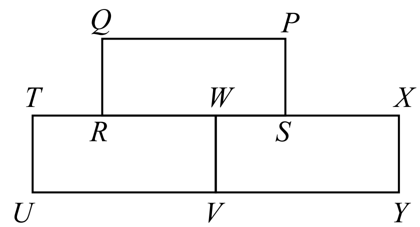
   (c) (i) Pour quel entier strictement positif n est-ce que $100^2 - n^2 = 9559$?

   (ii) Déterminer un couple (a, b) d'entiers tels que $a > 1$ et $b > 1$ et $ab = 9559$.

3. (a) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B et le triangle ACD est rectangle en A. De plus $AB = 3$, $BC = 4$ et $CD = 13$. Quelle est l'aire du quadrilatère $ABCD$?



(b) Trois rectangles identiques $PQRS$, $WTUV$ et $XWVY$ sont placés comme dans la figure ci-contre de manière que RS soit situé sur TX. Chacun des trois rectangles a un périmètre de 21 cm. Quel est le périmètre de la figure au complet ?



(c) On considère un prisme droit à base rectangulaire. Une de ses faces a une aire de 27 cm^2 et une autre de ses faces a une aire de 32 cm^2. Sachant que le prisme a un volume de 144 cm^3, déterminer l'aire totale du prisme en cm^2.

4. (a) Les équations $y = a(x-2)(x+4)$ et $y = 2(x-h)^2 + k$ représentent la même parabole. Quelles sont les valeurs de a, h et k ?

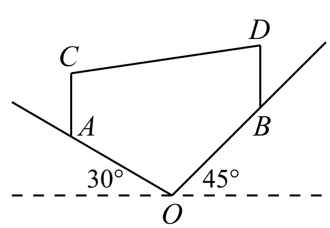
(b) Dans une suite arithmétique de 5 termes, la somme des carrés des 3 premiers termes est égale à la somme des carrés des 2 derniers termes. Sachant que le premier terme est 5, déterminer toutes les valeurs possibles du cinquième terme.

(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant une constante au terme précédent. Par exemple, $3, 5, 7, 9, 11$ est une suite arithmétique de cinq termes.)

5. (a) Dan est né entre l'an 1300 et l'an 1400. Samuel est né entre l'an 1400 et l'an 1500. Chacun est né le 6 avril d'une année qui est un carré parfait. Chacun a vécu 110 ans. En quelle annnée, pendant qu'ils étaient tous deux en vie, l'âge de chacun était-il un carré parfait le 7 avril ?

(b) Déterminer toutes les valeurs de k pour lesquelles les points $A(1,2)$, $B(11,2)$ et $C(k,6)$ forment un triangle rectangle.

6. (a) La figure ci-contre représente deux côtes qui se joignent en O. Une côte fait un angle de 30° avec l'horizontale et l'autre fait un angle de 45° avec l'horizontale. Les points A et B sont situés sur les côtes de manière que $OA = OB = 20$ m. Des poteaux verticaux BD et AC sont reliés par un cable droit CD. Sachant que $AC = 6$ m, quelle est la longueur de BD pour laquelle CD est le plus court possible ?



(b) Si $\cos\theta = \tan\theta$, déterminer toutes les valeurs possibles de $\sin\theta$. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés.

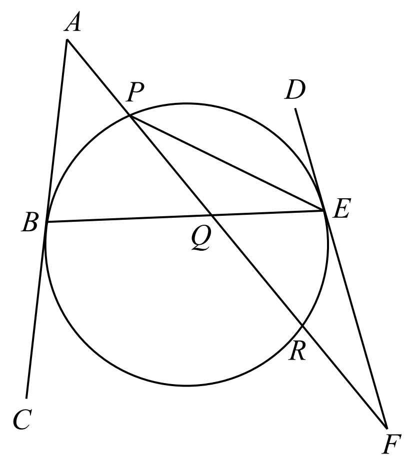
7. (a) Linh se déplace en voiture à une vitesse de 60 km/h sur une route droite parallèle à une voie ferrée. À toutes les 10 minutes, elle est dépassée par un train qui roule dans le même sens qu'elle. Ces trains quittent une gare derrière elle à toutes les 3 minutes et voyagent tous à la même vitesse constante. Quelle est la vitesse constante des trains, en km/h ?

(b) Déterminer tous les couples (a, b) de nombres réels qui vérifient le système d'équations :

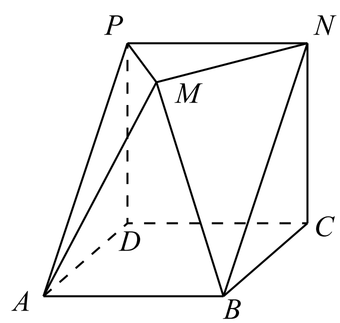
$$\begin{aligned} \sqrt{a} + \sqrt{b} &= 8 \\ \log_{10} a + \log_{10} b &= 2 \end{aligned}$$

Exprimer les réponses sous forme de couples de nombres exacts simplifiés.

8. (a) Dans la figure ci-contre, les segments de droites AC et DF sont tangents au cercle aux points respectifs B et E. De plus, AF coupe le cercle aux points P et R et il coupe BE en Q. Sachant que $\angle CAF = 35°$, $\angle DFA = 30°$ et $\angle FPE = 25°$, déterminer la mesure de l'angle PEQ.



(b) Dans la figure ci-contre, $ABCD$ et $PNCD$ sont des carrés avec des côtés de longueur 2 et $PNCD$ est perpendiculaire à $ABCD$. Le point M est choisi du même côté de $PNCD$ que AB de manière que le triangle PMN soit parallèle à $ABCD$, que $\angle PMN = 90°$ et que $PM = MN$. Déterminer le volume du solide convexe $ABCDPMN$.



9. Une *permutation* d'une liste de nombres est un arrangement ordonné des nombres de cette liste. Par exemple, $3, 2, 4, 1, 6, 5$ est une permutation de $1, 2, 3, 4, 5, 6$. On peut écrire cette permutation sous la forme $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, où $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 1, a_5 = 6$ et $a_6 = 5$.

(a) Déterminer la valeur moyenne de l'expression

$$|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4|,$$

la valeur de l'expression étant calculée pour toutes les permutations a_1, a_2, a_3, a_4 de $1, 2, 3, 4$.

(b) Déterminer la valeur moyenne de l'expression

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7,$$

la valeur de l'expression étant calculée pour toutes les permutations $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ de $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

(c) Déterminer la valeur moyenne de l'expression

$$|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \cdots + |a_{197} - a_{198}| + |a_{199} - a_{200}|, \qquad (*)$$

la valeur de l'expression étant calculée pour toutes les permutations $a_1, a_2, a_3, ..., a_{199}, a_{200}$ de $1, 2, 3, 4, \ldots, 199, 200$. (La somme $(*)$ contient 100 termes de la forme $|a_{2k-1} - a_{2k}|$.)

10. On considère un ensemble S qui contient m éléments ($m \geq 4$), chaque élément étant un entier strictement positif et tous les éléments étant différents les uns des autres. On dit que S est *ennuyant* s'il contient quatre entiers distincts a, b, c, d tels que $a + b = c + d$. On dit que S est *excitant* s'il n'est pas ennuyant. Par exemple, l'ensemble $\{2,4, 6, 8, 10\}$ est ennuyant puisque $4 + 8 = 2 + 10$. L'ensemble $\{1, 5, 10, 25, 50\}$ est excitant.

(a) Trouver un sous-ensemble excitant de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ contenant exactement 5 éléments.

(b) Démontrer que si S est un ensemble excitant de m entiers strictement positifs ($m \geq 4$), alors S contient un entier supérieur ou égal à $\dfrac{m^2 - m}{4}$.

(c) L'expression $\text{reste}(a, b)$ représente le reste lorsque l'entier strictement positif a est divisé par l'entier strictement positif b. Par exemple, $\text{reste}(10, 7) = 3$, $\text{reste}(20, 5) = 0$ et $\text{reste}(3, 4) = 3$.

On considère un entier n tel que $n \geq 10$. Pour chaque entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on définit $x_k = 2n \cdot \text{reste}(k^2, n) + k$. Déterminer, preuve à l'appui, tous les entiers n tels que $n \geq 10$ et pour lesquels l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ de n entiers est excitant.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2017! Chaque année, plus de 235 000 élèves, provenant de 75 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2017.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2017/2018
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mardi 12 avril 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 13 avril 2016
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

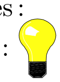
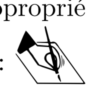
Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 . . . ou 1,41 . . ., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

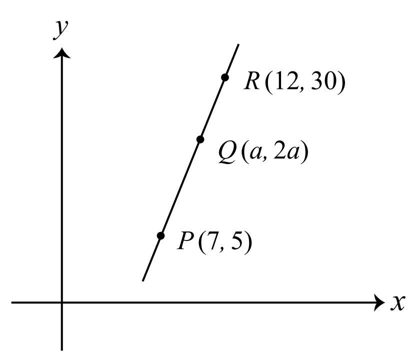
Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1. (a) Quelle est la moyenne des entiers $5, 15, 25, 35, 45, 55$?

   (b) Si $x^2 = 2016$, quelle est la valeur de l'expression $(x + 2)(x - 2)$?

   (c) Dans la figure ci-contre, les points $P(7, 5)$, $Q(a, 2a)$ et $R(12, 30)$ sont situés sur une même droite. Déterminer la valeur de a.

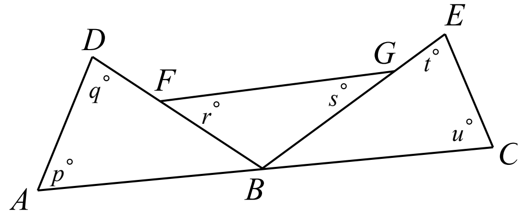


2. (a) Quelles sont toutes les valeurs de n pour lesquelles $\dfrac{n}{9} = \dfrac{25}{n}$?

   (b) Quelles sont toutes les valeurs de x pour lesquelles $(x - 3)(x - 2) = 6$?

   (c) Chez l'épicier Descartes, 2 pommes coutent le même prix que 3 bananes. René achète 6 pommes et 12 bananes pour un cout total de 6,30 \$. Déterminer le cout d'une pomme.

3. (a) Dans la figure suivante, le point B est situé sur AC, le point F est situé sur DB et le point G est situé sur EB.



Quelle est la valeur de l'expression $p + q + r + s + t + u$?

(b) Soit n l'entier égal à $10^{20} - 20$. Quelle est la somme des chiffres de n ?

(c) Une parabole coupe l'axe des abscisses en $P(2, 0)$ et $Q(8, 0)$. Le sommet S de la parabole est situé en dessous de l'axe des abscisses. Sachant que le triangle SPQ a une aire de 12, déterminer les coordonnées de S.

4. (a) Déterminer toutes les mesures d'angles θ telles que $0° \leq \theta \leq 180°$ et $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = \frac{7}{4}$.

(b) Les rayons de deux cercles ont une somme de 10 cm. La circonférence du plus grand cercle a 3 cm de plus que celle du plus petit cercle. Déterminer la différence entre l'aire du grand cercle et celle du petit cercle.

5. (a) Le dépanneur Chez Charlotte achète une calculatrice au prix de p \$ ($p > 0$), ajoute n % à ce cout pour fixer le prix de vente, puis diminue le résultat de 20 % pour fixer le prix en solde. Sachant que le prix en solde est 20 % de plus que p \$, quelle est la valeur de n ?

(b) On définit une fonction f de manière que si n est un entier impair, alors $f(n) = n - 1$ et si n est un entier pair, alors $f(n) = n^2 - 1$. Par exemple, si $n = 15$, alors $f(n) = 14$ et si $n = -6$, alors $f(n) = 35$, puisque 15 est un entier impair et -6 est un entier pair. Déterminer tous les entiers n pour lesquels $f(f(n)) = 3$.

6. (a) Quel est le plus petit entier strictement positif x pour lequel $\dfrac{1}{32} = \dfrac{x}{10^y}$, y étant un entier strictement positif quelconque ?

(b) Déterminer toutes les aires possibles de triangles rectangles ayant un côté de longueur 60 et dont les longueurs des trois côtés forment une suite arithmétique.

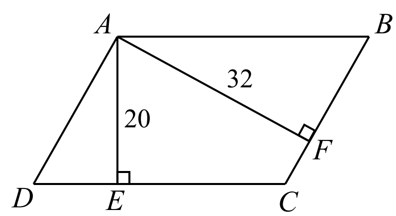
(Une *suite arithmétique* est une suite de nombres dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant une constante au terme précédent. Par exemple, $3, 5, 7, 9$ sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.)

7. (a) Amrita et Zénon traversent un lac en ligne droite avec l'aide d'un kayak à une place. Chacun peut pagayer le kayak à une vitesse de 7 km/h et nager à une vitesse de 2 km/h. Ils partent du même point, en même temps, avec Amrita en kayak et Zénon à la nage. Après un certain temps, Amrita arrête le kayak et se met immédiatement à nager. Lorsque Zénon atteint le kayak, qui n'a pas bougé depuis qu'Amrita l'a abandonné, il monte dans le kayak et se met à pagayer. Les deux arrivent de l'autre côté du lac en même temps, 90 minutes après leur départ. Déterminer le temps pendant lequel le kayak n'a pas été utilisé dans ces 90 minutes.

(b) Déterminer tous les couples (x, y) de nombres réels qui vérifient le système d'équations :

$$\begin{aligned} x\left(\tfrac{1}{2} + y - 2x^2\right) &= 0 \\ y\left(\tfrac{5}{2} + x - y\right) &= 0 \end{aligned}$$

8. (a) Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme. Le point E est situé sur DC de manière que AE soit perpendiculaire à DC et le point F est situé sur CB de manière que AF soit perpendiculaire à CB. Sachant que $AE = 20$, $AF = 32$ et $\cos(\angle EAF) = \frac{1}{3}$, déterminer l'aire exacte du quadrilatère $AECF$.

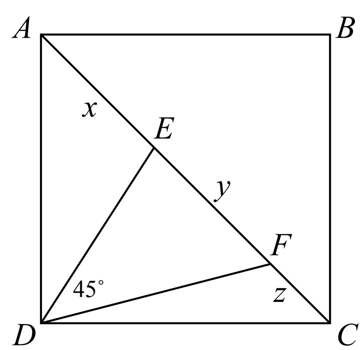


(b) Déterminer tous les nombres réels x $(x > 0)$ pour lesquels

$$\log_4 x - \log_x 16 = \tfrac{7}{6} - \log_x 8$$

9. (a) La chaine $AAABBBAABB$ est une chaine de dix lettres, chaque lettre étant un A ou un B, qui ne comprend pas les lettres consécutives $ABBA$.
La chaine $AAABBAAABB$ est une chaine de dix lettres, chaque lettre étant un A ou un B, qui comprend les lettres consécutives $ABBA$.
Déterminer le nombre de chaines de dix lettres, chaque lettre étant un A ou un B, qui ne comprend pas les lettres consécutives $ABBA$. Justifier sa démarche.

(b) Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré. Les points E et F sont situés sur AC de manière que $\angle EDF = 45°$. Si $AE = x$, $EF = y$ et $FC = z$, démontrer que $y^2 = x^2 + z^2$.



10. Soit k un entier positif tel que $k \geq 2$. On a deux sacs contenant chacun k boules numérotées de 1 à k. André retire au hasard une boule de chaque sac. (Dans chaque sac, chaque boule a les mêmes chances d'être choisie.) $P(k)$ représente la probabilité pour que le produit des numéros sur deux boules choisies soit divisible par k.

(a) Calculer $P(10)$.

(b) Tout en justifiant ses étapes, déterminer un polynôme $f(n)$ pour lequel :

- $P(n) \geq \dfrac{f(n)}{n^2}$ pour tous les entiers positifs n avec $n \geq 2$ et
- $P(n) = \dfrac{f(n)}{n^2}$ pour un nombre infini d'entiers positifs n avec $n \geq 2$.

(Un *polynôme* $f(x)$ est une expression algébrique

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

m étant un entier quelconque avec $m \geq 0$ et $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0$ étant des nombres réels.)

(c) Démontrer qu'il existe un entier strictement positif m pour lequel $P(m) > \dfrac{2016}{m}$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2016! Chaque année, plus de 220 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2016.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2016/2017
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mercredi 15 avril 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 avril 2015
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

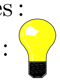
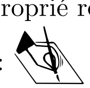
Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 . . . ou 1,41 . . ., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles
Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance, son année scolaire et son sexe sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

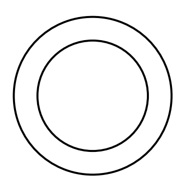
1. (a) Quelle est la valeur de $\dfrac{10^2 - 9^2}{10 + 9}$?

   (b) Sachant que $\dfrac{x+1}{x+4} = 4$, quelle est la valeur de $3x + 8$?

   (c) Soit $f(x) = 2x - 1$. Déterminer la valeur de $(f(3))^2 + 2(f(3)) + 1$.

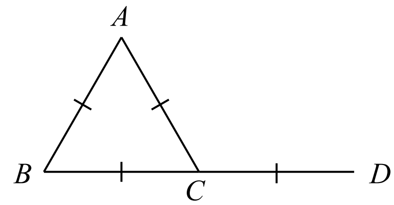
2. (a) Sachant que $\sqrt{a} + \sqrt{a} = 20$, quelle est la valeur de a ?

   (b) Deux cercles ont le même centre. Le petit cercle a un rayon de 1. La région entre les cercles a une aire égale à l'aire du petit cercle. Quel est le rayon du grand cercle ?



   (c) Il y avait 30 élèves dans la classe de monsieur Brunet. Ces élèves avaient une note moyenne de 80. Deux élèves quittent la classe. Les élèves qui restent ont une note moyenne de 82. Déterminer la note moyenne des deux élèves qui ont quitté la classe.

3\. (a) Dans la figure ci-contre, $BD = 4$ et le point C est le milieu de BD. Si le point A est placé de manière que le triangle ABC soit équilatéral, quelle est la longueur de AD ?

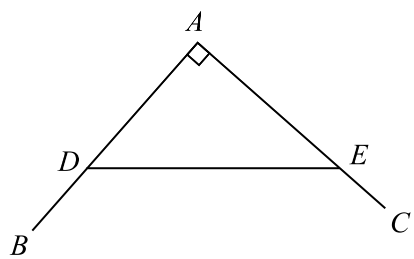


(b) Le triangle MNP a pour sommets $M(1, 4)$, $N(5, 3)$ et $P(5, c)$. Déterminer la somme des deux valeurs de c pour lesquelles le triangle MNP a une aire de 14.

4\. (a) Quelles sont les abscisses à l'origine et l'ordonnée à l'origine de la courbe définie par l'équation $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3) - (x - 2)(x - 3)(x - 4)$?

(b) Les courbes définies par les équations $y = x^3 - x^2 + 3x - 4$ et $y = ax^2 - x - 4$ se coupent en exactement deux points. Déterminer toutes les valeurs possibles de a.

5\. (a) Dans la figure ci-contre, $\angle CAB = 90°$. Le point D est situé sur AB et le point E est situé sur AC de manière que $AB = AC = DE$, $DB = 9$ et $EC = 8$. Déterminer la longueur de DE.

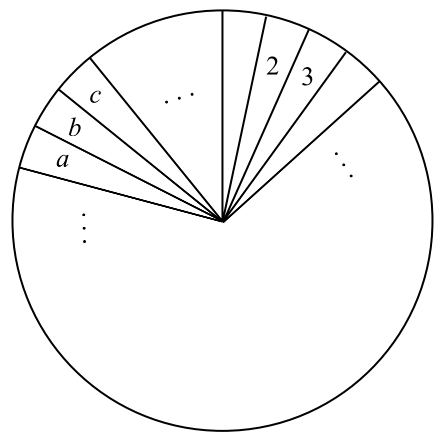


(b) Éliane a deux listes, chacune étant composée de 6 entiers consécutifs strictement positifs. Le plus petit entier de la première liste est a, le plus petit entier de la deuxième liste est b et $a < b$. Éliane forme une troisième liste composée des 36 nombres obtenus en multipliant chaque nombre de la première liste par chaque nombre de la deuxième liste. (Cette troisième liste peut contenir des nombres répétés.) Sachant que

- le nombre 49 parait dans la troisième liste,
- aucun nombre de la troisième liste n'est un multiple de 64 et
- il existe au moins un nombre supérieur à 75 dans la troisième liste,

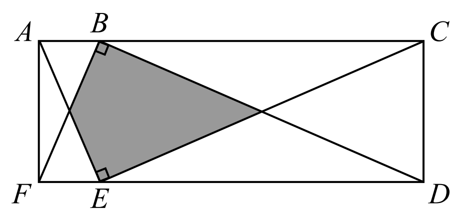
déterminer tous les couples (a, b) possibles.

6. (a) Un disque circulaire est divisé en 36 secteurs. Un nombre est inscrit dans chaque secteur. Lorsque trois secteurs consécutifs contiennent les nombres respectifs a, b et c, dans cet ordre, alors $b = ac$. Sachant que le nombre 2 est placé dans un secteur et que le nombre 3 est placé dans un des secteurs adjacents, comme dans la figure ci-contre, quelle est la somme des 36 nombres écrits sur le disque ?



(b) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $0 < \dfrac{x^2 - 11}{x + 1} < 7$.

7. (a) Dans la figure ci-contre, $ACDF$ est un rectangle, $AC = 200$ et $CD = 50$. De plus, les triangles FBD et AEC sont isométriques et sont respectivement rectangles en B et en E. Quelle est l'aire de la région ombrée ?

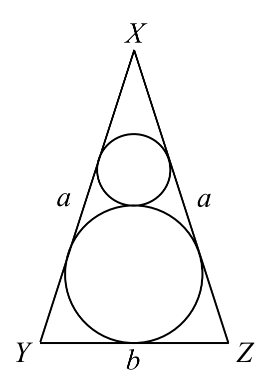


(b) Les nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ forment une suite arithmétique et $a_1 \neq a_2$. De plus, les trois nombres a_1, a_2, a_6, dans l'ordre, forment une suite géométrique. Déterminer tous les entiers strictement positifs k pour lesquels a_1, a_4, a_k, dans l'ordre, forment aussi une suite géométrique.

(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en additionnant une constante au terme précédent. Par exemple, $3, 5, 7, 9$ sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.
Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante non nulle. Par exemple, 3, 6, 12 est une suite géométrique de trois termes.)

8. (a) Pour certains entiers strictement positifs k, la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{k} - 5$ coupe le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$ en trois points distincts, A, B et C. Déterminer tous ces entiers strictement positifs k pour lesquels l'aire du triangle ABC est un entier.

(b) Dans la figure ci-contre, le triangle XYZ est isocèle, $XY = XZ = a$, $YZ = b$ et $b < 2a$. Un grand cercle de rayon R est inscrit dans le triangle (c.-à-d. que le cercle touche les trois côtés du triangle). Un petit cercle de rayon r est tracé de manière qu'il touche les côtés XY et XZ et le grand cercle. Déterminer une expression pour $\dfrac{R}{r}$ en fonction de a et b.



9. On considère le système d'équations suivant dans lequel les logarithmes sont de base 10 :

$$\begin{aligned}
(\log x)(\log y) - 3\log 5y - \log 8x &= a \\
(\log y)(\log z) - 4\log 5y - \log 16z &= b \\
(\log z)(\log x) - 4\log 8x - 3\log 625z &= c
\end{aligned}$$

(a) Sachant que $a = -4$, $b = 4$ et $c = -18$, résoudre le système d'équations.

(b) Déterminer tous les triplets (a, b, c) de nombres réels pour lesquels le système admet un nombre infini de solutions (x, y, z).

10. Pour tout entier positif n, $n \geq 1$, soit C_n l'ensemble des n plus petits entiers strictement positifs, c'est-à-dire que $C_n = \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$. Par exemple, $C_4 = \{1, 2, 3, 4\}$. Un ensemble F de sous-ensembles de C_n est appelé une *famille Furoni de* C_n si aucun élément de F n'est un sous-ensemble d'un autre élément de F.

(a) Soit $A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}$. On remarque que A est une famille Furoni de C_4. Déterminer les deux familles Furoni de C_4 qui contiennent tous les éléments de A et auxquels aucun autre sous-ensemble de C_4 ne peut être ajouté pour former une nouvelle famille Furoni (plus grande).

(b) Soit n un entier strictement positif et F une famille Furoni de C_n. Pour tout entier non négatif k, soit a_k le nombre d'éléments de F qui contiennent exactement k entiers. Démontrer que :

$$\frac{a_0}{\binom{n}{0}} + \frac{a_1}{\binom{n}{1}} + \frac{a_2}{\binom{n}{2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\binom{n}{n-1}} + \frac{a_n}{\binom{n}{n}} \leq 1$$

(Le membre de gauche contient $n + 1$ termes.)

(Remarque : Étant donné un entier strictement positif n et un entier k, $0 \leq k \leq n$, alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le nombre de sous-ensembles de C_n qui contiennent exactement k entiers. De plus, $0! = 1$ et si m est un entier strictement positif, $m!$ représente le produit des entiers de 1 à m.)

(c) Pour tout entier strictement positif n, déterminer le nombre d'éléments dans la plus grande famille Furoni de C_n (c'est-à-dire le nombre d'éléments de la famille Furoni qui contient le nombre maximum possible de sous-ensembles de C_n). Expliquer son raisonnement.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2015! Chaque année, plus de 200 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2015.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :
- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2015/2016
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e^ et 12^e^ année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les coucours

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mardi 15 avril 2014

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 16 avril 2014

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Durée : 2 heures et demie

Nombre de questions : 10

Chaque question vaut 10 points.

L'utilisation d'une calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 . . . ou 1,41 . . ., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

REMARQUES

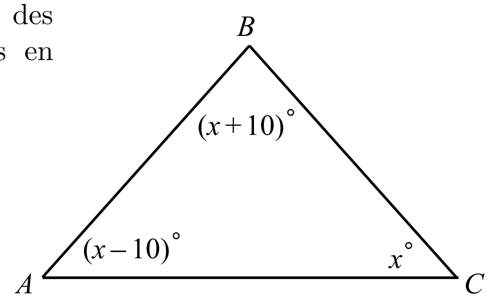
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées a l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance, son année scolaire et son sexe sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

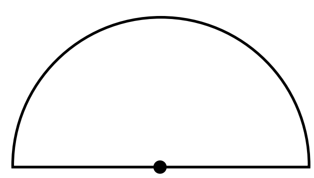
1. (a) Quelle est la valeur de $\dfrac{\sqrt{16}+\sqrt{9}}{\sqrt{16+9}}$?

   (b) Dans la figure ci-contre, les mesures des angles du triangle ABC sont données en fonction de x. Quelle est la valeur de x ?



   (c) Lisa gagne deux fois plus de l'heure que Bart. Lisa travaille 6 heures et Bart travaille 4 heures. Ils gagnent 200 \$ en tout. Combien Lisa gagne-t-elle de l'heure ?

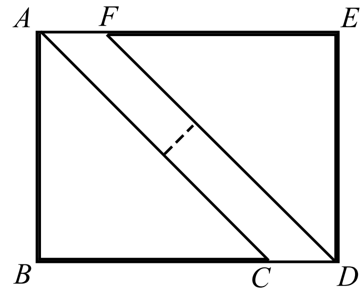
2. (a) Le demi-disque ci-contre a un rayon de 10. Quel est le périmètre du demi-disque ?



   (b) La parabole d'équation $y = 10(x+2)(x-5)$ coupe l'axe des abscisses aux points P et Q. Quelle est la longueur du segment de droite PQ ?

   (c) La droite d'équation $y = 2x$ coupe au point E le segment de droite qui joint les points $C(0, 60)$ et $D(30, 0)$. Déterminer les coordonnées de E.

3. (a) Jean fait cuire deux grands biscuits identiques de forme triangulaire, soit les triangles ABC et DEF. Chaque biscuit a la forme d'un triangle rectangle isocèle. Les cathètes (petits côtés) de chaque triangle ont une longueur de 20 cm. Il place les biscuits sur un plateau rectangulaire de manière que les points A, B, D et E soient les sommets du rectangle, comme dans la figure ci-contre. Sachant qu'il y a une distance de 4 cm entre les côtés parallèles AC et DF, quelle est la largeur BD du plateau ?



(b) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $\dfrac{x^2+x+4}{2x+1} = \dfrac{4}{x}$.

4. (a) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 900, y inclus 1 et 900, qui sont des carrés parfaits. (Un *diviseur positif* de 900 est un entier positif qui divise 900 tout en laissant un reste de 0.)

(b) Les points $A(k, 3)$, $B(3, 1)$ et $C(6, k)$ forment un triangle isocèle. Sachant que $\angle ABC = \angle ACB$, déterminer toutes les valeurs possibles de k.

5. (a) Une chimiste a trois bouteilles qui contiennent chacune un mélange d'acide et d'eau :

- la bouteille A contient 40 g de liquide dont 10 % d'acide,
- la bouteille B contient 50 g de liquide dont 20 % d'acide et
- la bouteille C contient 50 g de liquide dont 30 % d'acide.

Elle utilise les mélanges de chaque bouteille pour créer un mélange de 60 g de liquide dont 25 % d'acide. Elle mélange ensuite le restant des liquides des trois bouteilles pour créer un nouveau mélange. Quel pourcentage de ce nouveau mélange est formé d'acide ?

(b) On considère des nombres réels x et y tels que $3x + 4y = 10$. Déterminer la plus petite valeur possible de l'expression $x^2 + 16y^2$.

6. (a) Dans un sac, il y a 40 boules, chacune étant noire ou dorée. Firmin plonge son bras dans le sac et en sort deux boules au hasard. Chaque boule du sac a la même chance d'être choisie. Sachant que la probabilité de sortir deux boules dorées du sac est de $\frac{5}{12}$, combien des 40 boules sont dorées ?

(b) Dans une suite géométrique de n termes $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n$, on a $t_1 t_n = 3$. De plus, le produit des n termes est égal à 59 049 (c.-à-d. que $t_1 t_2 \cdots t_{n-1} t_n = 59\,049$). Déterminer la valeur de n.

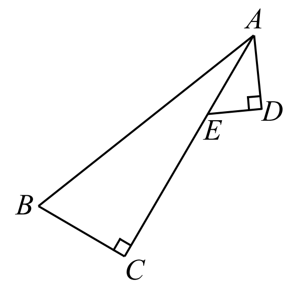
(Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme après le premier est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante. Par exemple, 3, 6, 12 est une suite géométrique de trois termes.)

7. (a) Sachant que $\dfrac{(x-2013)(y-2014)}{(x-2013)^2+(y-2014)^2} = -\dfrac{1}{2}$, quelle est la valeur de $x+y$?

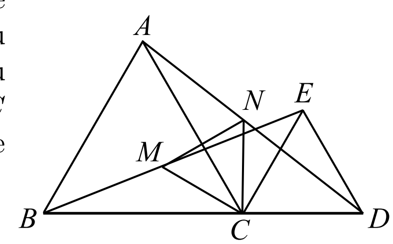
(b) Déterminer tous les nombres réels x pour lesquels :

$$(\log_{10} x)^{\log_{10}(\log_{10} x)} = 10\,000$$

8. (a) Dans la figure ci-contre, $\angle ACB = \angle ADE = 90°$. Sachant que $AB = 75$, $BC = 21$, $AD = 20$ et $CE = 47$, déterminer la longueur exacte de BD.



(b) Dans la figure ci-contre, le point C est situé sur le segment BD, le point M est le milieu du segment BE et le point N est le milieu du segment AD. De plus, les triangles ABC et ECD sont équilatéraux. Démontrer que le triangle MNC est équilatéral.



9. (a) Sans utiliser une calculatrice, déterminer des entiers strictement positifs m et n pour lesquels :

$$\sin^6 1° + \sin^6 2° + \sin^6 3° + \cdots + \sin^6 87° + \sin^6 88° + \sin^6 89° = \frac{m}{n}$$

(L'addition dans le membre de gauche de l'équation est formée de 89 termes de la forme $\sin^6 x°$, x prenant chaque valeur entière positive de 1 à 89.)

(b) On considère les entiers strictement positifs formés d'exactement n chiffres. $f(n)$ représente le nombre de tels entiers dont les n chiffres ont une somme de 5. Déterminer combien des 2014 entiers $f(1), f(2), \ldots, f(2014)$ ont un chiffre des unités égal à 1, tout en justifiant sa démarche.

10. Fanny s'adonne à un jeu avec des bonbons haricots sur une droite numérique. Au départ, elle a N bonbons, tous en position 0. À chaque tour, elle doit choisir un des mouvements suivants :

- Type 1 : Elle enlève deux bonbons de la position 0, en mange un, et place l'autre en position 1.
- Type i, i étant un entier et $i \geq 2$: Elle enlève un bonbon de la position $i-2$ et un bonbon de la position $i-1$, en mange un, et place l'autre en position i.

Lorsqu'il devient impossible de jouer davantage, les positions des bonbons forment ce qu'on appellera *l'état final*. Lorsque l'état final est atteint, on dit que Fanny a gagné la joute s'il reste au plus trois bonbons, chacun dans une position distincte, de manière qu'il n'y ait pas de bonbons en positions consécutives. Par exemple, si $N = 7$, Fanny gagne la joute avec la suite de mouvements suivants

Type 1, Type 1, Type 2, Type 1, Type 3,

ce qui fait que dans l'état final, il y a des bonbons en positions 1 et 3. Une suite différente de mouvements avec $N = 7$ pourrait ne pas être gagnante.

(a) Déterminer un entier N pour lequel il est possible de gagner la joute de manière qu'à l'état final, il reste un bonbon en position 5 et aucun autre bonbon dans une autre position.

(b) Supposons que Fanny commence la partie avec un entier particulier inconnu N strictement positif. Démontrer que si Fanny peut gagner la joute, alors il n'y a qu'un état final possible.

(c) Déterminer l'entier strictement positif N le plus près de 2014 pour lequel Fanny peut gagner la joute, tout en justifiant sa démarche.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2014!
En 2013, plus de 17 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2014.

Visitez notre site Web pour
- des copies gratuites des concours précédents
- des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
- des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour
- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2014/2015
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
- trouver les résultats de votre école
- vous inscrire au Problème de la semaine
- obtenir des renseignements au sujet de notre programme de Master of Mathematics for Teachers (maîtrise en mathématiques pour enseignants)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mercredi 17 avril 2013
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 18 avril 2013
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Durée : 2 heures et demie

Nombre de questions : 10

L'utilisation d'une calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Chaque question vaut 10 points.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 . . . ou 1,41 . . ., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées a l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles
Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance, son année scolaire et son sexe sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1. (a) Quel est le plus petit entier strictement positif x pour lequel $\sqrt{113+x}$ est un entier ?

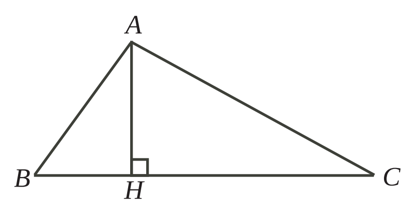
   (b) La moyenne de 3 et de 11 est égale à a. La moyenne de a et de b est égale à 11. Quelle est la valeur de b ?

   (c) Charlot a 30 ans de plus que sa fille Bella. Charlot a aussi six fois l'âge de Bella. Déterminer l'âge de Charlot.

2. (a) Sachant que $\dfrac{21}{x} = \dfrac{7}{y}$ et que $x, y \neq 0$, quelle est la valeur de $\dfrac{x}{y}$?

   (b) Pour quel entier strictement positif n les inégalités $\dfrac{1}{n+1} < 0{,}2013$ et $0{,}2013 < \dfrac{1}{n}$ sont-elles vraies toutes les deux ?

   (c) Dans la figure ci-contre, le point H est situé sur le côté BC du triangle ABC de manière que AH soit perpendiculaire à BC. De plus, $AB = 10$, $AH = 8$ et le triangle ABC a une aire de 84. Déterminer le périmètre du triangle ABC.



3. (a) Dans la suite de Fibonacci, $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$, chaque terme après les deux premiers est égal à la somme des deux termes précédents. Parmi les 100 premiers termes de la suite de Fibonacci, combien sont impairs ?

   (b) Dans une suite arithmétique, le premier terme et le troisième terme ont une somme de 6. De plus, le deuxième terme et le quatrième terme ont une somme de 20. Déterminer le dixième terme de la suite.

   (Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant une constante au terme précédent. Par exemple, $3, 5, 7, 9$ sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.)

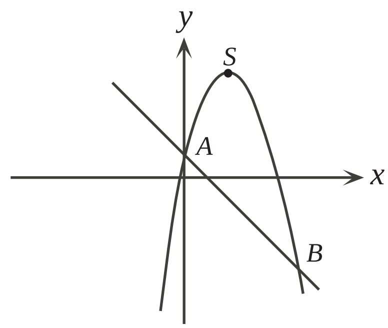
4. (a) Combien y a-t-il d'entiers positifs inférieurs à 1000 dont tous les chiffres sont impairs ?

(b) Déterminer tous les couples (a, b) qui vérifient le système d'équations suivant :

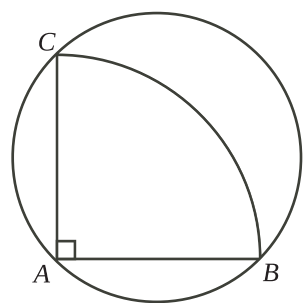
$$\begin{aligned} a + b &= 16 \\ \frac{4}{7} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \end{aligned}$$

5. (a) Thierry a deux dés identiques. Chaque dé a six faces portant les numéros 2, 3, 5, 7, 11 et 13. Lorsque Thierry jette les deux dés, quelle est la probabilité pour que la somme des nombres sur les faces supérieures soit un nombre premier ?

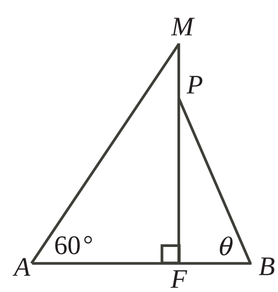
(b) Dans la figure ci-contre, S est le sommet de la parabole d'équation $y = -x^2 + 4x + 1$. De plus, A et B sont les points d'intersection de la parabole et de la droite d'équation $y = -x + 1$. Déterminer la valeur de l'expression $AS^2 + BS^2 - AB^2$.



6. (a) Dans la figure ci-contre, ABC est un quart d'une pizza circulaire de centre A et de rayon 20 cm. Comme l'indique la figure, le morceau de pizza est placé sur un plat circulaire de manière que les points A, B et C touchent au bord du plat. Quelle fraction du plat le morceau de pizza recouvre-t-il ?



(b) Le pont AB d'un voilier a une longueur de 8 m. Un cordage s'étend à un angle de 60° du point A jusqu'au sommet (M) du mât du voilier. Un deuxième cordage s'étend du point B au point P situé à 2 m dessous le point M. Il forme un angle θ avec l'horizontale, comme l'indique la figure. Déterminer la hauteur MF du mât en fonction de θ.



7. (a) Sachant que $\dfrac{1}{\cos x} - \tan x = 3$, quelle est la valeur numérique de $\sin x$?

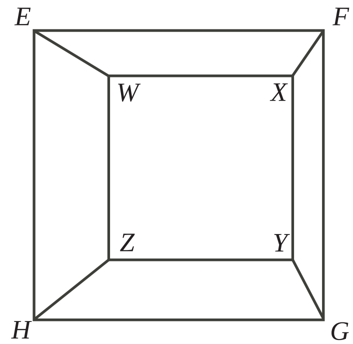
(b) Déterminer toutes les fonctions affines $f(x) = ax + b$ telles que si $g(x) = f^{-1}(x)$ pour toutes les valeurs de x, alors $f(x) - g(x) = 44$ pour toutes les valeurs de x. (Remarque : f^{-1} est la fonction réciproque de f.)

8. (a) Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs pour lesquels $a^3 + 2ab = 2013$.

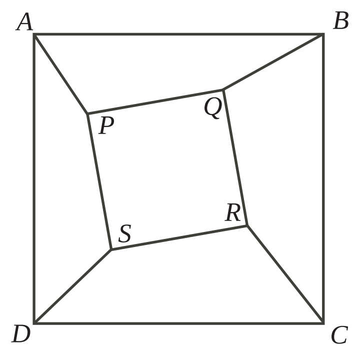
(b) Déterminer toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles

$$\log_2(2^{x-1} + 3^{x+1}) = 2x - \log_2(3^x)$$

9. (a) Dans la figure ci-contre, le carré $WXYZ$ a des côtés de longueur 6. Il est placé à l'intérieur du carré $EFGH$, qui a des côtés de longueur 10, de manière que les carrés ne se touchent pas et que WX soit parallèle à EF. Démontrer que la somme de l'aire du trapèze $EFXW$ et de l'aire du trapèze $GHZY$ ne dépend pas de la position du carré $WXYZ$ à l'intérieur du carré $EFGH$.



(b) Dans la figure ci-contre, un carré $PQRS$ est placé à l'intérieur d'un plus grand carré $ABCD$ de manière que les deux carrés de se touchent pas. On a tracé des segments de droites AP, BQ, CR et DS de manière à diviser la région entre les carrés en quatre quadrilatères convexes qui ne chevauchent pas. Sachant que les côtés de $PQRS$ *ne sont pas* parallèles à des côtés de $ABCD$, démontrer que la somme de l'aire du quadrilatère $APSD$ et de celle de $BCRQ$ est égale à la somme de l'aire du quadrilatère $ABQP$ et de celle de $CDSR$. (Remarque : Un quadrilatère est convexe si chacun de ses angles intérieurs a une mesure inférieure à 180°.)



10. Une *partition multiplicative* d'un entier strictement positif n est une façon d'exprimer n comme produit d'entiers supérieurs à 1. On considère qu'un entier est une partition multiplicative de lui-même. De plus, l'ordre des facteurs n'importe pas. Ainsi $2 \times 3 \times 5$ et $2 \times 5 \times 3$ sont considérées comme la même partition de 30. Étant donné un entier strictement positif n, $n \geq 2$, alors $P(n)$ représente le nombre de partitions multiplicatives de n. On définit aussi $P(1) = 1$. On remarque que $P(40) = 7$, puisque les partitions multiplicatives de 40 sont 40, 2×20, 4×10, 5×8, $2 \times 2 \times 10$, $2 \times 4 \times 5$ et $2 \times 2 \times 2 \times 5$.

(a) Déterminer la valeur de $P(64)$.

(b) Déterminer la valeur de $P(1000)$.

(c) Déterminer, preuve à l'appui, une suite d'entiers $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ de manière que

$$P(4 \times 5^m) = a_0 P(2^m) + a_1 P(2^{m-1}) + a_2 P(2^{m-2}) + \cdots + a_{m-1} P(2^1) + a_m P(2^0)$$

pour chaque entier strictement positif m.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2013!
En 2012, plus de 16 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2013.

Visitez notre site Web pour
- des copies gratuites des concours précédents
- des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
- des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour
- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2013/2014
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
- trouver les résultats de votre école
- vous inscrire au Problème de la semaine
- obtenir des renseignements au sujet de notre programme de Master of Mathematics for Teachers (maîtrise en mathématiques pour enseignants)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mercredi 11 avril 2012
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 12 avril 2012
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

WATERLOO MATHEMATICS

LA PARFAITE ALLIANCE COMMUNAUTAIRE[MC]

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Durée : 2 heures de demie

Nombre de questions : 10

L'utilisation d'une calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Chaque question vaut 10 points.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 . . . ou 1,41 . . ., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié dans les Résultats du concours Euclide sur notre site web à l'adresse http://www.cemc.uwaterloo.ca.

REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées a l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles
Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance, son année scolaire et son sexe sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1. (a) Jean achète 10 sacs contenant chacun 20 pommes. S'il mange 8 pommes par jour, combien de jours mettra-t-il pour manger les 10 sacs de pommes ?

   (b) Déterminer la valeur de l'expression suivante :
   $$\sin(0°) + \sin(60°) + \sin(120°) + \sin(180°) + \sin(240°) + \sin(300°) + \sin(360°)$$

   (c) Un ensemble d'entiers a une somme de 420 et une moyenne de 60. Sachant que le nombre 120 fait partie de l'ensemble, quelle est la moyenne des autres nombres de l'ensemble ?

2. (a) Si $ax + ay = 4$ et $x + y = 12$, quelle est la valeur de a ?

   (b) Sachant que les droites d'équations $4x + 6y = 5$ et $6x + ky = 3$ sont parallèles, quelle est la valeur de k ?

   (c) Déterminer tous les couples (x, y) qui vérifient le système d'équations :
   $$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x^2 - y &= 2 \end{aligned}$$

3. (a) Une solution, composée d'eau et de sel, a une masse de 200 g. Le sel compte pour 25 % de la masse de la solution. Combien de grammes d'eau faut-il ajouter à la solution pour que le sel ne compte que pour 10 % de la masse de la solution ?

   (b) La formule $F = \frac{9}{5}C + 32$ est utilisée pour convertir correctement une température de C degrés Celsius à F degrés Fahrenheit.
   Pour obtenir une approximation de C degrés Celsius en degrés Fahrenheit, Gaby double la valeur de C et ajoute 30, ce qui donne f.
   Si $f < F$, l'erreur de l'approximation est égale à $F - f$; autrement elle est égale à $f - F$. (P. ex., si $F = 68$ et $f = 70$, l'erreur de l'approximation est égale à $f - F = 2$.)
   Déterminer la plus grande erreur possible que Gaby peut obtenir en convertissant en degrés Fahrenheit des températures de C degrés Celsius dans l'intervalle $-20 \le C \le 35$.

4. (a) La droite horizontale définie par $y = k$ coupe la parabole définie par $y = 2(x-3)(x-5)$ aux points A et B. Sachant que le segment AB a une longueur de 6, quelle est la valeur de k ?

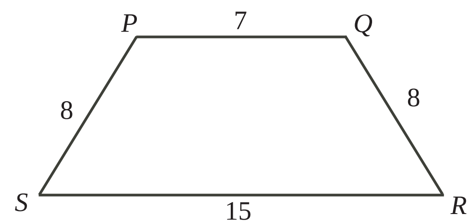
(b) Déterminer trois couples (a, b) d'entiers strictement positifs pour lesquels

$$(3a + 6a + 9a + 12a + 15a) + (6b + 12b + 18b + 24b + 30b)$$

est un carré parfait.

5. (a) Le triangle ABC a pour sommets $A(0,5)$, $B(3,0)$ et $C(8,3)$. Déterminer la mesure de l'angle ACB.

(b) Dans la figure ci-contre, le trapèze $PQRS$ est isocèle, $PQ = 7$, $PS = QR = 8$ et $SR = 15$. Déterminer la longueur de la diagonale PR.

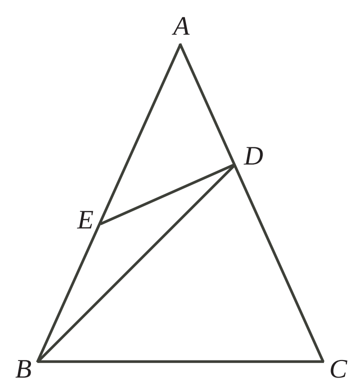


6. (a) Blaise et Pierre s'apprêtent à jouer 6 parties de squash. Puisqu'ils sont de force égale, chacun peut aussi bien gagner une partie que l'autre. (Au squash, il n'y a pas de partie nulle.) La probabilité pour que chacun gagne 3 des 6 parties est de $\frac{5}{16}$. Quelle est la probabilité pour que Blaise gagne plus de parties que Pierre ?

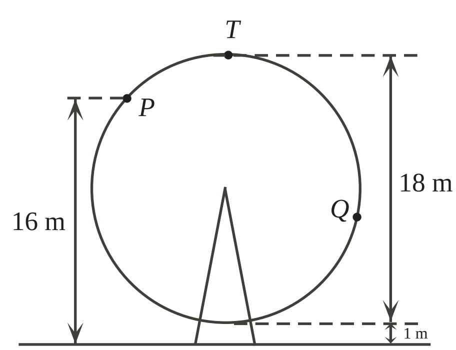
(b) Déterminer toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles :

$$3^{x+2} + 2^{x+2} + 2^x = 2^{x+5} + 3^x$$

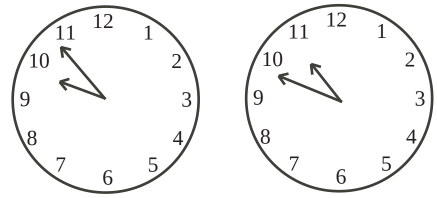
7. (a) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est tel que $AB = AC$ et $\angle BAC < 60°$. Le point D est situé sur AC de manière que $BC = BD$. Le point E est situé sur AB de manière que $BE = ED$. Si $\angle BAC = \theta$, déterminer $\angle BED$ en fonction de θ.



(b) La figure représente une grande roue, d'un diamètre de 18 m, qui tourne à une vitesse constante. Quand Karl fait un tour de grande roue et qu'il est au point le plus bas, il est à 1 m au-dessus de la terre. Quand Karl est au point P, situé à une hauteur de 16 m, et qu'il monte, il met 4 secondes pour atteindre le point T le plus élevé. Il met 8 autres secondes pour atteindre le point Q. Déterminer la hauteur au-dessus de la terre à laquelle Karl est situé lorsqu'il atteint le point Q.



8. (a) Samedi matin, Noémie a commencé à peindre son modèle d'hélicoptère entre 9 h 00 et 10 h 00. Lorsqu'elle a terminé un peu plus tard, entre 10 h 00 et 11 h 00, elle constate que la petite aiguille de l'horloge est placée au même endroit où était la grande aiguille au départ et que la grande aiguille est placée au même endroit où était la petite aiguille au départ. Noémie a peint pendant t heure. Déterminer la valeur de t.



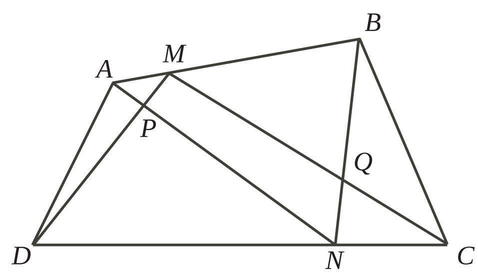
Avant *Après*

(b) Déterminer toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles :

$$\log_{5x+9}(x^2 + 6x + 9) + \log_{x+3}(5x^2 + 24x + 27) = 4$$

9. (a) Les chaises dans un auditorium sont disposées de façon rectangulaire. Il y a exactement 14 garçons assis dans chaque rangée et exactement 10 filles assises dans chaque colonne. Sachant qu'il y a exactement 3 chaises vides, démontrer qu'il y a au moins 567 chaises dans l'auditorium.

(b) Dans la figure ci-contre, le point M est situé sur le côté AB du quadrilatère $ABCD$ et le point N est situé sur le côté DC de manière que $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{NC}{DC}$. Les segments AN et DM se coupent en P, tandis que les segments BN et CM se coupent en Q. Démontrer que l'aire du quadrilatère $PMQN$ est égale à l'aire du triangle APD plus celle du triangle BQC.



10. Étant donné un entier strictement positif N, une *suite Eden* sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$ des entiers consécutifs de 1 à N est une suite qui satisfait aux conditions suivantes :

(i) chacun de ses termes est un élément de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$,

(ii) la suite est croissante et

(iii) les termes dans les positions impaires sont impairs et les termes dans les positions paires sont pairs.

Par exemple, les quatre suites Eden sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ sont :

$$1 \qquad 3 \qquad 1, 2 \qquad 1, 2, 3$$

(a) Determiner le nombre de suites Eden sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(b) Étant donné un entier strictement positif N, soit $e(N)$ le nombre de suites Eden sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$. Sachant que $e(17) = 4180$ et $e(20) = 17\,710$, déterminer $e(18)$ et $e(19)$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2012!
En 2011, plus de 16 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2012.

Visitez notre site Web pour

– des copies gratuites des concours précédents
– des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
– des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour

– obtenir des renseignements au sujet des concours de 2012/2013
– vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
– trouver les résultats de votre école
– vous inscrire au Problème de la semaine
– obtenir des renseignements au sujet de notre programme de Master of Mathematics for Teachers (maîtrise en mathématiques pour enseignants)

www.cemc.uwaterloo.ca

Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mardi 12 avril 2011

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions de 10 points chacune. Chaque question peut avoir des parties à réponse courte et des parties à développement. Une partie à **RÉPONSE COURTE** vaut 3 points. Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points attribués à la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci : .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci : .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié dans les Résultats du concours Euclide sur notre site web à http://www.cemc.uwaterloo.ca.

REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Si une réponse est incorrecte, une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, $2\cos(55^\circ)$, plutôt que 12,566 . . ., 4,646 . . . ou 1,147 . . .

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance, son année scolaire et son sexe sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

Remarque au sujet de la rédaction des solutions

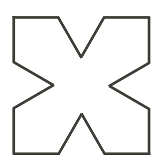
Lorsqu'un problème est accompagné de « », une solution complète est exigée. Une solution devrait être bien organisée et contenir une dose appropriée d'énoncés mathématiques, de justification et de mots d'explications. Avant de rédiger une solution finale, il est bon de rédiger les grandes lignes et certains détails au brouillon. La solution finale devrait permettre à la correctrice ou au correcteur de comprendre l'approche choisie ainsi que toutes les étapes mathématiques suivies.

1. (a) Si $(x+1)+(x+2)+(x+3) = 8+9+10$, quelle est la valeur de x ?

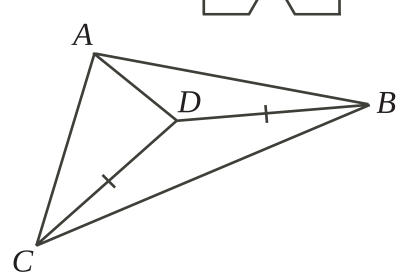
   (b) Si $\sqrt{25+\sqrt{x}} = 6$, quelle est la valeur de x ?

   (c) Les droites d'équations $y = 2x-4$ et $y = x+k$ se coupent au point $(a, 2)$. Déterminer la valeur de k.

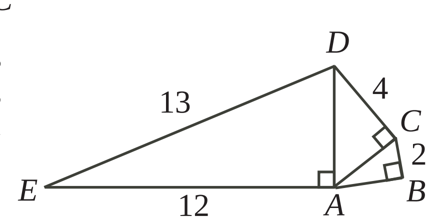
2. (a) Dans la figure ci-contre, on a enlevé un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur 1 au milieu de chaque côté d'un carré ayant des côtés de longueur 3. Quel est le périmètre de la figure ?



   (b) Dans la figure ci-contre, $DC = DB$, $\angle DCB = 15^\circ$ et $\angle ADB = 130^\circ$. Quelle est la mesure de l'angle ADC ?



   (c) Dans la figure ci-contre, $\angle EAD = 90^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ$ et $\angle ABC = 90^\circ$. De plus, $ED = 13$, $EA = 12$, $DC = 4$ et $CB = 2$. Déterminer la longueur de AB.



3. (a) Sachant que $2 \le x \le 5$ et $10 \le y \le 20$, quelle est la valeur maximale de $15 - \dfrac{y}{x}$?

(b) Les fonctions f et g vérifient

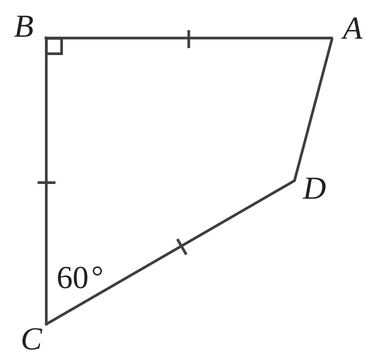
$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= 3x + 5 \\ f(x) - g(x) &= 5x + 7 \end{aligned}$$

pour toutes les valeurs de x. Déterminer la valeur de $2f(2)g(2)$.

4. (a) Trois nombres différents sont choisis au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Les nombres sont placés en ordre croissant. Quelle est la probabilité pour que ces trois nombres forment une suite arithmétique ?

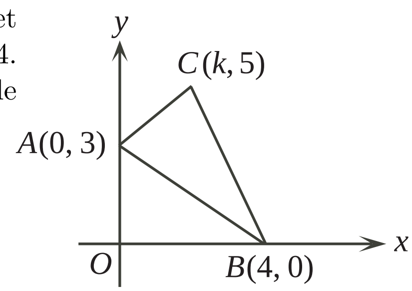
(Une *suite arithmétique* est une suite dont chaque terme, après le premier, est obtenu en additionnant une constante au terme précédent. Par exemple, $3, 5, 7, 9$ est une suite arithmétique de quatre termes.)

(b) Dans le quadrilatère $ABCD$ ci-contre, on a $AB = BC = CD = 6$, $\angle ABC = 90°$ et $\angle BCD = 60°$. Déterminer la longueur de AD.



5. (a) Quel est le plus grand entier de deux chiffres qui donne un nombre 75 % plus grand lorsqu'on renverse l'ordre de ses chiffres ?

(b) Un triangle a pour sommets $A(0, 3)$, $B(4, 0)$ et $C(k, 5)$, k étant dans l'intervalle $0 < k < 4$. Déterminer la valeur de k pour laquelle le triangle a une aire de 8.



6. (a) Serge aime descendre la rivière Rapido en radeau, du point A au point B. La vitesse du courant de la rivière est toujours la même. Lorsque Serge rame, il rame toujours à la même vitesse. Lorsqu'il rame avec le courant, il met 18 minutes pour déplacer le radeau de A à B. Lorsque Serge ne rame pas, le courant met 30 minutes pour déplacer le radeau de A à B. S'il n'y avait aucun courant, combien de temps Serge mettrait-il en ramant pour déplacer le radeau de A à B ?

(b) Le carré $OPQR$ a pour sommets $O(0, 0)$, $P(0, 8)$, $Q(8, 8)$ et $R(8, 0)$. La parabole d'équation $y = a(x - 2)(x - 6)$ coupe les côtés du carré $OPQR$ aux points K, L, M et N. Déterminer toutes les valeurs de a pour lesquelles le trapèze $KLMN$ a une aire de 36.

7. (a) Les chances pour qu'une personne de 75 ans vive au moins 10 ans de plus sont de 50 %.
Les chances pour qu'une personne de 75 ans vive au moins 15 ans de plus sont de 20 %.
Les chances pour qu'une personne de 80 ans vive au moins 10 ans de plus sont de 25 %.
Quelle est la probabilité pour qu'une personne de 80 ans vive au moins 5 ans de plus ?

(b) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $2^{\log_{10}(x^2)} = 3(2^{1+\log_{10} x}) + 16$.

8. Le crible de Sundaram fait appel au tableau infini suivant composé d'entiers strictement positifs :

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 7 & 10 & 13 & \cdots \\ 7 & 12 & 17 & 22 & \cdots \\ 10 & 17 & 24 & 31 & \cdots \\ 13 & 22 & 31 & 40 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Les nombres de chaque rangée du tableau forment une suite arithmétique. Les nombres de chaque colonne du tableau forment une suite arithmétique. Les quatre premiers nombres des quatre premières rangées et des quatre premières colonnes sont indiqués.

(a) Déterminer le nombre situé dans la 50ᵉ rangée et dans la 40ᵉ colonne.

(b) Déterminer une formule pour le nombre situé dans la $R^{\text{ième}}$ rangée et dans la $C^{\text{ième}}$ colonne.

(c) Démontrer que si N est un terme du tableau, alors le nombre $2N+1$ est composé.

9. Soit $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $\lfloor 3{,}1 \rfloor = 3$ et $\lfloor -1{,}4 \rfloor = -2$.
On définit $f(n) = 2n - \left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor$ et $g(n) = 2n + \left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor$ pour tout entier strictement positif n.

(a) Déterminer la valeur de $g(2011)$.

(b) Déterminer une valeur de n pour laquelle $f(n) = 100$.

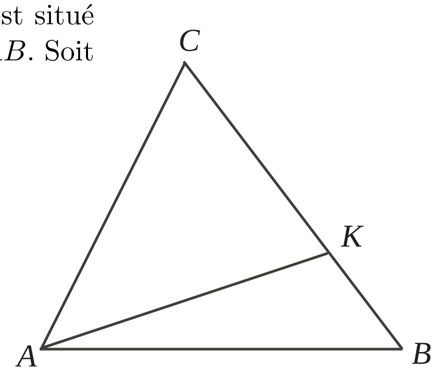
(c) Soit $A = \{f(1), f(2), f(3), \ldots\}$ et $B = \{g(1), g(2), g(3), \ldots\}$; A est donc l'image de la fonction f et B est l'image de la fonction g. Démontrer que chaque entier strictement positif m est un élément d'exactement un des ensembles A ou B.

10. Dans la figure ci-contre, $2\angle BAC = 3\angle ABC$ et K est situé sur le segment BC de manière que $\angle KAC = 2\angle KAB$. Soit $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AK = d$ et $BK = x$.

(a) Démontrer que $d = \dfrac{bc}{a}$ et que $x = \dfrac{a^2 - b^2}{a}$.

(b) Démontrer que $(a^2 - b^2)(a^2 - b^2 + ac) = b^2c^2$.

(c) Déterminer un triangle dont l'aire est strictement positive et dont les longueurs de côtés a, b et c sont des entiers strictement positifs qui vérifient l'égalité de la partie (b).



Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2011!
En 2010, plus de 16 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu le 22 novembre 2011.

Visitez notre site Web pour

- des copies gratuites des concours précédents
- des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
- des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2011/2012, y compris les **nouveaux** concours, soit le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire et le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
- trouver les résultats de votre école

www.cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide

le mercredi 7 avril 2010

Durée : 2 heures et demie

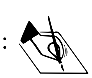
L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions de 10 points chacune. Chaque question peut avoir des parties à réponse courte et des parties à développement. Une partie à **RÉPONSE COURTE** vaut 3 points. Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points attribués à la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci :  .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci :  .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié dans les Résultats du concours Euclide sur notre site web à http://www.cemc.uwaterloo.ca.

REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Si une réponse est incorrecte, une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2 + \sqrt{7}$, plutôt que 12,566 ... ou 4,646 ...

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance, son année scolaire et son sexe sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

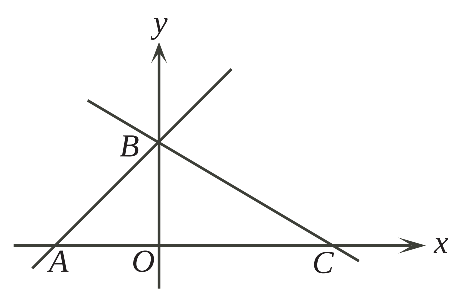
Remarque au sujet de la rédaction des solutions

Lorsqu'un problème est accompagné de « », une solution complète est exigée. Une solution devrait être bien organisée et contenir une dose appropriée d'énoncés mathématiques et de mots d'explications et de justification. Avant de rédiger une solution finale, il est bon de rédiger les grandes lignes et certains détails au brouillon. La solution finale devrait permettre à la correctrice ou au correcteur de comprendre l'approche choisie ainsi que toutes les étapes mathématiques suivies.

1. (a) Si $3^x = 27$, quelle est la valeur de 3^{x+2} ?

   (b) Si $2^5 3^{13} 5^9 x = 2^7 3^{14} 5^9$, quelle est la valeur de x ?

   (c) Le triangle ABC est formé par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = x + 2$ et $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Déterminer l'aire du triangle ABC.

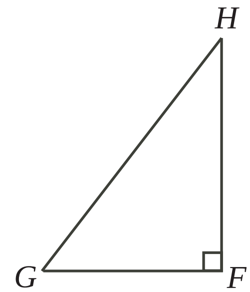


2. (a) Marie a un colis rouge, un colis vert et un colis bleu.
   Les trois colis ont une masse totale de 60 kg.
   Le colis rouge et le colis vert ont une masse totale de 25 kg.
   Le colis vert et le colis bleu ont une masse totale de 50 kg.
   Quelle est la masse du colis vert, en kg ?

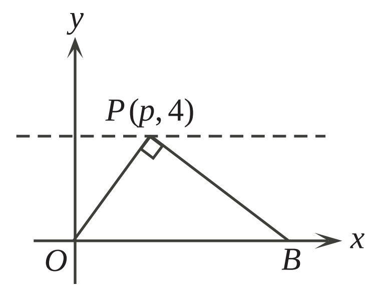
   (b) Un *palindrome* est un entier strictement positif qui peut être lu de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, 151 est un palindrome. Quel est le plus grand palindrome inférieur à 200 qui est la somme de trois entiers consécutifs ?

   (c) Sachant que $(x+1)(x-1) = 8$, déterminer la valeur numérique de $(x^2+x)(x^2-x)$.

3\. (a) Une abeille quitte sa ruche, H, et vole vers le sud pendant une heure jusqu'au champ F. Elle passe 30 minutes dans le champ, puis vole vers l'ouest pendant 45 minutes jusqu'au jardin G. Elle passe 1 heure dans le jardin, puis elle retourne à la ruche en suivant une ligne droite. La vitesse de vol de l'abeille est constante. Pendant combien de minutes l'abeille s'est-elle absentée de la ruche ?



(b) On considère les points $P(p,4)$, $B(10,0)$ et $O(0,0)$ dans la figure ci-contre. Sachant que le triangle OPB est rectangle en P, déterminer toutes les valeurs possibles de p.



4\. (a) Tanya a acheté des jouets, soit des chèvres en peluche et des hélicoptères. Les jouets ont coûté un total de 201 \$. Chaque jouet était complet, c'est-à-dire qu'elle n'a pas acheté des parties de jouets. Chaque chèvre a coûté 19 \$ et chaque hélicoptère a coûté 17 \$. Combien Tanya a-t-elle acheté de jouets de chaque sorte ?

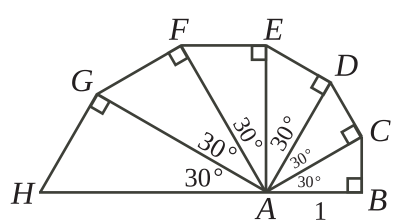
(b) Déterminer toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles $(x+8)^4 = (2x+16)^2$.

5\. (a) Soit $f(x) = 2x + 1$ et $g(f(x)) = 4x^2 + 1$. Déterminer une expression pour $g(x)$.

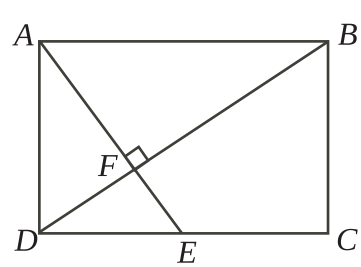
(b) On considère une suite géométrique de 20 termes.
Les deux premiers termes ont une somme de 40.
Les trois premiers termes ont une somme de 76.
Les quatre premiers termes ont une somme de 130.
Déterminer combien des termes de la suite sont des entiers.

(Une *suite géométrique* est une suite numérique dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante appelée *raison*. Par exemple, 3, 6, 12 est une suite géométrique de trois termes dont la raison est égale à 2.)

6\. (a) La coquille d'un escargot est formée de six sections triangulaires, comme dans la figure ci-contre. Chaque triangle a des angles intérieurs de 30°, 60° et 90°. Sachant que AB a une longueur de 1 cm, quelle est la longueur de AH, en cm ?



(b) Dans le rectangle $ABCD$, le point E est situé sur le côté DC. Les segments AE et BD sont perpendiculaires et se coupent en F. Sachant que $AF = 4$ et $DF = 2$, déterminer l'aire du quadrilatère $BCEF$.

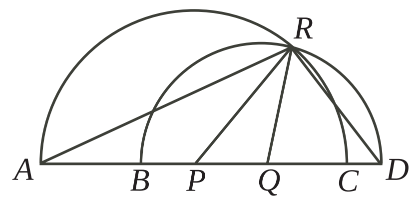


7. (a) Déterminer toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles $3^{(x-1)}9^{\frac{3}{2x^2}} = 27$.

(b) Déterminer tous les points d'intersection (x, y) des courbes définies par $y = \log_{10}(x^4)$ et $y = (\log_{10} x)^3$.

8. (a) Oumar lance trois pièces de monnaie justes et enlève les pièces qui tombent face. Ensuite, Georges lance les pièces qui restent, s'il y en a. Déterminer la probabilité pour que Georges obtienne exactement une face.

(b) Dans la figure ci-contre, les points B, P, Q et C sont situés sur un segment de droite AD. Le demi-cercle de diamètre AC a pour centre P et le demi-cercle de diamètre BD a pour centre Q. Les deux demi-cercles se coupent en R. Sachant que $\angle PRQ = 40°$, déterminer la mesure de l'angle ARD.



9. (a) (i) Soit θ un angle dont la mesure n'est pas un multiple entier de $90°$. Démontrer que :

$$\cot\theta - \cot 2\theta = \frac{1}{\sin 2\theta}$$

(ii) Rémi considère un angle de $8°$ et il le double 10 fois pour obtenir un angle de $8192°$. Ensuite, il additionne l'inverse du sinus de ces 11 angles. Il calcule donc :

$$S = \frac{1}{\sin 8°} + \frac{1}{\sin 16°} + \frac{1}{\sin 32°} + \cdots + \frac{1}{\sin 4096°} + \frac{1}{\sin 8192°}$$

Sans utiliser une calculatrice, déterminer la mesure de l'angle aigu α pour laquelle $S = \dfrac{1}{\sin\alpha}$.

(b) Dans le triangle ABC, on a $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ et $a < \frac{1}{2}(b + c)$. Démontrer que $\angle BAC < \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$.

10. Pour chaque entier strictement positif n, soit $T(n)$ le nombre de triangles qui existent dont les longueurs de côtés sont des entiers, dont l'aire est positive et dont le périmètre est égal à n. Par exemple $T(6) = 1$, puisque le seul tel triangle qui a un périmètre de 6 a des côtés de longueurs 2, 2 et 2.

(a) Déterminer les valeurs de $T(10)$, $T(11)$ et $T(12)$.

(b) Soit m un entier positif ($m \geq 3$). Démontrer que $T(2m) = T(2m - 3)$.

(c) Déterminer le plus petit entier positif n pour lequel $T(n) > 2010$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2010!
En 2009, plus de 16 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Allez voir sur Facebook le groupe du CEMI « Who is The Mathiest? ».

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bonne chance.
Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life qui aura lieu fin novembre.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **plus d'information à propos du Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life**
- **des copies gratuites des concours précédents**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours**
- **de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **obtenir des renseignements concernant les concours de 2010/2011**
- **vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants**
- **trouver les résultats de votre école**

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide

le mardi 7 avril 2009

Avec la contribution de: University of Waterloo; Great-West, London Life, Canada-Vie — LA PARFAITE ALLIANCE COMMUNAUTAIRE[MC]; Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés; Maplesoft command the brilliance

Avec la participation de: Canadian Institute of Actuaries / Institut canadien des actuaires

Durée : 2 heures et demie

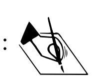
L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions de 10 points chacune. Chaque question peut avoir des parties à réponse courte et des parties à développement. Une partie à **RÉPONSE COURTE** vaut 3 points. Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points attribués à la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci :  .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci :  .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié dans les Résultats du concours Euclide sur notre site web à http://www.cemc.uwaterloo.ca.

REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Si une réponse est incorrecte, une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, plutôt que 12,566... ou 4,646...

Remarque au sujet de l'encodage

S'assurer d'avoir bien encodé votre nom, votre date de naissance, votre niveau et votre sexe sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur l'admissibilité.

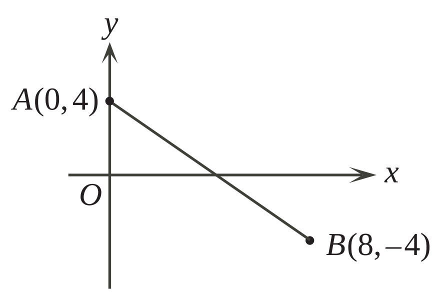
Remarque au sujet de la rédaction des solutions

Lorsqu'un problème est accompagné de « », une solution complète est exigée. Une solution devrait être bien organisée et contenir une dose appropriée d'énoncés mathématiques et de mots d'explications et de justification. Avant de rédiger une solution finale, il est bon de rédiger les grandes lignes et certains détails au brouillon. La solution finale devrait permettre à la correctrice ou au correcteur de comprendre l'approche choisie ainsi que toutes les étapes mathématiques suivies.

1. (a) Une droite a pour équation $6x+3y-21=0$. Quelle est la pente de la droite ?

   (b) Une droite de pente 3 passe aux points $(1,0)$ et $(5,c)$. Quelle est la valeur de c ?

   (c) Le point (k,k) est situé sur le segment de droite AB de la figure ci-contre. Déterminer la valeur de k.

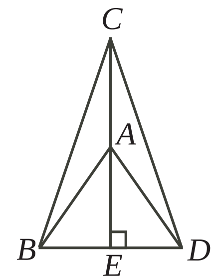


2. (a) Quelle est la somme des deux nombres qui vérifient l'équation $x^2-6x-7=0$?

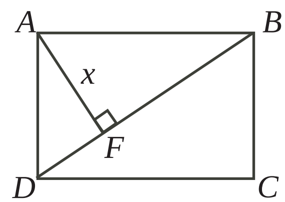
   (b) Quel est le produit des deux nombres qui vérifient l'équation $5x^2-20=0$?

   (c) Déterminer la moyenne des nombres qui vérifient l'équation $x^3-6x^2+5x=0$.

3. (a) Dans la figure ci-contre, $AB = AC = AD = BD$ et CAE est un segment de droite perpendiculaire à BD. Quelle est la mesure de l'angle CDB ?



(b) Le point F est situé sur la diagonale BD du rectangle $ABCD$ de manière que AF soit perpendiculaire à BD. De plus, $BC = 30$, $CD = 40$ et $AF = x$. Déterminer la valeur de x.

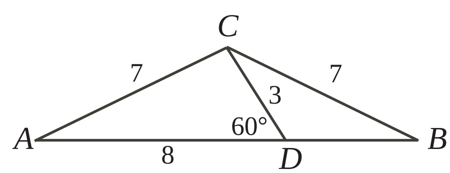


4. (a) Le premier terme d'une suite arithmétique est égal à 1 et le dernier terme est égal à 19. La somme de tous les termes de la suite est égale à 70. Combien la suite a-t-elle de termes ?

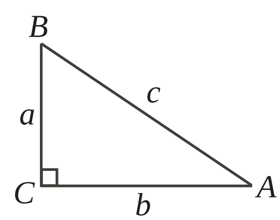
(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, à partir du 2^{e}, est formé en ajoutant une constante au terme précédent. Par exemple, 3, 5, 7, 9 est une suite arithmétique de quatre termes.)

(b) Supposons que l'égalité $a(x + b(x + 3)) = 2(x + 6)$ est vérifiée par *toutes* les valeurs de x. Déterminer a et b.

5. (a) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est isocèle et $AC = BC = 7$. Le point D est situé sur AB de manière que $\angle CDA = 60°$, $AD = 8$ et $CD = 3$. Déterminer la longueur de BD.

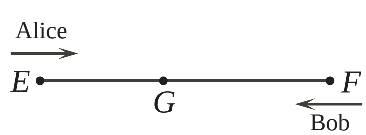


(b) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en C. De plus, $2 \sin B = 3 \tan A$. Déterminer la mesure de l'angle A.



6. (a) Un entier n, (où $100 \leq n \leq 999$) est choisi au hasard. Quelle est la probabilité pour que la somme des chiffres de n soit égale à 24 ?

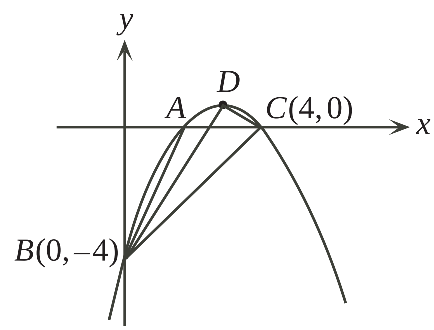
(b) Alice a conduit sa voiture de la ville E à la ville F à une vitesse constante de 60 km/h. Bob a conduit sa voiture de F à E sur la même route, à une vitesse constante. Les deux ont commencé leur trajet à la même heure et ils se sont croisés au point G.



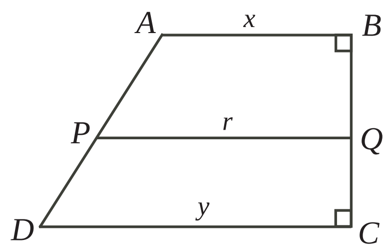
Alice a parcouru la distance de G à F en 45 minutes. Bob a parcouru la distance de G à E en 20 minutes. Déterminer la vitesse constante de Bob.

7. (a) La parabole définie par $y = x^2 - 2x + 4$ subit une translation de p unités vers la droite et de q unités vers le bas. L'image de la parabole a pour abscisses à l'origine 3 et 5. Quelles sont les valeurs de p et q ?

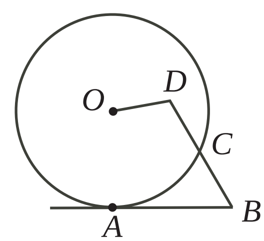
(b) Dans la figure ci-contre, D est le sommet d'une parabole. La parabole coupe l'axe des abscisses en A et en $C(4, 0)$. La parabole coupe également l'axe des ordonnées en $B(0, -4)$. Sachant que le triangle ABC a une aire de 4, déterminer l'aire du triangle DBC.



8. (a) Les côtés AB et DC du trapèze $ABCD$ sont parallèles. De plus, le côté BC est perpendiculaire à AB et à DC. Le segment PQ est parallèle à AB et il divise le trapèze en deux régions qui ont la même aire. Soit $AB = x$, $DC = y$ et $PQ = r$. Démontrer que $x^2 + y^2 = 2r^2$.



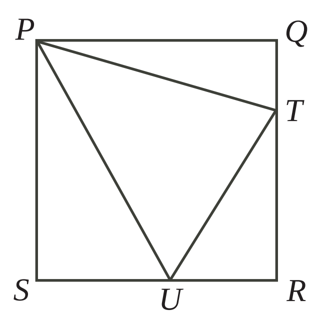
(b) Dans la figure ci-contre, AB est tangent au cercle de centre O et de rayon r. AB a pour longueur p. Le point C est situé sur le cercle et le point D est situé à l'intérieur du cercle de manière que BCD forme un segment de droite, comme l'indique la figure. Sachant que $BC = CD = DO = q$, démontrer que $q^2 + r^2 = p^2$.



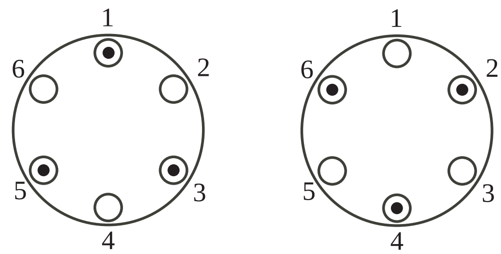
9. (a) Sachant que $\log_2 x$, $(1 + \log_4 x)$ et $\log_8 4x$ sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique, déterminer les valeurs possibles de x.

(Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, à partir du 2^{e}, est formé en multipliant le terme précédent par une constante. Par exemple, 3, 6, 12 est une suite géométrique de trois termes.)

(b) Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un carré avec des côtés de longueur 4. Les points T et U sont situés sur les côtés respectifs QR et RS de manière que $\angle UPT = 45°$. Déterminer le périmètre maximal possible du triangle RUT.



10. Supposons qu'il y a n assiettes espacées également autour d'une table de forme circulaire. Rudi veut placer un cadeau identique dans chacune de k assiettes de manière que deux assiettes voisines ne puissent contenir chacune un cadeau. Soit $f(n,k)$ le nombre de façons possibles de répartir les cadeaux. Par exemple, $f(6,3) = 2$, comme on peut le constater dans la figure suivante.



(a) Déterminer la valeur de $f(7,3)$.

(b) Démontrer que $f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-2,k-1)$ pour tous les entiers tels que $n \geq 3$ et $k \geq 2$.

(c) Déterminer la plus petite valeur possible de $n+k$ parmi tous les couples possibles d'entiers (n,k) pour lesquels $f(n,k)$ est un multiple strictement positif de 2009 (où $n \geq 3$ et $k \geq 2$).

Concours canadien de mathématiques

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2009!
En 2008, plus de 14 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bonne chance.
Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life qui aura lieu fin novembre.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **plus d'information à propos du Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life**
- **des copies gratuites des concours précédents**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours**
- **de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **obtenir des renseignements concernant les concours de 2009/2010**
- **vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants**
- **trouver les résultats de votre école**

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide

le mardi 15 avril 2008

Avec la contribution de:

Avec la participation de:

Comptables agréés

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions de 10 points chacune. Chaque question peut avoir des parties à réponse courte et des parties à développement. Une partie à **RÉPONSE COURTE** vaut 3 points. Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points attribués à la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci : .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci : .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Soyez prudent en inscrivant votre nom sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié dans les Résultats du concours Euclide sur notre site web à http://www.cemc.uwaterloo.ca.

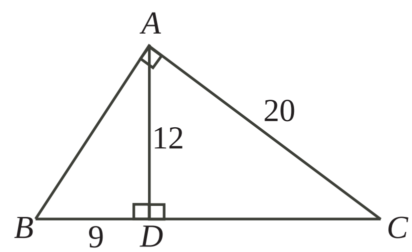
REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Si une réponse est incorrecte, une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2 + \sqrt{7}$, plutôt que 12,566 . . . ou 4,646 . . .

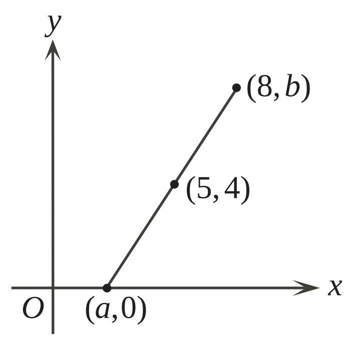
Remarque au sujet de la rédaction des solutions

Lorsqu'un problème est accompagné de « », une solution complète est exigée. Une solution devrait être bien organisée et contenir une dose appropriée d'énoncés mathématiques et de mots d'explications et de justification. Avant de rédiger une solution finale, il est bon de rédiger les grandes lignes et certains détails au brouillon. La solution finale devrait permettre à la correctrice ou au correcteur de comprendre l'approche choisie ainsi que toutes les étapes mathématiques suivies.

1. (a) Quel est le périmètre du triangle ABC ci-contre ?



(b) Dans la figure ci-contre, un segment de droite a pour extrémités les points $(a, 0)$ et $(8, b)$. Il a pour milieu le point $(5, 4)$. Quelle est la valeur de a et de b ?



(c) Les droites d'équations $ax + y = 30$ et $x + ay = k$ se coupent au point $P(6, 12)$. Déterminer la valeur de k.

2. Chaque partie du problème se rapporte à la parabole d'équation $y = (x - 2)(x - 8) + 7$.

(a) Les points $(2, 7)$ et $(c, 7)$ $(c \neq 2)$ sont situés sur la parabole. Quelle est la valeur de c ?

(b) Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole ?

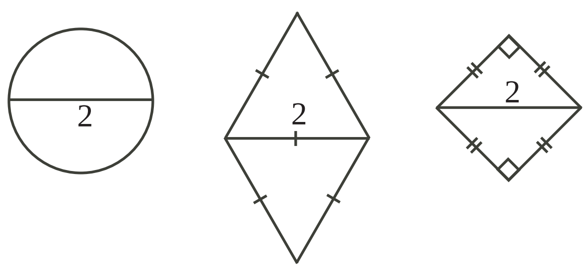
(c) Une droite qui passe par le point $A(5, 0)$ coupe la parabole au point $B(4, -1)$. Déterminer les coordonnées du deuxième point d'intersection de cette droite et de la parabole.

3\. (a) Dans la figure ci-contre, on a placé un cadre 3×3 sur un tableau de nombres. Dans cet exemple, la somme des nombres à l'intérieur du cadre est égale à 108 et le nombre au milieu du cadre est égal à 12. On place ensuite le cadre dans une nouvelle position, de manière que la somme des nombres à l'intérieur du cadre soit égale à 279. Dans cette position, quel est le nombre au milieu du cadre ?

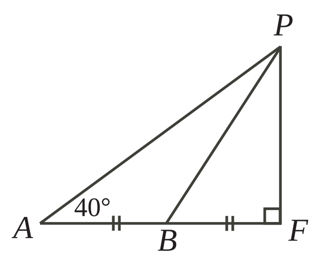
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

(b) Laquelle des trois figures suivantes a la plus petite aire et laquelle a la plus grande aire ? Expliquer comment la réponse a été obtenue. (Dans la Figure A, le cercle a un diamètre de longueur 2.)

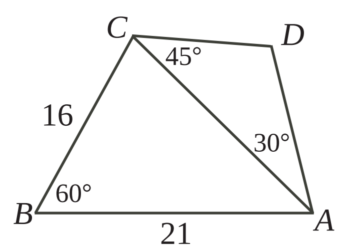
Figure A Figure B Figure C



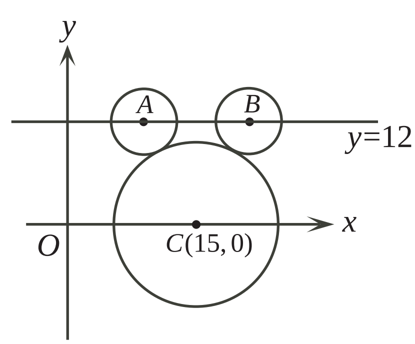
4\. (a) Un mât FP a une hauteur de 20 mètres. Au point A, au sol, on peut mesurer un angle d'élévation de 40° jusqu'au haut du mât. Le point B est situé à mi-chemin entre A et F. Quelle est la mesure de l'angle FBP, au degré près ?



(b) Dans la figure ci-contre, on a $AB = 21$, $BC = 16$, $\angle ABC = 60°$, $\angle CAD = 30°$ et $\angle ACD = 45°$. Déterminer la longueur CD au dixième près.



5\. (a) Dans la figure ci-contre, le grand cercle, de centre $C(15,0)$ a un rayon de 9. Les deux petits cercles, de centres A et B, ont chacun un rayon de 4. Les points A et B sont situés sur la droite horizontale d'équation $y = 12$. Chaque petit cercle est tangent au grand cercle. Une puce met 5 secondes pour marcher à une vitesse constante de A à B le long de la droite d'équation $y = 12$. Quelle distance la puce parcourt-elle en 1 seconde ?



(b) Déterminer toutes les valeurs de k ($k \neq 0$) pour lesquelles le sommet de la parabole d'équation

$$y = kx^2 + (5k+3)x + (6k+5)$$

est situé sur l'axe des abscisses.

6. (a) Une fonction f vérifie l'égalité $f(x) = f(x-1) + f(x+1)$ pour toutes les valeurs de x. Sachant que $f(1) = 1$ et $f(2) = 3$, quelle est la valeur de $f(2008)$?

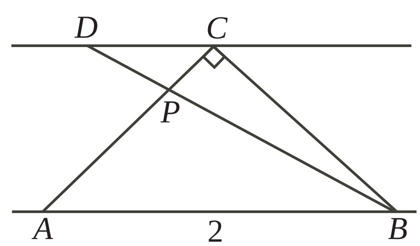
(b) Les nombres a, b, c, dans l'ordre, forment une suite arithmétique de trois termes (voir ci-dessous) et $a + b + c = 60$.
Les nombres $a - 2$, b, $c + 3$, dans l'ordre, forment une suite géométrique de trois termes.
Déterminer toutes les valeurs possibles de a, b et c.

(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, à partir du 2^e, est formé en ajoutant une constante au terme précédent. Par exemple, 3, 5, 7 est une suite arithmétique de trois termes.
Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, à partir du 2^e, est formé en multipliant le terme précédent par une constante. Par exemple, 3, 6, 12 est une suite géométrique de trois termes.)

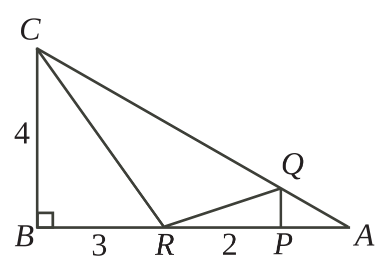
7. (a) Trois multiples consécutifs de 3 ont une moyenne de a.
Quatre multiples consécutifs de 4 ont une moyenne de $a + 27$.
Le plus grand et le plus petit de ces sept nombres ont une moyenne de 42.
Déterminer la valeur de a.

(b) Bruno et Crystel ont chacun un sac de 9 boules. Dans chaque sac, les boules sont numérotées de 1 à 9. Bruno et Crystel enlèvent chacun une boule de leur propre sac. Soit b la somme des numéros sur les boules qui restent dans le sac de Bruno. Soit c la somme des numéros sur les boules qui restent dans le sac de Crystel. Déterminer la probabilité pour que la différence entre b et c soit un multiple de 4.

8. (a) Les points A, B, C et D sont placés comme dans la figure ci-contre. AB est parallèle à DC et P est le point d'intersection de AC et de BD. De plus, on a $\angle ACB = 90°$, $AC = CB$ et $AB = BD = 2$. Déterminer la mesure de l'angle DBC.



(b) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B. Les points P et R sont situés sur le côté AB, tandis que le point Q est situé sur le côté AC de manière que PQ soit parallèle à BC. De plus, $RP = 2$, $BR = 3$, $BC = 4$ et l'aire du triangle QRC est égale à 5. Déterminer la longueur AP.



9. (a) L'équation $2^{x+2}5^{6-x} = 10^{x^2}$ admet deux racines réelles. Déterminer ces deux racines.

(b) Déterminer toutes les solutions réelles du système d'équations

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & \log_{10} x & = & y-1 \\ y & + & \log_{10}(y-1) & = & z-1 \\ z & + & \log_{10}(z-2) & = & x+2 \end{array}$$

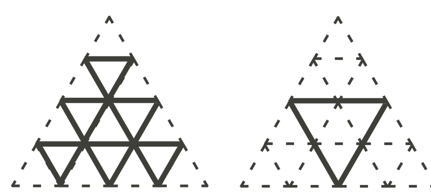
et démontrer que le système n'admet aucune autre solution.

10. On considère un triangle équilatéral debout (qui pointe vers le haut) ayant des côtés de longueur n, n étant un entier strictement positif. On coupe le triangle en petits triangles-unités ayant des côtés de longueur 1, comme dans les exemples suivants.

$n = 3$ $n = 4$

Pour chaque valeur de n, soit $f(n)$ le nombre total de triangles équilatéraux renversés (qui pointent vers le bas) de *toutes* grandeurs. Par exemple, on a $f(3) = 3$ et $f(4) = 6 + 1 = 7$, comme l'indiquent les figures ci-dessous.

$n = 3$ $n = 4$



$f(3) = 3$ $f(4) = 6 + 1 = 7$

(a) Déterminer $f(5)$ et $f(6)$.

(b) Démontrer que pour chaque valeur de k ($k \geq 1$), on a $f(2k) = f(2k-1) + k^2$.

(c) Déterminer toutes les valeurs de n (n étant un entier strictement positif) pour lesquelles $f(n)$ est divisible par n. Justifier son raisonnement.

Concours canadien de mathématiques

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2008!
En 2007, plus de 14 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bonne chance.
Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life qui aura lieu fin novembre.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **plus d'information à propos du Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life**
- **des copies gratuites des concours précédents**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours**
- **de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours**
- **de l'information concernant les carrières en mathématiques**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **obtenir des renseignements concernant les concours de 2008/2009**
- **vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants**
- **trouver les résultats de votre école**

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide

le mardi 17 avril 2007

Avec la contribution de:

Sybase

*i*Anywhere Solutions

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Maplesoft

Avec la participation de:

Durée : 2 heures et demie

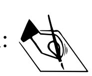
L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 et 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci:  .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci:  .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Soyez prudent en inscrivant votre nom sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont accordés pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

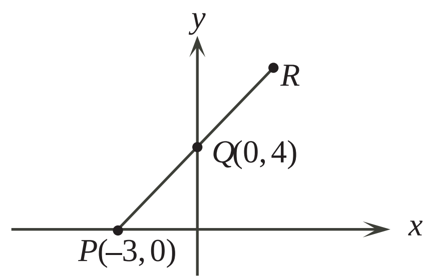
Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié dans les Résultats du concours Euclide sur notre site web à http://www.cemc.uwaterloo.ca.

REMARQUES

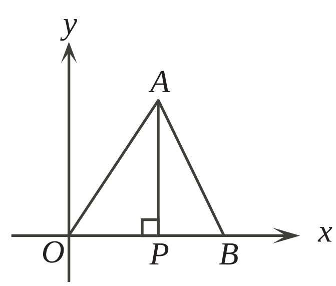
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Si une réponse est incorrecte, une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.

1. (a) Le point $(a-1, a+1)$ est situé sur la droite d'équation $y = 2x - 3$. Quelle est la valeur de a ?

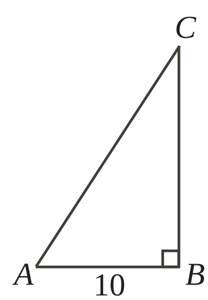
   (b) Dans la figure ci-contre, un segment de droite passe par les points P, Q et R. Si $PQ = QR$, quelles sont les coordonnées de R ?



   (c) Dans la figure ci-contre, $OA = 15$, $OP = 9$ et $PB = 4$. Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points A et B. Expliquer sa démarche.

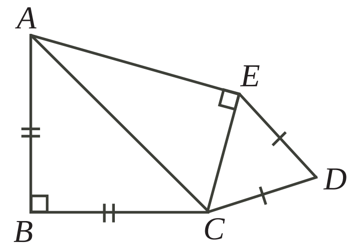


2. (a) Le triangle ABC est rectangle en B et $AB = 10$. Si $\cos(\angle BAC) = \frac{5}{13}$, quelle est la valeur de $\tan(\angle ACB)$?



   (b) Sachant que $0° < x < 90°$ et que $2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{25}{16}$, quelle est la valeur de $\sin x$?

(c) Dans la figure ci-contre, $AB = BC = 2\sqrt{2}$, $CD = DE$, $\angle CDE = 60°$ et $\angle EAB = 75°$. Déterminer le périmètre de la figure $ABCDE$. Expliquer sa démarche.

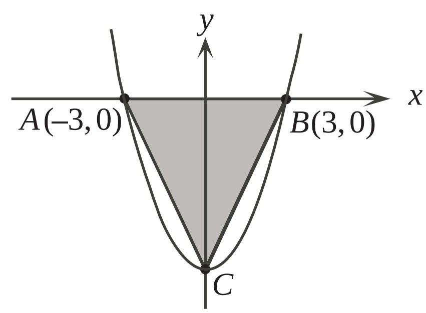


3. (a) Le premier terme d'une suite est égal à 2007. Chaque terme, à partir du deuxième, est égal à la somme des cubes des chiffres du terme précédent. Quel est le 2007$^{\text{e}}$ terme ?

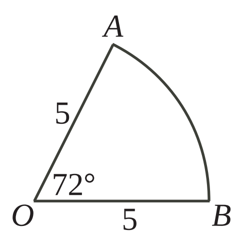
(b) Le n^{e} terme de la suite A est égal à $n^2 - 10n + 70$.
(Les trois premiers termes de la suite A sont 61, 54 et 49.)
La suite B est une suite arithmétique dont le premier terme est égal à 5 et la raison est égale à 10.
(Les trois premiers termes de la suite B sont 5, 15 et 25.)
Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles le n^{e} terme de la suite A est égal au n^{e} terme de la suite B. Expliquer sa démarche.

4. (a) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $2 + \sqrt{x-2} = x - 2$.

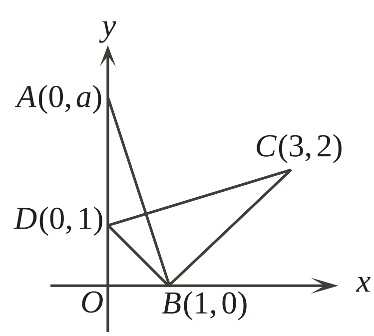
(b) Dans la figure ci-contre, la parabole coupe l'axe des abscisses aux points $A(-3, 0)$ et $B(3, 0)$ et son sommet C est situé en dessous de l'axe des abscisses. Le triangle ABC a une aire de 54. Déterminer l'équation de la parabole. Expliquer sa démarche.



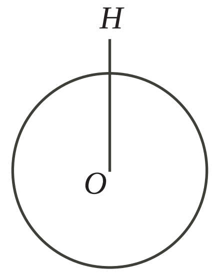
5. (a) Quel est le périmètre du secteur circulaire ci-contre de centre O et de rayon 5 ?



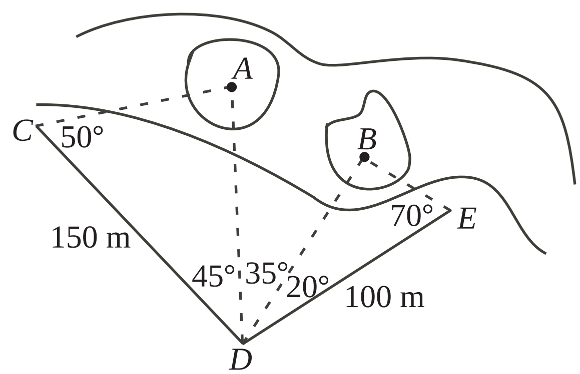
(b) Dans la figure ci-contre, le point $A(0, a)$ est situé sur l'axe des ordonnées au-dessus du point D. Sachant que les triangles AOB et BCD ont la même aire, déterminer la valeur de a. Expliquer sa démarche.



6. (a) Le Petit Prince habite une planète de forme sphérique de centre O qui a un rayon de 24 km. Dans son hélicoptère (H), il plane à une hauteur de 2 km au-dessus d'un point fixe. De cette position, dans son hélicoptère, quelle est la distance, en kilométres, jusqu'au point le plus éloigné qu'il puisse voir sur la surface de la planète ?

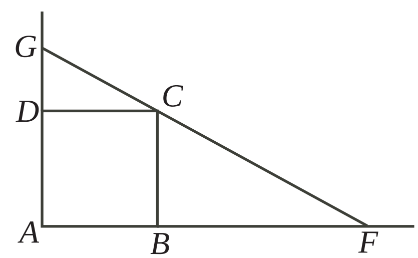


(b) Dans la figure ci-contre, les points A et B sont sur des îles situées dans une rivière pleine de chèvres enragées. Déterminer, au mètre près, la distance de A à B. (Heureusement que quelqu'un a pris la peine de mesurer les angles indiqués, ainsi que les longueurs CD et DE.)

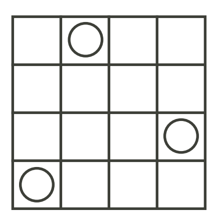


7. (a) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $(\sqrt{x})^{\log_{10} x} = 100$.

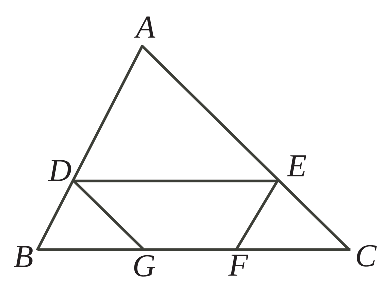
(b) Dans la figure ci-contre, le segment de droite FCG passe par le sommet C du carré $ABCD$. Le point F est situé sur le prolongement du côté AB et le point G est situé sur le prolongement du côté AD. Démontrer que $\dfrac{1}{AB} = \dfrac{1}{AF} + \dfrac{1}{AG}$.



8. (a) On a placé trois pièces de monnaie, au hasard, sur trois cases différentes du quadrillage 4×4 ci-contre. Déterminer la probabilité pour qu'il n'y ait pas deux pièces dans la même ligne, ni dans la même colonne.



(b) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC a une aire de 1. Le trapèze $DEFG$ a été construit comme suit : G est situé à la gauche de F sur BC, DE est parallèle à BC, EF est parallèle à AB et DG est parallèle à AC. Déterminer la plus grande aire possible du trapèze $DEFG$.

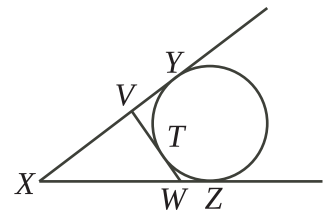


9. La parabole d'équation $y = f(x) = x^2 + bx + c$ a pour sommet P et la parabole d'équation $y = g(x) = -x^2 + dx + e$ a pour sommet Q, P et Q étant des points distincts. De plus, les paraboles se coupent aux points P et Q.

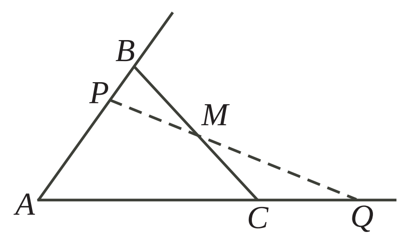
(a) Démontrer que $2(e - c) = bd$.

(b) Démontrer que la droite qui passe par les points P et Q a une pente de $\frac{1}{2}(b + d)$ et une ordonnée à l'origine de $\frac{1}{2}(c + e)$.

10. (a) Dans la figure ci-contre, le cercle est tangent à la demi-droite XY en Y et à la demi-droite XZ en Z. Un point T est choisi sur le petit arc YZ et une tangente au cercle est construite au point T. Elle coupe le segment XY en V et le segment XZ en W. Démontrer que le périmètre du triangle VXW est indépendant de la position du point T.



(b) Dans la figure ci-contre, $AB = 10$, $BC = 14$, $AC = 16$ et M est le milieu du segment BC. Au point M, on peut tracer plus d'une droite. Chacune coupera la demi-droite AB en un point P et la demi-droite AC en un point Q. Déterminer le plus petit périmètre possible du triangle APQ. Justifier sa démarche.



Concours canadien de mathématiques

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2007!
En 2006, plus de 15 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bonne chance.
Si vous retournerez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Défi ouvert canadien de mathématiques qui aura lieu fin novembre.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **plus d'information à propos du Défi ouvert canadien de mathématiques**
- **des copies gratuites des concours précédents**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs**
- **de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours**
- **de l'information concernant les carrières en mathématiques**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **obtenir des renseignements concernant les concours de 2007/2008**
- **vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles aux enseignants**
- **trouver les résultats de votre école**

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide

le mercredi 19 avril 2006

Avec la contribution de: University of Waterloo; Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés; London Life et La Great-West, compagnies d'assurance-vie; Sybase iAnywhere Solutions

Avec la participation de: Institut canadien des actuaires; Maplesoft

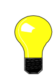
---

Durée : 2 heures et demie

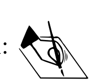
L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 et 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci:  .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci:  .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Soyez prudent en inscrivant votre nom sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont accordés pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

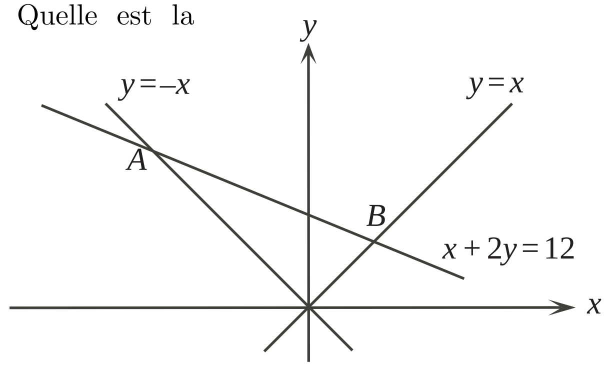
REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Si une réponse est incorrect, une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf avec indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.

1. (a) Quelle est la somme de l'abscisse à l'origine et de l'ordonnée à l'origine de la droite définie par $3x - 3y = 24$?

   (b) Les droites d'équations $px = 12$ et $2x + qy = 10$ se coupent au point (1,1). Quelle est la valeur de $p + q$?

   (c) Dans la figure, la droite d'équation $x + 2y = 12$ coupe les droites d'équations $y = -x$ et $y = x$ aux points respectifs A et B. Quelle est la longueur du segment AB ?



2. (a) Les chiffres du nombre entier 46 ont une moyenne de 5. Combien y a-t-il d'entiers positifs de deux chiffres, y compris le nombre 46, dont les chiffres ont une moyenne de 5 ?

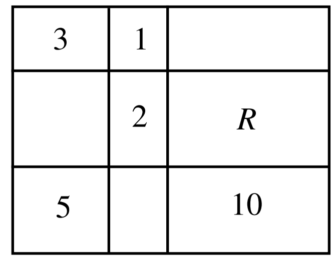
   (b) Le nombre n est un entier positif de deux chiffres. Lorsqu'on place une virgule décimale entre les chiffres de n, le nombre qui en résulte est égal à la moyenne des chiffres de n. Quelle est la valeur de n ?

   (c) Trois entiers positifs ont une moyenne de 28. Lorsqu'on ajoute deux entiers, s et t, à ces nombres, la moyenne des cinq entiers est égale à 34. Quelle est la moyenne de s et de t ?

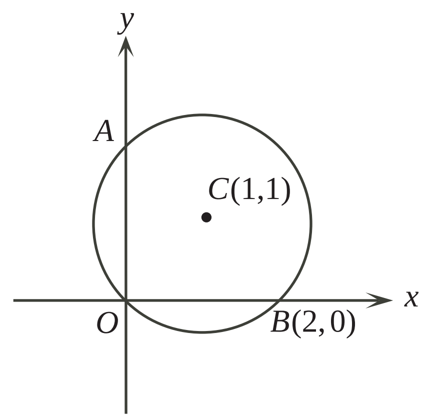
3. (a) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole d'équation $y = (x - 20)(x - 22)$.

   (b) Soit O l'origine, A le sommet de la parabole d'équation $y = x^2 + 2$ et B le sommet de la parabole d'équation $y = x^2 - 6x + 7$. Déterminer l'aire du triangle OAB.

4. (a) Le grand rectangle ci-contre a été divisé en neuf petits rectangles. L'aire de cinq de ces petits rectangles est indiquée. Déterminer l'aire du rectangle indiqué par la lettre R.



(b) Dans la figure ci-contre, le cercle de centre $C(1,1)$ passe au point $O(0,0)$. Le cercle coupe l'axe des ordonnées en A et l'axe des abscisses en $B(2,0)$. Déterminer les coordonnés de A, ainsi que l'aire de la partie du cercle qui se trouve dans le quadrant I. Justifier son travail.



5. (a) Si a est choisi au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et si b est choisi au hasard dans l'ensemble $\{6, 7, 8\}$, quelle est la probabilité pour que a^b soit un nombre pair ?

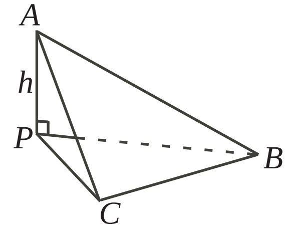
(b) Dans un sac, il y a des chapeaux bleus et des chapeaux verts. À chaque tour, Julie enlève un chapeau du sac, sans regarder, chaque chapeau du sac ayant la même chance d'être choisi. Si le chapeau choisi est vert, elle prend un chapeau bleu de sa réserve de chapeaux et l'ajoute au sac. Si le chapeau choisi est bleu, elle prend un chapeau vert de sa réserve et l'ajoute au sac. Au départ, le sac contient 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts. Quelle est la probabilité pour qu'après deux tours, le sac contienne de nouveau 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts ?

6. (a) Pour les mesures d'angles x et y, on a :

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 y &= \tfrac{3}{2}a \\ \cos^2 x + \sin^2 y &= \tfrac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

Déterminer les valeurs possibles de a.

(b) Des survivants, sur une île déserte, ont trouvé une planche de contreplaqué (ABC) de la forme d'un triangle équilatéral avec des côtés de 2 m. Pour protéger leur chèvre du soleil, ils placent le côté BC sur le sol, soulèvent le coin A et le soutiennent au moyen d'un poteau vertical PA de longueur h m. Lorsque le soleil est directement au-dessus de leurs têtes, l'ombre de la planche est un triangle isocèle PBC dont le plus grand angle, soit l'angle BPC, mesure 120°. Déterminer la valeur de h au centimètre près.

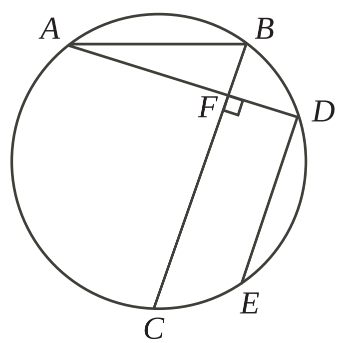


7. (a) La suite $2, 5, 10, 50, 500, \ldots$ est formée de manière que chaque terme, après le deuxième, est égal au produit des deux termes précédents. Le 15e terme se termine avec exactement k zéros. Quelle est la valeur de k ?

(b) Soit a, b, c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Démontrer que $a^2 - bc$, $b^2 - ac$ et $c^2 - ab$ sont aussi trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.
(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en additionnant une constante au terme précédent. Par exemple, 3, 5, 7 est une suite arithmétique de trois termes.)

8. (a) Soit $\log_2 x - 2\log_2 y = 2$. Exprimer y en fonction de x et esquisser la courbe représentative de cette équation dans le plan indiqué par les axes dans le cahier-réponse.

(b) Dans la figure ci-contre, AB et BC sont des cordes du cercle de manière que $AB < BC$. D est le point du cercle pour lequel AD est perpendiculaire à BC et E est le point du cercle pour lequel DE est parallèle à BC. Démontrer avec soin que $\angle EAC + \angle ABC = 90°$, tout en justifiant chaque étape.



9. On définit $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + k\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)$, k étant un nombre réel quelconque.

(a) Déterminer tous les nombres réels k de manière que $f(x)$ soit constante pour toutes les valeurs de x.

(b) Soit $k = -0{,}7$. Déterminer toutes les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

(c) Déterminer tous les nombres réels k de manière qu'il existe un nombre réel c tel que $f(c) = 0$.

10. Les points A_1, A_2, …, A_N sont placés à intervalles réguliers sur un cercle et $N \geq 3$. On choisit trois de ces points au hasard et on les utilise comme sommets pour former un triangle.

(a) Soit $N = 7$. Quelle est la probabilité pour que le triangle soit acutangle ? (Un triangle est acutangle si chacun de ses angles mesure moins de 90°.)

(b) Soit $N = 2k$, k étant un entier positif tel que $k \geq 2$. Déterminer la probabilité pour que le triangle soit acutangle.

(c) Soit $N = 2k$, k étant un entier positif tel que $k \geq 2$. Déterminer toutes les valeurs possibles de k de manière que la probabilité pour que le triangle soit acutangle puisse être exprimée sous la forme $\dfrac{a}{2007}$, a étant un entier strictement positif.

Concours canadien de mathématiques

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2006!
En 2005, plus de 15 600 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bonne chance.
Si vous retournerez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Défi ouvert canadien de mathématiques qui aura lieu fin novembre.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- plus d'information à propos du Défi ouvert canadien de mathématiques
- des copies gratuites des concours précédents
- des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs
- de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours
- de l'information concernant les carrières en mathématiques

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- obtenir des renseignements concernant les concours de 2006/2007
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles aux enseignants
- trouver les résultats de votre école

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide

pour les prix
Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Le mardi 19 avril 2005

Avec la contribution de:

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la participation de:

Institut canadien des actuaires

The Great-West Life Assurance Company

stronger communities together
Great-West Life | London Life

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance vie

Sybase

Sybase iAnywhere Solutions

*i*Anywhere Solutions

Durée: 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 et 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES:

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci: .
2. **Écrire la réponse dans la case approprié du cahier-réponse.** Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT:

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci: .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Soyez prudent d'avoir mis votre nom sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont accordés pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

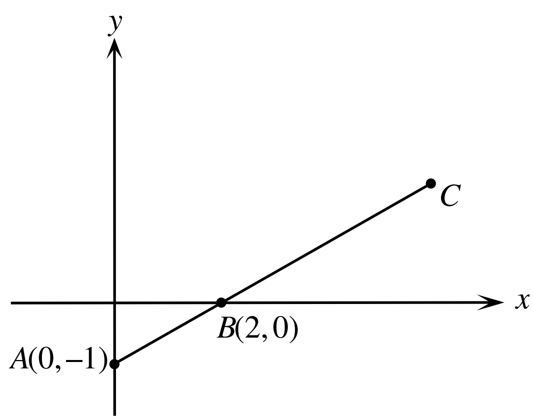
Remarque:
À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

REMARQUES

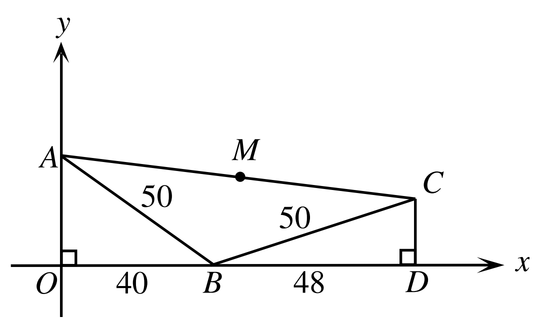
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf avec indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.

1. (a) Si le point (a, a) est situé sur la droite d'équation $3x - y = 10$, quelle est la valeur de a ?

   (b) Dans la figure ci-contre, les points A, B et C sont situés sur une droite et $BC = 2AB$. Quelles sont les coordonnées du point C ?



   (c) Dans la figure ci-contre, les triangles AOB et CDB sont rectangles et le point M est le milieu du segment AC. Déterminer les coordonnées de M.



2. (a) Si $y = 2x + 3$ et $4y = 5x + 6$, quelle est la valeur de x ?

   (b) a, b, et c sont des nombres tels que :

$$\begin{aligned} -3b + 7c &= -10 \\ b - 2c &= 3 \\ a + 2b - 5c &= 13 \end{aligned}$$

   Quelle est la valeur de a ?

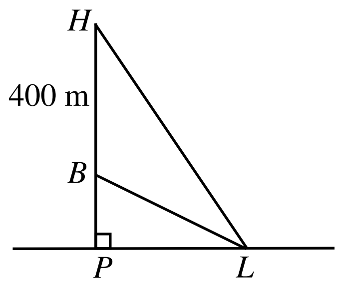
   (c) Jean et Marie ont participé au concours Euclide. Deux fois la note de Jean est 60 de plus que celle de Marie. Deux fois la note de Marie est 90 de plus que celle de Jean. Déterminer la moyenne de la note de Jean et de celle de Marie.

3. (a) Si $2^x = 2(16^{12}) + 2(8^{16})$, quelle est la valeur de x ?

(b) Soit $f(x) = 2x - 1$.
Déterminer toutes le valeurs réelles de x pour lesquelles $\big(f(x)\big)^2 - 3f(x) + 2 = 0$.

4. (a) Six billets, numérotés de 1 à 6, sont placés dans une boîte. Deux billets sont choisis au hasard en même temps et sont déposés sur une table. Quelle est la probabilité pour que le plus petit des numéros sur ces deux billets soit inférieur ou égal à 4 ?

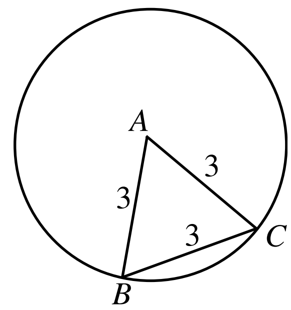
(b) Un hélicoptère vole en position fixe au point H, directement au-dessus du point P au sol. Louis est assis au sol au point L, de manière que $\angle HLP = 60°$. On laisse tomber une balle de l'hélicoptère. Lorsque la balle atteint le point B, à 400 m en dessous de l'hélicoptère, on a $\angle BLP = 30°$. Déterminer la distance entre les points L et P.



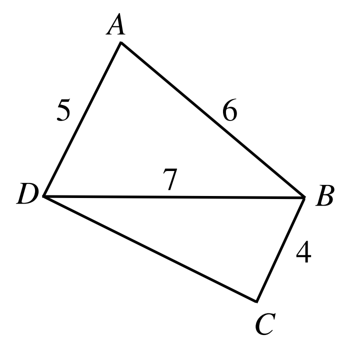
5. (a) Une chèvre est située à l'origine $(0, 0)$ et elle se déplace selon une série de mouvements. Son l^er^ mouvement la mène au point $(0, 1)$. Lors du 2^e^ mouvement, elle se déplace de 2 unités vers la droite pour arriver au point $(2, 1)$. Lors du 3^e^ mouvement, elle se déplace de 3 unités vers le bas pour arriver au point $(2, -2)$. Lors du 4^e^ mouvement, elle se déplace de 4 unités pour arriver au point $(-2, -2)$. Elle continue de la sorte, de manière qu'au $n^{\text{ième}}$ mouvement, elle tourne de $90°$ dans le sens des aiguilles d'une montre, puis elle se déplace de n unités dans cette nouvelle direction. Après n mouvements, la chèvre s'est déplacée de 55 unités. Déterminer les coordonnées du point où elle se trouve après ces n mouvements.

(b) Déterminer toutes les valeurs possibles de r de manière que la suite géométrique de trois termes, 4, $4r$, $4r^2$, soit aussi une suite arithmétique.
(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme est obtenu en additionnant une constante au term précédent. Par exemple, 3, 5, 7, 9, 11 est une suite arithmétique.)

6. (a) Un triangle ABC a des côtés de longueur 3. Ses sommets B et C sont situés sur un cercle de rayon 3. On fait subir au triangle une rotation de centre C, dans le sens des aiguilles d'une montre, jusqu'à ce que le sommet A soit sur le cercle, puis une rotation de centre A jusqu'à ce que le sommet B soit sur le cercle, ainsi de suite, jusqu'à ce que le triangle revienne à sa position initiale. Quelle est la distance totale parcourue par le point B ?

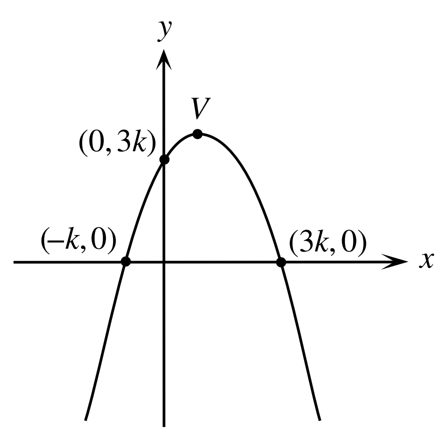


(b) Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un quadrilatère dans lequel $\angle A + \angle C = 180°$. Déterminer la longueur du côté CD.



7. (a) Soit $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x + 2$. Quelles sont les valeurs maximale et minimale de $f(x)$?

(b) Dans la figure ci-contre, la parabole d'équation $y = -\frac{1}{4}(x-r)(x-s)$ coupe les axes en trois points distincts. Le point V est le sommet de la parabole. Déterminer la valeur de k, ainsi que les coordonnées du point V.

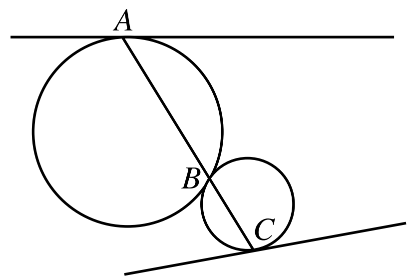


8. (a) Une fonction est définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -4 \\ -x & \text{si } -4 \leq x \leq 5 \\ -5 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Sur le quadrillé fourni à cet effet, tracer le graphique de la relation définie par $y = g(x)$ où $g(x) = \sqrt{25 - [f(x)]^2}$.
Nommer la forme du graphique dans chacun des trois intervalles.

(b) Dans la figure ci-contre, les deux cercles sont tangents l'un à l'autre au point B. Une droite coupe les deux cercles aux points A, B, et C. Une tangente à un cercle est tracée au point A et une tangente au deuxième cercle est tracée au point C. Démontrer que ces deux tangentes sont parallèles.



9. Le cercle d'équation $(x - p)^2 + y^2 = r^2$ a pour centre C et le cercle d'équation $x^2 + (y - p)^2 = r^2$ a pour centre D. Ces cercles se coupent en deux points *distincts*, A et B, ayant pour abscisse respective a et b.
(a) Démontrer que $a + b = p$ et $a^2 + b^2 = r^2$.
(b) Si on fixe la valeur de r et que la valeur de p est choisie de manière que l'aire du quadrilatère $CADB$ soit un maximum, démontrer que A ou B doit être situé à l'origine.
(c) Si p et r sont des entiers, déterminer la distance minimale possible entre les points A et B. Déterminer une valeur entière de p et de r, chacune supérieure à 1, qui donnent cette distance.

10. Dans un couloir d'une école, il y a n casiers ouverts, numérotés de 1 à n. En arrivant à l'école Joséphine commence au début du couloir et ferme la porte de chaque deuxième casier. Ensuite, elle revient sur ses pas et ferme la porte de chaque deuxième casier dont la porte était encore ouverte. Elle continue de la sorte jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une porte ouverte. Soit $f(n)$ le numéro du dernier casier dont la porte est ouverte.
Par exemple, s'il y a 15 casiers, l'exemple suivant démontre que $f(15) = 11$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
$\longrightarrow$	1	~~2~~	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15	
	~~1~~		3		~~5~~		7		~~9~~		11		~~13~~		15	$\longleftarrow$
$\longrightarrow$			3				~~7~~				11				~~15~~	
			~~3~~								11					$\longleftarrow$

(a) Déterminer $f(50)$.
(b) Démontrer qu'il n'existe aucun entier positif n pour lequel $f(n) = 2005$.
(c) Démontrer qu'il existe un nombre infini de valeurs entières de n pour lesquelles $f(n) = f(2005)$.

Concours canadien de mathématiques

Pour les étudiants...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2005!
En 2004, plus de 15 000 étudiants autour du monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous graduez de l'école secondaire, bonne chance dans vos futurs accomplissements.
Si vous retournerez à l'école secondaire l'année prochaine, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Défi ouvert canadien de mathématiques qui aura lieu à la fin novembre.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour trouver
- **plus d'information à propos du Défi ouvert canadien de mathématiques**
- **des copies gratuites des concours précédents**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs**
- **de l'information au sujet de nos publications pour l'enrichissement mathématiques et pour la préparation aux concours**
- **de l'information concernant les carrières en mathématiques**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **obtenir des renseignements concernant les concours de 2005-6**
- **apprendre à propos des ateliers et des ressources disponibles aux enseignants**
- **trouver les résultats de votre école**

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Le mercredi 14 avril 2004

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche

Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

Great West Life and London Life

Sybase Inc. (Waterloo)

*i*Anywhere Solutions

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 à 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES :

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci: .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse**. Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

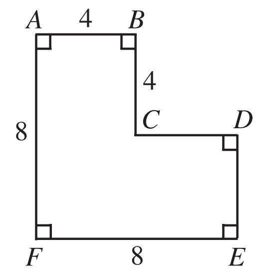
Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT :

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci: .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse**. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
3. Des points sont accordés pour de solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

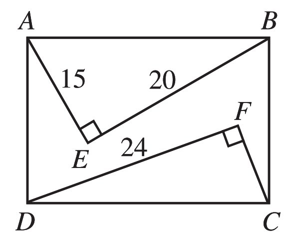
Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

REMARQUES : 1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.

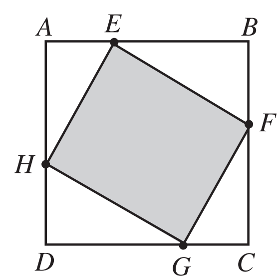
1. a) D'après la figure, quelle est l'aire de *ABCDEF*?



b) Dans la figure, *ABCD* est un rectangle, où $AE = 15$, $EB = 20$ et $DF = 24$.
Quelle est la longueur *CF*?

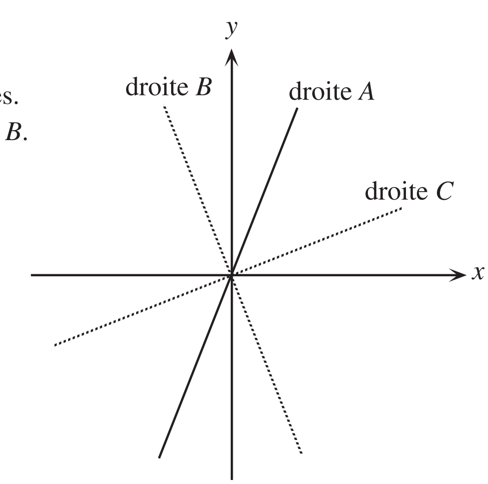


c) *ABCD* est un carré dont les côtés ont une longueur de 6.
Les points *E*, *F*, *G* et *H* sont situés sur les côtés respectifs AB, BC, CD et DA, de manière que les rapports $AE{:}EB$, $BF{:}FC$, $CG{:}GD$ et $DH{:}HA$ égalent tous 1:2.
Déterminer l'aire de *EFGH*.

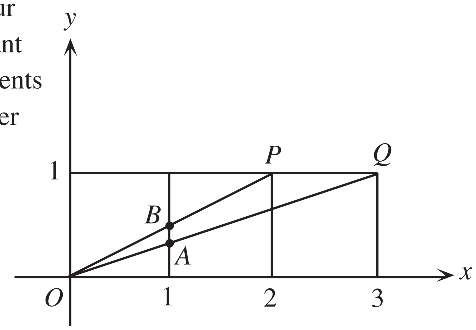


2. a) Une droite horizontale a la même ordonnée à l'origine que la droite d'équation $3x - y = 6$. Quelle est l'équation de la droite horizontale?

b) La droite *A* a pour équation $y = 2x$. La droite *B* est l'image de la droite *A* par une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées. La droite *C* est perpendiculaire à la droite *B*. Quelle est la pente de la droite *C*?



c) Trois carrés, dont les côtés ont une longueur de 1, sont placés côte à côte dans le quadrant I comme dans la figure. On trace des segments de l'origine O aux points P et Q. Déterminer la longueur AB.



3. a) Dans une suite arithmétique de cinq termes, la somme des deux premiers termes est égale à 2 et la somme des deux derniers termes est égale à –18. Quel est le troisième terme de la suite? (Une *suite arithmétique* est une suite dont chaque terme est obtenu en additionnant une constante au terme précédent. Par exemple, 3, 5, 7, 9, 11 est une suite arithmétique de cinq termes.)

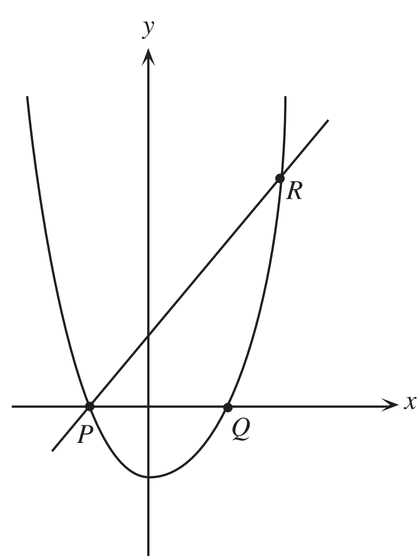
b) Sachant que $x - y = 4\sqrt{2}$ et $xy = 56$, déterminer les deux valeurs possibles de $x + y$.

4. a) On jète deux dés justes, ayant chacun six faces numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité pour que le *produit* des deux nombres sur la face supérieure des dés soit divisible par 5?

b) Soit $f(x) = x^2 - x + 2$, $g(x) = ax + b$ et $f(g(x)) = 9x^2 - 3x + 2$. Déterminer tous les couples (a, b) qui vérifient ces conditions.

5. a) Soit $16^x = 2^{x+5} - 2^{x+4}$. Quelle est la valeur de x?

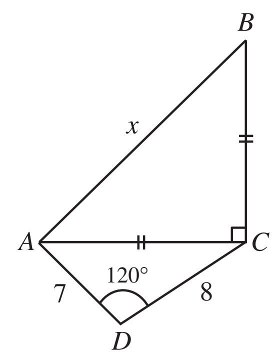
b) La parabole d'équation $y = x^2 + tx - 2$ coupe l'axe des abscisses aux points P et Q.
La droite d'équation $y = 3x + 3$ coupe la parabole aux points P et R.
Déterminer la valeur de t, ainsi que l'aire du triangle PQR.



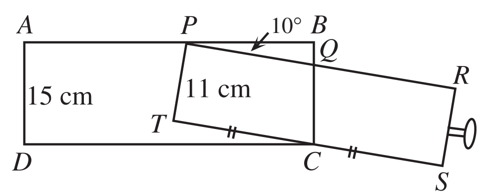
6. a) Laure a une pièce de 1 \$, trois pièces de 25 ¢, trois pièces de 10 ¢, trois pièces de 5 ¢ et cinq pièces de 1 ¢. Elle veut acheter un petit hélicoptère qui coûte 1,34 \$. Quel est le plus grand nombre de pièces de monnaie qu'elle peut utiliser pour faire l'achat? (Une pièce de 25 ¢ vaut 0,25 \$, une pièce de 10 ¢ vaut 0,10 \$, une pièce de 5 ¢ vaut 0,05 \$ et une pièce de 1 ¢ vaut 0,01 \$.)

b) Une image numérique est formée d'un très grand nombre de points appelés *pixels*.
La *résolution* d'une image est le nombre de pixels par centimètre, à l'horizontale et à la verticale.
Une image mesurant 10 cm sur 15 cm et ayant une résolution de 75 pixels/cm est donc formée de $(10 \times 75) \times (15 \times 75)$ ou $843\,750$ pixels.
Si on augmente chacune de ses dimensions de n % et si la résolution est diminuée de n %, l'image sera formée de 345 600 pixels.
Déterminer la valeur de n.

7. a) Dans la figure, $AC = BC$, $AD = 7$, $DC = 8$ et $\angle ADC = 120^\circ$. Quelle est la valeur de x?



b) La figure représente une vue de côté d'un tiroir $PRST$ partiellement emboîté dans un cadre $ABCD$. Le tiroir a une hauteur de 11 cm, tandis que le cadre a une hauteur de 15 cm. Le tiroir a été glissé jusqu'à ce que le milieu de sa base soit au point C. Le tiroir est penché de manière que le point P touche le haut du cadre. L'angle entre le haut du tiroir et le haut du cadre mesure 10°. Déterminer la longueur du tiroir, au dixième de centimètre près.



8. a) Soit $T = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$. Déterminer les valeurs de b et de c pour lesquelles $x^6 + \dfrac{1}{x^6} = T^3 + bT + c$ pour toutes les valeurs réelles non nulles de x.

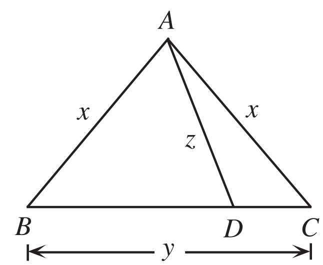
b) Soit x un nombre réel qui vérifie l'équation $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 2\sqrt{5}$. Déterminer la valeur exacte de $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

9. Un *triplet de Kirk* est un triplet (x, y, z) d'entiers tel que :

   i $x > z$,

   ii z est un nombre premier et

   iii il existe un triangle ABC où $AB = AC = x$ et $BC = y$, ainsi qu'un point D sur BC de manière que $AD = z$ et $\angle ADB = 60°$.



a) Déterminer le triplet de Kirk pour lequel $x = 7$ et $z = 5$.

b) Déterminer tous les autres triplets de Kirk pour lesquels $z = 5$.

c) Déterminer le triplet de Kirk pour lequel la valeur de $\cos(\angle ABC)$ est le plus rapprochée possible de 0,99.

10. Une *suite de Skolem* d'ordre n est une suite $(s_1, s_2, ..., s_{2n})$ de $2n$ entiers qui vérifie les conditions suivantes :

   i pour chaque k dans l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., n\}$, il y a exactement deux termes, s_i et s_j, pour lesquels $s_i = s_j = k$ et

   ii si $s_i = s_j = k$ $(i < j)$, alors $j - i = k$.

Par exemple, $(4, 2, 3, 2, 4, 3, 1, 1)$ est une suite de Skolem d'ordre 4.

a) Écrire toutes les suites de Skolem d'ordre 4.

b) Déterminer toutes les suites de Skolem d'ordre 9 qui vérifient les trois conditions suivantes :

   I $s_3 = 1$,

   II $s_{18} = 8$,

   III entre n'importe quels deux termes pairs égaux, il y a exactement un terme impair.

c) Démontrer qu'il n'existe aucune suite de Skolem d'ordre n si n est un nombre de la forme $4k + 2$ ou $4k + 3$, k étant un entier non négatif.

PUBLICATIONS

Les étudiants et les parents qui estiment que la résolution de problèmes constitue un divertissement et un loisir se réjouiront de pouvoir consulter les publications suivantes. Il s'agit d'excellentes ressources documentaires axées sur l'enrichissement, le développement des capacités à résoudre des problèmes et la préparation en vue des concours de mathématiques.

Exemplaires des Concours canadiens de mathématiques des années antérieures
Des exemplaires des concours antérieurs et des solutions, aussi bien en français qu'en anglais, sont disponibles gratuitement sur note site web http://www.cemc.uwaterloo.ca

Livres «Problems Problems Problems»
Chaque volume est une ensemble de problèmes à choix multiple ou à solution complète. Les problèmes sont regroupés selon les sujets, avec 9 sujets ou plus par volume. Les problèmes sont choisis à partir des concours des années précédentes offerts par le Concours canadien de mathématiques et des solutions complètes sont fournies pour chaque problème. Chaque volume coûte 15,00 $. **Le Volume 1 est disponible en français et en anglais. Les Volumes 2-9 sont disponibles en anglais seulement.**

Volume 1
- **(Disponible en français)**
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves de 9^e, 10^e et 11^e année (Sec. III, IV et V)

Volume 2
- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets (différents de ceux du volume 1)
- pour les élèves de 9^e, 10^e et 11^e année (Sec. III, IV et V)

Volume 3
- plus de 235 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 4
- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 7^e, 8^e et 9^e année (Sec. I, II et III)

Volume 5
- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 9 sujets (différents de ceux du volume 3)
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 6
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 11 sujets (différents de ceux du vol. 4)
- pour les élèves de 7^e, 8^e et 9^e année (Sec. I, II et III)

Volume 7
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 9^e et 10^e année (Sec. III et IV)

Volume 8
- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 9
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 11 sujets
- pour les élèves de 7^e et 8^e année (Sec. I et II)

Faire passer les commandes au : Concours canadien de mathématiques
Faculté de mathématiques, pièce MC 5181
Université de Waterloo
Waterloo (Ontario) N2L 3G1

Veuillez inscrire votre nom, votre adresse (et votre code postal) ainsi que votre numéro de téléphone.
Établir les chèques ou les mandats à l'ordre du «Centre for Education in Mathematics and Computing». Pour les commandes effectuées au Canada, veuillez ajouter 3 $ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 1 $ pour chaque article additionnel. Aucune taxe de vente provinciale ne s'applique, mais il faut ajouter la TPS de 7 p. 100. Pour les commandes ***de l'extérieur du Canada SEULEMENT***, veuillez ajouter 10 $ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 2 $ pour chaque article additionnel. **Les prix de ces publications demeureront en vigueur jusqu'en 1 septembre 2004.**

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide (12[e] – Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Le mardi 15 avril 2003

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche

Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Sybase Inc. (Waterloo)

*i*Anywhere Solutions

Avec l'appui de :

Financière Manuvie

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 à 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES :

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci: .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse**. Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT :

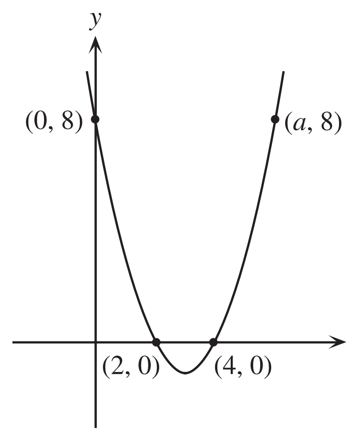
1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci: .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse**. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
3. Des points sont accordés pour de solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

REMARQUES :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.

1. a) Une parabole coupe l'axe des ordonnées au point $(0, 8)$, coupe l'axe des abscisses aux points $(2, 0)$ et $(4, 0)$ et passe au point $(a, 8)$. Quelle est la valeur de a?

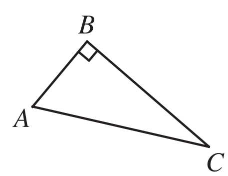


b) L'équation du second degré $x^2 + 6x + k = 0$ admet deux racines égales. Quelle est la valeur de k?

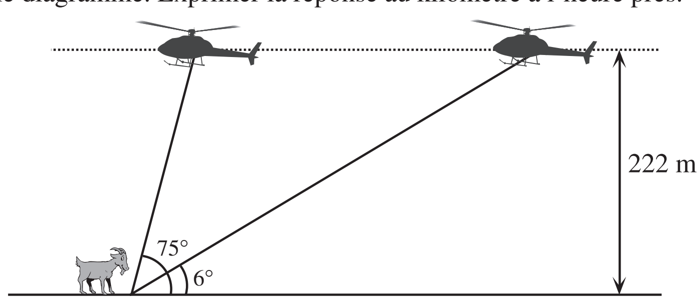
c) La droite d'équation $y = 2x + 2$ coupe la parabole définie par $y = x^2 - 3x + c$ en deux points. Un de ces points a pour coordonnées $(1, 4)$. Déterminer les coordonnées du deuxième point d'intersection.

2. a) Si $0^\circ < x < 90^\circ$ et $3\sin(x) - \cos(15^\circ) = 0$, quelle est la valeur de x au dixième de degré près?

b) Le triangle ABC est rectangle en B et $AC = 20$. Si $\sin C = \frac{3}{5}$, quelle est la longueur du côté BC?



c) Un hélicoptère vole en direction ouest à une vitesse constante et à une altitude constante de 222 m au-dessus d'un terrain plat. Une chèvre immobile, de fier tempérament, est placée à l'ouest de l'hélicoptère. Elle prend deux mesures de l'angle entre le sol et l'hélicoptère. La première mesure est de 6°. La deuxième mesure, prise une minute plus tard, est de 75°. Déterminer la vitesse de l'hélicoptère si celui-ci n'a pas encore passé la chèvre, comme dans le diagramme. Exprimer la réponse au kilomètre à l'heure près.



3. a) La fonction f est telle que $f(2x+3)=2f(x)+3$ pour toutes les valeurs de x. Si $f(0)=6$, quelle est la valeur de $f(9)$?

b) Supposons que les fonctions f et g vérifient le système d'équations suivant pour toutes les valeurs de x :

$$f(x)+3g(x)=x^2+x+6$$
$$2f(x)+4g(x)=2x^2+4$$

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)=g(x)$.

4. a) Dans l'épreuve finale de patinage de vitesse sur piste courte, il y a cinq finalistes, dont deux Canadiennes. Les trois premières recevront une médaille. Si les cinq finalistes ont la même chance de terminer dans n'importe quelle position, quelle est la probabilité pour qu'aucune des Canadiennes ne remporte une médaille?

b) Déterminer le nombre d'entiers, de 1 à 300, qui sont des multiples de 3 ou de 5, mais qui ne sont pas des multiples de 10 ou de 15.

5. a) Dans la série $1+3+5-7-9-11+13+15+17-19-21-23$ ..., formée d'entiers impairs, le signe change à tous les trois termes. Quelle est la somme des 300 premiers termes de la série?

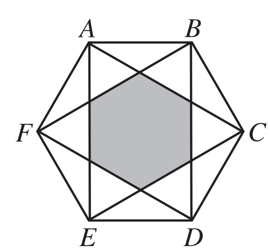
b) Un nombre de deux chiffres est tel que le carré du chiffre des dizaines plus dix fois le chiffre des unités est égal au carré du chiffre des unités plus dix fois le chiffre des dizaines. Déterminer tous les nombres premiers de deux chiffres qui vérifient cette propriété.

6. a) Une boîte de plomb contient deux isotopes radioactifs de fer. L'isotope A se désintègre de manière qu'à toutes les 6 minutes, le nombre d'atomes qui restent est diminué de moitié. Au début, il y a deux fois plus d'atomes d'isotope A que d'atomes d'isotope B. Après 24 minutes, il y a autant d'atomes de chaque isotope. Combien de temps les atomes de l'isotope B mettent-ils pour diminuer de moitié?

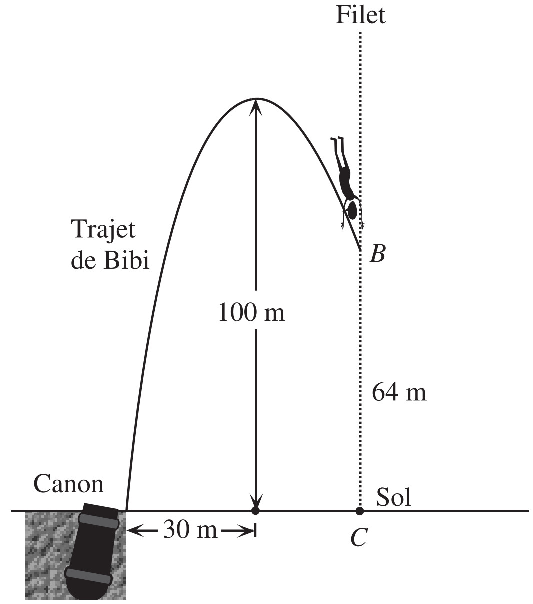
b) Résoudre le système d'équations :

$$\log_{10}\left(x^3\right)+\log_{10}\left(y^2\right)=11$$
$$\log_{10}\left(x^2\right)-\log_{10}\left(y^3\right)=3$$

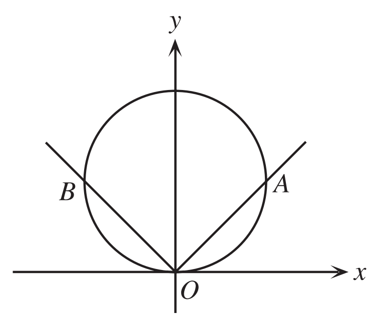
7. a) Un hexagone régulier est un polygone de six côtés dont tous les côtés sont congrus et tous les angles sont congrus. L'hexagone $ABCDEF$ est régulier et son aire est égale à 36. La région ombrée, qui est commune aux triangles équilatéraux ACE et BDF, est un hexagone. Quelle est l'aire de cet hexagone ombré?



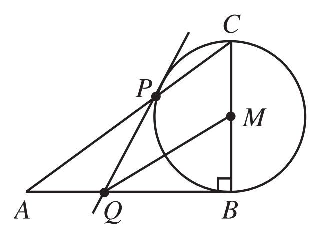
b) Dans un numéro du Cirque de la Lune, Bibi est projetée d'un canon à partir du sol. (Pour des raisons de sécurité, le canon est partiellement enseveli sous le sol.) Le trajet de Bibi est une parabole. Pendant sa descente, elle s'accroche à un filet vertical, au point B. Ce point est situé à 64 m directement au-dessus d'un point C au sol. Bibi atteint une hauteur maximale de 100 m à un endroit directement au-dessus d'un point situé au sol à 30 m du canon. Déterminer la distance horizontale du canon jusqu'au filet.



8. a) Un cercle de centre sur l'axe des ordonnées coupe la représentation graphique de $y = |x|$ à l'origine O et à deux autres points distincts, A et B, comme dans le diagramme. Démontrer que le rapport de l'aire du triangle ABO à l'aire du cercle est toujours égal à $1 : \pi$.



b) Le triangle ABC est rectangle en B. M est le milieu du côté BC. On a tracé un cercle de diamètre BC. Soit P le point d'intersection du cercle et du côté AC. La tangente au cercle, au point P, coupe AB en Q. Démontrer que QM est parallèle à AC.



9. Soit un quadrilatère inscriptible $ABCD$, tel que $AB = AD = 1$, $CD = \cos \angle ABC$ et $\cos \angle BAD = -\frac{1}{3}$. Démontrer que BC est le diamètre du cercle circonscrit au quadrilatère.

10. On dit qu'un entier strictement positif n est « sauvage » si les entiers de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ peuvent être partagés en trois ensembles, A, B et C, de manière que :

i) la somme des éléments est la même pour A, B, et C;

ii) l'ensemble A ne contient que des nombres impairs;

iii) l'ensemble B ne contient que des nombres pairs;

iv) l'ensemble C contient tous les multiples de 3 (et possiblement d'autres nombres).

a) Démontrer que 8 est un entier sauvage.

b) Démontrer que si n est un entier sauvage, alors $\frac{n+4}{12}$ est un entier.

c) Déterminer tous les entiers sauvages pairs inférieurs à 100.

PUBLICATIONS

Les étudiants et les parents qui estiment que la résolution de problèmes constitue un divertissement et un loisir se réjouiront de pouvoir consulter les publications suivantes. Il s'agit d'excellentes ressources documentaires axées sur l'enrichissement, le développement des capacités à résoudre des problèmes et la préparation en vue des concours de mathématiques.

Exemplaires des Concours canadiens de mathématiques des années antérieures

Des exemplaires des concours antérieurs et des solutions, aussi bien en français qu'en anglais, sont disponibles gratuitement sur note site web http://www.cemc.uwaterloo.ca

Livres «Problems Problems Problems»

Chaque volume est une ensemble de problèmes à choix multiple ou à solution complète. Les problèmes sont regroupés selon les sujets, avec 9 sujets ou plus par volume. Les problèmes sont choisis à partir des concours des années précédentes offerts par le Concours canadien de mathématiques et des solutions complètes sont fournies pour chaque problème. Chaque volume coûte 15,00 $. **Le Volume 1 est disponible en français et en anglais. Les Volumes 2-8 sont disponibles en anglais seulement.**

Volume 1
- **(Disponible en français)**
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves de 9^e, 10^e et 11^e année (Sec. III, IV et V)

Volume 2
- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets (différents de ceux du volume 1)
- pour les élèves de 9^e, 10^e et 11^e année (Sec. III, IV et V)

Volume 3
- plus de 235 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 4
- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 7^e, 8^e et 9^e année (Sec. I, II et III)

Volume 5
- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 9 sujets (différents de ceux du volume 3)
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 6
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 11 sujets (différents de ceux du vol. 4)
- pour les élèves de 7^e, 8^e et 9^e année (Sec. I, II et III)

Volume 7
NOUVEAU
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 9^e et 10^e année (Sec. III et IV)

Volume 8
NOUVEAU
- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Les Problèmes et Leurs Solutions - Volume 1

Cette brochure fait suite à la collection de problèmes d'enrichissement offerte aux étudiants de 9^e, 10^e et 11^e années. Chacun des huit chapitres comprend un examen des solutions et des démarches suggérées. Ils comptent plus de 225 nouveaux problèmes, presque tous tirés des concours canadiens de mathématiques, accompagnés de solutions complètes. Le prix est de 20 $. **(Disponible en anglais seulement.)**

Faire passer les commandes au : Concours canadien de mathématiques
Faculté de mathématiques, pièce MC 5181
Université de Waterloo
Waterloo (Ontario) N2L 3G1

Veuillez inscrire votre nom, votre adresse (et votre code postal) ainsi que votre numéro de téléphone.

Établir les chèques ou les mandats à l'ordre du «Centre for Education in Mathematics and Computing». Pour les commandes effectuées au Canada, veuillez ajouter 3 $ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 1 $ pour chaque article additionnel. Aucune taxe de vente provinciale ne s'applique, mais il faut ajouter la TPS de 7 p. 100. Pour les commandes ***de l'extérieur du Canada SEULEMENT***, veuillez ajouter 10 $ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 2 $ pour chaque article additionnel. **Les prix de ces publications demeureront en vigueur jusqu'en 1 septembre 2003.**

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide (12e – Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Le mardi 16 avril 2002

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Sybase Inc. (Waterloo)

*i*Anywhere Solutions

Avec l'appui de :

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 à 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES :

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci: .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse**. Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT :

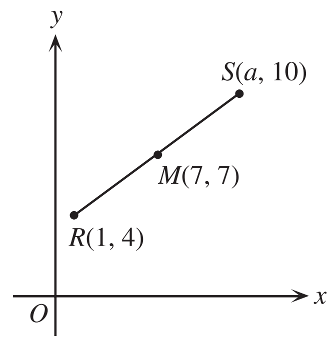
1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci: .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse**. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
3. Des points sont accordés pour de solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

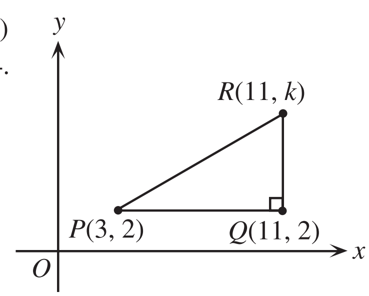
REMARQUES :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.

1. a) Si $M(7,7)$ est le milieu du segment de droite qui joint les points $R(1,4)$ et $S(a,10)$, quelle est la valeur de a?



b) Dans le diagramme, les points $P(3,2)$, $Q(11,2)$ et $R(11,k)$ ($k>0$) forment un triangle dont l'aire est égale à 24. Quelle est la valeur de k?



c) Des droites sont *concourantes* si elles se coupent toutes en un même point. Les droites définies par $y=2x+3$, $y=8x+15$ et $y=5x+b$ sont concourantes. Déterminer la valeur de b.

2. a) Une des racines de l'équation $x^2-3x+c=0$ est $x=4$. Quelle est la deuxième racine?

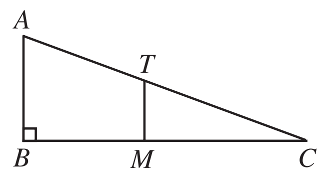
b) Il est possible d'écrire l'expression rationnelle $\dfrac{2x^2+1}{x^2-3}$ sous la forme $2+\dfrac{A}{x^2-3}$, A étant un entier. Quelle est la valeur de A?

c) On fait subir à la parabole d'équation $y=x^2-4x+3$ une translation de 5 unités vers la droite. L'équation de l'image est $y=x^2-14x+d$. Déterminer la valeur de d.

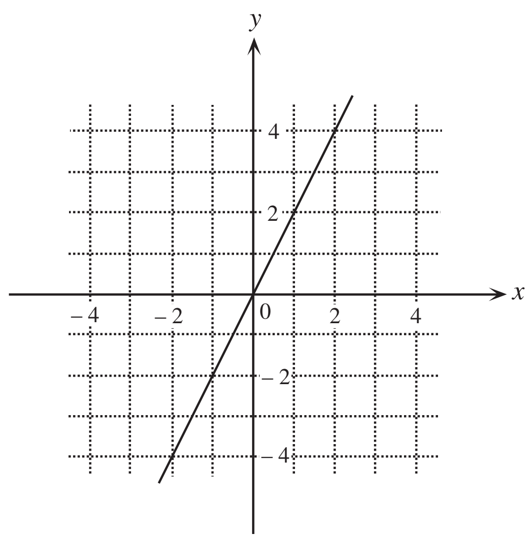
3. a) Trois boîtes, étiquetées A, B et C, contiennent chacune quatre boules numérotées 1, 2, 3 et 4. Dans chaque boîte, les boules sont mélangées. Un enfant choisit, au hasard, une boule de chaque boîte. Soit a, b et c les numéros des boules choisies dans les boîtes respectives A, B et C. L'enfant gagne un jouet si $a=b+c$. Il y a 64 façons de choisir les trois boules. Quelle est la probabilité pour que l'enfant gagne un jouet?

b) Trois entiers strictement positifs, a, ar et ar^2, forment une suite croissante. Si le produit des trois entiers de la suite est égal à 216, déterminer toutes les suites qui vérifient ces conditions.

4. a) Le triangle ABC est rectangle en B. MT est la médiatrice de BC, M étant sur BC et T sur AC. Si $AT = AB$, quelle est la mesure de l'angle ACB?



b) Le diagramme ci-dessous est la représentation graphique de $y = f(x)$, où $f(x) = 2x$.



i Dans le quadrillage du cahier-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction réciproque définie par $y = f^{-1}(x)$ et celle de la fonction inverse définie par $y = \dfrac{1}{f(x)}$. Étiqueter chaque graphique pour les distinguer.

ii Indiquer les coordonnées des points où $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

iii Déterminer la valeur numérique de $f^{-1}\left(\dfrac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$.

5. a) Résoudre l'équation :

$$\log_5(x+3) + \log_5(x-1) = 1$$

b) Un chef sur un bateau de croisière veut faire cuire une oie. Le temps t, en heures, qu'il faut pour faire cuire une oie à la température de 180 °C varie en fonction de la masse m, en kilogrammes, selon la formule

$$t = am^b,$$

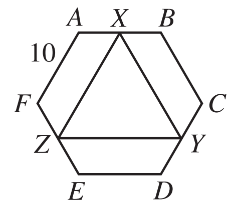
a et b étant des constantes. Le tableau ci-dessous indique les temps observés pour faire cuire des oies à la température de 180 °C.

Masse, m (kg)	Temps, t (h)
3,00	2,75
6,00	3,75

i Utiliser les données du tableau pour déterminer les valeurs de a et de b au centième près.

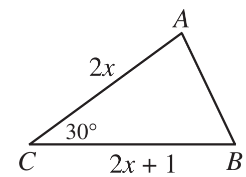
ii Le chef veut faire cuire une oie de 8,00 kg à 180 °C. Combien de temps va-t-il la faire cuire?

6. a) Le diagramme illustre un hexagone régulier $ABCDEF$ ayant des côtés de longueur 10. Soit X, Y et Z les milieux respectifs des côtés AB, CD et EF. Quelle est la longueur de XZ?

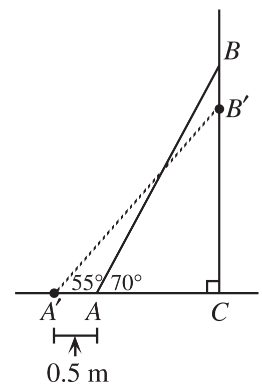


b) Un cercle passe par l'origine et par les points d'intersection des paraboles définies par $y = x^2 - 3$ et par $y = -x^2 - 2x + 9$. Déterminer les coordonnées du centre de ce cercle.

7. a) Dans le diagramme, on a $AC = 2x$, $BC = 2x + 1$ et $\angle ACB = 30°$. Si l'aire du triangle ABC est égale à 18, quelle est la valeur de x?



b) On a placé une échelle, AB, de manière que son pied repose sur terre et que l'autre extrémité soit appuyée contre un mur, comme dans le diagramme. Dans cette position initiale, l'échelle fait un angle de 70° avec l'horizontale. Ensuite, le pied de l'échelle est éloigné du mur sur une distance de 0,5 m, ce qui place l'échelle dans la position $A'B'$. Dans cette nouvelle position, l'échelle fait un angle de 55° avec l'horizontale. Calculer la distance parcourue par l'autre extrémité de l'échelle le long du mur, c'est-à-dire la distance BB'.

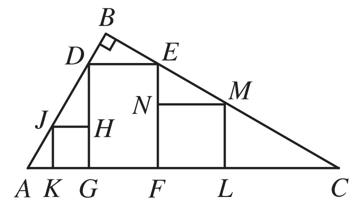


8. a) Dans une ligue de soccer composée de 5 équipes, chaque équipe joue 20 parties, soit 5 parties contre chacune des 4 autres équipes. À chaque partie, chaque équipe peut obtenir une victoire (V), une défaite (D) ou un match nul (N). Le tableau ci-dessous indique le nombre de victoires, de défaites et de matchs nuls pour chaque équipe à la fin de la saison. Déterminer les valeurs de x, de y et de z.

Équipe	V	D	N
A	2	15	3
B	7	9	4
C	6	12	2
D	10	8	2
E	x	y	z

b) Démontrer qu'il est impossible de créer une suite de 4 nombres, a, b, c et d, de manière que la somme de n'importe quels deux termes consécutifs est positive et la somme de n'importe quels trois termes consécutifs est négative.

9. a) Dans le triangle ABC, $\angle ABC = 90°$. Le rectangle $DEFG$ est inscrit dans le triangle ABC, comme l'illustre le diagramme. Les carrés $JKGH$ et $MLFN$ sont inscrits dans les triangles respectifs AGD et CFE. Soit v la longueur des côtés de $JHGK$ et w la longueur des côtés de $MLFN$. Si $DG = u$, démontrer que $u = v + w$.



b) Trois tiges de métal minces, de longueurs 9, 12 et 15, sont soudées pour former un triangle rectangle que l'on place en position horizontale. Une sphère de rayon 5 est placée de manière à reposer dans le triangle. Elle est alors tangente à chacun des côtés. Si on néglige l'épaisseur des tiges, quelle est la hauteur du haut de la sphère par rapport au plan du triangle?

10. Un triangle est appelé *triangle de Héron* si chacune des longueurs de ses côtés est un entier et si son aire est aussi un entier. Un triangle est appelé *triangle de Pythagore* s'il est rectangle et si chacune des longueurs de ses côtés est un entier.

a) Démontrer que chaque triangle de Pythagore est aussi un triangle de Héron.

b) Démontrer que chaque entier impair supérieur à 1 peut être la longueur d'un côté d'un triangle de Pythagore.

c) Trouver un triangle de Héron ayant des côtés de longueurs différentes de manière qu'aucune de ces longueurs ne soit divisible par 3, 5, 7 ou 11.

PUBLICATIONS

Les copies des concours précédents et leurs solutions sont disponibles dans une grande variété de trousses, définies ci-dessous. Veuillez donner votre commande en indiquant le numéro de trousse. Il est important de noter que ce numéro correspond au concours et au nombre de copies comprises.

COPIES DES CONCOURS PRÉCÉDENTS (AVEC SOLUTIONS COMPLÈTES)

Il est possible de se procurer des exemplaires des concours précédents et de leurs solutions aux conditions mentionnées plus bas. Chaque article contient deux numéros. Les numéros débutant par E désignent des documents en langue anglaise alors que ceux qui débutent par F désignent des documents en langue française. Chaque paquet est considéré comme un titre.

(Pour obtenir des copies des concours des éditions 1999 - 2001 (ainsi que des solutions aux problèmes),veuillez consulter notre site Internet à l'adresse suivante : http://www.cemc.uwaterloo.ca).

Un exemplaire de l'un des concours, accompagné des solutions, pour les concours des années 1998, 1999 et 2000. Recommandée pour la préparation à titre individuel.

E 213, F 213	Concours Gauss (7^e et 8^e années)	10,00 $
E 513, F 513	Concours Pascal-Cayley-Fermat (9^e, 10^e et 11^e années)	14,00 $
E 613, F 613	Concours Euclide (12^e année)	10,00 $
E 713, F 713	Concours Descartes (13^e-CPO)	10,00 $

LIVRES «PROBLEMS PROBLEMS PROBLEMS»

Chaque volume est une ensemble de problèmes à choix multiple ou à solution complète. Les problèmes sont regroupés selon les sujets, avec 9 sujets ou plus par volume. Les problèmes sont choisis à partir des concours des années précédentes offerts par le Concours canadien de mathématiques et des solutions complètes sont fournies pour chaque problème. Chaque volume coûte 15,00 $. **Le Volume 1 est disponible en français et en anglais. Les Volumes 2-6 sont disponibles en anglais seulement.**

Volume 1
- **(Disponible en français)**
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets
- pour les élèves de 9^e, 10^e et 11^e année (Sec. III, IV et V)

Volume 2
- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 10 sujets (différents de ceux du volume 1)
- pour les élèves de 9^e, 10^e et 11^e année (Sec. III, IV et V)

Volume 3
- plus de 235 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 4
- plus de 325 problèmes avec solutions complètes
- 12 sujets
- pour les élèves de 7^e, 8^e et 9^e année (Sec. I, II et III)

Volume 5
- plus de 200 problèmes avec solutions complètes
- 9 sujets (différents de ceux du volume 3)
- pour les élèves du cycle supérieur (Sec. V et Cégep I)

Volume 6
- plus de 300 problèmes avec solutions complètes
- 11 sujets (différents de ceux du vol. 4)
- pour les élèves de 7^e, 8^e et 9^e année (Sec. I, II et III)

LES PROBLÈMES ET LEURS SOLUTIONS - VOLUME 2

Ce nouveau livre fait suite à la collection de problèmes offerte aux étudiants de niveau avancé. Chacun des neuf chapitres comprend un examen des solutions et des démarches suggérées. Il compte plus de 160 nouveaux problèmes, presque tous étant tirés de concours canadiens de mathématiques, accompagnés de solutions complètes. Le prix est de 20 $.

Faire passer les commandes au : Concours canadien de mathématiques
Faculté de mathématiques, pièce MC 5181
Université de Waterloo
Waterloo (Ontario) N2L 3G1

Veuillez inscrire votre nom, votre adresse (et votre code postal) ainsi que votre numéro de téléphone. Nous n'acceptons pas les commandes dont le montant est inférieur à 10 $.
Établir les chèques ou les mandats à l'ordre du «Centre for Education in Mathematics and Computing». Pour les commandes effectuées au Canada, veuillez ajouter 3 $ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 1 $ pour chaque article additionnel. Aucune taxe de vente provinciale ne s'applique, mais il faut ajouter la TPS de 7 p. 100. Pour les commandes ***de l'extérieur du Canada SEULEMENT***, veuillez ajouter 10 $ pour le premier article afin d'acquitter les frais de port et de manutention et 2 $ pour chaque article additionnel. **Les prix de ces publications demeureront en vigueur jusqu'en 1 septembre 2002.**

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide (12^e – Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Le jeudi 19 avril 2001

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche

Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 à 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES :

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci: .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse**. Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT :

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci: .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse**. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
3. Des points sont accordés pour de solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

REMARQUES :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, on s'attend à ce que les calculs et les réponses soient exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.

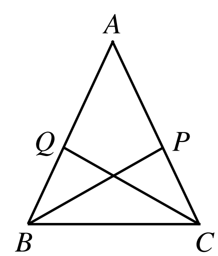
1\. a) Quelles sont les valeurs de x telles que $(2x-3)^2 = 9$?

b) Soit $f(x) = x^2 - 3x - 5$. Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles $f(k) = k$?

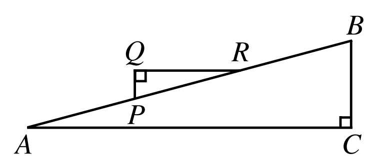
c) Déterminer tous les couples (x, y) tels que $x^2 + y^2 = 25$ et $x - y = 1$.

2\. a) Le sommet de la parabole définie par $y = (x-b)^2 + b + h$ a pour coordonnées $(2, 5)$. Quelle est la valeur de h?

b) On considère un triangle isocèle ABC dans lequel $AB = AC$ et $\angle BAC = 40°$. Le point P, sur le côté AC, est tel que BP est la bissectrice de l'angle ABC. De même, le point Q, sur le côté AB, est tel que CQ est la bissectrice de l'angle ACB. Quelle est la mesure de l'angle APB, en degrés?



c) Dans le diagramme, on a $AB = 300$, $PQ = 20$ et $QR = 100$. De plus, QR est parallèle à AC. Déterminer la longueur BC, à l'unité près.

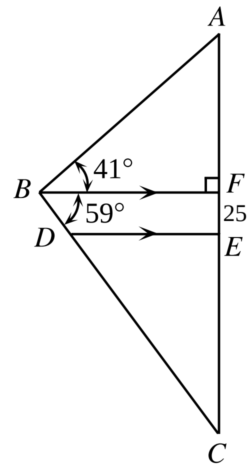


3\. a) On considère une suite croissante de nombres ayant un nombre impair de termes. La différence entre n'importe quels deux termes consécutifs est une constante, d, et le terme du milieu est 302. Lorsqu'on enlève les 4 derniers termes de la suite, le terme du milieu de la nouvelle suite est 296. Quelle est la valeur de d?

b) Il existe deux suites croissantes de cinq entiers consécutifs, dont la somme des carrés des trois premiers termes est égale à la somme des carrés des deux derniers. Déterminer ces deux suites.

4. a) Soit $f(t)=\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$. Quelle est la plus petite valeur strictement positive de t pour laquelle $f(t)$ admet sa valeur minimale?

b) Dans le diagramme, $\angle ABF=41°$, $\angle CBF=59°$, DE est parallèle à BF et $EF=25$. Déterminer la longueur AE, sachant que $AE=EC$. Exprimer la réponse au centième près.



5. a) Déterminer toutes les valeurs entières de x pour lesquelles $(x^2-3)(x^2+5)<0$.

b) Aujourd'hui, la somme de l'âge d'un homme et d'une femme, P, est égale à six fois la somme de l'âge de leurs enfants, C. Il y a deux ans, la somme de l'âge de l'homme et de la femme était égal à dix fois la somme de l'âge des mêmes enfants. Dans six ans, elle sera trois fois la somme de l'âge des mêmes enfants. Déterminer le nombre d'enfants.

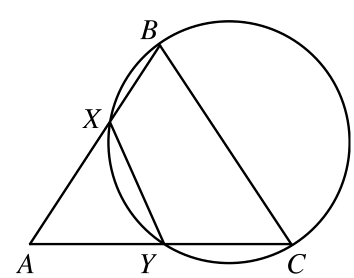
6. a) Quatre équipes, A, B, C et D, participaient à un tournoi de hockey sur gazon. Trois entraîneurs ont tenté de prédire les équipes qui remporteraient les médailles d'or, d'argent et de bronze. Voici leurs prédictions :

Médaille	Or	Argent	Bronze
Équipe			

- L'entraîneur 1 : Or, A; Argent, B; Bronze, C.
- L'entraîneur 2 : Or, B; Argent, C; Bronze, D.
- L'entraîneur 3 : Or, C; Argent, A; Bronze, D.

Chaque entraîneur a prédit correctement l'équipe gagnante d'une seule médaille. Compléter le tableau **dans le cahier-réponse** pour indiquer l'équipe qui a remporté chaque médaille.

b) Dans le triangle ABC, $AB=BC=25$ et $AC=30$. Le cercle de diamètre BC coupe AB en X et AC en Y. Déterminer la longueur XY.



7. a) Quelle est la valeur de x pour laquelle $\log_2(\log_2(2x-2)) = 2$?

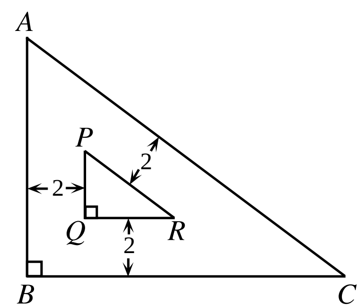
b) Soit $f(x) = 2^{kx} + 9$, k étant un nombre réel. Déterminer la valeur de $f(9) - f(3)$, sachant que $f(3) : f(6) = 1 : 3$.

8. a) Dans le plan cartésien du cahier-réponse, tracer la représentation graphique de $y = x^2 - 4$ et de $y = 2|x|$.

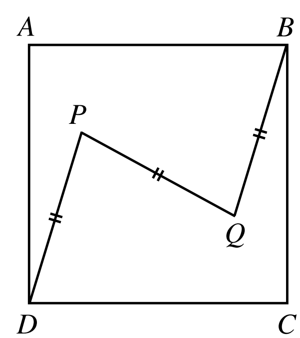
b) Déterminer toutes les valeurs de k pour lesquelles la courbe représentative de $y = x^2 - 4$ et celle de $y = 2|x| + k$ **ne** se coupent **pas**. Justifier ses conclusions.

c) Indiquer les valeurs de k pour lesquelles la courbe représentative de $y = x^2 - 4$ et celle de $y = 2|x| + k$ se coupent en exactement deux points.
(Il n'est pas nécessaire de justifier sa réponse.)

9. Le triangle ABC est rectangle en B et les longueurs de ses côtés sont des entiers. Un deuxième triangle, PQR, est situé à l'intérieur du triangle ABC, comme dans le diagramme, de manière que ses côtés soient parallèles à ceux du triangle ABC et que la distance entre les côtés parallèles soit égale à 2. Déterminer les longueurs des côtés de tous les triangles possibles ABC, de manière que l'aire du triangle ABC soit 9 fois celle du triangle PQR.



10. Les points P et Q sont situés à l'intérieur du carré $ABCD$ de manière que DP soit parallèle à QB et que $DP = QB = PQ$. Déterminer la plus petite valeur possible de la mesure de l'angle ADP.



Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide (12^{e} – Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Le mardi 18 avril 2000

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la participation de :

IBM Canada Ltd.

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 à 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES :

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci: .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse**. Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT :

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci: .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse**. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
3. Des points sont accordés pour de solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

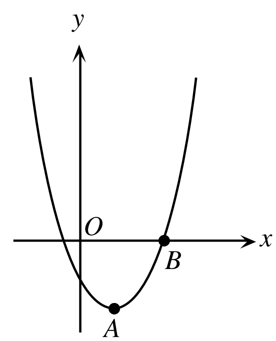
Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

REMARQUES :
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « 💡 », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Une partie des points sera accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. À moins d'avis contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de nombres exacts tels que 4π et $2+\sqrt{7}$.

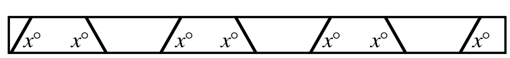
1\. a) Si $x + 27^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}}$, quelle est la valeur de x?

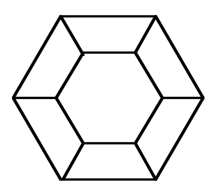
b) La droite d'équation $y = ax + c$ passe par le point $(1, 5)$ et elle est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$. Quelle est la valeur de c?

c) La parabole d'équation $y = (x-2)^2 - 16$ a pour sommet A et elle croise l'axe des x au point B, comme l'indique le diagramme. Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points A et B.



2\. a) On a découpé six morceaux identiques d'une planche de bois, comme l'indique le premier diagramme. Chaque trait de scie a été fait à un angle de $x°$. Les morceaux sont ensuite rassemblés pour former un cadre hexagonal illustré dans le deuxième diagramme. Quelle est la valeur de x?

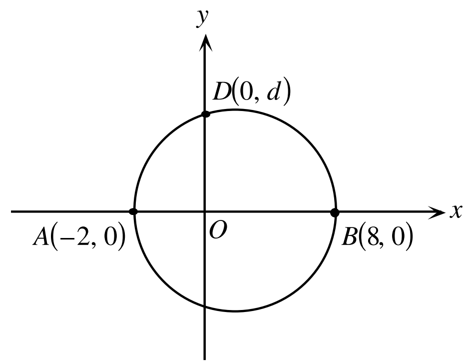




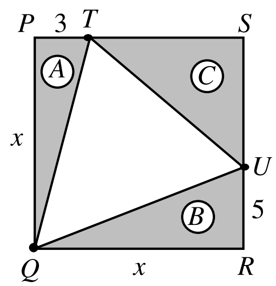
b) Si $\log_{10} x = 3 + \log_{10} y$, quelle est la valeur de $\frac{x}{y}$?

c) Si $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$, déterminer toutes les valeurs de l'expression $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

3. a) Le diagramme illustre un cercle de diamètre AB . Le cercle croise la partie positive de l'axe des y au point $D(0, d)$. Quelle est la valeur de d?



b) Le diagramme illustre un carré $PQRS$, ayant des côtés de longueur x. Le carré est subdivisé en quatre régions triangulaires de manière que l'aire de (A) + l'aire de (B) = l'aire de (C). Si $PT = 3$ et $RU = 5$, déterminer la valeur de x.



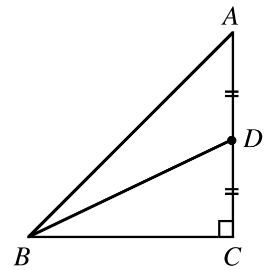
4. a) On jette un dé juste, dont les numéros 1, 2, 3, 4, 6 et 8 sont inscrits sur ses six faces. Après ce jet, si un numéro impair paraît sur la face supérieure, tous les numéros impairs sur le dé sont doublés; si un numéro pair paraît sur la face supérieure, tous les numéros pairs sont divisés par 2. Si on jette un tel dé deux fois de suite, quelle est la probabilité d'obtenir un 2 sur le deuxième jet?

b) Le tableau ci-dessous donne les résultats de fin de saison 1998 de sept équipes de la ligue de cricket d'Angleterre. À la fin de la saison, chaque équipe avait joué 17 matchs. Le nombre total de points remportés par chaque équipe est indiqué dans la dernière colonne. Chacune des V victoires rapporte v points, chacun des N matchs nuls rapporte n points, chacun des A lancers bonis rapporte a points et chacun des B bonis de batte rapporte b points, v, n, a et b étant des entiers strictement positifs. *Aucun point* n'est accordé pour une défaite. Déterminer les valeurs de v, n, a et b si le total des points est accordé selon la formule : Points $= v \times V + n \times N + a \times A + b \times B$.

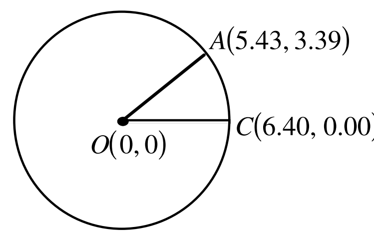
Résultats de fin de saison

	V	*Défaites*	*N*	*A*	*B*	*Points*
Sussex	6	7	4	30	63	201
Warks	6	8	3	35	60	200
Som	6	7	4	30	54	192
Derbys	6	7	4	28	55	191
Kent	5	5	7	18	59	178
Worcs	4	6	7	32	59	176
Glam	4	6	7	36	55	176

5. a) Dans le diagramme, on a $AD = DC$, $\sin \angle DBC = 0{,}6$ et $\angle ACB = 90°$. Quelle est la valeur de $\tan \angle ABC$?

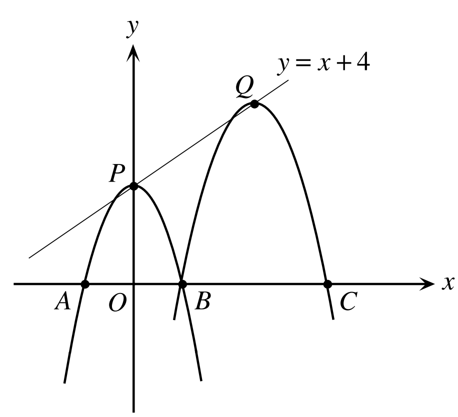


b) Le diagramme représente une coupe transversale de la Terre. Les axes de coordonnées sont placés pour que le centre de la Terre soit situé au point $O(0, 0)$. Le Cap Canaveral est situé au point $C(6{,}40; 0{,}00)$. Une navette spaciale est forcée d'atterrir sur une île au point $A(5{,}43; 3{,}39)$. Chaque unité représente 1000 km. Déterminer la distance entre l'île et le Cap Canaveral, telle que mesurée sur la surface courbe de la Terre. Exprimer la réponse aux 10 km près.



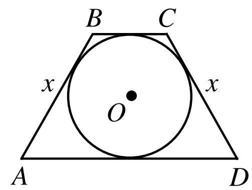
6. a) L'expression $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x. Par exemple, $\lfloor 3 \rfloor = 3$ et $\lfloor 2.6 \rfloor = 2$. Si x est un nombre positif tel que $x\lfloor x \rfloor = 17$, quelle est la valeur de x?

b) La parabole d'équation $y = -x^2 + 4$ a pour sommet P et elle croise l'axe des x aux points A et B. La parabole subit une translation de manière que son sommet se promène le long de la droite d'équation $y = x + 4$ jusqu'au point Q. Dans cette position, la parabole croise l'axe des x aux points B et C. Déterminer les coordonnées du point C.



7. a) Un cube a des arêtes de longueur n, n étant un entier. Trois faces qui se rencontrent au même sommet sont peintes en rouge. On coupe ensuite le cube en n^3 petits cubes ayant des arêtes de longueur 1. Déterminer la valeur de n, sachant qu'exactement 125 de ces petits cubes n'ont aucune face rouge.

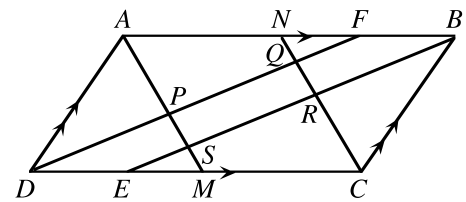
b) On considère un trapèze isocèle $ABCD$ ayant une aire de 80 unités carrées et tel que $AB = CD = x$. Un cercle de centre O et de rayon 4 est tangent aux quatre côtés du trapèze. Déterminer la valeur de x.



8. On considère un parallélogramme $ABCD$, où $AB = a$ et $BC = b$, $a > b$. Les points d'intersection des bissectrices des angles du parallélogramme forment un quadrilatère $PQRS$.

a) Démontrer que $PQRS$ est un rectangle.

b) Démontrer que $PR = a - b$.

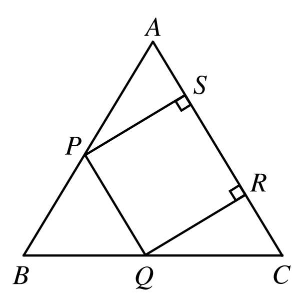


9. Une permutation des entiers 1, 2, ..., n est un classement de ces entiers dans un certain ordre. Par exemple, $(3, 1, 2)$ et $(2, 1, 3)$ sont deux permutations des entiers 1, 2, 3. On dit qu'une permutation $(a_1, a_2, ..., a_n)$ des entiers 1, 2, ..., n est *fantastique* si $a_1 + a_2 + ... + a_k$ est divisible par k, pour ***chaque*** valeur de k de 1 à n. Par exemple, $(3, 1, 2)$ est une permutation fantastique de 1, 2, 3 car 3 est divisible par 1, $3+1$ est divisible par 2 et $3+1+2$ est divisible par 3. Par contre, la permutation $(2, 1, 3)$ n'est pas fantastique car $2+1$ n'est pas divisible par 2.

a) Démontrer qu'il n'existe aucune permutation fantastique si $n = 2000$.

b) Existe-t-il une permutation fantastique si $n = 2001$? Expliquer sa réponse.

10. Un triangle équilatéral ABC a des côtés de longueur 2. Un carré $PQRS$ est tel que le P est situé sur le côté AB, Q est situé sur le côté BC et les sommets R et S sont situés sur le côté AC. On fait bouger les points P, Q, R et S de manière que P, Q et R demeurent sur les côtés du triangle, tandis que le point S se déplace du côté AC au côté AB en passant par l'intérieur du triangle. Si les points P, Q, R et S forment continuellement les sommets d'un carré, démontrer que le chemin tracé par le point S est un segment de droite parallèle au côté BC.



Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide (12^e – Sec. V)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

Le mardi 20 avril 1999

Avec la contribution de :

University of Waterloo

BANQUE NATIONALE DU CANADA

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Avec la participation de :

IBM Canada Ltée

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

La Great-West Compagnie d'Assurance-Vie

Northern Telecom (Nortel)

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 à 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci:
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse**. Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci:
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse**. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
3. Des points sont accordés pour de solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

REMARQUES :
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Une partie des points sera accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. À moins d'avis contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de nombres exacts tels que 4π et $2+\sqrt{7}$.

1. a) Si $x^{-1} = 3^{-1} + 4^{-1}$, quelle est la valeur de x?

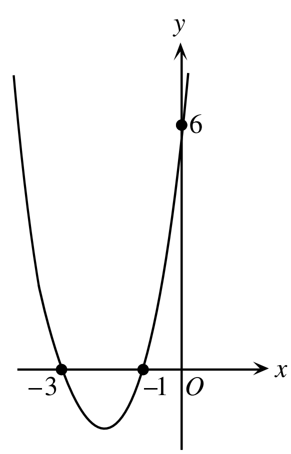
b) Si le point $P(-3, 2)$ est situé sur la droite d'équation $3x + 7ky = 5$, quelle est la valeur de k?

c) Déterminer toutes les valeurs possibles de $1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}$, sachant que $x^2 - x - 2 = 0$.

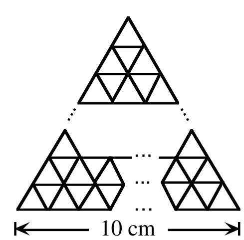
2. a) On fait bouger le cercle d'équation $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 9$ horizontalement jusqu'à ce que son centre soit situé sur la droite d'équation $x = 6$. Sur quelle distance le centre du cercle bouge-t-il?

b) La parabole d'équation $y = (x-1)^2 - 4$ croise l'axe des x aux points P et Q. Soit (a, b) le milieu du segment PQ. Quelle est la valeur de a?

c) La courbe représente une fonction polynôme du second degré. Déterminer une équation qui représente cette fonction.

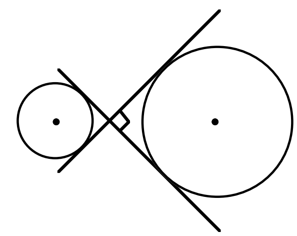


3. a) On place des triangles équilatéraux ayant des côtés de 1 cm comme dans le diagramme. Combien faut-il de ces triangles pour recouvrir l'intérieur d'un triangle équilatéral ayant des côtés de 10 cm?



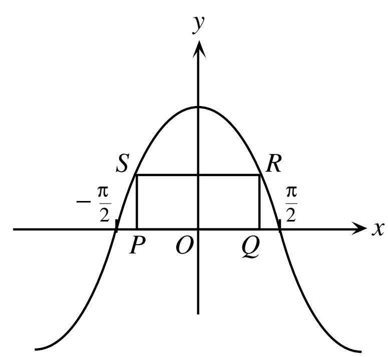
b) Alphaville et Betaville avaient la même population à la fin de 1995. La population d'Alphaville a diminué de 2,9 % en 1996. Elle a augmenté de 8,9 % en 1997, puis elle a augmenté de 6,9 % en 1998. La population de Betaville a augmenté de r% à chacune de ces trois années. Si les deux villes ont encore des populations égales à la fin de 1998, déterminer la valeur de r au dixième près.

4. a) Comme l'indique le diagramme, les tangentes aux cercles se croisent à un angle de $90°$. Si le petit cercle a un rayon de 2 et le grand cercle a un rayon de 5, quelle est la distance entre les centres des cercles?

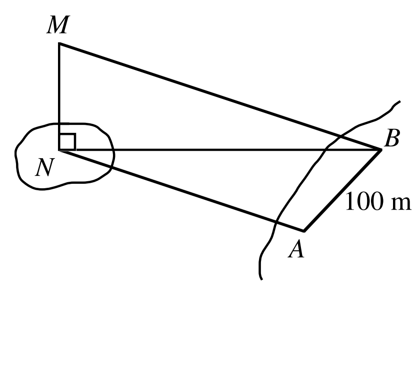


b) Une grande roue, dans une foire, a un rayon de 8 m et elle tourne à une vitesse de 12° par seconde. Au temps $t = 0$, un siège est situé au point le plus bas, à 2 m au-dessus du niveau du sol. Déterminer la hauteur du siège, par rapport au sol, au temps $t = 40$ secondes.

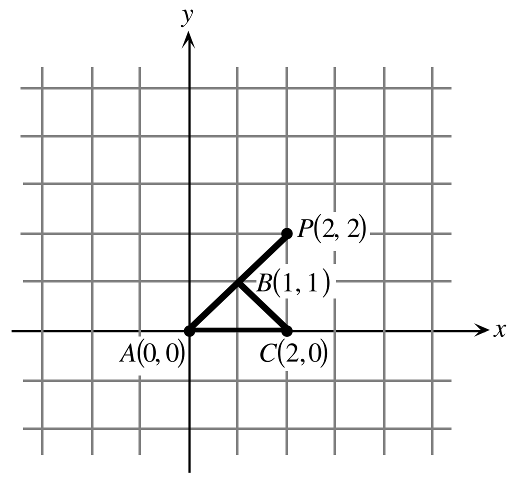
5. a) Le côté PQ du rectangle $PQRS$ est situé sur l'axe des x. Le rectangle touche la courbe définie par $y = k\cos x$ aux points S et R. Si le côté PQ a une longueur de $\frac{\pi}{3}$ et si le rectangle a une aire de $\frac{5\pi}{3}$, quelle est la valeur de k?



b) Afin de déterminer la hauteur MN d'une tour sur une île, on a choisi les points A et B dans le même plan horizontal que le point N, de manière qu'il y ait une distance de 100 m entre A et B. On a ensuite obtenu les mesures suivantes : $\angle NAB = 108°$, $\angle ABN = 47°$ et $\angle MBN = 32°$. Déterminer la hauteur de la tour au mètre près.



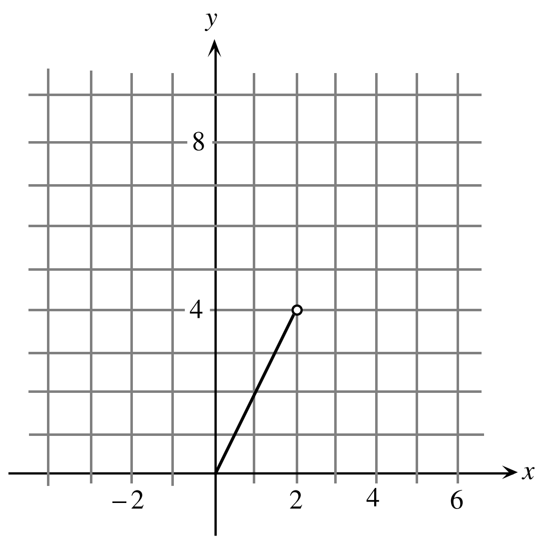
6. a) On veut choisir un point Q, dans le plan, de manière que les points A, P et Q forment un triangle semblable au triangle ABC. Quelles sont les coordonnées de toutes les positions possibles du point Q?



b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes définies par $y = \log_{10}(x-2)$ et $y = 1 - \log_{10}(x+1)$.

7. a) Dans le plan fourni à cet effet dans le cahier-réponse, tracer les courbes définies par $y = -2\sqrt{x+1}$ et $y = \sqrt{x-2}$. Pour quelle(s) valeur(s) de k les courbes définies par $y = -2\sqrt{x+1}$ et $y = \sqrt{x-2} + k$ se croiseront-elles? (On suppose que x et k sont des nombres réels.)

b) Une partie de la représentation graphique de $y = f(x)$ est indiquée, pour $0 \le x < 2$. Sachant que $f(x+2) = \frac{1}{2} f(x)$ pour toute valeur réelle de x, tracer la représentation graphique de $y = f(x)$ dans les intervalles $-2 \le x < 0$ et $2 \le x < 6$.



8. a) Pour toute valeur réelle de a, l'équation $y = x^2 + 2ax + a$ représente une parabole. Démontrer que toutes ces paraboles ont un point commun et déterminer les coordonnées de ce point.

b) Les sommets des paraboles de la partie a) sont situés sur une courbe. Démontrer que cette courbe est une parabole dont le sommet est le point commun de la partie a).

à suivre ...

9. Une « série du millénaire » est une série d'entiers consécutifs ayant une somme de 2000. Soit m le premier terme d'une série du millénaire.

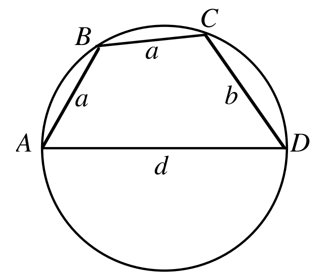
a) Déterminer la valeur minimale de m.

b) Déterminer la plus petite valeur strictement positive de m.

10. Le diagramme illustre un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle, de manière que son côté AD soit un diamètre du cercle. Soit $AB = a$, $BC = a$, $CD = b$ et $AD = d$. Si a, b et d sont des entiers et si $a \neq b$:

a) démontrer que d ne peut être un nombre premier;

b) déterminer la valeur *minimale* de d.



Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide (12e – Sec. V)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

Le mardi 21 avril 1998

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Banque Nationale du Canada

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Avec la participation de :

IBM Canada Ltée

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

La Great-West Compagnie d'Assurance-Vie

Northern Telecom (Nortel)

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 à 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci:
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse**. Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci:
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse**. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
3. Des points sont accordés pour de solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

REMARQUES : 1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.
4. À moins d'avis contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de nombres exacts tels que 4π et $2+\sqrt{7}$.

1. a) Si $x=1$ est une racine de l'équation $x^2+2x-c=0$, quelle est la valeur de c?

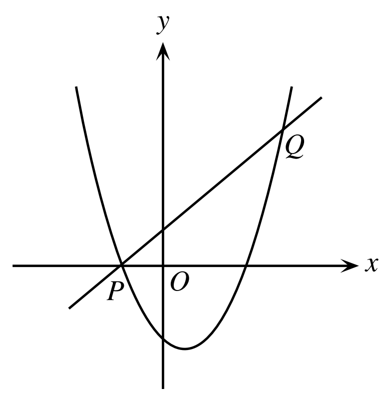
b) Si $2^{2x-4}=8$, quelle est la valeur de x?

c) Deux droites perpendiculaires, ayant pour abscisses à l'origine respectives -2 et 8, se croisent au point $(0, b)$. Déterminer toutes les valeurs possibles de b.

2. a) On considère la parabole définie par $y=(x-1)^2+b$. Son sommet a pour coordonnées $(1, 3)$. Quelle est l'ordonnée à l'origine de la parabole?

b) Quelle est l'aire du triangle ABC dont les sommets sont situés en $A(-3, 1)$, $B(5, 1)$ et $C(8, 7)$?

c) Le diagramme illustre la droite d'équation $y=x+1$ qui croise la parabole d'équation $y=x^2-3x-4$ aux points P et Q. Déterminer les coordonnées de P et de Q.



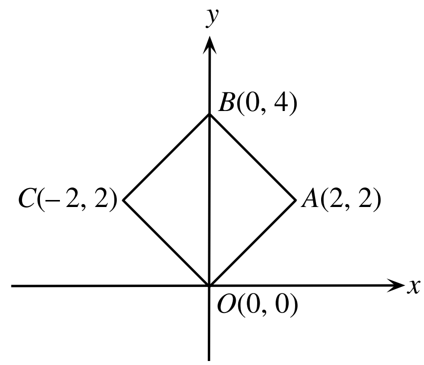
3. a) La représentation graphique de $y=m^x$ passe par les points $(2, 5)$ et $(5, n)$. Quelle est la valeur de mn?

b) Jeanne a acheté 100 actions à la bourse, au prix de 10,00 \$ l'action. Lorsque le prix des actions a augmenté pour atteindre N \$ chacune, elle a donné toutes ses actions à la Fondation Euclide. Elle a reçu une remise d'impôt de 60 % de la valeur totale de son don. Cependant elle a dû payer un impôt de 20 % de l'augmentation de la valeur des actions. Déterminer la valeur de N si la différence entre sa remise d'impôt et l'impôt payé est de 1000 \$.

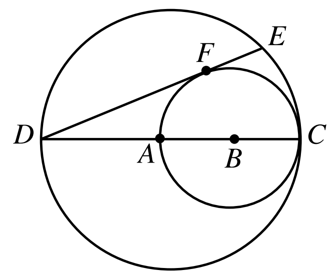
4. a) On considère la suite définie par $t_1=1$, $t_2=-1$ et $t_n=\left(\frac{n-3}{n-1}\right)t_{n-2}$, où $n\geq 3$. Quelle est la valeur de t_{1998}?

b) Le n^e terme d'une suite arithmétique est défini par $t_n=555-7n$.
Si $S_n=t_1+t_2+...+t_n$, déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $S_n<0$.

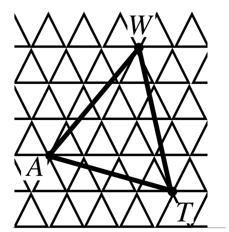
5. a) Le diagramme illustre un carré $OABC$ dont les coordonnées des sommets sont données. On considère le cercle dont l'aire est maximale, tout en étant situé à l'intérieur du carré. Quelle est l'équation du cercle?



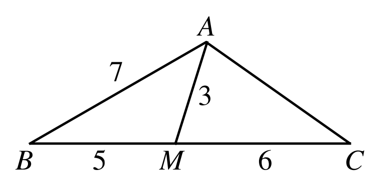
b) Le diagramme illustre un grand cercle de centre A et de diamètre DC. Le petit cercle a pour centre B et pour diamètre AC. Si DE est tangent au petit cercle en F et si $DC = 12$, déterminer la longueur de DE.



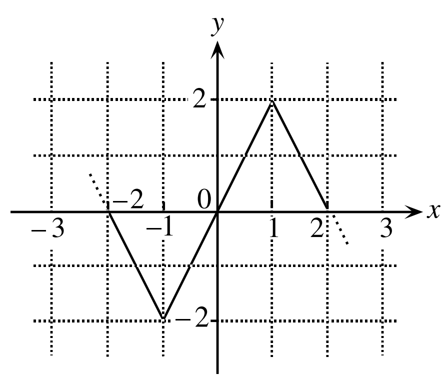
6. a) Le quadrillage est formé de petits triangles équilatéraux ayant des côtés de longueur 1. Les sommets du triangle WAT sont aussi des sommets des petits triangles équilatéraux. Quelle est l'aire du triangle WAT ?



b) Le diagramme illustre un triangle ABC. M est un point sur BC de manière que $BM = 5$ et $MC = 6$. Si $AM = 3$ et $AB = 7$, déterminer la valeur exacte de AC.



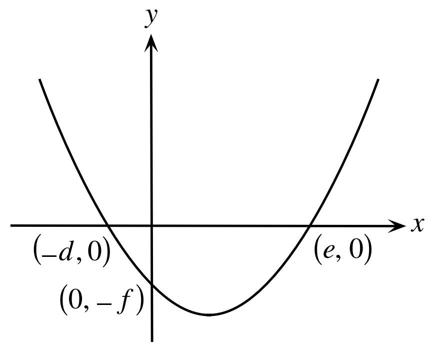
7. a) La fonction f a une période de longueur 4. Le diagramme illustre une période de $y = f(x)$. Tracer la représentation graphique de $y = \frac{1}{2}[f(x-1) + f(x+3)]$ dans l'intervalle $-2 \le x \le 2$.



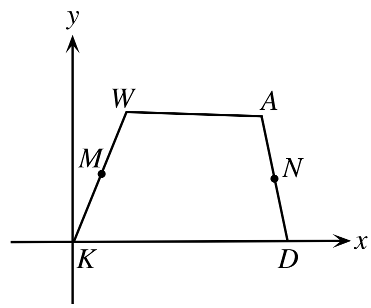
b) Déterminer toutes les solutions (x, y) du système d'équations suivant, x et y étant des nombres réels :

$$x^2 - xy + 8 = 0$$
$$x^2 - 8x + y = 0$$

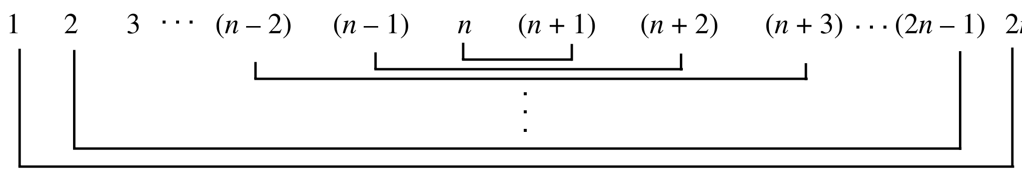
8. a) Le diagramme illustre l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par une translation. Démontrer que $de = f$.



b) M et N sont les milieux respectifs des côtés KW et AD du quadrilatère $KWAD$. Si $MN = \frac{1}{2}(AW + DK)$, démontrer que WA est parallèle à KD.



9. On considère les $2n$ premiers entiers positifs. On apparie les nombres, comme dans le diagramme, et on multiplie les deux nombres de chaque paire. Démontrer qu'il n'existe aucune valeur de n pour laquelle deux des n produits sont égaux.



10. Les équations $x^2 + 5x + 6 = 0$ et $x^2 + 5x - 6 = 0$ ont ***chacune*** des solutions entières, tandis qu'une seule des équations $x^2 + 4x + 5 = 0$ et $x^2 + 4x - 5 = 0$ admet des solutions entières.

a) Démontrer que si les équations $x^2 + px + q = 0$ et $x^2 + px - q = 0$ ont ***chacune*** des solutions entières, alors il existe des entiers a et b pour lesquels $p^2 = a^2 + b^2$. (C.-à-d. que (a, b, p) est un triplet pythagoricien.)

b) Déterminer q en fonction de a et de b.