Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2024

(10^{e} année – Secondaire IV)

le mercredi 28 février 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 29 février 2024
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a $2 \times 0 + 2 \times 4 = 0 + 8 = 8$.

RÉPONSE : (E)

2. Lorsque $x = 3$, on a $-(5x - 6x) = -(-x) = x = 3$.
Par ailleurs, lorsque $x = 3$, on a $-(5x - 6x) = -(15 - 18) = -(-3) = 3$.

RÉPONSE : (B)

3. Puisque $AE = BF$ et $BE = CF$, alors $AB = AE + BE = BF + CF = BC$.
Donc, le triangle ABC est isocèle avec $\angle BAC = \angle BCA = 70°$.
Puisque les angles du triangle ABC ont une somme de $180°$, alors

$$\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle BCA = 180° - 70° - 70° = 40°$$

RÉPONSE : (A)

4. Vendredi, les Comètes de Cayley ont marqué 80 % de 90 points.
Cela équivaut à $\frac{80}{100} \times 90 = \frac{8}{10} \times 90 = 8 \times 9 = 72$ points.
Par ailleurs, puisque 80 % équivaut à 0,8, alors 80 % de 90 est égal à $0{,}8 \times 90 = 72$.

RÉPONSE : (B)

5. Le volume d'un prisme est égal à l'aire de sa base multipliée par sa profondeur.
Le prisme a deux bases identiques d'une aire de 400 cm^2 et une profondeur de 8 cm. Le prisme a donc un volume de 400 cm^2 × 8 cm = 3200 cm^3.

RÉPONSE : (C)

6. Les biscuits aux pépites de chocolat ou aux flocons d'avoines représentent 33 % + 22 %, soit 55 %, du nombre total de biscuits que Louis a mangés.
Cela signifie que les biscuits au pain d'épice ou au sucre représentent 100 % − 55 % = 45 % du nombre total de biscuits qu'il a mangés.
Puisque Louis a mangé deux fois plus de biscuits au pain d'épices que de biscuits au sucre, alors $\frac{2}{3}$ de 45 %, soit 30 %, étaient des biscuits au pain d'épices.

RÉPONSE : (C)

7. On simplifie pour obtenir $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. Donc, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$ et donc $x = 2$.

RÉPONSE : (D)

8. Puisque $4 = 2^2$, alors $4^7 = (2^2)^7 = 2^{14} = (2^7)^2$, ce qui signifie que 4^7 est un carré parfait.
On peut vérifier, à l'aide d'une calculatrice si nécessaire, que les racines carrées des autres choix de réponse ne sont pas des entiers. Donc, aucun de ces choix ne peut être exprimé comme le carré d'un entier.

RÉPONSE : (C)

9. Soit x le plus petit des cinq entiers impairs.
Puisqu'il y a une différence de 2 entre toute paire d'entiers impairs consécutifs, les quatre autres entiers impairs sont $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$ et $x + 8$.
Donc, $x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) + (x + 8) = 125$.
On a donc $5x + 20 = 125$ ou $5x = 105$, d'où $x = 21$.
Donc, le plus petit des cinq entiers est 21. (Cela signifie que les cinq entiers impairs sont 21, 23, 25, 27, 29.)

RÉPONSE : (C)

10. Lorsqu'on jette deux dés réguliers, on peut obtenir $6 \times 6 = 36$ paires de nombres.
Parmi celles-ci, les paires 2×6, 3×4, 4×3 et 6×2 ont chacune un produit de 12. (Si l'un des nombres obtenus est 1 ou 5, le produit ne peut pas être 12.)
Puisqu'il y a 4 paires de nombres dont le produit est 12, la probabilité pour que le produit soit 12 est égale à $\frac{4}{36}$.

Réponse : (B)

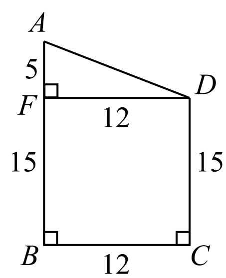
11. Puisque Arturo a un nombre égal de billets de 5 \$, de 10 \$ et de 20 \$, alors on peut séparer ses billets en groupes de manière que chaque groupe contienne un billet de 5 \$, un billet de 10 \$ et un billet de 20 \$.
Les billets de chaque groupe ont une valeur de 5 \$ + 10 \$ + 20 \$ = 35 \$.
Puisque la valeur totale des billets d'Arturo est de 700 \$, il y a donc $\dfrac{\$700}{\$35} = 20$ groupes.
Donc, Arturo a 20 billets de 5 \$.

Réponse : (D)

12. Puisque la masse de 2 Ixes est égale à la masse de 29 Ygrecs, alors la masse de 8×2 Ixes est égale à la masse de 8×29 Ygrecs.
Autrement dit, la masse de 16 Ixes est égale à la masse de 232 Ygrecs.
Puisque la masse de 1 Zed est égale à la masse de 16 Ixes, alors la masse de 1 Zed est égale à la masse de 232 Ygrecs.

Réponse : (C)

13. Au point D, on abaisse une perpendiculaire DF à AB.
Puisque le quadrilatère $FDCB$ est rectangle en F, en C et en B, alors le quadrilatère $FDCB$ est un rectangle.
Cela signifie que $FB = DC = 15$ et que $FD = BC = 12$.
De plus, $AF = AB - FB = 20 - 15 = 5$.



Le triangle AFD est rectangle en F.
D'après le théorème de Pythagore, $AD^2 = AF^2 + FD^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.
Puisque $AD > 0$, alors $AD = 13$. (Certains reconnaîtront directement le triplet pythagoricien 5-12-13.)
Donc, le périmètre de $ABCD$ est égal à $20 + 12 + 15 + 13 = 60$.

Réponse : (E)

14. Puisque les 10 nombres ont une moyenne de 87, alors leur somme est égale à $10 \times 87 = 870$.
Si l'on soustrait les nombres 51 et 99 de cette somme, on obtient la somme des 8 nombres restants, soit $870 - 51 - 99$ or 720.
Ces huit nombres ont une moyenne de $\dfrac{720}{8} = 90$.

Réponse : (A)

15. La somme des longueurs des segments de droites horizontaux de la Figure 2 est égale à $4x$. Cela s'explique par le fait que les côtés supérieurs des quatre petits rectangles contribuent ensemble $2x$ à la somme de leurs périmètres et que les côtés inférieurs contribuent également $2x$ à la somme de leurs périmètres.
De même, la somme des longueurs des segments de droites verticaux de la Figure 2 est égale à $4y$.
Autrement dit, les périmètres des quatre rectangles de la Figure 2 ont une somme de $4x + 4y$.
On a donc $4x + 4y = 24$, d'où $x + y = 6$.

Réponse : (A)

16. Étant donné que

$$\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}} = \frac{1}{8}$$

alors en élevant chaque membre au carré, on obtient

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{64}$$

En simplifiant le membre de gauche, on obtient

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1)}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times n} = \frac{1}{64}$$

soit

$$\frac{1 \times (2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1))}{(2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1)) \times n} = \frac{1}{64}$$

On a donc $\frac{1}{n} = \frac{1}{64}$, d'où $n = 64$.

Réponse : (B)

17. Les entiers de 1000 à 9999 sont tous des entiers strictement positifs à quatre chiffres de la forme $abcd$.
On veut que chacun des chiffres a, b, c et d soit pair.
Il y a 4 choix pour le chiffre a, soit 2, 4, 6 et 8. (a ne peut égaler 0.)
Il y a 5 choix pour chacun des chiffres b, c et d, soit 0, 2, 4, 6 et 8.
Puisque le choix de chaque chiffre se fait de manière indépendante par rapport aux choix des autres chiffres, alors il y a $4 \times 5 \times 5 \times 5$ ou 500 tels entiers.

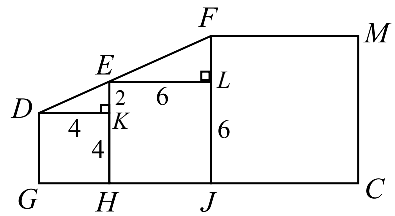
Réponse : (A)

18. La droite d'équation $y = 3x + 5$ a une pente de 3 et une ordonnée à l'origine de 5.
Puisque la droite a une ordonnée à l'origine de 5, elle passe par le point $(0, 5)$.
Lorsque la droite subit une translation de 2 unités vers la droite, sa pente ne change pas et la nouvelle droite passe par le point $(2, 5)$.
Une droite de pente m passant par le point (x_1,y_1) a pour équation $y - y_1 = m(x - x_1)$. Donc, la droite ayant une pente de 3 et passant par $(2, 5)$ a pour équation $y-5 = 3(x-2)$ ou $y-5 = 3x-6$, soit $y = 3x - 1$.

On aurait également pu remarquer que lorsque la droite d'équation $y = 3x+5$ subit une translation de 2 unités vers la droite, alors son image a pour équation $y = 3(x - 2) + 5$, soit $y = 3x - 1$.

Réponse : (B)

19. Puisque les bases des carrés $DKHG$, $ELJH$ et $FMCJ$ sont situés sur une même droite, alors DK, EL et FM sont parallèles.
Puisque DK et EL sont parallèles, alors $\angle EDK = \angle FEL$.
Puisque le triangle EKD est rectangle en K et que le triangle FLE est rectangle en L, alors les triangles EKD et FLE sont semblables.



Le carré $DKHG$ a une aire de 16. Il a donc des côtés de longueur $\sqrt{16} = 4$.
Le carré $ELJH$ a une aire de 36. Il a donc des côtés de longueur $\sqrt{36} = 6$.
Puisque $EH = 6$ et $KH = 4$, alors $EK = 2$.
Donc, le triangle EKD est tel que $EK = 2$ et $DK = 4$. Autrement dit, $EK : DK = 1 : 2$.
Puisque le triangle FLE est semblable au triangle EKD, alors $FL : LE = 1 : 2$.
Puisque $EL = 6$, alors $FL = 3$. Puisque $LJ = 6$ et $FL = 3$, alors $FJ = FL + LJ = 9$.
Donc, le carré $FMCJ$ a une aire de 9^2, soit 81.

Réponse : (D)

20. Soit d la longueur de la course en mètres.
Supposons également que Jiwei a terminé la première course en t s.
Puisque Hari a terminé la course en $\frac{4}{5}$ du temps qu'il a fallu à Jiwei pour la terminer, alors Hari a terminé la course en $\frac{4}{5}t$ s.
Puisque la vitesse équivaut à la distance divisée par le temps, alors la vitesse moyenne de Jiwei était de $\frac{d}{t}$ m/s et la vitesse moyenne de Hari était de $\frac{d}{4t/5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{d}{t}$ m/s.
Pour que Jiwei termine en même temps que Hari, sa vitesse moyenne doit passer de $\frac{d}{t}$ m/s à $\frac{5}{4} \cdot \frac{d}{t}$ m/s. Cela représente une augmentation d'un quart par rapport à la vitesse initiale, soit une augmentation de 25 %. Donc, $x = 25$.

Réponse : (B)

21. Puisque la deuxième colonne contient le nombre 1, alors l'étape (ii) n'a jamais été appliquée sur la deuxième colonne, sinon chaque nombre dans cette colonne serait d'au moins 2.
Pour obtenir les 1, 3 et 2 dans la deuxième colonne, on doit donc avoir appliqué l'étape (i) 1 fois sur la rangée 1, 3 fois sur la rangée 2 et 2 fois sur la rangée 3.
On a donc :

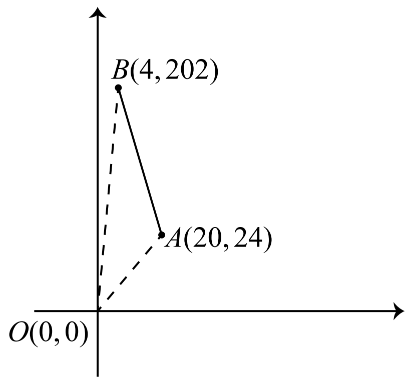
1	1	1
3	3	3
2	2	2

Il n'est pas possible d'appliquer l'étape (i) davantage, au risque de voir augmenter les nombres dans la colonne 2. Donc, $a = 1 + 3 + 2 = 6$.

Pour obtenir le tableau final à partir du tableau actuel en appliquant uniquement l'étape (ii), il faut augmenter de 6 chaque nombre dans la colonne 1 (ce qui signifie appliquer l'étape (ii) 3 fois) et augmenter de 4 chaque nombre dans la colonne 3 (ce qui signifie appliquer l'étape (ii) 2 fois). Donc, $b = 3 + 2 = 5$.
Donc, $a + b = 11$.

Réponse : 11

22. Soit O l'origine, A le point ayant pour coordonnées $(20, 24)$ et B le point ayant pour coordonnées $(4, 202)$.
La pente de OA est $\frac{24}{20} = 1{,}2$. La pente de OB est $\frac{202}{4} = 50{,}5$.



La droite d'équation $y = mx$ passe au point (0,0).
Si $m < 0$, alors la droite d'équation $y = mx$ ne passe pas par le premier quadrant.
Si $0 \leq m < 1{,}2$, la droite d'équation $y = mx$ a une pente inférieure à celle de OA et donc ne coupe pas le segment de droite AB.
Si $m > 50{,}5$, la droite d'équation $y = mx$ a une pente supérieure à celle de OB et donc ne coupe pas le segment de droite AB.
Donc, la droite d'équation $y = mx$ coupe le segment de droite AB pour les entiers m qui vérifient $2 \leq m \leq 50$.
Il y a 49 tels entiers m.

Réponse : 49

23. Pour calculer l'aire totale des région ombrées, on additionne l'aire du rectangle et les aires des quatre demi-cercles et on soustrait l'aire du grand cercle.
Le rectangle de dimensions 6×8 a une aire de 48.
Les deux demi-cercles de diamètre 6 forment un cercle de diamètre 6, soit de rayon 3. Donc, les aires de ces deux demi-cercles ont une somme de $\pi \times 3^2$, soit 9π.
Les deux demi-cercles de diamètre 8 forment un cercle de diamètre 8, soit de rayon 4. Donc, les aires de ces deux demi-cercles ont une somme de $\pi \times 4^2$, soit 16π.
Puisque le grand cercle passe par les quatre sommets du rectangle, alors la diagonale du rectangle est également le diamètre du cercle. (Cela est dû au fait que la diagonale sous-tend un angle de $90°$ à chacun des autres sommets et est donc un diamètre.)
La longueur de la diagonale est égale à $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$. Donc, le grand cercle a un rayon de 5 et une aire de $\pi \times 5^2 = 25\pi$.
Donc, cela signifie que l'aire totale des régions ombrées est égale à $48 + 9\pi + 16\pi - 25\pi$, soit 48.
L'entier le plus près de 48 est donc 48.

Réponse : 48

24. Si Rasheeqa marche directement de A à B à C, cela lui prendrait $2 + 3 = 5$ minutes.
Remarquons que Rasheeqa ne peut pas marcher de A à C en moins de 5 minutes, donc t ne peut pas être égal à 1, 2, 3 ou 4.
Rasheeqa peut prolonger la durée de sa promenade par des multiples de 3 minutes en se promenant sur le chemin circulaire qui commence et qui se termine à B.
Cela signifie que le temps total de Rasheeqa, en minutes, peut être $5, 8, 11, 14, \ldots, 98, 101$.
Rasheeqa peut également marcher de A à B à A à B à C.
Cela lui prendrait $2 + 3 + 2 + 3 = 10$ minutes.
Cela représente donc le minimum de temps que durerait une promenade dans laquelle le chemin de B à A est emprunté.
Rasheeqa peut, à nouveau, prolonger la durée de cette promenade de 10 minutes par des multiples de 3 minutes en se promenant sur le chemin circulaire qui commence et qui se termine à B.
Cela signifie que le temps total de Rasheeqa, en minutes, peut être $10, 13, 16, 19, \ldots, 97, 100, 103$.
Rasheeqa peut également marcher de A à B à A à B à A à B à C.
Cela lui prendrait $2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 = 15$ minutes.
Cela représente donc le minimum de temps que durerait une promenade dans laquelle le chemin de B à A est emprunté deux fois.
Rasheeqa peut, à nouveau, prolonger la durée de cette promenade de 15 minutes par des multiples de 3 minutes en se promenant sur le chemin circulaire qui commence et qui se termine à B.
Cela signifie que le temps total de Rasheeqa, en minutes, peut être $15, 18, 21, 24, \ldots, 96, 99, 102$.
En examinant ces listes, on voit que t peut égaler 5, 8, 10, 11, 13, 14, 15 et chaque entier t avec $16 \leq t \leq 100$.
Parmi les entiers strictement positifs t avec $1 \leq t \leq 100$, on voit que t ne peut pas égaler 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12.
Puisque t ne peut pas être égal à 8 valeurs, alors il y a $100 - 8 = 92$ valeurs possibles de t.

Réponse : 92

25. Les motifs qu'Ellie peut construire peuvent comprendre 3, 4, 5 ou 6 X.
Un motif ne peut pas comprendre moins de 3 X (car il faut avoir 3 X pour compléter un motif) et ne peut pas comprendre 7 X (car le 7ème X serait placé soit à côté de 6 X, soit entre 5 X et 1 X, soit entre 4 X et 2 X, soit entre 3 X et 3 X. Or, chacun de ces cas constitue déjà un motif complet).
Examinons les cas suivants, qui sont définis par le nombre de X dans chaque motif.

<u>1er cas : 3 X</u>
En utilisant des O pour représenter les carrés vides, il y a 5 façons de placer 3 X consécutifs :

XXXOOOO, OXXXOOO, OOXXXOO, OOOXXXO, OOOOXXX

<u>2e cas : 4 X</u>
Il y a 4 façons de placer 4 X consécutifs :

XXXXOOO, OXXXXOO, OOXXXXO, OOOXXXX

(Il est possible d'avoir 4 X consécutifs sans s'être arrêté après le 3ème X si les X sont placés, par exemple, dans l'ordre 1er X, 2e X, 4e X, 3e X.)

On peut également avoir 4 X en utilisant un groupe de 3 X (il faut qu'il y ait au moins 3 X consécutifs) et un X individuel (que l'on place soit avant ou après le groupe de 3 X). Il y a 12 façons de réaliser cela :

XXXOXOO, XXXOOXO, XXXOOOX, OXXXOXO, OXXXOOX, OOXXXOX, XOXXXOO,
XOOXXXO, XOOOXXX, OXOXXXO, OXOOXXX, OOXOXXX

3e cas : 5 X

Il y a 3 façons de placer 5 X consécutifs :

XXXXXOO, OXXXXXO, OOXXXXX

(On peut placer 5 X consécutifs dans l'ordre 1er X, 2e X, 4e X, 5e X, 3e X.)
On peut également avoir 5 X en utilisant un groupe de 3 X et un groupe de 2 X, ou en utilisant un groupe de 4 X et un X individuel, ou en utilisant un groupe de 3 X et deux X individuels. Il y a 15 façons de réaliser cela :

XXXOXXO, XXXOOXX, OXXXOXX, XXOXXXO, XXOOXXX, OXXOXXX, XXXXOXO,
XXXXOOX, OXXXXOX, XOXXXXO, XOOXXXX, OXOXXXX, XXXOXOX, XOXXXOX,
XOXOXXX

4e cas : 6 X

On ne peut pas placer 6 X consécutifs, car il y aurait 3 X consécutifs avant que le 6ème X ne soit placé.
On peut cependant avoir 6 X s'ils sont en groupes de 5 et 1 ou en groupes de 4 et 2. (On ne peut avoir des groupes de 3 et 3. Voyez-vous pourquoi ?)
Il y a 4 façons de réaliser cela :

XXXXXOX, XXXXOXX, XOXXXXX, XXOXXXX

Ellie peut donc construire $5 + 4 + 12 + 3 + 15 + 4 = 43$ motifs en tout.

Réponse : 43

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2023

(10^{e} année – Secondaire IV)

le mercredi 22 février 2023
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 23 février 2023
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Puisque chacune des trois fractions est égale à 1, alors $\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{3}=1+1+1=3$.

Réponse : (C)

2. Puisque $3n = 9+9+9 = 3\times 9$, alors $n=9$.
On aurait également pu remarquer que $9+9+9=27$, d'où $3n=27$ ou $n=\frac{27}{3}=9$.

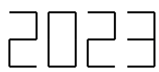
Réponse : (D)

3. On ajoute 25 minutes à 1 heure et 48 minutes en deux étapes.
Tout d'abord, on ajoute 12 minutes à 1 heure et 48 minutes pour obtenir 2 heures.
Ensuite, on ajoute $25-12=13$ minutes à 2 heures pour obtenir 2 heures et 13 minutes.
On aurait également pu remarquer que 1 heure et 48 minutes représentent $60+48=108$ minutes et que 25 minutes de plus que cela est égal à 133 minutes, ce qui est à son tour égal à $120+13$ minutes ou 2 heures et 13 minutes.

Réponse : (A)

4. Le Jour 1, Lucie a vu 2 geais bleus et 3 cardinaux. Elle a donc vu 1 cardinal de plus que de geais bleus.
Le Jour 2, Lucie a vu 3 geais bleus et 3 cardinaux.
Le Jour 3, Lucie a vu 2 geais bleus et 4 cardinaux. Elle a donc vu 2 cardinaux de plus que de geais bleus.
Donc, au cours des trois jours, Lucie a vu $1+0+2=3$ cardinaux de plus que de geais bleus.

Réponse : (B)

5. Lorsqu'on observe le nombre  de l'autre côté de la fenêtre, les chiffres paraissent en miroir et en ordre inverse. On voit donc .

Réponse : (C)

6. *Solution 1*
Puisque l'angle BCD est un angle plat, alors $\angle ACB = 180^\circ - \angle ACD = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.
Puisque les mesures des angles du triangle ABC ont une somme de 180°, alors $x^\circ + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$, d'où $x = 180-120=60$.

Solution 2
Puisque les mesures des angles du triangle ABC ont une somme de 180°, alors

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - x^\circ = 90^\circ - x^\circ$$

Puisque $\angle BCD = 180^\circ$, alors

$$\begin{aligned}\angle ACB + \angle ACD &= 180^\circ\\ (90^\circ - x^\circ) + 150^\circ &= 180^\circ\\ 240 - x &= 180\end{aligned}$$

d'où $x=60$.

Réponse : (E)

7. Un cube a six faces identiques.
Si le cube a une aire totale de 24, alors l'aire de chaque face est égale à $\frac{24}{6} = 4$.
Puisque chaque face de ce cube est un carré dont l'aire est égale à 4, les arêtes du cube ont une longueur de $\sqrt{4} = 2$.
Donc, le volume du cube est égal à 2^3, soit 8.

Réponse : (E)

8. Si $\frac{4}{5}$ des perles sont jaunes, alors $\frac{1}{5}$ des perles sont vertes.
Puisqu'il y a 4 perles vertes, alors le nombre total de perles doit être égal à $4 \times 5 = 20$.
Donc, Charlotte doit ajouter $20 - 4 = 16$ perles jaunes.

Réponse : (A)

9. *Solution 1*
Supposons que 100 est le nombre initial.
Lorsque 100 est augmenté de 60 %, on obtient 160.
Pour revenir à la valeur initiale de 100, 160 doit être diminué de 60.
Cette diminution, sous forme de pourcentage, est égale à $\frac{60}{160} \times 100\% = \frac{3}{8} \times 100\% = 37{,}5\%$.

Solution 2
Soit x le nombre initial avec $x > 0$.
Lorsque x est augmenté de 60 %, on obtient $1{,}6x$.
Pour revenir à la valeur initiale de x, $1{,}6x$ doit être diminué de $0{,}6x$.
Cette diminution, sous forme de pourcentage, est égale à $\frac{0{,}6x}{1{,}6x} \times 100~\% = \frac{3}{8} \times 100~\% = 37{,}5~\%$.

Réponse : (E)

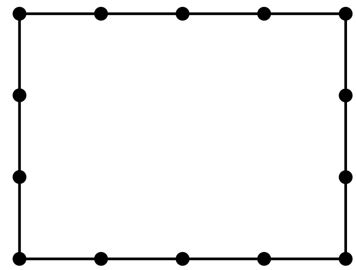
10. Chaque porte a 2 « états » possibles, soit ouverte ou fermée.
Donc, il y a $2^5 = 32$ combinaisons possibles d'états pour les 5 portes.
Si l'on représente les cinq portes par les lettres P, Q, R, S, T, alors les the paires de portes qui peuvent être ouvertes sont PQ, PR, PS, PT, QR, QS, QT, RS, RT, ST. Il y a donc 10 telles paires.
Donc, si l'on choisit au hasard l'une des 32 combinaisons possibles d'états, la probabilité pour qu'exactement deux des cinq portes soient ouvertes est égale à $\frac{10}{32}$, ce qui est équivalent à $\frac{5}{16}$.

Réponse : (A)

11. Après que Karim a mangé n bonbons, il lui reste $23 - n$ bonbons.
Puisqu'il divise les bonbons restants de manière égale entre ses trois enfants, alors l'entier $23 - n$ doit être un multiple de 3.
Si $n = 2, 5, 11, 14$, on obtient $23 - n = 21, 18, 12, 9$. Chacun de ces nombres est un multiple de 3.
Si $n = 9$, on obtient $23 - n = 14$, ce qui n'est pas un multiple de 3.
Donc, n ne peut égaler 9.

Réponse : (C)

12. Un champ rectangulaire de 6 m $\times$ 8 m a un périmètre de $2 \times (6 \text{ m} + 8 \text{ m}) = 28$ m.
En partant d'un coin, si les poteaux sont placés à intervalles réguliers de 2 m autour du champ rectangulaire, alors on peut supposer qu'il faudra $\dfrac{28 \text{ m}}{2 \text{ m}} = 14$ poteaux en tout.
La figure ci-dessous le confirme :

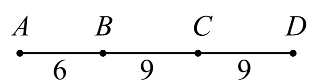


Réponse : (B)

13. Puisque $2023 = 7 \times 17^2$, alors tout carré parfait qui est un multiple de 2023 doit avoir 7 et 17 comme facteurs premiers.
De plus, les exposants des facteurs premiers d'un carré parfait doivent tous être pairs.
Donc, tout carré parfait qui est un multiple de 2023 doit être divisible par 7^2 et par 17^2, ce qui signifie qu'il doit être supérieur ou égal à $7^2 \times 17^2$, ce qui est égal à 7×2023.
Donc, le plus petit carré parfait qui est un multiple de 2023 est 7×2023.
On peut vérifier que 2023^2 est supérieur à 7×2023 et que ni 4×2023, ni 17×2023, ni $7 \times 17 \times 2023$ ne sont des carrés parfaits.

Réponse : (C)

14. Puisque B est situé entre A et D et que $BD = 3AB$, alors B divise AD selon un rapport de 1 : 3.
Puisque $AD = 24$, alors $AB = 6$ et $BD = 18$.
Puisque C est situé à mi-chemin entre B et D, alors $BC = \frac{1}{2}BD = 9$.



Donc, $AC = AB + BC = 6 + 9 = 15$.

Réponse : (E)

15. Puisque $a = \dfrac{1}{n}$, n étant un entier strictement positif tel que $n > 1$, alors $0 < a < 1$ et $\dfrac{1}{a} = n > 1$.
Donc, $0 < a < 1 < \dfrac{1}{a}$, ce qui élimine les choix (D) et (E).
Puisque $0 < a < 1$, alors a^2 est positif et $a^2 < a$, ce qui élimine les choix (A) et (C).
Donc, $0 < a^2 < a < 1 < \dfrac{1}{a}$, d'où (B) est donc le bon choix de réponse.

Réponse : (B)

16. *Solution 1*
Puisque AB et ED sont parallèles, alors le quadrilatère $ABDE$ est un trapèze.
On sait que $AB = 30$ cm.
Puisque $ABCF$ est un rectangle, alors $FC = AB = 30$ cm.
Supposons que $DC = x$ cm.
Alors $ED = FC - FE - DC = (30 \text{ cm}) - (5 \text{ cm}) - (x \text{ cm}) = (25 - x)$ cm.
La hauteur du trapèze est égale à la longueur de AF, soit 14 cm.

Puisque l'aire du trapèze est égale à 266 cm^2, alors

$$\begin{aligned}266\text{ cm}^2 &= \frac{30\text{ cm} + (25 - x)\text{ cm}}{2} \times (14\text{ cm})\\ 266 &= \frac{55 - x}{2} \times 14\\ 532 &= (55 - x) \times 14\\ 38 &= 55 - x\\ x &= 55 - 38\end{aligned}$$

Donc, $DE = x$ cm = 17 cm.

Solution 2
Soit $DC = x$ cm.
Le rectangle $ABCF$ a $AB = 30$ cm et $AF = 14$ cm. L'aire de $ABCF$ est donc égale à $(30\text{ cm}) \times (14\text{ cm}) = 420\text{ cm}^2$.
Le triangle AFE est rectangle en F et a une aire de

$$\tfrac{1}{2} \times AF \times FE = \tfrac{1}{2} \times (14\text{ cm}) \times (5\text{ cm}) = 35\text{ cm}^2$$

L'aire du quadrilatère $ABDE$ est égale à 266 cm^2.
Le triangle BCD est rectangle en C et a une aire de

$$\tfrac{1}{2} \times BC \times DC = \tfrac{1}{2} \times (14\text{ cm}) \times (x\text{ cm}) = 7x\text{ cm}^2$$

On compare l'aire du rectangle $ABCF$ aux aires combinées des parties pour obtenir

$$\begin{aligned}(35\text{ cm}^2) + (266\text{ cm}^2) + (7x\text{ cm}^2) &= 420\text{ cm}^2\\ 301 + 7x &= 420\\ 7x &= 119\\ x &= 17\end{aligned}$$

Donc, la longueur de DC est égale à 17 cm.

Réponse : (A)

17. Puisque la voiture de Mylène avait une vitesse moyenne de $\frac{5}{4}$ m/s, elle a parcouru 100 m en $\dfrac{100\text{ m}}{5/4\text{ m/s}} = \dfrac{400}{5}\text{ s} = 80\text{ s}$.

Étant donné que la voiture d'Héloïse a terminé la course 5 secondes avant celle de Megan, elle a terminé la course en 75 s.

Donc, la voiture d'Héloïse avait une vitesse moyenne de $\dfrac{100\text{ m}}{75\text{ s}} = \dfrac{100}{75}\text{ m/s} = \dfrac{4}{3}\text{ m/s}$.

Réponse : (C)

18. Le nombre total de barres qui ont été retirées des boîtes est égal à $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$.
Si ces barres avaient toutes une masse de 100 g, leur masse totale serait égale à 3100 g.
Puisque leur masse totale est égale à 2920 g, elles pèsent 3100 g − 2920 g = 180 g de moins.
Puisque toutes les barres ont une masse de 100 g ou de 90 g, alors 18 des barres doivent peser

10 g de moins que 100 g (et pèsent donc 90 g chacune).
Donc, on veut représenter 18 comme la somme de deux nombres parmi 1, 2, 4, 8, 16 afin de déterminer les boîtes desquelles les barres de 90 g ont été retirées.
On remarque que $18 = 2 + 16$. Donc, les barres de 90 g ont dû être retirées des boîtes X et Z.
Pouvez-vous voir pourquoi cette réponse est unique ?

Réponse : (B)

19. Puisque a, b et c ont une moyenne de 16, alors $\dfrac{a+b+c}{3} = 16$, d'où $a + b + c = 3 \times 16 = 48$.
Puisque c, d et e ont une moyenne de 26, alors $\dfrac{c+d+e}{3} = 26$, d'où $c + d + e = 3 \times 26 = 78$.
Puisque a, b, c, d et e ont une moyenne de 20, alors $\dfrac{a+b+c+d+e}{5} = 20$.
Donc, $a + b + c + d + e = 5 \times 20 = 100$.
On remarque que
$$(a + b + c) + (c + d + e) = (a + b + c + d + e) + c$$
Donc, $48 + 78 = 100 + c$, d'où $c = 126 - 100 = 26$.

Réponse : (D)

20. Chaque groupe de quatre sauts amène la sauterelle à se déplacer de 1 cm vers l'est et de 3 cm vers l'ouest, ce qui équivaut à 2 cm vers l'ouest, et de 2 cm vers le nord et de 4 cm vers le sud, ce qui équivaut à 2 cm vers le sud.
En d'autres termes, on peut voir que chaque groupe de quatre sauts, en commençant par le premier, entraîne un déplacement net de 2 cm vers l'ouest et de 2 cm vers le sud.
Remarquons que $158 = 2 \times 79$.
Donc, après 79 groupes de quatre sauts, la sauterelle se trouve à $79 \times 2 = 158$ cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale.
La sauterelle a fait $4 \times 79 = 316$ sauts jusqu'à présent.
Après le 317$^{\text{e}}$ saut (1 cm vers l'est), la sauterelle se trouve à 157 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale.
Après le 318$^{\text{e}}$ saut (2 cm vers le nord), la sauterelle se trouve à 157 cm à l'ouest et 156 cm au sud de sa position initiale.
Après le 319$^{\text{e}}$ saut (3 cm vers l'ouest), la sauterelle se trouve à 160 cm à l'ouest et 156 cm au sud de sa position initiale.
Après le 320$^{\text{e}}$ saut (4 cm vers le sud), la sauterelle se trouve à 160 cm à l'ouest et 160 cm au sud de sa position initiale.
Après le 321$^{\text{e}}$ saut (1 cm vers l'est), la sauterelle se trouve à 159 cm à l'ouest et 160 cm au sud de sa position initiale.
Après le 322$^{\text{e}}$ saut (2 cm vers le nord), la sauterelle se trouve à 159 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale.
Après le 323$^{\text{e}}$ saut (3 cm vers l'ouest), la sauterelle se trouve à 162 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale, ce qui correspond à la position souhaitée.
À mesure que la sauterelle continue de sauter, chacune de ses positions sera toujours située au moins 160 cm au sud de sa position initiale. On voit donc que ceci est la seule fois qu'elle se trouvera à cette position.
Donc, $n = 323$. La somme des carrés des chiffres de n est égale à $3^2 + 2^2 + 3^2 = 9 + 4 + 9 = 22$.

Réponse : (A)

21. Puisque la droite d'équation $y = mx - 50$ passe au point $(a, 0)$, alors $0 = ma - 50$ ou $ma = 50$.
Puisque m et a sont des entiers strictement positifs dont le produit est égal à 50, alors m et a sont une paire de diviseurs complémentaires de 50.
Donc, les valeurs possibles de m sont les diviseurs positifs de 50, soit 1, 2, 5, 10, 25, 50.
Donc, la somme des valeurs possibles de m est égale à $1 + 2 + 5 + 10 + 25 + 50 = 93$.

Réponse : 93

22. D'après les données de l'énoncé, si a et b se trouvent dans deux carrés consécutifs, alors $a + b$ se trouve dans le cercle qui les sépare.
Comme tous les entiers que l'on peut utiliser sont positifs, alors $a + b$ est supérieur à a et à b.
Cela signifie que le plus grand entier de la liste, soit 13, ne peut être ni x ni y (et ne peut être placé dans un carré) car l'entier dans le cercle à côté doit être inférieur à 13 (qui est le plus grand entier de la liste) et ne peut donc pas être égal à la somme de 13 et d'un autre entier positif de la liste.
Donc, pour que la valeur de $x + y$ soit aussi grande que possible, il faudrait que x et y soient égaux à 10 et 11 dans un certain ordre. Or, on est confronté au même problème : il n'y a qu'un seul entier de la liste supérieur à 10 et à 11 (soit 13) qui pourrait aller dans les cercles à côté de 10 et 11 ; cependant, puisque chaque entier ne peut être utilisé qu'une seule fois, alors les cercles à côté de 10 et 11 ne peuvent contenir tous deux l'entier 13.
Donc, la plus grande valeur possible de $x + y$ se produit lorsque $x = 9$ et $y = 11$ (ou lorsque $y = 9$ et $x = 11$).
Dans ce cas, on pourrait avoir $13 = 11 + 2$ et $10 = 9 + 1$, d'où on aurait la liste partielle suivante :

$$\boxed{11} \quad 13 \quad \boxed{2} \quad \bigcirc \quad \boxed{} \quad \bigcirc \quad \boxed{1} \quad 10 \quad \boxed{9}$$

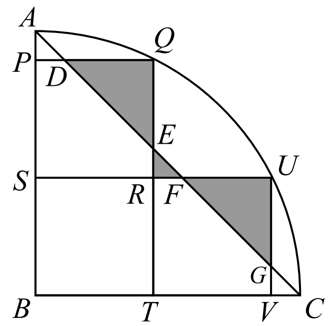
Afin de remplir les conditions du problème, les entiers restants (4, 5 et 6) peuvent être placés dans les cercles et les carrés de la manière suivante :

$$\boxed{11} \quad 13 \quad \boxed{2} \quad 6 \quad \boxed{4} \quad 5 \quad \boxed{1} \quad 10 \quad \boxed{9}$$

On voit donc que la plus grande valeur possible de $x + y$ est 20.

Réponse : 20

23. Puisque AB et BC sont tous deux des rayons du cercle, alors $AB = BC$.
Puisque ABC est un quart de cercle ayant pour centre B, alors $\angle ABC = 90°$.
Donc, le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle, ce qui signifie que $\angle BAC = \angle BCA = 45°$.
On nomme quelques autres points, comme dans la figure suivante :



On remarque que les droites qui passent aux points P, Q, R et U se coupent à angles droits en ces points.
Puisque $\angle PAD = \angle BAC = 45°$, cela signifie que

$$\angle PAD = \angle ADP = \angle QDE = \angle DEQ = \angle REF = \angle EFR = \angle UFG = \angle UGF = 45°$$

Cela signifie à son tour que chacun des triangles APD, DQE, ERF et FUG est un triangle rectangle isocèle.
Puisque chaque carré a des côtés de longueur 10, alors $BT = 10$ et $TQ = TR + RQ = 20$.
Puisque $\angle BTQ = 90°$, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$BQ = \sqrt{BT^2 + TQ^2} = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{500}$$

On remarque que $\sqrt{500} = \sqrt{100 \times 5} = \sqrt{100} \times \sqrt{5} = 10\sqrt{5}$.
Puisque BQ est un rayon du cercle, alors $BQ = BA = BC = 10\sqrt{5}$.
Puisque $BP = TQ = 20$, alors $AP = BA - BP = 10\sqrt{5} - 20$.
Donc, $PD = AP = 10\sqrt{5} - 20$.
Puisque $PQ = 10$, alors $DQ = PQ - PD = 10 - (10\sqrt{5} - 20) = 30 - 10\sqrt{5}$.
Donc, $QE = DQ = 30 - 10\sqrt{5}$.
Puisque $PQ = QR$ et $DQ = QE$, alors $PD = ER = 10\sqrt{5} - 20$.
D'après un raisonnement semblable, $ER = RF = 10\sqrt{5} - 20$ et $UF = UG = 30 - 10\sqrt{5}$.
L'aire totale, $\mathcal{A}$, des régions ombrées est égale à la somme des aires des triangles DQE, ERF et FUG.
Donc,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \tfrac{1}{2} \times DQ \times QE + \tfrac{1}{2} \times ER \times RF + \tfrac{1}{2} UF \times UG \\
&= \tfrac{1}{2}(30 - 10\sqrt{5})^2 + \tfrac{1}{2}(10\sqrt{5} - 20)^2 + \tfrac{1}{2}(30 - 10\sqrt{5})^2 \\
&= (30 - 10\sqrt{5})^2 + \tfrac{1}{2}(10\sqrt{5} - 20)^2 \\
&= (30^2 - 2 \times 30 \times 10\sqrt{5} + (10\sqrt{5})^2) + \tfrac{1}{2}((10\sqrt{5})^2 - 2 \times 10\sqrt{5} \times 20 + 20^2) \\
&= (900 - 600\sqrt{5} + 500) + \tfrac{1}{2}(500 - 400\sqrt{5} + 400) \\
&= 1400 - 600\sqrt{5} + 450 - 200\sqrt{5} \\
&= 1850 - 800\sqrt{5} \\
&\approx 61{,}14
\end{aligned}$$

Donc, l'entier le plus près de $\mathcal{A}$ est 61.

Réponse : 61

24. On veut déterminer la probabilité pour que Carine gagne 3 parties avant d'en perdre 2.
Cela signifie que soit elle gagne 3 parties et en perd 0, soit elle gagne 3 parties et en perd 1.
Si Carine gagne ses trois premières parties, on peut s'arrêter car on n'a pas besoin de considérer le cas où elle perd sa quatrième partie.
Autrement dit, une fois que Carina a gagné sa troisième partie, les résultats des parties suivantes n'affectent pas la probabilité car les victoires ou les défaites à ce stade n'ont pas d'incidence sur la question qui est posée.
Si l'on utilise V pour représenter une victoire et D pour représenter une défaite, alors les séquences possibles de victoires et de défaites que l'on doit examiner sont VVV, DVVV, VDVV et VVDV.

Dans le cas de VVV, les probabilités du résultat spécifique dans chacune des trois parties sont $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$, car après avoir gagné une partie, la probabilité de gagner la partie suivante est égale à $\frac{3}{4}$.
Donc, la probabilité de VVV est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$.

Dans le cas de DVVV, les probabilités du résultat spécifique dans chacune des quatre parties sont $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$, car la probabilité de perdre la première partie est égale à $\frac{1}{2}$, la probabilité de gagner une partie après en avoir perdu une est égale à $\frac{1}{3}$, et la probabilité de gagner une partie après en avoir gagné une est égale à $\frac{3}{4}$.
Donc, la probabilité de DVVV est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{96} = \frac{3}{32}$.

D'après un raisonnement semblable, la probabilité de VDVV est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{96} = \frac{1}{32}$.
Dans ce cas, on a utilisé le fait que la probabilité de perdre une partie après en avoir gagné une est égale à $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Enfin, la probabilité de VVDV est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{96} = \frac{1}{32}$.

Donc, la probabilité pour que Carine gagne 3 parties avant d'en perdre 2 est égale à $\frac{9}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$, qui est une fraction irréductible.
Le numérateur et le dénominateur de cette fraction ont une somme de 23.

Réponse : 23

25. *Solution 1*
Soit $N = AB\,0AB$ et soit t l'entier de deux chiffres AB.
On remarque que $N = 1001t$ et que $1001 = 11 \cdot 91 = 11 \cdot 7 \cdot 13$.
Donc, $N = t \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.
On veut exprimer N sous la forme du produit de 5 entiers impairs distincts, chacun étant supérieur à 2, et on veut également compter le nombre d'ensembles S de tels entiers impairs dont le produit est N.
Il y a plusieurs cas à considérer.
Premièrement, on examine les ensembles S possibles qui comprennent les entiers 7, 11 et 13 (on sait que ces entiers sont des diviseurs admissibles).
Deuxièmement, on examine les ensembles S possibles qui comprennent deux de ces entiers et un multiple impair du troisième entier.
Troisièmement, on exclue les ensembles S possibles qui comprennent l'un de ces entiers et des multiples impairs des deuxième et troisième entiers.
Quatrièmement, on exclue les ensembles S possibles qui comprennent le produit de deux ou trois de ces entiers et des entiers additionnels.

1$^{\text{er}}$ cas : $S = \{7, 11, 13, m, n\}$ avec $m < n$ et $m,n \neq 7, 11, 13$

Dans ce cas, $N = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot m \cdot n = mn \cdot 1001$. Donc, $t = mn$. On voit donc que mn est inférieur à 100.
Si $m = 3$, alors les valeurs possibles de n sont 5, 9, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31.
On a donc les valeurs correspondantes suivantes de mn : 15, 27, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93.
Remarquons que $n \neq 33$, car $m = 3$ et $n = 33$ donnent $mn = 99$ qui a deux chiffres égaux, ce qui n'est pas possible.
Si $m = 5$, alors les valeurs possibles de n sont 9, 15, 17, 19.
Si $m \geq 9$, alors $n \geq 15$ car les entiers dans n sont impairs et distincts. Donc, $mn \geq 135$, ce qui n'est pas possible.
Donc, il y a 15 ensembles possibles dans ce cas.

2$^{\text{e}}$ cas : $S = \{7q, 11, 13, m, n\}$ avec $m < n$ et $q > 1$ est impair et $m,n \neq 7q, 11, 13$

Dans ce cas, $N = 7q \cdot 11 \cdot 13 \cdot m \cdot n$. Donc, $N = 1001 \cdot mnq$, d'où $t = mnq$.
Remarquons que $mnq \leq 99$.
Supposons que $q = 3$. Cela signifie que $mn \leq 33$.
Si $m = 3$, alors les valeurs possibles de n sont 5 et 9 puisque m et n sont impairs, supérieurs à 2 et distincts. ($n = 7$ n'est pas possible car on obtiendrait l'ensemble $\{21, 11, 13, 3, 7\}$ qui a déjà été pris en compte dans le 1$^{\text{er}}$ cas ci-dessus.)
Si $m \geq 5$, alors $n \geq 7$, d'où $mn \geq 35$, ce qui n'est pas posible.
Supposons que $q = 5$. Cela signifie que $mn \leq \frac{99}{5} = 19\frac{4}{5}$.
Si $m = 3$, alors $n = 5$. Il n'y a pas d'autres possibilités lorsque $q = 5$.
Puisque $mn \geq 3 \cdot 5 = 15$ et $mnq \leq 99$, alors on ne peut avoir $q \geq 7$.
Donc, il y a 3 ensembles possibles dans ce cas.

3$^{\text{e}}$ cas : $S = \{7, 11q, 13, m, n\}$ avec $m < n$ et $q > 1$ est impair et $m,n \neq 7, 11q, 13$

Supposons que $q = 3$. Cela signifie que $mn \leq 33$.
Si $m = 3$, alors les valeurs possibles de n sont 5 et 9. (Remarquons que $n \neq 7$.) On ne peut avoir $n = 11$ car sinon on aurait $mnq = 99$ et 99 099 comme produit, dans lequel les chiffres A et B sont égaux.
On ne peut avoir $m \geq 5$ car cela donnerait $mn \geq 45$.
Supposons que $q = 5$. Cela signifie que $mn \leq \frac{99}{5}$.
Si $m = 3$, alors $n = 5$.
Comme dans le 2$^{\text{e}}$ cas, on ne peut avoir $q \geq 7$.
Donc, il y a 3 ensembles possibles dans ce cas.

4$^{\text{e}}$ cas : $S = \{7, 11, 13q, m, n\}$ avec $m < n$ et $q > 1$ est impair et $m,n \neq 7, 11, 13q$

Supposons que $q = 3$. Cela signifie que $mn \leq 33$.
Si $m = 3$, alors les valeurs possibles de n sont 5 et 9. (Dans ce cas, $n \neq 11$.)
On ne peut avoir $m \geq 5$ lorsque $q = 3$ car sinon $mn \geq 45$.
Si $q = 5$, on peut uniquement avoir $m = 3$ et $n = 5$.
Comme dans les 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ cas, on ne peut avoir $q \geq 7$.
Donc, il y a 3 ensembles possibles dans ce cas.

5$^{\text{e}}$ cas : $S = \{7q, 11r, 13, m, n\}$ avec $m < n$ et $q,r > 1$ sont impairs et $m,n \neq 7q, 11r, 13$

Dans ce cas, $mnqr \leq 99$.
Puisque $q,r > 1$ sont impairs, alors $qr \geq 9$, ce qui signifie que $mn \leq 11$.
Puisqu'il n'existe pas deux entiers impairs distincts supérieurs à 1 dont le produit est inférieur à 15, il n'y a pas d'ensembles possibles dans ce cas.

Un argument semblable exclut les produits

$$N = 7q \cdot 11 \cdot 13r \cdot m \cdot n \qquad N = 7 \cdot 11q \cdot 13r \cdot m \cdot n \qquad N = 7q \cdot 11r \cdot 13s \cdot m \cdot n$$

q, r et s étant des entiers impairs supérieurs à 1.

6ᵉ cas : $S = \{77, 13, m, n, \ell\}$ avec $m < n < \ell$ et $m,n,\ell \neq 77, 13$

Remarquons que $77 = 7 \cdot 11$ puisque l'on sait que N a pour diviseurs 7 et 11.
Dans ce cas, $mn\ell \leq 99$.
Puisque $mn\ell \geq 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, il n'y a pas d'ensembles possibles dans ce cas, ni en utilisant $7 \cdot 143$ ou $11 \cdot 91$ dans le produit ou en utilisant 1001 par lui-même ou en utilisant des multiples de 77, 91 ou 143.

Donc, ayant considéré tous les cas, il y a alors $15 + 3 + 3 + 3 = 24$ ensembles possibles.

Solution 2

Remarquons d'abord que $AB\,0AB = AB \cdot 1001$ et que $1001 = 11 \cdot 91 = 11 \cdot 7 \cdot 13$.
Donc, $AB\,0AB = AB \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.
Puisque $AB\,0AB$ est impair, alors B est impair.
Puisque $A \neq 0$, que $A \neq B$ et que B est impair, alors on a les possibilités suivantes pour l'entier de deux chiffres AB :

$$13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49$$

$$51, 53, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97$$

Si l'entier AB est un nombre premier, alors $AB\,0AB$ ne peut être exprimé comme le produit de cinq entiers strictement positifs distincts, chacun étant supérieur à 2, puisqu'il aurait au plus quatre facteurs premiers.
À partir de cela, on peut supprimer de notre liste plusieurs possibilités pour AB afin d'obtenir une liste plus courte :

$$15, 21, 25, 27, 35, 39, 45, 49, 51, 57, 63, 65, 69, 75, 81, 85, 87, 91, 93, 95$$

Parmi les entiers de cette liste plus courte, plusieurs sont le produit de deux nombres premiers distincts, aucun des deux n'étant égal à 7, à 11 ou à 13. Ces entiers sont $15 = 3 \cdot 5$ et $51 = 3 \cdot 17$ et $57 = 3 \cdot 19$ et $69 = 3 \cdot 23$ et $85 = 5 \cdot 17$ et $87 = 3 \cdot 29$ et $93 = 3 \cdot 31$ et $95 = 5 \cdot 19$.
Si l'on considère chacun de ceux-ci comme étant $p \cdot q$, p et q étant des nombres premiers distincts, alors on a $AB\,0AB = p \cdot q \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.
Pour exprimer $AB\,0AB$ sous la forme d'un produit de cinq entiers strictement positifs distincts, chacun étant supérieur à 2, ces cinq entiers doivent être les cinq facteurs premiers. Pour chacun de ces 8 entiers (15, 51, 57, 69, 85, 87, 93, 95), il y a 1 ensemble de 5 entiers impairs distincts, puisque l'ordre des entiers n'a pas d'importance. On a donc 8 ensembles jusque-là.
Il reste donc les entiers 21, 25, 27, 35, 39, 45, 49, 63, 65, 75, 81, 91.

Parmi ces entiers restants, sept sont égaux au produit de deux nombres premiers ; soit ces nombres premiers sont égaux, soit au moins l'un d'eux est égal à 7, à 11 ou à 13. Ces produits sont $21 = 3 \cdot 7$ et $25 = 5 \cdot 5$ et $35 = 5 \cdot 7$ et $39 = 3 \cdot 13$ et $49 = 7 \cdot 7$ et $65 = 5 \cdot 13$ et $91 = 7 \cdot 13$.
Dans chaque cas, $AB\,0AB$ peut être écrit comme un produit de 5 nombres premiers, dont au moins 2 sont identiques. Ces 5 nombres premiers ne peuvent être regroupés pour obtenir 5 entiers impairs différents, chacun étant supérieur à 1, car les 5 nombres premiers comprennent des doublons et si deux des nombres premiers sont combinés, alors on doit inclure 1 dans l'ensemble.

Considérons par exemple $21 = 3 \cdot 7$. Dans ce cas, $21\,021 = 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Il n'y a aucun moyen de regrouper ces facteurs premiers pour obtenir cinq entiers impairs différents, chacun étant supérieur à 1.
De même, $25\,025 = 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ et $91\,091 = 7 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Les trois possibilités restantes (35, 49 et 65) donnent des situations similaires.
Il reste donc les entiers 27, 45, 63, 75, 81 à considérer.

Considérons $27\,027 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Il y a 6 facteurs premiers à répartir entre les cinq entiers impairs qui forment le produit. Comme il ne peut y avoir deux 3 dans l'ensemble, alors le seul moyen d'avoir un ensemble de 5 entiers impairs distincts est de regrouper deux 3 de manière à avoir $\{3, 9, 7, 11, 13\}$.
Considérons $81\,081 = 3^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Il y a 7 facteurs premiers à répartir entre les cinq entiers impairs qui forment le produit.
Puisqu'il ne peut y avoir deux 3 ou deux 9 dans l'ensemble et qu'il doit y avoir deux puissances de 3 dans l'ensemble, alors il y a quatre possibilités pour l'ensemble S :

$$S = \{3, 27, 7, 11, 13\}, \{3, 9, 21, 11, 13\}, \{3, 9, 7, 33, 13\}, \{3, 9, 7, 11, 39\}$$

Considérons $45\,045 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Il y a 6 facteurs premiers à répartir entre les cinq entiers impairs qui forment le produit.
Comme deux de ces facteurs premiers sont des 3, ces derniers ne peuvent être chacun un élément individuel de l'ensemble et donc l'un des 3 doit toujours être combiné avec un autre facteur premier, ce qui donne les possibilités suivantes :

$$S = \{9, 5, 7, 11, 13\}, \{3, 15, 7, 11, 13\}, \{3, 5, 21, 11, 13\}, \{3, 5, 7, 33, 13\}, \{3, 5, 7, 11, 39\}$$

Considérons $75\,075 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.
En utilisant un argument semblable à celui que l'on a utilisé dans le cas précédent, on obtient

$$S = \{15, 5, 7, 11, 13\}, \{3, 25, 7, 11, 13\}, \{3, 5, 35, 11, 13\}, \{3, 5, 7, 55, 13\}, \{3, 5, 7, 11, 65\}$$

Enfin, considérons $63\,063 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$. Il y a 6 facteurs premiers à répartir entre les cinq entiers impairs qui forment le produit. Comme le produit ne peut contenir deux 3 ou deux 7, le second 3 et le second 7 doivent être combinés. Il n'y a donc qu'un seul ensemble dans ce cas, à savoir $S = \{3, 7, 21, 11, 13\}$.

Donc, il y a $8 + 1 + 4 + 5 + 5 + 1 = 24$ ensembles possibles.

Réponse : 24

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2022

(10^{e} année – Secondaire IV)

le mercredi 23 février 2022
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 24 février 2022
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $2 + (0 \times 2^2) = 2 + 0 = 2$.

Réponse : (B)

2. Le chiffre des unités de 119 n'est pas pair. Donc, 119 n'est pas un multiple de 2.
Le chiffre des unités de 119 n'est pas 0 ou 5, donc 119 n'est pas un multiple de 5.
Puisque $120 = 3 \times 40$, alors 119 est 1 de moins qu'un multiple de 3. Donc, 119 n'est pas un multiple de 3.
Puisque $110 = 11 \times 10$ et $121 = 11 \times 11$, alors 119 est situé entre deux multiples consécutifs de 11 et n'est donc pas lui-même un multiple de 11.
Finalement, $119 \div 7 = 17$. Donc, 119 est un multiple de 7.

Réponse : (D)

3. Les fractions $\frac{3}{10}$ et $\frac{5}{23}$ sont toutes deux inférieures à $\frac{1}{2}$ (soit le choix (E)). Donc, aucune d'elles ne peut être la plus grande valeur. (On remarque qu'on peut se servir du fait que $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{11{,}5}{23}$ pour comparer ces deux fractions à $\frac{1}{2}$.)
Chacune des fractions $\frac{4}{7}$ et $\frac{2}{3}$ est supérieure à $\frac{1}{2}$. Donc, $\frac{1}{2}$ ne peut être la plus grande valeur.
Donc, la bonne réponse est soit $\frac{4}{7}$ ou $\frac{2}{3}$.
On écrit les deux fractions avec un dénominateur de $3 \times 7 = 21$. On a donc $\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$ et $\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$, d'où on voit que $\frac{2}{3}$ est la plus grande valeur parmi les cinq choix.
(On aurait également pu convertir les fractions en valeurs décimales et les comparer ainsi.)

Réponse : (D)

4. On répète la même séquence de 5 figures pour former la régularité.
C'est-à-dire que les 5^{e}, 10^{e}, 15^{e}, 20^{e} et 25^{e} figures de la régularité correspondent à la dernière figure de la séquence de 5 figures.
Cela signifie que la 22^{e} figure (soit la 2^{e} figure après la 20^{e} figure) correspond à la 2^{e} figure dans la séquence de 5 figures.
Donc, la 22^{e} figure de la régularité est $\square$.

Réponse : (A)

5. On a 5 termes dans l'expression, chacun étant égal à (5×5).
Donc, on peut récrire l'expression sous la forme $5 \times (5 \times 5)$, ce qui est égal à 5×25, soit 125.

Réponse : (E)

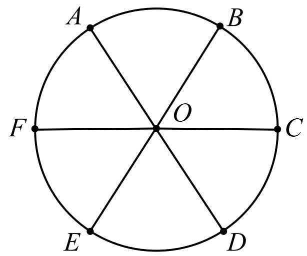
6. Yihana marche en montée exactement quand les segments du diagramme sont croissants (un segment est croissant lorsque sa pente est positive).
Les segments ont des pentes positives entre 0 et 3 minutes et entre 8 et 10 minutes, ce qui correspond respectivement à des durées de 3 minutes et de 2 minutes, soit un total de 5 minutes.

Réponse : (A)

7. *Solution 1*
Puisque les points A, B, C, D, E et F sont également espacés autour du cercle, alors chaque arc de cercle délimité par deux points consécutifs a une longueur égale à $\frac{1}{6}$ de la circonférence du cercle.
Donc, l'arc de cercle délimité par A et C correspond à $\frac{2}{6}$ (soit $\frac{1}{3}$) de la circonférence du cercle.
Puisque l'angle plein au centre d'un cercle a une mesure de 360°, alors $\frac{1}{3}$ d'un tour complet autour du cercle correspond à un angle de $\frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$.
Donc, $\angle AOC = 120^\circ$.

Solution 2

On joint O à chacun des points A, B, C, D, E et F.



Puisque A, B, C, D, E et F sont également espacés autour du cercle, alors tous les arcs de cercle délimités par deux points consécutifs ont des angles au centre de même mesure. C'est-à-dire que

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = \angle FOA$$

Puisque ces 6 angles forment un cercle complet, alors leurs mesures ont une somme de 360°. Donc,

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = \angle FOA = \tfrac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ$$

Cela signifie que $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

Réponse : (D)

8. Puisque le rectangle a une aire de 24 et des côtés dont les longueurs sont des entiers strictement positifs, alors sa longueur et sa largeur doivent être une paire de facteurs positifs de 24.
Donc, on pourrait avoir comme dimensions 24×1 ou 12×2 ou 8×3 ou 6×4.
Comme le périmètre d'un rectangle est égal à 2 fois la somme de la longueur et la largeur, les périmètres possibles sont les suivants :

$$2(24+1) = 50 \qquad 2(12+2) = 28 \qquad 2(8+3) = 22 \qquad 2(6+4) = 20$$

Parmi les choix de réponse, le seul périmètre qui ne figure pas parmi les périmètres ci-dessus est 36, soit le choix (E).

Réponse : (E)

9. D'après la définition, $3\nabla b = \dfrac{3+b}{3-b}$.
En supposant que $b \neq 3$, les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} 3\nabla b &= -4 \\ \frac{3+b}{3-b} &= -4 \\ 3+b &= -4(3-b) \\ 3+b &= -12+4b \\ 15 &= 3b \end{aligned}$$

d'où on a donc $b = 5$.

Réponse : (A)

10. *Solution 1*

Puisque x est égal à 20 % de y, alors $x = \frac{20}{100}y = \frac{1}{5}y$.

Puisque x est égal à 50 % de z, alors $x = \frac{1}{2}z$.

Donc, $\frac{1}{5}y = \frac{1}{2}z$, soit $\frac{2}{5}y = z$.

Donc, $z = \frac{40}{100}y$, d'où z correspond à 40 % de y.

Solution 2

Puisque x est égal à 20 % de y, alors $x = 0{,}2y$.

Puisque x est égal à 50 % de z, alors $x = 0{,}5z$.

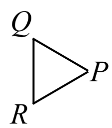
Donc, $0{,}2y = 0{,}5z$, d'où $0{,}4y = z$.

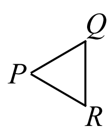
Donc, $z = 0{,}4y$, d'où z correspond à 40 % de y.

RÉPONSE : (D)

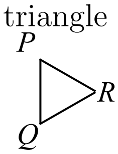
11. Le prix de 250 g de bonbons est de 7,50 \$, ce qui est égal à 750 cents.
Donc, 1 g de bonbons coûte $750 \div 250 = 3$ cents.
Puisque 1,80 \$ est égal à 180 cents, alors on peut acheter $180 \div 3 = 60$ g de bonbons.

RÉPONSE : (C)

12. La position initiale du triangle est 

. Lorsqu'on le retourne tout en gardant le côté QR sur la table, on obtient 

.

Ensuite, lorsqu'on retourne le triangle tout en gardant le côté PR sur la table, on obtient la position finale du triangle, soit 

.

RÉPONSE : (E)

13. Puisque $2 \times 2 \times 2 = 8$, alors un cube avec des côtés de longueur 2 a un volume de 8. (Remarquons également que $\sqrt[3]{8} = 2$.)
Donc, chacun des cubes avec un volume de 8 a une hauteur de 2.
Cela signifie que le grand cube a une hauteur de $2+2 = 4$ et a donc un volume de $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

RÉPONSE : (E)

14. Puisque 100 000 ne contient pas le bloc de chiffres 178, alors chaque entier entre 10 000 et 100 000 qui contient le bloc de chiffres 178 a 5 chiffres.
Un tel entier peut être de la forme $17\,8xy$ ou de la forme $x1\,78y$ ou de la forme $xy\,178$, x et y étant des entiers quelconques.
Le premier chiffre d'un entier de cinq chiffres a 9 valeurs possibles (soit tout chiffre de 1 à 9), tandis que chacun des 4 chiffres suivants a 10 valeurs possibles (soit tout chiffre de 0 à 9).
Cela signifie qu'il y a
– 100 entiers de la forme $17\,8xy$ (x et y ont chacun 10 choix possibles et $10 \times 10 = 100$),
– 90 entiers de la forme $x1\,78y$ (x et y ont chacun, respectivement, 9 et 10 choix possibles et $9 \times 10 = 90$) et
– 90 entiers de la forme $xy\,178$ (x et y ont chacun, respectivement, 9 et 10 choix possibles et $9 \times 10 = 90$).
En tout, il y a donc $100 + 90 + 90 = 280$ entiers entre 10 000 et 100 000 qui contiennent le bloc de chiffres 178.

Réponse : (A)

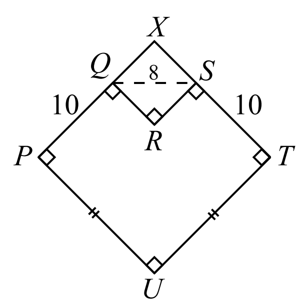
15. Puisque $a + 5 = b$, alors $a = b - 5$.
Puisque $a = b - 5$ et $c = 5 + b$ et $b + c = a$, alors

$$\begin{aligned} b + (5 + b) &= b - 5 \\ 2b + 5 &= b - 5 \\ b &= -10 \end{aligned}$$

(Si $b = -10$, alors $a = b - 5 = -15$ et $c = 5 + b = -5$ et $b + c = (-10) + (-5) = (-15) = a$, ce qu'il fallait.)

Réponse : (C)

16. On prolonge PQ et TS pour qu'ils se touchent au point X.



Puisque le quadrilatère $QRSX$ a trois angles droits (à Q, R et S), alors son quatrième angle, X, est également droit.
Donc, $QRSX$ est un rectangle, d'où on a donc $XS = QR$ et $QX = RS$.
Donc, $PQRSTU$ a un périmètre de

$$\begin{aligned} PQ + QR + RS + ST + TU + UP &= PQ + XS + QX + ST + TU + UP \\ &= (PQ + QX) + (XS + ST) + TU + UP \\ &= PX + XT + TU + UP \end{aligned}$$

ce qui est égal au périmètre du quadrilatère $PXTU$.
Or, le quadrilatère $PXTU$ est un rectangle car il a quatre angles droits.
De plus, $PU = UT$, donc $PXTU$ est un carré et a donc un périmètre égal à $PXTU$

$$4 \times PX = 4 \times (PQ + QX) = 4 \times (10 + QX) = 40 + 4 \times QX$$

Enfin, $QX = PX - PQ = PX - 10 = XT - 10 = XT - ST = XS$. Cela signifie que le triangle QXS est isocèle et rectangle en X.
D'après le théorème de Pythagore, $QX^2 + XS^2 = QS^2$, donc $2 \times QX^2 = 8^2$ ou $QX^2 = 32$.
Puisque $QX > 0$, alors $QX = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
Donc, $PQRSTU$ a un périmètre de $40 + 4 \times 4\sqrt{2} = 40 + 16\sqrt{2} \approx 62{,}6$ (on aurait également pu l'exprimer sous la forme $40 + 4\sqrt{32} \approx 62{,}6$).
Parmi les choix de réponse, ce périmètre est plus près de 63.

Réponse : (C)

17. Zebadiah doit retirer au moins 3 chemises.
S'il retire 3 chemises, 2 d'entre elles pourraient être rouges et 1 pourrait être bleue.
S'il retire 4 chemises, 2 d'entre elles pourraient être rouges et 2 pourraient être bleues.
Par conséquent, s'il retire moins de 5 chemises, il n'est pas certain qu'il puisse retirer 3 chemises de la même couleur ou 3 chemises de couleurs différentes.
Supposons qu'il retire 5 chemises. Si 3 sont de la même couleur, les conditions sont remplies.
S'il n'y a pas 3 chemises de la même couleur parmi les 5 chemises, alors on a au plus 2 de chaque couleur (par exemple, 2 chemises rouges, 2 chemises bleues et 1 chemise verte). Cela signifie qu'il doit retirer des chemises de 3 couleurs, car s'il ne retirait que des chemises de 2 couleurs, il retirerait au plus $2 + 2 = 4$ chemises.
Autrement dit, en retirant 5 chemises, il est garanti d'obtenir soit 3 chemises de la même couleur, soit 3 chemises de couleurs différentes.
Donc, Zebadiah doit retirer au moins 5 chemises.

Réponse : (D)

18. Au début du premier jour, la boîte contient 1 boule noire et 1 boule dorée.
À la fin du premier jour, 2 boules noires et 1 boule dorée sont ajoutées. Donc, il y a 3 boules noires et 2 boules dorées dans la boîte à la fin du premier jour.
À la fin du deuxième jour, $2 \times 2 = 4$ boules noires et $2 \times 1 = 2$ boules dorées sont ajoutées. Donc, il y a 7 boules noires et 4 boules dorées dans la boîte à la fin du deuxième jour.
Dans le tableau ci-dessous, on ajoute 2 boules noires et 1 boule dorée à la fin de chaque jour :

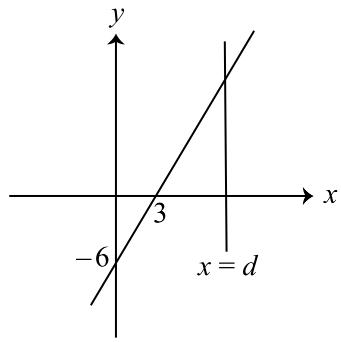
Fin du jour n°	Boules noires	Boules dorées
2	7	4
3	$7 + 4 \times 2 = 15$	$4 + 4 = 8$
4	$15 + 8 \times 2 = 31$	$8 + 8 = 16$
5	$31 + 16 \times 2 = 63$	$16 + 16 = 32$
6	$63 + 32 \times 2 = 127$	$32 + 32 = 64$
7	$127 + 64 \times 2 = 255$	$64 + 64 = 128$

Il y a donc $255 + 128 = 383$ boules dans la boîte à la fin du 7e jour.

Réponse : (E)

19. La droite d'équation $y = 2x - 6$ a pour ordonnée à l'origine -6.
De plus, l'abscisse à l'origine de $y = 2x - 6$ a pour ordonnée $y = 0$, on a donc $0 = 2x - 6$ ou $2x = 6$, d'où $x = 3$.
Donc, le triangle borné par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = 2x - 6$ a une base de 3, une hauteur de 6 et a donc une aire égale à $\frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$.
Puisque cette aire représente le quart de l'aire du triangle borné par l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = 2x - 6$ et la droite verticale d'équation $x = d$, alors l'aire de ce deuxième triangle est égale à 36.

Cela signifie que $x = d$ est situé à droite du point $(3, 0)$ car cette nouvelle aire est plus grande. Autrement dit, $d > 3$.



Le triangle a une base dont la longueur est égale à $d - 3$ et une hauteur égale à $2d - 6$ (puisque la hauteur est mesurée le long de la droite verticale d'équation $x = d$).
Donc, on veut $\frac{1}{2}(d-3)(2d-6) = 36$ ou $(d-3)(d-3) = 36$, soit $(d-3)^2 = 36$.
Puisque $d - 3 > 0$, alors $d - 3 = 6$, d'où $d = 9$.
On aurait pu aussi remarquer que si les aires de deux triangles semblables sont dans un rapport de $4 : 1$, alors les longueurs de deux côtés correspondants dans ces triangles sont dans un rapport de $\sqrt{4} : 1$ ou $2 : 1$.
Puisque les deux triangles sont semblables (tous deux sont rectangles et ont des angles de même mesure au point $(3, 0)$), alors le grand triangle a une base dont la longueur est égale à $2 \times 3 = 6$, donc $d = 3 + 6 = 9$.

Réponse : (A)

20. Puisque $3m^3$ est un multiple de 3, alors $5n^5$ est un multiple de 3.
Puisque 5 n'est pas un multiple de 3 et que 3 est un nombre premier, alors n^5 est un multiple de 3.
Puisque n^5 est un multiple de 3 et que 3 est un nombre premier, alors n est un multiple de 3. Cela signifie que $5n^5$ admet au moins 5 facteurs 3.
Puisque $5n^5$ admet au moins 5 facteurs 3, alors $3m^3$ admet au moins 5 facteurs 3. Cela signifie que m^3 est un multiple de 3, d'où on a donc que m est un multiple de 3.
À l'aide d'une analyse semblable, on voit que m et n sont tous deux des multiples de 5.
Donc, on peut écrire $m = 3^a5^bs$, a, b et s étant des entiers strictement positifs et on peut écrire $n = 3^c5^dt$, c, d et t étant des entiers strictement positifs tels que ni s ni t ne sont des multiples de 3 ou de 5. (Autrement dit, on a regroupé tous les facteurs 3 et 5 dans chacun de m et n.)
À partir de l'équation donnée,

$$\begin{aligned}
3m^3 &= 5n^5 \\
3(3^a5^bs)^3 &= 5(3^c5^dt)^5 \\
3 \times 3^{3a}5^{3b}s^3 &= 5 \times 3^{5c}5^{5d}t^5 \\
3^{3a+1}5^{3b}s^3 &= 3^{5c}5^{5d+1}t^5
\end{aligned}$$

Puisque s et t ne sont pas des multiples de 3 ou 5, on doit avoir $3^{3a+1} = 3^{5c}$ et $5^{3b} = 5^{5d+1}$ et $s^3 = t^5$.
Puisque s et t sont positifs et que m et n doivent être aussi petits que possible, on pose $s = t = 1$, ce qui vérifie $s^3 = t^5$.
Puisque $3^{3a+1} = 3^{5c}$ et $5^{3b} = 5^{5d+1}$, alors $3a + 1 = 5c$ et $3b = 5d + 1$.
Puisque m et n doivent être aussi petits que possible, on veut trouver les plus petits entiers strictement positifs a, b, c, d tels que $3a + 1 = 5c$ et $3b = 5d + 1$.

Lorsque $a = 1$ ou $a = 2$, on ne peut obtenir une valeur de $3a + 1$ qui soit un multiple de 5. Cependant, lorsque $a = 3$, alors $c = 2$.
De même, lorsque $b = 1$, on ne peut obtenir une valeur de $3b$ qui soit égale à $5d + 1$ pour tout entier strictement positif d. Cependant, lorsque $b = 2$, alors $d = 1$.
Donc, les plus petites valeurs possibles de m et n sont $m = 3^3 5^2 = 675$ et $n = 3^2 5^1 = 45$, d'où $m + n = 720$.
(On peut vérifier par substitution que $m = 675$ et $n = 45$ satisfont à l'équation $3m^3 = 5n^5$.)

Réponse : (C)

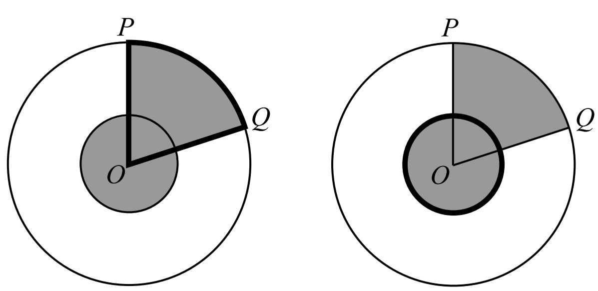
21. Puisque $20x + 11y = 881$, alors $20x = 881 - 11y$ et $11y = 881 - 20x$.
Puisque x est un entier, alors $20x$ est un multiple de 10. Donc, $20x$ a 0 pour chiffre des unités, d'où $881 - 20x$ a donc 1 pour chiffre des unités et $11y$ a 1 pour chiffre des unités.
Puisque $11y$ a 1 pour chiffre des unités, alors y a 1 pour chiffre des unités.
Puisque $20x$ est positif, alors $11y = 881 - 20x$ est inférieur à 881. Cela signifie que $11y < 881$, soit $y < \frac{881}{11} \approx 80{,}1$.
Donc, les valeurs possibles de y sont 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71.
On vérifie chacune des valeurs dans le tableau ci-dessous :

y	$11y = 881 - 20x$	$20x$	x
1	11	870	N'est pas un entier
11	121	760	38
21	231	650	N'est pas un entier
31	341	540	27
41	451	430	N'est pas un entier
51	561	320	16
61	671	210	N'est pas un entier
71	781	100	5

Donc, parmi les valeurs permises de y, la plus grande valeur et la plus petite valeur ont une somme de $11 + 71 = 82$.

Réponse : 82

22. Puisque les deux régions ombrées ont des aires égales, alors lorsqu'on ombre la région non ombrée du petit cercle, on constate que l'aire du secteur entièrement ombré du grand cercle est égale à l'aire du petit cercle.



Le petit cercle a un rayon de 1. Son aire est donc égale à $\pi \times 1^2 = \pi$.
Le grand cercle a un rayon de 3. Son aire est donc égale à $\pi \times 3^2 = 9\pi$.
Cela signifie que l'aire du secteur entièrement ombré du grand cercle est égale à π, d'où on comprend donc que ce secteur représente $\frac{1}{9}$ du grand cercle.
Cela signifie que l'angle POQ doit également représenter $\frac{1}{9}$ d'un angle plein. Donc, $\angle POQ = \frac{1}{9} \times 360° = 40°$.
Donc, $x = 40$.

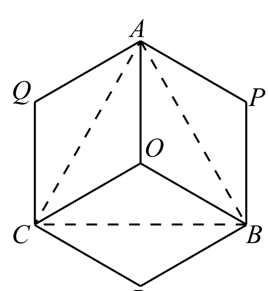
Réponse : 40

23. Supposons qu'André, Boyu, Callista et Diane choisissent, respectivement, les entiers a, b, c et d. Pour chacun de a, b, c et d, on a 9 choix. Donc, le nombre total de quadruplets (a, b, c, d) est égal à $9^4 = 6561$.
Parmi les 9 choix, 5 sont impairs $(1, 3, 5, 7, 9)$ et 4 sont pairs $(2, 4, 6, 8)$.
S'il y a N quadruplets (a, b, c, d) dont la somme des quatre entiers $a + b + c + d$ est paire (c'est-à-dire que la somme de leurs choix est paire), alors la probabilité pour que la somme de leurs quatre entiers soit paire est égale à $\dfrac{N}{6561}$, soit la forme souhaitée.
Donc, on compte le nombre de quadruplets (a, b, c, d) tels que la somme $a + b + c + d$ soit paire.
Parmi les quatre entiers a, b, c, d, on a soit 0, 1, 2, 3, ou 4 de ces entiers qui sont pairs, les entiers restants étant impairs.
Donc, pour a, b, c, d,
– si aucun d'entre eux n'est pair (les quatre sont donc impairs), leur somme sera paire,
– si l'un d'entre eux est pair (trois sont donc impairs), leur somme sera impaire,
– si deux d'entre eux sont pairs (deux sont donc impairs), leur somme sera paire,
– si trois d'entre eux sont pairs (l'un d'eux est donc impair), leur somme sera impaire,
– si les quatre sont pairs (aucun d'eux n'est donc impair), leur somme sera paire,
Donc, on doit compter le nombre de quadruplets (a, b, c, d) dont 0, 2 ou 4 des entiers sont pairs.

Si aucun des entiers n'est pair et que les 4 entiers sont donc impairs, alors il y a 5 choix pour chacun des entiers. Il y a donc $5^4 = 625$ tels quadruplets.
Si les quatre entiers sont pairs et qu'aucun d'entre eux n'est donc impair, alors il y a 4 choix pour chacun des entiers. Il y a donc $4^4 = 256$ tels quadruplets.
Si deux entiers sont pairs et deux entiers sont impairs, alors il y a 4 choix pour chacun des entiers pair, 5 choix pour chacun des entiers impairs et 6 paires d'emplacements possibles pour les entiers pairs (ab, ac, ad, bc, bd, cd). Cela signifie que les entiers impairs sont placés dans les deux emplacements restants après que les emplacements des entiers pairs aient été choisis. Donc, il y a $4^2 \cdot 5^2 \cdot 6 = 2400$ tels quadruplets.
En tout, cela signifie qu'il y a $625 + 256 + 2400 = 3281$ quadruplets. Donc, $N = 3281$.
La somme des carrés des chiffres de N est égale à $3^2 + 2^2 + 8^2 + 1^2 = 9 + 4 + 64 + 1 = 78$.

RÉPONSE : 78

24. Soit O le sommet du cube le plus éloigné de la table.
Soit A, B et C les sommets du cube reliés à O par des arêtes.
Puisque le cube a une longueur d'arête de 8, alors $OA = OB = OC = 8$.
Remarquons que $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 90°$, ce qui signifie que chacun des triangles AOB, AOC et BOC est un triangle rectangle isocèle. On a donc $AB = \sqrt{2}AO = 8\sqrt{2}$, d'où $AB = AC = BC = 8\sqrt{2}$.
Soit P, Q et R les sommets qui complètent les faces carrées $PAOB$, $QAOC$ et $RBOC$.
Vu d'en haut, le cube ressemble à ceci :



Lorsque le soleil est situé directement au-dessus du sommet supérieur, l'ombre du cube ressemble exactement à l'hexagone « plat » $APBRCQ$. En mathématiques, cela est ce qu'on appelle une *projection.*

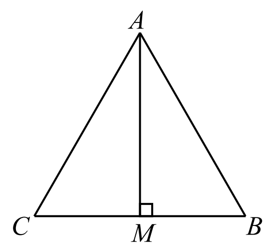
Pour déterminer l'aire de cette figure, il nous faut quelques longueurs. Or, il faut être prudent car certaines des arêtes de la figure ci-dessus ne sont pas « plates ».

On sait que les points A, B et C sont tous situés sur le même plan horizontal et on sait également que $AB = AC = BC = 8\sqrt{2}$. Cela signifie que ces longueurs sont les distances « réelles » entre les points.

On remarque que le quadrilatère plat $PAOB$ est divisé en deux régions de même aire par AB. De même, $QAOC$ est divisé en deux régions de même aire par AC, et $RBOC$ est divisé en deux régions de même aire par BC.

Autrement dit, l'aire du triangle ABC est égale à la moitié de l'aire de l'hexagone $APBRCQ$. Donc, pour trouver l'aire de $APBRCQ$, on double l'aire du triangle ABC.

Il faut donc calculer l'aire du triangle équilatéral ABC. Ce dernier a des côtés de longueur $8\sqrt{2}$. Soit M le milieu de BC. Donc, $BM = CM = 4\sqrt{2}$.



Puisque le triangle ABC est équilatéral, alors AM et BC sont perpendiculaires.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AMC,

$$AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{128 - 32} = \sqrt{96}$$

Donc, l'aire du triangle ABC est égale à

$$\tfrac{1}{2} \cdot CB \cdot AM = \tfrac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{96} = 4\sqrt{192} = 4\sqrt{64 \cdot 3} = 4 \cdot 8\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$$

Cela signifie que l'aire de l'ombre hexagonale est égale à $64\sqrt{3}$.

Puisque cette valeur est exprimée sous la forme $a\sqrt{b}$, a et b étant des entiers strictement positifs et b n'admettant aucun carré parfait supérieur à 1 comme diviseur, alors $a = 64$ et $b = 3$, d'où on a donc $a + b = 67$.

Réponse : 67

25. Examinons d'abord ce qui se passe lorsque $J = 337$.

On commence avec 337 jetons numérotés en ordre de 1 à 337 et disposés en cercle. Soit, $1, 2, 3, \ldots, 335, 336, 337$.

On supprime le premier jeton (1), on se déplace de 2 positions dans le sens des aiguilles d'une montre et on supprime le jeton (3), on se déplace de 2 positions dans le sens des aiguilles d'une montre et on supprime le jeton (5) et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on supprime les jetons 335 et 337.

Il nous reste donc les jetons $2, 4, 6, \ldots, 332, 334, 336$. Ces jetons diffèrent de 2.

Avant de commencer le deuxième tour, on a les jetons $2, 4, 6, \ldots, 332, 334, 336$.

Ces jetons diffèrent de 2.

Puisque le dernier jeton (337) a été supprimé lors du premier tour, le premier jeton n'est pas supprimé lors du deuxième tour, ce qui signifie qu'on doit supprimer un jeton sur deux en commençant par le jeton 4.

Cela signifie que les jetons restants sont $2, 6, 10, \ldots, 326, 330, 334$. Ces jetons diffèrent de 4.

Avant de commencer le troisième tour, on a les jetons $2, 6, 10, \ldots, 326, 330, 334$.
Ces jetons diffèrent de 4.
Puisque le dernier jeton (336) a été supprimé lors du tour précédent, on doit supprimer un jeton sur deux en commençant par le jeton 6.
Cela signifie que les jetons restants sont $2, 10, 18, \ldots, 314, 322, 330$. Ces jetons diffèrent de 8.

Avant de commencer le quatrième tour, on a les jetons $2, 10, 18, \ldots, 314, 322, 330$.
Ces jetons diffèrent de 8.
Puisque le dernier jeton (334) a été supprimé lors du tour précédent, on doit supprimer un jeton sur deux en commençant par le jeton 10.
Cela signifie que les jetons restants sont $2, 18, 34, \ldots, 290, 306, 322$. Ces jetons diffèrent de 16.

Avant de commencer le cinquième tour, on a les jetons $2, 18, 34, \ldots, 290, 306, 322$.
Ces jetons diffèrent de 16.
Puisque le dernier jeton (330) a été supprimé lors du tour précédent, on doit supprimer un jeton sur deux en commençant par le jeton 18.
Cela signifie que les jetons restants sont $2, 34, 66, 98, 130, 162, 194, 226, 258, 290, 322$. Ces jetons diffèrent de 32.

Avant de commencer le sixième tour, on a les jetons $2, 34, 66, 98, 130, 162, 194, 226, 258, 290, 322$.
Ces jetons diffèrent de 32.
Puisque l'avant-dernier jeton (306) a été supprimé lors du tour précédent, on doit supprimer un jeton sur deux en commençant par le jeton 2.
Cela signifie que les jetons restants sont $34, 98, 162, 226, 290$. Ces jetons diffèrent de 64.

Avant de commencer le septième tour, on a les jetons $34, 98, 162, 226, 290$.
Ces jetons diffèrent de 64.
Puisque le dernier jeton (322) a été supprimé lors du tour précédent, on doit supprimer un jeton sur deux en commençant par le jeton 98.
Cela signifie que les jetons restants sont $34, 162, 290$. Ces jetons diffèrent de 128.

Au huitième tour, on doit supprimer un jeton sur deux en commençant par le jeton 34. Cela signifie qu'il ne reste plus que le jeton 162.

Cela signifie que la plus petite valeur possible de J est d'au moins 162 et d'au plus 337.

Ensuite, on va démontrer que le dernier jeton restant porte également le nombre 162 lorsque $J = 209$. (Ici, la manière dont on *découvre* la réponse est très probablement différente de la manière dont on la *justifie*.)
Avant le premier tour :

$$1, 2, 3, \ldots, 207, 208, 209$$

Après le premier tour (en supprimant un jeton sur deux en commençant par le jeton 1) :

$$2, 4, 6, \ldots, 204, 206, 208$$

Après le deuxième tour (en supprimant un jeton sur deux en commençant par le jeton 4) :

$$2, 6, 10, \ldots, 198, 202, 206$$

Après le troisième tour (en supprimant un jeton sur deux en commençant par le jeton 6) :

$$2, 10, 18, \ldots, 186, 194, 202$$

Après le quatrième tour (en supprimant un jeton sur deux en commençant par le jeton 10) :

$$2, 18, 34, \dots, 162, 178, 194$$

Après le cinquième tour (en supprimant un jeton sur deux en commençant par le jeton 18) :

$$2, 34, 66, 98, 130, 162, 194$$

Après le sixième tour (en supprimant un jeton sur deux en commençant par le jeton 2) :

$$34, 98, 162$$

Après le septième tour (en supprimant le jeton 98) :

$$34, 162$$

Il restera donc le jeton 162 après le huitième tour (car le jeton 34 aura été supprimé).
Donc, lorsque $J = 209$ et lorsque $J = 337$, le dernier jeton est 162.

Enfin on va montrer que si l'on commence avec J jetons et que le dernier jeton est 162, alors $J \geq 209$, d'où on a alors que la plus petite valeur de J est 209.
Supposons que $J \leq 209$ et que le jeton restant après le dernier tour est celui portant le nombre 162.
Avant chaque tour, les jetons restants diffèrent par une puissance de 2 ; car on supprime un jeton sur deux d'une liste qui diffère de 1, puis un jeton sur deux d'une liste qui diffère de 2 et ainsi de suite.
Les plus petites puissances de 2 sont 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.

Puisqu'il reste 162 après le dernier tour (qui s'avérera être le huitième tour), les jetons restants devaient différer de 128 avant le huitième tour et étaient donc 34, 162. (Puisque $J \leq 209$, alors on ne pouvait avoir un jeton portant le nombre $162+128 = 290$.) De plus, si les jetons différaient de 64 avant le huitième tour, il y aurait eu les jetons 34 et 98 qui auraient tous deux été supprimés.
Donc, avant le huitième tour, les jetons étaient 34, 162. Le jeton 34 a été supprimé après le huitième tour.

Avant le septième tour, les jetons différaient de 64.
Donc, ces jetons étaient 34, 98, 162. On remarque que le dernier jeton n'a pas été supprimé lors de ce tour et que le premier jeton est donc supprimé lors du huitième tour, comme prévu.
De plus, on ne pouvait avoir un jeton portant le nombre $162 + 64 = 226$ puisque $J \leq 209$.

Avant le sixième tour, les jetons différaient de 32.
Donc, ces jetons étaient 2, 34, 66, 98, 130, 162, 194. Le dernier jeton n'aurait pas pu être 162 puisque le dernier jeton doit être supprimé lors de ce tour afin que le deuxième jeton (98) soit supprimé lors du septième tour. Donc, le dernier jeton doit être $162 + 32 = 194$. (Remarquons qu'on a déjà rejeté 226.)

Avant le cinquième tour, les jetons différaient de 16.
Puisque le premier jeton (2) a été supprimé lors du sixième tour, le dernier jeton n'est pas supprimé lors du cinquième tour.
Donc, avant ce tour, on avait les jetons suivants :

$$2, 18, 34, 50, 66, 82, 98, 114, 130, 146, 162, 178, 194$$

Lors de ce tour, 178 est le dernier jeton que l'on supprime. (Remarquons que $194+16 = 210$ est trop grand.)

Avant le quatrième tour, les jetons différaient de 8.
Puisque le deuxième jeton (18) a été supprimé lors du cinquième tour, le dernier jeton est supprimé lors du quatrième tour.
Donc, avant ce tour, on avait les jetons suivants :

$$2, 10, 18, \dots, 162, 170, 178, 186, 194, 202$$

On doit ajouter le jeton 202 puisque le jeton 194 est là au cinquième tour. (Remarquons que $202 + 8 = 210$ est trop grand.)

Avant le troisième tour, les jetons différaient de 4.
Puisque le deuxième jeton (10) a été supprimé lors du quatrième tour, le dernier jeton est supprimé lors du troisième tour.
Donc, avant ce tour, on avait les jetons suivants :

$$2, 6, 10, 14, 18, \dots, 186, 190, 194, 198, 202, 206$$

On doit ajouter le jeton 206 puisque le jeton 202 est là au quatrième tour. (Remarquons que $206 + 4 = 210$ est trop grand.)

Avant le deuxième tour, les jetons différaient de 2.
Puisque le deuxième jeton (6) a été supprimé lors du troisième tour, le dernier jeton est supprimé lors du deuxième tour.
Donc, avant ce tour, on avait les jetons suivants :

$$2, 4, 6, 8, \dots, 198, 200, 202, 204, 206, 208$$

On doit ajouter le jeton 208 puisque le jeton 206 est là au troisième tour. (Remarquons que $208 + 2 = 210$ est trop grand.)

Avant le premier tour, les jetons différaient de 1.
Puisque le deuxième jeton (4) a été supprimé lors du deuxième tour, le dernier jeton est supprimé lors du premier tour.
Donc, avant ce tour, on avait les jetons suivants :

$$1, 2, 3, 4, \dots, 204, 205, 206, 207, 208, 209$$

On doit ajouter le jeton 209 puisque le jeton 208 est là au deuxième tour. (Remarquons que $209 + 1 = 210$ est trop grand.)

Donc, on doit avoir au moins 209 jetons pour que le dernier jeton soit 162. Donc, la plus petite valeur possible de J est 209, dont les deux chiffres les plus à droite sont 09.

Réponse : 09

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2021

(10e année – Secondaire IV)

le mardi 23 février 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 24 février 2021
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a $\dfrac{2+4}{1+2} = \dfrac{6}{3} = 2$.

Réponse : (C)

2. Puisque $542 \times 3 = 1626$, le résultat doit avoir 6 pour chiffre des unités.
Remarquons que le chiffre des unités d'un produit ne dépend que des chiffres des unités des nombres multipliés. Ainsi, on pourrait tout simplement obtenir le chiffre des unités en multipliant 2×3.

Réponse : (E)

3. Les cases du haut, de la gauche et du bas contribuent chacune 3 côtés de longueur 1 au périmètre.
La case restante contribue 1 côté de longueur 1 au périmètre.
Donc, le périmètre est égal à $3 \times 3 + 1 \times 1 = 10$.
Par ailleurs, le périmètre comprend 3 côtés droits verticaux, 3 côtés gauches verticaux, 2 côtés supérieurs horizontaux et 2 côtés inférieurs horizontaux, d'où on a donc un périmètre de $3 + 3 + 2 + 2 = 10$.

Réponse : (A)

4. Si $3x + 4 = x + 2$, alors $3x - x = 2 - 4$, d'où $2x = -2$ ou $x = -1$.

Réponse : (D)

5. *Solution 1*
10 % de 500 est égal à $\frac{1}{10}$ ou 0,1 de 500, soit à 50.
100 % de 500 est égal à 500.
Donc, 110 % de 500 est égal à $500 + 50$, soit à 550.

Solution 2
110 % de 500 est égal à $\dfrac{110}{100} \times 500 = 110 \times 5 = 550$.

Réponse : (E)

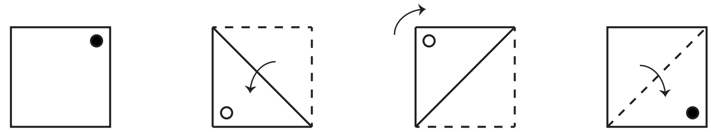
6. Puisque Eugène a nagé trois fois et qu'il a nagé pendant une durée moyenne de 34 minutes, il a nagé pendant $3 \times 34 = 102$ minutes en tout.
Puisqu'il a nagé pendant 30 minutes lundi et 45 minutes mardi, il a dû nager pendant $102 - 30 - 45 = 27$ minutes dimanche.

Réponse : (C)

7. Si $x = 1$, alors $x^2 = 1$ et $x^3 = 1$, donc $x^3 = x^2$.
Si $x > 1$, alors x^3 est égal à x fois x^2 ; puisque $x > 1$, alors x fois x^2 est supérieur à x^2, donc $x^3 > x^2$.
Donc, si x est positif et vérifie $x^3 < x^2$, alors on doit avoir $0 < x < 1$. On remarque que si $0 < x < 1$, alors x, x^2 et x^3 sont tous positifs et $x^3 = x^2 \times x < x^2 \times 1 = x^2$.
Parmi les choix de réponse, seul $x = \frac{3}{4}$ vérifie $0 < x < 1$. Donc, (B) est le bon choix de réponse.
Par ailleurs, on peut poser chacune des valeurs de x dans l'inéquation afin de vérifer qu'il s'agit de la seule bonne réponse.

Réponse : (B)

8. On dessine un point non ombré pour représenter l'emplacement du point lorsqu'il se trouve de l'autre côté de la feuille de papier. Donc, le point se déplace comme suit :

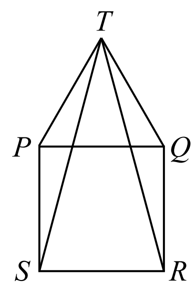


RÉPONSE : (E)

9. Soit x l'âge actuel de Jeanne.
Il y a deux ans, Jeanne avait $x - 2$ ans.
Dans 12 ans, Jeanne aura $x + 12$ ans.
D'après l'énoncé, $x + 12 = 8(x - 2)$, d'où $x + 12 = 8x - 16$ ou $7x = 28$, soit $x = 4$.
On peut vérifier notre réponse : si Jeanne a 4 ans maintenant, donc elle avait 2 ans il y a 2 ans et elle aura 16 ans dans 12 ans ; puisque $16 = 2 \times 8$, on a donc la bonne réponse.

RÉPONSE : (A)

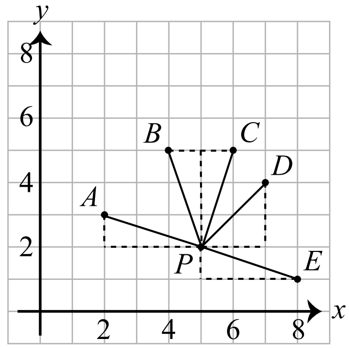
10. On joint S et T ainsi que R et T.



Puisque $PQRS$ est un carré, alors $\angle SPQ = 90°$.
Puisque le triangle PTQ est équilatéral, alors $\angle TPQ = 60°$.
Donc, $\angle SPT = \angle SPQ + \angle TPQ = 90° + 60°$.
Puisque $PQRS$ est un carré, alors $SP = PQ$.
Puisque le triangle PTQ est équilatéral, alors $TP = PQ$.
Puisque $SP = PQ$ et que $TP = PQ$, alors $SP = TP$, donc le triangle SPT est isocèle.
Donc, $\angle PTS = \frac{1}{2}(180° - \angle SPT) = \frac{1}{2}(180° - 150°) = 15°$.
De la même manière, on peut démontrer que $\angle QTR = 15°$.
Cela signifie que $\angle STR = \angle PTQ - \angle PTS - \angle QTR = 60° - 15° - 15° = 30°$.

RÉPONSE : (D)

11. *Solution 1*
On peut atteindre chacun des points A, B, C et E à partir du point P en se déplaçant de 3 unités dans l'une des directions x ou y puis de 1 unité dans l'autre direction.
D'après le théorème de Pythagore, la distance de P à chacun de ces points est égale à $\sqrt{3^2+1^2}$ ou $\sqrt{10}$.



Donc, le point D est celui qui se trouve à une distance différente de P que les autres points.

Solution 2
Les 6 points ont pour coordonnées $A(2,3)$, $B(4,5)$, $C(6,5)$, $D(7,4)$, $E(8,1)$, $P(5,2)$.
Donc, les distances de P à chacun des cinq autres points sont :

$$\begin{aligned}
PA &= \sqrt{(5-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10} \\
PB &= \sqrt{(5-4)^2+(2-5)^2} = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10} \\
PC &= \sqrt{(5-6)^2+(2-5)^2} = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10} \\
PD &= \sqrt{(5-7)^2+(2-4)^2} = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} \\
PE &= \sqrt{(5-8)^2+(2-1)^2} = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}
\end{aligned}$$

On voit donc que le point D est celui qui se trouve à une distance différente de P que les autres points.

Réponse : (D)

12. Puisque $x=2$ et $y=x^2-5$, alors $y=2^2-5=4-5=-1$.
Puisque $y=-1$ et $z=y^2-5$, alors $z=(-1)^2-5=1-5=-4$.

Réponse : (E)

13. Puisque l'angle PQR est un angle plat, alors

$$x^\circ + y^\circ + x^\circ + y^\circ + x^\circ = 180^\circ$$

d'où $3x+2y=180$.
Puisque $x+y=76$ et $2x+2y+x=180$, alors $2(76)+x=180$ ou $x=180-152=28$.

Réponse : (A)

14. *Solution 1*
Pour déterminer l'abscisse à l'origine de la droite initiale, on pose $y = 0$ pour obtenir $0 = 2x - 6$ ou $2x = 6$, soit $x = 3$.
Lorsque la droite subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, son abscisse à l'origine subit cette réflexion, d'où l'image a donc une abscisse à l'origine de $x = -3$.

Solution 2
Lorsqu'une droite subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, sa pente change de signe (c.-à-d. qu'elle est multipliée par -1).
Lorsqu'une droite subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, son ordonnée à l'origine (qui est située sur l'axe des ordonnées) ne change pas.
Donc, lorsque la droite d'équation $y = 2x - 6$ subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, l'image est la droite d'équation $y = -2x - 6$.
Pour déterminer l'abscisse à l'origine de cette droite, on pose $y = 0$ pour obtenir $0 = -2x - 6$ ou $2x = -6$, soit $x = -3$.

Réponse : (D)

15. Amélie a acheté $15n$ ananas qu'elle a ensuite vendus.
Puisqu'elle a acheté les ananas en groupes de 3, elle a acheté $\dfrac{15n}{3} = 5n$ groupes de 3 ananas.
Puisqu'elle a payé les ananas au prix de 2 \$ les trois, elle a dépensé $2\ \$ \times 5n = 10n\ \$$.
Puisqu'elle a vendu les ananas en groupes de 5, elle a vendu $\dfrac{15n}{5} = 3n$ groupes de 5 ananas.
Puisqu'elle a vendu les ananas au prix de 4 \$ les cinq, elle a gagné $4\ \$ \times 3n = 12n\ \$$.
Donc, en fonction de n, Amélie a réalisé un profit de $12n\ \$ - 10n\ \$ = 2n\ \$$.
Étant donné qu'elle a réalisé un profit de 100 \$, on a $2n\ \$ = 100\ \$$, d'où $2n = 100$ ou $n = 50$.

Réponse : (C)

16. D'après les lois des exposants, on a $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 3^x \cdot 9$.
Puisque $3^x = 5$, alors $3^{x+2} = 3^x \cdot 9 = 5 \cdot 9 = 45$.

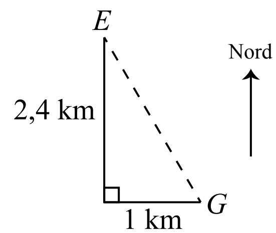
Réponse : (E)

17. On procède à rebours.
Il reste 1 bonbon à la fin du cinquième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{5}{6}$ des bonbons au cinquième jour, le bonbon à la fin du cinquième jour représente $\frac{1}{6}$ des bonbons restants à la fin du quatrième jour.
Donc, il restait $6 \times 1 = 6$ bonbons à la fin du quatrième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{4}{5}$ des bonbons au quatrième jour, ces 6 bonbons représentent $\frac{1}{5}$ des bonbons restants à la fin du troisième jour.
Donc, il restait $5 \times 6 = 30$ bonbons à la fin du troisième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{3}{4}$ des bonbons au troisième jour, ces 30 bonbons représentent $\frac{1}{4}$ des bonbons restants à la fin du deuxième jour.
Donc, il restait $4 \times 30 = 120$ bonbons à la fin du deuxième jour.
Puisque l'on a mangé $\frac{2}{3}$ des bonbons au deuxième jour, ces 120 bonbons représentent $\frac{1}{3}$ des bonbons restants à la fin du premier jour.
Donc, il restait $3 \times 120 = 360$ bonbons à la fin du premier jour.

Puisque l'on a mangé $\frac{1}{2}$ des bonbons au premier jour, ces 360 bonbons représentent $\frac{1}{2}$ des bonbons que contenait le sac initialement.
Donc, il y avait $2 \times 360 = 720$ bonbons dans le sac avant le premier jour.

Réponse : (B)

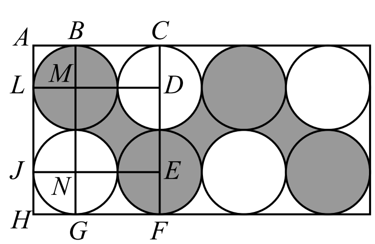
18. Pendant les 12 premières minutes, Elina court vers le nord tandis que Gustavo marche vers l'est.
Puisqu'il y a soixante minutes dans une heure, une durée de douze minutes correspond à $\frac{1}{5}$ d'une heure.
Lorsque Elina court à une vitesse de 12 km/h pendant $\frac{1}{5}$ d'une heure, elle parcourt $12 \text{ km/h} \times \frac{1}{5} \text{ h} = 2{,}4$ km vers le nord.
Lorsque Gustavo marche à une vitesse de 5 km/h pendant $\frac{1}{5}$ d'une heure, il parcourt $5 \text{ km/h} \times \frac{1}{5} \text{ h} = 1$ km vers l'est.
Rendus là, Elina et Gustavo changent de direction et se dirigent directement l'un vers l'autre.



On peut utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer la distance qui les sépare au point où ils changent de direction : $\sqrt{(2{,}4 \text{ km})^2 + (1 \text{ km})^2} = 2{,}6$ km.
Puisque Elina et Gustavo se dirigent directement l'un vers l'autre, toujours à 12 km/h et à 5 km/h respectivement, ils réduisent la distance entre eux à une vitesse de $12 \text{ km/h} + 5 \text{ km/h} = 17$ km/h.
Donc, à partir du point où ils commencent à se diriger directement l'un vers l'autre, il leur faut $\dfrac{2.6 \text{ km}}{17 \text{ km/h}} \approx 0{,}153$ h pour se rejoindre.
Puisqu'il y a soixante minutes dans une heure, une durée de 0,153 heures est à peu près égale à 9,18 minutes.
Étant donné que Elina et Gustavo quittent l'école Cayley à 15 h et qu'ils voyagent pendant douze minutes vers le nord et vers l'est puis pendant neuf minutes l'un vers l'autre, ils se recontreront à nouveau vers 15 h 21.

Réponse : (E)

19. Chacun des quatre cercles ombrés est de rayon 1 et a donc une aire égale à $\pi \cdot 1^2$, soit π.
Ensuite, considérons l'un des trois espaces. Par symétrie, chacun des trois espaces a la même aire.
Parmi les trois espaces, considérons celui le plus à gauche.
On joint par des segments les centres des cercles délimitant l'espace de manière à former un quadrilatère. On joint également les centres de ces cercles aux points où ces cercles touchent les côtés du rectangle.



Ce quadrilatère est un carré ayant des côtés de longueur 2.
Ces côtés sont de longueur 2 car chacun de MD, DE, EN et NM est égal à la somme des longueurs de deux rayons, soit 2.
On démontre ensuite que les angles de $DMNE$ ont chacun une mesure de 90°.
Considérons le quadrilatère $ABML$. L'angle A a une mesure de 90° puisque la forme la plus grande est un rectangle. Les angles B et L ont tous deux des mesures de 90° puisque les rayons sont perpendiculaires aux tangentes à leurs points de tangence. Donc, $ABML$ a trois angles dont chacun a une mesure de 90°, cela signifie que son quatrième angle doit également avoir une mesure de 90°.
Considérons le quadrilatère $BCDM$. Les angles B et C ont tous deux des mesures de 90°. Puisque $BM = CD = 1$, cela signifie que $BCMD$ est un rectangle.
De la même manière, on peut voir que $JNGH$ est un carré tandis que $MLJN$ est un rectangle.
Considérons finalement $DMNE$. Au sommet M, les trois angles à l'extérieur de $DMNE$ ont chacun une mesure de 90°, d'où on a donc que l'angle à M situé à l'intérieur de $DMNE$ a une mesure de 90°.
De même, l'angle à N situé à l'intérieur de $DMNE$ a une mesure de 90°.
Puisque ces angles ont tous deux une mesure de 90° et que $MD = NE = 2$, alors $DMNE$ est un rectangle. Puisque ses quatre côtés ont chacun une longueur de 2, alors ce rectangle doit être un carré.

L'aire de l'espace délimité par les quatre cercles est donc égale à l'aire du carré moins l'aire des quatre secteurs de cercle à l'intérieur du carré. En fait, chacun de ces secteurs de cercle est le quart d'un cercle de rayon 1 car chacun a un angle au centre dont la mesure est de 90°.
Donc, l'aire de l'espace est égale à $2^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2$, soit $4 - \pi$.
Donc, l'aire totale de la région ombrée est égale à $4\pi + 3(4 - \pi) = 4\pi + 12 - 3\pi = 12 + \pi$, ce qui est à peu près égal à 15,14.
Parmi les choix de réponse, 15 est le choix le plus près.

Réponse : (D)

20. Un entier est divisible à la fois par 12 et par 20 lorsqu'il est exactement divisible par le plus petit commun multiple de 12 et 20.
Les premiers multiples positifs de 20 sont 20, 40, 60. Puisque 60 est divisible par 12 et que ni 20 ni 40 ne sont divisibles par 12, alors 60 est le plus petit commun multiple de 12 et 20.
Puisque $60 \cdot 16 = 960$ et $60 \cdot 17 = 1020$, le plus petit multiple de 60 ayant quatre chiffres est $60 \cdot 17$.
Puisque $60 \cdot 166 = 9960$ et $60 \cdot 167 = 10\,020$, le plus grand multiple de 60 ayant quatre chiffres est $60 \cdot 166$.
Cela veut dire qu'il y a $166 - 17 + 1 = 150$ multiples de 60 ayant quatre chiffres.
Il faut maintenant retirer les multiples de 60 qui sont également des multiples de 16.
Puisque 240 est le plus petit commun multiple de 60 et 16, il faut retirer les multiples de 240 ayant quatre chiffres.
Puisque $240 \cdot 4 = 960$ et $240 \cdot 5 = 1200$, le plus petit multiple de 240 ayant quatre chiffres est $240 \cdot 5$.
Puisque $240 \cdot 41 = 9840$ et $240 \cdot 42 = 10\,080$, le plus grand multiple de 240 ayant quatre chiffres est $240 \cdot 41$.
Cela veut dire qu'il y a $41 - 5 + 1 = 37$ multiples de 240 ayant quatre chiffres.
Donc, il y a $150 - 37 = 113$ entiers strictement positifs de quatre chiffres qui sont divisibles à la fois par 12 et par 20 mais qui ne sont pas divisibles par 16.

Réponse : (B)

21. On considère d'abord les couples d'entiers donnés dont la somme est un troisième entier figurant dans cette même liste. En commençant par les plus petits couples possibles, on a :

$$4 + 27 = 31 \qquad 12 + 15 = 27 \qquad 12 + 27 = 39$$

Il n'y a aucun autre couple d'entiers dont la somme est un troisième entier figurant dans cette même liste.
Cela signifie que chacune des trois sommes du problème doit être l'une des trois sommes ci-dessus.
Le seul entier qui parait trois fois dans les sommes ci-dessus est 27.
La seule variable qui parait trois fois dans les sommes de l'énoncé est c.
Donc, $c = 27$.
Cela signifie également que la somme $a + b = c$ doit être la somme $12 + 15 = 27$.
Puisque 12 parait dans deux sommes et 15 non, alors $a = 15$ et $b = 12$.
En faisant correspondre les valeurs que l'on connaît avec les équations que l'on a, on obtient :

$$\begin{array}{lr} a + b = c & 15 + 12 = 27 \\ b + c = d & 12 + 27 = 39 \\ c + e = f & 27 + 4 = 31 \end{array}$$

Donc, $a + c + f = 15 + 27 + 31 = 73$.

Réponse : (C)

22. Soit n l'entier dans le coin inférieur gauche.
Dans ce cas, les entiers dans la première colonne ont une somme de $64 + 70 + n$ ou $n + 134$.
Donc, les entiers le long de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont également une somme de $n + 134$.
D'après la rangée du haut, on a que l'entier en haut à droite est égal à $(n + 134) - 64 - 10$ ou $n + 60$.
D'après la diagonale nord-est, on a que l'entier au centre est égal à $(n + 134) - n - (n + 60)$ ou $74 - n$.
D'après la deuxième rangée, on a que l'entier du milieu dans la colonne de droite est égal à $(n + 134) - 70 - (74 - n)$ ou $2n - 10$.
D'après la diagonale sud-est, on a que l'entier en bas à droite est égal à $(n+134)-64-(74-n)$ ou $2n - 4$.
D'après la troisième rangée, on a que l'entier au centre est égal à $(n + 134) - n - (2n - 4)$.
Donc, $x = (n + 134) - n - (2n - 4) = 138 - 2n$.

64	10	$n + 60$
70	$74 - n$	$2n - 10$
n	$138 - 2n$	$2n - 4$

D'après la troisième colonne,

$$\begin{aligned} (n + 60) + (2n - 10) + (2n - 4) &= n + 134 \\ 5n + 46 &= n + 134 \\ 4n &= 88 \\ n &= 22 \end{aligned}$$

Donc, $x = 130 - 2n = 130 - 44 = 94$. On peut voir la grille remplie ci-contre :

64	10	82
70	52	34
22	94	40

Réponse : (E)

23. Après deux lancers chacun, Robbie a un score de 8 tandis que Francine a un score de 10. Donc, afin que Robbie soit vainqueur (autrement dit, afin qu'il ait le score le plus élevé des deux), le nombre qu'il obtient au troisième lancer doit être 3 de plus que le nombre qu'obtient Francine.
Si Robbie lance un 1, un 2 ou un 3, son lancer ne peut être 3 de plus que celui de Francine.
Si Robbie lance un 4 et qu'il est vainqueur, cela signifie que Francine a lancé un 1.
Si Robbie lance un 5 et qu'il est vainqueur, cela signifie que Francine a lancé soit un 1 ou un 2.
Si Robbie lance un 6 et qu'il est vainqueur, cela signifie que Francine a lancé soit un 1, un 2 ou un 3.
On a donc les combinaisons possibles de lancers telles que Robbie soit vainqueur. On doit donc calculer les probabilités.
Remarquons que le dé que lancent Robbie et Francine est un dé particulier à six faces.
Soit p la probabilité d'obtenir un 1.
D'après l'énoncé du problème, la probabilité d'obtenir un 2 est égale à $2p$, la probabilité d'obtenir un 3 est égale à $3p$ et les probabilités d'obtenir un 4, un 5 et un 6 sont respectivement égales à $4p$, $5p$ et $6p$.
Puisque les probabilités d'obtenir un 1, un 2, un 3, un 4, un 5 ou un 6 ont une somme de 1, alors on a l'équation $p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$, d'où $21p = 1$ ou $p = \frac{1}{21}$.
Donc, la probabilité que Robbie et Francine lancent respectivement un 4 et un 1 est égale au produit des probabilités de chacun de ces événements, ce qui est égal à $\frac{4}{21} \cdot \frac{1}{21}$.
De plus, la probabilité que Robbie lance un 5 et que Francine lance un 1 ou un 2 est égale à $\frac{5}{21} \cdot \frac{1}{21} + \frac{5}{21} \cdot \frac{2}{21}$.
Enfin, la probabilité que Robbie lance un 6 et que Francine lance un 1, un 2 ou un 3 est égale à

$$\frac{6}{21} \cdot \frac{1}{21} + \frac{6}{21} \cdot \frac{2}{21} + \frac{6}{21} \cdot \frac{3}{21}$$

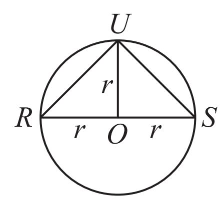
Donc, la probabilité que Robbie soit vainqueur est égale à

$$\frac{4}{21} \cdot \frac{1}{21} + \frac{5}{21} \cdot \frac{1}{21} + \frac{5}{21} \cdot \frac{2}{21} + \frac{6}{21} \cdot \frac{1}{21} + \frac{6}{21} \cdot \frac{2}{21} + \frac{6}{21} \cdot \frac{3}{21} = \frac{4+5+10+6+12+18}{21 \cdot 21} = \frac{55}{441}$$

Cette fraction est irréductible car $55 = 5 \cdot 11$ et $441 = 3^2 \cdot 7^2$.
Lorsqu'on exprime cette fraction sous la forme souhaitée, on a que $r = 55$ et que $s = 41$, d'où $r + s = 96$.

Réponse : (A)

24. Soit O le centre de la base circulaire supérieure et r le rayon du cylindre.
Il faut déterminer la valeur de QT^2.
Puisque RS est situé directement au-dessus de PQ, alors RP et PQ sont perpendiculaires.
Cela signifie que le triangle TPQ est rectangle en P.
Puisque PQ est un diamètre, alors $PQ = 2r$.
D'après le théorème de Pythagore, $QT^2 = PT^2 + PQ^2 = n^2 + (2r)^2 = n^2 + 4r^2$.
Il faut donc déterminer les valeurs de n et r ; ce que l'on va faire à l'aide des renseignements fournis quant à QU et UT dans l'énoncé du problème.
On joint U à O.
Puisque U est situé à mi-chemin entre R et S, alors les arcs RU et US sont chacun un quart du cercle qui délimite la face supérieure du cylindre.
Cela signifie que $\angle UOR = \angle UOS = 90°$.



On applique le théorème de Pythagore aux triangles UOR et UOS (qui sont tous deux rectangles en O) pour obtenir

$$UR^2 = UO^2 + OR^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 \qquad \text{et} \qquad US^2 = 2r^2$$

Puisque RP et QS sont tous deux perpendiculaires à la face supérieure du cylindre, on peut appliquer le théorème de Pythagore aux triangles TRU et QSU pour obtenir

$$QU^2 = QS^2 + US^2 = m^2 + 2r^2$$
$$UT^2 = TR^2 + UR^2 = (PR - PT)^2 + 2r^2 = (QS - n)^2 + 2r^2 = (m - n)^2 + 2r^2$$

Puisque $QU = 9\sqrt{33}$, alors $QU^2 = 9^2 \cdot 33 = 2673$.
Puisque $UT = 40$, alors $UT^2 = 1600$.
Donc,

$$m^2 + 2r^2 = 2673$$
$$(m - n)^2 + 2r^2 = 1600$$

On développe les équations équivalentes suivantes en soustrayant la deuxième équation de la première :

$$m^2 - (m - n)^2 = 1073$$
$$m^2 - (m^2 - 2mn + n^2) = 1073$$
$$2mn - n^2 = 29 \cdot 37$$
$$n(2m - n) = 29 \cdot 37$$

Puisque m et n sont des entiers, alors $2m - n$ est un entier. Donc, n et $2m - n$ est un couple de facteurs de $29 \cdot 37 = 1073$.
Puisque 29 et 37 sont des nombres premiers, l'entier 1073 n'a que quatre diviseurs positifs, soit 1, 29, 37, 1073.

D'où les possibilités suivantes :

n	$2m-n$	$m = \frac{1}{2}((2m-n)+n)$
1	1073	537
29	37	33
37	29	33
1073	1	537

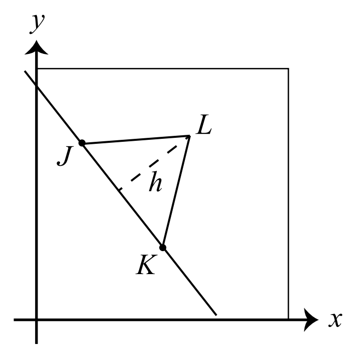
Puisque $m > n$, alors n ne peut être 37 ou 1073.
Puisque $QU > QS$, alors $m < 9\sqrt{33} \approx 51{,}7$.
D'où on a donc $n = 29$ et $m = 33$.
Puisque $(m-n)^2 + 2r^2 = 1600$, on obtient $2r^2 = 1600 - (m-n)^2 = 1600 - 4^2 = 1584$. Donc,

$$QT^2 = n^2 + 4r^2 = 29^2 + 2(2r^2) = 841 + 3168 = 4009$$

Lorsque l'entier égal à QT^2 est divisé par 100, le reste est 9.

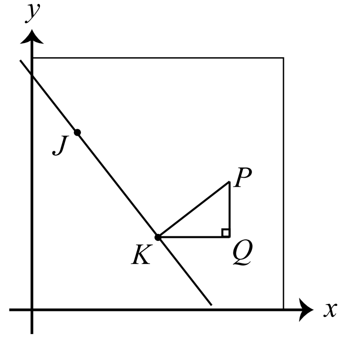
Réponse : (C)

25. La distance entre $J(2,7)$ et $K(5,3)$ est égale à $\sqrt{(2-5)^2+(7-3)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.
Donc, si l'on considère le triangle JKL comme ayant JK pour base et h pour hauteur, alors on veut $\frac{1}{2} \cdot JK \cdot h \leq 10$, soit $h \leq 10 \cdot \frac{2}{5} = 4$.
Autrement dit, $L(r,t)$ peut être n'importe quel point (où r et t vérifient $0 \leq r \leq 10$ et $0 \leq t \leq 10$) tel que la perpendiculaire abaissée depuis ce point jusqu'à la droite passant par J et K a une longueur inférieure ou égale à 4.



La droite passant par $J(2,7)$ et $K(5,3)$ a une pente égale à $\frac{7-3}{2-5} = -\frac{4}{3}$.
Donc, l'équation de cette droite est $y - 7 = -\frac{4}{3}(x-2)$.
En multipliant chaque membre par 3, on obtient $3y - 21 = -4x + 8$ ou $4x + 3y = 29$.
On détermine l'équation de la droite au-dessus de cette dernière qui lui est parallèle et qui est telle que la perpendiculaire reliant les deux droites a une longueur de 4.
L'équation de cette droite est de la forme $4x + 3y = c$, c étant un nombre réel, puisqu'elle est parallèle à la droite d'équation $4x + 3y = 29$.
Pour déterminer la valeur de c, il faut déterminer les coordonnées d'un point sur cette droite.
Pour déterminer un tel point, on abaisse une perpendiculaire de longueur 4 depuis un point P au dessus de la droite jusqu'au point K.
Puisque JK a une pente de $-\frac{4}{3}$ et que KP et JK sont perpendiculaires, alors KP a une pente de $\frac{3}{4}$.

On trace de P une droite verticale et de K une droite horizontale. Ces droites se coupent en Q.



Puisque KP a une pente de $\frac{3}{4}$, alors $PQ : QK = 3 : 4$, on a donc que le triangle KQP est semblable au triangle remarquable 3-4-5.

Puisque $KP = 4$, alors $PQ = \frac{3}{5}KP = \frac{12}{5}$ et $QK = \frac{4}{3}KP = \frac{16}{5}$.

Donc, le point P a pour coordonnées $\left(5 + \frac{16}{5}, 3 + \frac{12}{5}\right)$ ou $\left(\frac{41}{5}, \frac{27}{5}\right)$.

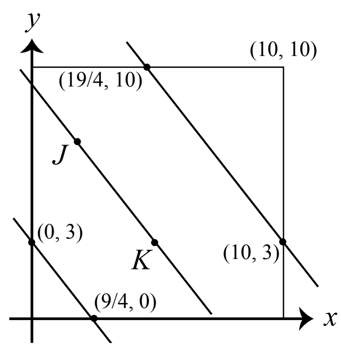
Puisque P est situé sur la droite d'équation $4x + 3y = c$, alors

$$c = 4 \cdot \frac{41}{5} + 3 \cdot \frac{27}{5} = \frac{164}{5} + \frac{81}{5} = \frac{245}{5} = 49$$

d'où l'équation de la droite parallèle à JK et située à une distance de 4 unités au-dessus d'elle est $4x + 3y = 49$.

De la même manière, on détermine que l'équation de la droite parallèle à JK et située à une distance de 4 unités en dessous d'elle est $4x + 3y = 9$. (Remarquons que $49 - 29 = 29 - 9$.)

On a donc la figure suivante :



Les points L qui remplissent les conditions énoncées sont exactement les points dans le carré qui sont situés en dessous de la droite d'équation $4x + 3y = 49$ et au dessus de la droite d'équation $4x + 3y = 9$. Autrement dit, la région $\mathcal{R}$ est la région à l'intérieur du carré qui est délimitée par les deux droites.

Pour déterminer l'aire de $\mathcal{R}$, on soustrait de l'aire du carré délimité par les droites $x = 0$, $x = 10$, $y = 0$ et $y = 10$ (ce dernier a une aire égale à $10 \cdot 10$, soit 100) l'aire des deux triangles à l'intérieur du carré qui ne se trouvent pas dans la région délimitée par les deux droites.

La droite d'équation $4x + 3y = 9$ coupe l'axe des ordonnées au point $(0, 3)$ (ce qu'on peut déterminer en posant $x = 0$) et coupe l'axe des abscisses au point $\left(\frac{9}{4},0\right)$ (ce qu'on peut déterminer en posant $y = 0$).

La droite d'équation $4x + 3y = 49$ coupe la droite $x = 10$ au point $(10, 3)$ (ce qu'on peut déterminer en posant $x = 10$) et coupe la droite $y = 10$ au point $\left(\frac{19}{4}, 10\right)$ (ce qu'on peut déterminer en posant $y = 10$).

Le triangle du bas qui est à l'intérieur du carré mais à l'extérieur de $\mathcal{R}$ a une aire de $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}$.

Le triangle du haut qui est à l'intérieur du carré mais à l'extérieur de $\mathcal{R}$ a une base dont la longueur est de $10 - \frac{19}{4}$, soit $\frac{21}{4}$, et une hauteur de $10 - 3$, soit 7. L'aire de ce triangle est donc égale à $\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{4} \cdot 7 = \frac{147}{8}$.

Enfin, cela signifie que l'aire de $\mathcal{R}$ est égale à

$$100 - \frac{27}{8} - \frac{147}{8} = 100 - \frac{174}{8} = 100 - \frac{87}{4} = \frac{313}{4}$$

Cette fraction est irréductible puisque les seuls diviseurs du dénominateur supérieurs à 1 sont 2 et 4, tandis que le numérateur est impair.

Lorsqu'on exprime cette aire sous la forme $\frac{300 + a}{40 - b}$, a et b étant des entiers strictement positifs, on obtient $a = 13$ et $b = 36$, d'où $a + b = 49$.

Réponse : (D)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2020

(10e année – Secondaire IV)

le mardi 25 février 2020

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 26 février 2020

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On simplifie pour obtenir, $\dfrac{20-20}{20+20} = \dfrac{0}{40} = 0$.

Réponse : (A)

2. Lorsque $x = 3$ et $y = 4$, on a $xy - x = 3 \times 4 - 3 = 12 - 3 = 9$.
Par ailleurs, $xy - x = x(y-1) = 3 \times 3 = 9$.

Réponse : (D)

3. Puisque $OPQR$ est un rectangle dont deux côtés sont situés sur les axes, ses côtés sont donc verticaux et horizontaux.
Puisque PQ est horizontal, Q et P ont la même ordonnée, soit 3.
Puisque QR est vertical, Q et R ont la même abscisse, soit 5.
Donc, les coordonnées de Q sont $(5, 3)$.

Réponse : (B)

4. Si $0 < a < 20$, alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{20}$. Donc, $\dfrac{1}{15} > \dfrac{1}{20}$ et $\dfrac{1}{10} > \dfrac{1}{20}$.
De plus, $\dfrac{1}{20} = 0{,}05$. Ce dernier est inférieur à 0,5 et à 0,055.
Enfin, $\dfrac{1}{20} > \dfrac{1}{25}$ puisque $0 < 20 < 25$.
Donc, parmi les choix de réponse, $\dfrac{1}{25}$ est le seul qui est inférieur à $\dfrac{1}{20}$.

Réponse : (B)

5. Puisque QST est un angle plat, alors $\angle QSP = 180^\circ - \angle TSP = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.
De plus, l'angle RQS est un angle extérieur du triangle QSP.
Cela signifie que $\angle RQS = \angle QSP + \angle SPQ$.
Sachant cela, $150^\circ = 130^\circ + x^\circ$, d'où $x = 150 - 130 = 20$.
(Pair ailleurs, on aurait pu remarquer que les angles RQS et SQP sont supplémentaires et on aurait pu utiliser la sommes des angles du triangle QSP.)

Réponse : (E)

6. Selon le graphique, Mathilde a vu 6 chardonnerets, 9 moineaux et 5 quiscales.
En tout, elle a vu $6 + 9 + 5 = 20$ oiseaux.
Donc, le pourcentage des oiseaux qui étaient des chardonnerets est égal à

$$\frac{6}{20} \times 100~\% = \frac{3}{10} \times 100~\% = 30~\%$$

Réponse : (C)

7. Puisque m et n ont une moyenne de 5, alors $\dfrac{m+n}{2} = 5$, d'où $m + n = 10$.
Afin que n soit aussi grand que possible, m doit être aussi petit que possible.
Puisque m et n sont des entiers strictement positifs, alors 1 est la plus petite valeur possible de m, d'où $n = 10 - m = 10 - 1 = 9$ serait donc la plus grande valeur possible de n.

Réponse : (C)

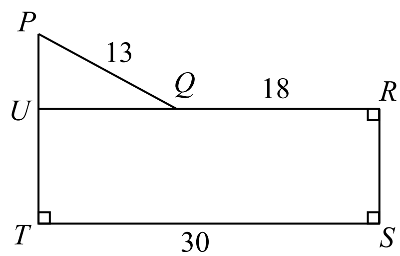
8. On détermine 30 % du prix de Roman : $200\ \$ \times 30\ \% = 200\ \$ \times \frac{30}{100} = 2\ \$ \times 30 = 60\ \$$.
Après que Roman ait donné 60 \$ à Jackie, il ne lui reste que $200\ \$ - 60\ \$ = 140\ \$$.
Il partage 15 % de ce montant en parts égales entre Dale et Natalia, soit $140\ \$ \times 15\ \%$ ou $140\ \$ \times 0{,}15 = 21\ \$$.
Puisque Roman partage 21 \$ en parts égales entre Dale et Natalia, Roman donne $21\ \$ \div 2$ ou 10,50 \$ à Dale.

Réponse : (A)

9. La 1^re^ rangée contient 0 carré ombré et 1 carré non ombré.
La 2^e^ rangée contient 1 carré ombré et 2 carrés non ombrés.
La 3^e^ rangée contient 2 carrés ombrés et 3 carrés non ombrés.
La 4^e^ rangée contient 3 carrés ombrés et 4 carrés non ombrés.
Étant donné que chaque rangée contient 2 carrés de plus que la rangée précédente et que les carrés de chaque rangée alternent entre non ombrés et ombrés, alors chaque rangée a exactement 1 carré ombré de plus que la rangée précédente.
Cela signifie qu'en passant de la 4^e^ rangée à la 2020^e^ rangée, on ajoute $2020 - 4 = 2016$ carrés ombrés.
Donc, la 2020^e^ rangée contient $3 + 2016 = 2019$ carrés ombrés.

Réponse : (D)

10. On prolonge RQ vers la gauche jusqu'à ce qu'il coupe PT en point U :



Puisque le quadrilatère $URST$ a trois angles droits, son quatrième angle doit aussi être droit. Le quadrilatère est donc un rectangle.
Donc, $UT = RS$ et $UR = TS = 30$.
Puisque $UR = 30$, alors $UQ = UR - QR = 30 - 18 = 12$.
Le triangle PQU est rectangle en U.
D'après le théorème de Pythagore, puisque $PU > 0$, on a

$$PU = \sqrt{PQ^2 - UQ^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

Puisque $PQRST$ a un périmètre de 82, alors $13 + 18 + RS + 30 + (UT + 5) = 82$.
Puisque $RS = UT$, alors $2 \times RS = 82 - 13 - 18 - 30 - 5 = 16$, d'où $RS = 8$.
Enfin, on peut calculer l'aire de $PQRST$ en le séparant en le triangle PQU et le rectangle $URST$.
L'aire du triangle PQU est égale à $\frac{1}{2} \times UQ \times PU = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$.
L'aire du rectangle $URST$ est égale à $RS \times TS = 8 \times 30 = 240$.
Donc, le pentagone $PQRST$ a une aire de $30 + 240 = 270$.

Réponse : (E)

11. Puisque

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

donc

$$5 + 10 + 15 + \cdots + 40 + 45 = 5(1 + 2 + 3 + \cdots + 8 + 9) = 5(45) = 225$$

Réponse : (A)

12. Soit les entiers strictement positifs a, b et c la longueur, la largeur et la hauteur du prisme droit à base rectangulaire.
Puisque le prisme a un volume de 21, alors $abc = 21$.
On remarque que a, b et c sont chacun un diviseur positif de 21.
Les diviseurs positifs de 21 sont 1, 3, 7 et 21. De plus, on peut écrire 21 comme produit de trois entiers différents uniquement de la manière suivante : $1 \times 3 \times 7 = 21$.
Donc, la longueur, la largeur et la hauteur du prisme droit à base rectangulaire sont 1, 3, et 7, dans quelconque ordre.
Ils ont donc une somme de $1 + 3 + 7 = 11$.

Réponse : (A)

13. Puisque $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$, alors $8^{20} = (2^3)^{20} = 2^{3\times20} = 2^{60}$.
Donc, si $2^n = 8^{20}$, alors $n = 60$.

Réponse : (B)

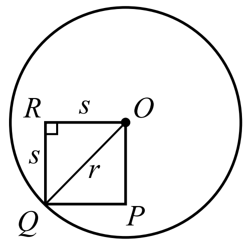
14. Puisque $3 \times 5 \times 7 = 105$, alors la plus grande valeur possible de n est *au moins* 105.
On remarque en particulier que la plus grande valeur possible de n doit être positive.
Afin que le produit de trois nombres soit positif, soit les trois nombres sont tous positifs (c'est-à-dire qu'aucun des nombres n'est négatif), soit un des nombres est positif tandis que les deux autres sont négatifs. (S'il y avait un nombre impair de facteurs négatifs, le produit serait négatif.)
Si les trois nombres sont tous positifs, le produit est aussi grand que possible lorsque les trois nombres sont tous aussi grands que possible. Dans ce cas, la plus grande valeur possible de n est $3 \times 5 \times 7 = 105$.
Si un des nombres est positif tandis que les deux autres sont négatifs, leur produit est aussi grand que possible lorsque le nombre positif est aussi grand que possible (7) et lorsque le produit des deux nombres négatifs est aussi grand que possible.
Le produit des deux nombres négatifs sera aussi grand que possible lorsque chacun des deux nombres est « aussi négatif que possible » (c'est-à-dire aussi éloigné de 0 que possible). Dans ce cas, ces nombres sont -4 et -6 dont le produit est $(-4) \times (-6) = 24$. (On peut vérifier les autres produits possibles de deux nombres négatifs afin de voir qu'aucun n'est aussi grand.)
Donc, la plus grande valeur possible de n dans ce cas est $7 \times (-4) \times (-6) = 7 \times 24 = 168$.
D'après les deux cas, on voit que 168 est la plus grande valeur possible de n.

Réponse : (A)

15. Puisque le rapport du nombre de billes vertes au nombre de billes jaunes au nombre de billes rouges est de $3 : 4 : 2$, soit $3n$, $4n$ and $2n$ respectivement les nombres de billes vertes, jaunes et rouges, n étant un entier strictement positif quelconque.
Puisque 63 des billes dans le sac ne sont pas rouges, alors la somme du nombre de billes vertes et du nombre de billes jaunes dans le sac est de 63.
Donc, $3n + 4n = 63$, d'où $7n = 63$ ou $n = 9$. Cela signifie qu'il y a $2n = 2 \times 9 = 18$ billes rouges dans le sac.

Réponse : (B)

16. Soit s la longueur des côtés du carré. Donc, $OR = RQ = s$.
Soit r le rayon du cercle. Donc, $OQ = r$ car O est le centre du cercle et Q est situé sur la circonférence du cercle.
Puisque chacun des sommets du carré est un angle droit, alors le triangle ORQ est rectangle en R.



D'après le théorème de Pythagore, $OR^2 + RQ^2 = OQ^2$, d'où $s^2 + s^2 = r^2$ ou $2s^2 = r^2$.
On peut exprimer l'aire du cercle en fonction de r, soit πr^2.
Sachant que l'aire du cercle est égale à 72π, alors $\pi r^2 = 72\pi$ ou $r^2 = 72$.
Puisque $2s^2 = r^2 = 72$, alors $s^2 = 36$.
Puisqu'on peut exprimer l'aire du carré en fonction de s, soit s^2, alors le carré a une aire de 36.

Réponse : (E)

17. Supposons que Carley ait acheté x boîtes de chocolats, y boîtes de bonbons à la menthe et z boîtes de bonbons caramélisés.
En tout, Carley aura $50x$ chocolats (puisque chaque boîte de chocolats contient 50 chocolats), $40y$ bonbons à la menthe (puisque chaque boîte de bonbons à la menthe contient 40 bonbons à la menthe) et $25z$ bonbons caramélisés (puisque chaque boîte de bonbons caramélisés contient 25 bonbons caramélisés).
Puisque Carley a utilisé tous les chocolats, tous les bonbons à la menthe et tous les bonbons caramélisé et n'a créé que des sacs de bonbons complets dont chacun contenait exactement 1 chocolat, 1 bonbon à la menthe et 1 bonbon caramélisé, donc $50x = 40y = 25z$.
On veut donc déterminer la plus petite valeur positive possible de $x + y + z$, x, y et z ayant des valeurs qui vérifient $50x = 40y = 25z$.
En divisant chacun des membres de l'équation $50x = 40y = 25z$ par un facteur commun de 5, on obtient $10x = 8y = 5z$.
Puisque $10x$ est un multiple de 10, que $8y$ est un multiple de 8 et que $10x = 8y$, on veut déterminer le nombre qui est à la fois le plus petit multiple de 10 et un multiple de 8.
Puisque 10, 20 et 30 ne sont pas des multiples de 8 et que 40 est un multiple de 8, alors la plus petite valeur possible de $10x$ semble être 40.
Dans ce cas, $x = 4$, $y = 5$ et $z = 8$ sont les plus petits entiers strictement positifs qui vérifient $10x = 8y = 5z = 40$.
Puisque x, y et z sont chacun aussi petit que possible, leur somme, $x+y+z$, est également aussi petite que possible.
Donc, Carley aurait pu acheter un minimum de $4 + 5 + 8 = 17$ boîtes en tout.

Réponse : (B)

18. *Solution 1*
Soit t le nombre d'heures dont aura besoin Nate afin d'arriver exactement à l'heure.
Lorsque Nate arrive 1 heure trop tôt, il a conduit pendant $t - 1$ heures.
Lorsque Nate arrive 1 heure trop tard, il a conduit pendant $t + 1$ heures.
Puisqu'il parcourt la même distance peu importe le cas, et qu'on obtient la distance en multipliant la vitesse par le temps, alors $(60 \text{ km/h}) \times ((t-1) \text{ h}) = (40 \text{ km/h}) \times ((t+1) \text{ h})$.

On a donc $60t - 60 = 40t + 40$, d'où $20t = 100$ ou $t = 5$.
Nate conduira donc une distance totale de $(60 \text{ km/h}) \times (4 \text{ h}) = 240$ km.
Puisque Nate doit parcourir 240 km en 5 heures, il devra donc conduire à une vitesse constante de $\dfrac{240 \text{ km}}{5 \text{ h}}$, soit 48 km/h.

Solution 2
Soit d la distance en kilomètres que Nate doit parcourir.
Puisque Nate arrive 1 heure en retard en conduisant à 40 km/h et 1 heure trop tôt en conduisant à 60 km/h, alors la différence entre les durées de temps à ces deux vitesses est de 2 heures.
Puisqu'on obtient le temps en divisant la distance par la vitesse, alors

$$\frac{d \text{ km}}{40 \text{ km/h}} - \frac{d \text{ km}}{60 \text{ km/h}} = 2 \text{ h}$$

En multipliant les deux membres de l'équation par 120 km/h on obtient

$$3d \text{ km} - 2d \text{ km} = 240 \text{ km}$$

d'où $d = 240$.
Donc, Nate parcourt une distance de 240 km.
À 40 km/h, Nate parcourt cette distance en 6 heures et arrive 1 heure en retard.
Il va devoir conduire pendant 5 heures afin d'arriver exactement à l'heure.
Puisque Nate doit parcourir 240 km en 5 heures, il devra donc conduire à une vitesse constante de $\dfrac{240 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 48$ km/h.

Réponse : (D)

19. Pour chacune des 10 questions du test, chaque réponse juste vaut 5 points, chaque question laissée sans réponse vaut 1 point et chaque réponse fautive vaut 0 point.
Parmi les 10 questions du test, si l'on obtient 10 réponses justes, on obtient $10 \times 5 = 50$ points comme note finale.
Parmi les 10 questions du test, si l'on obtient 9 réponses justes, on a laissé soit 0 question sans réponse soit 1 question sans réponse. Donc, on obtient soit $9 \times 5 = 45$ points soit $9 \times 5 + 1 = 46$ points comme notes finales possibles.
Parmi les 10 questions du test, si l'on obtient 8 réponses justes, on a laissé soit 0, soit 1, soit 2 questions sans réponses. Donc, on obtient soit $8 \times 5 = 40$ points, soit $8 \times 5 + 1 = 41$ points, soit $8 \times 5 + 2 = 42$ points comme notes finales possibles.
Parmi les 10 questions du test, si l'on obtient 7 réponses justes, on a laissé soit 0, soit 1, soit 2, soit 3 questions sans réponses. Donc, on obtient soit 35, soit 36, soit 37, soit 38 points comme notes finales possibles.
Parmi les 10 questions du test, si l'on obtient 6 réponses justes, on a laissé soit 0, soit 1, soit 2, soit 3, soit 4 questions sans réponses. Donc, on obtient soit 30, soit 31, soit 32, soit 33, soit 34 points comme notes finales possibles.
Jusqu'ici, dans la fourchette des entiers de 30 à 50, on a les points suivants comme notes finales possibles :

$$30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 45, 46, 50.$$

Donc,

$$39, 43, 44, 47, 48, 49$$

ne sont pas possibles.
Parmi les 10 questions du test, si l'on obtient 5 réponses justes ou moins, est-il possible d'obtenir

au moins 39 points comme note finale ?
Non, ce n'est pas possible car, dans ce cas, le nombre de réponses justes est au plus 5 et le nombre de questions laissées sans réponses est au plus 10 (ces deux ne peuvent se produire en même temps) d'où un maximum de $5 \times 5 + 10 = 35$ points.
Donc, dans la fourchette des entiers de 30 à 50, il y a exactement 6 entiers qui ne sont pas des notes finales possibles.

Réponse : (D)

20. On peut déterminer quand $3^m + 7^n$ admet 10 comme diviseur en examinant les chiffres des unités de $3^m + 7^n$.
D'abord, on examine individuellement les chiffres des unités de 3^m et de 7^n.

Les chiffres des unités des puissances de 3 présentent une régularité : $3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, \ldots$
On voit cette régularité dans les quelques premières puissances de 3 :

$$3^1 = 3 \quad 3^2 = 9 \quad 3^3 = 27 \quad 3^4 = 81 \quad 3^5 = 243 \quad 3^6 = 729$$

Puisque le chiffre des unités d'un produit d'entiers dépend uniquement des chiffres des unités des entiers que l'on multiplie, et qu'on multiplie par 3 pour passer d'une puissance à la suivante, alors aussitôt qu'un chiffre des unités réapparait dans la suite des chiffres des unités, les chiffres des unités suivants vont présenter la même régularité.
Cela signifie que les chiffres des unités des puissances de 3 répéteront à chaque quatre puissances de 3.
Donc, des 100 puissances de 3 de la forme 3^m qui vérifient $1 \leq m \leq 100$, exactement 25 auront 3 comme chiffre des unités, exactement 25 auront 9 comme chiffre des unités, exactement 25 auront 7 comme chiffre des unités et exactement 25 auront 1 comme chiffre des unités.

Les chiffres des unités des puissances de 7 présentent une régularité : $7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, \ldots$
On voit cette régularité dans les quelques premières puissances de 7 :

$$7^1 = 7 \quad 7^2 = 49 \quad 7^3 = 343 \quad 7^4 = 2401 \quad 7^5 = 16\,807 \quad 7^6 = 117\,649$$

En utilisant le même argument que le précédent, on conclut que les chiffres des unités des puissances de 7 répéteront à chaque quatre puissances de 7.
Puisque 101 est 1 de plus qu'un multiple de 4, alors la puissance 7^{101} est le premier élément de l'un des groupes de quatre puissances de 7 dont est composée la régularité. Donc, 7^{101} a 7 comme chiffre des unités.
Donc, des 105 puissances de 7 de la forme 7^n qui vérifient $101 \leq n \leq 205$, exactement 27 auront 7 comme chiffre des unités, exactement 26 auront 9 comme chiffre des unités, exactement 26 auront 3 comme chiffre des unités et exactement 26 auront 1 comme chiffre des unités. (Dans ce cas, 105 puissances de 7 comprennent 26 groupes de quatre puissances chacun ainsi qu'un terme supplémentaire.)

Pour que $3^m + 7^n$ ait 0 comme chiffre des unités (afin d'admettre 10 comme diviseur), un des énoncés suivants doit être vrai :

- 3^m a 3 comme chiffre des unités (25 valeurs possibles de m) et 7^n a 7 comme chiffre des unités (27 valeurs possibles de n) ou
- 3^m a 9 comme chiffre des unités (25 valeurs possibles de m) et 7^n a 1 comme chiffre des unités (26 valeurs possibles de n) ou
- 3^m a 7 comme chiffre des unités (25 valeurs possibles de m) et 7^n a 3 comme chiffre des unités (26 valeurs possibles de n) ou

- 3^m a 1 comme chiffre des unités (25 valeurs possibles de m) et 7^n a 9 comme chiffre des unités (26 valeurs possibles de n).

On a donc

$$27 \times 25 + 26 \times 25 + 26 \times 25 + 26 \times 25 = 25 \times (27 + 26 + 26 + 25) = 25 \times 105 = 2625$$

couples (m, n) possibles.

Réponse : (E)

21. Afin de déterminer le nombre de points (x, y) qui sont situés et sur la droite d'équation $y = 4x+3$ et dans la région bornée par les droites d'équations $x = 25$, $x = 75$, $y = 120$ et $y = 250$, on détermine le nombre d'entiers x ($25 \leq x \leq 75$) tels que $y = 4x + 3$ soit un entier situé entre 120 et 250.
Autrement dit, on détermine le nombre d'entiers x ($25 \leq x \leq 75$) tels que $120 \leq 4x + 3 \leq 250$ est un entier.
On remarque qu'au fur et à mesure que x croit, la valeur de l'expression $4x + 3$ croit aussi.
De plus, lorsque $x = 29$, on a $4x + 3 = 119$ et lorsque $x = 30$, on a $4x + 3 = 123$.
De surcroit, lorsque $x = 61$, on a $4x + 3 = 247$ et lorsque $x = 62$, on a $4x + 3 = 251$.
Donc, $4x + 3$ est situé entre 120 et 250 uniquement lorsque $30 \leq x \leq 61$.
Il y a $61 - 30 + 1 = 32$ telles valeurs de x. Donc 32 points remplissent les conditions données.

Réponse : (D)

22. Puisque $PT = 1$ et $TQ = 4$, alors $PQ = PT + TQ = 1 + 4 = 5$.
Le triangle PSQ est rectangle en S et a pour hypoténuse PQ.
D'après le théorème de Pythagore, $PS^2 = PQ^2 - QS^2 = 5^2 - 3^2 = 16$.
Puisque $PS > 0$, alors $PS = 4$.
On considère les triangles PSQ et RTQ.
Chacun est un triangle rectangle et les deux ont le sommet Q en commun. Donc, PSQ et RTQ sont des triangles semblables.
On a donc $\dfrac{PQ}{QS} = \dfrac{QR}{TQ}$.
À l'aide des longueurs données, $\dfrac{5}{3} = \dfrac{QR}{4}$, d'où $QR = \dfrac{4 \cdot 5}{3} = \dfrac{20}{3}$.
Enfin, $SR = QR - QS = \dfrac{20}{3} - 3 = \dfrac{11}{3}$.

Réponse : (B)

23. Soit N un entier qui remplit les conditions de l'énoncé.
Le premier chiffre de N doit être 1 car il doit toujours y avoir au moins un 1 avant le premier 2, au moins un 2 avant le premier 3 et au moins un 3 avant le 4. Donc, on ne peut pas avoir un 2, un 3 ou un 4 avant le premier 1.
Puisque N contient trois 1, alors N peut avoir pour premiers chiffres 1, 11 ou 111.
Le premier chiffre de N qui n'est pas un 1 doit être un 2.
Donc, N peut avoir pour premiers chiffres 12, 112 ou 1112.

1^er^ cas : N a pour premiers chiffres 12
Puisqu'aucun 2 ne peut être adjacent à un autre 2, on doit déterminer les emplacements possibles des deux 2 restants.
De gauche à droite, les deux 2 pourraient occuper les positions 4 et 6, 4 et 7, 4 et 8, 4 et 9, 5 et 7, 5 et 8, 5 et 9, 6 et 8, 6 et 9, ou 7 et 9.
Autrement dit, il y a 10 couples de positions possibles que les deux 2 pourraient occuper.
Une fois qu'on ait placé les deux 2, il reste 5 positions inoccupées.
Ensuite, on doit déterminer les emplacements possibles des deux 1 restants.
En représentant ces 5 positions par A, B, C, D, E, on voit qu'il y a 10 couples de positions possibles que les deux 1 pourraient occuper : A et B, A et C, A et D, A et E, B et C, B et D, B et E, C et D, C et E, ou D et E.
Une fois qu'on ait placé les deux 1, il reste 3 positions inoccupées dans lesquelles on peut placer les deux 3 et le 4. De gauche à droite, un 3 doit être placé dans la première position inoccupée car il doit y avoir au moins un 3 avant le 4.
On peut placer les deux chiffres restants (3 et 4) dans quelconque ordre dans les 2 positions inoccupées restantes ; soit dans l'ordre 3 et ensuite 4, soit dans l'ordre 4 et ensuite 3.
Dans ce cas, il y a $10 \times 10 \times 2 = 200$ entiers N possibles.

2^e^ cas : N a pour premiers chiffres 112
Puisqu'aucun 2 ne peut être adjacent à un autre 2, on doit déterminer les emplacements possibles des deux 2 restants.
De gauche à droite, les deux 2 pourraient occuper les positions 5 et 7, 5 et 8, 5 et 9, 6 et 8, 6 et 9, ou 7 et 9.
Autrement dit, il y a 6 couples de positions possibles que les deux 2 pourraient occuper.
Une fois qu'on ait placé les deux 2, il reste 4 positions inoccupées.
Ensuite, on doit déterminer les emplacements possibles du 1 restant. Il y a 4 positions possibles que le 1 pourrait occuper.
Une fois qu'on ait placé le 1, il reste 3 positions inoccupées dans lesquelles on peut placer les deux 3 et le 4. De gauche à droite, un 3 doit être placé dans la première position inoccupée car il doit y avoir au moins un 3 avant le 4.
On peut placer les deux chiffres restants (3 et 4) dans quelconque ordre dans les 2 positions inoccupées restantes ; soit dans l'ordre 3 et ensuite 4, soit dans l'ordre 4 et ensuite 3.
Dans ce cas, il y a $6 \times 4 \times 2 = 48$ entiers N possibles.

3^e^ cas : N a pour premiers chiffres 1112
Puisqu'aucun 2 ne peut être adjacent à un autre 2, on doit déterminer les emplacements possibles des deux 2 restants.
De gauche à droite, les deux 2 pourraient occuper les positions 6 et 8, 6 et 9, ou 7 et 9.
Autrement dit, il y a 3 couples de positions possibles que les deux 2 pourraient occuper.
Une fois qu'on ait placé les deux 2, il reste 3 positions inoccupées dans lesquelles on peut placer les deux 3 et le 4.
De gauche à droite, un 3 doit être placé dans la première position inoccupée car il doit y avoir

au moins un 3 avant le 4.
On peut placer les deux chiffres restants (3 et 4) dans quelconque ordre dans les 2 positions inoccupées restantes ; soit dans l'ordre 3 et ensuite 4, soit dans l'ordre 4 et ensuite 3.
Dans ce cas, il y a $3 \times 2 = 6$ entiers N possibles.

En rassemblant les trois cas, on a $200 + 48 + 6 = 254$ entiers N possibles.

Réponse : (C)

24. Soit $GP = x$.
Puisque le cube a des arêtes de longueur 200, alors $HP = 200 - x$.
On considère le tétraèdre (c'est-à-dire une pyramide à base triangulaire) $FGMP$ dont on calcule le volume de deux manières différentes.
Le volume d'un tétraèdre est égal au tiers du produit de l'aire de sa base triangulaire et sa hauteur.
D'abord, on considère que le tétraèdre $FGMP$ a pour base le triangle FGM et pour hauteur GP.
Le triangle FGM est rectangle en G et a $FG = GM = 200$. Le triangle a donc une aire égale à $\frac{1}{2} \times FG \times GM$, soit $\frac{1}{2} \times 200 \times 200$ ou 20 000.
Donc, $FGMP$ a un volume égal à $\frac{1}{3} \times 20\,000 \times x$.

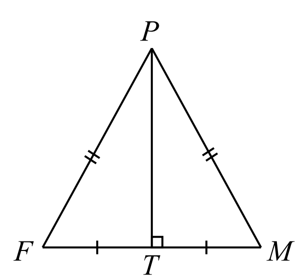
Ensuite, on considère que le tétraèdre $FGMP$ a pour base le triangle PFM.
D'après l'énoncé du problème, 100 est la plus courte distance du point G à un point situé à l'intérieur du triangle PFM. Cela signifie que le tétraèdre $FGMP$ qui a pour base le triangle PFM a une hauteur de 100.
On doit calculer l'aire du triangle PFM.
Puisque le triangle FGM est rectangle en G et que $FM > 0$, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$FM = \sqrt{FG^2 + GM^2} = \sqrt{200^2 + 200^2} = \sqrt{200^2 \times 2} = 200\sqrt{2}$$

Puisque le triangle FGP est rectangle en G et que $FP > 0$, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$FP = \sqrt{FG^2 + GP^2} = \sqrt{200^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + 40\,000}$$

De même, $MP = \sqrt{x^2 + 40\,000}$.
Cela signifie que le triangle PFM est isocèle ($FP = MP$).
Soit T le milieu de FM.
Donc $FT = TM = 100\sqrt{2}$.
Puisque le triangle PFM est isocèle, alors PT et FM sont perpendiculaires.



D'après le théorème de Pythagore,

$$PT = \sqrt{FP^2 - FT^2} = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + 40\,000}\right)^2 - \left(100\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + 40\,000 - 20\,000} = \sqrt{x^2 + 20\,000}$$

Donc, le triangle PFM a une aire égale à $\frac{1}{2} \times FM \times PT$, soit $\frac{1}{2} \times 200\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000}$.
Cela signifie que le tétraèdre $FGMP$ a un volume égal à

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 200\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000}\right) \times 100$$

On égalise les deux expressions qui représentent le volume de $FGMP$ et on isole x dans l'équation qui en résulte :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{3} \times 20\,000 \times x &= \tfrac{1}{3} \times \left(\tfrac{1}{2} \times 200\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000}\right) \times 100 \\
20\,000 \times x &= \left(\tfrac{1}{2} \times 200\sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000}\right) \times 100 \\
x &= \tfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000} \\
2x &= \sqrt{2} \times \sqrt{x^2 + 20\,000} \\
4x^2 &= 2(x^2 + 20\,000) \\
2x^2 &= 40\,000 \\
x^2 &= 20\,000
\end{aligned}$$

Puisque $x > 0$, alors $x = \sqrt{20\,000} = \sqrt{10\,000 \times 2} = \sqrt{100^2 \times 2} = 100\sqrt{2}$.
Cela signifie que $HP = 200 - x = 200 - 100\sqrt{2} \approx 58{,}58$.
Le choix de réponse le plus près est 59, soit le choix (D).

Réponse : (D)

25. Étant donné un entier strictement positif N exprimé en factorisation première $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ étant des nombres premiers et $a_1, a_2, \ldots, a_k$ étant des entiers strictement positifs, on sait que N admet exactement $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$ diviseurs positifs.

Ce résultat est basé sur les faits suivants :

F1. Le « théorème fondamental de l'arithmétique » s'énonce ainsi : Tout entier strictement positif supérieur à 1 peut être écrit comme un produit de nombres premiers d'une unique façon. (Si l'entier strictement positif est lui-même premier, ce produit n'est constitué que du nombre premier.) On voit ce théorème de manière implicite lorsqu'on crée l'arbre de facteurs pour un entier quelconque. Par exemple, 1500 est égal à $2^2 \times 3^1 \times 5^3$ et il n'existe aucune autre factorisation de 1500 sous forme de produits de nombres premiers. De plus, la factorisation première d'un nombre demeure inchangée même si l'on réorganise ses facteurs premiers dans un ordre différent.

F2. Si n est un entier strictement positif et d est un entier strictement positif qui est un diviseur de n, alors les seuls facteurs premiers possibles de d sont ceux de n. Par exemple, si d est un diviseur positif de $n = 1500$, alors les seuls facteurs premiers possibles de d sont 2, 3 et 5. Cela signifie, par exemple, que d n'est pas divisible par 7, par 11 ou par tout autre nombre premier qui n'est pas 2, 3 ou 5. d peut ou non être divisible par chacun des suivants : 2, 3 ou 5.

F3. Si n est un entier strictement positif, d est un entier strictement positif qui est un diviseur de n, et p est un facteur premier de n et de d, alors p ne peut diviser d « plus de fois » qu'il ne divise n. Par exemple, si d est un diviseur positif de $n = 1500 = 2^2 \times 3^1 \times 5^3$ qui est divisible par 5, alors d peut être divisible par 5 ou par 5^2 ou par 5^3 mais ne peut pas être divisible par 5^4 ou par 5^5 ou par quelconque puissance de 5 qui serait supérieure à ces derniers.

D'après ces faits, les diviseurs positifs de $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ sont les entiers de la forme

$$d = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k}$$

$b_1, b_2, \ldots, b_k$ étant des entiers non négatifs ($0 \le b_1 \le a_1$, $0 \le b_2 \le a_2$ et ainsi de suite).
Cela signifie qu'il y a $a_1 + 1$ valeurs possibles de b_1, soit $0, 1, 2, \ldots, a_1$.
De même, il y a $a_2 + 1$ valeurs possibles de b_2, $a_3 + 1$ valeurs possibles de b_3 et ainsi de suite.
Puisqu'on a un diviseur d différent pour chacune des combinaisons de ces valeurs possibles, alors il y a $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$ diviseurs positifs.

Soit $2^r 5^s p_3^{a_3} p_4^{a_4} \cdots p_k^{a_k}$ la factorisation première de n, $p_3, p_4, \ldots, p_k$ étant des nombres premiers dont aucun n'est égal à 2 ou à 5, $a_3, a_4, \ldots, a_k$ étant des entiers strictement positifs et r et s étant des entiers non négatifs quelconques.
On a exprimé n de cette manière afin de nous permettre de porter une attention particulière aux facteurs premiers possibles de 2 et 5.
Cela signifie que

$$2n = 2^{r+1} 5^s p_3^{a_3} p_4^{a_4} \cdots p_k^{a_k}$$
$$5n = 2^r 5^{s+1} p_3^{a_3} p_4^{a_4} \cdots p_k^{a_k}$$

Puisque $2n$ admet 64 diviseurs positifs et $5n$ admet 60 diviseurs positifs, alors

$$(r+2)(s+1)(a_3+1)(a_4+1) \cdots (a_k+1) = 64$$
$$(r+1)(s+2)(a_3+1)(a_4+1) \cdots (a_k+1) = 60$$

Puisque chacun des facteurs dans les deux membres de gauche est un entier strictement positif, alors 64 et 60 admettent

$$(a_3+1)(a_4+1) \cdots (a_k+1)$$

comme diviseur positif commun.
Les diviseurs positifs de 64 sont 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.
Parmi ces derniers, seuls 1, 2 et 4 sont des diviseurs de 60.
Donc, $(a_3+1)(a_4+1) \cdots (a_k+1)$ est égal à 1, à 2 ou à 4.
Puisque chacun de $a_3, a_4, \ldots, a_k$ est un entier strictement positif, alors chacun de a_3+1, a_4+1, $\ldots$, a_k+1 est au moins égal à 2.

1er cas : $(a_3+1)(a_4+1) \cdots (a_k+1) = 4$

On peut exprimer 4 sous la forme d'un produit d'entiers strictement positifs (chacun d'au moins 2) des manières suivantes : 2×2 et 4 (un entier a lui-même comme produit).
Donc, soit $k = 4$ avec $a_3 + 1 = a_4 + 1 = 2$ (d'où $a_3 = a_4 = 1$), soit $k = 3$ avec $a_3 + 1 = 4$ (d'où $a_3 = 3$).
Puisque

$$(r+2)(s+1)(a_3+1)(a_4+1) \cdots (a_k+1) = 64$$
$$(r+1)(s+2)(a_3+1)(a_4+1) \cdots (a_k+1) = 60$$

alors en simplifiant on obtient

$$(r+2)(s+1) = 16$$
$$(r+1)(s+2) = 15$$

Lorsqu'on développe les membres de gauche des deux équations, on obtient

$$rs + r + 2s + 2 = 16$$
$$rs + 2r + s + 2 = 15$$

On soustrait la seconde équation de la première pour obtenir $-r+s=1$, d'où $s=r+1$, que l'on pose dans $(r+2)(s+1)=16$ pour obtenir $(r+2)(r+2)=16$.
Puisque $r>0$, alors $(r+2)^2=16$, d'où $r+2=4$ ou $r=2$. On a donc $s=3$.
Donc, on pourrait avoir $r=2$, $s=3$.

Donc, en prenant en compte les valeurs possibles de a_3 et de a_4, cela signifie qu'on peut avoir $n=2^2 5^3 p_3 p_4$, p_3 et p_4 étant des nombres premiers autres que 2 et 5, ou $n=2^2 5^3 p_3^3$, p_3 étant un nombre premier autre que 2 ou 5.
On peut vérifier que $2n$ et $5n$ ont le bon nombre de diviseurs positifs dans chaque cas.

2^e cas : $(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1)=2$
On peut exprimer 2 sous la forme d'un produit d'entiers strictement positifs (chacun d'au moins 2) d'une seule manière : 2.
Donc, $k=3$ avec $a_3+1=2$ (d'où $a_3=1$).
Puisque

$$(r+2)(s+1)(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1)=64$$
$$(r+1)(s+2)(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1)=60$$

alors

$$(r+2)(s+1)=32$$
$$(r+1)(s+2)=30$$

On pourrait procéder comme dans le 1^er cas.
Par ailleurs, sachant que r et s sont des entiers non négatifs, alors les possibilités de la première équation sont :

$r+2$	$s+1$	r	s	$r+1$	$s+2$	$(r+2)(s+1)$
32	1	30	0	31	2	62
16	2	14	1	15	3	45
8	4	6	3	7	5	35
4	8	2	7	3	9	27
2	16	0	15	1	17	17
1	32	-1	31	0	33	0

Dans ce cas, aucun couple de valeurs r et s ne vérifie les deux équations.

3^e cas : $(a_3+1)(a_4+1)\cdots(a_k+1)=1$
Puisque chaque facteur dans le membre de gauche est au moins égal à 2, qu'est-ce que cela peut signifier ? Cela signifie qu'il n'y a aucun facteur dans le membre de gauche. Autrement dit, $k=2$ et $n=2^r 5^s$.
(Essayez de suivre l'argument avant le 1^er cas pour vérifier qu'il n'y a pas de contradictions.)
Dans ce cas,

$$(r+2)(s+1)=64$$
$$(r+1)(s+2)=60$$

Sachant que r et s sont des entiers non négatifs, alors les possibilités de la première équation sont :

$r+2$	$s+1$	r	s	$r+1$	$s+2$	$(r+2)(s+1)$
64	1	62	0	63	2	126
32	2	30	1	31	3	93
16	4	14	3	15	5	45
8	8	6	7	7	9	63
4	16	2	13	3	15	51
2	32	0	31	1	33	33
1	64	-1	63	0	65	0

Dans ce cas, aucun couple de valeurs r et s ne vérifie les deux équations.

Donc, en rassemblant les résultats des trois cas, l'entier strictement positif n remplit les conditions données lorsque

- $n = 2^2 5^3 p_3 p_4 = 500 p_3 p_4$, p_3 et p_4 étant des nombres premiers autres que 2 et 5 ou
- $n = 2^2 5^3 p_3^3 = 500 p_3^3$, p_3 étant un nombre premier autre que 2 et 5.

Puisque $n \leq 20\,000$, donc

- ou $500 p_3 p_4 \leq 20\,000$, d'où $p_3 p_4 \leq 40$,
- ou $500 p_3^3 \leq 20\,000$, d'où $p_3^3 \leq 40$.

Il reste encore à déterminer le nombre de couples p_3 et p_4 (p_3 et p_4 étant des nombres premiers autres que 2 et 5) dont le produit est inférieur à 40 et le nombre de nombres premiers p_3 (p_3 étant un nombre premier autre que 2 et 5) dont le cube est inférieur à 40.
Dans le premier cas, les possibilités sont :

$$3 \times 7 = 21 \qquad 3 \times 11 = 33 \qquad 3 \times 13 = 39$$

L'ordre dans lequel on place p_3 et p_4 n'a pas d'importance car peu importe l'ordre, on obtiendra toujours la même valeur de n. On remarque par ailleurs que p_3 et p_4 ne peuvent tous les deux être supérieurs ou égaux à 7 tout en ayant un produit inférieur ou égal à 40.
Dans le deuxième cas, la seule possibilité est $p_3^3 = 3^3$.

Donc, il y a 4 valeurs possibles de n qui remplissent les conditions données.

Réponse : (A)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2019

(10^{e} année – Secondaire IV)

le mardi 26 février 2019
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 27 février 2019
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On évalue afin d'obtenir $2 \times 0 + 1 - 9 = 0 + 1 - 9 = -8$.

RÉPONSE : (A)

2. Kai est né 25 ans avant l'an 2020 et est donc né en $2020 - 25 = 1995$.

RÉPONSE : (C)

3. Puisque 38 % des élèves ont reçu un muffin, donc 100 % − 38 % = 62 % des élèves n'ont pas reçu de muffin.
Autrement, on aurait pu utiliser les pourcentages d'élèves qui ont reçu un yaourt, un fruit ou une barre de céréales afin d'obtenir le pourcentage d'élèves qui n'ont pas reçu de muffin, soit : 10 % + 27 % + 25 % = 62 % .

RÉPONSE : (D)

4. On peut réorganiser l'ordre de la multiplication des nombres :

$$(2 \times \tfrac{1}{3}) \times (3 \times \tfrac{1}{2}) = 2 \times \tfrac{1}{2} \times 3 \times \tfrac{1}{3} = (2 \times \tfrac{1}{2}) \times (3 \times \tfrac{1}{3}) = 1 \times 1 = 1$$

RÉPONSE : (C)

5. Puisque $10d + 8 = 528$, donc $10d = 520$, alors $\dfrac{10d}{5} = \dfrac{520}{5}$ d'où $2d = 104$.

RÉPONSE : (A)

6. La droite d'équation $y = x + 4$ a une ordonnée à l'origine de 4.
Lorsque la droite subit une translation de 6 unités vers le bas, tous les points situés sur la droite subissent cette même translation.
L'ordonnée à l'origine subit donc cette translation et descend de 4 à $4 - 6 = -2$.

RÉPONSE : (E)

7. Puisque les trois nombres 2, x et 10 ont une moyenne de x, donc $\dfrac{2 + x + 10}{3} = x$.
On multiplie par 3 afin d'obtenir $2 + x + 10 = 3x$.
On simplifie afin d'obtenir $x + 12 = 3x$, ensuite $2x = 12$ d'où $x = 6$.

RÉPONSE : (E)

8. Afin d'aller de P à A, Alain doit se déplacer de 5 unités vers la droite et de 4 unités vers le haut, soit une distance totale de $5 + 4 = 9$ unités. (Tous les chemins qui mènent du point P au point A où les déplacements ne s'effectuent que vers le haut et que vers la droite auront cette même longueur.)
Afin d'aller de P à B, Alain doit se déplacer de 6 unités vers la droite et de 2 unités vers le haut, soit une distance totale de 8 unités.
Afin d'aller de P à C, Alain doit se déplacer de 3 unités vers la droite et de 3 unités vers le haut, soit une distance totale de 6 unités.
Afin d'aller de P à D, Alain doit se déplacer de 5 unités vers la droite et de 1 unité vers le haut, soit une distance totale de 6 unités.
Afin d'aller de P à E, Alain doit se déplacer de 1 unité vers la droite et de 4 unités vers le haut, soit une distance totale de 5 unités.
Donc, le chemin le plus court est celui du point P au point E.

RÉPONSE : (E)

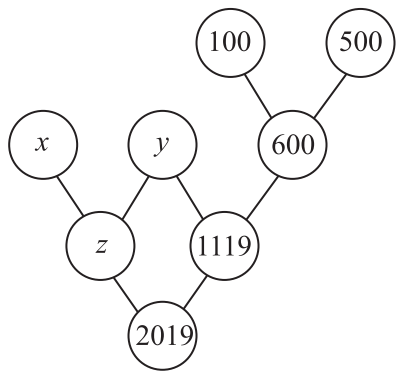
9. Puisque $(pq)(qr)(rp) = 16$, donc $pqqrrp = 16$ ou $ppqqrr = 16$ d'où $p^2q^2r^2 = 16$.
Ainsi, $(pqr)^2 = 16$, donc $pqr = \pm 4$.
En regardant les choix de réponse, on constate que pqr doit être positif, donc $pqr = 4$.

RÉPONSE : (C)

10. Matilda et Ellie prennent chacune $\frac{1}{2}$ du mur.
Matilda peint $\frac{1}{2}$ de sa moitié du mur, soit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ de tout le mur.
Ellie peint $\frac{1}{3}$ de sa moitié du mur, soit $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ de tout le mur.
Donc, $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$ du mur est peint en rouge.

Réponse : (A)

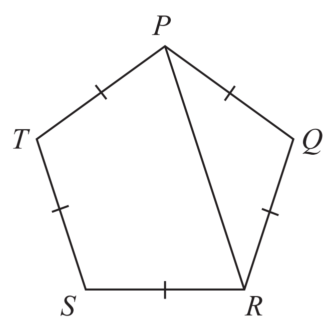
11. Soient y et z les valeurs dans les deux cercles vides :



À partir des règles données, $y + 600 = 1119$ d'où $y = 519$.
De plus, $z + 1119 = 2019$, donc $z = 900$.
Enfin, $x + y = z$, donc $x = z - y = 900 - 519 = 381$.

Réponse : (B)

12. On dessine un segment de droite qui relie P à R.



Puisque $PQRST$ est un pentagone régulier, donc $\angle PQR = \angle QRS = 108°$.
Puisque $PQ = QR$, donc le triangle PQR est un triangle isocèle où $\angle QPR = \angle QRP$.
Puisque $\angle PQR = 108°$, donc

$$\begin{aligned} \angle PQR + \angle QPR + \angle QRP &= 180° \\ 108° + 2\angle QRP &= 180° \\ 2\angle QRP &= 72° \\ \angle QRP &= 36° \end{aligned}$$

Puisque $\angle QRS = 108°$, donc $\angle PRS = \angle QRS - \angle QRP = 108° - 36° = 72°$.

Réponse : (A)

13. Dans la colonne des unités, on voit que $3 + 2 + q$ doit avoir un 2 comme chiffre des unités.
Puisque la valeur de q est un chiffre de 1 à 9, donc $3 + 2 + q$ est entre 6 et 14.
Puisque son chiffre des unitées est un 2, donc $3 + 2 + q = 12$, d'où $q = 7$.

Ceci veut aussi dire qu'il y a une retenue de 1 que l'on reporte dans la colonne des dizaines.
Dans la colonne des dizaines, on voit que $1 + 6 + p + 8$ doit avoir un 4 comme chiffre des unités.
Puisque la valeur de p est un chiffre de 1 à 9, donc $1 + 6 + p + 8$ est entre 16 et 24.
Puisque son chiffre des unitées est un 4, donc $1 + 6 + p + 8 = 24$, d'où $p = 9$.
Ceci veut aussi dire qu'il y a une retenue de 2 que l'on reporte dans la colonne des centaines.
Dans la colonne des centaines, on voit que $2+n+7+5$ doit avoir un 0 comme chiffre des unités.
Puisque la valeur de n est un chiffre de 1 à 9, donc $2 + n + 7 + 5$ est entre 15 et 23.
Puisque son chiffre des unitées est un 0, donc $2 + n + 7 + 5 = 20$, d'où $n = 6$.
Ceci veut aussi dire qu'il y a une retenue de 2 que l'on reporte dans la colonne des milliers.
Cela veut dire que $m = 2$.
Donc,

$$\begin{array}{rr} & 6\,6\,3 \\ & 7\,9\,2 \\ + & 5\,8\,7 \\ \hline & 2\,0\,4\,2 \end{array}$$

Enfin, $m + n + p + q = 2 + 6 + 9 + 7 = 24$.

Réponse : (B)

14. Chacune des lettres A, B, C, D et E ne parait qu'une seule fois dans chaque colonne et dans chaque rangée.
La lettre qui se trouve dans la deuxième rangée de la première colonne ne peut pas être un A, un E, ou un B (car ces lettres se trouvent déjà dans la colonne). Elle n'est aussi pas un C ou un A (car ces lettres se trouvent déjà dans la rangée).
La lettre qui se trouve dans la deuxième rangée de la première colonne est donc un D.
Cela signifie que la lettre qui se trouve dans la quatrième rangée de la première colonne doit être un C.
La lettre qui se trouve dans la deuxième rangée de la cinquième colonne ne peut pas être un D, un C, un A ou un E et doit donc être un B.
Cela signifique que la lettre dans la deuxième rangée de la deuxième colonne doit être un E.
En suivant le même raisonnement, les lettres qui se trouvent dans la première rangée des 3^{e} et 4^{e} colonnes sont respectivement D et B.
Cela signifie que la lettre qui se trouve dans la première rangée de la deuxième colonne doit être un C.
En suivant le même raisonnement, la lettre qui se trouve dans la cinquième rangée de la deuxième colonne doit être un A.
De plus, la lettre qui se trouve dans la troisième rangée de la deuxième colonne doit être un D.
Donc, la lettre qui va dans la case indiquée par le $*$ doit être un B.
On peut remplir le quadrillage de la manière suivante :

A	C	D	B	E
D	E	C	A	B
E	D	B	C	A
C	B	A	E	D
B	A	E	D	C

Réponse : (B)

15. La pente du segment de droite PR est $\dfrac{2-1}{0-4}$ et est donc égale à $-\dfrac{1}{4}$.

Puisque $\angle QPR = 90^\circ$, donc PQ et PR sont perpendiculaires.
Cela signifie que les pentes de PQ et de PR ont un produit qui est égal à -1.
Puisque la pente de PR est égale à $-\dfrac{1}{4}$, donc la pente de PQ est égale à 4.
Puisque le déplacement horizontal de PQ est égal à $2-0=2$, donc son déplacement vertical doit être égal à $4\times 2 = 8$.
Ainsi, $s-2=8$, d'où $s=10$.

Réponse : (C)

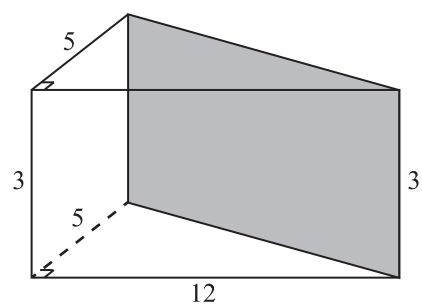
16. Supposons qu'il y a p personnes derrière Kaukab.
Il y a donc $2p$ personnes qui la précèdent.
Donc, le nombre total de personnes dans la file (y compris Kaukab) est égal à

$$n = p + 2p + 1 = 3p + 1$$

Ce dernier est un de plus qu'un multiple de 3.
Parmi les choix de réponse $(23, 20, 24, 21, 25)$, 25 est le seul qui est un de plus qu'un multiple de 3 (car $3\times 8+1$.)
Donc, 25 est une valeur possible de n.

Réponse : (E)

17. Considérons le prisme à base triangulaire situé à l'avant du prisme rectangulaire.
Ce prisme a cinq faces : un rectangle à l'avant, un rectangle à gauche, un triangle en bas, un triangle en haut et un rectangle à l'arrière.



Le rectangle à l'avant mesure 3×12 et a donc une aire qui est égale à 36.
Le rectangle à gauche mesure 3×5 et a donc une aire qui est égale à 15.
Les triangles d'en haut et d'en bas sont tous les deux des triangles rectangles dont les mesures des cathètes sont de 5 et de 12. Cela signifie que chacun des triangles a une aire qui est égale à $\frac{1}{2}\times 12\times 5 = 30$.
Le rectangle à l'arrière a une hauteur de 3. La longueur de ce rectangle est égale à la longueur de la diagonale de la face inférieure du prisme rectangulaire. On se sert du théorème de Pythagore afin de déterminer cette longueur : $\sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$. Donc, ce rectangle mesure 3×13 et a une aire qui est égale à 39.
En tout, l'aire totale de ce prisme à base triangulaire est donc égale à $36+15+2\times 30+39 = 150$.

Réponse : (D)

18. André court pendant 10 secondes à une vitesse de y m/s.
Donc, André parcourt une distance de $10y$ m.
Carl commence la course 20 secondes avant André et continue à courir pendant 10 secondes en même temps qu'André. Donc, Carl court pendant 30 secondes.
Puisque Carl court à une vitesse de x m/s, il parcourt donc une distance de $30x$ m.
Puisque Carl et André parcourent la même distance, donc $30x$ m $= 10y$ m, d'où $\frac{y}{x} = 3$.
Donc, $y : x = 3 : 1$.

Réponse : (D)

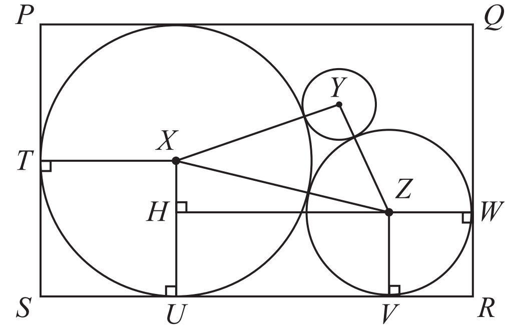
19. À l'aide des lois des exposants, on peut réécrire l'expression $\frac{2^{x+y}}{2^{x-y}} = 2^{(x+y)-(x-y)} = 2^{2y}$.
Puisque x et y sont des entiers positifs tels que $xy = 6$, alors les valeurs possibles de y sont les diviseurs positifs de 6 ; soit 1, 2, 3 ou 6. (Ces derniers correspondent à $x = 6, 3, 2, 1$.)
Les valeurs correspondantes de 2^{2y} sont $2^2 = 4$, $2^4 = 16$, $2^6 = 64$ et $2^{12} = 4096$.
Donc, la somme des valeurs possibles de $\frac{2^{x+y}}{2^{x-y}}$ est égale à $4 + 16 + 64 + 4096 = 4180$.

Réponse : (A)

20. Soient x, y et z les rayons respectifs des cercles de centres X, Y et Z.
La distance entre les centres de deux cercles tangents est égale à la somme des rayons de ces cercles.
Donc, $XY = x + y$, d'où $x + y = 30$.
De plus, $XZ = x + z$, d'où $x + z = 40$. Par ailleurs, $YZ = y + z$, d'où $y + z = 20$.
On additionne ces trois équations ensembles afin d'obtenir $(x+y)+(x+z)+(y+z) = 30+40+20$, donc $2x + 2y + 2z = 90$ ou $x + y + z = 45$.
Puisque $x + y = 30$ et que $x + y + z = 45$, donc $30 + z = 45$, d'où $z = 15$.
Puisque $y + z = 20$, alors $y = 20 - z = 5$.
Puisque $x + z = 40$, alors $x = 40 - z = 25$.
On peut calculer les mesures du rectangle à l'aide des rayons des cercles.

La hauteur du rectangle $PQRS$ est égale à la «hauteur» du cercle de centre X (ce qui correspond à la longueur du diamètre du cercle, soit $2x$.)
Donc, la hauteur du rectangle $PQRS$ est égale à 50.

Afin de déterminer la largeur du rectangle $PQRS$, on relie X aux points de tangence (c'est-à-dire, aux points où le cercle touche le rectangle) T et U qui sont situés respectivement sur PS et SR. On relie aussi Z aux points de tangence V et W qui sont situés respectivement sur SR et QR. On relie ensuite le centre Z au point H de manière que ZH soit perpendiculaire à XU. Puisque les rayons sont perpendiculaires aux tangentes qui passent aux points de tangence, donc XT, XU, ZV et ZW sont perpendiculaires aux côtés du rectangle.



Puisque $XTSU$ et $ZWRV$ ont chacun trois angles droits, leur quatrième angle est donc logiquement un angle droit aussi. Ils sont donc des rectangles.
Ainsi, $SU = TX = 25$ (le rayon du cercle de centre X) et $VR = ZW = 15$ (le rayon du cercle de centre Z).
En suivant le même raisonnement, $HUVZ$ est aussi un rectangle.
Donc, $UV = HZ$ et $HU = ZV = 15$.
Puisque $XH = XU - HU$, donc $XH = 10$.
À l'aide du théorème de Pythagore, $HZ = \sqrt{XZ^2 - XH^2} = \sqrt{40^2 - 10^2} = \sqrt{1500} = 10\sqrt{15}$, donc $UV = 10\sqrt{15}$.
Cela signifie que $SR = SU + UV + VR = 25 + 10\sqrt{15} + 15 = 40 + 10\sqrt{15}$.
Ainsi, l'aire du rectangle $PQRS$ est égale à $50 \times (40 + 10\sqrt{15}) = 2000 + 500\sqrt{15} \approx 3936{,}5$.
Parmi les choix de réponse, (E) 3950 est le choix le plus proche à cette réponse.

Réponse : (E)

21. *Solution 1*

On commence par les chiffres des unités.
Puisque $4 \times 4 = 16$, donc $T = 6$, on reporte ensuite le 1 à la colonne des dizaines.
Dans la colonne des dizaines, puisque $4 \times 6 + 1 = 25$, donc $S = 5$, on reporte ensuite le 2 à la colonne des centaines.
Dans la colonne des centaines, puisque $4 \times 5 + 2 = 22$, donc $R = 2$, on reporte ensuite le 2 à la colonne des milliers.
Dans la colonne des milliers, puisque $4 \times 2 + 2 = 10$, donc $Q = 0$, on reporte ensuite le 1 à la colonne des dizaines de milliers.
Dans la colonne des dizaines de milliers, puisque $4 \times 0 + 1 = 1$, donc $P = 1$, on reporte ensuite le 0 à la colonne des centaines de milliers.
Dans la colonne des centaines de milliers, $4 \times 1 + 0 = 4$, comme prévu.
Voici donc la multiplication :

$$\begin{array}{rr} & 1\,0\,2\,5\,6\,4 \\ \times & 4 \\ \hline & 4\,1\,0\,2\,5\,6 \end{array}$$

Enfin, $P + Q + R + S + T = 1 + 0 + 2 + 5 + 6 = 14$.

Solution 2

Soit x l'entier à cinq chiffres $PQRST$.
Cela signifie que $PQRST0 = 10x$, ainsi $PQRST4 = 10x + 4$.
De plus, $4PQRST = 400\,000 + PQRST = 400\,000 + x$.
À partir de la multiplication, $4(10x + 4) = 400\,000 + x$, d'où $40x + 16 = 400\,000 + x$ ou $39x = 399\,984$.
Donc, $x = \dfrac{399\,984}{39} = 10\,256$.
Puisque $PQRST = 10\,256$, alors $P + Q + R + S + T = 1 + 0 + 2 + 5 + 6 = 14$.

Réponse : (A)

22. Voici une façon qui satisferait les sept restrictions. Dans ce cas, les sept amis prennent au total quatre bus :

Bus 1	Bus 2	Bus 3	Bus 4
Abu	Bai	Don	Gia
Cha	Fan	Eva	

Puisqu'il existe des groupes de 3 amis qui doivent tous être dans des bus différents, il leur faudra au moins 3 bus.
On va maintenant démontrer que 3 bus ne suffiront pas.
Supposons que les sept amis puissent être placés dans 3 bus.
Puisque Abu, Bai et Don sont dans 3 bus différents, nous allones les placer respectivement dans trois bus différents, soit le Bus 1, le Bus 2 et le Bus 3. (Voir le tableau ci-dessous.)
Puisque Abu, Bai et Eva sont dans 3 bus différents, Eva doit être dans le Bus 3.
Puisque Cha et Bai sont dans 2 bus différents et que Cha et Eva sont dans 2 bus différents, alors Cha n'est ni dans le Bus 2 ni dans le Bus 3, ainsi Cha est dans le Bus 1.
Jusqu'ici on a :

Bus 1	Bus 2	Bus 3
Abu	Bai	Don
Cha		Eva

Les deux amis restants sont Fan et Gia.
Puisque Fan, Cha et Gia sont dans 3 bus différents, alors ni Fan ni Gia ne sont dans le Bus 1.
Puisque Don, Gia et Fan sont dans 3 bus différents, alors ni Fan ni Gia ne sont dans le Bus 3.
Puisque Gia et Fan ne sont pas dans le même bus, ils ne peuvent pas être tous les deux dans le Bus 2, ce qui signifie que les sept amis ne peuvent pas prendre uniquement 3 bus.
Par conséquent, il faudra au moins 4 bus.

Réponse : (B)

23. Puisque la roue roule à vitesse constante, alors le pourcentage de temps qu'une partie ombrée de la roue touche une partie ombrée du chemin sera égal au pourcentage de la longueur totale du chemin où il y a un contact «ombré sur ombré».
Puisque la roue a un rayon de 2 m, donc sa circonférence est égale à $2\pi \times 2$ m, c.-à-d. 4π m.
Puisque la roue est divisée en quatre quarts, alors la partie de la circonférence qu'occupe chaque quart est égale à π m.
Soit l'extrémité gauche du chemin 0 m.
Lorsque la roue tourne une première fois, la première partie ombrée de la roue touche le chemin entre 0 m et $\pi \approx 3{,}14$ m.
Alors que la route continue à tourner, la deuxième partie ombrée de la roue touche le chemin entre $2\pi \approx 6{,}28$ m et $3\pi \approx 9{,}42$ m.
Alors que la roue effectue 3 rotations complètes, un quart ombré de la roue sera en contact avec le chemin à 6 intervalles (2 intervalles par rotation).
À chaque multiple impair de 1 m, 1 m du chemin est ombré. À chaque multiple pair de 1 m, 1 m du chemin est non ombré.
On crée un tableau des sections où les quarts ombrés sont en contact avec le chemin et les parties de ces intervalles qui sont ombrées :

Début du quart (m)	Fin du quart (m)	Parties ombrées du chemin (m)
0	$\pi \approx 3.14$	1 à 2 ; 3 à π
$2\pi \approx 6{,}28$	$3\pi \approx 9{,}42$	7 à 8 ; 9 à 3π
$4\pi \approx 12{,}57$	$5\pi \approx 15{,}71$	13 à 14 ; 15 à 5π
$6\pi \approx 18{,}85$	$7\pi \approx 21{,}99$	19 à 20 ; 21 à 7π
$8\pi \approx 25{,}13$	$9\pi \approx 28{,}27$	8π à 26 ; 27 à 28
$10\pi \approx 31{,}42$	$11\pi \approx 34{,}56$	10π à 32 ; 33 à 34

Donc, la longueur totale de «ombré sur ombré», en mètres, est

$$1 + (\pi - 3) + 1 + (3\pi - 9) + 1 + (5\pi - 15) + 1 + (7\pi - 21) + (26 - 8\pi) + 1 + (32 - 10\pi) + 1$$

ce qui est égal à $(16 - 2\pi)$ m.
La longueur totale du chemin sur lequel roule la roue est de $3 \times 4\pi$ m ou 12π m.
Cela signifie que le pourcentage de temps requis est égal à $\dfrac{(16 - 2\pi)\text{ m}}{12\pi\text{ m}} \times 100\ \% \approx 25{,}8\ \%$.
Parmi les choix de réponse, (E) 26 % est le choix le plus proche à cette réponse.

Réponse : (E)

24. Soit A l'ensemble $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
On remarque en premier lieu que l'entier s que choisit Roberta est de la forme $s = 11m$, m étant un entier de l'ensemble A. On remarque aussi que l'entier t que choisit Roberta est de la forme $t = 101n$, n étant un entier de l'ensemble A.
Cela signifie que le produit rst est égal à $r(11m)(101n) = 11 \times 101 \times rmn$ où r, m et n proviennent tous de l'ensemble A.
Cela signifie que le nombre de valeurs possibles de rst est égal au nombre de valeurs possibles de rmn. Donc, on compte le nombre de valeurs possibles de rst en comptant le nombre de valeurs possibles de rmn.

On remarque que A ne contient qu'un seul multiple de 5 et qu'un seul multiple de 7. De plus, ces multiples n'incluent qu'un seul facteur de 5 et 7 respectivement.
On compte le nombre de valeurs possibles de rmn en considérant les différentes possibilités pour le nombre de facteurs de 5 et de 7 dans rmn.
Soit y le nombre de facteurs de 5 dans rmn et soit z le nombre de facteurs de 7 dans rmn. Puisque r, m et n comprennent chacun au plus un facteur de 5 et au plus un facteur de 7 et que chacun de r, m et n ne peut pas contenir à la fois un facteur de 5 et un facteur de 7, donc $y + z$ a une valeur maximale de 3.

<u>1^{er} cas : $y = 3$</u>
Si rmn contient 3 facteurs de 5, donc $r = m = n = 5$, ainsi $rmn = 5^3$.
Cela signifie qu'il n'y a qu'une seule valeur possible de rmn.

<u>2^e cas : $z = 3$</u>
Dans ce cas-ci, $rmn = 7^3$, donc il n'y a qu'une seule valeur possible de rmn.

<u>3^e cas : $y = 2$ et $z = 1$</u>
Dans ce cas-ci, il doit exister deux 5 et un 7 dans r, m, n.
Autrement dit, rmn doit être égal à $5^2 \times 7$.
Cela signifie qu'il n'y a qu'une seule valeur possible de rmn.

<u>4^e cas : $y = 1$ et $z = 2$</u>
Dans ce cas-ci, rmn doit être égal à 5×7^2.
Cela signifie qu'il n'y a qu'une seule valeur possible de rmn.

5^e cas : $y = 2$ et $z = 0$

Dans ce cas-ci, il doit exister deux 5 dans r,m,n et le troisième chiffre ne peut être ni 5 ni 7.
Cela signifie que les valeurs possibles du troisième chiffre sont $2, 3, 4, 6, 8, 9$.
Cela signifie qu'il y a 6 valeurs possibles de rmn dans ce cas.

6^e cas : $y = 0$ et $z = 2$

Comme dans le cas précédent, il y a 6 valeurs possibles de rmn.

7^e cas : $y = 1$ et $z = 1$

Dans ce cas-ci, il doit exister un 5 et un 7 dans r,m,n, tandis que le troisième chiffre est un chiffre de l'ensemble 2,3,4,6,8,9.
Cela signifie qu'il y a 6 valeurs possibles de rmn dans ce cas.

8^e cas : $y = 1$ et $z = 0$

Dans ce cas-ci, il doit exister un 5 dans r,m,n, de plus, aucun des chiffres n'est égal à 7. Supposons que $r = 5$.
m et n valent chacun un chiffre parmi les chiffres de l'ensemble $2, 3, 4, 6, 8, 9$.
On crée une table de multiplication afin de déterminer les valeurs possibles de mn :

$\times$	2	3	4	6	8	9
2	4	6	8	12	16	18
3	6	9	12	18	24	27
4	8	12	16	24	32	36
6	12	18	24	36	48	54
8	16	24	32	48	64	72
9	18	27	36	54	72	81

On retrouve 16 différentes valeurs dans le tableau, soit :

$$4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 81$$

Il y a donc 16 valeurs possibles de rmn dans ce cas.

9^e cas : $y = 0$ et $z = 1$

Comme dans le cas précédent, il y a 16 valeurs possibles de rmn.

10^e cas : $y = 0$ et $z = 0$

Dans ce cas-ci, aucun des chiffres dans r,m,n n'est un 5 ni un 7.
Donc r,m,n valent chacun un chiffre parmi les chiffres de l'ensemble $2, 3, 4, 6, 8, 9$.
Cela signifie que les seuls facteurs premiers possibles de rmn sont 2 et 3.
Chacun des chiffres de l'ensemble $2, 3, 4, 6, 8, 9$ comprend au plus 2 facteurs de 3 et seulement le chiffre 9 comprend 2 facteurs de 3.
Cela signifie que rmn comprend au plus 6 facteurs de 3.
Soit w le nombre de facteurs de 3 dans rmn.

- Si $w = 6$, donc $r = m = n = 9$, d'où $rmn = 9^3$. Dans ce cas, il n'y a qu'une seule valeur de rmn.
- Si $w = 5$, donc il doit y avoir deux 9 dans r,m,n et le troisième chiffre est soit 3 ou 6. Cela signifie que $rmn = 9^2 \times 3$ ou $rmn = 9^2 \times 6$. Dans ce cas, il y a deux valeurs possibles de rmn.
- Si $w = 4$, deux cas se présentent : dans le premier cas il y a deux 9 dans r,m,n et le troisième chiffre ne comprend pas un facteur de 3, tandis que dans le deuxième cas il y a un seul 9 dans r,m,n et les deuxième et troisième chiffres sont chacun 3 ou 6.
  Donc, rmn peut être égal à $9^2 \times 2$, $9^2 \times 4$, $9^2 \times 8$, $9 \times 3 \times 3$, $9 \times 3 \times 6$ ou $9 \times 6 \times 6$.
  Il y a des répétitions dans cette liste et donc les valeurs de rmn sont 9^2, $9^2 \times 2$, $9^2 \times 4$, $9^2 \times 8$.
  Dans ce cas, il y a quatre valeurs possibles de rmn.

- Si $w = 3$, parmi les trois chiffres dans r,m,n, un peut être égal à 9, un autre peut être égal à soit 3 ou 6, et le dernier peut être égal à 2, à 4 ou à 8. Sinon, chacun des trois chiffres pourrait être égal à 3 ou à 6.
  Dans le premier cas, rmn peut être $9 \times 3 \times 2$, $9 \times 3 \times 4$, $9 \times 3 \times 8$, $9 \times 6 \times 2$, $9 \times 6 \times 4$, $9 \times 6 \times 8$.
  On peut réécrire ceux-ci de la forme 27×2^1, 27×2^2, 27×2^3, 27×2^4.
  Dans le deuxième cas, rmn peut être $3 \times 3 \times 3$, $3 \times 3 \times 6$, $3 \times 6 \times 6$, $6 \times 6 \times 6$.
  On peut réécrire ceux-ci de la forme 27, 27×2^1, 27×2^2, 27×2^3.
  En combinant nos listes, on a 27, 27×2^1, 27×2^2, 27×2^3, 27×2^4.
  Donc, à partir de ces deux cas, on obtient 5 valeurs possibles de rmn.
- Si $w = 2$, deux cas se présentent : soit un des chiffres r,m,n est égal à 9, soit deux des chiffres r,m,n égalent 3 ou 6.
  Dans le premier cas, les deux autres chiffres dans r,m,n égalent 2, 4 ou 8.
  On remarque que $2 = 2^1$, que $4 = 2^2$ et que $8 = 2^3$.
  Donc rmn contient au moins deux facteurs de 2 (par exemple, $rmn = 9 \times 2 \times 2$) et contient au plus six facteurs de 2 ($rmn = 9 \times 8 \times 8$).
  Si deux chiffres dans r,m,n égalent 3 ou 6, alors le troisième chiffre est égal à 2, à 4 ou à 8.
  Donc, rmn contient au moins un facteur de 2 ($rmn = 3 \times 3 \times 2$) et au plus cinq facteurs de 2 ($rmn = 6 \times 6 \times 8$).
  En combinant les résultats des deux cas, rmn peut être égal à $9 \times 2, 9 \times 2^2, \ldots, 9 \times 2^6$, donc il y a 6 valeurs possibles de rmn.
- Si $w = 1$, donc un des chiffres dans r,m,n est égal à 3 ou à 6 tandis que les deux autres égalent 2, 4 ou 8.
  Donc, rmn peut contenir au plus sept facteurs de 2 ($rmn = 6 \times 8 \times 8$) et doit contenir au moins deux facteurs de 2 ($rmn = 3 \times 2 \times 2$).
  Chacun des nombres de facteurs de 2 compris entre 2 et 7 (y compris 2 et 7) est possible. Il y a donc 6 valeurs possibles de rmn.
- Si $w = 0$, donc aucun des chiffres dans r,m,n ne peut être égal à 3, à 6 ou à 9.
  Ainsi, chacun des chiffres dans r,m,n est égal à 2^1, à 2^2 ou à 2^3.
  Alors rmn doit être une puissance de 2 et doit comprendre au moins trois facteurs de 2 et au plus neuf facteurs de 2. Puisque ces cas sont tous possibles, il y a donc 7 valeurs possibles de rmn.

Au total, le nombre de valeurs possibles de rmn (et donc de rst) est

$$2 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 6 + 6 + 2 \times 16 + (1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7)$$

ce qui est égal à 85.

Réponse : (A)

25. Supposons que $PQ = a$, que $PS = b$ et que $PU = c$.
Puisque $PQRSTUVW$ est un prisme rectangulaire, donc $QR = PS = b$ et $ST = QV = PU = c$.
À l'aide du théorème de Pythagore, $PR^2 = PQ^2 + QR^2$, d'où $1867^2 = a^2 + b^2$.
À l'aide du théorème de Pythagore, $PV^2 = PQ^2 + QV^2$, d'où $2019^2 = a^2 + c^2$.
À l'aide du théorème de Pythagore, $PT^2 = PS^2 + ST^2$, d'où $x^2 = b^2 + c^2$.
En additionnant ces trois équations, on obtient

$$\begin{aligned}1867^2 + 2019^2 + x^2 &= (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2)\\ 1867^2 + 2019^2 + x^2 &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2\\ a^2 + b^2 + c^2 &= \frac{1867^2 + 2019^2 + x^2}{2}\end{aligned}$$

Puisque $a^2 + b^2 = 1867^2$, donc

$$c^2 = (a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2) = \frac{1867^2 + 2019^2 + x^2}{2} - 1867^2 = \frac{-1867^2 + 2019^2 + x^2}{2}$$

Puisque $a^2 + c^2 = 2019^2$, donc

$$b^2 = (a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + c^2) = \frac{1867^2 + 2019^2 + x^2}{2} - 2019^2 = \frac{1867^2 - 2019^2 + x^2}{2}$$

Puisque $b^2 + c^2 = x^2$, donc

$$a^2 = (a^2 + b^2 + c^2) - (b^2 + c^2) = \frac{1867^2 + 2019^2 + x^2}{2} - x^2 = \frac{1867^2 + 2019^2 - x^2}{2}$$

Puisque a, b et c sont les longueurs des arêtes du prisme, alors $a, b, c > 0$.
Puisque $a^2 > 0$, alors $\dfrac{1867^2 + 2019^2 - x^2}{2} > 0$, d'où $1867^2 + 2019^2 - x^2 > 0$ ou $x^2 < 2019^2 + 1867^2$.
Puisque $b^2 > 0$, alors $\dfrac{1867^2 - 2019^2 + x^2}{2} > 0$, d'où $1867^2 - 2019^2 + x^2 > 0$ ou $x^2 > 2019^2 - 1867^2$.
Puisque $c^2 > 0$, alors $\dfrac{-1867^2 + 2019^2 + x^2}{2} > 0$, d'où $-1867^2 + 2019^2 + x^2 > 0$. Cela signifie que $x^2 > 1867^2 - 2019^2$.
Puisque le côté droit de cette inégalité est négatif et que le côté gauche n'est pas négatif, cette inégalité sera toujours vraie.
Donc, il doit être vrai que $2019^2 - 1867^2 < x^2 < 2019^2 + 1867^2$.
Puisque les trois parties de cette inégalité sont positives, donc $\sqrt{2019^2 - 1867^2} < x < \sqrt{2019^2 + 1867^2}$.
Puisque $\sqrt{2019^2 - 1867^2} \approx 768{,}55$, que $\sqrt{2019^2 + 1867^2} \approx 2749{,}92$ et que x est un entier, donc $769 \leq x \leq 2749$.
Il y a $2749 - 769 + 1 = 1981$ entiers x dans cette étendue.
Toute telle valeur de x donne des valeurs positives aux expressions a^2, b^2 et c^2 et donc des valeurs positives à a, à b et à c ; autrement dit, on en obtient un prisme rectangulaire $PQRSTUVW$ dont les diagonales des faces correspondent à celles indiquées dans la question.
Il existe donc 1981 tels entiers x.

Réponse : (E)

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2018

(10e année – Secondaire IV)

le mardi 27 février 2018

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 28 février 2018

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Puisque $3 \times n = 6 \times 2$, alors $3n = 12$. Donc $n = \frac{12}{3}$, ou $n = 4$.

Réponse : (E)

2. Le quadrillage 4×5 contient 20 cases 1×1.
Pour que la moitié de ces cases soient ombrées, il doit y avoir 10 cases ombrées.
Puisque 3 cases sont déjà ombrées, il faut en ombrer 7 de plus $(10 - 3 = 7)$.

Réponse : (C)

3. Puisque la droite numérique, entre 0 et 2, est divisée en 8 parties égales, chaque espace a une longueur de 0,25 $(2 \div 8 = 0{,}25)$.
On a donc $S = 1 + 0{,}25$, ou $S = 1{,}25$.

Réponse : (D)

4. Puisque $9 = 3 \times 3$, alors $9^4 = (3 \times 3)^4 = 3^4 \times 3^4 = 3^8$.
OU
$$9^4 = 9 \times 9 \times 9 \times 9 = (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) = 3^8$$

Réponse : (D)

5. Un angle plein mesure $360°$.
L'angle au centre de $120°$ correspond à $\frac{120°}{360°}$ d'un angle plein, c'est-à-dire à $\frac{1}{3}$ d'un angle plein.
L'aire du secteur correspond donc à $\frac{1}{3}$ de l'aire du disque. Elle est donc égale à $\frac{1}{3} \times 9\pi$, ou 3π.

Réponse : (B)

6. On peut simplifier l'expression $x^2 + 2x - x(x + 1)$: $x^2 + 2x - x(x + 1) = x^2 + 2x - x^2 - x = x$.
Lorsque $x = 2018$, l'expression a donc une valeur de 2018.

Réponse : (B)

7. L'augmentation du nombre d'autos est égale à 24 $(48 - 24 = 24)$.
On veut exprimer cette augmentation comme un pourcentage par rapport au nombre initial.
On a : $\dfrac{24}{24} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{100}{100} = 100\,\%$.
OU
Puisque 48 est le double de 24, il y a eu une augmentation de $100\,\%$.

Réponse : (D)

8. Un segment est parallèle à l'axe des abscisses lorsque ses extrémités ont la même ordonnée.
La droite est donc parallèle à l'axe des abscisses lorsque $2k + 1 = 4k - 5$, ou $6 = 2k$, ou $k = 3$.
(On peut vérifier que lorsque $k = 3$, les points ont pour coordonnées $(3, 7)$ et $(8, 7)$.)

Réponse : (B)

9. Puisque 5, a et b ont une moyenne de 33, alors $\dfrac{5 + a + b}{3} = 33$.
On multiplie chaque membre par 3 pour obtenir $5 + a + b = 99$, d'où $a + b = 94$.
La moyenne de a et b est égale à $\dfrac{a + b}{2}$. Elle est donc égale à $\dfrac{94}{2}$, ou 47.

Réponse : (E)

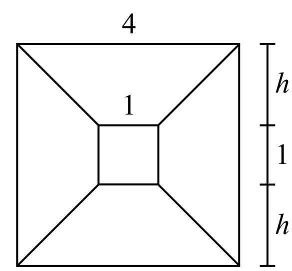
10. Parmi les numéros sur les uniformes, on remarque que :
   - 11 et 13 sont des nombres premiers
   - 16 est un carré parfait
   - 12, 14 et 16 sont pairs

   Puisque les numéros de Karl et de Liu étaient des nombres premiers, il s'agissait de 11 et de 13 dans un ordre quelconque.
   Puisque le numéro de Gina était un carré parfait, il s'agissait de 16.
   Puisque Helga et Julie avaient chacune un numéro pair, il s'agissait de 12 et 14 dans un ordre quelconque. (Le numéro 16 est déjà choisi.)
   Donc, Ioana portait le numéro restant, soit le 15.

   Réponse : (D)

11. *Solution 1*
   Puisque le grand carré a des côtés de longueur 4, son aire est égale à 4^2, ou 16.
   Puisque le petit carré a des côtés de longueur 1, son aire est égale à 1^2, ou 1.
   L'aire totale des quatre trapèzes identiques est égale à la différence de ces aires, soit $16-1$, ou 15.
   Puisque les trapèzes sont identiques, ils ont la même aire. Cette aire est donc égale à $\frac{15}{4}$.

   Solution 2
   Soit h la hauteur de chaque trapèze.
   Puisque le grand carré a un côté latéral de longueur 4, alors $h+1+h=4$. Donc $h=\frac{3}{2}$.
   Chacun des trapèzes a deux côtés parallèles de longueurs 1 et 4 et une hauteur de $\frac{3}{2}$.
   L'aire de chaque trapèze est donc égale à $\frac{1}{2}(1+4)(\frac{3}{2})$, ou $\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)$, ou $\frac{15}{4}$.



   Réponse : (D)

12. On sait que 1 zède a la même valeur que 16 ixes.
   On sait aussi que 2 ixes ont la même valeur que 29 igrecs.
   Puisque 16 ixes correspondent à 8 groupes de 2 ixes, alors 16 ixes ont la même valeur que 8×29 igrecs, ou 232 igrecs.
   Donc, 1 zède a la même valeur que 232 igrecs.

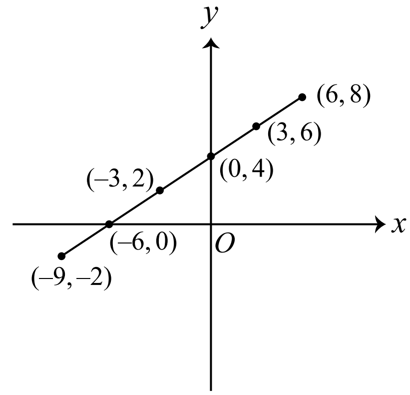
   Réponse : (C)

13. On cherche donc les valeurs de x pour lesquelles $x+1$ est un diviseur de 3.
   Les diviseurs le 3 sont $3, -3, 1$ et -1.
   Lorsque $x+1$ est égal à 3, -3, 1 et -1, alors x est égal à 2, -4, 0 et -2, respectivement.
   Il y a donc 4 telles valeurs de x.

   Réponse : (A)

14. *Solution 1*

Le segment de droite qui joint les points $(-9,-2)$ et $(6,8)$ a pour pente $\dfrac{8-(-2)}{6-(-9)}$, ou $\dfrac{10}{15}$, ou $\dfrac{2}{3}$.



Ainsi en partant du point $(-9,-2)$ et en se déplaçant de 2 vers le haut et de 3 vers la droite, on obtient d'autres points sur le segment dont les coordonnées sont des entiers.
On obtient les points $(-9,-2),(-6,0),(-3,2),(0,4),(3,6)$ et $(6,8)$.
On a donc 6 points sur le segment dont les deux coordonnées sont entières.
Y en a-t-il d'autres ?
S'il y a un autre tel point entre les points $(-9,-2)$ et $(6,8)$, son ordonnée doit être égale à -1, 1, 3, 5 ou 7. (On a déjà des points dont l'ordonnée est -2, 0, 2, 4, 6 ou 8).
On considère le point sur ce segment dont l'ordonnée est 7.
Puisque cette ordonnée est à mi-chemin entre les ordonnées 6 et 8, le point doit être le milieu du segment entre les points $(3,6)$ et $(6,8)$. Son abscisse doit donc être $\frac{1}{2}(3+6)$, ou 4,5, ce qui n'est pas un entier.
De même, les points sur le segment ayant pour ordonnées -1, 1, 3 ou 5 n'ont pas une abscisse entière.
Les six points ci-haut sont donc les seuls points avec deux coordonnées entières sur le segment.

Solution 2

Le segment de droite qui joint les points $(-9,-2)$ et $(6,8)$ a pour pente $\dfrac{8-(-2)}{6-(-9)}$, ou $\dfrac{10}{15}$, ou $\dfrac{2}{3}$.
La droite de pente $\dfrac{2}{3}$ et qui passe au point $(6,8)$ a pour équation $y-8=\frac{2}{3}(x-6)$, ou $y=\frac{2}{3}x+4$.
Soit (x,y) un point dont les deux coordonnées sont entières et qui est situé sur le segment de cette droite borné par les points $(-9,-2)$ et $(6,8)$.
Puisque y est un entier et que $\frac{2}{3}x=y-4$, alors $\frac{2}{3}x$ est un entier.
Donc, x doit être un multiple de 3.
Puisque x est dans l'intervalle de -9 à 6, les valeurs possibles de x sont $-9,-6,-3,0,3$ et 6.
Ceci nous donne les points de la solution 1 et justifie pourquoi il n'y a aucun autre point.
Il y a donc 6 tels points sur le segment.

Réponse : (E)

15. Puisque le triangle PQS est équilatéral, alors $\angle QPS=60^\circ$.
Puisque les angles RPQ, RPS et QPS entourent complètement le point P, leurs mesures ont une somme de 360°.
Puisque $\angle RPQ=\angle RPS$, alors $2\angle RPQ+\angle QPS=360^\circ$, ou $2\angle RPQ=360^\circ-60^\circ$, d'où $\angle RPQ=\angle RPS=150^\circ$.
Puisque $PR=PQ$, alors dans le triangle isocèle PQR, on a :

$$\angle PRQ=\angle PQR=\tfrac{1}{2}(180^\circ-\angle RPQ)=\tfrac{1}{2}(180^\circ-150^\circ)=15^\circ$$

De même, $\angle PRS=\angle PSR=15^\circ$.
Puisque $\angle QRS=\angle PRQ+\angle PRS$, alors $\angle QRS=15^\circ+15^\circ$, ou $\angle QRS=30^\circ$.

Réponse : (A)

16. Élisabeth peut monter jusqu'au cinquième barreau en grimpant 1 ou 2 barreaux à la fois. Puisqu'il n'y a que 5 barreaux à monter, elle ne peut grimper 2 barreaux d'un coup plus de 2 fois.
Elle peut donc grimper 2 barreaux d'un coup 0 fois, 1 fois ou 2 fois.

Si elle grimpe 2 barreaux d'un coup 0 fois, alors elle monte 1 marche à la fois : $1, 1, 1, 1, 1$

Si elle grimpe 2 barreaux d'un coup 1 fois, les autres barreaux doivent être grimpés 1 à la fois : $2, 1, 1, 1$
Or, elle peut le faire de différentes façons. Puisqu'elle lève le pied quatre fois, elle peut grimper les deux barreaux d'un coup la 1re fois, la 2e fois, la 3e fois ou la 4e fois.
Elle peut donc faire $2, 1, 1, 1$ ou $1, 2, 1, 1$ ou $1, 1, 2, 1$ ou $1, 1, 1, 2$.
Il y a donc 4 façons de monter dans ce cas.

Si elle grimpe 2 barreaux d'un coup deux fois, elle montera aussi d'un barreau 1 fois : $2, 2, 1$.
Ici aussi, elle peut le faire de différentes façons. Puisqu'elle lève le pied trois fois, elle peut monter d'un barreau la 1re fois, la 2e fois ou la 3e fois.
Elle peut donc faire $1, 2, 2$ ou $2, 1, 2$ ou $2, 2, 1$.
Il y a donc 3 façons de monter dans ce cas.

En tout, elle peut monter de 8 façons $(1 + 4 + 3 = 8)$.

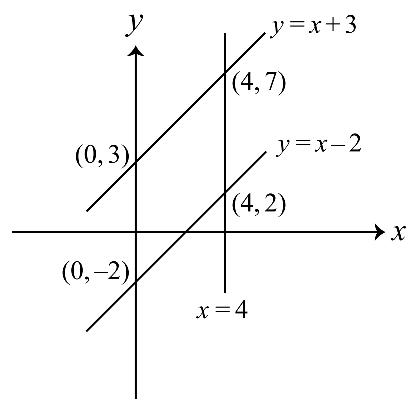
Réponse : (E)

17. Puisque $\dfrac{x-y}{x+y} = 5$, alors $x - y = 5(x + y)$.
On a donc $x - y = 5x + 5y$, d'où $0 = 4x + 6y$, ou $2x + 3y = 0$.
Donc $\dfrac{2x+3y}{3x-2y} = \dfrac{0}{3x-2y} = 0$.
(On peut aussi choisir des valeurs particulières de x et de y qui vérifient l'équation donnée, comme $x = 3$ et $y = -2$.
On obtient $\dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{3-(-2)}{3+(-2)} = \dfrac{5}{1} = 5$ et $\dfrac{2x+3y}{3x-2y} = \dfrac{2(3)+3(-2)}{3(3)-2(-2)} = \dfrac{0}{13} = 0$.)
On doit remarquer que si $\dfrac{x-y}{x+y} = 5$, alors $2x+3y = 0$ (comme ci-haut) et ainsi x et y ne peuvent pas tous deux égaler 0 (sinon $\dfrac{x-y}{x+y}$ serait égal à $\dfrac{0}{0}$, ce qui n'est pas bien défini).

Puisque $2x + 3y = 0$, alors $x = -\frac{3}{2}y$. Il est donc impossible pour x ou pour y d'égaler 0. Donc, ni x, ni y ne peut égaler 0.
Le dénominateur de l'expression $\dfrac{2x+3y}{3x-2y}$ est $3x - 2y$, ce qui est égal à $3(-\frac{3}{2}y)) - 2y$, ou $-\frac{13}{2}y$.
Cette expression n'est pas égale à 0, puisque $y \neq 0$.
Donc si $\dfrac{x-y}{x+y} = 5$, alors $\dfrac{2x+3y}{3x-2y} = 0$.

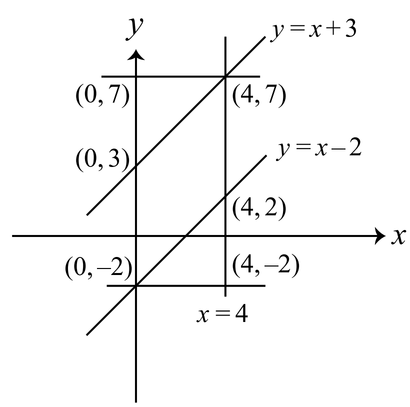
Réponse : (B)

18. *Solution 1*



Les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$ sont verticales et parallèles. Les droites d'équations $y = x - 2$ et $y = x + 3$ sont parallèles de pente 1.
Puisque le quadrilatère a deux paires de côtés parallèles, il s'agit d'un parallélogramme.
Son aire est donc égale à base × hauteur.
On considère que sa base est le côté vertical sur l'axe des ordonnées.
Puisque les droites de pente 1 ont pour ordonnée à l'origine respective -2 et 3, la base a une longueur de $3 - (-2)$, ou 5.
Puisque les côtés verticaux sont sur des droites parallèles d'équations $x = 0$ et $x = 4$, il y a une distance de 4 entre elles. Le parallélogramme a donc une hauteur de 4.
Le quadrilatère a donc une aire de 5×4, ou 20.

Solution 2



Les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$ sont verticales et parallèles. Les droites d'équations $y = x - 2$ et $y = x + 3$ sont parallèles de pente 1.
Les droites d'équations $y = x - 2$ et $y = x + 3$ coupent la droite d'équation $x = 0$ aux points d'abscisse 0, c'est-à-dire aux points $(0, -2)$ et $(0, 3)$.
Les droites d'équations $y = x - 2$ et $y = x + 3$ coupent la droite d'équation $x = 4$ aux points d'abscisse 4, c'est-à-dire aux points $(4, 2)$ et $(4, 7)$.
On trace une droite horizontale au point $(0, -2)$. Elle coupe la droite d'équation $x = 4$ au point $(4, -2)$. De même, on trace une droite horizontale au point $(4, 7)$. Elle coupe la droite d'équation $x = 0$ au point $(0, 7)$.
L'aire du quadrilatère est égale à l'aire du grand rectangle de sommets $(0, 7)$, $(4, 7)$, $(4, -2)$ et $(0, -2)$ moins l'aire des deux triangles.
Ce rectangle a des côtés de longueurs 4 $(4 - 0 = 4)$ et 9 $(7 - (-2) = 9)$. Il a donc une aire de 4×9, ou 36. Les deux triangles sont rectangles avec une base de longueur 4 $(4 - 0 = 4)$ et une hauteur de longueur 4 $(7 - 3 = 4$ et $2 - (-2) = 4)$. On pourrait les combiner pour former un carré avec des côtés de longueur 4. L'aire totale des triangles est donc égale à 4^2, ou 16.
L'aire du quadrilatère est donc égale à 20 $(36 - 16 = 20)$.

Réponse : (E)

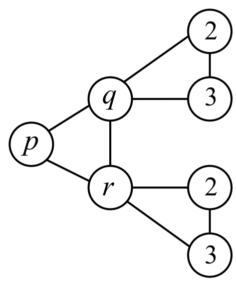
19. Soit G l'aire du grand disque, P l'aire du petit disque et C l'aire de la partie qui chevauche.
Puisque l'aire de la partie qui chevauche est égale à $\frac{3}{5}$ de l'aire du petit disque, alors $C = \frac{3}{5}P$.
Puisque l'aire de la partie qui chevauche est égale à $\frac{6}{25}$ de l'aire du grand disque, alors $C = \frac{6}{25}G$.
Donc $\frac{3}{5}P = \frac{6}{25}G$.
On multiplie chaque membre par 25 pour obtenir $15P = 6G$.
On divise chaque membre par 3 pour obtenir $5P = 2G$. Donc $\dfrac{5P}{G} = 2$, ou $\dfrac{P}{G} = \dfrac{2}{5}$.
Le rapport de l'aire du petit disque à l'aire du grand disque est de 2 : 5.

Réponse : (D)

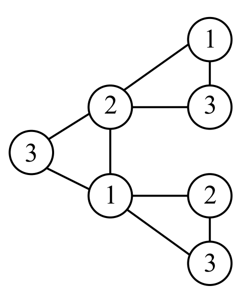
20. Lorsqu'on a calculé le produit des trois entiers choisis, ou bien il est une puissance de 2 ou bien il ne l'est pas.
Si p est la probabilité pour que le produit soit une puissance de 2 et si q est la probabilité pour que le produit ne soit pas une puissance de 2, alors $p + q = 1$.
On peut donc calculer q en déterminant la valeur de p et en calculant ensuite $q = 1 - p$.
Pour qu'un produit soit une puissance de 2, tous ses facteurs premiers doivent être des 2. Il faut donc que chacun des entiers choisis soit une puissance de 2.
Dans chacun des trois ensembles d'entiers, il y a 3 puissances de 2 (soit 2, 4 et 8) et 2 entiers qui ne sont pas des puissances de 2 (soit 6 et 10).
Ainsi la probabilité de choisir une puissance de 2 dans n'importe quel de ces ensembles est égale à $\frac{3}{5}$.
Puisqu'Abigaël, Bill et Charlie choisissent leur nombre de façon indépendante, la probabilité pour que chacun choisisse une puissance de 2 est égale à $\left(\frac{3}{5}\right)^3$, ou $\frac{27}{125}$.
Donc $p = \frac{27}{125}$. Puisque $q = 1 - p$, alors $q = 1 - \frac{27}{125}$, ou $q = \frac{98}{125}$.

Réponse : (C)

21. Puisque chacune des variables s, t, u et v prend une valeur de 1, 2 ou 3, que s et t ont des valeurs différentes et que u et v ont des valeurs différentes, leur somme ne peut pas être supérieure à $2 + 3 + 2 + 3$, ou 10.
Une somme de 10 peut seulement se produire si s et t ont pour valeurs 2 et 3 dans un ordre quelconque et si u et v ont pour valeurs 2 et 3 dans un ordre quelconque.



Or, q, s et t ont pour valeurs $1, 2$ et 3 dans un ordre quelconque et r, u et v ont pour valeurs $1, 2$ et 3 dans un ordre quelconque.
Puisque s et t ont pour valeurs 2 et 3, alors $q = 1$. De même, puisque u et v ont pour valeurs 2 et 3, alors $r = 1$.
De plus, puisque p, q et r ont pour valeurs $1, 2$ et 3 dans un ordre quelconque, on ne peut avoir $q = r = 1$.
Donc, on ne peut avoir $s + t + u + v = 10$.
La prochaine valeur possible de $s + t + u + v$ pourrait être 9.
On peut obtenir cette valeur de $s + t + u + v$ en remplissant la figure de manière que $s = 1$, $t = 3$, $u = 2$ et $v = 3$ et en procédant comme suit :



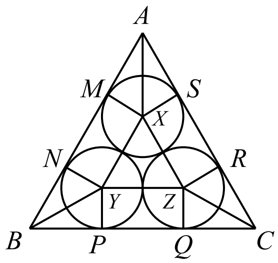
La valeur maximale possible de l'expression $s + t + u + v$ est 9.

Réponse : (B)

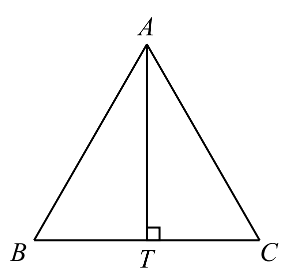
22. Pour que l'expression ait une valeur entière, il faut que chaque facteur premier du dénominateur puisse annuler un facteur du numérateur.
En d'autres mots, chaque facteur premier du dénominateur doit paraitre autant de fois ou davantage dans le numérateur.
On sait que $25 = 5^2$. Donc $25^y = 5^{2y}$.
De même, $36 = 6^2 = 2^2 3^2$. Donc $36^x = (2^2 3^2)^x = 2^{2x} 3^{2x}$.
L'expression donnée est donc égale à $\dfrac{30!}{2^{2x} 3^{2x} 5^{2y}}$.
On compte le nombre de fois que les facteurs premiers 5, 3 et 2 paraissent dans le numérateur.
L'expression 30! représente le produit des entiers de 1 à 30. Parmi ces entiers, il y a 6 multiples de 5, soit $5, 10, 15, 20, 25$ et 30.
Chacun de ces multiples admet un diviseur 5, sauf le 25 qui en admet deux.
En factorisation première, le numérateur admet donc 7 facteurs 5.
Pour que le numérateur admette au moins autant de facteurs 5 que le dénominateur, on doit donc avoir $7 \geq 2y$.
Puisque y est un entier, alors $y \leq 3$.
Parmi les 30 nombres qui forment 30!, il y a 10 multiples de 3, soit $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27$ et 30.
Sept de ces multiples admettent exactement un diviseur 3, soit $3, 6, 12, 15, 21, 24$ et 30.
Deux de ces multiples admettent deux diviseurs 3, soit 9 et 18.
Un de ces multiples admet trois diviseurs 3, soit 27.
Le numérateur admet donc 14 facteurs 3 $(7(1) + 2(2) + 1(3) = 14)$.
Pour que le numérateur admette au moins autant de facteurs 3 que le dénominateur, on doit donc avoir $14 \geq 2x$.
Puisque x est un entier, alors $x \leq 7$.
Si $x \leq 7$, alors le dénominateur admet au plus 14 facteurs premiers 2. Puisque les 30 nombres qui forment le produit de 30! comprennent 15 nombres pairs, ils admettent au moins 15 facteurs premiers 2. Il y a donc plus de facteurs 2 dans le numérateur de l'expression que dans le dénominateur. La valeur de x n'est donc pas influencée par le nombre de facteurs 2.
Puisque $x \leq 7$ et $y \leq 3$, alors $x + y \leq 7 + 3 = 10$.
On remarque que si $x = 7$ et $y = 3$, l'expression donnée a une valeur entière et la valeur maximale de $x + y$, soit 10, peut être atteinte.

Réponse : (A)

23. Pour déterminer le volume du prisme, on déterminera l'aire de sa base et sa hauteur.
D'abord l'aire de la base.
Toutes coupes transversales du prisme parallèles à la base sont identiques. On considère une coupe transversale située à 1 unité au-dessus de la base.
Puisque les sphères ont un rayon de 1, cette coupe transversale de forme triangulaire passe au centre de chaque sphère et aux points de contact des sphères avec les côtés latéraux du prisme.
Soit A, B et C les sommets de la coupe transversale de forme triangulaire, X, Y et Z les centres des sphères et M, N, P, Q, R et S les points de contact des sphères et des côtés latéraux du prisme. La figure suivante illustre la coupe transversale :

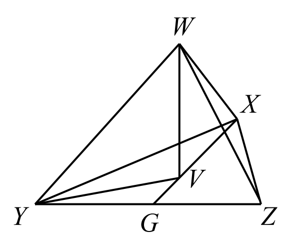


On trace les segments XM, XS, XY, XZ et XA, les segments YN, YP, YZ et YB, ainsi que les segments ZQ, ZR et ZC.
On détermine la longueur de BC. Un calcul semblable mène à la longueur de AB et de AC. Par symétrie, $AB = AC = BC$.
Puisque les rayons de cercles sont perpendiculaires aux tangentes aux points de contact, YP et ZQ sont perpendiculaires à BC.
On a $YP = ZQ = 1$, puisque les sphères et les cercles ont un rayon de 1.
Puisque $ZYPQ$ est rectangle en P et en Q et que $YP = ZQ = 1$, alors $ZYPQ$ est un rectangle.
Donc $YZ = PQ$.
Puisque YZ passe au point de contact des deux cercles, il a une longueur de 2, soit la somme des deux rayons.
Donc $PQ = YZ = 2$.
Puisque $AB = BC = CA$, le triangle ABC est équilatéral. Donc $\angle ABC = 60°$.
Par symétrie, YB est la bissectrice de l'angle ABC.
Donc $\angle YBP = 30°$ et le triangle BYP est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Puisque $YP = 1$, alors $BP = \sqrt{3}$ (les longueurs des côtés d'un tel triangle sont dans un rapport de $1 : \sqrt{3} : 2$).
De même, $QC = \sqrt{3}$.
Puisque, $BC = BP + PQ + QC$, alors $BC = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}$, ou $BC = 2 + 2\sqrt{3}$.
Donc $AB = BC = CA = 2 + 2\sqrt{3}$.
Pour calculer l'aire du triangle ABC, on abaisse une perpendiculaire au point A jusqu'au point T sur BC.



Puisque $\angle ABC = 60°$, le triangle ABT est un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Puisque $AB = 2 + 2\sqrt{3}$ et que $AT = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$, alors $AT = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 + 2\sqrt{3})$.

Puisque l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(BC)(AT)$, elle est égale à $\frac{1}{2}(2+2\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2+2\sqrt{3})\right)$, ou $\frac{\sqrt{3}}{4}(2+2\sqrt{3})^2$.
La base du prisme (c.-à-d. le triangle ABC) a donc une aire de $\frac{\sqrt{3}}{4}(2+2\sqrt{3})^2$.
On calcule maintenant la hauteur du prisme.
Soit W le centre de la sphère du dessus.
La distance du point W jusqu'à la face supérieure du prisme est égale au rayon de cette sphère, soit 1.
De même, la distance de la face inférieure du prisme (sa base) aux points X, Y et Z est égale à 1.
Pour déterminer la hauteur du prisme, il reste à déterminer la distance entre le point W et la coupe transversale qui contient X, Y et Z.
La hauteur du prisme est égale à cette distance plus 2.
Puisque les quatre sphères se touchent, il y a une distance de 2 entre n'importe quels deux centres des sphères.
Donc $WX = XY = YZ = WZ = WY = XZ = 2$. ($WXYZ$ est donc un tétraèdre dont les arêtes ont la même longueur.)
On cherche la hauteur de ce tétraèdre.
On joint W au centre V du triangle XYZ.
Par symétrie, W est directement au-dessus de V.



Soit G le milieu de YZ. On a donc $YG = GZ = 1$.
On trace VY et VG.
Puisque V est le centre du triangle XYZ, alors VG est perpendiculaire à YZ au point G.
Puisque le triangle XYZ est équilatéral, $\angle VYG = \frac{1}{2}\angle XYZ = 30°$. Ceci découle du fait que le centre V du triangle équilatéral XYZ est situé sur la bissectrice de chaque angle du triangle.
Le triangle YVG est donc aussi un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $YV = \frac{2}{\sqrt{3}}YG$, ou $YV = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
Le triangle WYV est rectangle en V.
Donc $WV = \sqrt{WY^2 - YV^2}$, d'où $WV = \sqrt{2^2 - \frac{4}{3}}$, ou $WV = \sqrt{\frac{8}{3}}$.
Le prisme a donc une hauteur de $1 + 1 + \sqrt{\frac{8}{3}}$.
Le volume du prisme est égal au produit de l'aire de sa base et de sa hauteur. Il est donc égal à $\frac{\sqrt{3}}{4}(2+2\sqrt{3})^2 \cdot \left(2 + \sqrt{\frac{8}{3}}\right)$, sont environ 46,97.
Cette réponse est plus près du choix de réponse 47,00.

Réponse : (E)

24. Puisqu'il doit y avoir au moins 2 bas blancs (B) entre n'importe quels 2 bas noirs (N), on commence par placer n bas noirs avec exactement 2 bas blancs entre chaque deux bas noirs :

$$NBBNBBNBBN\cdots NBBN$$

Puisqu'il y a n bas noirs, il y a $n-1$ espaces entre eux. On a donc placé $2(n-1)$ bas blancs, ou $2n-2$ bas blancs dans ces espaces.
Il reste donc 2 bas blancs à placer. Il y a $n+1$ endroits où on peut les placer : soit avant le premier bas noir, soit après le dernier bas noir, ou dans les $n-1$ espaces entre les bas noirs.
Ces 2 bas blancs peuvent placés ensemble au même endroit ou à deux endroits séparés.
Si les 2 bas sont placés au même endroit, ils peuvent être placés à $n+1$ endroits. Il y a donc $n+1$ façons de le faire. (Il n'est pas important de tenir compte d'où un bas blanc est placé à un endroit particulier, car tous les bas blancs sont identiques.)
Les deux bas blancs peuvent aussi être placés à deux des $n+1$ endroits.
Il y a $n+1$ endroits possibles pour le premier bas. Pour chacun de ces endroits, il y a n endroits possibles pour le deuxième bas (n'importe quel autre endroit que celui du premier bas).
Puisque ces deux endroits sont identiques, on a compté deux fois le nombre total de possibilités.
Il y a donc $\frac{1}{2}(n+1)n$ choix de deux endroits séparés pour placer ces deux bas.
En tout, le nombre de façons de placer tous les bas est égal à $(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)n$, ou $(n+1)(1+\frac{1}{2}n)$, ou $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.
On veut connaitre la plus petite valeur possible de n pour laquelle cette somme est supérieure à 1 000 000.
Ceci est équivalent à déterminer la plus petite valeur possible de n pour laquelle l'expression $(n+1)(n+2)$ est supérieure à 2 000 000.
On remarque que la valeur de $(n+1)(n+2)$ augmente à mesure que n augmente, puisque chacun des facteurs $n+1$ et $n+2$ est croissant, ce qui fait que leur produit est croissant.
Lorsque $n = 1412$, on a $(n+1)(n+2) = 1\,997\,982$.
Lorsque $n = 1413$, on a $(n+1)(n+2) = 2\,000\,810$.
Puisque $(n+1)(n+2)$ est croissante, alors $n = 1413$ est la plus petite valeur pour laquelle l'expression $(n+1)(n+2)$ a une valeur supérieure à 2 000 000. C'est donc le plus petit entier positif pour lequel il y a plus de 1 000 000 alignements des bas.
La somme des chiffres de $n = 1413$ est 9 $(1+4+1+3=9)$.

Réponse : (A)

25. Puisque les termes de chaque suite peuvent être regroupés pour obtenir des sommes positives et des sommes négatives, il doit y avoir des termes positifs et des termes négatifs.
Puisque les 15 termes ont au plus deux valeurs différentes et que certains termes doivent être positifs, tandis que d'autres doivent être négatifs, alors les termes doivent avoir exactement une de deux valeurs, une positive et l'autre négative.
Soit x et y ces valeurs. Ces valeurs sont des entiers et on pose $x > 0$ et $y < 0$.
On considère une de ces suites :

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$$

Puisque la somme de six termes consécutifs est toujours positive, alors $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 > 0$.
Puisque la somme de onze termes consécutifs est toujours négative, alors
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} < 0$.
Puisque $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 > 0$ et $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}) < 0$, alors $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} < 0$.
D'après la condition des six termes, on a $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} > 0$.
Puisque $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} < 0$ et $a_6 + (a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}) > 0$, alors $a_6 > 0$. Donc $a_6 = x$.
D'après la condition des six termes, on a $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} > 0$.
Puisque $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} < 0$, alors $a_{12} > 0$. Donc $a_{12} = x$.
On peut répéter cet argument en se déplaçant d'un terme vers la droite.
Ainsi avec $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7 > 0$ et $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12} < 0$ et en utilisant le même argument que le précédent, on obtient $a_7 = a_{13} = x$.
En se déplaçant encore d'un terme vers la droite, on obtient $a_8 = a_{14} = x$ et $a_9 = a_{15} = x$.
La suite est donc :

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, x, x, x, x, a_{10}, a_{11}, x, x, x, x$$

On peut répéter l'argument en commençant à l'extrémité droite de la suite.
Ainsi avec $a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15} > 0$ et $a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15} < 0$, on peut conclure que $a_{10} = x$ et $a_4 = x$.
On recommence en se déplaçant vers la gauche pour obtenir $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_{10} = x$.
La suite est donc :

$$x, x, x, x, a_5, x, x, x, x, x, a_{11}, x, x, x, x$$

Au moins un des termes a_5 et a_{11} doit être égal à y, autrement tous les termes de la suite seraient positifs.
De fait, chacun de ces termes doit être égal à y.
En effet, supposons au contraire que $a_5 = y$ et que $a_{11} = x$.
Dans ce cas, la somme des 6 premiers termes de la suite est égale à $5x + y$. Cette somme doit être positive, c'est-à-dire que $5x + y > 0$.
De plus, la somme des 11 premiers termes est égale à $10x + y$ et cette somme doit être négative (c.-à-d. que $10x + y < 0$).
Or, $x > 0$ et ainsi $10x + y = 5x + (5x + y) > 0$, ce qui contredit $10x + y < 0$.
On obtient la même contradiction si on suppose que $a_5 = x$ et $a_{11} = y$.
Donc, $a_5 = a_{11} = y$ et la suite est :

$$x, x, x, x, y, x, x, x, x, x, y, x, x, x, x$$

Dans ce cas, chaque groupe de 6 termes consécutifs comprend exactement cinq x et la somme de chaque groupe de 6 termes consécutifs est égale à $5x + y$.
Or, on sait que $5x + y > 0$.

De plus, la somme de chaque groupe de 11 termes consécutifs est égale à $9x + 2y$.
On sait que $9x + 2y < 0$.
On a donc transformé le problème donné au problème équivalent suivant : compter le nombre de couples (x, y) d'entiers ($x > 0$ et $y < 0$) pour lesquels $5x + y > 0$ et $9x + 2y < 0$, sachant que $1 \leq x \leq 16$ ou $-16 \leq y \leq -1$.
Supposons que $1 \leq x \leq 16$.
D'après $5x + y > 0$ et $9x + 2y < 0$, on a $-5x < y < -4{,}5x$.
On remplit un tableau qui énumère les valeurs de x de 1 à 16, avec les contraintes correspondantes sur y et les valeurs de y qui en résultent :

x	$-5x$	$-4{,}5x$	Valeurs possibles de y
1	-5	$-4{,}5$	Aucune
2	-10	-9	Aucune
3	-15	$-13{,}5$	-14
4	-20	-18	-19
5	-25	$-22{,}5$	$-24, -23$
6	-30	-27	$-29, -28$
7	-35	$-31{,}5$	$-34, -33, -32$
8	-40	-36	$-39, -38, -37$
9	-45	$-40{,}5$	$-44, -43, -42, -41$
10	-50	-45	$-49, -48, -47, -46$
11	-55	$-49{,}5$	$-54, -53, -52, -51, -50$
12	-60	-54	$-59, -58, -57, -56, -55$
13	-65	$-58{,}5$	$-64, -63, -62, -61, -60, -59$
14	-70	-63	$-69, -68, -67, -66, -65, -64$
15	-75	$-67{,}5$	$-74, -73, -72, -71, -70, -69, -68$
16	-80	-72	$-79, -78, -77, -76, -75, -74, -73$

Ainsi lorsque $1 \leq x \leq 16$, il y a 56 couples (x, y) $(2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 56)$ et il y a donc 56 suites.
Par exemple, si $x = 5$ et $y = -24$, on obtient la suite

$$5, 5, 5, 5, -24, 5, 5, 5, 5, 5, -24, 5, 5, 5, 5$$

qui vérifie les conditions données.

Y a-t-il d'autres suites lorsque $-16 \leq y \leq -1$?
Puisque $5x + y > 0$, alors $x > -0{,}2y$. Puisque $y \geq -16$, alors $x < 0{,}2(16)$, ou $x < 3{,}2$.
Puisque $9x + 2y < 0$, alors $x < -\frac{2}{9}y$. Puisque $y \leq -1$, alors $x > \frac{2}{9}(1)$, ou $x > \frac{2}{9}$.
Puisque $\frac{2}{9} < x < 3{,}2$, toute suite avec $-16 \leq y \leq -1$ satisfait aussi à $1 \leq x \leq 16$ et une telle suite a déjà été comptée.
Le nombre N de suites est donc égal à 56.

Réponse : (E)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2017

(10^{e} année – Secondaire IV)

le mardi 28 février 2017
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 1er mars 2017
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $6 \times 111 - 2 \times 111 = 666 - 222 = 444$.
OU : $6 \times 111 - 2 \times 111 = (6-2) \times 111 = (4)111 = 444$.

Réponse : (C)

2. On a : $\dfrac{5^2 - 9}{5-3} = \dfrac{25-9}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$.
OU : On sait que $5^2 - 9 = 5^2 - 3^2 = (5-3)(5+3)$. Donc $\dfrac{5^2-9}{5-3} = \dfrac{(5-3)(5+3)}{5-3} = 5+3 = 8$.

Réponse : (D)

3. La taille du bonhomme est égale à la somme des longueurs des diamètres des trois sphères.
Puisque les sphères ont des rayons de 10 cm, 20 cm et 30 cm, elles ont des diamètres respectifs de 20 cm, 40 cm et 60 cm.
La taille du bonhomme est de 20 cm + 40 cm + 60 cm, ou 120 cm.

Réponse : (D)

4. On écrit chaque fraction sous forme irréductible :

$$\frac{44444}{55555} = \frac{4(11111)}{5(11111)} = \frac{4}{5} \qquad \frac{5555}{6666} = \frac{5(1111)}{6(1111)} = \frac{5}{6} \qquad \frac{666}{777} = \frac{6(111)}{7(111)} = \frac{6}{7} \qquad \frac{77}{88} = \frac{7(11)}{8(11)} = \frac{7}{8} \qquad \frac{8}{9}$$

(La dernière fraction était déjà sous forme irréductible.)
On remarque que $\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$ et $\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$ et $\frac{6}{7} = 1 - \frac{1}{7}$ et $\frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}$ et $\frac{8}{9} = 1 - \frac{1}{9}$.
La fraction qui a la plus grande valeur est celle qui est égale à 1 moins la plus petite fraction.
Puisque $\frac{1}{9} < \frac{1}{8} < \frac{1}{7} < \frac{1}{6} < \frac{1}{5}$, la fraction qui a la plus grande valeur est $\frac{8}{9}$.

Réponse : (E)

5. Puisque le réservoir perd 300 litres en 25 heures, l'eau sort du réservoir au taux de $\dfrac{300 \text{ L}}{25 \text{ h}}$, ou 12 L/h.

Réponse : (A)

6. Lorsque Pénélope plie la feuille de papier en deux, le nombre de couches de papier est doublé.
En commençant par les 4 couches de papier obtenues après les deux premiers plis, elle obtient successivement 8 couches, 16 couches, 32 couches et ainsi de suite.
Parmi les choix de réponse, qui sont tous inférieurs à 32, seul 16 est un nombre possible de couches de papier.

Réponse : (D)

7. Par définition, on a : $2 \diamondsuit 7 = 2^2(7) - 2(7^2) = 4(7) - 2(49) = 28 - 98 = -70$

Réponse : (B)

8. Dans le choix (A), les 1re et 3e cartes ont 0 nombre en commun. Donc ce n'est pas le bon choix.
Dans le choix (B), les 2e et 3e cartes ont 2 nombres en commun. Donc ce n'est pas le bon choix.
Dans le choix (C), les 1re et 3e cartes ont 2 nombres en commun. Donc ce n'est pas le bon choix.
Dans le choix (E), les 1re et 3e cartes ont 2 nombres en commun. Donc ce n'est pas le bon choix.
Dans le choix (D), les 1re et 2e cartes ont 1 nombre en commun (le 4), les 1re et 3e cartes ont 1 nombre en commun (le 7), et les 2e et 3e cartes ont 1 nombre en commun (le 2). Donc (D) est le bon choix.

Réponse : (D)

9. Puisque l'addition de 226 \$ inclut la taxe de 13 %, alors 226 \$ correspond à 113 % de l'addition avant la taxe.
Donc, l'addition avant la taxe est égale à $\frac{226\,\$}{1{,}13}$, ou 200 \$.
Le pourboire correspond à 15 % de l'addition avant la taxe, c'est-à-dire à $200\,\$ \times 0{,}15$, ou 30 \$.
Réponse : (C)

10. Puisque PQR est un angle plat, alors $\angle PQT + \angle RQT = 180^\circ$.
Donc $x^\circ + (x - 50)^\circ = 180^\circ$, d'où $2x - 50 = 180$. Donc $2x = 230$, ou $x = 115$.
Puisque $\angle TUR = (x + 25)^\circ$, alors $\angle TUR = 140^\circ$.
Puisque TU et PS sont parallèles, les angles URS et TUR sont alternes-internes.
Donc $\angle URS = \angle TUR = 140^\circ$.
Réponse : (B)

11. Puisque les 10 carrés identiques ont une aire totale de 160 cm^2, chaque carré a une aire de $\dfrac{160 \text{ cm}^2}{10}$, ou 16 cm^2.
Chaque carré a donc des côtés de longueur $\sqrt{16 \text{ cm}^2}$, ou 4 cm.
La figure a un contour formé de 22 longueurs de côtés (4 à gauche, 4 en dessous, 4 à droite, 2 au-dessus et 8 au milieu qui forment un U).
Le périmètre de la figure est donc égal à $4 \text{ cm} \times 22$, ou 88 cm.
Réponse : (C)

12. Puisque p, q et r ont une moyenne de 9, alors $\dfrac{p+q+r}{3} = 9$, d'où $p + q + r = 27$.
Puisque s et t ont une moyenne de 14, alors $\dfrac{s+t}{2} = 14$, d'où $s + t = 28$.
Les cinq nombres ont donc une somme égale à $(p + q + r) + (s + t)$, ou $27 + 28$, ou 55.
Leur moyenne est donc égale à $\dfrac{55}{5}$, ou 11.
Réponse : (A)

13. On considère d'abord la colonne des unités.
On voit que $Z + Z + Z$ (ou $3Z$) a un chiffre des unités égal à 5.
En attribuant successivement à Z des valeurs de 0 à 9, on voit que Z doit être un 5.
Puisque $Z = 5$, on a $3Z = 15$, ce qui représente 5 unités et 1 dizaine. Cette dizaine s'ajoute à la colonne des dizaines.
Dans cette colonne, on voit que $1 + Y + Y + Y$ (ou $3Y + 1$) doit donner un 7 dans la colonne des dizaines.
En attribuant successivement à Y des valeurs de 0 à 9, on voit que Y doit être un 2.
Lorsque $Y = 2$, la somme de la colonne des dizaines est égale à 7 dizaines, sans retenue (la somme n'est pas 17 dizaines ou 27 dizaines).
Dans la colonne des centaines, on a $2X = 16$, d'où $X = 8$.
On peut vérifier que si $X = 8$, $Y = 2$ et $Z = 5$, l'addition devient $825 + 825 + 25$ et la somme est bien égale à 1675.
Donc $X + Y + Z = 8 + 2 + 5$, ou $X + Y + Z = 15$.
Réponse : (B)

14. Puisqu'Igor est plus petit que Jie, Igor ne peut être le plus grand.
Puisque Faye est plus grande que Goa, Goa ne peut être la plus grande.
Puisque Jie est plus grande que Faye, Faye ne peut être la plus grande.
Puisque Han est plus petit que Goa, Han ne peut être le plus grand.
Seule Jie n'a pas été éliminée. Elle est donc la plus grande.

Réponse : (E)

15. Puisqu'il y a 32 billes rouges dans le sac et que le rapport du nombre de billes rouges au nombre de billes bleues est de 4 : 7, il y a $\frac{7}{4}(32)$ billes bleues, ou 56 billes bleues dans le sac.
Puisqu'il y a 56 billes bleues dans le sac et que le rapport du nombre de billes bleues au nombre de billes violettes est de 2 : 3, il y a $\frac{3}{2}(56)$ billes violettes, ou 84 billes violettes dans le sac.
Puisque le sac ne contient que des billes rouges, bleues ou violettes, il y a $(32 + 56 + 84)$ billes, ou 172 billes dans le sac.

Réponse : (E)

16. Puisque $x + 2y = 30$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{5} + \frac{2y}{3} + \frac{2y}{5} + \frac{x}{3} &= \frac{x}{5} + \frac{2y}{5} + \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} \\
&= \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}(2y) + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}(2y) \\
&= \frac{1}{5}(x + 2y) + \frac{1}{3}(x + 2y) \\
&= \frac{1}{5}(30) + \frac{1}{3}(30) \\
&= 6 + 10 \\
&= 16
\end{aligned}$$

Réponse : (B)

17. On écrit d'abord 1230 en factorisation première :

$$1230 = 2 \times 615 = 2 \times 5 \times 123 = 2 \times 5 \times 3 \times 41$$

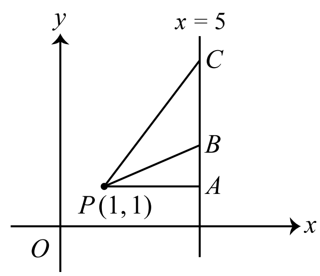
On cherche trois entiers strictement positifs, r, s, t, tels que $r \times s \times t = 1230$ et dont la somme est aussi petite que possible. On remarque que tous les choix de réponse pour la valeur minimale de $r + s + t$ sont inférieurs à 60.
Puisque 41 est un facteur premier de 1230, un des nombres r, s, t doit être un multiple de 41.
Or, les multiples de 41 sont 82, 123, ... et ils sont tous supérieurs à 60 à l'exception de 41.
Donc le multiple de 41 dans la liste r, s, t doit être 41.
On pose donc $t = 41$.
On cherche donc deux entiers strictement positifs, r et s, tels que $r \times s = 2 \times 3 \times 5 = 30$ et dont la somme $r + s$ est aussi petite que possible. (Puisque t est fixe, minimiser $r + s + t$ est équivalent à minimiser $r + s$.)
Les valeurs possibles de r et s sont 1 et 30, 2 et 15, 3 et 30, 5 et 6.
Les valeurs dont la somme est plus petite sont 5 et 6.
On pose donc $r = 5$ et $s = 6$. On obtient $r + s + t = 5 + 6 + 41$, ou $r + s + t = 52$.

Réponse : (B)

18. Puisque $\frac{1}{7}$ est positif et que $\frac{1}{7} \le \frac{6}{n}$, alors $\frac{6}{n}$ est positif et n est donc positif.
Puisque $\frac{1}{7} = \frac{6}{42}$ et $\frac{1}{4} = \frac{6}{24}$, l'inéquation donnée est équivalente à l'inéquation $\frac{6}{42} \le \frac{6}{n} \le \frac{6}{24}$.
Puisque les fractions sont positives et que $n > 0$, alors $24 \le n \le 42$. (Si deux fractions ont le même numérateur, la plus grande des fractions a le plus petit dénominateur.)
Puisque n est un entier dont les valeurs varient de 24 à 42, le nombre de valeurs possibles de n est égal à $(42 - 23)$ (on omet les valeurs de 1 à 23), ou 19. (On peut aussi compter sur ses doigts pour conclure qu'il y a 19 entiers de 24 à 42.)

Réponse : (C)

19. On trace une figure qui contient le point $(1, 1)$, les droites de pentes respectives $\frac{1}{4}$ et $\frac{5}{4}$ qui passent par ce point, la droite verticale d'équation $x = 5$ et la droite horizontale d'équation $y = 1$ (qui passe par le point $(1, 1)$ et qui est perpendiculaire à la droite d'équation $x = 5$).
On nomme les points d'intersection (A, B, C) comme dans la figure suivante.



On veut déterminer l'aire du triangle PBC.
Puisque P et A ont pour coordonnées respectives $(1, 1)$ et $(5, 1)$, alors $PA = 4$.
Puisque PB a une pente de $\frac{1}{4}$ et que $PA = 4$ et en considérant une pente comme l'élévation divisée par la course, on obtient $AB = 1$.
Puisque PC a une pente de $\frac{5}{4}$ et que $PA = 4$, alors $AC = 5$.
Puisque $AC = 5$ et $AB = 1$, alors $BC = AC - AB$, d'où $BC = 5 - 1$, ou $BC = 4$.
On considère la base BC du triangle PBC. Sa hauteur correspondante est PA. (En effet, PA est perpendiculaire à la base et passe au sommet opposé P.)
L'aire du triangle PBC est donc égale à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8.
OU : On peut considérer que l'aire du triangle PBC est égale à l'aire du triangle PAC moins celle du triangle PAB.
Le triangle PAC a pour base $PA = 4$ et pour hauteur $AC = 5$. Il a donc une aire de $\frac{1}{2}(4)(5)$, ou 10. Le triangle PAB a pour base $PA = 4$ et pour hauteur $AB = 1$. Il a donc une aire de $\frac{1}{2}(4)(1)$, ou 2.
L'aire du triangle PBC est donc égale à $10 - 2$, ou 8.

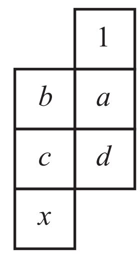
Réponse : (C)

20. Puisqu'il y a 60 secondes dans 1 minute, alors t secondes correspondent à $\frac{t}{60}$ minutes.
Puisqu'il y a 60 minutes dans 1 heure, alors $\frac{t}{60}$ minutes correspondent à $\frac{t}{60 \times 60}$ heures, ou $\frac{t}{3600}$ heures.
On considère les distances que la voiture X et la voiture Y parcourent entre le moment où le devant de la voiture Y est aligné avec l'arrière de la voiture jusqu'au moment oà l'arrière de la voiture Y est aligné avec le devant de la voiture X.
Puisque la voiture X a une longueur de 5 m et que la voiture Y a une longueur de 6 m, alors

pendant cet intervalle de temps, la voiture Y parcourt $(5+6)$ m, ou 11 m de plus que la voiture X. (Le devant de la voiture Y doit, d'une certaine façon, parcourir toute la longueur de la voiture X et finir 6 m en avant du devant de la voiture X de manière que l'arrière de la voiture Y soit aligné avec le devant de la voiture X.)
Puisqu'il y a 1000 m dans 1 km, alors 11 m équivalent à 0,011 km.
Puisque la voiture X se déplace à 90 km/h, alors en $\frac{t}{3600}$ heures, elle parcourt $\frac{90t}{3600}$ km.
Puisque la voiture Y se déplace à 91 km/h, alors en $\frac{t}{3600}$ heures, elle parcourt $\frac{91t}{3600}$ km.
Donc $\frac{91t}{3600} - \frac{90t}{3600} = 0{,}011$, ou $\frac{t}{3600} = 0{,}011$, d'où $t = 3600 \times 0{,}011$, ou $t = 39{,}6$.

Réponse : (A)

21. On nomme a, b, c et d les nombres placés dans les cases indiquées ci-contre.
Or a, b, c, d et x doivent égaler $2, 3, 4, 5$ et 6 dans un ordre quelconque, sans que deux entiers qui diffèrent de 1 ne soient dans deux cases qui partagent un même côté.
Par exemple, on voit que $a \neq 2$. Donc, a peut égaler 3, 4, 5 ou 6.



Si $a = 3$, alors ni b ni d ne peut égaler 2 ou 4.
Ainsi b et d égalent 5 et 6 dans un ordre quelconque.
Dans ce cas, c ne peut égaler 4 (puisque b ou d est égal à 5), donc $c = 2$, d'où $x = 4$.

Si $a = 4$, alors ni b ni d ne peut égaler 3 ou 5.
Ainsi b et d égalent 2 et 6 dans un ordre quelconque.
Dans ce cas, c ne peut égaler 3 ou 5, puisqu'il est en position adjacente à 2 et à 6. Ce cas est donc impossible.

Si $a = 5$, alors ni b ni d ne peut égaler 4 ou 6.
Ainsi b et d égalent 2 et 3 dans un ordre quelconque.
Dans ce cas, c ne peut égaler 4 (puisque b ou d égale 3), donc $c = 6$, d'où $x = 4$.

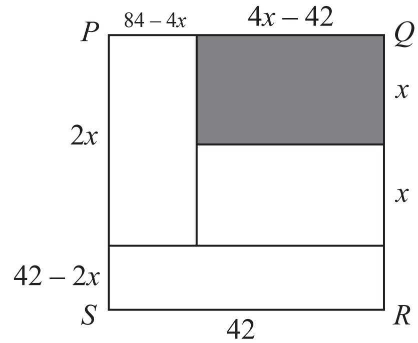
Si $a = 6$, alors ni b ni d ne peut égaler 5.
Ainsi b et d égalent deux des nombres 2, 3 ou 4 dans un ordre quelconque.
Si b et d égalent 2 et 4, alors c ne peut égaler 3 ou 5 (les nombres restants) et il n'y a donc aucune solution.
Si b et d égalent 3 et 4, alors c ne peut égaler 2 ou 5 (les nombres restants), et il n'y a donc aucune solution.
Si b et d égalent 2 et 3, alors on peut avoir $c = 5$. On doit alors avoir $x = 4$, ce qui est impossible.

Après avoir considéré tous les cas possibles, on conclut que x n'admet qu'une seule valeur possible, $x = 4$.

Réponse : (A)

22. Soit $2x$ la hauteur du rectangle en haut à gauche.
Puisque le carré $PQRS$ a des côtés de longueur 42, le rectangle du bas a une hauteur de $42 - 2x$.
Puisque le rectangle du bas a une largeur de 42 (la longueur d'un côté du carré), le rectangle du bas a un périmètre égal à $2(42) + 2(42 - 2x)$, ou $168 - 4x$.
Soit y la largeur du rectangle en haut à gauche.
Puisque tous les petits rectangles ont le même périmètre, alors $2(2x) + 2y = 168 - 4x$. (C'est-à-dire que le rectangle en haut à gauche a un périmètre égal à celui du bas.)
Donc $2y = 168 - 8x$, ou $y = 84 - 4x$.

Puisque le carré a des côtés de longueur 42, alors le rectangle en haut à droite a une largeur égale à $42 - (84 - 4x)$, ou $4x - 42$.
Puisque les deux rectangles à la droite ont le même périmètre et la même largeur, ils ont la même hauteur, soit la moitié de la hauteur du rectangle en haut à gauche.
Les deux rectangles à la droite ont donc chacun une hauteur de x.
Or, le rectangle en haut à droite a aussi un périmètre égal à $168 - 4x$.
Donc $2(4x - 42) + 2x = 168 - 4x$, ou $8x - 84 + 2x = 168 - 4x$, d'où $14x = 252$, ou $x = 18$.
Le rectangle ombré a donc une hauteur égale à $x = 18$ et une largeur égale à $4x - 42$, ou $4(18) - 42$, ou 30. Son aire est égale à 18×30, ou 540.



(On peut vérifier par substitution que les quatre rectangles ont pour dimensions 6×42, 36×12 et 30×18 et qu'ils ont tous le même périmètre.)

Réponse : (E)

23. Pour résoudre ce problème, on fait appel à deux propriétés des triangles ayant une aire strictement positive et dont les côtés ont pour longueurs a, b et c ($a \leq b \leq c$) :

- $a + b > c$. On l'appelle l'inégalité triangulaire et elle exprime l'idée que la ligne droite est le chemin le plus court entre deux points. Si on considère les extrémités du côté de longueur c du triangle, le chemin direct entre ces points est le segment de longueur c. C'est le chemin le plus court. Tout autre chemin d'un point à l'autre est nécessairement plus long, y compris le chemin qui suit les deux autres côtés du triangle, qui a pour longueur $a + b$. Donc $a + b > c$. (L'aire strictement positive du triangle empêche l'égalité $a + b = c$.)
- Si le triangle est obtusangle, alors $a^2 + b^2 < c^2$; si le triangle est acutangle, alors $a^2 + b^2 > c^2$. Cela découle de la réciproque du théorème de Pythagore : si $a^2 + b^2 = c^2$, le triangle est rectangle. On le justifiera plus loin.

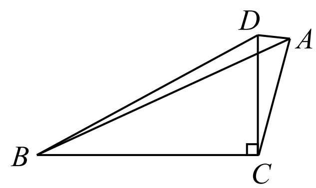
Supposons que la longueur x est la longueur du plus grand côté du triangle obtusangle, c'est-à-dire supposons que $10 \leq 17 \leq x$.
On doit donc avoir $10 + 17 > x$ et $10^2 + 17^2 < x^2$.
D'après la première condition, $x < 27$. Puisque x est un entier, $x \leq 26$.
D'après la deuxième condition, $x^2 > 389$. Donc $x > \sqrt{389}$. Puisque $\sqrt{389} \approx 19{,}72$ et que x est un entier, alors $x \geq 20$. Les valeurs possibles sont donc $x = 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26$.

Supposons que la longueur x n'est pas la longueur du plus grand côté du triangle obtusangle, c'est-à-dire supposons que $x \leq 17$. (On sait aussi que $10 \leq 17$. Il n'est pas important de savoir lequel de 10 et de x est le plus grand.)
On doit avoir $x + 10 > 17$ et $10^2 + x^2 < 17^2$.
D'après la première condition, $x > 7$. Puisque x est un entier, alors $x \geq 8$.
D'après la deuxième condition, $x^2 < 189$. Donc $x < \sqrt{189}$. Puisque $\sqrt{189} \approx 13{,}75$ et que x est un entier, alors $x \leq 13$. Les valeurs possibles sont donc $x = 8, 9, 10, 11, 12, 13$.

En tout, les valeurs possibles de x dont $8, 9, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 24, 25$ et 26.
Ces valeurs ont une somme de 224.

Il nous reste à justifier la deuxième propriété, c'est-à-dire que si le triangle est obtusangle, alors $a^2 + b^2 < c^2$. On peut montrer, de façon semblable, que si le triangle est acutangle, alors $a^2 + b^2 > c^2$. On fait appel aux angles et aux longueurs de côtés. On pourrait aussi utiliser la loi du cosinus :

On considère un triangle obtusangle ABC dont l'angle ACB est obtus, avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.
Au point C, On trace un segment CD de longueur b perpendiculaire à BC. On trace DB et DA.



Puisque le triangle BCD est rectangle en C, alors $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2}$, ou $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$, d'après le théorème de Pythagore.
Le triangle ACD est isocèle avec $CA = CD$.
Donc $\angle CDA = \angle CAD$.
Or, $\angle BDA > \angle CDA = \angle CAD > \angle BAD$.
Puisque $\angle BDA > \angle BAD$, alors dans le triangle BDA, on a $BA > BD$.
Donc $c = BA > BD = \sqrt{a^2 + b^2}$, d'où $c^2 > a^2 + b^2$, ce qu'il fallait démontrer.

RÉPONSE : (E)

24. On représente une séquence admissible de coups par une chaine de lettres X, Y et Z. Par exemple, la chaine ZZYXZ indique que Z est déplacé d'une case vers la droite, ensuite Z de nouveau, puis Y, puis X, puis Z.
Pour chaque triplet (x, y, z) d'entiers où $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3$ et $0 \le z \le 3$, on définit $S(x, y, z)$ comme étant le nombre de séquences admissibles dans lesquelles X se déplace de x espaces vers la droite et Y se déplace de y espaces vers la droite et Z se déplace de z espaces vers la droite.
Par exemple, $S(1, 0, 0) = 0$ et $S(0, 1, 0) = 0$, car X et Y ne sont pas des séquences admissibles et $S(0, 0, 1) = 1$, puisque Z est une séquence admissible qui consiste en 1 déplacement vers la droite.
On cherche $S(3, 3, 3)$.
On remarque que si $x > y$ ou $y > z$ ou $x > z$, alors $S(x, y, z) = 0$, puisque toute séquence admissible doit avoir au moins autant de Z que de Y et au moins autant de Y que de X (une pièce ne peut pas sauter par-dessus une autre pièce). En d'autres mots, on doit avoir $0 \le x \le y \le z \le 3$.
On fait remarquer la propriété importante suivante : Si $0 \le x \le y \le z \le 3$, alors

$$S(x, y, z) = S(x - 1, y, z) + S(x, y - 1, z) + S(x, y, z - 1),$$

où il est entendu que si $x = 0$, alors $S(x-1, y, z) = 0$; si $y = 0$, alors $S(x, y-1, z) = 0$; si $z = 0$, alors $S(x, y, z - 1) = 0$.
Explication de la propriété :

- Chaque séquence admissible comptée dans $S(x, y, z)$ se termine par X, Y ou Z.
- Si une séquence admissible comptée dans $S(x, y, z)$ se termine par X, alors la séquence formée en enlevant ce X était admissible et elle est comptée dans $S(x - 1, y, z)$.
- Si $x - 1 \le y \le z$ (c.-à-d. s'il y a des séquences admissibles contenant $x - 1$ lettres X, y lettres Y et z lettres Z, ce qui ferait que $S(x - 1, y, z) > 0$) et $x \le y \le z$, alors chaque séquence

admissible comptée dans $S(x-1,y,z)$ peut recevoir un X à la fin pour créer une séquence admissible comptée dans $S(x,y,z)$ qui se termine par un X.

- Ces deux derniers boulets indiquent que le nombre de séquences admissibles comptées dans $S(x,y,z)$ et qui se terminent par un X est précisément égal à $S(x-1,y,z)$.
- De même, le nombre de séquences admissibles comptées dans $S(x,y,z)$ et qui se terminent par un Y est égal à $S(x,y-1,z)$ et le nombre de séquences admissibles comptées dans $S(x,y,z)$ et qui se terminent par un Z est égal à $S(x,y,z-1)$.
- Donc $S(x,y,z) = S(x-1,y,z) + S(x,y-1,z) + S(x,y,z-1)$.

On utilise cette règle pour remplir des tableaux de valeurs de $S(x,y,z)$. On remplit un tableau de valeurs pour $z = 1$, un autre pour $z = 2$ et un troisième pour $z = 3$. Dans chaque tableau, les valeurs de y sont indiquées sur la gauche et les valeurs de x sont indiquées en haut. Dans les tableaux, il y a des 0 aux endroits où $x > y$ ou $x > z$ ou $y > z$.

y \ x	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	1	1	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0

$z = 1$

y \ x	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	2	3	0	0
2	2	5	5	0
3	0	0	0	0

$z = 2$

y \ x	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	3	6	0	0
2	5	16	21	0
3	5	21	42	42

$z = 3$

Les valeurs non nulles sont placées du haut vers le bas et de gauche à droite, tout en remarquant que chaque valeur est la somme des valeurs (s'il y a lieu) à la gauche dans le même tableau (ce qui correspond à $S(x-1,y,z)$), au dessus dans le même tableau (ce qui correspond à $S(x,y-1,z)$) et dans la même position dans le tableau précédent (ce qui correspond à $S(x,y,z-1)$).
De plus, $S(0,0,1) = 1$ (la séquence Z), $S(0,1,1) = 1$ (la séquence ZY) et $S(1,1,1) = 1$ (la séquence ZYX).
D'après ces tableaux, on a $S(3,3,3) = 42$. Il y a donc 42 séquences admissibles.

Réponse : (C)

25. On procède par étapes.

<u>1^re^ étape : Plus petits communs multiples</u>

Pour tout entier n ($n \geq 3$) et tout entier strictement positif x ($x < n$), on définit $P(n,x)$ comme étant le plus petit commun multiple des $n-2$ entiers $1, 2, 3, \ldots, x-2, x-1, x+2, x+3, \ldots, n-1, n$.
Pour déterminer le plus petit commun multiple d'une liste d'entiers, on peut écrire chaque entier de la liste en factorisation première et créer le produit des plus grandes puissances (une par nombre premier) qui paraissent dans les factorisations premières.
Par exemple si $n = 9$ et $x = 6$, alors $P(9,6)$ est le plus petit commun multiple des entiers $1, 2, 3, 4, 5, 8, 9$.
On écrit chaque entier supérieur à 1 en factorisation première : $2 = 2^1$, $3 = 3^1$, $4 = 2^2$, $5 = 5^1$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$. Donc $P(9,6) = 2^3 3^2 5^1 = 360$. Dans ce cas, $P(9,6)$ n'est pas divisible par $x+1$ (7), mais il est divisible par x (6).
Étant donné une liste d'entiers, on sait qu'un multiple commun m de tous les entiers de cette liste est toujours un multiple de leur plus petit commun multiple l. En effet, si p est un nombre premier et a est un entier strictement positif tel que p^a est un diviseur de l, il doit y avoir un nombre de la liste qui est un multiple de p^a. Pour que m soit un multiple commun de tous les nombres de la liste, p^a doit aussi être un diviseur de m. Puisque c'est vrai pour toute puissance

p^a d'un nombre premier qui est diviseur de l, alors m est un multiple de l.

2^e étape : Lien entre m et $P(n, x)$

On montre que n est un nombre Nella associé à x précisément lorsque $P(n, x)$ n'est pas divisible par x ou par $x + 1$.
Supposons que n est un nombre Nella associé à x et à m.
Alors m doit être divisible par chacun des nombres $1, 2, 3, \ldots, x-2, x-1, x+2, x+3, \ldots, n-1, n$.
D'après la 1re étape, m est un multiple de $P(n, x)$.
Puisque m est un multiple de $P(n, x)$ et que m n'est pas divisible par x ou par $x + 1$, alors $P(n, x)$ ne l'est pas non plus.
Puisque $P(n, x)$ est divisible par tous les autres entiers de 1 à n, alors $P(n, x)$ satisfait aux deux conditions pour m dans la définition d'un nombre Nella.
De plus, si n et x sont des entiers strictement positifs où $n \geq 3$ et $x < n$ et si $P(n, x)$ satisfait aux deux conditions dans la définition d'un nombre Nella, alors n est un nombre Nella.
On a donc démontré que n est un nombre Nella associé à x précisément lorsque $P(n, x)$ n'est pas divisible par x ou par $x + 1$.

3e étape : Nouvel énoncé du problème

D'après la 2e étape, on cherche tous les entiers n ($50 \leq n \leq 2017$) pour lesquels il existe un entier strictement positif x ($x < n$) tel que $P(n, x)$ n'est pas divisible par x ou par $x + 1$.

4e étape : Si n est un nombre Nella associé à x, alors x et $x + 1$ sont tous deux des puissances de nombres premiers

Supposons que n est un nombre Nella associé à x.
De plus, supposons que x n'est pas une puissance d'un nombre premier.
Donc $x = p^a b$, p étant un nombre premier, a étant un entier strictement positif et b étant un entier supérieur à 1 qui n'est pas divisible par p.
Donc, $p^a < x$ et $b < x$. Donc p^a et b sont tous deux dans la liste $1, 2, 3, \ldots, x - 2, x - 1$, ce qui veut dire que $P(n, x)$ est un multiple de p^a et de b ; il est donc un multiple de $p^a b = x$. (Il est important de noter que p^a et b n'admettent aucun diviseur premier commun.) On a donc une contradiction.
Donc si n est un nombre Nella, alors x est une puissance d'un nombre premier.
De même, $x + 1$ doit aussi être une puissance d'un nombre premier. Pour s'en convaincre, on fait appel au même argument, avec la remarque additionnelle que puisque $x + 1$ et x sont des entiers consécutifs, ils ne peuvent admettre un diviseur commun supérieur à 1. De cette manière, si $x+1 = p^c d$, alors x ne peut être égal à p^c ou à d et ainsi p^c et d sont dans la liste $1, 2, 3, \ldots, x-1$.

5e étape : Analyse plus poussée de x et de $x + 1$

Supposons que n est un nombre Nella associé à x.
D'après la 4e étape, x et $x + 1$ sont tous deux des puissances de nombres premiers.
Puisque x et $x + 1$ sont consécutifs, l'un est pair et l'autre est impair.
En d'autres mots, x ou $x + 1$ est une puissance de 2 et l'autre est une puissance d'un nombre premier impair.
On sait aussi que $P(n, x)$ n'est pas divisible par x ou par $x + 1$.
Donc, la liste $x + 2, x + 3, \ldots, n - 1, n$ ne peut contenir un multiple de x ou de $x + 1$.
Donc $x < n < 2x$ et $x + 1 \leq n < 2(x + 1)$, puisque le multiple suivant de x est $2x$ et le multiple suivant de $x + 1$ est $2(x + 1)$.
Puisque x ou $x+1$ est une puissance de 2, alors 2 fois cette puissance de 2 (c.-à-d. $2x$ ou $2(x+1)$) est la puissance suivante de 2. Or, les inégalités nous disent que n est inférieur à la puissance suivante de 2 et donc x ou $x + 1$ doit être la puissance suivante de 2 inférieure (ou inférieure ou égale, selon le cas) à n.

6[e] étape : Nouvel énoncé du problème (bis)

On cherche tous les entiers n ($50 \leq n \leq 2017$) pour lesquels il existe un entier strictement positif x ($x < n$) tel que $P(n, x)$ ne soit pas divisible par x ou par $x + 1$.
D'après l'étape 5, on sait que x est la plus grande puissance de 2 inférieure à n ou $x + 1$ est la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à n.
On cherche donc tous les entiers n ($50 \leq n \leq 2017$) pour lesquels au moins un des deux énoncés suivants est vrai pour un entier strictement positif x ($x < n$) :

- Si x est la plus grande puissance de 2 inférieure à n, alors $x + 1$ est aussi une puissance d'un nombre premier.
- Si $x+1$ est la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à n, alors x est aussi une puissance d'un nombre premier.

7[e] étape : On détermine les nombres Nella

On remplit deux tableaux, le premier pour le cas où x ($x < n$) est une puissance de 2 et le deuxième pour le cas où $x+1$ ($x+1 \leq n$) est une puissance de 2. Dans chaque cas, on détermine si $x + 1$ ou x est aussi une puissance d'un nombre premier.

Intervalle de n	Plus grande puissance de 2 inférieure à n	x	$x+1$	Puissance d'un nombre premier ?	Nombre Nella ?
$50 \leq n \leq 64$	32	32	33	Non ($33 = 3 \cdot 11$)	Non
$65 \leq n \leq 128$	64	64	65	Non ($65 = 5 \cdot 13$)	Non
$129 \leq n \leq 256$	128	128	129	Non ($129 = 3 \cdot 43$)	Non
$257 \leq n \leq 512$	256	256	257	Oui	Voir ci-dessous
$513 \leq n \leq 1024$	512	512	513	Non ($513 = 3 \cdot 171$)	Non
$1025 \leq n \leq 2017$	1024	1024	1025	Non ($1025 = 5 \cdot 205$)	Non

On remarque que 257 est un nombre premier, puisqu'il n'est pas divisible par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{257}$ (environ 16,03), c'est-à-dire par $2, 3, 5, 7, 11$ ou 13.
Pour chaque valeur de n dans l'intervalle $257 \leq n \leq 511$, $P(n, 256)$ n'est pas divisible par 256 ou par 257, alors chacune de ces valeurs de n (il y en a 255, c.-à-d. $511 - 256$) est un nombre Nella.
Lorsque $n = 512$, $P(n, 256)$ est divisible par 256 (puisque 512 est divisible par 256), donc $n = 512$ n'est pas un nombre Nella puisqu'il s'agit du seul candidat pour la valeur de x dans ce cas.

Intervalle de n	Plus grande puissance de 2 inf. ou égale à n	$x+1$	x	Puissance d'un nombre premier ?	Nombre Nella ?
$50 \leq n \leq 63$	32	32	31	Oui	Voir ci-dessous
$64 \leq n \leq 127$	64	64	63	Non ($63 = 3 \cdot 21$)	Non
$128 \leq n \leq 255$	128	128	127	Oui	Voir ci-dessous
$256 \leq n \leq 511$	256	256	255	Non ($255 = 5 \cdot 51$)	Non
$512 \leq n \leq 1023$	512	512	511	Non ($511 = 7 \cdot 73$)	Non
$1024 \leq n \leq 2017$	1024	1024	1023	Non ($1023 = 3 \cdot 341$)	Non

On remarque que 31 et 127 sont des nombres premiers.
Pour chaque valeur de n dans l'intervalle $50 \leq n \leq 61$, $P(n, 31)$ n'est pas divisible par 31 ou 32. Chacune de ces valeurs de n (il y en a 12, c.-à-d. $61 - 49$) est donc un nombre Nella.
Lorsque $n = 62, 63$, $P(n, 31)$ est divisible par 31 (puisque 62 est divisible par 31), alors ni l'un ni l'autre n'est un nombre Nella puisqu'il s'agit du seul candidat pour la valeur de x dans ce cas.
Pour chaque valeur de n dans l'intervalle $128 \leq n \leq 253$, $P(n, 127)$ n'est pas divisible par 127 ou par 128, alors chacune de ces valeurs de n (il y en a 126, c.-à-d. $253 - 127$) est un nombre Nella.

Lorsque $n = 254, 255$, $P(n, 127)$ est divisible par 127 (puisque 254 est divisible par 127), alors ni l'un ni l'autre n'est un nombre Nella puisqu'il s'agit du seul candidat pour la valeur de x dans ce cas.

8e étape : Compte final

D'après ce qui précède, le nombre de nombres Nella n dans l'intervalle $50 \leq n \leq 2017$ est égal à $255 + 12 + 126$, ou 393.

Réponse : (A)

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2016

(10e année – Secondaire IV)

le mercredi 24 février 2016

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 25 février 2016

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $(3+2)-(2+1)=5-3=2$

Réponse : (E)

2. D'après le diagramme, 7 des 20 enseignants ont choisi le carré comme figure préférée.
Donc, 13 enseignants $(20-7=13)$ n'ont pas choisi le carré comme figure préférée.
(On peut aussi noter que 3, 4 et 6 enseignants ont choisi le triangle, le cercle et l'hexagone comme figure préférée et que $3+4+6=13$.)

Réponse : (E)

3. On a : $\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$

Réponse : (C)

4. Puisque Blaise fait des pas de $\frac{1}{2}$ mètre, alors deux de ses pas font 1 m.
Pour parcourir 12 m, Blaise doit donc prendre 12×2 pas, ou 24 pas.

Réponse : (D)

5. *Solution 1*
Puisque l'angle PQS est extérieur au triangle QSR, alors $\angle PQS=\angle QSR+\angle SRQ$.
Donc $2x^\circ=x^\circ+50^\circ$, ou $2x=x+50$, ou $x=50$.

Solution 2
Puisque les angles PQS et SQR forment un angle plat, ils sont supplémentaires.
Donc $\angle SQR=180^\circ-\angle PQS$, ou $\angle SQR=180^\circ-2x^\circ$.
Puisque les mesures des angles du triangle SQR ont une somme de 180°, alors :

$$\begin{aligned}\angle SQR+\angle QSR+\angle QRS &= 180^\circ\\ (180^\circ-2x^\circ)+x^\circ+50^\circ &= 180^\circ\\ 50^\circ-x^\circ &= 0^\circ\\ x^\circ &= 50^\circ\end{aligned}$$

Donc $x=50$.

Réponse : (A)

6. Puisque la droite qui passe par les points points $(2,7)$ et $(a,3a)$ a une pente de 2, alors $\dfrac{3a-7}{a-2}=2$.
Donc $3a-7=2(a-2)$, ou $3a-7=2a-4$, d'où $a=3$.

Réponse : (C)

7. Si une équipe A rencontre une équipe B et que l'équipe B remporte une victoire, alors celle-ci a marqué plus de buts que l'équipe A ; dans le cas d'une égalité, les deux équipes ont marqué un même nombre de buts.
Donc si une équipe a 0 victoire, 1 défaite et 2 égalités, elle a marqué moins de buts que l'équipe adverse une fois (lors de la défaite) et le même nombre de buts que l'équipe adverse deux fois (lors des deux égalités).
Dans ces trois rencontres, elle a donc marqué moins de buts contre ses adversaires que ceux-ci n'ont marqués contre elle.
Or, selon l'énoncé, l'équipe a compté plus de buts que ses adversaires n'en ont comptés contre elle. Il est donc impossible qu'elle ait 0 victoire, 1 défaite et 2 égalités.

Si on examine chacun des choix de réponse (A), (B), (D) et (E), on voit qu'il est possible pour

l'équipe d'obtenir le résultat indiqué et de marquer plus de buts que les adversaires n'en ont comptés contre elle.
Ceci élimine chacun de ces choix et indique que le choix (C) est impossible.
(A) : Si l'équipe gagne 2-0 et 3-0 et fait match nul 1-1, elle a marqué 6 buts et les adversaires ont marqué 1 but.
(B) : Si l'équipe gagne 4-0 et perd 1-2 et 2-3, elle a marqué 7 buts et les adversaires ont marqué 5 buts.
(D) : Si l'équipe gagne 4-0, perd 1-2 et fait match nul 1-1, elle a marqué 6 buts et les adversaires ont marqué 3 buts.
(E) : Si l'équipe gagne 2-0 et fait deux matchs nuls 1-1 et 2-2, elle a marqué 5 buts et les adversaires ont marqué 3 buts.
Donc, seul le résultat de 0 victoire, 1 défaite et 2 égalités est impossible étant donné que l'équipe a compté plus de buts que ses adversaires n'en ont comptés contre elle.

Réponse : (C)

8. *Solution 1*
On calcule la valeur de chaque mot comme suit :
- BAD a pour valeur $2 + 1 + 4$, ou 7
- CAB a pour valeur $3 + 1 + 2$, ou 6
- DAD a pour valeur $4 + 1 + 4$, ou 9
- BEE a pour valeur $2 + 5 + 5$, ou 12
- BED a pour valeur $2 + 5 + 4$, ou 11

Le mot qui a la plus grande valeur est BEE.

Solution 2
On détermine le mot qui a la plus grande valeur en comparant les mots deux à deux.
Puisque BAD et CAB ont les lettres A et B en commun, la valeur de BAD est plus grande que celle de CAB, puisque la valeur de D est plus grande que celle de C. Ceci élimine le mot CAB comme choix possible.
De même, la valeur de DAD est plus grande que celle de BAD (ce qui élimine le mot BAD) et la valeur de BEE est plus grande que celle de BED (ce qui élimine le mot BED).
Il reste donc les mots DAD et BEE.
Le mot DAD a une valeur de 9 $(4 + 1 + 4)$ et le mot BEE a une valeur de 12 $(2 + 5 + 5)$.
Donc, le mot qui a la plus grande valeur est BEE.
(On aurait pu noter, pour comparer DAD et BEE, que les deux E ont une plus grande valeur que les deux D et que B a une plus grande valeur que A. Donc, BEE a une plus grande valeur que DAD.)

Réponse : (D)

9. *Solution 1*
On écrit les nombres de la suite jusqu'à ce qu'on obtienne un nombre négatif :

$$43, 39, 35, 31, 27, 23, 19, 15, 11, 7, 3, -1$$

Puisqu'on soustrait toujours 4, tous les nombres qui suivent seront négatifs.
Donc, Gianna écrit 11 nombres positifs.

Solution 2

Le $n^{\text{ième}}$ nombre de la suite est $4(n-1)$ de moins que le premier nombre puisqu'il faut soustraire 4 un total de $(n-1)$ fois pour l'atteindre.
Le $n^{\text{ième}}$ nombre est donc égal à $43 - 4(n-1)$, ou $47 - 4n$.
La première valeur de n pour laquelle cette expression donne un nombre négatif est 12.
Donc, Gianna écrit 11 nombres positifs.

Réponse : (A)

10. *Solution 1*

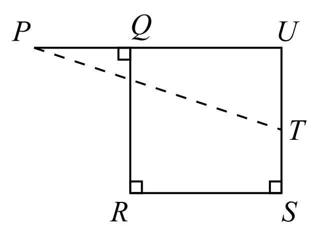
On nomme les élèves A, B, C, D et E.
Le nombre total de parties est égal au nombre d'appariements de deux élèves que l'on peut faire multiplié par le nombre de parties que deux élèves peuvent jouer l'un contre l'autre.
Les appariements possibles de deux élèves sont AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE et DE.
Il y a 10 appariements possibles.
Le nombre total de parties est donc égal à 10×3, ou 30.

Solution 2

A joue 3 parties contre B, C, D et E pour un total de 3×4 parties, ou 12 parties.
B a déjà joué contre A. Il lui reste à jouer 3 parties contre C, D et E pour un total de 3×3 parties, ou 9 parties.
C a déjà joué contre A et B. Il lui reste à jouer 3 parties contre D et E pour un total de 3×2 parties, ou 6 parties.
D a déjà joué contre A, B et C. Il lui reste à jouer 3 parties contre E. On remarque que E a joué 3 parties contre chacun de ses adversaires. Le nombre de parties jouées en tout est égal à $12 + 9 + 6 + 3$, ou 30.

Réponse : (C)

11. On prolonge PQ et ST jusqu'à ce qu'ils se coupent en U.



Puisque $QUSR$ admet trois angles droits, son quatrième angle doit aussi être droit. $QUSR$ est donc un rectangle.
Le triangle PUT est donc rectangle en U.
D'après le théorème de Pythagore, $PT^2 = PU^2 + UT^2$.
Or $PU = PQ + QU$ et $QU = RS$. Donc $PU = 4 + 8 = 12$.
De plus, $UT = US - ST$ et $US = QR$. Donc $UT = 8 - 3$, ou $UT = 5$.
Donc $PT^2 = 12^2 + 5^2$, ou $PT^2 = 144 + 25$, ou $PT^2 = 169$.
Puisque $PT > 0$, alors $PT = \sqrt{169}$, ou $PT = 13$.

Réponse : (E)

12. Puisque les 30 boules ont la même chance d'être choisies, les 30 numéros sont équiprobables.
Donc, la situation la plus probable est celle qui admet le plus de nombres favorables.
Il y a 3 boules dont le numéro est un multiple de 10, soit les boules 10, 20 et 30.
Il y a 15 boules dont le numéro est impair, soit les boules 1, 3, 5, 7, 9, …, 27, 29.

Il y a 4 boules dont le numéro contient le chiffre 3, soit les boules 3, 13, 23 et 30.
Il y a 6 boules dont le numéro est un multiple de 5, soit les boules 5, 10, 15, 20, 25 et 30.
Il y a 12 boules dont le numéro contient le chiffre 2, soit les boules 2, 12, 20, 21, 22, ..., 28, 29.
La situation la plus probable est le choix d'un nombre impair.

Réponse : (B)

13. On remarque que les choix de réponse sont tous des fractions avec un numérateur de 5. Pour comparer, on peut écrire $\frac{1}{6} = \frac{5}{30}$ et $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$.
Lorsqu'on compare deux fractions positives ayant le même numérateur, celle qui a le plus petit dénominateur est la plus grande. On cherche donc une fraction dont le dénominateur est entre 20 et 30. Une seule fraction répond à ce critère, soit $\frac{5}{24}$.
Donc $\frac{5}{30} < \frac{5}{24} < \frac{5}{20}$, ou $\frac{1}{6} < \frac{5}{24} < \frac{1}{4}$.
(On aurait pu remarquer que puisque $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$ et $\frac{1}{4} = \frac{6}{24}$, alors le choix de réponse $\frac{5}{24}$ est celui qui est entre ces deux fractions.)

Réponse : (C)

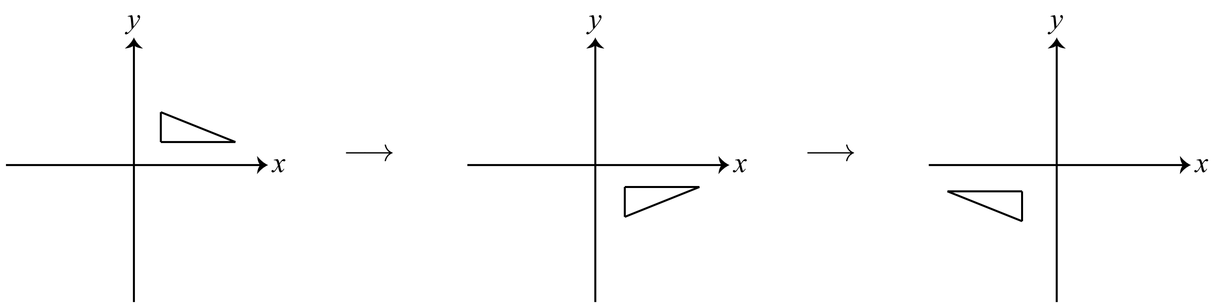
14. Puisque $100 = 10^2$, alors $100^{10} = (10^2)^{10} = 10^{20}$.
Donc $(10^{100}) \times (100^{10}) = (10^{100}) \times (10^{20}) = 10^{120}$.
En notation régulière, ce nombre s'écrit avec un 1 suivi de 120 zéros.

Réponse : (A)

15. En factorisation première, on a $20 = 2^2 \cdot 5$, $16 = 2^4$ et $2016 = 16 \cdot 126 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.
Pour qu'un entier soit divisible par chacun des nombres $2^2 \cdot 5$ et 2^4 et $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, il doit admettre au moins 5 facteurs 2, au moins 2 facteurs 3, au moins 1 facteur 5 et au moins 1 facteur 7.
Le plus petit tel entier est $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$, ou 10 080. Le chiffre des dizaines de ce nombre est 8.

Réponse : (E)

16. Les trois figures suivantes indiquent la position initiale, la position après la réflexion par rapport à l'axe des abscisses et la position après la réflexion par rapport à l'axe des ordonnées :



Le choix de réponse (D) représente la position finale.

Réponse : (D)

17. Puisque le carré $PQRS$ a un périmètre de 120, ses côtés ont une longueur de $\frac{1}{4}(120)$, ou 30.
Donc $PQ = QR = RS = SP = 30$.
Puisque le triangle PZS a un périmètre de $2x$, alors $PZ + ZS + SP = 2x$.
Puisque $PS = 30$ et que $PZ + ZS = 2x - PS$, alors $PZ + ZS = 2x - 30$.
Le périmètre du pentagone $PQRSZ$ est donc égal à

$$PQ + QR + RS + ZS + PZ = 30 + 30 + 30 + (PZ + ZS) = 30 + 30 + 30 + (2x - 30) = 2x + 60,$$

ou $60 + 2x$.

Réponse : (C)

18. *Solution 1*

Soit x, y et z les trois entiers de manière que $x + y = 998$, $x + z = 1050$ et $y + z = 1234$.
D'après les deux premières équations, on a $(x + z) - (x + y) = 1050 - 998$, d'où $z - y = 52$.
Puisque $z + y = 1234$ et $z - y = 52$, alors $(z + y) + (z - y) = 1234 + 52$, d'où $2z = 1286$, ou $z = 643$.
Puisque $z = 643$ et $z - y = 52$, alors $y = z - 52$, d'où $y = 643 - 52$, ou $y = 591$.
Puisque $x + y = 998$ et $y = 591$, alors $x = 998 - y$, d'où $x = 998 - 591$, ou $x = 407$.
Les trois entiers sont 407, 591 et 643.
La différence du plus grand et du plus petit est donc égale à $643 - 407$, ou 236.

Solution 2

Soit x, y et z les trois entiers de manière que $x \leq y \leq z$.
Puisque $y \leq z$, alors $x + y \leq x + z$.
Puisque $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$.
Donc $x + y \leq x + z \leq y + z$.
On a donc $x + y = 998$, $x + z = 1050$ et $y + z = 1234$.
Puisque z est le plus grand des trois entiers et que x est le plus petit, on cherche la valeur de $z - x$.
Or $z - x = (y + z) - (x + y)$. Donc $z - x = 1234 - 998$, ou $z - x = 236$.

RÉPONSE : (E)

19. Le nombre de points sur le cercle est le même que le nombre d'espaces entre les points.
Pour passer du point 7 au point 35, il faut parcourir 28 espaces autour du cercle, car $35 - 7 = 28$.
Puisque les points 7 et 35 sont diamétralement opposés, alors il faut parcourir le même nombre d'espaces pour continuer autour du cercle de 35 jusqu'à 7.
Il y a donc $2 \cdot 28$ espaces, ou 56 espaces entre les nombres autour du cercle.
Il y a donc 56 points autour du cercle. Donc $n = 56$.

RÉPONSE : (C)

20. *Solution 1*

Lorsque les n élèves sont placés en groupes de 2, soit g le nombre de groupes complets et il y a un groupe incomplet.
Puisque ce sont des groupes de 2, le groupe incomplet doit donc avoir 1 élève.
Donc $n = 2g + 1$.
Puisque le nombre de groupes complets de 2 élèves est 5 de plus que le nombre de groupes complets de 3 élèves, il y avait $g - 5$ groupes complets de 3 élèves.
Après que les élèves sont en groupes de 3, il reste un groupe incomplet qui doit comprendre 1 ou 2 élèves.
On a donc $n = 3(g - 5) + 1$ ou $n = 3(g - 5) + 2$.
Si $n = 2g + 1$ et $n = 3(g - 5) + 1$, alors $2g + 1 = 3(g - 5) + 1$, ou $2g + 1 = 3g - 14$, d'où $g = 15$.
Dans ce cas, puisque $n = 2g + 1$, alors $n = 31$. Il y avait donc 15 groupes complets de 2 élèves et 10 groupes complets de 3 élèves.
Si $n = 2g + 1$ et $n = 3(g - 5) + 2$, alors $2g + 1 = 3(g - 5) + 2$, ou $2g + 1 = 3g - 13$, d'où $g = 14$.
Dans ce cas, puisque $n = 2g + 1$, alors $n = 29$. Il y avait donc 14 groupes complets de 2 élèves et 9 groupes complets de 3 élèves.
Si $n = 31$, on pourrait diviser 31 élèves en 7 groupes complets de 4 élèves et 1 groupe incomplet.
Si $n = 29$, on pourrait diviser 29 élèves en 7 groupes complets de 4 élèves et 1 groupe incomplet.
Or, l'énoncé indique que le nombre de groupes complets de 3 élèves est 3 de plus que le nombre de groupes complets de 4 élèves. On doit donc avoir $n = 31$.

Dans ce cas, on a $n^2 - n = 31^2 - 31$, ou $n^2 - n = 930$.
La somme des chiffres de l'entier égal à $n^2 - n$ est donc égale à 12.

Solution 2
Puisque les n élèves ne peuvent pas être placés en groupes complets de 2, 3 ou 4 élèves, alors n n'est pas un multiple de 2, 3 ou 4.
Voici les premiers entiers supérieurs à 1 qui ne sont pas divisibles par 2, 3 ou 4 : 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35.
Dans chaque cas, on indique le nombre de groupes complets de chaque grandeur :

n	5	7	11	13	17	19	23	25	29	31	35
N^bre de groupes complets de 2 élèves	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17
N^bre de groupes complets de 3 élèves	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N^bre de groupes complets de 4 élèves	1	1	2	3	4	4	5	6	7	7	8

Puisque le nombre de groupes complets de 2 élèves est 5 de plus que le nombre de groupes complets de 3 élèves qui est lui-même 3 de plus que le nombre de groupes complets de 4 élèves, on voit que parmi ces résultats, $n = 31$ satisfait aux conditions.
Dans ce cas, on a $n^2 - n = 31^2 - 31$, ou $n^2 - n = 930$. La somme des chiffres de l'entier égal à $n^2 - n$ est donc égale à 12.
(Puisqu'il s'agit d'un problème à choix multiple et qu'on a trouvé une valeur de n qui vérifie les condidions données, cette réponse doit être bonne. La solution 1 indique pourquoi 31 est la seule valeur de n qui satisfait aux conditions données.)

Réponse : (B)

21. Soit n le nombre de matchs que Jade a joués avant son dernier match.
Puisqu'elle a marqué une moyenne de 20 points par match pendant ces n matchs, elle a marqué un total de $20n$ points dans ces n matchs.
Dans son dernier match, elle a marqué 36 points pour un total de $20n + 36$ points.
Or, elle a maintenant joué $n + 1$ matchs et elle a marqué une moyenne de 21 points par match.
Elle a donc marqué un total de $21(n + 1)$ points.
On a donc $21(n + 1) = 20n + 36$, ou $21n + 21 = 20n + 36$, d'où $n = 15$.
En 16 matchs, Jade a donc marqué $20(15) + 36$ points, ou 336 points.
Pour que sa moyenne monte à 22 points par match en 17 matchs, elle devra avoir marqué un total de $17 \cdot 22$ points, ou 374 points.
Elle doit donc marquer 38 points $(374 - 336 = 38)$ dans son prochain match.

Réponse : (A)

22. Puisque la piste est circulaire avec un rayon de 25 km, elle a une circonférence de $2\pi(25)$ km, ou 50π km.
Pendant les 15 minutes qu'Alain conduit à 80 km/h, il parcourt une distance de $\frac{1}{4}(80)$ km, ou 20 km (puisque 15 minutes correspondent à un quart d'heure).
Lorsque Louise quitte la ligne de départ, Louise conduit dans la direction opposée à celle d'Alain.
Supposons que Louise conduit pendant t heures avant de rencontrer Alain pour la première fois.
Pendant ce temps, Louise conduit à une vitesse de 100 km/h et elle parcourt donc une distance de $100t$ km.
Pendant ce temps, Alain conduit à une vitesse de 80 km/h et il parcourt donc une distance de $80t$ km.
Puisqu'ils sont à $50\pi - 20$ km l'une de l'autre lors du départ de Louise (la circonférence de la piste moins les 20 km parcourus par Alain au départ), alors la somme des distances qu'ils parcourent

est de $50\pi - 20$ km.
Donc $100t + 80t = 50\pi - 20$, d'où $180t = 50\pi - 20$, ou $t = \frac{5\pi-2}{18}$.
Supposons qu'Alain et Louise coursent pendant T heures de plus avant de se rencontrer la deuxième fois.
Pendant ce temps, Louise parcourt $100T$ km et Alain parcourt $80T$ km.
Cette fois, la distance parcourue pendant ce temps est la circonférence au complet, soit 50π km.
Donc $180T = 50\pi$, ou $T = \frac{5\pi}{18}$.
Le temps écoulé entre les première et deuxième rencontres est le même que le temps écoulé entre les deuxième et troisième rencontres, et le temps écoulé entre les troisième et quatrième rencontres.
Lorsque les deux se rencontreront la quatrième fois sur la piste, Louise aura conduit pendant $t + 3T$ heures, ou $\frac{5\pi-2}{18} + 3 \cdot \frac{5\pi}{18}$ heures, c'est-à-dire $\frac{20\pi-2}{18}$ heures, ou $\frac{10\pi-1}{9}$ heures.

Réponse : (C)

23. Si on choisit quatre côtés adjacents et qu'on prolonge les côtés à l'infini dans les deux sens, les prolongements ne formeront pas un quadrilatère. (Voir la figure 1.)
Si on choisit des côtés de manière qu'il y ait exactement trois côtés non choisis adjacents et un autre côté non choisi ailleurs entre deux côtés choisis, les prolongements ne formeront pas un quadrilatère, car les lignes ne formeront pas une figure fermée. (Voir les figures 2 et 3.)

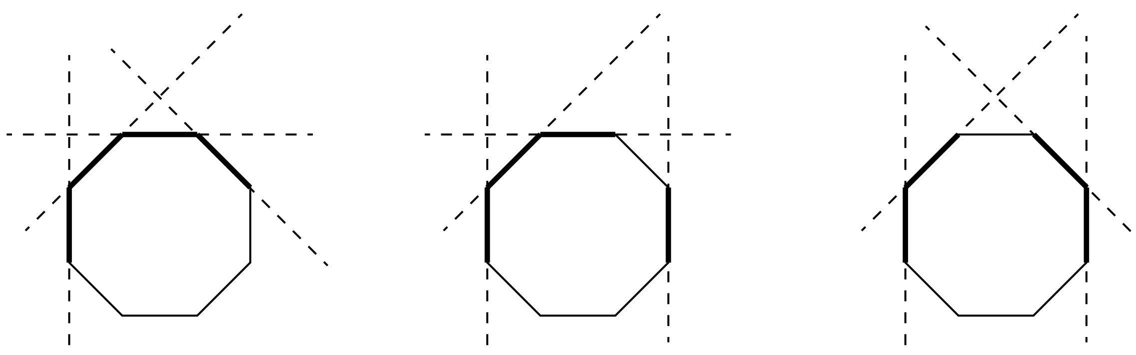


Figure 1 Figure 2 Figure 3

N'importe quel autre choix de quatre côtés permettra la formation d'un quadrilatère qui contient l'octogone. L'argument suivant le démontre :

> Supposons que l'on choisisse un côté c_1 et ensuite un côté c_2 dans le sens des aiguilles d'une montre.
> Ces deux côtés peuvent être adjacents (comme dans la figure 4), il peut y avoir un côté non choisi entre eux (comme dans la figure 5) ou il peut y avoir deux côtés non choisis entre eux (comme dans la figure 6). (S'il y a trois ou quatre côtés non choisis entre eux, on se retrouve avec une des deux situations précédentes. Il ne peut y avoir plus de quatre côtés non choisis, puisqu'on doit choisir quatre côtés sur huit.)

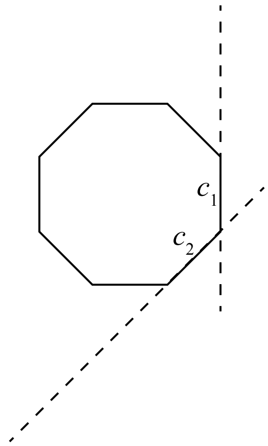


Figure 4

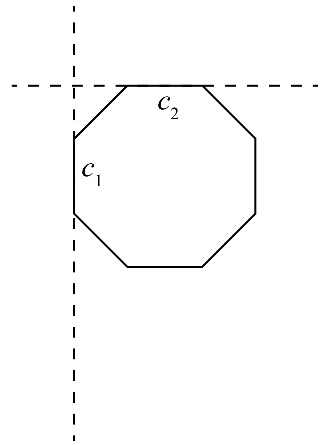


Figure 5

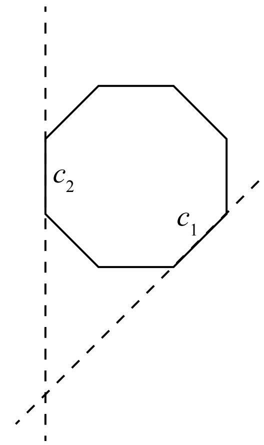


Figure 6

Dans chacun de ces cas, les côtés prolongés c_1 et c_2 se coupent sur l'octogone ou à l'extérieur de l'octogone.
On choisit ensuite c_3 et c_4 de manière qu'il ne reste pas trois ou quatre côtés non choisis adjacents.
Dans chaque paire de côtés choisis consécutifs (c_1 et c_2, c_2 et c_3, c_3 et c_4, c_4 et c_1) il y a des prolongements qui se coupent sur l'octogone ou à l'extérieur de l'octogone.
Les quatre points d'intersection et les droites qui les produisent forment donc un quadrilatère qui contient l'octogone. (Voir un exemple dans la figure 7.)

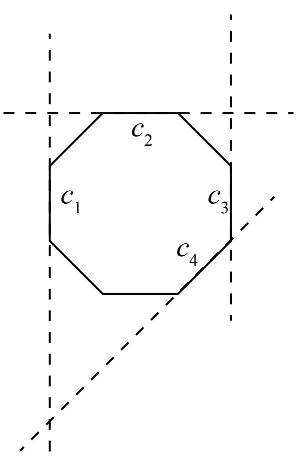


Figure 7

Selon l'énoncé, il y a 70 façons différentes de choisir quatre côtés de l'octogone.
On comptera le nombre de façons de choisir quatre côtés de manière à ne pas produire un quadrilatère et on soustraira ce nombre de 70, ce qui nous donnera le nombre de choix qui produisent le quadrilatère.
Il y a 8 façons de choisir quatre côtés adjacents : on choisit un côté initial (il y a 8 choix) et on choisit les trois côtés suivants dans l'ordre des aiguilles d'une montre (il n'y a qu'un choix). On peut aussi choisir quatre côtés adjacents et leur faire subir une de huit rotations possibles.
Il y a 8 façons de « choisir » les trois côtés adjacents non choisis (on en choisit trois et on leur fait subir une de 8 rotations possibles). Pour chacun de ces choix, il y a 3 façons de placer le quatrième côté non choisi (la figure 2 est est une, la figure 3 en est une et la réflexion de la figure 2 par rapport à un axe vertical en est une autre). Il y a donc 8×3 façons, ou 24 façons de choisir quatre côtés de manière qu"il y ait 3 côtés non choisis adjacents.
Pour résumer, il y a 70 façons de choisir quatre côtés et il y a $(8+24)$ façons, ou 32 façons de les

choisir de manière à ne pas obtenir un quadrilatère qui contient l'octogone. Il y a donc $(70-32)$ façons, ou 38 façons de les choisir de manière à en obtenir un.
La probabilité de choisir quatre côtés de manière que les prolongements des côtés se rencontrent pour former un quadrilatère qui contient l'octogone est donc égale à $\frac{38}{70}$, ou $\frac{19}{35}$.

Réponse : (B)

24. Soit q un nombre pour lequel il existe exactement 19 entiers n qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$.
Soit $m, m+1, m+2, \ldots, m+17, m+18$ ces 19 entiers.
Donc $\sqrt{q} < m < m+1 < m+2 < \cdots < m+17 < m+18 < q$.
On a donc $q - \sqrt{q} > (m+18) - m$, ou $q - \sqrt{q} > 18$, puisque $q - \sqrt{q}$ est le plus petit possible lorsque q est aussi petit que possible et $\sqrt{q}$ est aussi grand que possible.
Aussi, puisqu'il s'agit de la liste des entiers qui sont situés entre $\sqrt{q}$ et q, on doit avoir $m - 1 \leq \sqrt{q} < m < m+1 < m+2 < \cdots < m+17 < m+18 < q \leq m+19$.
En d'autres mots, ni $m-1$ ni $m+19$ ne vérifie $\sqrt{q} < n < q$.
Donc $q - \sqrt{q} \leq (m+19) - (m-1) = 20$.
On a donc $18 < q - \sqrt{q} \leq 20$.

On utilise ensuite $18 < q - \sqrt{q} \leq 20$ pour obtenir une contrainte sur q.
Pour obtenir $q - \sqrt{q} > 18$, il faut que $q > 18$.
Or si $q > 18$, alors $\sqrt{q} > \sqrt{18} > 4$.
De plus, $q - \sqrt{q} > 18$ et $\sqrt{q} > 4$ impliquent que $q - 4 > q - \sqrt{q} > 18$, d'où $q > 22$.
Ensuite, on remarque que $q - \sqrt{q} = \sqrt{q}(\sqrt{q} - 1)$.
Lorsque q est supérieur à 1 et croissant, chacun des facteurs $\sqrt{q}$ et $\sqrt{q} - 1$ est croissant et le produit $q - \sqrt{q}$ est donc croissant.
Lorsque $q = 25$, $q - \sqrt{q} = 25 - 5$, ou $q - \sqrt{q} = 20$.
On veut que $q - \sqrt{q} \leq 20$. Puisque $q - \sqrt{q} = 20$ lorsque $q = 25$ et puisque $q - \sqrt{q}$ est croissant, alors on doit avoit $q \leq 25$ lorsque $q - \sqrt{q} \leq 20$.
Puisque $18 < q - \sqrt{q} \leq 20$, on a donc $22 < q \leq 25$.
On limite donc notre recherche de q dans cet intervalle.

Lorsque $q = 22$, on a $\sqrt{q} \approx 4{,}69$. Les valeurs entières de n qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$ sont $5, 6, 7, \ldots, 20, 21$. Il y en a 17.
Lorsque $22 < q \leq 23$, on a $4 < \sqrt{q} < 5$ et $22 < q \leq 23$. Les valeurs entières de n qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$ sont $5, 6, 7, \ldots, 20, 21, 22$. Il y en a 18.
Lorsque $23 < q \leq 24$, on a $4 < \sqrt{q} < 5$ et $23 < q \leq 24$. Les valeurs entières de n qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$ sont $5, 6, 7, \ldots, 20, 21, 22, 23$. Il y en a 19.
Lorsque $24 < q < 25$, on a $4 < \sqrt{q} < 5$ et $24 < q < 25$. Les valeurs entières de n qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$ sont $5, 6, 7, \ldots, 20, 21, 22, 23, 24$. Il y en a 20.
Lorsque $q = 25$, on a $\sqrt{q} = 5$. Les valeurs entières de n qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$ sont $6, 7, \ldots, 20, 21, 22, 23, 24$. Il y en a 19.
Donc, les nombres q pour lesquels il existe exactement 19 valeurs entières de n qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$ sont $q = 25$ et les valeurs de q qui vérifient $23 < q \leq 24$.

On doit déterminer la somme de tous ces nombres q qui sont de la forme $q = \dfrac{a}{b}$, a et b étant des entiers strictement positifs tels que $b \leq 10$.
Les entiers $q = 24$ et $q = 25$ sont de cette forme si on pose respectivement $a = 24$ et $a = 25$, avec $b = 1$.
Les nombres q qui sont de cette forme, entre 23 et 24 avec $b \leq 4$, sont :

$$23\tfrac{1}{2} = \tfrac{47}{2}, 23\tfrac{1}{3} = \tfrac{70}{3}, 23\tfrac{2}{3} = \tfrac{71}{3}, 23\tfrac{1}{4} = \tfrac{93}{4}, 23\tfrac{3}{4} = \tfrac{95}{4}$$

On a omis $23\frac{2}{4}$, puisqu'il s'agit du même nombre que $23\frac{1}{2}$.
On continue à inclure les nombres qui sont dans l'intervalle $5 \leq b \leq 10$, tout en omettant les nombres équivalents à d'autres nombres déjà inclus avec de plus petits dénominateurs. On obtient :

$$23\tfrac{1}{2}, 23\tfrac{1}{3}, 23\tfrac{2}{3}, 23\tfrac{1}{4}, 23\tfrac{3}{4}, 23\tfrac{1}{5}, 23\tfrac{2}{5}, 23\tfrac{3}{5}, 23\tfrac{4}{5}, 23\tfrac{1}{6}, 23\tfrac{5}{6}, 23\tfrac{1}{7}, 23\tfrac{2}{7}, 23\tfrac{3}{7}, 23\tfrac{4}{7}, 23\tfrac{5}{7}, 23\tfrac{6}{7},$$

$$23\tfrac{1}{8}, 23\tfrac{3}{8}, 23\tfrac{5}{8}, 23\tfrac{7}{8}, 23\tfrac{1}{9}, 23\tfrac{2}{9}, 23\tfrac{4}{9}, 23\tfrac{5}{9}, 23\tfrac{7}{9}, 23\tfrac{8}{9}, 23\tfrac{1}{10}, 23\tfrac{3}{10}, 23\tfrac{7}{10}, 23\tfrac{9}{10}$$

Cette liste contient 31 nombres.
Chacun de ces 31 nombres est égal à 23 plus une fraction entre 0 et 1.
À l'exception du seul nombre avec dénominateur 2, chaque fraction peut être appariée à une autre fraction pour obtenir une somme de 1. (Par exemple, $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$ et $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$.)
La somme de ces valeurs de q, entre 23 et 24, est égale à $31(23) + \frac{1}{2} + 15(1)$, ou $728\frac{1}{2}$, puisque 23 parait 31 fois, plus la fraction $\frac{1}{2}$ plus les 15 paires de fractions qui ont une somme de 1.
La somme des valeurs de q de la forme appropriée pour lequelles il existe 19 entiers qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$ est égale à $728\frac{1}{2} + 25 + 24$, ou $777\frac{1}{2}$.

Réponse : (C)

25. D'après les règles, les mots de 1 lettre sont A, B, C, D, E.
D'après les règles, les mots de 2 lettres sont AB, AC, AD, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, DA, DB, DC, DE, EB, EC et ED.
Soit v_n le nombre de mots de n lettres qui commencent par une voyelle. On remarque que $v_1 = 2$ et $v_2 = 6$.
Soit c_n le nombre de mots de n lettres qui commencent par une consonne. On remarque que $c_1 = 3$ et $c_2 = 12$.
Supposons que $n \geq 2$.
On considère un mot de longueur n qui commence par une voyelle (c'est-à-dire par A ou par E).
Puisqu'il ne peut y avoir deux voyelles de suite dans un mot, la deuxième lettre doit être un B, un C ou un D.
Donc, chaque mot de longueur n peut être transformé en un mot de longueur $n-1$ qui commence par une consonne en enlevant la première lettre.
De plus, chaque mot de longueur $n-1$ qui commence par une consonne peut être transformé en deux mots différents de longueur n qui commencent par une voyelle.
Donc $v_n = 2c_{n-1}$.

On considère un mot de longueur n qui commence par une consonne.
Puisqu'un mot ne peut pas contenir une même lettre deux fois de suite, la deuxième lettre de ce mot doit être une voyelle ou une consonne différente de la première lettre du mot.
Chaque mot de longueur $n-1$ qui commence par une voyelle peut être transformé en 3 mots différents de longueur n qui commencent par une consonne, en ajoutant un B, un C ou un D au début du mot.
Chaque mot de longueur $n-1$ qui commence par une consonne peut être transformé en 2 mots de longueur n qui commencent par une consonne, en ajoutant au début du mot une des consonnes autres que celle qui commence le mot de longueur $n-1$.
Donc $c_n = 3v_{n-1} + 2c_{n-1}$.

On sait que $v_1 = 2$ et $c_1 = 3$.
Les équations $v_2 = 2c_1$ et $c_2 = 3v_1 + 2c_1$ sont conformes aux résultats $v_2 = 6$ et $c_2 = 12$.
Puisque $v_2 = 6$ et $c_2 = 12$, alors $v_3 = 2c_2 = 24$ et $c_3 = 3v_2 + 2c_2 = 3(6) + 2(12) = 42$.
On cherche v_{10}.

On continue à calculer tout en remplissant un tableau :

n	v_n	c_n
1	2	3
2	6	12
3	24	42
4	84	156
5	312	564
6	1128	2064
7	4128	7512
8	15 024	27 408
9	54 816	99 888
10	199 776	364 224

Il y a donc 199 776 mots de 10 lettres qui commencent par une voyelle.

Réponse : (E)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2015

(10^{e} année – Secondaire IV)

le mardi 24 février 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 25 février 2015
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $2 \times 2015 - 2015 = 4030 - 2015 = 2015$

   OU On peut procéder comme suit : $2 \times 2015 - 2015 = 2 \times 2015 - 1 \times 2015 = 1 \times 2015 = 2015$

   Réponse : (A)

2. On a : $\sqrt{1} + \sqrt{9} = 1 + 3 = 4$

   Réponse : (D)

3. Le volume d'une boite de forme rectangulaire est égal au produit de l'aire de la base et de la hauteur.
   Donc, la hauteur de la boite est égale au volume divisé par l'aire de la base.
   L'aire de la base est égale à $2 \cdot 5$ cm^2, ou 10 cm^2.
   Donc, la hauteur de la boite est égale à $(30 \div 10)$ cm, ou 3 cm.

   Réponse : (C)

4. *Solution 1*
   L'angle SRQ est un angle extérieur du triangle PQR.
   Donc $\angle SRQ = \angle RPQ + \angle PQR$, d'où $\angle SRQ = 50^\circ + 90^\circ$, ou $\angle SRQ = 140^\circ$.
   Donc $x^\circ = 140^\circ$, ou $x = 140$.

   Solution 2
   Les mesures des angles du triangle PQR ont une somme de 180°. Donc :

   $$\angle PRQ = 180^\circ - \angle RPQ - \angle PQR = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 40^\circ$$

   Puisque les angles PRQ et SRQ sont supplémentaires, alors $x^\circ + 40^\circ = 180^\circ$. Donc $x = 180 - 40$, ou $x = 140$.

   Réponse : (D)

5. D'après le diagramme, 3 provinces et territoires se sont joints à la Confédération de 1890 à 1929, et 1 de 1930 à 1969.
   Donc de 1890 à 1969, un total de 4 provinces et territoires se sont joints à la Confédération.
   Si on choisit une des provinces ou un des territoires au hasard (il y en a 13 en tout), la probabilité pour qu'elle ou il se soit joint à la Confédération de 1890 à 1969 est de $\frac{4}{13}$.

   Réponse : (B)

6. Puisque $a^2 = 9$, alors $a^4 = (a^2)^2$, d'où $a^4 = 9^2$, ou $a^4 = 81$.

   OU Puisque $a^2 = 9$, alors $a = \pm 3$. Si $a = 3$, alors $a^4 = 3^4$, ou $a^4 = 81$; si $a = -3$, alors $a^4 = (-3)^4$, ou $a^4 = 81$.

   Réponse : (B)

7. On sait que $3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} = 3 + \frac{10}{100} + \frac{4}{100} = 3 + \frac{14}{100} = 3\frac{14}{100}$.
   Puisque $\frac{14}{100} = 0{,}14$, l'expression donnée est aussi égale à 3,14.
   Puisque $\frac{14}{100} = \frac{7}{50}$, l'expression donnée est aussi égale à $3\frac{7}{50}$.
   De plus, $3\frac{7}{50} = 3 + \frac{7}{50} = \frac{150}{50} + \frac{7}{50} = \frac{157}{50}$.
   Le seul choix de réponse qui reste est $3\frac{5}{110}$.
   Or $3\frac{5}{110} = 3{,}0\overline{45}$, ce qui n'est pas égal à 3,14.

   Réponse : (C)

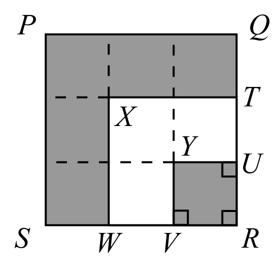
8. Au départ, Valérie a la moitié de l'argent qu'il faut pour acheter le collier.
Après que sa soeur lui a remis 30 \$, Valérie a les trois quarts de l'argent qu'il lui faut. Donc, sa soeur lui a remis un quart de la somme requise, car $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Il lui faut encore un quart de la somme requise, soit le même montant que sa soeur lui a donné, c'est-à-dire 30 \$.
Donc, son père lui donnera 30 \$.

Réponse : (D)

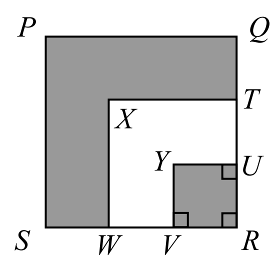
9. Puisque le 5 janvier est un lundi et que les lundis viennent tous les 7 jours, les lundis suivants sont le 12 janvier, le 19 janvier et le 26 janvier.
Puisque Jean court tous les trois jours, il courra le 5, le 8, le 11, le 14, le 17, le 20, le 23, le 26 et le 29 janvier.
Le lundi suivant où il courra est le 26 janvier.

Réponse : (C)

10. *Solution 1*
Puisque $PQRS$ est un carré et que TX et UY sont perpendiculaires à QR, alors TX et UY sont parallèles à PQ et à SR.
De même, VY et WX sont parallèles à PS et à QR.
Si on prolonge WX et VY jusqu'à PQ et qu'on prolonge TX et UY jusqu'à PS, le carré $PQRS$ est divisé en 9 rectangles.
Puisque $QT = TU = UR = 1$ et $RV = VW = WS = 1$, alors le carré $PQRS$ est vraiment divisé en 9 carrés de dimensions 1 sur 1.
Or, 6 des 9 carrés sont ombrés et les 3 autres ne le sont pas.
Le rapport de l'aire de la partie ombrée à l'aire de la partie non ombrée est donc de 6 : 3, ou 2 : 1.



Solution 2
On considère le quadrilatère $YURV$.
$YURV$ a trois angles droits. En effet, les angles U et V sont droits puisque UY et VY sont perpendiculaires à QR et à RS, respectivement. L'angle R est droit puisque $PQRS$ est un carré. Puisque $YURV$ a trois angles droits, son quatrième angle doit aussi être droit. Il s'agit donc d'un rectangle.
Puisque $RV = UR = 1$, alors $YURV$ est un carré dont les côtés sont de longueur 1. Il a donc une aire de 1^2, ou 1.
De même, $XTRW$ est un carré dont les côtés sont de longueur 2. Il a donc une aire de 2^2, ou 4.



Puisque le carré $PQRS$ mesure 3×3, il a une aire de 3^2, ou 9.
L'aire de la partie non ombrée est égale à la différence de l'aire du carré $XTRW$ et de celle du carré $YURV$, soit $4 - 1$, ou 3.
Puisque le carré $PQRS$ a une aire de 9 et que la partie non ombrée a une aire de 3, alors la partie ombrée a une aire de $9 - 3$, ou 6.
Le rapport de l'aire de la partie ombrée à l'aire de la partie non ombrée est donc de 6 : 3, ou 2 : 1.

Réponse : (A)

11. D'après la définition, on a :

$$4 \otimes 8 = \frac{4}{8} + \frac{8}{4} = \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Réponse : (E)

12. La droite d'équation $y = \frac{3}{2}x + 1$ a une pente de $\frac{3}{2}$.
Puisque le segment qui joint les points $(-1, q)$ et $(-3, r)$ est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x + 1$, le segment a aussi une pente de $\frac{3}{2}$.
Donc $\dfrac{r-q}{(-3)-(-1)} = \dfrac{3}{2}$, ou $\dfrac{r-q}{-2} = \dfrac{3}{2}$.
Donc $r - q = (-2) \cdot \dfrac{3}{2}$, ou $r - q = -3$.

Réponse : (E)

13. *Solution 1*
Les deux équipes ont un total de de $(25 + 19)$ joueurs, ou 44 joueurs.
Or, il y a exactement 36 élèves qui font partie d'une ou l'autre équipe.
Puisque $44 - 36 = 8$, 8 élèves ont été comptés deux fois.
Il y a donc 8 élèves qui font partie des deux équipes.

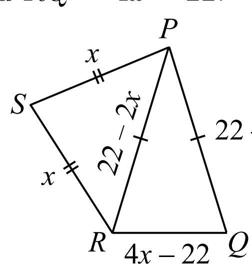
Solution 2
Soit x le nombre d'élèves qui font partie des deux équipes.
Puisque 25 élèves jouent au baseball, il y a $25 - x$ élèves qui jouent au baseball et qui ne jouent pas au hockey.
Puisque 19 élèves jouent au hockey, il y a $19 - x$ élèves qui jouent au hockey et qui ne jouent pas au baseball.
Puisque 36 élèves font partie de l'équipe de baseball, de l'équipe de hockey ou des deux, alors :

$$(25 - x) + (19 - x) + x = 36$$

(Les trois expressions du membre de gauche représentent respectivement le nombre d'élèves qui jouent au baseball mais pas au hockey, le nombre d'élèves qui jouent au hockey mais pas au baseball et le nombre d'élèves qui jouent au baseball et au hockey.)
Donc $44 - x = 36$, d'où $x = 8$.
Donc 8 élèves font partie des deux équipes.

Réponse : (B)

14. Puisque $PS = SR = x$ et que le triangle PRS a un périmètre de 22, alors $PR = 22 - PS - SR$, ou $PR = 22 - 2x$.
Puisque $PQ = PR$ et $PR = 22 - 2x$, alors $PQ = 22 - 2x$.
Puisque le triangle PQR a un périmètre de 22, alors $RQ = 22 - PR - PQ$, d'où $RQ = 22 - (22 - 2x) - (22 - 2x)$, ou $RQ = 4x - 22$.



Puisque $PQRS$ a un périmètre de 24, alors :

$$\begin{aligned} PQ + RQ + SR + PS &= 24 \\ (22 - 2x) + (4x - 22) + x + x &= 24 \\ 4x &= 24 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Réponse : (D)

15. On a :

$$1! = 1 \qquad 2! = (1)(2) = 2 \qquad 3! = (1)(2)(3) = 6$$

$$4! = (1)(2)(3)(4) = 24 \qquad 5! = (1)(2)(3)(4)(5) = 120$$

Donc $1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 1 + 2 + 6 + 24 + 120 = 153$.
Pour chaque entier n supérieur à 5, le chiffre des unités de $n!$ est 0 :

> On peut le constater en remarquant qu'on peut obtenir la valeur de chaque factorielle en multipliant la valeur de la factorielle précédente par l'entier suivant. (Par exemple, $6! = 6(5!)$.)
> Ainsi lorsque le chiffre des unités d'une factorielle est 0, alors toutes les factorielles suivantes auront un chiffre des unités égal à 0.
> Puisque le chiffre des unités de $5!$ est 0, alors le chiffre des unités de $n!$ $(n > 5)$ est aussi 0.
> On peut aussi remarquer que puisque $n!$ est le produit des entiers de 1 à n, alors lorsque $n \geq 5$, $n!$ aura des facteurs qui sont des multiples de 2 et de 5. Donc, $n!$ sera un multiple de 10 et il aura un chiffre des unités égal à 0.

Chacune des expressions $6!$, $7!$, $8!$, $9!$ et $10!$ a un chiffre des unités égal à 0. Donc, l'expression $6! + 7! + 8! + 9! + 10!$ a un chiffre des unités égal à 0.
Puisque l'expression $1! + 2! + 3! + 4! + 5!$ a un chiffre des unités égal à 3 et que l'expression $6! + 7! + 8! + 9! + 10!$ a un chiffre des unités égal à 0, alors l'expression

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9! + 10!$$

a un chiffre des unités égal à $3 + 0$, ou 3.
(On peut vérifier avec une calculatrice que $1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8!+9!+10! = 4\,037\,913$.)

Réponse : (B)

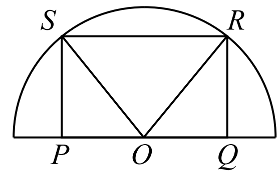
16. Dans un carré magique, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont la même somme.
Puisque les nombres de la première rangée ont la même somme que ceux de la première colonne, alors $a + 13 + b = a + 19 + 12$, d'où $b = 19 + 12 - 13$, ou $b = 18$.
Donc, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont une somme de $18 + 11 + 16$, ou 45.
Dans la première colonne, on a $a + 19 + 12 = 45$, d'où $a = 14$.
Dans la deuxième rangée, on a $19 + c + 11 = 45$, d'où $c = 15$.
Donc $a + b + c = 14 + 18 + 15$, ou $a + b + c = 47$.

Réponse : (C)

17. Soit v km/h la vitesse de Diane pendant les 30 premières minutes.
Puisque 30 minutes correspondent à une demi-heure, alors pendant ces 30 minutes, elle a parcouru une distance de $\frac{1}{2}v$ km.
Pendant les 30 minutes suivantes, elle a conduit sa voiture à une vitesse de $(v + 20)$ km/h.
Donc pendant ces 30 minutes, elle a parcouru une distance de $\frac{1}{2}(v + 20)$ km.
Or, on sait qu'elle a parcouru 100 km en tout. Donc $\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}(v+20) = 100$, ou $\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v + 10 = 100$.
Donc $v + 10 = 100$, ou $v = 90$.
Pendant les 30 premières minutes, la vitesse était de 90 km/h.

Réponse : (B)

18. Soit O le centre du cercle. On trace OS et OR.



Puisque le demi-cercle a un diamètre de 20, il a un rayon de 10 (la moitié de 20).
Puisque OS et OR sont des rayons, alors $OS = OR = 10$.
On considère les triangles OPS et OQR.
Puisque $PQRS$ est un rectangle, les triangles sont rectangles (en P et en Q).
De plus, $PS = QR$ (côtés opposés du rectangle) et $OS = OR$ (rayons du cercle).
Les triangles OPS et OQR sont donc isométriques (triangles rectangles ayant des hypoténuses de même longueur et deux autres côtés de même longueur).
Puisque ces triangles sont sont isométriques, alors $OP = OQ$.
Puisque $PQ = 16$, alors $OP = \frac{1}{2}PQ$, d'où $OP = 8$.
Puisque le triangle OPS est rectangle en P, alors d'après le théorème de Pythagore, on a $PS = \sqrt{OS^2 - OP^2}$, d'où $PS = \sqrt{10^2 - 8^2}$, ou $PS = \sqrt{36} = 6$.

Réponse : (A)

19. On considère une pile de x billets de 20 \$ et y billets de 50 \$ ayant une valeur de 1000 \$.
Les x billets de 20 \$ ont une valeur de $20x$ \$ et les y billets de 50 \$ ont une valeur de $50y$ \$.
Donc $20x + 50y = 1000$, d'où $2x + 5y = 100$.
Déterminer le nombre maximum de piles que le caissier peut avoir est équivalent à déterminer le nombre de couples (x, y) d'entiers tels que $x \geq 1$, $y \geq 1$ et $2x + 5y = 100$.
(On doit avoir $x \geq 1$ et $y \geq 1$, puisque chaque pile contient au moins un billet de 20 \$ et au moins un billet de 50 \$.)
Puisque $x \geq 1$, alors $2x \geq 2$, d'où $5y = 100 - 2x \leq 98$.
Donc $y \leq \frac{98}{5} = 19{,}6$.
Puisque y est un entier, alors $y \leq 19$.
De plus, puisque $5y = 100 - 2x$, alors le membre de droite est la différence de deux nombres pairs, ce qui indique que $5y$ est pair. Donc, y doit être pair.
Les valeurs possibles de y sont donc $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$.
Chacune de ces valeurs donne un couple (x, y) qui vérifie l'équation $2x + 5y = 100$:

$$(x, y) = (45, 2), (40, 4), (35, 6), (30, 8), (25, 10), (20, 12), (15, 14), (10, 16), (5, 18)$$

Donc, le caissier peut avoir un maximum de 9 piles devant lui.

Réponse : (A)

20. On calcule la valeur de $72\left(\frac{3}{2}\right)^n$ pour chaque entier n de $n = -3$ à $n = 4$:

$$\begin{array}{cc} 72\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = 72 \cdot \frac{2^3}{3^3} = 72 \cdot \frac{8}{27} = \frac{64}{3} & 72\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = 72 \cdot \frac{2^2}{3^2} = 72 \cdot \frac{4}{9} = 32 \\ 72\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = 72 \cdot \frac{2^1}{3^1} = 72 \cdot \frac{2}{3} = 48 & 72\left(\frac{3}{2}\right)^{0} = 72 \cdot 1 = 72 \\ 72\left(\frac{3}{2}\right)^{1} = 72 \cdot \frac{3^1}{2^1} = 72 \cdot \frac{3}{2} = 108 & 72\left(\frac{3}{2}\right)^{2} = 72 \cdot \frac{3^2}{2^2} = 72 \cdot \frac{9}{4} = 162 \\ 72\left(\frac{3}{2}\right)^{3} = 72 \cdot \frac{3^3}{2^3} = 72 \cdot \frac{27}{8} = 243 & 72\left(\frac{3}{2}\right)^{4} = 72 \cdot \frac{3^4}{2^4} = 72 \cdot \frac{81}{16} = \frac{729}{2} \end{array}$$

Il existe donc au moins 6 valeurs entières de n pour lesquelles $72\left(\frac{3}{2}\right)^n$ a une valeur entière, soit $n = -2,\ -1, 0, 1, 2, 3$.
Puisque 6 est le plus grand choix de réponse, ça doit être la réponse (c'est-à-dire qu'il ne doit pas y avoir d'autres valeurs possibles de n).

On peut justifier cet énoncé en partant de $72\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{729}{2}$ et en remarquant que si n prend des valeurs de plus en plus grandes, cela a pour effet de toujours multiplier par $\frac{3}{2}$ et le numérateur est alors toujours impair, tandis que le dénominateur est toujours pair. Donc, $72\left(\frac{3}{2}\right)^n$ n'est jamais un entier lorsque $n > 3$. On obtient une conclusion semblable lorsque $n < -2$.
On peut justifier l'énoncé de façon plus formelle en écrivant :

$$72\left(\frac{3}{2}\right)^n = 3^2 \cdot 2^3 \cdot 3^n \cdot 2^{-n} = 3^2 3^n 2^3 2^{-n} = 3^{2+n} 2^{3-n}$$

Pour que ce produit soit un entier, il faut que 3^{2+n} et 2^{3-n} soient tous deux des entiers.
(Les expressions 3^{2+n} et 2^{3-n} peuvent avoir une valeur qui est un entier ou une fraction avec 1 comme numérateur et une puissance de 2 ou de 3 comme dénominateur. Si chacune a pour valeur une fraction, alors leur produit est une fraction inférieure à 1, ce qui n'est pas un entier. Si exactement une des expression a pour valeur une fraction, alors leur produit est une fraction avec une puissance de 2 au numérateur et une puissance de 3 au dénominateur, ou vice versa. Une telle fraction ne peut être un entier, car on ne peut « annuler » des facteurs du numérateur avec des facteurs du dénominateur.)
Donc $2 + n \geq 0$ (d'où $n \geq -2$) et $3 - n \geq 0$ (d'où $n \leq 3$).
Donc $-2 \leq n \leq 3$. Les 6 entiers de cet intervalle sont les 6 entiers nommés ci-dessus.

Réponse : (E)

21. On donne trois entiers impairs consécutifs qui ont une moyenne de 7.
Ces trois entiers doivent être 5, 7 et 9.
On peut le constater en prodédant de façon plus formelle. Puisque des entiers impairs consécutifs diffèrent l'un de l'autre de 2, soit $a - 2, a$ et $a + 2$ ces entiers.
Puisqu'ils ont une moyenne de 7, ils ont une somme de $3 \cdot 7$, ou 21.
Donc $(a - 2) + a + (a + 2) = 21$, d'où $3a = 21$, ou $a = 7$.
Lorsqu'on ajoute m, la moyenne des quatre entiers est égale à leur somme divisée par 4, ou $\dfrac{21 + m}{4}$.
Cette moyenne est un entier lorsque $21 + m$ est divisible par 4.
Puisque 21 est 1 de plus qu'un multiple de 4, alors la somme $21 + m$ est un multiple de 4 lorsque m est 1 de moins qu'un multiple de 4.
Les plus petits entiers m qui sont 1 de moins qu'un multiple de 4 sont 3, 7, 11, 15 et 19.
Puisque m est différent des trois premiers entiers, 5, 7 et 9, alors les trois plus petites valeurs possibles de m sont 3, 11 et 15.
Leur somme est égale à $3 + 11 + 15$, ou 29.

Réponse : (D)

22. Soit P, Q, R, S, T, U les six joueurs.
Chaque joueur joue deux parties contre chacun des cinq autres joueurs. Donc, chaque joueur joue 10 parties. Donc, chacun peut obtenir de 0 point à 10 points.
On montrera qu'un joueur doit obtenir $9\frac{1}{2}$ points pour s'assurer qu'il a plus de points que tout autre joueur.
Pour le faire, on montrera qu'il est possible que deux joueurs obtiennent chacun 9 points et que si un joueur obtient $9\frac{1}{2}$ ou 10 points, alors les autres joueurs ne peuvent obtenir plus de 9 points chacun.
Supposons que P et Q gagnent toutes les parties contre R, S, T et U et qu'ils font match nul chaque fois qu'ils jouent l'un contre l'autre.
Alors P et Q ont chacun 8 victoires, 2 matchs nuls et 0 défaite.
Chacun obtient donc $8 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0$ points, ou 9 points.
Dans un tel cas, R, S, T et U ont chacun 4 défaites (2 contre P et 2 contre Q). Ils ont donc chacun un maximum de 6 points.
Donc, si un joueur obtient 9 points, il n'a pas nécessairement plus de points que tout autre joueur, car dans ce scénario, P et Q ont chacun 9 points.
Supposons que P obtient $9\frac{1}{2}$ ou 10 points.
Si P a 10 points, alors P a remporté chaque joute qu'il a jouées. Les autres joueurs ont alors perdu au moins 2 parties chacun et ils ont alors un maximum de 8 points.
Si P a $9\frac{1}{2}$ points, alors P doit avoir 9 victoires, 1 match nul et 0 défaite. (Avec $9\frac{1}{2}$ points, P a seulement perdu $\frac{1}{2}$ point. Il ne peut donc pas avoir subi une défaite et il a donc obtenu un match nul.)
Puisque P a 9 victoires, alors P a vaincu chaque autre joueur au moins une fois. (S'il y avait un joueur que P n'avait pas vaincu une seule fois, alors P aurait un maximum de 8 victoires.)
Puisque chaque autre joueur a au moins 1 défaite, alors chacun de ces joueurs a un maximum de 9 points.
Donc si P obtient $9\frac{1}{2}$ ou 10 points, alors P a plus de points que tout autre joueur.
Pour résumer, si un joueur obtient $9\frac{1}{2}$ ou 10 points, il est assuré d'avoir obtenu plus de points que tout autre joueur, tandis que s'il obtient 9 points, il est possible qu'un autre joueur ait le même nombre de points.
Donc, le nombre minimum de points qu'un joueur doit obtenir pour s'assurer qu'il a plus de points que tout autre joueur est $9\frac{1}{2}$.

Réponse : (D)

23. La minuterie allume l'éclairage au hasard à 19 h 00, 19 h 30, 20 h 00, 20 h 30 ou 21 h 00, dans chaque cas avec une probabilité de $\frac{1}{5}$.
On cherche d'abord la probabilité pour que l'éclairage s'allume à 19 h 00 et reste allumé pendant t heures $(4 < t < 5)$.
Si l'éclairage s'allume à 19 h 00 et reste allumé de 4 à 5 heures, alors il s'éteint entre 23 h 00 et 24 h 00.
Il s'agit d'un intervalle d'une heure. Puisque l'éclairage s'éteint au hasard dans un intervalle de 2 heures (entre 23 h 00 et 1 h 00), alors il y a une probabilité de $\frac{1}{2}$ pour qu'il s'éteigne entre 23 h 00 et 24 h 00.
Donc, la probabilité pour que l'éclairage s'allume à 19 h 00 et reste allumé pendant t heures $(4 < t < 5)$ est de $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{10}$.
De même, la probabilité pour que l'éclairage s'allume à 19 h 30 et s'éteigne entre 23 h 30 et 24 h 30 est de $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{10}$.
La probabilité pour que l'éclairage s'allume à 20 h 00 et s'éteigne entre 24 h 00 et 1 h 00 est aussi de $\frac{1}{10}$.

Si l'éclairage s'allume à 20 h 30 et reste allumé de 4 à 5 heures, il doit s'éteindre entre 0 h 30 et 1 h 00 (il ne peut s'éteindre après 1 h 00).

La probabilité pour que cela se produise est de $\frac{1}{5} \cdot \frac{1/2}{2}$, ou $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{20}$.

Si l'éclairage s'allume à 21 h 00, il ne peut rester allumé plus de 4 heures, puisqu'il doit s'éteindre au plus tard à 1 h 00.

La probabilité pour que l'éclairage reste allumé de 4 à 5 heures est donc de $3 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{20}$, ou $\frac{7}{20}$.

(On peut ignorer la question de savoir si le fait que l'éclairage s'allume à 19 h 30 et s'éteint à précisément 23 h 00 a un effet sur le calcul de la probabilité. En effet, 23 h 30 est un seul point dans un intervalle contenant une infinité de points et cela n'a aucun effet sur la probabilité.)

Réponse : (E)

24. Le remplissage d'une région par des tuiles ou des polygones est appelé un *pavage*.

Puisqu'aucune tuile ne peut traverser la ligne TU, on considère le pavage des régions $PTUS$ et $TQRU$ séparément.

On continue en omettant les unités (mètres).

On détermine d'abord le nombre de pavages de la région $PTUS$ de dimensions 2×4.

Pour mieux décrire le travail, on divise le rectangle $PTUS$ en 8 carrés de dimensions 1×1 et on les nomme comme dans la Figure 1.

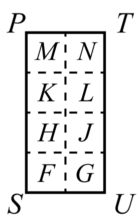


Figure 1

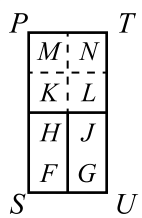


Figure 2

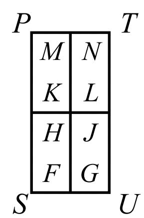


Figure 3

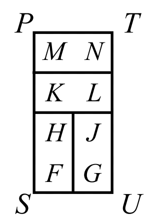


Figure 4

On considère le carré F. On doit le couvrir par une tuile horizontale (qui recouvre FG) ou une tuile verticale (qui recouvre FH).

Si F est recouvert d'une tuile verticale FH, alors G doit aussi être recouvert d'une tuile verticale GJ, puisque G est recouvert et sa tuile ne peut pas chevaucher la ligne TU.

On a alors la disposition de la Figure 2.

Le carré 2×2 peut alors être recouvert comme dans la Figure 3 et la Figure 4.

Jusqu'à maintenant, on a 2 façons possibles de paver $PTUS$.

Si F est recouvert d'une tuile horizontale FG, on se concentre sur H et J.

Soit que H et J sont recouverts d'une tuile horizontale HJ (ce qui laisse un carré 2×2 qui peut être recouvert de 2 façons comme ci-haut (voir les Figures 5 et 6)), ou H et J sont chacun recouverts d'une tuile verticale HK et JL, ce qui indique que MN est recouvert d'une tuile horizontale (voir la Figure 7).

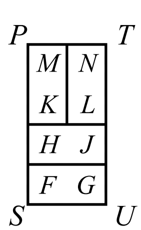


Figure 5

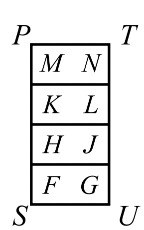


Figure 6

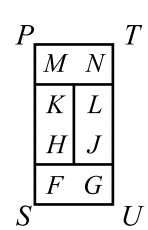


Figure 7

Donc si F est recouvert d'une tuile horizontale, il y a $(2 + 1)$ pavages, ou 3 pavages.

En tout, il y a $(2 + 3)$ pavages, ou 5 pavages possibles de la région $PTUS$ de dimensions 2×4.

On considère la région $TQRU$.
Soit t le nombre de pavages possibles de la région $TQRU$ de dimensions 4×4.
Pour chacun des 5 pavages de $PTUS$, il y a t pavages $TQRU$, ce qui veut dire qu'il y a $5t$ pavages de la région $PQRS$.

On divise la région $TQRU$ en carrés de dimensions 1×1 que l'on nomme comme dans la Figure 8. Soit V et W les milieurs respectifs de TQ et de UR.

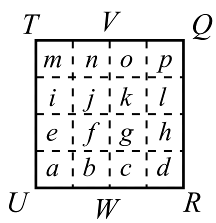


Figure 8

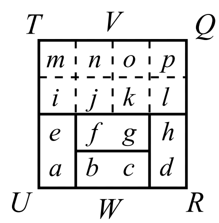


Figure 9

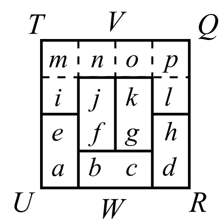


Figure 10

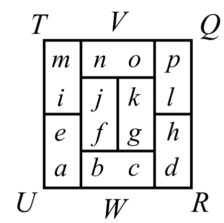


Figure 11

On considère deux cas—ou bien une tuile chevauche le segment VW ou non.
Si aucune tuile ne chevauche VW, alors $TVWU$ et $VQRW$ sont des régions de dimensions 2×4 et elles peuvent chacune être pavée de 5 façons comme pour $PTUS$.
Dans ce cas, le nombre de pavages possibles de $TQRU$ est égal à 5×5, ou 25.

Supposons qu'au moins une tuile chevauche VW.
Si bc est recouvert d'une tuile horizontale, alors ae et dh sont recouverts de tuiles verticales.
Dans ce cas, fg est recouvert d'une tuile horizontale (Figure 9), ou f et g sont chacun recouvert d'une tuile verticale (Figure 10).
Dans le premier cas (Figure 9), la région supérieure de dimensions 4×2 doit être recouverte et il y a 5 façons de le faire, comme on l'a vu.
Dans le deuxième cas (Figure 10), les tuiles qui restent doivent paraitre comme dans la Figure 11. Pourquoi ?
Donc si bc est recouvert d'une tuile horizontale, il y a $(5 + 1)$ pavages, ou 6 pavages.

Supposons que bc n'est pas recouvert d'une tuile horizontale, mais que fg l'est.
Alors ab et cd sont chacun recouverts d'une tuile horizontale, tandis que ei et hl sont chacun recouverts d'une tuile verticale. Donc, mn et op sont recouverts de tuiles de tuiles horizontales et jk doit alors être recouvert d'une tuile horizontale.

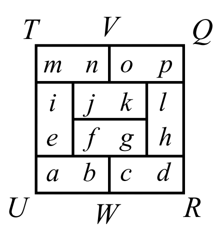


Figure 12

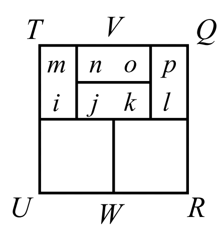


Figure 13

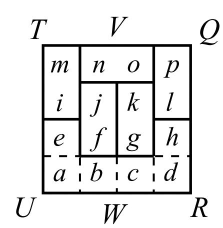


Figure 14

En d'autres mots, il n'y a qu'un pavage possible dans ce cas, soit celui de la Figure 12.

Supposons que bc et fg ne sont pas recouverts d'une tuile horizontale, mais que jk l'est.
Dans ce cas, chacun des deux carrés de dimensions 2×2 peut être pavé de façon indépendante de 2 façons. Il y a donc 4 façons de paver les deux carrés. (Ces pavages sont indépendants, puisque si ei ou hl est recouvert d'une tuile verticale, alors les trois autres petits carrés dans le carré correspondant de dimensions 2×2 ne peuvent être recouverts de tuiles de dimensions 1×2.)
De plus, im et lp doivent être recouverts de tuiles verticales, ce qui implique que no est recouvert d'une tuile horizontale, comme dans la Figure 13. Il n'y a donc qu'un pavage possible du rectangle supérieur.

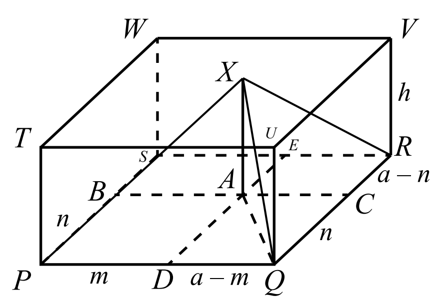
Il y a donc $2 \times 2 \times 1$ pavages, ou 4 pavages de $TQRU$ dans ce cas, puisque le reste du pavage est déterminé sans choix.

Supposons qu'aucun de bc, fg ou jk n'est recouvert d'une tuile horizontale, mais que no l'est. Alors im et lp sont recouverts de tuiles verticales, ce qui implique que fj et gk sont recouverts de tuiles verticales, ce qui donne la Figure 14.
Il est impossible de terminer ce pavage sans utiliser un tuile horizontale bc.
Il n'y a donc aucun pavage possible dans ce cas.

On a donc $t = 25 + 6 + 4 + 1$, ou $t = 36$, c'est-à-dire qu'il y a 36 pavages possibles de $TQRU$.
Le nombre de façons de paver le plafond $PQRS$, dans les conditions données, est donc égal à 5×36, ou 180.

Réponse : (A)

25. Soit a la longueur des côtés de la base carrée $PQRS$ et h la hauteur du prisme.
On cherche l'aire maximale possible du rectangle $PQUT$.
L'aire du rectangle $PQUT$ est égale à ah, puisque $PQ = a$ et $QU = h$.
Soit A le point sur $PQRS$ directement en dessous de X (XA est perpendiculaire au plan qui contient $PQRS$). On a donc $AX = h$.
On trace un segment de droite BC qui passe en A de manière que BC soit parallèle à PQ, B soit sur PS et C soit sur QR.
On trace un segment de droite DE qui passe en A de manière que DE soit parallèle à QR, D soit sur PQ et E soit sur SR.
Les segments BC et DE divisent le carré $PQRS$ en quatre rectangles.
Soit $PD = m$ et $PB = n$.
Donc $SE = m$, $QC = n$, $DQ = ER = a - m$ et $CR = BS = a - n$.



Le triangle XAQ est rectangle en A. Donc $QX^2 = AX^2 + AQ^2$.
Or, AQ est l'hypoténuse du triangle rectangle ADQ. Donc $AQ^2 = AD^2 + DQ^2$.
Donc $QX^2 = AX^2 + AD^2 + DQ^2$.
Puisque $QX = 10$, $AX = h$, $AD = CQ = n$ et $DQ = a - m$, alors $10^2 = h^2 + n^2 + (a - m)^2$.
De même, en utilisant $PX = 12$, on obtient $12^2 = h^2 + n^2 + m^2$ et en utilisant $RX = 8$, on obtient $8^2 = h^2 + (a - n)^2 + (a - m)^2$.
On soustrait $10^2 = h^2 + n^2 + (a - m)^2$ de $12^2 = h^2 + n^2 + m^2$, membre par membre, pour obtenir $144 - 100 = m^2 - (a - m)^2$, ou $44 = m^2 - (a^2 - 2am + m^2)$, d'où $44 = 2am - a^2$, ou $m = \dfrac{44 + a^2}{2a}$.

De même, on soustrait $8^2 = h^2 + (a - n)^2 + (a - m)^2$ de $10^2 = h^2 + n^2 + (a - m)^2$, membre par membre, pour obtenir $100 - 64 = n^2 - (a - n)^2$, ou $36 = n^2 - (a^2 - 2an + n^2)$, d'où $36 = 2an - a^2$, ou $n = \dfrac{36 + a^2}{2a}$.

On reporte $m = \dfrac{44+a^2}{2a}$ et $n = \dfrac{36+a^2}{2a}$ dans l'équation $12^2 = h^2 + n^2 + m^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} h^2 &= 144 - m^2 - n^2 \\ h^2 &= 144 - \left(\frac{44+a^2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{36+a^2}{2a}\right)^2 \end{aligned}$$

Or, on veut maximiser ah.
Puisque $ah > 0$, maximiser ah est équivalent à maximiser $(ah)^2 = a^2h^2$, ce qui est équivalent à maximiser $4a^2h^2$.
D'après le résultat ci-haut, on a :

$$\begin{aligned} 4a^2h^2 &= 4a^2\left(144 - \left(\frac{44+a^2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{36+a^2}{2a}\right)^2\right) \\ &= 4a^2\left(144 - \frac{(44+a^2)^2}{4a^2} - \frac{(36+a^2)^2}{4a^2}\right) \\ &= 576a^2 - (44+a^2)^2 - (36+a^2)^2 \\ &= 576a^2 - (1936 + 88a^2 + a^4) - (1296 + 72a^2 + a^4) \\ &= -2a^4 + 416a^2 - 3232 \\ &= -2(a^4 - 208a^2 + 1616) \\ &= -2((a^2-104)^2 + 1616 - 104^2) \qquad \text{(on a complété le carré)} \\ &= -2(a^2-104)^2 - 2(1616 - 104^2) \\ &= -2(a^2-104)^2 + 18400 \end{aligned}$$

Puisque $(a^2-104)^2 \geq 0$, alors $4a^2h^2 \leq 18400$ (il y a égalité lorsque $a = \sqrt{104}$).
Donc $a^2h^2 \leq 4600$, d'où $ah \leq \sqrt{4600}$.
L'aire maximale possible de $PQUT$ est donc $\sqrt{4600}$, ou $10\sqrt{46}$, ou environ 67,823.
Cette réponse est plus près du choix de réponse 67,82.

Réponse : (B)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2014

(10^{e} année – Secondaire IV)

le jeudi 20 février 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 21 février 2014
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On change l'ordre des termes pour obtenir $2000 + 200 - 80 - 120$.
Puisque $200 - 80 - 120 = 0$, alors $2000 + 200 - 80 - 120 = 2000$.
On aurait pu traiter chaque opération dans l'ordre pour obtenir :

$$2000 - 80 + 200 - 120 = 1920 + 200 - 120 = 2120 - 120 = 2000$$

Réponse : (A)

2. Puisque $(2)(3)(4) = 6x$, alors $6(4) = 6x$. On divise chaque membre de l'équation par 6 pour obtenir $x = 4$.

Réponse : (E)

3. Le troisième angle du triangle est opposé par le sommet à un angle de 40°. Il mesure donc 40°.
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors $40^\circ + 60^\circ + x^\circ = 180^\circ$, d'où $100 + x = 180$.
Donc $x = 80$.

Réponse : (C)

4. La ligne qui représente une température de $3\,^\circ$C est la droite horizontale à mi-chemin entre les marques de $2\,^\circ$ et $4\,^\circ$ sur l'axe vertical.
Deux points sur cette droite représentent des données : un à 14 h et un à 21 h.
L'heure demandée est 21 h.

Réponse : (A)

5. Puisque $2n+5 = 16$, alors $2n+5-5 = 16-5$, ou $2n = 11$. Donc $2n-3 = 11-3$, ou $2n-3 = 8$.
On aurait pu résoudre l'équation $2n + 5 = 16$ et obtenir $2n = 11$, d'où $n = \frac{11}{2}$.
On aurait alors $2n - 3 = 2(\frac{11}{2}) - 3$, d'où $2n - 3 = 11 - 3$, ou $2n - 3 = 8$.

Réponse : (A)

6. Puisque $3 = \frac{6}{2}$ et $\frac{5}{2} < \frac{6}{2}$, alors $\frac{5}{2} < 3$. (Ou : puisque $\frac{5}{2} = 2{,}5$ et que $2{,}5 < 3$, alors $\frac{5}{2} < 3$.)
Puisque $3 = \sqrt{9}$ et $\sqrt{9} < \sqrt{10}$, alors $3 < \sqrt{10}$.
Donc $\frac{5}{2} < 3 < \sqrt{10}$. Placés en ordre croissant, les nombres sont $\frac{5}{2}, 3, \sqrt{10}$.

Réponse : (B)

7. $20\,\%$ de 100 est égal à 20. Lorsque 100 est augmenté de $20\,\%$, on obtient $100 + 20$, ou 120.
$50\,\%$ d'un nombre correspond à la moitié du nombre. Donc, $50\,\%$ de 120 est égal à 60.
Lorsque 120 est augmenté de $50\,\%$, on obtient $120 + 60$, ou 180.
Donc, Margot obtient 180 comme réponse finale.

Réponse : (E)

8. Puisque le triangle PQR est rectangle en P, on peut utiliser le théorème de Pythagore.
On a donc $PQ^2 + PR^2 = QR^2$, ou $10^2 + PR^2 = 26^2$.
Donc $PR^2 = 26^2 - 10^2$, d'où $PR^2 = 676 - 100$, ou $PR^2 = 576$. Puisque $PR > 0$, alors $PR = \sqrt{576}$, ou $PR = 24$.
Puisque le triangle est rectangle en P, son aire est égale à $\frac{1}{2}(PR)(PQ)$, ou $\frac{1}{2}(24)(10)$, ou 120.

Réponse : (B)

9. On représente Alexa, Boris, Carla, Dan et Éric par les lettres A, B, C, D et E, respectivement.
On utilise le signe ($>$) pour représenter « est plus grand que » et le signe ($<$) pour représenter « est plus court que ».
D'après le premier boulet, $A > C$.

D'après le deuxième boulet, $D < E$ et $D > B$, d'où $E > D > B$.
D'après le troisième boulet, $E < C$, ou $C > E$.
Puisque $A > C$ et $C > E$ et $E > D > B$, alors $A > C > E > D > B$, ce qui indique que Bob est la personne la plus courte.

Réponse : (B)

10. *Solution 1*
On commence par la `SORTIE` et on procède à rebours jusqu'à l'`ENTRÉE`.
Puisqu'on obtient la `SORTIE` 32 en ajoutant 16 au nombre précédent, alors le nombre précédent est égal à $32 - 16$, ou 16.

$$\boxed{\texttt{ENTRÉE}} \rightarrow \text{Soustrais } 8 \rightarrow \boxed{} \rightarrow \text{Divise par } 2 \rightarrow \boxed{16} \rightarrow \text{Ajoute } 16 \rightarrow \boxed{32}$$

Puisqu'on obtient 16 en divisant le nombre précédent par 2, alors le nombre précédent est égal à 2×16, ou 32.

$$\boxed{\texttt{ENTRÉE}} \rightarrow \text{Soustrais } 8 \rightarrow \boxed{32} \rightarrow \text{Divise par } 2 \rightarrow \boxed{16} \rightarrow \text{Ajoute } 16 \rightarrow \boxed{32}$$

Puisqu'on obtient 32 en soustrayant 8 de l'`ENTRÉE`, alors l'`ENTRÉE` est égale à $32 + 8$, ou 40.

$$\boxed{40} \rightarrow \text{Soustrais } 8 \rightarrow \boxed{32} \rightarrow \text{Divise par } 2 \rightarrow \boxed{16} \rightarrow \text{Ajoute } 16 \rightarrow \boxed{32}$$

Solution 2
Soit x l'`ENTRÉE`.
Si on soustrait 8, on obtient $x - 8$.
Si on divise le résultat par 2, on obtient $\frac{1}{2}(x - 8)$, ou $\frac{1}{2}x - 4$.
Si on ajoute 16 à ce résultat, on obtient $(\frac{1}{2}x - 4) + 16$, ou $\frac{1}{2}x + 12$, ce qui est la `SORTIE`.

$$\boxed{x} \rightarrow \text{Soustrais } 8 \rightarrow \boxed{32} \rightarrow \text{Divise par } 2 \rightarrow \boxed{16} \rightarrow \text{Ajoute } 16 \rightarrow \boxed{\tfrac{1}{2}x + 12}$$

Puisque la `SORTIE` est 32, alors $\frac{1}{2}x + 12 = 32$, ou $\frac{1}{2}x = 20$, d'où $x = 40$.
Donc, l'`ENTRÉE` est égale à 40.

Réponse : (D)

11. Soit $y = mx + b$ l'équation de la droite dans la figure.
La pente m de la droite est négative.
L'ordonnée à l'origine b de la droite est négative.
Parmi les cinq choix de réponse, seule l'équation $y = -2x + 3$ indique $m < 0$ et $b > 0$.
Donc, l'équation $y = -2x + 3$ pourrait représenter la droite.

Réponse : (E)

12. Puisque $x = 2y$, alors $(x - y)(2x + y) = (2y - y)(2(2y) + y) = (y)(5y) = 5y^2$.

Réponse : (A)

13. On considère le temps quÉrica met pour monter 9 calculatrices. On peut considérer qu'il s'agit de 3 groupes de 3 calculatrices.
Puisque Érica peut monter 3 calculatrices dans le temps que met Nico pour monter 2 calculatrices, Nico assemble 3 groupes de 2 calculatrices (c-à-d. 6 calculatrices) pendant ce temps.
Puisque Nico peut monter une calculatrice dans le temps que met Sami pour monter 3 calculatrices, alors Sami monte 18 calculatrices pendant que Nico monte 6 calculatrices.
Dans le temps que met Érica pour monter 9 calculatrices, les trois personnes peuvent monter $(9 + 6 + 18)$ calculatrices, ou 33 calculatrices.

Réponse : (E)

14. Puisque 1 GO = 1024 MO, alors les 300 GO du disque dur de Julie correspondent à 300×1024 MO, ou 307 200 MO.
Lorsque Julie place 300 000 MO de données sur son disque dur, l'espace disponible sur le disque dur est de $(307\,200 - 300\,000)$ MO, ou 7200 MO.
Réponse : (C)

15. D'après la deuxième rangée, $\triangle + \triangle + \triangle + \triangle = 24$, ou $4\triangle = 24$. Donc $\triangle = 6$.
D'après la première rangée, $\heartsuit + \triangle + \triangle + \heartsuit = 26$, ou $2\heartsuit + 2\triangle = 26$.
Puisque $\triangle = 6$, l'équation devient $2\heartsuit = 26 - 12$. Donc $2\heartsuit = 14$, ou $\heartsuit = 7$.
D'après la quatrième rangée, $\square + \heartsuit + \square + \triangle = 33$.
Puisque $\triangle = 6$ et $\heartsuit = 7$, l'équation devient $2\square + 7 + 6 = 33$. Donc $2\square = 20$, ou $\square = 10$.
D'après la troisième rangée, cette équation devient $\square + \blacklozenge + \heartsuit + \blacklozenge = 27$.
Puisque $\square = 10$ et $\heartsuit = 7$, alors $2\blacklozenge = 27 - 10 - 7$, ou $2\blacklozenge = 10$.
Donc $\blacklozenge = 5$.
Réponse : (A)

16. La moyenne du nombre de hamburgers que chaque élève a mangés est égal au nombre total de hamburgers mangés divisé par le nombre total d'élèves.
12 élèves ont chacun mangé 0 hamburger, pour un total de 0 hamburger.
14 élèves ont chacun mangé 1 hamburger, pour un total de 14 hamburgers.
8 élèves ont chacun mangé 2 hamburgers, pour un total de 16 hamburgers.
4 élèves ont chacun mangé 3 hamburgers, pour un total de 12 hamburgers.
2 élèves ont chacun mangé 4 hamburgers, pour un total de 8 hamburgers.
Le nombre total de hamburgers mangés par tous les élèves est donc de $0 + 14 + 16 + 12 + 8$, ou 50. Le nombre total d'élèves est de $12 + 14 + 8 + 4 + 2$, ou 40.
En moyenne, chaque élève a mangé $\frac{50}{40}$ hamburger, ou 1,25 hamburger.
Réponse : (C)

17. Un cercle ayant une aire de 36π a un rayon de 6, puisqu'un cercle de rayon r a une aire de πr^2 et que $\pi(6^2) = 36\pi$.
Un cercle de rayon 6 a un diamètre de 12 et une circonférence de $\pi(12)$, ou 12π.
Chacun des arcs de la figure est un quart de cercle. Chacun a une longueur de $\frac{1}{4}(12\pi)$, ou 3π.
La figure est formée de trois quarts de cercles et de deux rayons.
Elle a donc un périmètre de $3(3\pi) + 2(6)$, ou $9\pi + 12$.
Réponse : (B)

18. Soit x le nombre de timbres de 2 ¢ que Sonita a achetés.
Elle a donc acheté $10x$ timbres de 1 ¢.
Les timbres de 2 ¢ et de 1 ¢ qu'elle a achetés ont une valeur totale de $[2(x) + 1(10x)]$ ¢, ou $2x$ ¢.
Puisqu'elle a aussi acheté des timbres de 5 ¢ et que la valeur totale des timbres qu'elle a achetés est de 100 ¢, alors les timbres de 5 ¢ qu'elle a achetés ont une valeur de $(100 - 12x)$ ¢.
Donc, $100 - 12x$ doit être un multiple de 5. Puisque 100 est un multiple de 5, alors $12x$ doit être un multiple de 5. Donc, x est un multiple de 5 (puisque 12 et 5 n'admettent aucun diviseur commun autre que 1).
Or, $x > 0$ (puisqu'elle a acheté des timbres de 2 ¢) et $x < 9$ (puisque $12x$ est inférieur à 100).
Or, le seul multiple de 5 entre 0 et 9 est 5. Donc $x = 5$.
Lorsque $x = 5$, les timbres de 5 ¢ ont une valeur de $(100 - 12x)$ ¢, ou $(100 - 12(5))$ ¢, ou 40 ¢. Le nombre de timbres de 5 ¢ que Sonita a achetés est donc égal à $40 \div 5$, ou 8.
Sonita a acheté 5 timbres de 2 ¢, 50 timbres de 1 ¢ et 8 timbres de 5 ¢ pour un total de $(5+50+8)$ timbres, ou 63 timbres.

(On peut vérifier la valeur totale de ces timbres, en cents : $5(2) + 50(1) + 8(5)$, ou $10 + 50 + 40$, ou 100.)

Réponse : (D)

19. Il est possible de choisir dix paires de nombres : -3 et -1 ; -3 et 0 ; -3 and 2 ; -3 et 4 ; -1 et 0 ; -1 et 2 ; -1 et 4 ; 0 et 2 ; 0 et 4 ; 2 et 4. Ces choix sont tous équiprobables.
Les 4 paires qui incluent le nombre 0 ont un produit de 0 ; les 6 paires qui n'incluent pas 0 n'ont pas un produit de 0.
Donc, la probabilité d'obtenir deux nombres qui ont un produit de 0 est de $\frac{4}{10}$, ou $\frac{2}{5}$.

Réponse : (D)

20. La somme en dégradé de l'entier $wxyz$ est égale à 2014.
Donc, l'entier $wxyz$, l'entier xyz, l'entier yz et l'entier z ont une somme de 2014.
Or, l'entier $wxyz$ a une valeur de $1000w+100x+10y+z$, l'entier xyz a une valeur de $100x+10y+z$ et l'entier yz a une valeur de $10y + z$.
On a donc :

$$(1000w + 100x + 10y + z) + (100x + 10y + z) + (10y + z) + z = 2014$$

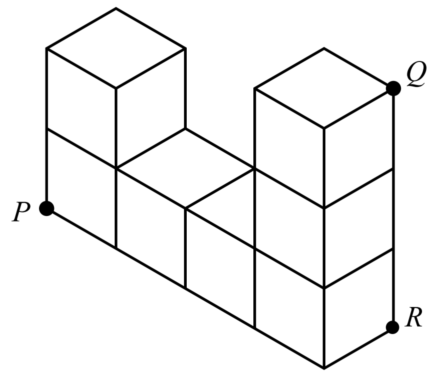
ou

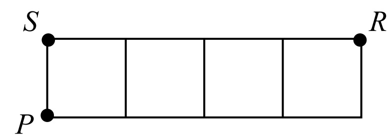
$$1000w + 200x + 30y + 4z = 2014 \quad (*)$$

Chacune des variables w, x, y et z représente un chiffre et $w \neq 0$.
Le chiffre w ne peut être supérieur ou égal à 3, sinon le membre de gauche de l'équation $(*)$ serait supérieur ou égal à 3000 et ne pourrait égaler 2014. Donc $w = 1$ ou $w = 2$.
Si $w = 2$, alors $2000+200x+30y+4z = 2014$, d'où $200x+30y+4z = 14$, ou $100x+15y+2z = 7$.
On a donc $x = y = 0$ (autrement la somme des termes $100x + 15y$ serait supérieure à 7), d'où $2z = 7$ et cette équation n'admet aucune solution entière. Donc $w \neq 2$.
Donc $w = 1$.
L'équation $(*)$ devient donc $1000 + 200x + 30y + 4z = 2014$, d'où $200x + 30y + 4z = 1014$, ou $100x + 15y + 2z = 507$.
Puisque $0 \leq y \leq 9$ et $0 \leq z \leq 9$, alors $0 \leq 15y + 2z \leq 15(9) + 2(9) = 153$.
Puisque $100x$ est un multiple de 100 et $0 \leq 15y + 2z \leq 153$, alors $100x = 400$ ou $100x = 500$.
Donc $15y + 2z = 507 - 400$ ou $15y + 2z = 507 - 500$, c'est-à-dire que $15y + 2z = 107$ ou $15y + 2z = 7$. Or, on a vu que $15y + 2z$ ne peut être égal à 7. Donc $15y + 2z = 107$, d'où $100x = 400$, ou $x = 4$.
Donc $15y + 2z = 107$.
Puisque $2z$ est pair, alors $15y$ doit être impair pour que $15y + 2z$ soit impair.
Les multiples impairs de 15 inférieurs à 107 sont $15, 45, 75$ et 105.
Puisque $0 \leq 2z \leq 18$, on doit avoir $15y = 105$, ou $y = 7$. Donc $2z = 2$, ou $z = 1$.
L'entier $wxyz$ est donc 1471. (On peut vérifier la somme en dégradé : $1471+471+71+1 = 2014$.)
Donc $w + x + y + z = 1 + 4 + 7 + 1$, ou $w + x + y + z = 13$.

Réponse : (D)

21. Soit R le point au bas du solide, directement au-dessous de Q et soit S le coin arrière gauche au bas du solide (on ne peut le voir dans la figure donnée).
Puisque QR est perpendiculaire à la surface au bas du solide, alors le triangle PRQ est rectangle en R. On a donc $PQ^2 = PR^2 + RQ^2$.
On sait aussi que le triangle PSR est rectangle en S, puisque le solide est formé de cubes.
On a donc $PR^2 = PS^2 + SR^2$.





D'après ces deux égalités, on a $PQ^2 = PS^2 + SR^2 + RQ^2$.
Puisque chaque arête d'un petit cube a une longueur de 1, alors $PS = 1$, $SR = 4$ et $RQ = 3$.
Donc $PQ^2 = 1^2 + 4^2 + 3^2$, ou $PQ^2 = 26$.
Puisque $PQ > 0$, alors $PQ = \sqrt{26}$.

Réponse : (B)

22. Soit $VWXYZ$ un tel entier de cinq chiffres, V, W, X, Y et Z étant des chiffres.
On veut compter le nombre de façons qu'il y a d'attribuer les chiffres 1, 3, 5, 7 et 9 aux chiffres V, W, X, Y et Z tout en respectant les conditions données.
D'après ces conditions, on a $W > X$, $W > V$, $Y > X$ et $Y > Z$.
On ne peut pas attribuer les chiffres 1 et 3 à W ou Y, puisque W et Y sont supérieurs à chacun de leurs chiffres voisins, alors que 1 est inférieur à tous les autres chiffres et que 3 est seulement supérieur à un seul autre chiffre.
On ne peut pas attribuer le chiffre 9 à V, à X ou à Z, puisque 9 est le plus grand chiffre et qu'il ne peut être inférieur à W ou à Y. On doit donc attribuer le chiffre 9 à W ou à Y.
On attribue donc à W et à Y le chiffre 9 et le chiffre 5 ou 7.

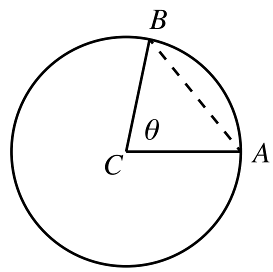
Supposons que $W = 9$ et $Y = 5$. Le nombre est donc $V9X5Z$.
Ni X, ni Z ne peut égaler 7, puisque $7 > 5$. Donc $V = 7$. On attribue donc à X et à Z les chiffres 1 et 3 ou 3 et 1.
Il y a donc deux entiers possibles dans ce cas.
De même, si $Y = 9$ et $W = 5$, il y a deux entiers possibles.

Supposons que $W = 9$ et $Y = 7$. Le nombre est donc $V9X7Z$.
On peut attribuer les chiffres 1, 3 et 5 à n'importe quelles des variables restantes. Il y a trois choix pour la variable V. Pour chacun de ces choix, il y a 2 choix pour la variable X et un choix pour la variable Z.
Dans ce cas, il y a donc $3 \times 2 \times 1$ entiers possibles, ou 6 entiers possibles.
De même, si $Y = 9$ et $W = 7$, il y a 6 entiers possibles.

En tout, il y a $2 + 2 + 6 + 6$ entiers possibles, ou 16 entiers possibles.

Réponse : (C)

23. Soit C la position de Clarice et A la position d'Alain.
On considère un cercle de centre C avec un rayon de 10 m. Puisque A est à 10 m de C, alors A est sur ce cercle.
Bob part du point C et choisit une direction au hasard. On représente ce choix de direction en lui faisant choisir un angle θ, de $0°$ à $360°$ inclusivement, mesuré à partir du rayon CA dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
Bob arrive au point B qui est situé sur le cercle.



On cherche la probabilité pour que $AB < AC$.
Puisque le cercle est symétrique par rapport au diamètre qui contient le rayon CA, on suppose que θ est entre $0°$ et $180°$. La probabilité sera la même en dessous du diamètre.
On considère le triangle CAB dans lequel $CA = CB = 10$ m.
On aura $AB < AC$ lorsque AB est le plus petit côté du triangle ABC.
AB est le plus petit côté du triangle ABC lorsqu'il est opposé au plus petit angle du triangle ABC. (Dans n'importe quel triangle, le plus petit côté est opposé au plus petit angle et le plus grand côté est opposé au plus grand angle.)
Puisque le triangle ABC est isocèle avec $CA = CB$, alors $\angle CAB = \angle CBA$.
On sait que θ est opposé à AB. De plus, $\angle ACB + \angle CAB + \angle CBA = 180°$.
Puisque $\angle CAB = \angle CBA$, alors $\angle ACB + 2\angle CAB = 180°$, ou $\angle CAB = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB$.
Si θ est inférieur à $60°$, alors $\angle CAB$ est supérieur à $60°$, car $\angle CAB = 90° - \frac{1}{2}\theta$.
De même, si $\angle ACB$ est supérieur à $60°$, alors $\angle CAB$ est inférieur à $60°$, car $\angle CAB = 90° - \frac{1}{2}\theta$.
Donc, AB est le plus petit côté du triangle ABC lorsque θ est entre $0°$ et $60°$.
Puisque θ est choisi de façon aléatoire dans l'intervalle de $0°$ à $180°$ et que $60° = \frac{1}{3}(180°)$, alors la probabilité que θ soit dans l'intervalle choisi est de $\frac{1}{3}$.
Donc, la probabilité pour que Bob soit plus près d'Alain que de Clarice ne l'est d'Alain est de $\frac{1}{3}$.
(Les cas où $\theta = 0°$, $\theta = 60°$ et $\theta = 180°$ peuvent sembler problématiques, mais ce ne sont que trois positions particulières dans un nombre infini de valeurs de θ.)

Réponse : (B)

24. Étant donné un entier n strictement positif, $S(n)$ est le plus petit entier strictement positif divisible par chacun des entiers $1, 2, 3, \ldots, n$. En d'autres mots, $S(n)$ est le plus petit commun multiple (PPCM) de $1, 2, 3, \ldots, n$.
Pour déterminer le PPCM d'un ensemble de nombres :

- on exprime chaque nombre en factorisation première,
- on considère la liste de tous les nombres premiers qui paraissent dans ces factorisations premières,
- on détermine la plus grande puissance, dans ces factorisations premières, de chaque nombre premier de la liste et
- on multiplie toutes ces plus grandes puissances.

Par exemple, pour calculer $S(8)$, on détermine le PPCM de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
On écrit les nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en factorisation première : $2, 3, 2^2, 5, 2 \cdot 3, 7, 2^3$.

Les nombres premiers utilisés sont 2, 3, 5, 7. Les plus grandes puissances sont $2^3, 3^1, 5^1, 7^1$.
Donc $S(8) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$.

Puisque $S(n)$ est le PPCM de $1, 2, 3, \ldots, n$ et que $S(n+4)$ est le PPCM de

$$1, 2, 3, \ldots, n, n+1, n+2, n+3, n+4$$

alors $S(n) \neq S(n+4)$ si (i) il existe des facteurs premiers parmi les factorisations premières de $n+1, n+2, n+3, n+4$ qui ne paraissent pas parmi celles de $1, 2, 3, \ldots, n$ ou (ii) il existe une puissance, parmi les factorisations premières de $n+1$,$n+2$,$n+3$,$n+4$, qui est supérieure aux puissances parmi celles de $1, 2, 3, \ldots, n$.
Si le cas (i) survient, on considère un nombre premier p qui est un diviseur d'un des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$ et qui n'est pas un diviseur d'un des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$. Donc, le plus petit nombre qui a pour diviseur p est un des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$, ce qui indique qu'un de ces nombres est p. (Le plus petit multiple de p est le nombre $1 \cdot p$, c'est-à-dire le nombre p lui-même.)
Donc, le cas (i) survient si l'un des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$ est un nombre premier.
Si le cas (ii) survient, on considère une puissance p^k (où $k > 1$) d'un nombre premier, la puissance étant un diviseur d'un des nombres $n+1$, $n+2, n+3, n+4$ et n'étant pas un diviseur d'un des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$. En utilisant le même argument que pour le cas (i), on conclut qu'un des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$ doit être égal à cette puissance p^k.
Donc, $S(n) \neq S(n+4)$ lorsqu'un des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$ est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier.
Donc, $S(n) = S(n+4)$ lorsqu'aucun des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$ n'est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier.
On cherche donc les entiers strictement positifs n ($1 \leq n \leq 100$) pour lesquels aucun des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$ n'est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier.
Les nombres premiers inférieurs à 104 sont :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103$$

(On considère les nombres premiers jusqu'à 104, puisque n peut atteindre 100 et $n+4$ peut donc atteindre 104.)
Les puissances des nombres premiers (avec exposants de 2 ou plus) inférieurs à 100 sont :

$$4, 8, 16, 32, 64, 9, 27, 81, 25, 49$$

Il y a 5 puissances de 2, 3 puissances de 3, 1 puissance de 5 et 1 puissance de 7 dans cette liste.
Il n'existe aucun autre nombre premier ayant des puissances inférieures à 100.
On veut donc compter le nombre d'entiers strictement positifs n ($1 \leq n \leq 100$) pour lesquels aucun des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$ ne parait dans la liste suivante :

$$2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 64,$$

$$67, 71, 73, 79, 81, 83, 89, 97, 101, 103$$

Pour que quatre nombres consécutifs ne paraissent pas dans cette liste, il doit y avoir un intervalle d'au moins 5 entre deux nombres consécutifs de la liste.
Les valeurs de n qui satisfont à la condition sont $n = 32, 53, 54, 73, 74, 83, 84, 89, 90, 91, 92$.
(Par exemple, 54 est une valeur possible de n, puisqu'aucun des nombres $55, 56, 57, 58$ ne parait dans la liste.)
Il y a donc 11 valeurs de n ($1 \leq n \leq 100$) pour lesquelles $S(n) = S(n+4)$.

Réponse : (C)

25. Soit $(0,2a)$ les coordonnées du point P, a étant un nombre réel.
Puisque l'ordonnée de P est supérieure à 0 et inférieure à 100, alors $0 < 2a < 100$, ou $0 < a < 50$.
On détermine une expression en fonction de a pour le rayon du cercle, puis on détermine combien de valeurs de a sont des entiers.
On exprime d'abord les coordonnées du centre C du cercle en fonction de a, puis on déterminera la distance de C à un des points O, P ou Q.
Lorsqu'un cercle passe par les trois sommets O, P et Q d'un triangle, alors son centre est le point d'intersection des médiatrices des côtés OP, OQ et PQ du triangle.
On déterminera le centre C en déterminant le point d'intersection des médiatrices des côtés OP et OQ. (Le choix de PQ rendrait les calculs plus compliqués du point de vue algébrique.)
Puisque O a pour coordonnées $(0,0)$ et que P a pour coordonnées $(0,2a)$, alors OP est vertical et sa médiatrice sera horizontale.
Le milieu de OP a pour coordonnées $(\frac{1}{2}(0+0), \frac{1}{2}(0+2a))$, ou $(0,a)$.
La médiatrice de OP est la droite qui passe par le point $(0,a)$. Elle a donc pour équation $y = a$.
Puisque O et Q ont pour coordonnées respectives $(0,0)$ et $(4,4)$, alors OQ a pour pente $\frac{4-0}{4-0}$, ou 1. La médiatrice de OQ, qui lui est perpendiculaire, a donc une pente de -1.
Le milieu de OQ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}(0+4), \frac{1}{2}(0+4))$, ou $(2,2)$.
La médiatrice de OQ a une pente de -1 et elle passe au point $(2,2)$. Elle a donc pour équation $y-2 = (-1)(x-2)$, ou $y = -x+4$.
Le centre du cercle est donc le point d'intersection des droites d'équations $y = a$ et $y = -x+4$.
L'ordonnée de ce point est donc égale à a. On reporte $y = a$ dans la deuxième équation pour obtenir $a = -x+4$, d'où $x = 4-a$.
Le point C a donc pour coordonnées $(4-a, a)$.
Le rayon r du cercle est la distance de C à n'importe quel des points O, P et Q. On utilise le point O pour faciliter les calculs. On a :

$$r = \sqrt{(4-a)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 - 8a + 16 + a^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 16}$$

On récrit l'expression sous la forme :

$$r = \sqrt{2(a^2 - 4a + 8)} = \sqrt{2(a^2 - 4a + 4 + 4)} = \sqrt{2((a-2)^2 + 4)} = \sqrt{2(a-2)^2 + 8}$$

Puisque $(a-2)^2 \geq 0$ et $(a-2)^2 = 0$ seulement lorsque $a = 2$, alors $2(a-2)^2 + 8$ a une valeur minimale de 8 lorsque $a = 2$. Donc $r \geq \sqrt{8}$.
L'expression $\sqrt{2(a-2)^2 + 8}$ est décroissante de $a = 0$ à $a = 2$ et croissante de $a = 2$ à $a = 50$.
Lorsque $a = 0$, $r = \sqrt{2(a-2)^2 + 8} = \sqrt{2(-2)^2 + 8} = 4$.
Lorsque $a = 2$, $r = \sqrt{2(a-2)^2 + 8} = \sqrt{2(0)^2 + 8} = \sqrt{8} \approx 2{,}83$.
Lorsque $a = 50$, $r = \sqrt{2(a-2)^2 + 8} = \sqrt{2(48)^2 + 8} = \sqrt{4616} \approx 67{,}94$.
Donc lorsque $0 < a \leq 2$, on a $\sqrt{8} \leq r < 4$ et lorsque $2 \leq a < 50$, on a $\sqrt{8} \leq r < \sqrt{4616}$.
L'expression $r = \sqrt{2(a-2)^2 + 8}$ prendra pour valeur tout nombre réel dans chacun de ces intervalles, puisque $b = 2(a-2)^2 + 8$ est l'équation d'une parabole qui est une courbe continue.
Entre $\sqrt{8} \approx 2{,}83$ et 4, l'expression prend une valeur entière, soit 3. (On n'inclut pas 4, puisqu'il correspond à l'extrémité de l'intervalle qui est exclue.)
Entre $\sqrt{8} \approx 2{,}83$ et $\sqrt{4616} \approx 67{,}94$, l'expression prend 65 valeurs entières, soit de 3 à 67.
En tout, l'expression prend 66 valeurs entières $(1 + 65)$ selon les valeurs possibles de a. Il y a donc 66 positions possibles pour le point P de manière que le rayon du cercle soit un entier.

Réponse : (C)

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2013

(10e année – Secondaire IV)

le jeudi 21 février 2013

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 22 février 2013

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $\dfrac{8+4}{8-4} = \dfrac{12}{4} = 3$

Réponse : (B)

2. On a $2^1 = 2$, $2^2 = 2 \times 2 = 4$ et $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$. Donc $2^3 + 2^2 + 2^1 = 8 + 4 + 2 = 14$.

Réponse : (C)

3. Puisque $\sqrt{81} = 9$, l'équation devient $x + 9 = 25$, d'où $x = 16$.

Réponse : (A)

4. On peut diviser chaque entier par 3 à l'aide d'une calculatrice et vérifier combien des réponses sont des entiers.
On peut aussi utiliser le fait qu'un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Les sommes respectives des chiffres des nombres 222, 2222, 22 222 et 222 222 sont 6, 8, 10 et 12.
Deux de ces sommes sont divisibles par 3, soit 6 et 12. Donc, deux des entiers sont divisibles par 3, soit 222 et 222 222.

Réponse : (C)

5. Puisque le champ initial a une longueur de 20 m et une largeur de 5 m, alors son aire est égale à (20×5) m^2, ou 100 m^2.
La nouvelle longueur de champ est de 20 m + 10 m, ou 30 m. La nouvelle aire est donc égale à (30×5) m^2, ou 150 m^2.
L'augmentation est donc de 150 m^2 $-$ 100 m^2, ou 50 m^2.
(On peut aussi remarquer que puisque la longueur augmente de 10 m et que la largeur est inchangée à 5 m, alors l'augmentation de l'aire est égale à (10×5) m^2, ou 50 m^2.)

Réponse : (C)

6. Puisque les coches indiquent que le cylindre est divisé en quatre parties de même volume, on voit que le niveau de lait est légèrement inférieur à $\frac{3}{4}$ de la hauteur, c'est-à-dire à $\frac{3}{4}$ du cylindre plein.
Or, $\frac{3}{4}$ du volume du cylindre est égal à $\frac{3}{4} \times 50$ L, ou 37,5 L.
Le choix de réponse qui est légèrement inférieur à 37,5 L est 36 L, soit le choix (D).

Réponse : (D)

7. Puisque le triangle PQR est équilatéral, alors $PQ = QR = RP$.
Alors $4x = x + 12$, d'où $3x = 12$, ou $x = 4$.

Réponse : (C)

8. D'après la définition de l'opération, $3 \diamond 6 = \dfrac{3+6}{3 \times 6}$, d'où $3 \diamond 6 = \dfrac{9}{18}$, ou $3 \diamond 6 = \dfrac{1}{2}$.

Réponse : (E)

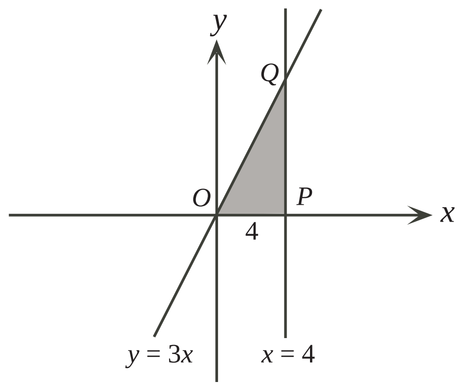
9. D'après le théorème de Pythagore, l'aire du carré formé sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des aires des carrés formés sur les deux autres côtés.
Donc, l'aire du carré sur PQ est égale à l'aire du carré sur PR moins l'aire du carré sur QR, c'est-à-dire à $169 - 144$, ou 25.

Réponse : (E)

10. Puisque les trois soeurs ont une moyenne d'âge de 27 ans, la somme de ces âges est de 3×27 ans, ou 81 ans.
Puisque Bruno et ses soeurs ont une moyenne d'âge de 28 ans, la somme de ces âges est de 4×28 ans, ou 112 ans.
L'âge de Bruno, en années, est égal à la différence entre ces sommes, soit $112 - 81$, ou 31.
Bruno a 31 ans.

Réponse : (E)

11. Soit O l'origine (où la droite d'équation $y = 3x$ coupe l'axe des abscisses).
Soit P le point où la droite d'équation $x = 4$ coupe l'axe des abscisses et Q le point d'intersection des droites d'équations $x = 4$ et $y = 3x$.



Puisque la droite d'équation $x = 4$ est perpendiculaire à l'axe des abscisses, le triangle donné est rectangle en P.
Donc, l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(OP)(PQ)$.
Or, P est situé sur l'axe des abscisses et sur la droite d'équation $x = 4$. Il a donc pour coordonnées $(4, 0)$. Donc $OP = 4$.
Le point Q a aussi une abscisse de 4. Puisque Q est situé sur la droite d'équation $y = 3x$, ses coordonnées $(4, y)$ vérifient cette équation. Donc $y = 3(4)$, ou $y = 12$. Donc, Q a pour coordonnées $(4, 12)$.
Puisque P a pour coordonnées $(4, 0)$ et que Q a pour coordonnées $(4, 12)$, alors $PQ = 12$.
L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}(4)(12)$, ou 24.

Réponse : (B)

12. *Solution 1*
Puisque $a(x + b) = 3x + 12$ pour toutes les valeurs de x, alors $ax + ab = 3x + 12$ pour toutes les valeurs de x.
Puisque l'équation est vraie pour toutes les valeurs de x, les coefficients doivent être les mêmes dans chaque membre de l'équation.
Donc $a = 3$ et $ab = 12$, d'où $3b = 12$, ou $b = 4$.
Donc $a + b = 3 + 4$, ou $a + b = 7$.

Solution 2
Puisque $a(x+b) = 3x+12$ pour toutes les valeurs de x, alors l'équation est vraie pour les valeurs particulières $x = 0$ et $x = 1$.
Lorsque $x = 0$, l'équation devient $a(0 + b) = 3(0) + 12$, d'où $ab = 12$.
Lorsque $x = 1$, l'équation devient $a(1 + b) = 3(1) + 12$, d'où $a + ab = 15$.
Puisque $ab = 12$, la dernière équation devient $a + 12 = 15$, ou $a = 3$.
Puisque $ab = 12$ et $a = 3$, alors $b = 4$.
Donc $a + b = 3 + 4$, ou $a + b = 7$.

Réponse : (D)

13. *Solution 1*

Si $x = 1$, l'expression $3x + 1$ a une valeur de 4, ce qui est un entier pair.
Pour cette valeur de x, voici les valeurs des expressions des cinq choix de réponses :

(A) $x + 3 = 4$ (B) $x - 3 = -2$ (C) $2x = 2$ (D) $7x + 4 = 11$ (E) $5x + 3 = 8$

Seule l'expression (D) a une valeur impaire. Puisque $x = 1$ répond au critère initial, soit que l'expression prend une valeur entière impaire, la réponse doit être (D).

Solution 2

Soit x un entier pour lequel l'expression $3x + 1$ prend une valeur entière paire. Donc $3x$ est un entier impair, car il est 1 de moins qu'un entier pair.
Puisque $3x$ a une valeur entière impaire, alors x est un entier impair (si x était pair, $3x$ serait le produit d'un entier pair et d'un entier impair, ce qui serait un entier pair).
Puisque x est un entier impair, alors $x + 3$ est un entier pair (la somme de deux entiers impairs est toujours paire). Donc, le choix (A) n'est pas le bon.
Puisque x est un entier impair, alors $x - 3$ est un entier pair (un entier impair moins un entier impair est toujours un entier pair). Donc, le choix (B) n'est pas le bon.
Puisque x est un entier impair, alors $2x$ est un entier pair (le produit d'un entier pair et d'un entier impair est toujours pair). Donc, le choix (C) n'est pas le bon.
Puisque x est un entier impair, alors $7x$ est un entier impair (le produit de deux entiers impairs est toujours impair. Donc $7x+4$ est un entier impair (la somme d'un entier impair et d'un entier pair est toujours impaire).
Puisque x est un entier impair, alors $5x$ est un entier impair (le produit de deux entiers impairs est toujours impair. Donc $5x+3$ est un entier pair (la somme de deux entiers impairs est toujours paire). Donc, le choix (E) n'est pas le bon.
La seule expression qui doit être impaire est $7x + 4$.

Réponse : (D)

14. Pour former le plus grand entier à partir d'un ensemble donné de chiffres, on place le plus grand chiffre dans la colonne des milliers, le deuxième plus grand chiffre dans la colonne des centaines, le troisième plus grand chiffre dans la colonne des dizaines et le dernier chiffre dans la colonne des unités. En effet, un grand chiffre contribue davantage s'il est placé là où il a une plus grande valeur.
Donc, en utilisant les chiffres 2, 0, 1 et 3, le plus grand entier que l'on peut former est 3210.
Pour former le plus petit entier à partir d'un ensemble donné de chiffres, on place les chiffres en ordre croissant de gauche à droite, soit de la colonne des milliers jusqu'à la colonne des unités.
Or dans ce problème, on demande des entiers supérieurs à 1000. Donc, le chiffre des milliers doit être au moins 1. On forme donc le plus petit entier en plaçant le chiffre 1 dans la colonne des milliers et les autres chiffres en ordre croissant. On obtient 1023.
La différence entre le plus grand et le plus petit entier est donc égale à $3210 - 1023$, ou 2187.

Réponse : (A)

15. Puisque 40 % des chansons de la nouvelle liste sont de style country, alors les 60 % des chansons qui restent ($100\,\% - 40\,\% = 60\,\%$) doivent être de style pop ou hip-hop .
Puisque le rapport du nombre de chansons hip-hop au nombre de chansons pop reste le même, alors 65 % de 60% des chansons qui restent doivent être de style hip-hop.
Or, 65 % de 60 % $= 65\,\% \times 60\,\% = 0{,}65 \times 0{,}6 = 0{,}39 = 39\,\%$. Donc, les chansons hip-hop représentent maintenant 39 % des chansons sur la liste de lecture.

Réponse : (E)

16. On peut déterminer que $5^{35} - 6^{21}$ est un entier strictement positif, puisque

$$5^{35} - 6^{21} = (5^5)^7 - (6^3)^7 = 3125^7 - 216^7$$

et $3125 > 216$.
On note aussi que toutes les puissances de 5 ont un chiffre des unités égal à 5. En effet, puisque $5 \times 5 = 25$ et que ce produit a un chiffre des unités égal à 5, alors le chiffre des unités de 5^3 est obtenu en multipliant par 5 le chiffre des unités 5 de 25. De même, chaque puissance successive de 5 a un chiffre des unités égal à 5.
De la même manière, toutes les puissances de 6 ont un chiffre des unités égal à 6.
Donc 5^{35} a un chiffre des unités égal à 5 et 6^{21} a un chiffre des unités égal à 6. Si on soustrait un nombre ayant un chiffre des unités égal à 6 d'un nombre ayant un chiffre des unités égal à 5, on obtient un chiffre des unités égal à 9.
Donc lorsqu'on évalue l'expression $5^{35} - 6^{21}$, la réponse a un chiffre des unités égal à 9.

Réponse : (B)

17. On a :

$$\begin{aligned}
\text{Périmètre du triangle } PST &= PS + ST + PT \\
&= PS + (SU + UT) + PT \\
&= PS + SQ + TR + PT \qquad \text{(puisque } SU = SQ \text{ et } UT = TR\text{)} \\
&= (PS + SQ) + (PT + TR) \\
&= PQ + PR \\
&= 19 + 17 \\
&= 36
\end{aligned}$$

Donc, le triangle PST a un périmètre de 36.

Réponse : (A)

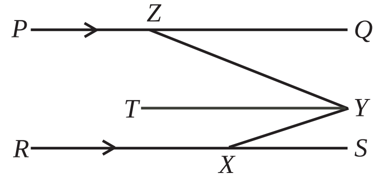
18. Lorsqu'on divise 109 par l'entier x, on obtient un reste de 4. Donc, x doit être un diviseur de 105. En effet, soit q le quotient de la division de 109 par x. Puisqu'il y a un reste de 4, alors $109 = qx + 4$, d'où $qx = 105$.
Puisque $105 = 5 \times 21 = 5 \times 3 \times 7$, les diviseurs (entiers) positifs de 105 sont :

$$1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105$$

Seuls 15, 21 et 35 sont des diviseurs de deux chiffres. Ce sont les seules valeurs possibles de x.
La somme des valeurs possibles de x est donc égale à $15 + 21 + 35$, ou 71.

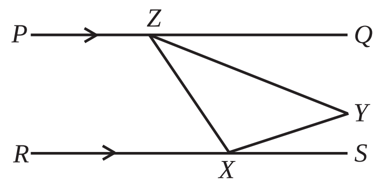
Réponse : (D)

19. *Solution 1*
Au point Y, on trace un segment TY parallèle à PQ et à RS et on efface le segment ZX, comme dans la figure suivante.



Puisque TY est parallèle à RS, alors $\angle TYX = \angle YXS = 20^\circ$.
Donc $\angle ZYT = \angle ZYX - \angle TYX$, d'où $\angle ZYT = 50^\circ - 20^\circ$, ou $\angle ZYT = 30^\circ$.
Puisque PQ est parallèle à TY, alors $\angle QZY = \angle ZYT = 30^\circ$.

Solution 2
Puisque QZ et XS sont parallèles, $\angle QZX + \angle ZXS = 180^\circ$.



Or, $\angle QZX = \angle QZY + \angle YZX$ et $\angle ZXS = \angle ZXY + \angle YXS$.
On sait que $\angle YXS = 20^\circ$.
De plus, la somme des mesures d'angles du triangle XYZ est égale à 180°.
Donc $\angle YZX + \angle ZXY + \angle ZYX = 180^\circ$, d'où $\angle YZX + \angle ZXY = 180^\circ - \angle ZYX$,
ou $\angle YZX + \angle ZXY = 180^\circ - 50^\circ$, ou $\angle YZX + \angle ZXY = 130^\circ$.
Puisque PQ est parallèle à RS, alors $\angle QZY + \angle YZX + \angle ZXY + \angle YXS = 180^\circ$. On reporte les résultats précédents dans cette équation pour obtenir $\angle QZY + 130^\circ + 20^\circ = 180^\circ$.
Donc $\angle QZY = 180^\circ - 130^\circ - 20^\circ$, d'où $\angle QZY = 30^\circ$.

Réponse : (A)

20. Soit d km la longueur du parcours.
Luce parcourt donc $\frac{d}{2}$ km en faisant son jogging à une vitesse de 6 km/h et elle parcourt $\frac{d}{2}$ km en courant à une vitesse de 12 km/h.
On sait que le temps écoulé est égal à la distance parcourue divisée par la vitesse.
Puisque Luce met x heure pour faire le parcours complet, alors $x = \frac{d/2}{6} + \frac{d/2}{12}$, d'où $x = \frac{d}{12} + \frac{d}{24}$, ou $x = \frac{2d}{24} + \frac{d}{24}$, ou $x = \frac{3d}{24}$, ou $x = \frac{d}{8}$.
Aussi, Luc parcourt $\frac{d}{3}$ km en marchant à une vitesse de 5 km/h et il parcourt $\frac{2d}{3}$ km en courant à une vitesse de 15 km/h.
Puisque Luc met y heure pour faire le parcours complet, alors $y = \frac{d/3}{5} + \frac{2d/3}{15}$, d'où $y = \frac{d}{15} + \frac{2d}{45}$, ou $y = \frac{3d}{45} + \frac{2d}{45}$, ou $y = \frac{5d}{45}$, ou $y = \frac{d}{9}$.
Donc $\frac{x}{y} = \frac{d/8}{d/9}$, d'où $\frac{x}{y} = \frac{9}{8}$.

Réponse : (A)

21. On remarque que la somme des chiffres des unités, soit $X + Y + Z$, donne un chiffre des unités égal à X. Donc, $Y + Z$ doit avoir un chiffre des unités égal à 0. Puisqu'aucun des chiffres de l'addition est nul, il doit y avoir une retenue. Puisque Y et Z sont des chiffres différents, de 1 à 9, leur somme ne peut dépasser 17. On doit donc avoir $Y + Z = 10$ et la retenue est égale à 1. En comparant la colonne des unités et la colonne des dizaines, dans la réponse, on peut conclure que $Y = X + 1$.

$$\begin{array}{cccc} & & {\scriptstyle 1} & \\ & X & X & X \\ & Y & Y & Y \\ + & Z & Z & Z \\ \hline Z & Y & Y & X \end{array}$$

Voici deux façons de terminer la solution.

<u>1re façon</u>

On considère la somme indiquée ci-dessus.

À l'exception de la retenue, les trois colonnes de chiffres qui doivent être additionnés sont identiques. Or, dans la réponse, la colonne des dizaines et la colonne des centaines ont un Y au bas. Il doit donc y avoir une retenue de 1 en haut de la colonne des centaines.

De plus, en additionnant la colonne des centaines, qui est maintenant identique à la colonne des dizaines, on aura la même réponse, soit le chiffre Y au bas et une retenue de 1. Donc $Z = 1$.

On a donc la situation ci-contre.

On sait aussi que $Y + Z = 10$. Puisque $Z = 1$, alors $Y = 9$.

De plus, on sait que $Y = X + 1$. Puisque $Y = 9$, alors $X = 8$.

(On peut vérifier l'addition. Si $X = 8$, $Y = 9$ et $Z = 1$, alors $888 + 999 + 111 = 1998$, ce qui correspond à l'addition donnée.)

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 1 & \\ & X & X & X \\ & Y & Y & Y \\ + & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & Y & Y & X \end{array}$$

<u>2e façon</u>

Puisque $Y + Z = 10$, alors $YYY + ZZZ = 1110$.

En effet, chaque colonne donne une retenue de 1 qui est ajoutée à la somme de la colonne suivante à la gauche. On peut aussi constater que YYY et ZZZ sont des multiples de 111, c'est-à-dire que $YYY = Y \times 111$ et $ZZZ = Z \times 111$. Donc $YYY + ZZZ = (Y + Z) \times 111 = 10 \times 111 = 1110$.

L'addition donnée devient donc $1110 + XXX = ZYYX$.

Si on avait $X = 9$, la somme donnée deviendrait $1110 + 999 = 2009$, d'où $Y = 0$. Puisque tous les chiffres sont non nuls, ce ne peut être le cas.

Donc $X \leq 8$.

Donc, $1110 + XXX$ ne peut pas dépasser $1110 + 888$, ou 1998. Donc, Z doit être égal à 1, peu importe la valeur de X.

Puisque $Y + Z = 10$, alors $Y = 9$.

L'addition donnée devient donc $1110 + XXX = 199X$.

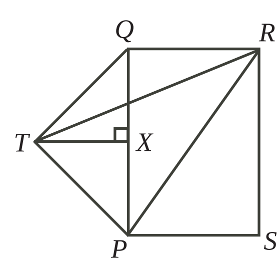
Puisque X est un chiffre, alors $X + 1 = 9$, d'où $X = 8$.

On peut vérifier que ces chiffres vérifient l'addition donnée.

Réponse : (D)

22. *Solution 1*

Au point T, on abaisse une perpendiculaire TX au côté QP.



Puisque le triangle QTP est isocèle, X est le milieu de QP. Puisque ce triangle est aussi rectangle, alors $\angle TPQ = \angle TQP = 45°$.

Puisque $QP = 4$, alors $QX = XP = 2$.

Puisque $\angle TQP = 45°$ et $\angle QXT = 90°$, alors le triangle QXT aussi est isocèle et rectangle.

Donc $TX = QX = 2$.

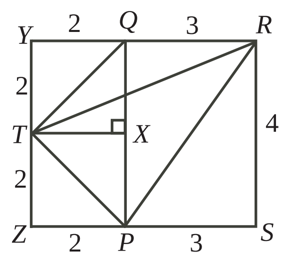
On calculera l'aire du triangle PTR en additionnant l'aire du triangle QRP à l'aire du triangle QTP et en soustrayant l'aire du triangle QRT.

Puisque $QR = 3$, $PQ = 4$ et $\angle PQR = 90°$, l'aire du triangle QRP est égale à $\frac{1}{2}(3)(4)$, ou 6.

Puisque $QP = 4$, $TX = 2$ et que TX est perpendiculaire à QP, l'aire du triangle QTP est égale

à $\frac{1}{2}(4)(2)$, ou 4.
On considère la base QR du triangle QRT. La hauteur correspondante est donc la longueur de QX qui est perpendiculaire à QR. L'aire du triangle QRT est donc égale à $\frac{1}{2}(3)(2)$, ou 3.
L'aire du triangle PTR est donc égale à $6 + 4 - 3$, ou 7.

Solution 2
Au point T, on abaisse une perpendiculaire TX au côté QP. Puisque le triangle QTP est isocèle, X est le milieu de QP.
Puisque $QP = 4$, alors $QX = XP = 2$. Puisque le triangle TPQ est isocèle et rectangle, alors $\angle TPQ = \angle TQP = 45°$.
Puisque $\angle TQP = 45°$ et $\angle QXT = 90°$, alors le triangle QXT aussi est isocèle et rectangle.
Donc $TX = QX = 2$.
On prolonge le segment RQ jusqu'à un point Y et le segment SP jusqu'à un point Z de manière que YZ soit perpendiculaire à YR et à ZS et que le segment YZ passe au point T.
Chacun des quadrilatères $YQXT$ et $TXPZ$ a trois angles droits (en Y, Q et X et en X, P et Z, respectivement). Ce sont donc des rectangles.
Puisque $QX = TX = XP = 2$, ce sont donc des carrés avec des côtés de longueur 2.
Or, $YRSZ$ est un rectangle. On a $RS = 4$ et $YR = YQ + QR$, d'où $YR = 2 + 3$, ou $YR = 5$.



L'aire du triangle PTR est égale à l'aire du rectangle $YRSZ$ moins l'aire des triangles TYR, RSP et PZT.
Le rectangle $YRSZ$ mesure 5 sur 4. Son aire est donc égale à 5×4, ou 20.
Puisque $TY = 2$ et $YR = 5$ et que TY est perpendiculaire à YR, alors l'aire du triangle TYR est égale à $\frac{1}{2}(TY)(YR)$, ou 5.
Puisque $RS = 4$ et $SP = 3$ et que RS est perpendiculaire à SP, alors l'aire du triangle RSP est égale à $\frac{1}{2}(RS)(SP)$, ou 6.
Puisque $PZ = ZT = 2$ et que PZ est perpendiculaire à ZT, alors l'aire du triangle PZT est égale à $\frac{1}{2}(PZ)(ZT)$, ou 2.
L'aire du triangle PTR est donc égale à $20 - 5 - 6 - 2$, ou 7.

RÉPONSE : (C)

23. On considère le premier sac qui contient 2 billes rouges et 2 billes bleues pour un total de 4 billes. Il y a 4 choix possibles pour la première bille. Pour chacun de ces choix, il y a 3 choix possibles pour la deuxième bille. En tout, il y a 4×3 façons, ou 12 façons, de choisir deux billes l'une après l'autre.
Pour obtenir deux billes rouges : Il y a 2 choix possibles (l'une ou l'autre bille rouge) pour que la première bille soit rouge. Dans chaque cas, il y a 1 choix possible (l'autre bille rouge) pour que la deuxième bille soit rouge. En tout, il y a 2×1 façons, ou 2 façons, de choisir 2 billes rouges.
Pour obtenir deux billes bleues : Il y a 2 choix possibles (l'une ou l'autre bille bleue) pour que la première bille soit bleue. Dans chaque cas, il y a 1 choix possible (l'autre bille bleue) pour que la deuxième bille soit bleue. En tout, il y a 2×1 façons, ou 2 façons, de choisir 2 billes bleues.
Il y a donc $2 + 2$, ou 4 façons de choisir deux billes de la même couleur.

La probabilité de choisir deux billes de la même couleur est égale au nombre de choix favorables, soit 4, divisé par le nombre de choix possibles, soit 12. Elle est donc égale à $\frac{4}{12}$, ou $\frac{1}{3}$.

On considère le deuxième sac qui contient 2 billes rouges, 2 billes bleues et v billes vertes, soit $v+4$ billes en tout.
Il y a $v+4$ façons de choisir la première bille. Il reste alors $v+3$ billes dans le sac. Pour chacun des $v+4$ choix, il y a donc $v+3$ choix pour la deuxième bille. En tout, il y a $(v+4)(v+3)$ façons de choisir deux billes l'une après l'autre.
Comme pour le premier sac, il y a 2×1 façons, ou 2 façons de choisir 2 billes rouges.
Comme pour le premier sac, il y a 2×1 façons, ou 2 façons de choisir 2 billes bleues.
Pour deux billes vertes : Il y a v façons de choisir une première bille verte. Il reste alors $v-1$ billes vertes dans le sac. Pour chacun de ces v choix, il y a $v-1$ façons de choisir une deuxième bille verte. En tout, il y a donc $v(v-1)$ façons de choisir deux billes vertes du sac.
Il y a donc $(2+2+v(v-1))$ façons, ou (v^2-v+4) façons de choisir deux billes de la même couleur.
La probabilité de choisir deux billes de la même couleur est égale au nombre de choix favorables, soit (v^2-v+4), divisé par le nombre de choix possibles, soit $(v+4)(v+3)$. Elle est donc égale à $\frac{v^2-v+4}{(v+4)(v+3)}$.

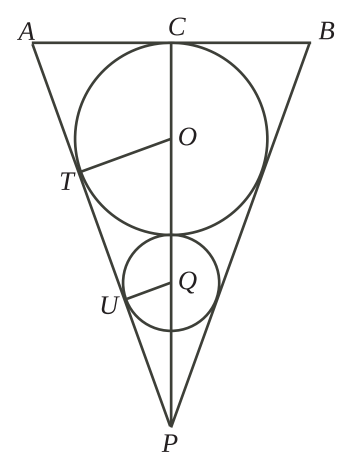
Puisque les deux probabilités sont égales et que $v \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{v^2-v+4}{(v+4)(v+3)} \\ (v+4)(v+3) &= 3v^2-3v+12 \\ v^2+7v+12 &= 3v^2-3v+12 \\ 10v &= 2v^2 \\ v &= 5 \qquad \text{(puisque } v \neq 0\text{)} \end{aligned}$$

Donc $v=5$.

Réponse : (B)

24. Soit r le rayon de la petite boule. Puisque le rayon de la grande boule est deux fois le rayon de la petite boule, il est égal à $2r$.
On exprimera la hauteur et le rayon du cône en fonction de r et on utilisera ces résultats pour résoudre le problème.
Par symétrie, le centre Q de la petite boule et le centre O de la grande boule sont situés sur le segment qui joint le centre du haut circulaire C du cône et l'apex P du cône.
On trace une section transversale du cône qui passe par C et P.
Toutes les sections de cette sorte coupent le cône en donnant des triangles isométriques.
Par symétrie, les centres O et Q des boules sont situés sur un segment qui est dans le plan de la coupe transversale. Donc, ce plan coupe les deux boules en formant deux « grands cercles » (c'est-à-dire la plus grande section transversale possible de chaque boule).



Puisque le haut de la boule du haut est au même niveau que le haut du cône, la boule du haut touche au haut circulaire du cône au centre C.
Puisque les boules touchent au cône tout autour, les deux cercles sont tangents au triangle dans

la section transversale.
On nomme ABP le triangle de la section transversale.
On sait que CP est perpendiculaire à AB au point C.
Aux points O et Q on trace des rayons OT et QU perpendiculaires à AP, T et U étant les points de contact des cercles et de AP.
On a donc $OT = 2r$ et $QU = r$.
Puisque les deux cercles se touchent, le segment OQ passe par leur point de contact et on a $OQ = 2r + r$, ou $OQ = 3r$.
Or, les triangles OTP et QUP sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils partagent un angle en P.
Puisque $\dfrac{OT}{QU} = \dfrac{2r}{r} = 2$, alors $\dfrac{OP}{QP} = 2$, ou $OP = 2QP$.
Puisque $OP = OQ + QP = 3r + QP$, alors $3r + QP = 2QP$, ou $QP = 3r$.
On a $CP = CO + OQ + QP$, ou $CP = 2r + 3r + 3r$, ou $CP = 8r$. Le cône a donc une hauteur de $8r$.
(On a utilisé le fait que CO est un rayon du grand cercle, d'où $CO = 2r$.)
Les triangles ACP et QUP sont semblables, puisque le triangle ACP est rectangle en C et que les deux triangles partagent un même angle en P.
Donc $\dfrac{AC}{CP} = \dfrac{QU}{UP}$.
On sait que $CP = 8r$ et $QU = r$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle UPQ, on a

$$UP = \sqrt{QP^2 - QU^2} = \sqrt{(3r)^2 - r^2} = \sqrt{8r^2} = \sqrt{8}r$$

puisque $r > 0$.
Donc $AC = \dfrac{CP \cdot QU}{UP}$, d'où $AC = \dfrac{8r \cdot r}{\sqrt{8}r}$, ou $AC = \sqrt{8}r$.
D'après l'énoncé, on sait que la quantité d'eau qui reste dans le cône est de 2016π. Cela veut dire que le volume du cône moins le volume des deux boules est égal à 2016π.
On utilise les formules de volume pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{3}\pi(AC)^2(CP) - \tfrac{4}{3}\pi(QU)^3 - \tfrac{4}{3}\pi(OT)^3 &= 2016\pi \\
\tfrac{1}{3}\pi(\sqrt{8}r)^2(8r) - \tfrac{4}{3}\pi r^3 - \tfrac{4}{3}\pi(2r)^3 &= 2016\pi \\
64\pi r^3 - 4\pi r^3 - 32\pi r^3 &= 6048\pi \\
28r^3 &= 6048 \\
r^3 &= 216 \\
r &= 6
\end{aligned}$$

La petite boule a donc un rayon de 6.

Réponse : (B)

25. Soit $L(n) = n - Z(n!)$ le $n^{\text{ième}}$ nombre de la liste de Louis.
On sait que le nombre de zéros trainants d'un entier strictement positif m (que l'on note $Z(m)$) est égal au nombre de facteurs 10 de m que l'on peut former. Par exemple, 2400 a deux zéros trainants, car $2400 = 24 \times 10 \times 10$. Puisque $10 = 2 \times 5$, le nombre de facteurs 10 de m est déterminé par le nombre de facteurs 2 et 5 dans la factorisation première de m.
On considère $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$.
Puisque $5 > 2$, alors $n!$ contient plus de facteurs 2 que de facteurs 5 dans sa factorisation première.

En effet, dans la multiplication $n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$, les multiples de 2 paraissent à tous les deux facteurs à partir de la droite, tandis que les multiples de 5 paraissent à tous les cinq facteurs à partir de la droite. Les multiples de 2, qui apportent un facteur 2, sont donc plus nombreux que les multiples de 5, qui apportent un facteur 5.
Donc, la valeur de $Z(n!)$ est égale au nombre de facteurs 5 dans la factorisation première de $n!$.
Soit $V(m)$ le nombre de facteurs 5 dans la factorisation première de m.
On a donc $Z(n!) = V(n!)$, d'où $L(n) = n - V(n!)$.
Puisque $(n+1)! = (n+1) \times n!$, alors $V((n+1)!) = V(n+1) + V(n!)$. (En effet, les facteurs 5 de la factorisation première de $(n+1)!$ qui ne sont pas dans celle de $n!$ parviennent du nombre $n+1$ lui-même.)
Donc si $n+1$ n'est pas un multiple de 5, alors $V(n+1) = 0$ et $V((n+1)!) = V(n!)$.
Si $n+1$ est un multiple de 5, alors $V(n+1) > 0$ et $V((n+1)!) > V(n!)$.
On remarque que :

$$\begin{aligned} L(n+1) - L(n) &= ((n+1) - V((n+1)!)) - (n - V(n!)) \\ &= ((n+1) - n) - (V((n+1)!) - V(n!)) \\ &= 1 - V(n+1) \end{aligned}$$

Si $n+1$ n'est pas un multiple de 5, alors $V(n+1) = 0$ et $L(n+1) - L(n) = 1$.
Donc lorsque $n+1$ n'est pas un multiple de 5, le terme correspondant dans la liste est 1 de plus que le terme précédent ; donc les termes de la liste augmentent de 1 pendant quatre termes consécutifs lorsque les termes ne sont pas des multiples de 5 (puisque les multiples de 5 surviennent à tous les 5 entiers).
Lorsque $n+1$ est un multiple de 5, le terme correspondant dans la liste sera le même que le terme précédent si la factorisation première de $n+1$ comprend un seul facteur 5. Le terme correspondant sera inférieur au terme précédent si la factorisation première de $n+1$ comprend plus d'un facteur 5.
Après un peu de tâtonnements, on conclut que pour qu'un entier paraisse trois fois dans la liste, il doit y avoir un entier n qui admet au moins cinq facteurs 5 dans sa factorisation première.
On montrera que dans la liste de $L(100)$ à $L(10\,000)$, il y a six entiers qui paraissent trois fois.
Puisque le plus grand choix de réponse est 6, ce doit être la réponse correcte.

Soit $N = 5^5k = 3125k$, k étant un entier strictement positif quelconque. Si $N \leq 10\,000$, alors k peut égaler 1, 2 ou 3.
Soit $a = L(N)$.
On remplit un tableau avec les valeurs de $L(N-6)$ à $L(N+6)$. Puisque la factorisation première de N admet cinq facteurs 5, alors $N-5$ et $N+5$ sont tous les deux divisibles par 5 (la factorisation première de chacun n'admet qu'un seul facteur 5), et aucun autre entier de la liste n'est divisible par 5. On rappelle aussi que $L(m+1) - L(m) = 1 - V(m+1)$, comme on l'a démontré précédemment.

m	$N-6$	$N-5$	$N-4$	$N-3$	$N-2$	$N-1$	N	$N+1$	$N+2$	$N+3$	$N+4$	$N+5$	$N+6$
$V(m)$	0	1	0	0	0	0	5	0	0	0	0	1	0
$L(m)$	a	a	$a+1$	$a+2$	$a+3$	$a+4$	a	$a+1$	$a+2$	$a+3$	$a+4$	$a+4$	$a+5$

Donc si $N = 5^5k$, les entiers $L(N) = a$ et $L(N) + 4 = a + 4$ paraissent chacun trois fois dans la liste.
Puisqu'il existe trois valeurs de k qui placent N dans l'intervalle $100 \leq N \leq 10\,000$, il y a six entiers dans la liste de Louis qui paraissent trois fois.

Pour démontrer qu'il n'existe aucun autre entier qui parait trois fois dans la liste de Louis, au lieu de dépendre des choix de réponse, il faudrait démontrer quelques autres faits. Par exemple, il faudrait démontrer que :

> Si n et k sont des entiers strictement positifs tels que $k \geq 7$ et $n \leq 10\,000$ et $n + k \leq 10\,000$, alors $L(n + k) \neq L(n)$.

Ceci nous permettrait d'affirmer que si deux entiers de la liste sont égaux, alors ils doivent parvenir de $L(n)$ à $L(n + 6)$ pour une valeur quelconque de n. Ceci nous permettrait d'affirmer que si trois entiers de la liste sont égaux, alors ils doivent parvenir de $L(n - 6)$ à $L(n + 6)$ pour une valeur quelconque de n. Il faudrait aussi démontrer que :

> Étant donné un entier strictement positif n, $n \leq 10\,000$, de manière que la liste de $L(n - 6)$ à $L(n + 6)$ contienne trois termes égaux, alors un des entiers de la liste de $n - 6$ à $n + 6$ doit être divisible par 3125.

Cela nous permettrait de terminer la démonstration.

Réponse : (E)

Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2012

(10^e^ année – Secondaire IV)

le jeudi 23 février 2012

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 24 février 2012

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On simplifie : $\dfrac{5-2}{2+1} = \dfrac{3}{3} = 1$

Réponse : (B)

2. Puisque la moyenne des trois nombres est égale à 3, leur somme est égale à 3×3, ou 9.
Donc $1 + 3 + x = 9$, d'où $x = 9 - 4$, ou $x = 5$.

Réponse : (B)

3. Lorsqu'on fait subir à la figure donnée une rotation de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre, le côté supérieur de la figure se retrouve sur le côté droit de l'image. Donc, les deux coins ombrés se retrouvent du côté droit de de l'image.
De même, le petit triangle ombré à l'intérieur de la figure se retrouve en haut à gauche dans l'image.
Donc, la figure du choix (A) est la bonne.

Réponse : (A)

4. Si l'exposant de -1 est pair, la puissance est égale à 1 et si l'exposant de -1 est impair, la puissance est égale à -1. Donc $(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) = -1 + 1 - 1 = -1$.
On peut aussi procéder comme suit en faisant une multiplication à la fois :

$$(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) = (-1)(-1)(-1) + (-1)(-1) + (-1) = 1(-1) + 1 - 1 = -1 + 1 - 1 = -1$$

Réponse : (D)

5. Puisque $\sqrt{100 - x} = 9$, alors $100 - x = 9^2$, ou $100 - x = 81$. Donc $x = 19$.

Réponse : (E)

6. Lorsqu'on a ajouté 3 bananes au panier, il y a 12 pommes et 18 bananes dans le panier.
Donc, la fraction des fruits du panier formée par les bananes est égale à $\frac{18}{12+18}$, ou $\frac{18}{30}$, ou $\frac{3}{5}$.

Réponse : (C)

7. Puisque 20 % des élèves ont choisi la pizza et que 38 % des élèves ont choisi un mets thaïlandais, le pourcentage des élèves qui ont choisi un mets grec est égal à 100 % − 20 % − 38 %, ou 42 %.
Puisque 150 élèves ont été questionnés, le nombre d'élèves qui ont choisi un mets grec est égal à 42 % × 150, ou $\frac{42}{100} \times 150$, ou 63.

Réponse : (E)

8. On a $\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right)$.
On peut simplifier davantage en annulant les numérateurs et dénominateurs égaux, ce qui donne une réponse de $\dfrac{2}{5}$.

Réponse : (A)

9. Puisque 20 élèves ont patiné et que 5 élèves ont patiné et skié, alors le nombre d'élèves qui ont patiné seulement est égal à $20 - 5$, ou 15.
Puisque 9 élèves ont skié et que 5 élèves ont patiné et skié, alors le nombre d'élèves qui ont skié seulement est égal à $9 - 5$, ou 4.
Le nombre d'élèves qui ont patiné ou skié ou les deux est égal au nombre d'élèves qui ont patiné seulement plus le nombre d'élèves qui ont skié seulement plus le nombre d'élèves qui ont patiné et skié. Ce nombre est égal à $15 + 4 + 5$, ou 24.
Donc, le nombre d'élèves qui n'ont ni patiné, ni skié, est égal à $30 - 24$, ou 6.

Réponse : (B)

10. Le prisme initial avait quatre faces rectangulaires mesurant 4 sur 2 et deux faces carrées mesurant 2 sur 2. L'aire totale de ce prisme est donc égale à $4(4 \cdot 2) + 2(2 \cdot 2)$, ou $32 + 8$, ou 40.
Lorsqu'on enlève un petit cube mesurant 1 sur 1 sur 1 d'un coin du prisme, on enlève une surface carrée mesurant 1 sur 1 de trois des faces du prisme, mais trois faces carrées mesurant 1 sur 1 sont ajoutées à la surface. En d'autres mots, l'aire totale ne change pas.
Le nouveau solide a donc une aire totale de 40.

Réponse : (C)

11. Si Mathilde livre les journaux pendant 3 heures, elle livre 3×30 journaux, ou 90 journaux.
Elle gagne donc $3 \times 6{,}00\,\$ + 90 \times 0{,}25\,\$$ ou $18{,}00\,\$ + 22{,}50\,\$$, ou $40{,}50\,\$$.

Réponse : (A)

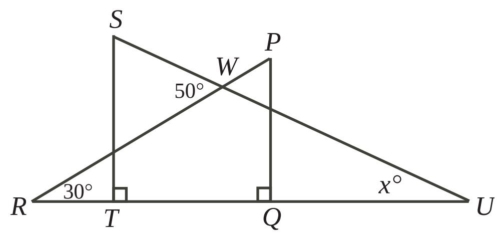
12. Puisque le point (p, q) est situé sur la droite d'équation $y = \frac{2}{5}x$, alors $q = \frac{2}{5}p$.
Deux côtés du rectangle sont situés sur les axes. Le rectangle a donc une base égale à p et une hauteur égale à q.
Son aire est donc égale à pq, ou $p \cdot \frac{2}{5}p$, ou $\frac{2}{5}p^2$.
Puisque le rectangle a une aire de 90, alors $\frac{2}{5}p^2 = 90$, d'où $p^2 = \frac{5}{2}(90)$, ou $p^2 = 225$.
Puisque $p > 0$, alors $p = \sqrt{225}$, ou $p = 15$.

Réponse : (D)

13. Puisque N est divisible par 5 et par 11, il est divisible par 5×11, ou 55, car 5 et 11 n'admettent aucun diviseur commun supérieur à 1.
On cherche donc un multiple impair de 55 entre 400 et 600.
Pour le trouver, on peut utiliser un multiple connu de 55 dans cet intervalle, par exemple 550. Il s'agit d'un multiple pair.
On peut ensuite ajouter ou soustraire 55 de ce nombre et obtenir un autre multiple de 55.
Or $550 + 55 = 605$, ce qui donne un multiple impair à l'extérieur de l'intervalle.
On calcule $550 - 55 = 495$ et on obtient un multiple impair dans l'intervalle.
L'énoncé nous dit qu'il n'y a qu'un multiple impair de 55 dans l'intervalle. Donc $N = 495$.
La somme des chiffres de N est égale à $4 + 9 + 5$, ou 18.

Réponse : (E)

14. Soit W le point d'intersection de RP et de SU.



L'angle SWR est extérieur au triangle RWU.
Donc $\angle SWR = \angle WRU + \angle WUR$, d'où $50° = 30° + x°$, ou $x = 50 - 30$, ou $x = 20$.
(On aurait pu dire que $\angle RWU = 180° - \angle SWR$, d'où $\angle RWU = 180° - 50°$, ou $\angle RWU = 130°$.
Puisque les mesures des angles du triangle RWU ont une somme de 180°, alors
$30° + 130° + x° = 180°$, d'où $x = 180 - 130 - 30$, ou $x = 20$.)

Réponse : (B)

15. Puisque le grand cercle a un rayon de 9, alors $OQ = 9$ et le grand cercle a donc une aire de $\pi 9^2$, ou 81π.
Puisque $OP : PQ = 1 : 2$ et que $OQ = 9$, alors $OP = \frac{1}{3}OQ$, ou $OP = 3$.
Le petit cercle a un rayon de 3. Il a donc une aire de $\pi 3^2$, ou 9π.
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du grand cercle moins celle du petit cercle. Elle est donc égale à $81\pi - 9\pi$, ou 72π.

Réponse : (D)

16. D'après la table de valeurs lorsque $x = 0$ et $y = 8$, on a $8 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, d'où $c = 8$.
D'après la table de valeurs lorsque $x = 1$ et $y = 9$, on a $9 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$, d'où $a + b + c = 9$.
Puisque $a + b + c = 9$ et que $c = 8$, alors $a + b + 8 = 9$, d'où $a + b = 1$.

Réponse : (B)

17. Soit L la longueur de la ficelle et x la longueur du morceau le plus court.
Puisque chaque longueur est 2 fois celle du morceau précédent, les longueurs des autres morceaux sont $2x$, $4x$ et $8x$.
Puisque les longueurs des quatre petits morceaux donnent la longueur de la ficelle, alors $x + 2x + 4x + 8x = L$, ou $15x = L$, d'où $x = \frac{1}{15}L$.
La longueur du plus grand morceau est donc égale à $8x$, ou $\frac{8}{15}L$, c'est-à-dire à $\frac{8}{15}$ de la longueur de la ficelle initiale.

Réponse : (A)

18. *Solution 1*
Puisqu'il s'agit de six entiers consécutifs, on peut dire qu'ils sont à peu près égaux. Lorsqu'on efface un des entiers, les cinq autres entiers, qui sont à peu près égaux, ont une somme de 2012. Chacun est à peu près égal à $\frac{2012}{5}$, soit environ 400.
On procède par essais systématiques.
Supposons que les six entiers consécutifs sont 400, 401, 402, 403, 404 et 405.
Ils ont une somme de 2415. Si on efface un des nombres pour que les quatre autres aient une somme de 2012, il faut effacer $2415 - 2012$, ou 403.
Y a-t-il une autre réponse possible ?
Si on choisit six entiers consécutifs un peu plus grands, comme 401, 402, 403, 404, 405 et 406, la somme des cinq plus petits entiers est égale à $401 + 402 + 403 + 404 + 405$, ou 2015, ce qui dépasse la somme donnée, qui est de 2012. Ainsi avec six entiers consécutifs plus grands que 400, 401, 402, 403, 404 et 405, il est impossible que cinq de ces entiers aient une somme de 2012.
Si on choisit six entiers consécutifs un peu plus petits, comme 399, 400, 401, 402, 403 et 404, la somme des cinq plus grands entiers est égale à $400 + 401 + 402 + 403 + 404$, ou 2010, ce qui est inférieur à la somme donnée, qui est de 2012. Ainsi avec six entiers consécutifs plus petits que 400, 401, 402, 403, 404 et 405, il est impossible que cinq de ces entiers aient une somme de 2012.
Les six entiers consécutifs sont donc 400, 401, 402, 403, 404 et 405 et on a effacé le nombre 403.
La somme de ses chiffres est égale à $4 + 0 + 3$, ou 7.
(Il est à remarquer que puisqu'il s'agit d'une réponse à choix multiple, on pouvait s'arrêter dès qu'on avait trouvé une réponse appropriée.)

Solution 2
Soit x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, $x + 4$ et $x + 5$ les six entiers consécutifs et soit $x + a$ l'entier qui est effacé, a étant égal à 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.
La some des cinq entiers qui restent est donc égale à

$$(x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5)) - (x + a)$$

Donc :

$$\begin{aligned}(x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5))-(x+a) &= 2012\\ (6x+15)-(x+a) &= 2012\\ 5x+15 &= 2012+a\\ 5(x+3) &= 2012+a\end{aligned}$$

Puisque le membre de gauche est un entier qui est divisible par 5, le membre de droite doit l'être aussi. Puisque a peut prendre une valeur de 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 et que $2012+a$ doit être divisible par 5, alors a doit être égal à 3.
Donc $5(x+3)=2015$, d'où $x+3=403$, ou $x=400$.
On a effacé l'entier $x+3$, c'est-à-dire 403. La somme de ses chiffres est égale à $4+0+3$, ou 7.

Réponse : (C)

19. Soit S la somme des quatre entiers sur n'importe quel segment.
On a donc $S=9+p+q+7=3+p+u+15=3+q+r+11=9+u+s+11=15+s+r+7$.
Donc :

$$\begin{aligned}5S &= (9+p+q+7)+(3+p+u+15)+(3+q+r+11)+(9+u+s+11)+(15+s+r+7)\\ &= 2p+2q+2r+2s+2u+90\\ &= 2(p+q+r+s+u)+90\end{aligned}$$

Puisque p, q, r, s et u sont les nombres 19, 21, 23, 25 et 27 dans un ordre quelconque, alors :

$$p+q+r+s+u=19+21+23+25+27=115$$

Donc $5S=2(115)+90$, ou $5S=320$, d'où $S=64$.
Puisque $S=64$, alors $3+p+u+15=64$, d'où $p+u=46$.
Puisque $S=64$, alors $15+s+r+7=64$, d'où $s+r=42$.
Puisque $q=(p+q+r+s+u)-(p+u)-(s+r)$, alors $q=115-46-42$, ou $q=27$.

Réponse : (D)

20. Pour déterminer N, le plus petit entier positif dont les chiffres ont un produit de 2700, il faut d'abord déterminer le nombre minimal de chiffres qui pourraient donner ce produit. En effet, moins il y a de chiffres, plus le nombre est petit.
On déterminera ensuite les chiffres qui ont un produit de 2700 et on les placera en ordre croissant pour former les chiffres de N. (Plus le premier chiffre d'un nombre formé de ces chiffres est petit, plus le nombre est petit. Ensuite, plus le deuxième chiffre est petit, plus le nombre est petit et ainsi de suite.)
On remarque que N ne peut avoir un chiffre 0, sinon le produit des chiffres serait égal à 0.
De plus, N ne peut avoir un chiffre 1, sinon on obtiendrait le même produit des chiffres si on enlevait le 1 et on aurait alors un nombre plus petit. Or, N est *le plus petit* nombre dont les chiffres ont un produit de 2700.

Puisque les chiffres de N ont un produit de 2700, on écrit 2700 en factorisation première pour faciliter la recherche des chiffres de N :

$$2700=27\times 100=3^3\times 10^2=3^3\times 2^2\times 5^2$$

Le seul chiffre non nul qui est divisible par 5 est 5.
Puisque 2700 admet deux diviseurs 5, le nombre N doit donc comporter deux chiffres 5.

Les autres chiffres ont un produit de $3^3 \times 2^2$, ou 108.
On cherche donc un nombre minimal de chiffres qui ont un produit de 108.
Il est impossible d'avoir deux chiffres qui ont un produit de 108, car le plus grand produit possibles de deux chiffres est égal à 9×9, ou 81.
Il est possible de trouver trois chiffres qui ont un produit de 108 (p. ex., $2 \times 6 \times 9$ ou $3 \times 6 \times 6$).
Donc, le nombre N a 5 chiffres, soit deux fois le chiffre 5 et trois autres chiffres qui ont un produit de 108.
Pour que N soit aussi petit que possible, il faut que son 1er chiffre, le chiffre des dix-mille, soit aussi petit que possible. Or, on sait que N ne peut pas avoir un chiffre 1.
Le plus petit chiffre suivant est 2. Ce 2 doit donc être un des trois chiffres qui ont un produit de 108. Les deux autres de ces trois chiffres doivent donc avoir un produit égal à $108 \div 2$, ou 54. Il s'agit donc d'un 6 et d'un 9.
Les chiffres de N sont donc 2, 6, 9, 5 et 5. Ces chiffres forment un plus petit nombre possible lorsqu'on les place en ordre croissant. Donc $N = 25\,569$.
Les chiffres de N ont donc une somme de $2 + 5 + 5 + 6 + 9$, ou 27.

Réponse : (E)

21. On factorise le membre de gauche de l'équation $x + xy = 391$ pour obtenir $x(1 + y) = 391$.
Or $391 = 17 \cdot 23$.
Puisque 17 et 23 sont tous deux premiers, alors il n'y a que deux façons d'exprimer 391 comme produit de deux entiers, soit 1×391 et 17×23.
Puisque x et $y + 1$ sont des entiers strictement positifs, les possibilités pour $x(1 + y) = 391$ sont $x = 1$ et $1 + y = 391$, ou $x = 391$ et $y + 1 = 1$, ou $x = 17$ et $y + 1 = 23$, ou $x = 23$ et $y + 1 = 17$.
Donc (x, y) est égal à $(1, 390)$ ou $(391, 0)$ ou $(17, 22)$ ou $(23, 16)$.
Puisque y est strictement positif, le deuxième couple est rejeté.
Puisque $x > y$, le premier et le troisième couple sont rejetés.
Donc $(x, y) = (23, 16)$, d'où $x + y = 39$.

Réponse : (B)

22. Puisque les cinq singes sont numérotés au hasard, alors la probabilité pour qu'un singe en particulier soit nommé Singe 1 est égale à $\frac{1}{5}$. On considère cinq cas.

1er cas : Si le singe qui était en position P est nommé Singe 1, alors il reste à sa place et le singe qui était en position R ne peut pas se retrouver en position P à la fin.

2e cas : Si le singe qui était en position Q est nommé Singe 1, alors à la fin, Singe 2 est en position R, Singe 3 est en position S, Singe 4 est en position T et Singe 5 est en position P. Donc si Singe 1 était en position Q, c'est Singe 5 qui bouge de la position R à la position P.

3e cas : Si le singe qui était en position R est nommé Singe 1, alors il reste à sa place et ne peut se rendre à la position P.

4e cas : Si le singe qui était en position S est nommé Singe 1, alors à la fin, Singe 2 est en position T, Singe 3 est en position P, Singe 4 est en position Q et Singe 5 est en position R. Donc si Singe 1 était en position S, c'est Singe 3 qui bouge de la position R à la position P.

5e cas : Si le singe qui était en position T est nommé Singe 1, alors à la fin, Singe 2 est en position P, Singe 3 est en position Q, Singe 4 est en position R et Singe 5 est en position S. Donc si Singe 1 était en position T, c'est Singe 2 qui bouge de la position R à la position P.

Il faut donc considérer davantage les 2e, 4e et 5e cas.

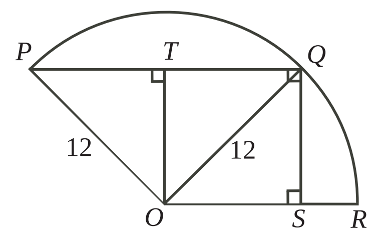
- En se référant au 2e cas, quelle est la probabilité pour qu'au départ, la position Q soit occupée par Singe 1 et que la position R soit occupée par Singe 5 ? On sait que la probabilité pour la position Q soit occupée par Singe 1 est de $\frac{1}{5}$. Dans ce cas, puisque les singes sont numérotés au hasard, la probabilité pour que la position R soit occupée par Singe 5 est de $\frac{1}{4}$. Donc, la probabilité pour qu'au départ, la position Q soit occupée par Singe 1 et que la position R soit occupée par Singe 5 est de $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{20}$.

- De même, en se référant au 4e cas, la probabilité pour que Singe 1 occupe la position S et que Singe 3 occupe la position R est de $\frac{1}{20}$.
- En se référant au 5e cas, la probabilité pour que Singe 1 occupe la position T et que Singe 2 occupe la position R est de $\frac{1}{20}$.

Donc, la probabilité pour que le singe qui était en position R se retrouve maintenant en position P est de $3 \cdot \frac{1}{20}$, ou $\frac{3}{20}$.

Réponse : (C)

23. On trace le segment OQ et au point O, on abaisse une perpendiculaire OT à PQ.



Puisque le cercle a un rayon de 12, alors $OP = OQ = 12$.
On considère les triangles OTP et OTQ. Chacun est rectangle, ils partagent le côté OT, et les hypoténuses (OP et OQ) sont isométriques. Donc, ces triangles sont isométriques.
On considère le quadrilatère $TQSO$. Puisque trois de ses angles sont droits, le quatrième doit l'être aussi. Donc $\angle TOS = 90^\circ$.
Donc $\angle TOP = 135^\circ - 90^\circ$, ou $\angle TOP = 45^\circ$.
Puisque les mesures des angles du triangle OTP ont une somme de 180°, alors $\angle OPT = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ$, d'où $\angle OPT = 45^\circ$.
Le triangle OTP est isocèle et rectangle. Il a une hypoténuse de 12.
Puisque les triangles OTQ et OTP sont isométriques, le premier aussi est isocèle et rectangle et il a une hypoténuse de 12.
Puisque $\angle TOP = \angle TOQ = 45^\circ$, alors $\angle QOS = 135^\circ - 45^\circ - 45^\circ$, ou $\angle QOS = 45^\circ$. Or, le triangle OQS est rectangle et il a un angle de 45°. Son troisième angle doit donc mesurer 45°.
Donc, le triangle OQS aussi est isocèle et rectangle et il a une hypoténuse de 12.
Les triangles OQS et OTQ sont donc isométriques.
L'aire du trapèze $OPQS$ est donc égale à 3 fois l'aire d'un triangle rectangle isocèle ayant une hypoténuse de 12.
On considère un de ces triangles, OTP. Soit $OT = TP = a$.
Puisque le triangle OTP est un triangle remarquable $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$, alors $OP = \sqrt{2}a$.
(On peut le voir en utilisant le théorème de Pythagore :

$$OP = \sqrt{OT^2 + TP^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$

puisque $a > 0$.)
Puisque $OP = 12$, alors $\sqrt{2}a = 12$, ou $a = \dfrac{12}{\sqrt{2}}$.
L'aire du triangle OTP est égale à $\dfrac{1}{2}(OT)(TP)$. Elle est donc égale à $\dfrac{1}{2}a^2$, ou $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{12}{\sqrt{2}}\right)^2$, ou $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{144}{2}\right)$, ou 36.
Donc, l'aire du trapèze $OPQS$ est égale à 3×36, ou 108.

Réponse : (C)

24. On détermine d'abord le nombre de structures possibles dans les échanges de livres. On déterminera ensuite le nombre de façons d'attribuer les amis à ces structures.
On suppose que les six amis échangent des livres selon les critères de l'énoncé.
On considère une personne quelconque que l'on nomme A.
A doit donner un livre à une autre personne que l'on nomme B (on écrit $A \to B$).
B ne peut donner un livre à A. Donc, B doit donner un livre à une troisième personne que l'on nomme C (on a maintenant $A \to B \to C$).
C ne peut donner un livre à B, puisqu'il reçoit un livre de B et qu'en plus, B a déjà reçu un livre de A. Donc, C a deux choix : il peut donner un livre à A ($A \to B \to C \to A$) ou à une quatrième personne que l'on nomme D ($A \to B \to C \to D$).

<u>1er choix</u> : $A \to B \to C \to A$
Dans ce cas, les trois personnes, A, B et C, ont chacune donné un livre et reçu un livre. Donc la quatrième personne, que l'on nomme D, doit donner un livre à une cinquième personne que l'on nomme E (on a $A \to B \to C \to A$; $D \to E$).
E ne peut donner un livre à D, ni à A, à B ou à C, qui en ont déjà reçu un. Il doit donc donner un livre à une sixième personne que l'on nomme F (on a $A \to B \to C \to A$; $D \to E \to F$).
F peut seulement donner un livre à D, puisque les autres personnes ont déjà reçu un livre. Ceci complète le premier choix de C (on écrit $A \to B \to C \to A$; $D \to E \to F \to D$).

<u>2e choix</u> : $A \to B \to C \to D$
Dans ce cas, D ne peut donner un livre à B ou à C qui ont déjà reçu un livre. Donc, D a deux choix : il peut donner un livre à A ou à une des deux personnes qui restent.
Si D donne un livre à A, alors chacune des quatre personnes, A, B, C et D, a donné un livre et a reçu un livre. Les deux personnes qui restent doivent alors échanger leur livre l'une avec l'autre, ce qui est interdit.
Donc, D doit donner un livre à une des deux personnes qui restent, que l'on nomme E (on a $A \to B \to C \to D \to E$).
À ce point-ci, seules deux personnes n'ont pas encore reçu un livre, soit A et la sixième personne que l'on nomme F. E doit donner un livre à F, autrement F n'aura reçu aucun livre. F doit donc donner un livre à A.
On a la structure $A \to B \to C \to D \to E \to F \to A$.

Donc, il n'y a que deux structures possibles pour l'échange, soit :
1) $A \to B \to C \to A$ et $D \to E \to F \to D$
2) $A \to B \to C \to D \to E \to F \to A$.
(On peut dire que la première structure est formée de deux cycles de 3 personnes et que la deuxième est formée d'un cycle de six personnes.)

On suppose que les six amis se nomment P, Q, R, S, T et U. (On pourrait dire Paul, Quang, Renée, Safa, Théo et Ursule, mais on épargnera de l'espace en utilisant les lettres seulement.) On doit compter le nombre de façons qu'il y a d'attribuer les positions de A à F aux six amis dans chacune des structures précédentes. Il faudra faire attention, car l'attribution

$$\begin{array}{ccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & A \\ P & & Q & & R & & P \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} D & \to & E & \to & F & \to & D \\ S & & T & & U & & S \end{array}$$

dans la première structure est la même que l'attribution

$$\begin{array}{ccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & A \\ U & & S & & T & & U \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} D & \to & E & \to & F & \to & D \\ Q & & P & & R & & Q \end{array}$$

mais elle est différente de l'attribution :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & A \\ P & & R & & Q & & P \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} D & \to & E & \to & F & \to & D \\ S & & T & & U & & S \end{array}$$

- 1re structure : $A \to B \to C \to A$ et $D \to E \to F \to D$
  Puisqu'il s'agit de deux cycles, la position d'une personne dans un cycle n'importe pas. On peut donc attribuer la position A à P.
  Il y a 5 personnes (tous sauf P) à qui on peut attribuer la position B.
  Pour chacun de ces 5 choix, il y a 4 personnes (tous sauf P et la personne dans la position B) à qui on peut attribuer la position C. Ceci complète le premier cycle.
  Les trois dernières personnes doivent former le deuxième cycle.
  On peut supposer que les trois dernières personnes sont S, T et U.
  On peut attribuer la position D à S.
  Il y a 2 personnes (T ou U) à qui on peut attribuer la position E.
  Dans chaque cas, il y a 1 personne à qui on peut attribuer la position F.
  Le nombre de façons d'attribuer les positions de cette structure est donc égal à $5 \times 4 \times 2 \times 1$, ou 40.
- 2e structure : $A \to B \to C \to D \to E \to F \to A$
  Puisqu'il s'agit d'un cycle, la position d'une personne dans le cycle n'importe pas. On peut donc attribuer la position A à P.
  Il y a 5 personnes (tous sauf P) à qui on peut attribuer la position B.
  Pour chacun de ces 5 choix, il y a 4 personnes (tous sauf P et la personne dans la position B) à qui on peut attribuer la position C.
  De même, il y a 3 choix pour la position D, 2 choix pour la position E et 1 choix pour la position F.
  Le nombre de façons d'attribuer les positions de cette structure est donc égal à $5\times4\times3\times2\times1$, ou 120.

Le nombre total de façons d'échanger les livres est donc égal à $40 + 120$, ou 160.

Réponse : (E)

25. Soit $S(n)$ la somme des chiffres du nombre n et soit $S(2n)$ la somme des chiffres du nombre $2n$. Dans le tableau ci-dessous, on indique comment chaque chiffre de n contribue à $S(2n)$. Le contenu du tableau sera justifié à la toute fin.

Chiffre de n	2×Chiffre	Contribution à $S(2n)$
0	0	0
1	2	2
2	4	4
3	6	6
4	8	8
5	10	$1 + 0 = 1$
6	12	$1 + 2 = 3$
7	14	$1 + 4 = 5$
8	16	$1 + 6 = 7$

On utilise les données du tableau pour répondre à la question. On sait que les chiffres de n ne comprennent aucun 9, mais qu'ils comprennent exactement quatre 8, trois 7 et deux 6 (et d'autres chiffres). Ces trois chiffres contribuent $4\cdot8+3\cdot7+2\cdot6$, ou 65, à $S(n)$. Les autres chiffres de n doivent donc contribuer $104 - 65$, ou 39, à cette somme.

Supposons que les chiffres de n comprennent m fois le chiffre 5. Cela contribue $5m$ à $S(n)$, et les autres chiffres de n, qui peuvent comprendre les chiffres de 0 à 4, contribuent $39 - 5m$ à la somme.
On considère maintenant les chiffres de $2n$.
D'après le tableau, les chiffres 8, 7 et 6 de n contribuent respectivement 7, 5 et 3 à $S(2n)$. Donc, les quatre 8, les trois 7 et les deux 6 de n contribuent $4 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3$, ou 49 à $S(2n)$.
Chaque chiffre 5 de n contribue 1 à $S(2n)$. Donc, les m chiffres 5 de n contribuent $m \cdot 1$, ou m à $S(2n)$.
Les chiffres de 0 à 4 de n contribuent deux fois plus à $S(2n)$ que ce qu'ils contribuent à $S(n)$. La somme de leurs contributions à $S(2n)$ est donc le double de la somme de leurs contributions à $S(n)$.
Puisqu'ils contribuent une somme de $39 - 5m$ à $S(n)$, alors ils contribuent une somme de $2(39 - 5m)$ à $S(2n)$.
Puisque $S(2n) = 100$, alors $49 + m + 2(39 - 5m) = 100$.
Donc $127 - 9m = 100$, d'où $9m = 27$, ou $m = 3$.
Donc, le chiffre 5 paraît trois fois dans n.

On doit maintenant justifier le contenu du tableau.
Supposons que n se termine par les chiffres $dcba$. Donc $n = \cdots dcba$.
On a donc $n = \cdots + 1000d + 100c + 10b + a$.
Donc $2n = \cdots + 1000(2d) + 100(2c) + 10(2b) + (2a)$. Or, les valeurs $2d$, $2c$, $2b$ et $2a$ peuvent être formées d'un ou deux chiffres.
Soit $u(2a)$ le chiffre des unités de $2a$ et soit $t(2a)$ le chiffre des dizaines de $2a$.
On sait que $u(2a)$ peut égaler 0, 2, 4, 6 ou 8, tandis que $t(2a)$ peut égaler 0 ou 1.
On définit $u(2b), t(2b), u(2c), t(2c), u(2d), t(2d)$ de la même façon.
On remarque que $2a = 10 \cdot t(2a) + u(2a)$, $2b = 10 \cdot t(2b) + u(2b)$, $2c = 10 \cdot t(2c) + u(2c)$ et $2d = 10 \cdot t(2d) + u(2d)$.
Donc :

$$\begin{aligned} 2n &= \cdots + 1000(10 \cdot t(2d) + u(2d)) + 100(10 \cdot t(2c) + u(2c)) \\ &\qquad\qquad +10(10 \cdot t(2b) + u(2b)) + (10 \cdot t(2a) + u(2a)) \\ &= \cdots + 1000(u(2d) + t(2c)) + 100(u(2c) + t(2b)) + 10(u(2b) + t(2a)) + u(2a) \end{aligned}$$

Puisque $u(2a), u(2b), u(2c), u(2d) \leq 8$ et $t(2a), t(2b), t(2c), t(2d) \leq 1$, alors chacune des expressions $u(2d)+t(2c)$, $u(2c)+t(2b)$, $u(2b)+t(2a)$ et $u(2a)$ représente un seul chiffre. Elles représentent respectivement le chiffre des milliers, des centaines, des dizaines et des unités de $2n$.
La somme des chiffres de $2n$ est donc égale à :

$$\begin{aligned} u(2a) + (u(2b) + t(2a)) + (u(2c) + t(2b)) + (u(2d) + t(2c)) + \cdots &= \\ (t(2a) + u(2a)) + (t(2b) + u(2b)) + (t(2c) + u(2c)) + \cdots & \end{aligned}$$

Cet argument peut aussi être utilisé pour les autres chiffres de n.
Donc si r est un chiffre de n, alors la somme des chiffres des unités et des dizaines de $2r$ contribue à la somme des chiffres de $2n$.
Donc, les chiffres de n contribuent à la somme des chiffres de $2n$ comme dans le tableau ci-haut.

Réponse : (D)

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Concours Cayley 2011

(10e année – Secondaire IV)

le jeudi 24 février 2011

Solutions

1. On regroupe les termes de $(5+2)+(8+6)+(4+7)+(3+2)$ pour les écrire sous la forme $5+(2+8)+(6+4)+(7+3)+2$, ce qui est égal à $5+10+10+10+2$, ou 37.
On aurait pu additionner directement.

RÉPONSE : (B)

2. Puisque $(-1)(2)(x)(4) = 24$, alors $-8x = 24$, d'où $x = \dfrac{24}{-8}$, ou $x = -3$.

RÉPONSE : (B)

3. *Solution 1*
Puisque l'angle PRS est un angle extérieur du triangle PQR, alors $\angle PQR + \angle QPR = \angle PRS$, ou $x^\circ + 75^\circ = 125^\circ$.
Donc $x + 75 = 125$, d'où $x = 50$.

Solution 2
Puisque QRS est un segment de droite, alors $\angle PRQ = 180^\circ - \angle PRS$, ou $\angle PRQ = 180^\circ - 125^\circ$, d'où $\angle PRQ = 55^\circ$.
Puisque la somme des mesures d'angles d'un triangle est égale à 180°, alors $x^\circ + 75^\circ + 55^\circ = 180^\circ$, ou $x + 130 = 180$, d'où $x = 50$.

RÉPONSE : (A)

4. *Solution 1*
On procède à rebours pour déterminer le nombre initial.
On ajoute 5 au nombre 16 pour obtenir 21. On divise ce nombre par 3 pour obtenir 7.
Il s'agit des opérations inverses de « diminuer de 5 » et de « multiplier par 3 ».

Solution 2
Soit x le nombre initial.
Après avoir triplé ce nombre et diminué le résultat de 5, on obtient $3x - 5$.
On a donc $3x - 5 = 16$, d'où $3x = 21$, ou $x = 7$.

RÉPONSE : (C)

5. On procède de l'intérieur vers l'extérieur :

$$\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}} = \sqrt{13+\sqrt{7+2}} = \sqrt{13+\sqrt{9}} = \sqrt{13+3} = \sqrt{16} = 4$$

RÉPONSE : (D)

6. Une ligne qui a une pente de 0 est une droite horizontale. Le plan Q contient une telle droite.

RÉPONSE : (B)

7. Puisque le dé est juste, il y a 6 choix équiprobables possibles.
On calcule la probabilité de chaque événement donné dans les choix de réponse.
Il y a 4 valeurs possibles de x qui vérifient $x > 2$. La probabilité est égale à $\frac{4}{6}$, ou $\frac{2}{3}$.
Il y a 2 valeurs possibles de x qui vérifient $x = 4$ ou $x = 5$. La probabilité est égale à $\frac{2}{6}$, ou $\frac{1}{3}$.
Il y a 3 valeurs possibles de x qui sont paires. La probabilité est égale à $\frac{3}{6}$, ou $\frac{1}{2}$.
Il y a 2 valeurs possibles de x qui vérifient $x < 3$. La probabilité est égale à $\frac{2}{6}$, ou $\frac{1}{3}$.
Il y a 1 valeur possible de x qui vérifie $x = 3$. La probabilité est égale à $\frac{1}{6}$.
L'événement le plus probable est « x est supérieur à 2 ».

RÉPONSE : (A)

8. Lorsque le nombre $2{,}4 \times 10^8$ est doublé, on obtient $2 \times 2{,}4 \times 10^8$, ou $4{,}8 \times 10^8$.

RÉPONSE : (C)

9. Puisque la face de la pièce a une aire de 5 cm^2 et que la pièce a une épaisseur de 0,5 cm, alors la pièce a un volume de $5 \times 0{,}5$ cm^3, ou 2,5 cm^3.
Puisque la pile a un volume de 50 cm^3 et que chaque pièce a un volume de 2,5 cm^3, alors le nombre de pièces dans la pile est égal à $50 \div 2{,}5$, ou 20.

RÉPONSE : (D)

10. Pour participer aux parties éliminatoires, les Athenas doivent gagner au moins 60 % de leurs 44 parties. Or 60 % de 44 est égal à $0{,}6 \times 44$, ou 26,4.
Puisque l'équipe doit gagner un nombre entier de parties, ce nombre doit être égal au plus petit entier supérieur à 26,4, c'est-à-dire 27.
Puisque l'équipe a déjà gagné 20 parties, elle doit gagner au moins 7 autres parties.

RÉPONSE : (E)

11. D'après la définition, $(3,1)\nabla(4,2) = (3)(4) + (1)(2) = 12 + 2 = 14$.

RÉPONSE : (D)

12. Le secteur qui représente le pourcentage d'élèves qui préfèrent les biscuits a un angle de 90°. Le secteur représente donc $\frac{1}{4}$ du disque. Donc, 25 % des élèves préfèrent les biscuits.
Le pourcentage des élèves qui préfèrent les sandwichs est donc égal à $100\,\% - 30\,\% - 25\,\% - 35\,\%$, ou 10 %.
Puisqu'il y a 200 élèves en tout et que 10 % de 200 est égal à $\frac{1}{10}$ de 200, c'est-à-dire à 20, il y a 20 élèves qui préfèrent les sandwichs.

RÉPONSE : (B)

13. *Solution 1*
On travaille de droite à gauche comme on le ferait pour un calcul papier-crayon.
Dans la colonne des unités, on a $L - 1 = 1$. Donc $L = 2$. Dans la colonne des dizaines, on a $3 - N = 5$. Il faut donc décomposer 1 centaine en 10 dizaines de manière à obtenir $13 - N = 5$. Donc $N = 8$. On a donc :

$$\begin{array}{rcccc} & & {\scriptstyle K-1} & {\scriptstyle 13} & \\ & 5 & \cancel{K} & \cancel{3} & 2 \\ - & M & 4 & 8 & 1 \\ \hline & 4 & 4 & 5 & 1 \end{array}$$

Dans la colonne des centaines, on a $(K - 1) - 4 = 4$, d'où $K = 9$. On a donc :

$$\begin{array}{rcccc} & 5 & 9 & 3 & 2 \\ - & M & 4 & 8 & 1 \\ \hline & 4 & 4 & 5 & 1 \end{array}$$

Dans la colonne des milliers, on a $5 - M = 4$, d'où $M = 1$.
La soustraction est donc $5932 - 1481 = 4451$, ce qui est correct.
La valeur de $K + L + M + N$ est donc égale à $9 + 2 + 1 + 8$, ou 20.

Solution 2
Puisque $5K3L - M4N1 = 4451$, alors :

$$\begin{array}{rcccc} & M & 4 & N & 1 \\ + & 4 & 4 & 5 & 1 \\ \hline & 5 & K & 3 & L \end{array}$$

On travaille de droite à gauche comme on le ferait pour un calcul papier-crayon.
Dans la colonne des unités, on a $1 + 1 = L$, d'où $L = 2$.
Dans la colonne des dizaines, on semble avoir $N + 5 = 3$. Or avec $N = 8$, on a $8 + 5 = 13$. Il y a donc une retenue de 1 dans la colonne des centaines. On a donc :

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 1} & & \\ M & 4 & 8 & 1 \\ + \; 4 & 4 & 5 & 1 \\ \hline 5 & K & 3 & 2 \end{array}$$

Dans la colonne des centaines, on a $1 + 4 + 4 = K$, d'où $K = 9$.
Dans la colonne des milliers, on a $M + 4 = 5$, d'où $M = 1$. On a donc :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 8 & 1 \\ + \; 4 & 4 & 5 & 1 \\ \hline 5 & 9 & 3 & 2 \end{array}$$

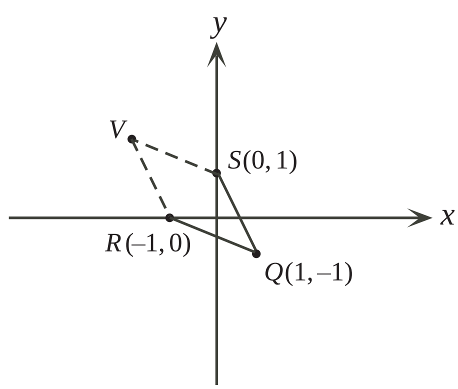
Cela est équivalent à $5932 - 4451 = 1481$, qui est correct.
La valeur de $K + L + M + N$ est donc égale à $9 + 2 + 1 + 8$, ou 20.

Réponse : (A)

14. La différence entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{12}$ est égale à $\frac{1}{6} - \frac{1}{12}$, ou $\frac{2}{12} - \frac{1}{12}$, ou $\frac{1}{12}$. Donc $LP = \frac{1}{12}$.
Puisque le segment LP est divisé en trois parties égales, chaque partie a une longueur égale à $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{12}$, ou $\frac{1}{3} \times \frac{1}{12}$, ce qui est égal à $\frac{1}{36}$.
Donc, M est situé à une distance de $\frac{1}{36}$ à la droite de L.
Donc, le nombre qui correspond au point M est égal à $\frac{1}{12} + \frac{1}{36}$, ou $\frac{3}{36} + \frac{1}{36}$, ce qui est égal à $\frac{4}{36}$, ou $\frac{1}{9}$.

Réponse : (C)

15. On place les trois points dans un plan cartésien.
On voit que le quatrième sommet V pourrait être placé dans le deuxième quadrant :



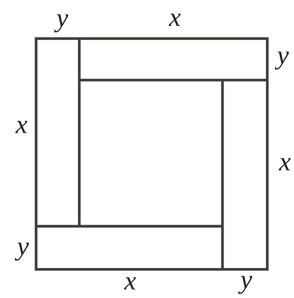
Si $VSQR$ est un parallélogramme, alors SV et QR sont parallèles et congrus.
Pour se déplacer de Q à R, on se déplace de 2 unités vers la gauche et de 1 unité vers le haut.
Donc, pour se déplacer de S à V, on se déplace de 2 unités vers la gauche et de 1 unité vers le haut. Puisque S a pour coordonnées $(0, 1)$, alors V a pour coordonnées $(0 - 2, 1 + 1)$, ou $(-2, 2)$.
Ceci correspont au choix de réponse (A).
Deux autres endroits pour le quatrième sommet sont possibles, soit $U(0, -2)$ et $W(2, 0)$.
On peut vérifier que les quadrilatères $SQUR$ et $SWQR$ sont des parallélogrammes. Or, $(0, -2)$ et $(2, 0)$ ne font pas partie des choix de réponse.
Parmi les choix de réponse, le point $(-2, 2)$ est le seul qui complète un parallélogramme.

Réponse : (A)

16. Après avoir acheté 7 boules de gomme, il est possible que Xavier ait reçu 2 boules rouges, 2 boules bleues, 1 boule noire et 2 boules vertes.
Il ne pourrait pas avoir plus de boules sans avoir au moins 3 boules d'une même couleur.
Si Xavier achète une boule de plus, ce sera une boule bleue, verte ou rouge.
Quel que soit le résultat, il aura au moins 3 boules d'une même couleur.
Pour résumer, si Xavier achète 7 boules de gomme, il n'est pas certain d'avoir 3 boules d'une même couleur, mais s'il achète 8 boules de gomme, il est certain d'avoir au moins 3 boules d'une même couleur.
Donc, pour s'assurer de recevoir 3 boules d'une même couleur, Xavier doit acheter un minimum de 8 boules.

Réponse : (E)

17. Soit x cm la longueur du grand côté d'un rectangle et y cm la longueur du plus petit.



Puisque chaque rectangle a un périmètre de 40 cm, alors $2x + 2y = 40$, ou $x + y = 20$.
Or, le grand carré a des côtés de longueur $(x + y)$ cm.
Donc, l'aire du grand carré, en cm^2, est égale à $(x + y)^2$, ou 20^2, ou 400.

Réponse : (C)

18. *Solution 1*
Lorsqu'un entier positif n est divisé par un entier positif x, le reste est égal à la différence entre n et le plus grand multiple de x inférieur à n. Lorsqu'on divise 100 par l'entier positif x, il y a un reste de 10.
Donc $100 - 10$, ou 90, est divisible par x. De plus, x doit être supérieur à 10, autrement le reste serait inférieur à 10.
Puisque 90 est divisible par x, alors 990 est aussi divisible par x, car $11 \times 90 = 990$.
Puisque $x > 10$, alors le multiple suivant de x, après 990, est $990 + x$. Ce nombre est supérieur à 1000.
Donc, 990 est le plus grand multiple de x inférieur à 1000. Lorsqu'on divise 1000 par x, le reste est égal à $1000 - 990$, ou 10.

Solution 2
Lorsqu'on divise 100 par l'entier positif x, il y a un reste de 10. Ce reste est égal à la différence entre 100 et le plus grand multiple de x inférieur à 100. Donc, le plus grand multiple de x inférieur à 100 est 90.
De plus, x doit être supérieur à 10, autrement le reste serait inférieur à 10.
On peut choisir $x = 15$, car $6 \times 15 = 90$ et 15 est supérieur à 10.
Quel est le reste si on divise 1000 par 15 ? D'après la calculatrice, $1000 \div 15 = 66{,}666\ldots$ et $66 \times 15 = 990$. Donc, la différence entre 1000 et le plus grand multiple de 15 inférieur à 1000 (c'est-à-dire 990) est égale à 10. Le reste est donc égal à 10.

Réponse : (A)

19. Soit $\angle XYW = \theta$.
Puisque le triangle XYW est isocèle et que $WX = WY$, alors $\angle YXW = \angle XYW = \theta$.
La somme des mesures des angles du triangle XYW est égale à $180°$. Donc $\angle XWY = 180° - 2\theta$.
Puisque $\angle XWY + \angle ZWY = 180°$, alors $\angle ZWY = 180° - (180° - 2\theta)$, ou $\angle ZWY = 2\theta$.
Puisque le triangle YWZ est isocèle et que $YW = YZ$, alors $\angle YZW = \angle ZWY = 2\theta$.
Puisque le triangle XYZ est isocèle et que $XY = XZ$, alors $\angle XYZ = \angle XZY = 2\theta$.
Puisque somme des mesures des angles du triangle XYZ est égale à $180°$, alors
$\angle XYZ + \angle XZY + \angle YXZ = 180°$, d'où $2\theta + 2\theta + \theta = 180°$, ou $5\theta = 180°$, ou $\theta = 36°$.

Réponse : (D)

20. L'expression $n^3 + 5n^2$ est le carré d'un entier si $\sqrt{n^3 + 5n^2}$ est un entier.
Or, $\sqrt{n^3 + 5n^2} = \sqrt{n^2(n + 5)} = \sqrt{n^2}\sqrt{n + 5} = n\sqrt{n + 5}$.
L'expression $n\sqrt{n + 5}$ est un entier si $\sqrt{n + 5}$ est un entier. Donc, $n+5$ doit être un carré parfait.
Puisque n prend ses valeurs entre 1 et 100, alors $n + 5$ prend ses valeurs entre 6 et 105.
Les carrés parfaits dans cet intervalle sont $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, …, $10^2 = 100$.
Il y a donc 8 carrés parfaits dans cet intervalle.
Il y a donc 8 valeurs de n pour lesquelles $\sqrt{n + 5}$ est un entier et pour lesquelles $n^3 + 5n^2$ est le carré d'un entier.

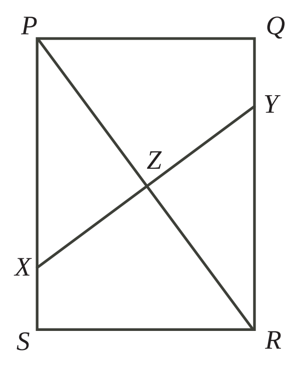
Réponse : (B)

21. *Solution 1*
On multiplie des deuxième et troisième équations, membre par membre, pour obtenir $x(y + 1)y(y + 1) = \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{18}$, ou $xy(x + 1)(x + 1) = \frac{35}{162}$.
D'après la première équation, $xy = \frac{1}{9}$.
Donc $\frac{1}{9}(x + 1)(y + 1) = \frac{35}{162}$, d'où $(x + 1)(y + 1) = 9(\frac{35}{162})$, ou $(x + 1)(y + 1) = \frac{35}{18}$.

Solution 2
On développe le membre de gauche de la deuxième équation pour obtenir $xy + x = \frac{7}{9}$.
D'après la première équation, $xy = \frac{1}{9}$. Donc $x = \frac{7}{9} - xy$, d'où $x = \frac{7}{9} - \frac{1}{9}$, ou $x = \frac{2}{3}$.
On développe le membre de gauche de la troisième équation pour obtenir $xy + y = \frac{5}{18}$.
Puisque $xy = \frac{1}{9}$ (troisième équation), alors $y = \frac{5}{18} - xy$, d'où $y = \frac{5}{18} - \frac{1}{9}$, ou $y = \frac{3}{18}$, ou $y = \frac{1}{6}$.
Donc $(x + 1)(y + 1)$ est égal à $(\frac{2}{3} + 1)(\frac{1}{6} + 1)$, ou $\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{6}$, ou $\frac{35}{18}$.

Réponse : (E)

22. Soit XY le pli. Il coupe ainsi PS en X, QR en Y et la diagonale PR en Z. On cherche donc la longueur de XY.



Puisque le sommet P se replie sur R, le segment PZ se replie sur le segment RZ. Ainsi $PZ = RZ$ et PR est perpendiculaire à XY.
Puisque $PS = RQ$ et $SR = QP$, les triangles rectangles PSR et RQP sont congruents.

Donc $\angle XPZ = \angle YRZ$.
Puisque $PZ = RZ$, les triangles rectangles PZX et RZY sont congruents (deux angles et le côté compris).
Donc $XZ = ZY$, d'où $XY = 2XZ$.
Puisque le triangle PSR est rectangle en S, alors selon le théorème de Pythagore, on a :

$$PR = \sqrt{PS^2 + SR^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

puisque $PR > 0$.
Puisque $PZ = RZ$, alors $PZ = 5$.
Or, les triangles rectangles PZX et PSR sont semblables (ils ont un angle commun P). Donc $\dfrac{XZ}{PZ} = \dfrac{RS}{PS}$, d'où $XZ = \frac{5 \cdot 6}{8}$, ou $XZ = \frac{30}{8}$, ou $XZ = \frac{15}{4}$.
Donc $XY = 2 \times \frac{15}{4}$, d'où $XY = \frac{15}{2}$, ou $XY = 7{,}5$. Le pli a donc une longueur de 7,5 cm.

Réponse : (C)

23. On calcule d'abord combien on peut former de paires de nombres parmi les entiers de 1 à n.
Il y a n façons de choisir le premier nombre. Pour chacun de ces choix, il y a $n-1$ façons de choisir le deuxième nombre. En tout, il y a $n(n-1)$ façons de choisir deux nombres.
Or selon cette façon de choisir, chaque paire de nombres est comptée deux fois. Par exemple, on compterait 1 suivi de 3 ainsi que 3 suivi de 1.
Il faut donc diviser le nombre $n(n-1)$ par 2. On peut donc former $\frac{1}{2}n(n-1)$ paires de nombres.

On porte maintenant attention au nombre de rangées dans le tableau.
Puisque chaque rangée compte trois nombres, chaque rangée compte trois paires (les 1er et 2e nombres, les 1er et 3e nombres, les 2e et 3e nombres).
Supposons que le tableau au complet compte r rangées.
Le tableau compte donc un total de $3r$ paires.
Puisque chaque paire d'entiers de la liste de 1 à n paraît exactement une fois dans le tableau et que le nombre total de paires est égal à $\frac{1}{2}n(n-1)$, alors $3r = \frac{1}{2}n(n-1)$. Donc, $\frac{1}{2}n(n-1)$ doit être divisible par 3, puisque $3r$ est divisible par 3.
On construit un tableau indiquant les valeurs possibles de n et les valeurs correspondantes de $\frac{1}{2}n(n-1)$:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{2}n(n-1)$	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

Puisque $\frac{1}{2}n(n-1)$ doit être divisible par 3, alors les valeurs possibles de n sont 3, 4, 6, 7, 9, 10 et 12.
On considère un entier particulier m de la liste des entiers de 1 à n.
Dans chaque rangée qui contient m, il y aura 2 paires qui contiennent m, soit une paire avec chacun des deux autres nombres de la rangée.
Si m paraît dans s rangées, il paraîtra donc dans $2s$ paires.
Donc, chaque nombre m doit paraître dans un nombre pair de paires.
Or, on sait que chaque m de la liste des entiers de 1 à n doit paraître dans $n-1$ paires (une fois avec chaque membre de la liste). Donc $n-1$ doit être pair et n doit donc être impair.
Les valeurs possibles de n sont donc 3, 7 et 9.
Il reste à démontrer que l'on peut créer un tableau de Fano pour chacune de ces valeurs de n.
Le tableau de Fano donné correspond à $n = 7$.
Lorsque $n = 3$, le tableau contiendra 3 paires et puisque $3 \div 3 = 1$, il contiendra 1 rangée.
Lorsque $n = 9$, le tableau contiendra 36 paires et puisque $36 \div 3 = 12$, il contiendra 12 rangées.
Voici un tableau possible pour $n = 3$ et un autre pour $n = 9$:

1	2	3

1	2	3
1	4	5
1	6	7
1	8	9
2	4	7
2	5	8
2	6	9
3	4	9
3	5	6
3	7	8
4	6	8
5	7	9

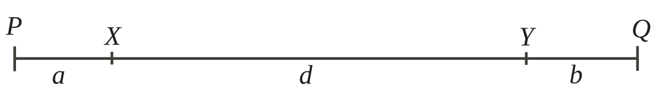
Il y a donc 3 valeurs de n, dans l'intervalle $3 \leq n \leq 12$, pour lesquelles on peut former un tableau de Fano.

RÉPONSE : (B)

24. On remarque que l'on peut changer des personnes l'une pour l'autre. Il n'est pas important de spécifier qui marche et qui se promène en moto. On nomme les trois personnes A, D et E.
Le point de départ est nommé P et le point d'arrivée est nommé Q.
Voici une stratégie dans laquelle les trois personnes avancent à tous moments et arrivent au point P en même temps :

A et D montent en moto, tandis que E marche.
A et D se rendent en moto à un point Y situé avant le point Q.
A laisse D et retourne en moto, tandis que D et E marchent vers le point Q.
A rencontre E au point X.
E monte sur la moto et avec A, se déplace vers le point Q de manière à arriver au point Q en même temps que D.
Le point Y est choisi de manière que A, D et E arrivent en même temps au point Q.

Soit a km la distance de P à X, d km la distance de X à Y et b km la distance de Y à Q.



Pendant que E marche de P à X à une vitesse de 6 km/h, A se déplace en moto de P à Y et de retour jusqu'à X à une vitesse de 90 km/h. Or, la distance de P à X est de a km, tandis que la distance de P à Y, puis de Y à X est de $(a + d + d)$ km, ou $(a + 2d)$ km.
Puisque E et A mettent le même temps pour effectuer ces trajets, alors $\dfrac{a}{6} = \dfrac{a + 2d}{90}$, d'où $15a = a + 2d$, ou $7a = d$.

Pendant que D marche de Y à Q à une vitesse de 6 km/h, A se rend de Y à X et de X à Q à une vitesse de 90 km/h.
Or, la distance de Y à Q est de b km, tandis que la distance de Y à X et de X à Q est de $(d + d + b)$ km, ou $(b + 2d)$ km.
Puisque D et A mettent le même temps pour effectuer ces trajets, alors $\dfrac{b}{6} = \dfrac{b + 2d}{90}$, d'où $15b = b + 2d$, ou $7b = d$.

Donc $d = 7a = 7b$. On peut conclure que $b = a$.
La distance totale de P à Q est égale à $(a + d + b)$ km, ou $(a + 7a + a)$ km, ou $9a$ km.
Or, on sait que cette distance est de 135 km. Donc $9a = 135$, ou $a = 15$.

On rappelle que A se déplace de P à Y à X à Q, une distance de $[(a+7a)+7a+(7a+a)]$ km, ou $23a$ km.
Puisque $a = 15$ km et que A se déplace à une vitesse de 90 km/h, le temps qu'elle met pour effectuer cette stratégie est égal à $\frac{23\times 15}{90}$ h, ou $\frac{23}{6}$ h, ou environ 3,83 h.
Puisque cette stratégie prend 3,83 h, alors la plus petite valeur possible de t ne peut dépasser 3,83 h. Peux-tu expliquer pourquoi il s'agit bien de la plus petite valeur possible de t ?

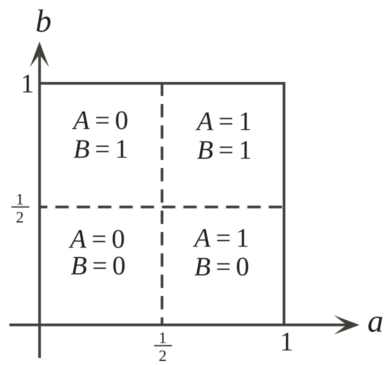
Si on n'avait pas pensé à la stratégie précédente, on aurait pu penser à la suivante :

A et D montent en moto, tandis que E marche.
A et D se rendent jusqu'au point Q.
A laisse D au point Q et retourne rencoutrer E qui marche toujours.
D laisse E monter sur la moto et les deux se rendent à Q. (D se repose au point Q.)

Cette stratégie met 4,125 h, ce qui est supérieur au temps requis par la stratégie précédente, car D ne bouge pas pendant un certain temps.

Réponse : (A)

25. Par définition, si $0 \leq a < \frac{1}{2}$, alors $A = 0$ et si $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$, alors $A = 1$.
De même, si $0 \leq b < \frac{1}{2}$, alors $B = 0$ et si $\frac{1}{2} \leq b \leq 1$, alors $B = 1$.
On tient compte des renseignements sur le repère orthonormé (les axes sont perpendiculaires et sont dotés de la même échelle) suivant.



Les couples possibles (a, b) forment un carré de 1 sur 1 qui a donc une aire de 1.
On détermine les ensembles pour lesquels $C = 2A+2B$ et on calcule l'aire totale des régions qui les représentent.
On considère quatre cas. Dans chacun de ces cas, on traitera d'une droite ayant une équation de la forme $a + b = Z$, Z étant un nombre quelconque. On peut récrire ces équations sous forme $b = -a + Z$, ce qui indique que chaque droite a une pente de -1 et une ordonnée à l'origine égale à Z. Puisque les droites ont une pente de -1, leur abscisse à l'origine est aussi égale à Z.

<u>1^er^ cas : $A = 0$ et $B = 0$</u>
C est égal à $2A + 2B$ lorsque $C = 0$.
Puisque C est obtenu en arrondissant la valeur de c, il faut donc que $0 \leq c < \frac{1}{2}$.
Puisque $c = 2a + 2b$ par définition, il faut donc que $0 \leq 2a + 2b < \frac{1}{2}$, ou $0 \leq a + b < \frac{1}{4}$.
Il s'agit des points du carré qui sont au-dessus de la droite d'équation $a + b = 0$ et au-dessous de la droite d'équation $a + b = \frac{1}{4}$.

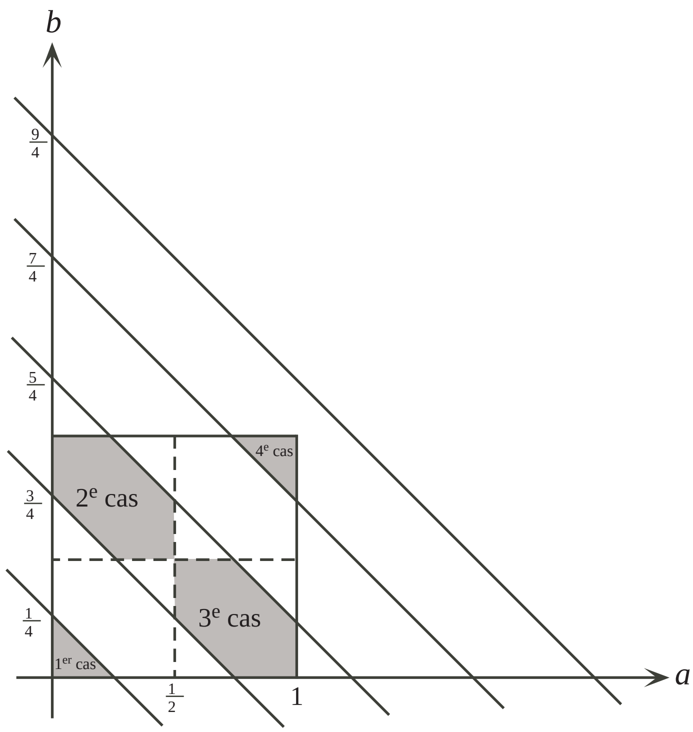
<u>2^e^ cas : $A = 0$ et $B = 1$</u>
C est égal à $2A + 2B$ lorsque $C = 2$.
Puisque C est obtenu en arrondissant la valeur de c, il faut donc que $\frac{3}{2} \leq c < \frac{5}{2}$.
Puisque $c = 2a + 2b$ par définition, il faut donc que $\frac{3}{2} \leq 2a + 2b < \frac{5}{2}$, ou $\frac{3}{4} \leq a + b < \frac{5}{4}$.

Il s'agit des points du carré qui sont au-dessus de la droite d'équation $a + b = \frac{3}{4}$ et au-dessous de la droite d'équation $a + b = \frac{5}{4}$.

<u>3^e cas : $A = 1$ et $B = 0$</u>
C est égal à $2A + 2B$ lorsque $C = 2$.
Puisque C est obtenu en arrondissant la valeur de c, il faut donc que $\frac{3}{2} \leq c < \frac{5}{2}$.
Puisque $c = 2a + 2b$ par définition, il faut donc que $\frac{3}{2} \leq 2a + 2b < \frac{5}{2}$, ou $\frac{3}{4} \leq a + b < \frac{5}{4}$.
Il s'agit des points du carré qui sont au-dessus de la droite d'équation $a + b = \frac{3}{4}$ et au-dessous de la droite d'équation $a + b = \frac{5}{4}$.

<u>4^e cas : $A = 1$ et $B = 1$</u>
C est égal à $2A + 2B$ lorsque $C = 4$.
Puisque C est obtenu en arrondissant la valeur de c, il faut donc que $\frac{7}{2} \leq c < \frac{9}{2}$.
Puisque $c = 2a + 2b$ par définition, il faut donc que $\frac{7}{2} \leq 2a + 2b < \frac{9}{2}$, ou $\frac{7}{4} \leq a + b < \frac{9}{4}$.
Il s'agit des points du carré qui sont au-dessus de la droite d'équation $a + b = \frac{7}{4}$ et au-dessous de la droite d'équation $a + b = \frac{9}{4}$.

Les régions définies par les ensembles de points obtenus sont ombrées :



Les régions ombrées représentent les points (a, b) pour lesquels $2A + 2B = C$. Pour déterminer la probabilité, on calcule l'aire totale des régions ombrées et on la divise par l'aire de la région qui représente tous les points (a, b) possibles. Cette dernière région a une aire de 1. Donc, la probabilité sera égale à l'aire totale des régions ombrées.

La région qui représente le 1^{er} cas est un triangle rectangle ayant une base de $\frac{1}{4}$ et une hauteur de $\frac{1}{4}$. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{32}$.
La région qui représente le 4^e cas est aussi un triangle rectangle ayant une base de $\frac{1}{4}$ et une hauteur de $\frac{1}{4}$. En effet, la droite d'équation $a+b = \frac{7}{4}$ coupe le dessus du carré (la droite d'équation $b = 1$) lorsque $a = \frac{3}{4}$ et elle coupe le côté droit du carré (la droite d'équation $a = 1$) lorsque $b = \frac{3}{4}$.
La région du 2^e cas est congruente à celle du 3^e cas. Les deux régions ont donc la même aire.
La région du 2^e cas est un petit carré (d'aire $\frac{1}{4}$) dont on a enlevé deux petits triangles ayant

chacun une base de $\frac{1}{4}$ et une hauteur de $\frac{1}{4}$. (On peut le confirmer en déterminant les points d'intersection, comme pour le 4e cas.)
Donc, l'aire de la région ombrée du 2e cas est égale à $\frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{4} - \frac{1}{16}$, ou $\frac{3}{16}$.

L'aire totale des régions ombrées est donc égale à $\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16}$, ou $\frac{14}{32}$, ou $\frac{7}{16}$.
La probabilité demandée est donc égale à $\frac{7}{16}$.

(Parce que le calcul de la probabilité est équivalent au calcul des aires, il n'est pas nécessaire de porter une attention particulière aux points frontaliers qui sont inclus dans certaines régions ou exclus.)

Réponse : (D)

Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Cayley 2010

(10e année – Secondaire IV)

le jeudi 25 février 2010

Solutions

1. On a $6 + 4 \div 2 = 6 + 2 = 8$.

Réponse : (D)

2. Lorsque l'aiguille fait un tour complet, elle balaie un angle de 360°. Puisque les 12 numéros sur le cadran sont également espacés, l'angle balayé par l'aiguille entre deux numéros consécutifs est de 30° (car $360^\circ \div 12 = 30^\circ$).
Pour balayer un angle de 120°, l'aiguille doit donc se déplacer de 4 numéros dans le sens des aiguilles d'une montre (car $120^\circ \div 30^\circ = 4$).
L'aiguille indiquera donc le 4.

Réponse : (C)

3. Puisque $x + \sqrt{25} = \sqrt{36}$, alors $x + 5 = 6$, d'où $x = 1$.

Réponse : (A)

4. On a $\dfrac{1}{2 + \frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\frac{8}{3}} = \dfrac{3}{8}$.

Réponse : (E)

5. Puisque l'aire d'un rectangle est égale au produit de la longueur et de la largeur, alors la largeur est égale à l'aire divisée par la longueur.
Donc, la largeur est égale à $\frac{1}{3} \div \frac{3}{5}$, ou $\frac{1}{3} \times \frac{5}{3}$, ou $\frac{5}{9}$.

Réponse : (B)

6. Les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°. Donc $3x^\circ + x^\circ + 6x^\circ = 180^\circ$, d'où $10x = 180$, ou $x = 18$.
Le plus grand angle du triangle mesure $6x^\circ$, soit $6(18^\circ)$, ou 108°.

Réponse : (E)

7. *Solution 1*
Puisque les cinq entiers consécutifs ont une moyenne de 9, le nombre du milieu est 9.
Les entiers sont donc 7, 8, 9, 10 et 11. Le plus petit des cinq entiers est 7.

Solution 2
Soit x le plus petit des cinq entiers consécutifs.
Les cinq entiers sont donc x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ et $x + 4$.
La moyenne des entiers est égale à $\dfrac{x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4)}{5}$, ou $\dfrac{5x + 10}{5}$, ou $x + 2$. Puisque la moyenne est égale à 9, alors $x + 2 = 9$, d'où $x = 7$.
Le plus petit des cinq entiers est 7.

Réponse : (D)

8. Puisque le carré $PQRS$ a une aire de 900, ses côtés ont une longueur de 30 (car $\sqrt{900} = 30$).
Donc $PQ = PS = 30$.
Puisque M et N sont les milieux respectifs de PQ et de PS, alors $PN = PM = 15$.
Puisque $PQRS$ est un carré, l'angle P est droit. Le triangle PMN est donc rectangle.
L'aire du triangle PMN est égale à $\frac{1}{2}(PM)(PN)$, soit $\frac{1}{2}(15)(15)$, ou $\frac{225}{2}$, ou 112,5.

On aurait pu couper le carré en 8 triangles, tous congruents au triangle PMN. (Voyez-vous comment s'y prendre ?) Il s'ensuit que l'aire du triangle PMN est égale à $\frac{1}{8}$ de l'aire du carré, soit $\frac{1}{8}(30^2)$, ou 112,5.

Réponse : (B)

9. *Solution 1*
Puisque deux côtés du triangle sont situés sur les axes, le triangle est rectangle.
Puisque le triangle doit être isocèle, ses deux autres angles doivent mesurer $45°$.
Or, une droite forme un angle de $45°$ avec les deux axes si elle a une pente de 1 ou de -1.
Parmi les équations données, seule $y = -x + 4$ représente une telle droite.

Solution 2
Les sommets d'un triangle formé de la façon décrite dans l'énoncé sont les points d'intersection des droites qui forment les côtés.
Le point d'intersection de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées est le point $(0, 0)$.
La droite d'équation $y = -x + 4$ coupe l'axe des ordonnées au point $(0, 4)$. Elle coupe l'axe des abscisses au point pour lequel $y = 0$, d'où $0 = -x + 4$, ou $x = 4$. Elle coupe donc l'axe au point $(4, 0)$.
Les sommets du triangle formé par la droite d'équation $y = -x + 4$ sont $(0, 0)$, $(0, 4)$ et $(4, 0)$.
Le triangle est isocèle, puisque ses cathètes ont une même longueur de 4.
Donc, la droite d'équation $y = -x + 4$ forme un triangle isocèle, puisqu'un seul choix de réponse est juste.

Réponse : (C)

10. Puisque le rapport du nombre de garçons au nombre de filles à l'école secondaire Cayley est de $3 : 2$, alors $\frac{3}{5}$ des élèves de l'école Cayley sont des garçons (car $\frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$).
Le nombre de garçons à l'école Cayley est donc égal à $\frac{3}{5}(400)$, c'est-à-dire $3(\frac{400}{5})$, ou 240.
Le nombre de filles à l'école Cayley est donc égal à $400 - 240$, ou 160.
Puisque le rapport du nombre de garçons au nombre de filles à l'école secondaire Fermat est de $2 : 3$, alors $\frac{2}{5}$ des élèves de l'école Fermat sont des garçons (car $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$).
Le nombre de garçons à l'école Fermat est donc égal à $\frac{2}{5}(600)$, c'est-à-dire $2(\frac{600}{5})$, ou 240.
Le nombre de filles à l'école Fermat est donc égal à $600 - 240$, ou 360.
Le nombre total de garçons dans les deux écoles est égal à $240 + 240$, ou 480. Le nombre total de filles dans les deux écoles est égal à $160 + 360$, ou 520.
Le rapport du nombre total de garçons au nombre total de filles est donc égal à $480 : 520$, ou $48 : 52$, ou $12 : 13$.

Réponse : (B)

11. On remarque que x et y ne peuvent pas prendre des valeurs égales, puisque $x + y$ est impair.
On considère les cas où $x > y$.
On écrit les 15 valeurs de x et les valeurs correspondantes de y et de xy :

x	y	xy	x	y	xy	x	y	xy
30	1	30	25	6	150	20	11	220
29	2	58	24	7	168	19	12	228
28	3	84	23	8	184	18	13	234
27	4	108	22	9	198	17	14	238
26	5	130	21	10	210	16	15	240

La plus grande valeur de xy est 240.
On remarque que la plus grande valeur est obtenue lorsque les valeurs de x et de y sont aussi près l'une de l'autre que possible.
Les cas où $x < y$ nous donnent exactement les mêmes résultats. On peut le constater en inversant x et y dans le haut du tableau.

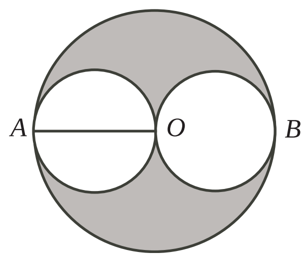
Réponse : (A)

12. *Solution 1*
Puisque le prix en solde du MP3 est réduit de 20 %, alors son prix en solde, soit 112 \$, est égal à 80 %, ou $\frac{4}{5}$ du prix régulier.
Donc $\frac{1}{5}$ du prix régulier correspond à 28 \$ (puisque $112\,\$ \div 4 = 28\,\$$).
Donc, le prix régulier est de 140 \$ (puisque $28\,\$ \times 5 = 140\,\$$).
Si le prix régulier avait été réduit de 30 %, le prix en solde serait égal à 70 % du prix régulier, soit $\frac{7}{10}(140\,\$)$, ou 98 \$.

Solution 2
Soit x \$ le prix régulier du MP3.
Puisque le prix en solde du MP3 est réduit de 20 %, alors son prix en solde est égal à 80 % du prix régulier, soit $\frac{80}{100}x$, ou $\frac{8}{10}x$.
Donc $\frac{8}{10}x = 112$.
Si le prix régulier avait été réduit de 30 %, le prix en solde serait égal à 70 % du prix régulier, ou $\frac{7}{10}x$. Or $\frac{7}{10}x = \frac{7}{8}\left(\frac{8}{10}x\right) = \frac{7}{8}(112) = 98$.
Donc, le prix en solde serait de 98 \$.

Réponse : (E)

13. Soit O le centre du grand cercle et A et B les points de contact du grand cercle avec les petits cercles. On trace le rayon OA du grand cercle.



Puisque le petit cercle et le grand cercle se touchent en A, alors le diamètre d'extrémité A du petit cercle est situé sur le diamètre d'extrémité A du grand cercle. (En effet, chaque diamètre est perpendiculaire à la tangente commune au point de contact.)
Puisque AO est un rayon du grand cercle, il est un diamètre du petit cercle. Puisque le grand cercle a un rayon de 6, le petit cercle a un diamètre de 6. Il a donc un rayon de 3.
De la même manière, on peut tracer le rayon OB du grand cercle et conclure que le petit cercle à droite a un rayon de 3.
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du grand cercle moins l'aire des deux petits cercles.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $6^2\pi - 3^2\pi - 3^2\pi$, ou $36\pi - 9\pi - 9\pi$, ou 18π.

Réponse : (D)

14. Puisque b est un entier strictement positif, alors $b^2 \geq 1$. Donc $a^2 \leq 49$. Puisque a est un entier strictement positif, alors $1 \leq a \leq 7$.
Si $a = 7$, alors $b^2 = 50 - 7^2$, ou $b^2 = 1$. Donc $b = 1$.
Si $a = 6$, alors $b^2 = 50 - 6^2$, ou $b^2 = 14$. Aucune valeur entière de b ne vérifie cette équation.
Si $a = 5$, alors $b^2 = 50 - 5^2$, ou $b^2 = 25$. Donc $b = 5$.
Si $a = 4$, alors $b^2 = 50 - 4^2$, ou $b^2 = 34$. Aucune valeur entière de b ne vérifie cette équation.
Si $a = 3$, alors $b^2 = 50 - 3^2$, ou $b^2 = 41$. Aucune valeur entière de b ne vérifie cette équation.
Si $a = 2$, alors $b^2 = 50 - 2^2$, ou $b^2 = 46$. Aucune valeur entière de b ne vérifie cette équation.
Si $a = 1$, alors $b^2 = 50 - 1^2$, ou $b^2 = 49$. Donc $b = 7$.
Il y a donc 3 couples (a, b) qui vérifient l'équation, soit $(7, 1), (5, 5)$ et $(1, 7)$.

Réponse : (C)

15. Puisque les pièces de 1 \$, dans le sac, ont une valeur totale de 400 \$, alors il y a 400 pièces de 1 \$ dans le sac.
Puisq'une pièce de 1 \$ a la même masse que 4 pièces de 10 ¢, alors 400 pièces de 1 \$ ont la même masse que 1600 pièces de 10 ¢ (car $4(400) = 1600$).
Donc, le sac qui contient les pièces de 10 ¢ contient 1600 pièces. Les pièces de 10 ¢ dans ce sac ont une valeur totale de 160 \$.

Réponse : (C)

16. La somme des entiers impairs de 5 à 21 est égale à :

$$5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 117$$

Donc, la somme des nombres dans n'importe quelle rangée est égale à un tiers de cette somme, soit 39.
La somme des nombres dans n'importe quelle colonne ou n'importe quelle diagonale est aussi égale à 39.
Puisque les nombres de la 2^{e} rangée ont une somme de 39, alors le 2^{e} nombre est égal à 13, car $9 + 13 + 17 = 39$.
Puisque les nombres de la 2^{e} colonne ont une somme de 39, alors le 3^{e} nombre est égal à 21, car $5 + 13 + 21 = 39$.

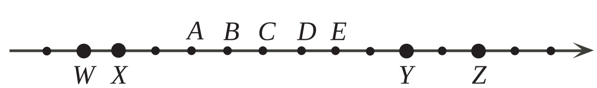
	5	
9	13	17
x	21	

Puisque les nombres de la 3^{e} rangée ont une somme de 39, alors le 3^{e} nombre est égal à $39-x-21$, ou $18 - x$.
Puisque les nombres de la diagonale qui contient x ont une somme de 39, alors le nombre de la case supérieure droite est égal à $39 - x - 13$, ou $26 - x$.
Puisque les nombres de la 3^{e} colonne ont une somme de 39, alors $(26 - x) + 17 + (18 - x) = 39$, d'où $61 - 2x = 39$, ou $2x = 22$, ou $x = 11$.
Le carré magique au complet est donc :

19	5	15
9	13	17
11	21	7

Réponse : (B)

17. Soit W, X, Y et Z les nombres qui correspondent aux gros points.



Deux de ces nombres sont des multiples de 5. Or, les multiples de 5 diffèrent l'un de l'autre par un multiple de 5. On compare donc les nombres W, X, Y et Z deux à deux au moyen de la soustraction. On a $X - W = 1$, $Y - W = 9$, $Y - X = 8$, $Z - W = 11$, $Z - X = 10$ et $Z - Y = 2$. Seuls X et Z diffèrent l'un de l'autre par un multiple de 5. Donc, X et Z doivent être les deux nombres qui sont des multiples de 5.

Le multiple de 5 qui suit X est 5 de plus que X. Il s'agit donc de D. On voit aussi que Z est 5 de plus que D.
Donc, D est le seul multiple de 5 parmi A, B, C, D, E.
Puisque D est le seul des cinq nombres qui est multiple de 5, alors D doit être le multiple de 15. (On peut démontrer, par un argument semblable, que W et Y sont les multiples de 3 et de là, que D est aussi un multiple de 3.)

Réponse : (D)

18. Puisque le triangle PQR est isocèle, alors $\angle PRQ = \angle PQR = 2x^\circ$.
Puisque les angles PRQ et SRT sont opposés par le sommet, alors $\angle SRT = \angle PRQ = 2x^\circ$.
Puisque le triangle RST est isocèle et que $RS = RT$, alors :

$$\angle RST = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle SRT) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 2x^\circ) = 90^\circ - x^\circ = (90 - x)^\circ$$

Réponse : (E)

19. Soit ABC un entier positif de trois chiffres.
Le chiffre A peut prendre 9 valeurs différentes (soit les chiffres de 1 à 9), tandis que les chiffres B et C peuvent chacun prendre 10 valeurs différentes (soit les chiffres de 0 à 9).
On veut compter le nombre d'entiers qui ont exactement un chiffre pair. On considère chaque position séparément.
Supposons que A est pair et que B et C sont impairs.
Il y a 4 valeurs possibles de A (soit 2, 4, 6 ou 8) et pour chacune de ces valeurs, il y a 5 valeurs possibles de B et 5 valeurs possibles de C (soit 1, 3, 5, 7 ou 9). Dans ce cas, le nombre d'entiers est égal à $4 \times 5 \times 5$, ou 100.
Supposons que B est pair et que A et C sont impairs.
Il y a 5 valeurs possibles de B (soit 0, 2, 4, 6 et 8) et pour chacune de ces valeurs, il y a 5 valeurs possibles de A et 5 valeurs possibles de C (soit 1, 3, 5, 7 et 9). Dans ce cas, le nombre d'entiers est égal à $5 \times 5 \times 5$, ou 125.
Supposons que C est pair et que A et B sont impairs.
Il y a 5 valeurs possibles de C (soit 0, 2, 4, 6 et 8) et pour chacune de ces valeurs, il y a 5 valeurs possibles de A et 5 valeurs possibles de B (soit 1, 3, 5, 7 et 9). Dans ce cas, le nombre d'entiers est égal à $5 \times 5 \times 5$, ou 125. (Ce cas est semblable au deuxième cas.)
En tout, le nombre d'entiers est égal à $100 + 125 + 125$, ou 350.

Réponse : (A)

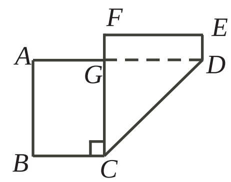
20. *Solution 1*
Il est plus facile de comparer les deux membres de l'inéquation si les expressions ont le même exposant. On remarque que $n^{200} = (n^2)^{100}$ et que $3^{500} = (3^5)^{100}$. L'inéquation devient donc $(n^2)^{100} < (3^5)^{100}$.
Puisque n est un entier strictement positif, alors l'inéquation est équivalente à $n^2 < 3^5$, ou $n^2 < 243$.
Or $15^2 = 225$ et $16^2 = 256$; de plus, si $n \geq 16$, alors $n^2 \geq 256$.
Donc, le plus grand entier positif n qui satisfait à l'inéquation est 15.

Solution 2
Puisque n est un entier positif et que $500 = 200(2{,}5)$, alors $n^{200} < 3^{500}$ est équivalent à $n^{200} < (3^{2{,}5})^{200}$, ce qui est équivalent à $n < 3^{2{,}5}$, ou $n < 3^2 3^{0{,}5}$, ou $n < 9\sqrt{3}$.
Puisque $9\sqrt{3} \approx 15{,}59$ et que n est un entier, alors le plus grand entier positif n qui satisfait à l'inéquation est 15.

Réponse : (C)

21. *Solution 1*

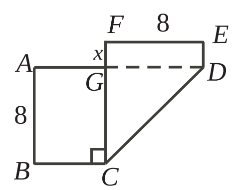
La feuille de papier initiale a une aire de $17(8)$ cm^2, ou 136 cm^2.



Lorsque la feuille est pliée comme dans la figure, le quadrilatère $CDEF$ qui est visible provient du dessous de la feuille en position initiale.)
Une partie de la feuille en position initiale est maintenant cachée. Elle est congruente au triangle CDG. Donc, l'aire de la nouvelle figure est égale à l'aire de la feuille initiale moins l'aire du triangle CDG.
Le triangle CDG a une hauteur GC de 8 cm (c'est-à-dire la largeur du rectangle), il est rectangle (puisque les deux portions du bord inférieur de la feuille initiale forment un angle droit) et $GD = 8$ cm.
Donc, l'aire du triangle CDG est égale à $\frac{1}{2}(8)(8)$ cm^2, ou 32 cm^2.
Donc, l'aire de la nouvelle figure est égale à $(136 - 32)$ cm^2, ou 104 cm^2.

Solution 2

On nomme les sommets de la nouvelle figure comme suit :



On cherche l'aire de la figure $ABCDEFG$.
Soit $FG = x$.
Puisque le quadrilatère $AGCB$ admet trois angles droits (soit en A, en B et en C), il est un rectangle et FC est perpendiculaire à AD.
Puisque le quadrilatère $DEFG$ admet trois angles droits (soit en E, en F et en G), il est un rectangle.
On sait que $FE = AB = 8$, puisque FE et AB sont les hauteurs du rectangle initial.
Puisque $AGCB$ et $DEFG$ sont des rectangles, alors $GC = AB = 8$, d'où $GD = FE = 8$.
On remarque que BC, CG et GF formaient le bord inférieur du rectangle initial.
Donc $BC + CG + GF = 17$, d'où $BC = 17 - 8 - x$, ou $BC = 9 - x$.
L'aire du rectangle $AGCB$ est égale à $8(9 - x)$, ou $72 - 8x$.
L'aire du rectangle $DEFG$ est égale à $8x$.
L'aire du triangle CGD (qui est rectangle en G) est égale à $\frac{1}{2}(8)(8)$, ou 32.
Donc, l'aire de la figure $ABCDEFG$ est égale à $[(72 - 8x) + 8x + 32]$ cm^2, ou 104 cm^2.

Réponse : (A)

22. *Solution 1*

Soit $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2009}, x_{2010}$ les termes de la suite.
Soit S la somme de chaque deuxième terme, en commençant par le premier et en terminant par l'avant dernier. Donc :

$$S = x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{2007} + x_{2009}$$

On sait que la somme de tous les termes est égale à 5307, c'est-à-dire que :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{2009} + x_{2010} = 5307$$

On compare ensuite les termes comme suit : le deuxième au premier, le quatrième au troisième, le sixième au cinquième, et ainsi de suite. Dans chaque cas, le nombre qui suit est 1 de plus que le nombre précédent, c'est-à dire que $x_2 = x_1 + 1$, $x_4 = x_3 + 1$, $x_6 = x_5 + 1$ et ainsi de suite.
Donc, chacun des 1005 termes $x_2, x_4, x_6, \ldots$ est 1 de plus que le terme correspondant de la liste $x_1, x_3, x_5, \ldots$
Donc $x_2 + x_4 + x_6 + \cdots + x_{2010}$ est 1005 de plus que $x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{2009}$.
Donc $x_2 + x_4 + x_6 + \cdots + x_{2010} = S + 1005$.
Puisque la somme de tous les termes est égale à la somme de $x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{2009}$ plus la somme de $x_2 + x_4 + x_6 + \cdots + x_{2010}$, ou $S + 1005$, elle est égale à $S + (S + 1005)$. Donc $S + (S + 1005) = 5307$, d'où $2S = 4302$, ou $S = 2151$.
Donc, si on additionne chaque deuxième terme, en commençant par le premier et en terminant par l'avant dernier, on obtient une somme de 2151.

Solution 2

Soit x le premier terme.
Puisque chaque terme après le premier est 1 de plus que le terme précédent, la suite est $x, x + 1, x + 2, \ldots, x + 2008, x + 2009$.
Puisque la somme des 2010 termes est égale à 5307, alors :

$$\begin{aligned}
x + (x+1) + (x+2) + \cdots + (x+2008) + (x+2009) &= 5307 \\
2010x + (1 + 2 + \cdots + 2008 + 2009) &= 5307 \\
2010x + \tfrac{1}{2}(2009)(2010) &= 5307 \\
2010x &= -2\,013\,738
\end{aligned}$$

Lorsqu'on additionne chaque deuxième terme, en commençant par le premier et en terminant par l'avant-dernier, on obtient :

$$\begin{aligned}
&x + (x+2) + (x+4) + \cdots + (x+2006) + (x+2008) \\
&= 1005x + (2 + 4 + \cdots + 2006 + 2008) \\
&= 1005x + 2(1 + 2 + \cdots + 1003 + 1004) \\
&= 1005x + 2\left(\tfrac{1}{2}(1004)(1005)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}(2010x) + (1004)(1005) \\
&= \tfrac{1}{2}(-2013738) + (1004)(1005) \\
&= 2151
\end{aligned}$$

Donc, la somme est égale à 2151.

Réponse : (C)

23. *Solution 1*

Carole donne à Benoît 24 lingots qui forment 45 % de la masse totale. Chacun de ces 24 lingots correspond, en moyenne, à $\frac{45}{24}$ %, ou 1,875 % de la masse totale.
Carole donne à Maya 13 lingots qui forment 26 % de la masse totale. Chacun de ces 13 lingots correspond, en moyenne, à $\frac{26}{13}$ %, ou 2 % de la masse totale.
Puisque chaque lingot qu'elle donne à Benoît (soit les 24 lingots les plus légers) est plus léger que chaque lingot qu'elle donne à Maya (soit les 13 lingots les plus lourds), alors la masse moyenne des lingots qu'elle donne à Blaise doit être supérieure à 1,875 % de la masse totale et inférieure à 2 % de la masse totale.
Or, les lingots que Carole donne à Blaise forment 100 % − 45 % − 26 %, ou 29 % de la masse totale.
Si 14 lingots formaient 29 % de la masse totale, leur masse moyenne serait de $\frac{29}{14}$ %, ou environ 2,07 % de la masse totale, ce qui est trop grand. Il y a donc plus de 14 lingots qui forment 29 % de la masse totale.
Si 15 lingots formaient 29 % de la masse totale, leur masse moyenne serait de $\frac{29}{15}$ %, ou environ 1,93 % de la masse totale, ce qui est situé dans le bon intervalle.
Si 16 lingots formaient 29 % de la masse totale, leur masse moyenne serait de $\frac{29}{16}$ %, ou environ 1,81 % de la masse totale, ce qui est trop petit. Il en est de même s'il y avait 17 ou 18 lingots.
Donc, Blaise reçoit 15 lingots d'or.

Solution 2

On peut supposer que les lingots ont une masse totale de 100.
Donc, les lingots que Benoît a reçus ont une masse totale de 45 et ceux que Maya a reçus ont une masse totale de 26.
Soit n le nombre de lingots que Blaise a reçus.
Ces lingots ont une masse totale de $100 - 45 - 26$, ou 29.
Soit $b_1, b_2, \ldots, b_{24}$ les masses respectives des lingots de Benoît.
On peut supposer que $b_1 < b_2 < \cdots < b_{23} < b_{24}$, puisque les masses sont toutes différentes.
De même, soit $m_1, m_2, \ldots, m_{13}$ les masses respectives des lingots que Maya a reçus, où $m_1 < m_2 < \cdots < m_{12} < m_{13}$ et soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les masses respectives des lingots que Blaise a reçus, où $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$.
On remarque que

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_{23} < b_{24} < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < m_1 < m_2 < \cdots < m_{12} < m_{13}$$

puisque Benoît a reçu les lingots les plus légers et Maya a reçu les lingots les plus lourds. De plus :

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \cdots + b_{23} + b_{24} &= 45 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n &= 29 \\ m_1 + m_2 + \cdots + m_{12} + m_{13} &= 26 \end{aligned}$$

Or, le lingot le plus lourd que Benoît a reçu a une masse de b_{24}. Donc :

$$45 = b_1 + b_2 + \cdots + b_{23} + b_{24} < b_{24} + b_{24} + \cdots + b_{24} + b_{24} = 24b_{24}$$

Donc $b_{24} > \frac{45}{24}$, ou $b_{24} > \frac{15}{8}$.
De plus, le lingot le plus léger que Maya a reçu a une masse de m_1. Donc :

$$26 = m_1 + m_2 + \cdots + m_{12} + m_{13} > m_1 + m_1 + \cdots + m_1 + m_1 = 13m_1$$

Donc $m_1 < \frac{26}{13}$, ou $m_1 < 2$.
Or, chacun des n lingots que Blaise a reçus pèse plus de b_{24} et moins de m_1.

Donc $nb_{24} < x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n < nm_1$, d'où $nb_{24} < 29 < nm_1$.
Donc $\frac{15}{8}n < nb_{24} < 29 < nm_1 < 2n$, d'où $n < 29\left(\frac{8}{15}\right) = \frac{232}{15} = 15\frac{7}{15}$, et $n > \frac{29}{2} = 14\frac{1}{2}$.
Puisque n est un entier, alors $n = 15$. Donc, Blaise reçoit 15 lingots d'or.

Réponse : (B)

24. Puisque le quadrillage 5 sur 5 est formé de carreaux mesurant chacun 10 cm sur 10 cm, le quadrillage au complet mesure 50 cm sur 50 cm.
Puisque le disque a un diamètre de 8 cm, il a un rayon de 4 cm.
On considère où tombe le centre du disque, puisque cela détermine la position du disque.
Puisqu'aucune partie du disque ne tombe à l'extérieur du quadrillage, alors le centre du disque doit tomber à plus de 4 cm (soit 1 rayon) des bords du quadrillage.
Le centre du disque doit donc tomber dans une région qui s'étend de 4 cm du bord gauche à 4 cm du bord droit (soit une largeur de 42 cm, puisque $50 - 4 - 4 = 42$) et de 4 cm du bord supérieur à 4 cm du bord inférieur (soit une hauteur de 42 cm, puisque $50 - 4 - 4 = 42$).
Donc pour que le disque tombe à l'intérieur du quadrillage, le centre du disque doit tomber dans un carré qui mesure 42 cm sur 42 cm. Ce carré a une aire de 1764 cm^2, car $42 \times 42 = 1764$.
On considère un des 25 carreaux. Le disque tombe à l'intérieur du carreau si son centre tombe à plus de 4 cm des bords. La région permise à l'intérieur du carreau a donc une largeur et une hauteur de 2 cm, puisque $10 - 4 - 4 = 2$.
Il y a 25 telles régions, soit une par carreau. L'aire totale des régions dans lesquelles le centre du disque peut tomber en position gagnante est donc égale à $25 \times 2 \times 2$ cm^2, ou 100 cm^2.
La probabilité pour que le disque tombe en position gagnante est égale à l'aire totale des régions gagnantes divisée par l'aire de l'intérieur du quadrillage dans lequel le centre du disque peut tomber. Elle est donc égale à $\frac{100}{1764}$, ou $\frac{25}{441}$.

Réponse : (A)

25. Soit $u(n)$ le chiffre des unités de l'entier positif n (p. ex., $u(25) = 5$). Voici trois remarques importantes :

- On cherche la position finale du jeton et non pas le nombre de fois que le jeton fait le tour. Par exemple, un déplacement de 25 places autour de la figure est équivalent à un déplacement de 5 places, puisque dans les deux cas, le jeton aboutit sur le 5. Puisqu'il faut un déplacement de 10 places pour faire le tour, seul le chiffre des unités du nombre de places est utile (soit $u(n^n)$).
- Pour déterminer la position finale, il faut déterminer la somme des nombres de places dont le jeton a été déplacé dans chacune des 1234 étapes. On veut donc déterminer

$$S = 1^1 + 2^2 + \cdots + 1233^{1233} + 1234^{1234},$$

puisque pour calculer la position après une étape, on ajoute au numéro de la position précédente le nombre de places du déplacement de cette étape. De fait, comme dans la remarque précédente, on s'intéresse au chiffre des unités de la somme des nombres de déplacements $u(S)$, ce qui est égal à :

$$u\Big(u(1^1) + u(2^2) + \cdots + u(1233^{1233}) + u(1234^{1234})\Big)$$

- Pour calculer $u(n^n)$, on se préoccupe du chiffre des unités de n, soit $u(n)$, et non pas des autres chiffres. En d'autres mots, il faut déterminer le chiffre des unités du produit de n termes $u(n) \times u(n) \times \cdots \times u(n)$ (on cherche donc $u\Big((u(n))^n\Big)$). (Comme on le verra plus loin, on ne peut réduire l'exposant n à son chiffre des unités.) Pour effectuer ce calcul, on peut s'en tenir au chiffre des unités à chaque étape, puisque seul le chiffre des unités a un effet sur les chiffres des unités qui suivent.

Par exemple, pour calculer $u(13^{13})$, on peut calculer $u\Big((u(13))^{13}\Big)$, qui est égal à $u(3^{13})$. En d'autres mots, pour déterminer le chiffre des unités de 3^{13}, on multiplie $3 \times 3 \times 3 \times \cdots \times 3$, tout en éliminant, au besoin, tous les chiffres du produit sauf le chiffre des unités. On obtient donc :

$$3, 9, 27 \to 7, 21 \to 1, 3, 9, 27 \to 7, 21 \to 1, 3, 9, 27 \to 7, 21 \to 1, 3$$

Donc $u(13^{13}) = 3$.

On considère maintenant les valeurs possibles de $u(n)$ dans le but de déterminer une régularité dans les chiffres des unités des puissances de n :

- Si $u(n)$ est égal à 0, 1, 5 ou 6, les valeurs respectives de $u(n^k)$ (k étant un entier strictement positif) sont 0, 1, 5 et 6, puisque dans chaque cas, $u(n^2) = u(n)$. Dans chaque cas, le chiffre des unités est invariable.
- Si $u(n) = 4$, le chiffre des unités des puissances de n alterne entre 4 et 6. (On peut le vérifier en multipliant $4 \times 4 \times 4 \times \cdots \times 4$ et en tronquant au besoin, comme dans l'exemple ci-haut.)
- Si $u(n) = 9$, le chiffre des unités des puissances de n alterne entre 9 et 1.
- Si $u(n) = 2$, le chiffre des unités des puissances de n effectue un cycle, soit $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6$ et ainsi de suite.
- Si $u(n) = 8$, le chiffre des unités des puissances de n effectue un cycle, soit $8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6$ et ainsi de suite.
- Si $u(n) = 3$, le chiffre des unités des puissances de n effectue un cycle, soit $3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1$ et ainsi de suite.
- Si $u(n) = 7$, le chiffre des unités des puissances de n effectue un cycle, soit $7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1$ et ainsi de suite.

On détermine $u(n^n)$, en se basant sur $u(n)$:

- Si $u(n)$ est égal à 0, 1, 5 ou 6, les valeurs respectives de $u(n^n)$ sont 0, 1, 5 et 6.
- Si $u(n) = 4$, alors $u(n^n) = 6$, puisque l'exposant est pair et le chiffre des unités sera donc celui qui paraît dans les positions paires de la régularité.
- Si $u(n) = 9$, alors $u(n^n) = 9$, puisque l'exposant est impair et le chiffre des unités sera donc celui qui paraît dans les positions impaires de la régularité.
- Si $u(n) = 2$, alors $u(n^n)$ sera égal à 2 ou à 4, selon la valeur de l'exposant n. En effet, l'exposant sera pair, mais puisque la régularité forme un cycle de longueur 4, le chiffre des unités peut être égal à 2 ou à 4. Par exemple, $u(2^2) = 4$ et $u(12^{12}) = 6$ (l'exposant 12 est un multiple de 4, donc le chiffre des unités est celui qui paraît à la fin du cycle).
- Si $u(n) = 8$, alors $u(n^n)$ sera égal à 4 ou à 6, selon la valeur de l'exposant n. En effet, l'exposant sera pair, mais puisque la régularité forme un cycle de longueur 4, le chiffre des unités peut être égal à 4 ou à 6. Par exemple, $u(8^8) = 6$ et $u(18^{18}) = 4$ (on peut le voir en utilisant le même argument que dans le cas précédent).
- De même, $u(3^3) = 7$, $u(13^{13}) = 3$, $u(7^7) = 3$ et $u(17^{17}) = 7$.
- Puisque le chiffre des unités de la base n suit un cycle de longueur 10 et que le chiffre des unités des puissances de n, pour une valeur particulière de n, se répètent à toutes les 1, 2 ou 4 puissances, alors les valeurs de $u(n^n)$ suivent un cycle de longueur 20 (soit le plus petit commun multiple de 10, 1, 2 et 4).

On peut donc déterminer que $u(1) + u(2) + \cdots + u(19) + u(20)$ est égal à :

$$u(1+4+7+6+5+6+3+6+9+0+1+6+3+6+5+6+7+4+9+0) = u(94) = 4$$

Pour calculer le total après 1234 étapes, on remarque qu'après 61 cycles de 20 étapes, on a effectué 1220 étapes.
Après ces 1220 étapes, le chiffre des unités de la somme est égal à $u(61 \cdot 4)$, ou $u(244)$, ou 4.
On ajoute ensuite les chiffres des unités de la somme des 14 étapes suivantes, en commençant au début du cycle. On obtient la position finale qui est égale au chiffre des unités, soit :

$$u(4 + (1+4+7+6+5+6+3+6+9+0+1+6+3+6)) = u(67) = 7$$

Donc, la position finale du jeton est 7.

Réponse : (D)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Cayley 2009

(10$^{\text{e}}$ année – Secondaire IV)

le mercredi 18 février 2009

Solutions

1. On a : $\dfrac{10^2-10}{9} = \dfrac{100-10}{9} = \dfrac{90}{9} = 10$

Réponse : (A)

2. Samedi, Deepit a travaillé 6 heures. Dimanche, il a travaillé 4 heures.
Samedi et dimanche, il a travaillé un total de 10 heures ($6+4=10$).

Réponse : (E)

3. Puisque $3(-2) = \nabla + 2$, alors $-6 = \nabla + 2$, d'où $\nabla = -6-2$, ou $\nabla = -8$.

Réponse : (C)

4. Puisque $\sqrt{5+n} = 7$ et $7 = \sqrt{49}$, alors $5+n = 49$, d'où $n = 44$.

Réponse : (D)

5. *Solution 1*
On a : $3^2 + 4^2 + 12^2 = 9 + 16 + 144 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

Solution 2
Notre expérience avec le théorème de Pythagore nous rappelle que $3^2 + 4^2 = 5^2$.
(Cela vient du triangle rectangle remarquable 3-4-5.)
Donc : $3^2 + 4^2 + 12^2 = 5^2 + 12^2$
Si on connaît aussi le triangle rectangle remarquable 5-12-13, on sait que $5^2 + 12^2 = 13^2$.
Donc : $3^2 + 4^2 + 12^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$

Réponse : (A)

6. Puisque l'aire de la région ombrée est égale à 20 % de l'aire du cercle, alors la mesure x° de l'angle au centre doit être 20 % de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le cercle au complet.
Donc $x^\circ = \frac{20}{100}(360^\circ)$, ou $x = \frac{1}{5}(360)$, ou $x = 72$.

Réponse : (D)

7. Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, alors dans le triangle QSR, on a :
$$\angle SQR = 180^\circ - \angle QSR - \angle SRQ = 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$
Puisque $PQ = PR$, alors $\angle PQR = \angle PRQ$.
Donc $x^\circ + 25^\circ = 65^\circ$, ou $x + 25 = 65$, d'où $x = 40$.

Réponse : (E)

8. D'après l'énoncé, on cherche le choix de réponse qui est vrai peu importe le choix des trois entiers consécutifs.
On choisit $1(2)(3)$ pour voir si le produit nous permet d'éliminer certains choix de réponse.
Or $1(2)(3) = 6$. 6 n'est pas un multiple de 4, de 5 ou de 12. De plus, 6 n'est pas impair.
Donc, seul le choix « un multiple de 6 » est possible.
(On peut affirmer que le produit de n'importe quels trois entiers consécutifs strictement positifs est toujours divisible par 6, puisque au moins un des entiers est pair et qu'un des entiers doit être un multiple de 3.)

Réponse : (B)

9. *Solution 1*

Puisqu'il y a 24 heures dans une journée, Francis passe $\frac{1}{3}$ de 24 heures, soit 8 heures, à dormir. Il passe aussi $\frac{1}{4}$ de 24 heures, soit 6 heures, à étudier et $\frac{1}{8}$ de 24 heures, soit 3 heures, à manger. Il lui reste donc $24 - 8 - 6 - 3$ heures, ou 7 heures.

Solution 2

La fraction totale de la journée que Francis passe à dormir, à étudier et à manger est égale à $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, ou $\frac{8+6+3}{24}$, ou $\frac{17}{24}$.
La fraction de la journée qu'il lui reste est égale à $1 - \frac{17}{24}$, ou $\frac{7}{24}$.
Puisqu'il y a 24 heures dans une journée, il lui reste 7 heures.

Réponse : (D)

10. *Solution 1*

Soit h cm la hauteur de la boîte, L cm sa longueur et l cm sa largeur.
D'après les aires de faces données, on a $Lh = 12$, $Ll = 8$ et $lh = 6$.
On multiplie ces trois équations, membre par membre, pour obtenir $LhLllh = 12(8)(6)$, ou $L^2h^2l^2 = 576$.
Donc $(Lhl)^2 = 576$, d'où $Lhl = \sqrt{576}$, ou $Lhl = 24$, puisque $Lhl > 0$.
Puisque le volume de la boîte est égal à Lhl cm^3, il est égal à 24 cm^3.

Solution 2

On peut tenter de trouver des dimensions qui produiraient les aires données.
Après quelques tâtonnements, on détermine que la boîte a une longueur de 4 cm, une hauteur de 3 cm et une largeur de 2 cm, car avec ces dimensions, on obtient les aires données.
Le volume est donc égal à $(4 \times 3 \times 2)$ cm^3, ou 24 cm^3.

Solution 3

Soit h cm la hauteur de la boîte, L cm sa longueur et l cm sa largeur.
D'après les aires de faces données, on a $Lh = 12$, $Ll = 8$ et $lh = 6$.
D'après la première équation, $L = \dfrac{12}{h}$.
On reporte $L = \dfrac{12}{h}$ dans la deuxième équation pour obtenir $\dfrac{12l}{h} = 8$.
On multiplie cette équation et l'équation $lh = 6$, membre par membre, pour obtenir $12l^2 = 48$, d'où $l^2 = 4$, ou $l = 2$, puisque $l > 0$.
Puisque $lh = 6$, alors $2h = 6$, ou $h = 3$.
Puisque $Ll = 8$, alors $2L = 8$, ou $L = 4$.
Le volume est donc égal à $(4 \times 3 \times 2)$ cm^3, ou 24 cm^3.

Réponse : (A)

11. Pour maximiser le nombre de chansons qu'elle peut jouer en 3 heures, Gabrielle devrait utiliser autant de chansons courtes que possible. (En remplaçant une chanson longue par une chanson courte, elle diminue le temps utilisé.)
Si Gabrielle utilise toutes les 50 chansons courtes de sa collection, elle utilisera 150 minutes.
Il lui reste 30 minutes ($180 - 150 = 30$). Elle peut donc jouer 6 chansons longues ($30 \div 5 = 6$) qui ont chacune une durée de 5 minutes.
En tout, elle peut jouer un maximum de 56 chansons ($50 + 6 = 56$).

Réponse : (C)

12. Puisqu'il y a 6 colonnes et que chaque terme de la suite est 3 de plus que le terme précédent, alors chaque nombre dans une case est 18 de plus que le nombre dans la case directement au-dessus. (Chaque nombre dans une case se trouve à 6 termes plus loin dans la suite que le nombre dans la case directement au-dessus.)
Donc, x est égal à $17 + 5(18)$, ou $17 + 90$, ou 107, puisqu'il se trouve à 5 rangées directement au-dessous de 17.

Réponse : (C)

13. Au départ, la pièce de monnaie se trouve sur le 8^e carreau, en comptant de gauche à droite.
Après le 1^{er} jet du dé, la pièce est déplacée de 1 carreau vers la gauche, puisque 1 est impair.
Après le 2^e jet du dé, la pièce est déplacée de 2 carreaux vers la droite, puisque 2 est pair.
Après les 6 jets du dé, la pièce se trouve sur le 11^e carreau ($8 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 = 11$), soit 3 carreaux à la droite du carreau initial.

Réponse : (E)

14. Parmi les entiers de 3 à 20, les nombres 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19 sont premiers.
Donc, les entiers 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 et 20 sont des nombres composés.
La somme de trois nombres composés différents doit être supérieure ou égale à $4 + 6 + 8$, ou 18.
Donc, 19 est le plus petit nombre premier qui pourrait être égal à la somme de trois nombres composés différents.
Peut-on écrire 19 comme somme de trois nombres composés différents ? Oui : $19 = 4 + 6 + 9$

Réponse : (D)

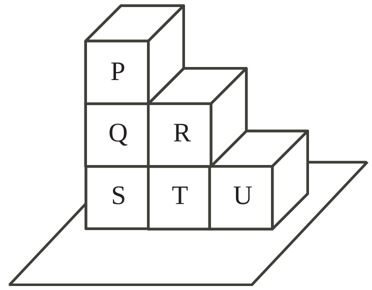
15. On tentera d'écrire les cinq nombres en ordre croissant.
On sait que le nombre 8 paraît au moins deux fois dans la liste.
Puisque la médiane de la liste est égale à 9, alors le nombre du milieu (le troisième) est égal à 9.
La liste est donc a, b, 9, d, e.
Puisque le nombre 8 paraît au moins deux fois et que le troisième nombre est 9, alors le 8 paraît exactement deux fois et on a donc $a = b = 8$.
La liste est donc 8, 8, 9, d, e.
Puisque la liste a une moyenne de 10 et qu'elle contient cinq nombres, alors la somme des nombres de la liste est égale à 5(10), ou 50.
Donc $8 + 8 + 9 + d + e = 50$, d'où $25 + d + e = 50$, ou $d + e = 25$.
Puisque 8 est le seul nombre qui paraît plus d'une fois, alors $d > 9$.
Donc $10 \leq d < e$ et $d + e = 25$.
Pour que e soit aussi grand que possible, il faut que d soit aussi petit que possible. On choisit donc $d = 10$. Donc $e = 15$.
La liste 8, 8, 9, 10, 15 satisfait à toutes les conditions. Le plus grand entier possible qui pourrait paraître dans la liste est donc 15.

Réponse : (A)

16. Soit x la longueur des côtés des petits carrés. (Puisque les petits carrés ont la même hauteur, leurs côtés doivent avoir la même longueur.)
Les côtés du plus grand carré ont donc une longueur de $4x$.
Puisque les côtés des carrés ombrés ont une longueur de 10, alors $QR = 3(10) = 30 = PS$.
Donc $PS = 30 = 4x + x$, d'où $5x = 30$, ou $x = 6$.
Le plus grand carré a donc des côtés de longueur 4(6), ou 24.

Réponse : (B)

17. On nomme les six dés comme suit :



La somme maximale des numéros sur les 21 faces exposées se produit lorsque l'on maximise la somme des numéros sur les faces exposées de chaque dé.
Le dé P a 5 faces exposées. La somme des numéros sur ses faces exposées est maximisée lorsque la face 1 est cachée. La somme est égale à $2+3+4+5+6$, ou 20.
Les dés Q et S ont chacun 3 faces exposées. Deux de ces faces sont opposées et leurs numéros ont donc une somme de 7. Pour maximiser la somme des numéros sur les faces exposées de ces dés, on place les dés de manière que le numéro sur la face exposée non appariée soit un 6. (Ce numéro paraîtra du côté gauche de la pile.) La somme des numéros sur les faces exposées de chacun de ces dés est égale à $6+7$, ou 13.
Les dés R et U ont chacun 4 faces exposées. Deux de ces faces sont opposées et leurs numéros ont donc une somme de 7. Pour maximiser la somme des numéros sur les faces exposées de ces dés, on place les dés de manière que les numéros sur les faces non appariées soient un 5 et un 6 (sur le dessus et du côté droit de la pile). La somme des numéros sur les faces exposées de chacun de ces dés est égale à $5+6+7$, ou 18.
Le dé T a 2 faces exposées et ces faces sont opposées l'une à l'autre. Les numéros sur ces faces exposées ont donc une somme de 7.
Donc, la somme maximale des numéros sur les 21 faces exposées de ces dés est égale à $20+13+13+18+18+7$, ou 89.

Réponse : (C)

18. Le segment QP a une pente de 1. Puisqu'il y a un déplacement vertical de 6 unités du point Q au point P, le déplacement horizontal est aussi de 6 unités. Le point Q est donc situé à 6 unités à la gauche du point P et il a donc pour coordonnées $(-5,0)$.
Le segment RP a une pente de 2. Puisqu'il y a un déplacement vertical de 6 unités du point R au point P, le déplacement horizontal est de $\frac{1}{2}(6)$ unités, ou de 3 unités. Le point R est donc situé à 3 unités à la gauche du point P et il a donc pour coordonnées $(-2,0)$.
(On aurait pu utiliser les coordonnées de P et les pentes pour déterminer que les droites ont pour équations respectives $y=x+5$ et $y=2x+4$ et utiliser ces équations pour déterminer les coordonnées de Q et de R.)
Donc $QR=-2-(-5)$, ou $QR=3$ et le point P est à 6 unités au-dessus de l'axe des abscisses.
On prend le segment QR comme base du triangle PQR. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}(3)(6)$, ou 9.

Réponse : (B)

19. *Solution 1*
Le produit des chiffres de n est égal à 0 si un des chiffres de n est égal à 0.
On considère les entiers de 5000 à 5999. Chacun peut s'écrire sous forme $5xyz$.
Combien de ces entiers ne contiennent *aucun* 0 ?
Si le nombre $5xyz$ n'inclut aucun 0, il y a 9 possibilités pour x, pour y et pour z (il s'agit des

chiffres de 1 à 9), ce qui fait qu'il y a 9^3, ou 729 tels entiers.
Donc, 271 des entiers de 5000 à 5999 ($1000 - 729 = 271$) ont au moins un chiffre 0.
On doit aussi inclure le nombre 6000 qui a des chiffres 0.
Il y a donc 272 entiers n (où $5000 \leq n \leq 6000$) dont le produit des chiffres est égal à 0.

Solution 2
Le produit des chiffres de n est égal à 0 si un des chiffres de n est égal à 0.
On compte le nombre d'entiers qui ont un chiffre 0 dans chacune des positions, tout en s'assurant de ne pas compter le même entier plus d'une fois.
L'entier $n = 6000$ a au moins un chiffre 0 et contribue donc 1 au nombre total.
Il y a 100 entiers de la forme $50xy$ (il s'agit des entiers de 5000 à 5099).
Il y a 10 entiers de la forme $510y$ (il s'agit des entiers de 5100 à 5109). De même, il y a 10 entiers de chacune des formes $520y$, $530y$, et ainsi de suite jusquà $590y$. On a donc 9 groupes de 10 entiers pour un total de 90 qui est ajouté au grand total.
Il y a 9 entiers de la forme $51x0$, où x n'est pas égal à 0 (il s'agit des entiers 5110, 5120 et ainsi de suite jusqu'à 5190). De même, il y a 9 entiers de chacune des formes $52x0$, $53x0$, et ainsi de suite. On a donc 9 groupes de 9 entiers pour un total de 81 qui est ajouté au grand total.
En tout, le nombre de tels entiers est égal à $1 + 100 + 90 + 81$, ou 272.

Réponse : (D)

20. Soit d km la longueur de sa route.
Puisque Hana arrive 1 minute en avance lorsqu'elle conduit à 75 km/h et 1 minute en retard lorsqu'elle conduit à 70 km/h, il y a une différence de 2 minutes, ou $\frac{1}{30}$ d'heure entre ces deux temps.
À une vitesse de 75 km/h, elle met $\dfrac{d}{75}$ heures pour faire le trajet, tandis qu'à 70 km/h, elle met $\dfrac{d}{70}$ heures pour le faire. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{70} - \frac{d}{75} &= \frac{1}{30} \\ 75d - 70d &= \frac{75(70)}{30} \\ 5d &= 25(7) \\ d &= 35 \end{aligned}$$

Le chemin suivi a une longueur de 35 km.

Réponse : (B)

21. On compte les points de treillis en commençant par le point le plus près du segment horizontal PS et en s'arrêtant juste avant d'arriver au segment QR.
Pour qu'un point (a, b) de la droite d'équation $y = 3x - 5$ soit un point de treillis au-dessus du segment PS, il faut que $b \geq 0$. Il faut donc que $3a - 5 \geq 0$, ou $3a \geq 5$, ou $a \geq \frac{5}{3}$.
Puisque a est un entier, alors $a \geq 2$. (Avec $a = 2$, on obtient le point $(2, 1)$.)
Pour qu'un point (a, b) de la droite d'équation $y = 3x - 5$ soit un point de treillis au-dessous du segment QR, il faut que $b \leq 2009$. Il faut donc que $3a - 5 \leq 2009$, ou $3a \leq 2014$, ou $a \leq \frac{2014}{3}$.
Puisque a est un entier, alors $a \leq 671$. (Avec $a = 671$, on obtient le point $(671, 2008)$.)
Donc, pour qu'un point (a, b) de treillis soit sur la droite et à l'intérieur du carré, il faut que $2 \leq a \leq 671$. De plus, chacune de ces valeurs entières de a donne un point de treillis, puisque chacune donne une valeur entière de b à cause de $b = 2a - 5$.

Le nombre de valeurs entières de a est égal à $671 - 1$, ou 670.
Il y a donc 670 tels points de treillis.

Réponse : (E)

22. *Solution 1*
On additionne la deuxième et la troisième équation, membre par membre, pour obtenir :

$$\begin{aligned} ac + b + bc + a &= 18 + 6 \\ c(a+b) + (a+b) &= 24 \\ (c+1)(a+b) &= 24 \end{aligned}$$

D'après la première équation donnée, $a + b = 3$. La dernière équation ci-dessus devient donc $(c+1)(3) = 24$, ou $c + 1 = 8$.
Donc $c = 7$.

Solution 2
D'après la première équation, $b = 3 - a$. (On pourrait aussi exprimer a en fonction de b.)
La deuxième équation devient $ac + (3 - a) = 18$, ou $ac - a = 15$.
La troisième équation devient $(3 - a)c + a = 6$, ou $-ac + 3c + a = 6$.
On additionne ces deux équations, membre par membre, pour obtenir $3c = 15 + 6$, ou $3c = 21$, ou $c = 7$.

Réponse : (E)

23. *Solution 1*
On suppose qu'Aglaé et Baruch partagent un terrain de 100 hectares. (On peut choisir n'importe quelle grandeur, puisqu'il s'agit de rapports.)
Puisque l'aire de la portion d'Aglaé et l'aire de la portion de Baruch sont dans un rapport de $3 : 2$, alors la portion d'Aglaé correspond à $\frac{3}{5}$ des 100 hectares, soit 60 hectares. La portion de Baruch est donc de 40 hectares.
Puisque le terrain au complet est recouvert de maïs et de pois dans un rapport de $7 : 3$, alors le maïs recouvre $\frac{7}{10}$ des 100 hectares, soit 70 hectares, et les pois recouvrent les 30 autres hectares.
La portion de terrain d'Aglaé est recourte de maïs et de pois dans un rapport de $4 : 1$. Donc le maïs recouvre $\frac{4}{5}$ de ses 60 hectares, soit 48 hectares, et les pois recouvrent les 12 autres hectares.
Puisqu'il y a 70 hectares de maïs en tout, alors sur la portion de terrain de Baruch, le maïs recouvre $(70 - 48)$ hectares, c'est-à-dire 22 hectares.
Puisqu'il y a 30 hectares de pois en tout, alors sur la portion de terrain de Baruch, les pois recouvrent $30 - 12$ hectares, c'est-à-dire 18 hectares.
Donc, dans la portion de terrain de Baruch, le rapport du maïs et des pois est de $22 : 18$, ou $11 : 9$.

Solution 2
Soit x l'aire du terrain au complet.
Puisque l'aire de la portion d'Aglaé et l'aire de la portion de Baruch sont dans un rapport de $3 : 2$, alors la portion d'Aglaé a une aire de $\frac{3}{5}x$ et la portion de Baruch a une aire de $\frac{2}{5}x$.
Puisque le terrain au complet est recouvert de maïs et de pois dans un rapport de $7 : 3$, alors la portion de terrain recouverte de maïs a une aire de $\frac{7}{10}x$ et la portion de terrain recouverte de pois a une aire de $\frac{3}{10}x$.
La portion de terrain d'Aglaé est recouverte de maïs et de pois dans un rapport de $4 : 1$. Donc le maïs recouvre $\frac{4}{5}$ de sa portion de terrain, soit une aire de $\frac{4}{5}$ de $\frac{3}{5}x$, ou $\frac{4}{5}(\frac{3}{5}x)$, ou $\frac{12}{25}x$. Les pois sur sa portion de terrain recouvrent une aire de $\frac{3}{5}x - \frac{12}{25}x$, ou $\frac{3}{25}x$.

Puisque la portion de terrain recouverte de maïs a une aire de $\frac{7}{10}x$, alors la portion du terrain de Baruch qui est recouverte de maïs a une aire de $\frac{7}{10}x - \frac{12}{25}x$, ou $\frac{35}{50}x - \frac{24}{50}x$, ou $\frac{11}{50}x$.

Puisque la portion de terrain recouverte de pois a une aire $\frac{3}{10}x$, alors la portion de terrain de Baruch qui est recouverte de pois a une aire de $\frac{3}{10}x - \frac{3}{25}x$, ou $\frac{15}{50}x - \frac{6}{50}x$, ou $\frac{9}{50}x$.

Donc, dans la portion de terrain de Baruch, le rapport du maïs et des pois est de $\frac{11}{50}x : \frac{9}{50}x$, ou 11 : 9.

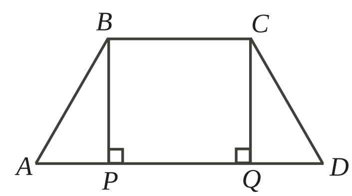
Réponse : (A)

24. On remarque d'abord que le quadrilatère est un trapèze, car $60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$, ce qui assure que les côtés supérieur et inférieur sont parallèles.

Il faut déterminer l'aire du trapèze et la fraction du terrain qui est plus près du plus grand côté.

Aire du trapèze

On nomme le trapèze $ABCD$, comme dans la figure suivante, et aux points B et C, on abaisse les perpendiculaires BP et CQ au côté AD.



Puisque le triangle ABP est rectangle en P et que $\angle BAP = 60^\circ$, alors $AP = 100\cos(60^\circ)$ m, d'où $AP = 100(\frac{1}{2})$ m, ou $AP = 50$ m. De plus, $BP = 100\sin(60^\circ)$ m, d'où $BP = 100(\frac{\sqrt{3}}{2})$ m, ou $BP = 50\sqrt{3}$ m. (On aurait pu utiliser les rapports des longueurs de côtés du triangle remarquable 30°-60°-90° pour obtenir les mêmes résultats.)

Par symétrie, $QD = 50$ m.

Puisque BC est parallèle à PQ et que BP et CQ sont perpendiculaires à PQ, alors $BPQC$ est un rectangle. Donc $PQ = BC = 100$ m. Donc $AD = (50 + 100 + 50)$ m, ou $AD = 200$ m.

L'aire du trapèze $ABCD$, en mètres carrés, est donc égale à $\frac{1}{2}(BC + AD)(BP)$, ou $\frac{1}{2}(100 + 200)(50\sqrt{3})$, ou $7500\sqrt{3}$.

Détermination de la région la plus près de AD

On doit déterminer la fraction du terrain qui est plus près du côté AD.

Pour être plus près du côté AD, un point à l'intérieur du trapèze doit être plus près du côté AD que de chacun des côtés BC, AB et DC.

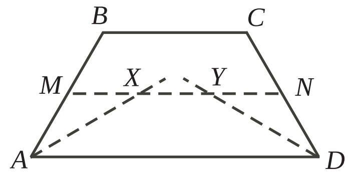
Un point à l'intérieur du trapèze est plus près de AD que de BC s'il est situé au-dessous de la « ligne du milieu », c'est-à-dire au-dessous du segment MN (voir la figure ci-dessous).

Ce segment est à $\frac{1}{2}(50\sqrt{3})$ m, ou $25\sqrt{3}$ m au-dessus de AD.

Un point à l'intérieur du trapèze est plus près de AD que de AB s'il est situé au-dessous de la bissectrice de l'angle BAD. (Cet énoncé est justifié dans un paragraphe ci-dessous.)

De même, un point à l'intérieur du trapèze est plus près de AD que de DC s'il est situé au-dessous de la bissectrice de l'angle CDA.

Soit X et Y les points d'intersection respectifs du segment MN et des bissectrices des angles BAD et CDA. On confirmera un peu plus loin que les bissectrices se coupent au-dessus du segment MN et non pas au-dessous.

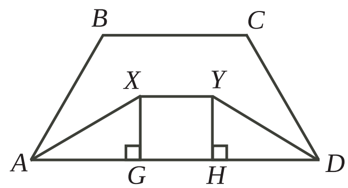


Aire du trapèze $AXYD$

Il reste à déterminer l'aire du trapèze $AXYD$.

On sait que $\angle XAD = \angle YDA = \frac{1}{2}(60°) = 30°$.

Aux points X et Y, on abaisse des perpendiculaires XG et YH à AD.



On sait que $AD = 200$ m et $XG = YH = 25\sqrt{3}$ m.

Puisque les triangles AXG et DYH sont des triangles remarquables 30°-60°-90°, alors :

$$AG = DH = \sqrt{3}XG = \sqrt{3}(25\sqrt{3}) = 75$$

Ceci nous assure que les bissectrices se coupent au-dessus du segment MN, puisque $AG + HD = 150$ et $AD = 200$, d'où $AG + HD < AD$.

Puisque $XGHY$ est un rectangle (même raisonnement que pour $BPQC$), alors :

$$XY = GH = AD - AG - DH = 200 - 75 - 75 = 50$$

L'aire du trapèze $AXYD$, en mètres carrés, est donc égale à $\frac{1}{2}(AD + XY)(XG)$, ou $\frac{1}{2}(200 + 50)(25\sqrt{3})$, ou $3125\sqrt{3}$.

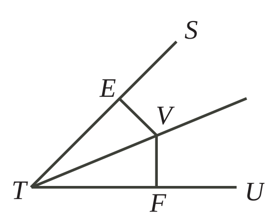
Donc, la fraction de la récolte qui est transportée sur le côté AD est égale à $\frac{3125\sqrt{3}}{7500\sqrt{3}}$, ou $\frac{25}{60}$, ou $\frac{5}{12}$.

Propriété des bissectrices

On justifie la propriété mentionnée précédemment.

On considère l'angle STU et un point V sur sa bissectrice.

Au point V, on abaisse une perpendiculaire VE à ST et une perpendiculaire VF à TU.



Les triangles VET et VFT sont congruents, puisqu'ils sont rectangles, que $\angle VTE = \angle VTF$ et qu'ils partagent la même hypoténuse TV.

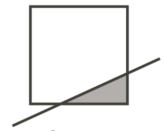
Donc $EV = FV$, c'est-à-dire que le point V est équidistant de ST et de UT.

Donc, tout point sur la bissectrice est équidistant de ST et de UT.

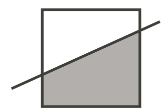
Donc, n'importe quel point au-dessous de la bissectrice sera plus près du côté UT, puisqu'en déplaçant un point de la bissectrice vers le bas, il se rapproche de UT et s'éloigne de ST.

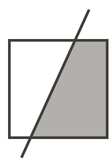
Réponse : (B)

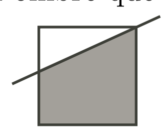
25. On superpose un repère cartésien de manière que l'origine $(0, 0)$ soit au sommet inférieur gauche, le point $(m, 0)$ au sommet inférieur droit, le point (m, n) au sommet supérieur droit et le point $(0, n)$ au sommet supérieur gauche.
La diagonale a donc une pente de $\dfrac{n}{m}$. Elle a donc pour équation $y = \dfrac{n}{m}x$.
Puisque $2n < m < 3n$, alors $\dfrac{1}{3} < \dfrac{n}{m} < \dfrac{1}{2}$. La pente est donc entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.
Un carré partiellement ombré peut l'être d'une de trois façons :

- Un petit triangle est ombré, tandis que le reste du carré ne l'est pas : 

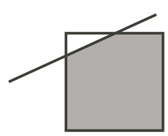
Dans ce cas, le triangle a une base maximale de 1 et sa hauteur maximale survient lorsque la pente est à son maximum, soit $\frac{1}{2}$.
Donc dans ce cas, l'aire maximale de la partie ombrée est égale à $\frac{1}{2}(1)(\frac{1}{2})$, ou $\frac{1}{4}$.
Puisqu'on cherche une aire supérieure à 0,999, ce cas ne nous intéresse pas.

- La partie ombrée forme un trapèze, de même que la partie non ombrée : 

(Puisque la pente est inférieure à 1, le cas  est impossible.)

On considère l'aire de la partie non ombrée. Pour que l'aire de la partie ombrée soit supérieure à 0,999, l'aire de la partie non ombrée doit être inférieure à 0,001.
Or, l'aire du trapèze non ombré est supérieure ou égale à l'aire du triangle non ombré que l'on obtient lorsque la diagonale du rectangle passe par le sommet supérieur droit : 

Un tel triangle a une base de 1 et sa hauteur est supérieure ou égale à $\frac{1}{3}$ (puisque la pente est supérieure ou égale à $\frac{1}{3}$).
Donc, l'aire d'un tel trapèze est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}(1)(\frac{1}{3})$, ou $\frac{1}{6}$ et ne peut donc être inférieure à 0,001.

- La partie non ombrée forme un triangle : 

C'est ce cas qui nous apportera une réponse.
Soit (p, q) les coordonnées du sommet supérieur gauche d'un tel carré-unité.
Le point où la diagonale (d'équation $y = \dfrac{n}{m}x$) du rectangle coupe le côté supérieur du carré $(y = q)$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{m}{n}q, q\right)$, puisque lorsque $y = q$, alors $q = \dfrac{n}{m}x$, d'où $x = \dfrac{m}{n}q$.
De même, le point où la diagonale coupe le côté gauche $(x = p)$ du carré a pour coordonnées $\left(p, \dfrac{n}{m}p\right)$.
Donc, le triangle a une base horizontale de longueur $\dfrac{m}{n}q - p$ et une hauteur correspondante de longueur $q - \dfrac{n}{m}p$.
On sait aussi que ni la base, ni la hauteur n'est égale à 0, car la partie non ombrée n'est pas nulle.

Puisque l'aire du triangle non ombré doit être inférieure à 0,001, alors :

$$\begin{array}{rcccl} 0 & < & \frac{1}{2}\left(\dfrac{m}{n}q-p\right)\left(q-\dfrac{n}{m}p\right) & < & 0{,}001 \\ 0 & < & \left(\dfrac{m}{n}q-p\right)\left(q-\dfrac{n}{m}p\right) & < & 0{,}002 \\ 0 & < & (mq-pn)(mq-pn) & < & 0{,}002mn \quad \text{(on a multiplié chaque membre par } mn\text{)} \\ 0 & < & 500(mq-pn)^2 & < & mn \quad \text{(on a multiplié chaque membre par 500)} \end{array}$$

Or m, n, p et q sont des entiers et $mq - pn$ n'est pas nul. En effet, $mq - pn = n\left(\dfrac{m}{n}q - p\right) > 0$.
Donc $(mq - pn)^2 \geq 1$, car m, q, p et n sont tous des entiers et $(mq - pn)^2 > 0$.
Donc $mn > 500(1) = 500$.
Si $(mq - pn)^2 > 1$, alors mn serait beaucoup plus grand. Puisqu'on cherche la plus petite valeur de mn, on cherche à déterminer une solution avec $(mq - pn)^2 = 1$.

On cherche donc une valeur de m et une valeur de n (où $2n < m < 3n$) de manière que le produit mn soit aussi près de 500 que possible et de manière qu'on puisse déterminer une valeur de p et une valeur de q qui vérifient $mq - pn = 1$.
On considère d'abord la restriction $2n < m < 3n$ et on examine les entiers de 501 à 510 pour voir si on peut trouver des valeurs de m et de n dont le produit est égal à un de ces nombres et de manière que $2n < m < 3n$.

- $501 = 3(167)$ et 167 est premier. Ce n'est donc pas possible.
- $502 = 2(251)$ et 251 est premier. Ce n'est donc pas possible.
- 503 est premier. Ce n'est donc pas possible.
- $504 = 8(7)(9)$. On peut choisir $n = 14$ et $m = 36$ (seule façon possible).
- $505 = 5(101)$ et 101 est premier. Ce n'est donc pas possible.
- $506 = 11(2)(23)$. Aucune valeur possible de m et n.
- $507 = 3(13)(13)$. Aucune valeur possible de m et n.
- $508 = 4(127)$ et 127 est premier. Ce n'est donc pas possible.
- 509 est premier. Ce n'est donc pas possible.
- $510 = 2(3)(5)(17)$. On peut choisir $n = 15$ et $m = 34$ (seule façon possible).

Il y a donc deux paires de valeurs possibles de m et de n que l'on peut considérer. Si une des paires fonctionne, cette paire donnera la plus petite valeur possible de mn.
Pour vérifier si une des paires fonctionne, il faut trouver des valeurs appropriées de p et de q.
On considère $n = 14$ et $m = 36$. On cherche des valeurs entières de p et de q de manière que $36q - 14p = 1$. Ce n'est pas possible car d'après cette équation, le membre de gauche doit être pair et le membre de droite est impair.
On considère $n = 15$ et $m = 34$. On cherche des valeurs entières de p et de q de manière que $34q - 15p = 1$.
Les entiers $q = 4$ et $p = 9$ vérifient cette équation.
Donc, $(m, n) = (34, 15)$ est le couple qui donne la plus petite valeur possible de mn qui vérifient les conditions données. Donc $mn = 510$.

Réponse : (C)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Cayley 2008

(10^e année – Secondaire IV)

le mardi 19 février 2008

Solutions

1. On a : $3^2 - 2^2 + 1^2 = 9 - 4 + 1 = 6$

Réponse : (E)

2. On a : $\dfrac{\sqrt{25-16}}{\sqrt{25}-\sqrt{16}} = \dfrac{\sqrt{9}}{5-4} = \dfrac{3}{1} = 3$

Réponse : (B)

3. Les cinq choix de réponse, sous forme décimale, sont :

$$0{,}75; 1{,}2; 0{,}81; 1{,}333\ldots; 0{,}7$$

Les différences entre ces choix et 1 sont :

$1-0{,}75 = 0{,}25 \qquad 1{,}2-1 = 0{,}2 \qquad 1-0{,}81 = 0{,}19 \qquad 1{,}333\ldots-1 = 0{,}333\ldots \qquad 1-0{,}7 = 0{,}3$

Le choix qui offre la plus petite différence est 0,81. Donc, 0,81 est le plus près de 1.

Réponse : (C)

4. Le nombre de bonbons dans le sac est égal à $5+6+7+8$, ou 26.
Puisqu'il y a 8 bonbons bleus, la probabilité de choisir un bonbon bleu est égale à $\frac{8}{26}$, soit $\frac{4}{13}$.

Réponse : (D)

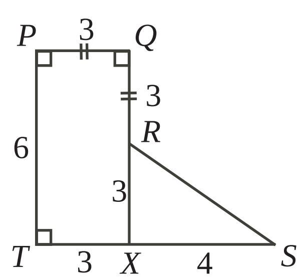
5. Puisque $52\,28\square$ est un multiple de 6, il doit être un multiple de 2 et un multiple de 3.
Puisqu'il est un multiple de 2, le chiffre représenté par $\square$ doit être pair.
Puisqu'il est un multiple de 3, la somme de ses chiffres doit être divisible par 3.
La somme de ses chiffres est égale à $5+2+2+8+\square$, c'est-à-dire à $17+\square$.
Puisque $\square$ est pair, il peut prendre les valeurs de 0, 2, 4, 6 et 8. Les sommes correspondantes sont 17, 19, 21, 23 et 25.
Seule la somme 21 est divisible par 3. Donc $\square$ doit être égal à 4.
On peut vérifier que $52\,284$ est divisible par 6.
(On aurait pu remplacer $\square$ par chacun des choix de réponse et utiliser une calculatrice pour vérifier si $52\,28\square$ est divisible par 6.)

Réponse : (C)

6. Puisque $\dfrac{40}{x} - 1 = 19$, alors $\dfrac{40}{x} = 20$.
Donc $x = 2$, car le nombre qui divise 40 pour donner une réponse de 20 est 2.

Réponse : (D)

7. On prolonge QR jusqu'au point X sur TS. Puisque $PQ = QR$, alors $QR = 3$.
Puisque $PQXT$ admet trois angles droits, il doit être un rectangle. Donc $TX = PQ = 3$.
De plus, $QX = PT = 6$.
Puisque $TS = 7$ et $TX = 3$, alors $XS = TS - TX$, d'où $XS = 7 - 3$, ou $XS = 4$.
Puisque $QX = 6$ et $QR = 3$, alors $RX = QX - QR$, d'où $RX = 6 - 3$, ou $RX = 3$.



Puisque $PQXT$ est un rectangle, alors $\angle RXS = 90^\circ$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle RXS :

$$RS^2 = RX^2 + XS^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Donc $RS = 5$, puisque $RS > 0$. (On aurait pu dire que le triangle rectangle RXS est un triangle remarquable 3-4-5).
Le périmètre est donc égal à $PQ + QR + RS + ST + TP$, c'est-à-dire à $3 + 3 + 5 + 7 + 6$, ou 24.

Réponse : (A)

8. Puisque $PQ = QR$, alors $\angle QPR = \angle QRP$.
Puisque $\angle PQR + \angle QPR + \angle QRP = 180^\circ$, alors $40^\circ + 2(\angle QRP) = 180^\circ$, d'où $2(\angle QRP) = 140^\circ$, ou $\angle QRP = 70^\circ$.
Puisque les angles PRQ et SRT sont opposés par le sommet, alors $\angle SRT = \angle PRQ = 70^\circ$.
Puisque $RS = RT$, alors $\angle RST = \angle RTS = x^\circ$.
Puisque $\angle SRT + \angle RST + \angle RTS = 180^\circ$, alors $70^\circ + 2x^\circ = 180^\circ$, d'où $2x = 110$, ou $x = 55$.

Réponse : (C)

9. *Solution 1*
Puisque a et b sont tous deux impairs, alors ab est impair.
Donc, le plus grand entier pair inférieur à ab est $ab - 1$.
Puisque la moitié des entiers inférieurs à $ab - 1$ sont pairs, alors le nombre d'entiers pairs strictement positifs inférieurs à $ab - 1$ (et donc inférieurs à ab) est égal à $\dfrac{ab-1}{2}$.

Solution 2
Puisque $a = 7$ et $b = 13$, alors $ab = 91$.
Les nombres pairs strictement positifs inférieurs à ab, ou 91, sont $2, 4, 6, \ldots, 90$.
Il y en a $90 \div 2$, ou 45.
Avec $a = 7$ et $b = 13$, les cinq choix de réponse sont :

$$\frac{ab-1}{2} = 45 \qquad \frac{ab}{2} = \frac{91}{2} \qquad ab - 1 = 90 \qquad \frac{a+b}{4} = 5 \qquad (a-1)(b-1) = 72$$

Donc, la réponse doit être $\dfrac{ab-1}{2}$.

Réponse : (A)

10. Pour les 200 minutes d'utilisation durant la journée, Viviane doit payer $200 \times 0{,}10$ \$, soit 20 \$.
Viviane a 300 minutes d'utilisation en soirée, dont 200 sont gratuites. Puisque $300 - 200 = 100$, elle doit payer $100 \times 0{,}05$ \$, soit 5 \$.
Pour acquitter sa facture, elle doit donc payer 20 \$ + 20 \$ + 5 \$, soit 45 \$.

Réponse : (C)

11. Alex a 265 cents en tout.
La valeur totale des pièces de 25 ¢ doit être un multiple de 25. Elle doit donc terminer par 00, 25, 50 ou 75.
Le reste des 265 cents provient des pièces de 10 ¢. Il est donc un multiple de 10 et doit donc terminer par 0.
La valeur des pièces de 25 ¢ doit donc terminer par 5, c'est-à-dire par 25 ou 75.
Puisque Alex a plus de pièces de 25 ¢ que de pièces de 10 ¢, on tente d'abord de déterminer le

plus grand nombre possible de pièces de 25 ¢ qu'il peut avoir.
La plus grande valeur possible des pièces de 25 ¢ est donc de 225 cents. Le nombre de pièces de 25 ¢ est égal à $225 \div 25$, ou 9. La valeur des pièces de 10 ¢, en cents, est alors égale à $265 - 225$, ou 40. Il y a donc 4 pièces de 10 ¢.
Le nombre total de pièces de monnaie est donc égal à $9 + 4$, ou 13.
(La plus grande valeur possible suivante des pièces de 25 ¢ est de 175 cents, ce qui correspond à 7 pièces de 25 ¢. Il y aurait alors 9 pièces de 10 ¢. Cela ne vérifie pas la condition imposée, soit qu'il y a plus de pièces de 25 ¢ que de pièces de 10 ¢.)

Réponse : (B)

12. *Solution 1*
Puisque les angles OMP et GMH sont opposés par le sommet, alors $\angle OMP = \angle GMH$.
Puisque les axes des abscisses et des ordonnées sont perpendiculaires, alors $\angle POM = 90°$.
Donc $\angle POM = \angle GHM$.
Puisque M est le milieu du segment OH, alors $OM = HM$.
Donc, les triangles POM et GHM sont congruents (angle-côté-angle). Donc $GH = OP = 4$.
Puisque GH est perpendiculaire à l'axe des abscisses, alors G a une abscisse de 12. G a donc pour coordonnées $(12, 4)$.

Solution 2
Puisque GH est perpendiculaire à l'axe des abscisses, G a une abscisse de 12. Ses coordonnées sont donc $(12, g)$, pour une valeur quelconque de g.
Puisque $OH = 12$ et que M est le milieu du segment OH, alors $OM = \frac{1}{2}(12)$, ou $OM = 6$. Donc, M a pour coordonnées $(6, 0)$.
Pour se rendre de P à M, il faut se déplacer de 6 unités vers la droite et de 4 unités vers le haut. Or, pour se rendre de M à G, on se déplace aussi de 6 unités vers la droite. Puisque P, M et G sont alignés, il faut aussi se déplacer de 4 unités vers le haut pour se rendre de M à G.
Donc, les coordonnés de G sont $(12, 4)$.

Réponse : (E)

13. Sur le morceau de carton donné, la face blanche et la face qui contient le « U » sont reliées de manière que le « U » soit ouvert vers l'arête qui les relie. Ceci élimine les choix (A) et (E), dans lesquels le « U » n'est pas ouvert vers l'arête qui relie ces deux faces.
Sur le morceau de carton donné, on voit qu'il est impossible pour les faces blanches et grises de partager une arête commune. Donc, le choix (C) est éliminé.
Sur le morceau de carton donné, on voit qu'il est impossible pour la face qui contient le « U » et la face qui contient le « V » de partager une arête commune. Donc, le choix (D) est éliminé.
Tous les choix ont été éliminés à l'exception du (B) qui doit être la réponse. (On peut visualiser le pliage du carton donné pour se convaincre que ce résultat est possible.)

Réponse : (B)

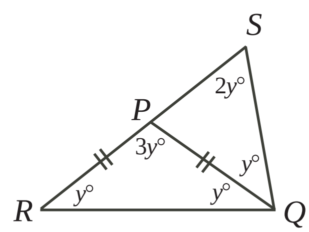
14. Le 3$^{\text{e}}$ terme est impair ($t = 5$). Le 4$^{\text{e}}$ terme est donc égal à $3(5) + 1$, ou 16, qui est pair.
Donc, le 5$^{\text{e}}$ terme est égal à $\frac{1}{2}(16)$, ou 8, qui est pair.
Donc, le 6$^{\text{e}}$ terme est égal à $\frac{1}{2}(8)$, ou 4, qui est pair.
Donc, le 7$^{\text{e}}$ terme est égal à $\frac{1}{2}(4)$, ou 2, qui est pair.
Donc, le 8$^{\text{e}}$ terme est égal à $\frac{1}{2}(2)$, ou 1, qui est impair.
Donc, le 9$^{\text{e}}$ terme est égal à $3(1) + 1$, ou 4, qui est pair.
Donc, le 10$^{\text{e}}$ terme est égal à $\frac{1}{2}(4)$, ou 2.

Réponse : (A)

15. On cherche d'abord les diviseurs premiers de 555.
Puisque 555 se termine par un 5, il est divisible par 5. On a donc $555 = 5 \times 111$.
Puisque la somme des chiffres de 111 est divisible par 3, alors 111 est divisible par 3.
On a donc $111 = 3 \times 37$.
Donc $555 = 3 \times 5 \times 37$, 3, 5 et 37 étant des nombres premiers.
Voici les façons d'exprimer 555 comme produit de deux entiers : 1×555, 3×185, 5×111 et 15×37. (Dans chaque produit, on a multiplié deux facteurs premiers ou plus pour obtenir un facteur composé.)
Seul 15×37 comprend deux facteurs de deux chiffres. Donc, $x + y$ est égal à $37 + 15$, ou 52.

Réponse : (A)

16. *Solution 1*
Puisque RPS est un segment de droite, alors $\angle SPQ = 180° - \angle RPQ$, ou $\angle SPQ = 180° - 3y°$.
Dans le triangle PQS, on a $\angle PQS + \angle QSP + \angle SPQ = 180°$.
Donc $x° + 2y° + (180° - 3y°) = 180°$, d'où $x - y + 180 = 180$, ou $x = y$.
(On aurait pu considérer l'angle RPQ comme angle extérieur au triangle SPQ.)
Puisque $x = y$, alors $\angle RQS = 2y°$.
Puisque $RP = PQ$, alors $\angle PRQ = \angle PQR = x° = y°$.



Donc, les angles du triangle RQS mesurent respectivement $y°$, $2y°$ et $2y°$.
Donc $y° + 2y° + 2y° = 180°$, d'où $5y = 180$, ou $y = 36$.
Donc $\angle RPQ = 3y°$, d'où $\angle RPQ = 3(36)°$, ou $\angle RPQ = 108°$.

Solution 2
Puisque $RP = PQ$, alors $\angle PRQ = \angle PQR = x°$.
Dans le triangle RPQ, on a $x° + 3y° + x° = 180°$ (ou $2x + 3y = 180$) et dans le triangle RSQ, on a $x° + 2y° + 2x° = 180$ (ou $3x + 2y = 180$).
On additionne ces équations, membre par membre, pour obtenir $5x + 5y = 360$, ou $x + y = 72$, ou $2x + 2y = 144$. On soustrait cette équation, membre par membre, de l'équation $2x + 3y = 180$ pour obtenir $y = 36$.
Donc $\angle RPQ = 3y°$, d'où $\angle RPQ = 3(36)°$, ou $\angle RPQ = 108°$.

Réponse : (B)

17. L'expression $\dfrac{p}{q}$ prend la plus grande valeur possible lorsque p prend la plus grande valeur possible, soit 10, et q prend la plus petite valeur possible, soit 12. La plus grande valeur possible de $\dfrac{p}{q}$ est donc égale à $\dfrac{10}{12}$, ou $\dfrac{5}{6}$.
Elle prend la plus petite valeur possible lorsque p prend la plus petite valeur possible, soit 3, et q prend la plus grande valeur possible, soit 21. La plus petite valeur possible de $\dfrac{p}{q}$ est donc égale à $\dfrac{3}{21}$, ou $\dfrac{1}{7}$.

La différence entre ces deux valeurs est égale à $\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{7}$, soit $\dfrac{35}{42} - \dfrac{6}{42}$, ou $\dfrac{29}{42}$.

Réponse : (A)

18. Supposons qu'il y a x billets de 1 \$.
Il y a donc $(x + 11)$ billets de 2 \$ et $(x - 18)$ billets de 3 \$.
Puisque les billets ont une valeur totale de 100 \$, alors :

$$\begin{aligned} 1(x) + 2(x + 11) + 3(x - 18) &= 100 \\ x + 2x + 22 + 3x - 54 &= 100 \\ 6x - 32 &= 100 \\ 6x &= 132 \\ x &= 22 \end{aligned}$$

Il y a donc 22 billets de 1 \$.

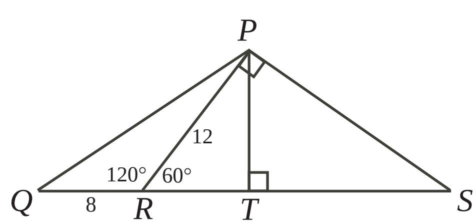
Réponse : (C)

19. *Solution 1*
Puisque $\frac{2}{3}$ des pommes sont pourries, que $\frac{3}{4}$ des poires sont pourries et qu'il y a un nombre égal de pommes et de poires pourries, on suppose d'abord qu'il y a 6 pommes et 6 poires qui sont pourries. (On a choisi 6, puisque c'est un multiple de chaque numérateur.)
S'il y a 6 pommes pourries, alors il y a 9 pommes en tout, puisque 6 est égal à $\frac{2}{3}$ de 9.
S'il y a 6 poires pourries, alors il y a 8 poires en tout, puisque 6 est égal à $\frac{3}{4}$ de 8.
Il y a donc $9 + 8$ fruits, ou 17 fruits dans la boîte, dont $6 + 6$, ou 12 sont pourris.
Donc $\frac{12}{17}$ des fruits sont pourris.

Solution 2
Supposons qu'il y a x pommes et y poires dans la boîte. Puisqu'il y a un nombre égal de pommes et de poires pourries, alors $\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y$, d'où $y = \frac{4}{3}(\frac{2}{3}x)$, ou $y = \frac{8}{9}x$.
Le nombre total de fruits est donc égal à $x + y$, c'est-à-dire à $x + \frac{8}{9}x$, ou $\frac{17}{9}x$.
Le nombre total de fruits pourris est égal à $2(\frac{2}{3}x)$, ou $\frac{4}{3}x$.
La fraction des fruits qui sont pourris est donc égale à $\dfrac{\frac{4}{3}x}{\frac{17}{9}x}$, soit $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{17}$, ou $\frac{12}{17}$.

Réponse : (D)

20. Puisque $\angle QRP = 120°$ et que QRS est un segment de droite, alors $\angle PRS = 180° - 120°$, ou $\angle PRS = 60°$.
Puisque $\angle RPS = 90°$, alors le triangle SRP est un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Donc $RS = 2PR$, d'où $RS = 2(12)$, ou $RS = 24$.
Au point P, on abaisse une perpendiculaire PT à RS.



Puisque $\angle PRT = 60°$ et $\angle PTR = 90°$, alors le triangle PRT est aussi un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $PT = \frac{\sqrt{3}}{2}PR$, ou $PT = 6\sqrt{3}$.

On considère le triangle QPS. QS est une base et PT est sa hauteur correspondante.
Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(6\sqrt{3})(8+24)$, ou $96\sqrt{3}$.

Réponse : (E)

21. Puisque le cercle intérieur a un rayon de 20 cm, son aire est égale à $\pi 20^2$ cm^2, ou 400π cm^2.
Donc, chaque panneau extérieur a une aire de 400π cm^2. L'aire totale de la fenêtre est donc égale à $9(400)\pi$ cm^2, ou 3600π cm^2.
Soit R le rayon du grand cercle. On a $\pi R^2 = 3600\pi$, d'où $R^2 = 3600$, ou $R = 60$, puisque $R > 0$.
Puisque les segments de droites qui séparent les panneaux extérieurs peuvent être prolongés pour passer par O, alors $x + 20 = 60$, d'où $x = 40$, ou $x = 40{,}0$, au dixième près.
(Il n'était pas nécessaire de calculer l'aire des cercles. Puisque le grand cercle est formé de 9 morceaux de même aire, son aire est 9 fois celle de l'aire du cercle intérieur. Donc, son rayon est 3 fois celui du cercle intérieur.)

Réponse : (A)

22. L'expression compte 52 termes, soit le nombre 1, le nombre 11 et les 50 nombres qui commencent et se terminent par un 1, avec de 1 à 50 zéros entre eux. Le dernier nombre a donc 52 chiffres (50 zéros et 2 uns).
La somme des chiffres des unités des 52 nombres est égale à 52. Le chiffre des unités de N est donc un 2 et il y a une retenue de 5 reportée à la colonne des dizaines.
Dans la colonne des dizaines, il y a un seul 1 (qui provient de 11), les autres chiffres étant 0. À cause de la retenue, le chiffre des dizaines de N est donc égal à $1 + 5$, ou 6.
Dans chacune des autres positions des nombres qu'il faut additionner, il n'y a qu'un chiffre 1, les autres étant 0. Donc, dans ces mêmes positions, le chiffre de N est aussi un 1. (Il n'y a aucune retenue.)
Donc $N = 11\cdots 1162$, N contenant $(52 - 2)$ fois, ou 50 fois le chiffre 1.
La somme des chiffres de N est donc égale à $50(1) + 6 + 2$, ou 58.

Réponse : (D)

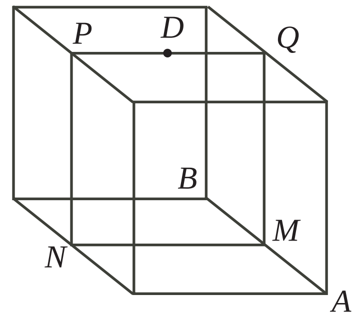
23. Le nombre 4^3 est égal à 64.
Voici les façons d'exprimer 64 sous forme a^b, a et b étant des entiers : 64^1, 8^2, 4^3, 2^6, $(-2)^6$ et $(-8)^2$. On utilise un tableau pour exprimer les valeurs de x et de y :

$y-1$	$x+y$	y	x
64	1	65	-64
8	2	9	-7
4	3	5	-2
2	6	3	3
-2	6	-1	7
-8	2	-7	9

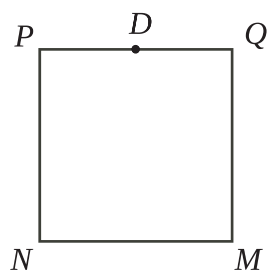
Il y a 6 valeurs possibles de x.

Réponse : (E)

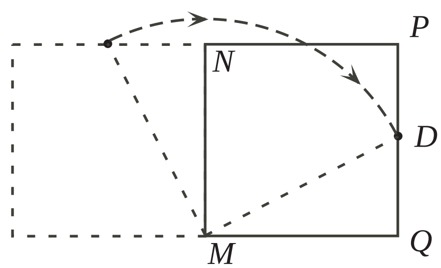
24. Supposons que l'on fait d'abord rouler le cube par rapport à l'arête AB.
On considère que le cube est formé de deux demi-cubes (chacun de dimensions $1 \times 1 \times \frac{1}{2}$) collés le long du carré $PQMN$. ($PQMN$ fait partie d'un plan vertical.)
Le point D est situé au centre de la face supérieure. Il est donc situé sur le carré $PQMN$.



Puisque le cube roule toujours dans une direction perpendiculaire à AB, le point D roule toujours dans le plan du carré $PQMN$. Au lieu du problème initial en trois dimensions, on peut donc ne considérer que le probléme du carré qui tourne dans un plan. Le carré $MNPQ$ a des côtés de longueur 1. Puisque D était au milieu de la face supérieure, alors $DQ = \frac{1}{2}$.

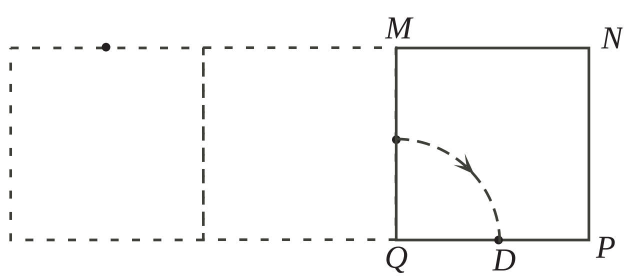


D'après le théorème de Pythagore, $MD^2 = DQ^2 + QM^2$, d'où $MD^2 = \frac{1}{4} + 1$, ou $MD^2 = \frac{5}{4}$. Donc $MD = \frac{\sqrt{5}}{2}$, puisque $MD > 0$. Dans la 1re partie du roulement, on commence avec NM sur la table et on fait rouler par rapport au point M, jusqu'à ce que Q touche à la table.



Il s'agit d'une rotation de 90° de centre M. Puisque D demeure à une distance de $\frac{\sqrt{5}}{2}$ du point M et que 90° est $\frac{1}{4}$ de 360°, D tourne sur un quart de cercle de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$, soit sur une distance de $\frac{1}{4}(2\pi\frac{\sqrt{5}}{2})$, ou $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$.

Dans la 2e partie du roulement, Q est est le centre et le carré roule jusqu'à ce que P touche à la table.



Il s'agit d'une rotation de 90°. De plus, $QD = \frac{1}{2}$. D tourne sur un quart de cercle de rayon $\frac{1}{2}$, soit sur une distance de $\frac{1}{4}(2\pi\frac{1}{2})$, ou $\frac{1}{4}\pi$.

Dans la 3e partie du roulement, P est le centre et le carré roule jusqu'à ce que N touche à la

table. Cela est semblable à la 2e partie du roulement. D roule donc sur une distance de $\frac{1}{4}\pi$.
Dans la 4e partie du roulement, N est le centre et le carré roule jusqu'à ce que M touche à la table. Cela est semblable à la 1re partie du roulement. D roule donc sur une distance de $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$. Il s'agit de la dernière partie du roulement, puisque le carré revient à sa position initiale.
La longueur du trajet parcouru par D est donc égale à $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi + \frac{\sqrt{5}}{4}\pi$, ou $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\pi$.

Réponse : (E)

25. Le nombre de permutations des 7 nombres $\{1, 2, 3, 11, 12, 13, 14\}$ est égal à 7!, ou 7(6)(5)(4)(3)(2)(1).
Pour déterminer la valeur moyenne de l'expression

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-e)^2 + (e-f)^2 + (f-g)^2 \qquad (*)$$

on détermine la somme des valeurs de l'expression pour chacune des permutations et on divise cette somme par le nombre de permutations.
Soit x et y deux des sept nombres donnés. Pour paraître dans l'expression, x et y doivent être dans des positions adjacentes. Dans combien de permutations cela survient-il ?
Pour les calculer, on traite x et y comme un seul objet, soit $(x\ y)$, qui doit être permuté avec les 5 autres nombres. Ceux-ci ne peuvent être placés entre x et y.
On calcule donc le nombre de permutations de 6 objets, ou « nombres » (soit $(x\ y)$ et 5 autres nombres). Le nombre de permutations est égal à 6(5)(4)(3)(2)(1), ou 6!.
Or, on aurait le même nombre de permutations si y était suivi de x. Le nombre de permutations où x et y sont en positions adjacentes est donc égal à 2(6!).
Donc, lorsqu'on additionne les valeurs de l'expression (*) pour toutes les permutations, le terme $(x-y)^2$ (qui est égal à $(y-x)^2$) paraîtra 2(6!) fois.
Ceci est vrai, peu importe la valeur de x et de y.
La valeur moyenne est donc égale à 2(6!) fois la somme des valeurs possibles de $(x-y)^2$ lors des choix de x et de y, $x < y$, divisée par 7!.
La somme des valeurs possibles de $(x-y)^2$ est égale à :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1^2 & + & 2^2 & + & 10^2 & + & 11^2 & + & 12^2 & + & 13^2 & & \\
 & + & 1^2 & + & 9^2 & + & 10^2 & + & 11^2 & + & 12^2 & & \\
 & & & + & 8^2 & + & 9^2 & + & 10^2 & + & 11^2 & & \\
 & & & & & + & 1^2 & + & 2^2 & + & 3^2 & & \\
 & & & & & & & + & 1^2 & + & 2^2 & & \\
 & & & & & & & & & + & 1^2 & = & 1372
\end{array}$$

(Pour ce calcul, on a choisi 1 avec chacun des 6 nombres plus grands, ensuite 2 avec chacun des 5 nombres plus grands, et ainsi de suite. On s'en est tenu aux nombres plus grands, car la méthode expliquée ci-haut tient compte des autres cas.)
La valeur moyenne est donc égale à $\dfrac{2(6!)(1372)}{7!}$, soit $\dfrac{2(1372)}{7}$, ou 392.

Réponse : (D)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Cayley 2007

(10e année ou Secondaire IV)

le mardi 20 février 2007

Solutions

1. On a : $8 + 2(3^2) = 8 + 2(9) = 8 + 18 = 26$

Réponse : (A)

2. On a : $\dfrac{7+21}{14+42} = \dfrac{28}{56} = \dfrac{1}{2}$

Réponse : (C)

3. Si $3x - 2x + x = 3 - 2 + 1$, alors $2x = 2$, ou $x = 1$.

Réponse : (B)

4. En 3 heures, Léone gagne 24,75 \$. En une heure, elle gagne donc 24,75 \$ $\div$ 3, soit 8,25 \$.
Pendant un quart de 5 heures, Léone gagne donc $5 \times 8{,}25$ \$, soit 41,25 \$.

Réponse : (E)

5. $\frac{1}{4}$ de 100 est égal à $\frac{1}{4} \times 100$, soit 25.
On évalue chacun des choix de réponse :
   (A) : 20 % de 200 est égal à 0,2(200), soit 40.
   (B) : 10 % de 250 est égal à 0,1(250), soit 25.
   (C) : 15 % de 100 est égal à 15.
   (D) : 25 % de 50 est égal à 0,25(50), soit 12,5.
   (E) : 5% de 300 est égal à 0,05(300), soit 15.

Donc, la réponse est (B).
(Il n'était pas nécessaire d'évaluer (C), (D) et (E) après avoir constaté que la réponse est (B).)

Réponse : (B)

6. On évalue les expressions des choix de réponse en posant $a = 2$ et $b = 5$:
(A) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{5}$ (B) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{2}$ (C) $a - b = 2 - 5 = -3$ (D) $b - a = 5 - 2 = 3$ (E) $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(2) = 1$
La plus grande valeur est 3, qui provient de (D).

Réponse : (D)

7. La moyenne de 6, de 9 et de 18 est égale à $\dfrac{6+9+18}{3}$, soit $\dfrac{33}{3}$, ou 11.
Donc, la moyenne de 12 et de y est égale à 11. La somme de 12 et de y est donc égale à 2(11), soit 22. Donc $y = 10$.

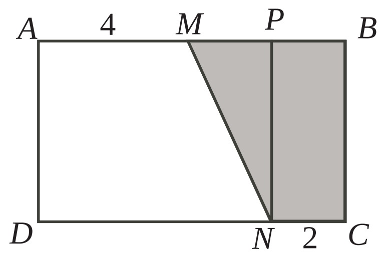
Réponse : (C)

8. Dans le triangle ABC, $\angle ABC = \angle BAC$. Donc $AC = BC$.
Dans le triangle BCD, $\angle CBD = \angle CDB$. Donc $CD = BC$.
Puisque le triangle CBD a un périmètre de 19 et que $BD = 7$, alors $7 + BC + CD = 19$, d'où $2(BC) = 12$, ou $BC = 6$.
Puisque $BC = 6$, $AC = BC$ et que le triangle ABC a un périmètre de 20, alors $AB + 6 + 6 = 20$, d'où $AB = 8$.

Réponse : (D)

9. *Solution 1*
Puisque le rectangle $ABCD$ a une aire de 40 et que $AB = 8$, alors $BC = 5$.
Donc, $MBCN$ est un trapèze ayant des bases de longueurs 2 et 4 et une hauteur de 5. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(5)(4+2)$, soit 15.

Solution 2
Puisque le rectangle $ABCD$ a une aire de 40 et que $AB = 8$, alors $BC = 5$.
Au point N, on abaisse une perpendiculaire NP au côté AB.



La figure $MBCN$ est ainsi divisée en un rectangle $PBCN$, qui a une largeur de 2 et une hauteur de 5, et un triangle MPN qui a une base MP de longueur 2 et une hauteur PN de longueur 5. L'aire de la figure $MBCN$ est égale à la somme de l'aire de ces parties, soit $2(5) + \frac{1}{2}(2)(5)$, soit $10 + 5$, ou 15.

Réponse : (A)

10. *Solution 1*
On obtient chaque terme en doublant le terme précédent et en ajoutant 4.
Puisque le premier terme est x, le deuxième terme est $2x + 4$.
Puisque le deuxième terme est $2x + 4$, le troisième terme est $2(2x + 4) + 4$, soit $4x + 12$.
Puisque le troisième terme est 52, alors $4x + 12 = 52$, d'où $4x = 40$, ou $x = 10$.

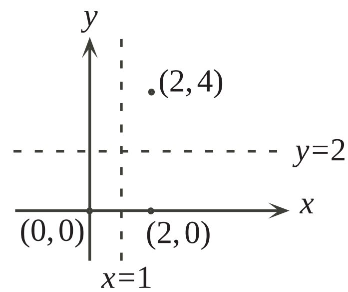
Solution 2
On obtient chaque terme en doublant le terme précédent et en ajoutant 4.
Donc, pour obtenir le terme précédent, on soustrait 4 du terme actuel, puis on divise par 2.
Puisque le troisième terme est 52, on soustrait 4 pour obtenir 48, puis on divise par 2 pour obtenir 24. Le deuxième terme est donc 24.
Puisque le deuxième terme est 24, on soustrait 4 pour obtenir 20, puis on divise par 2 pour obtenir 10. Donc, le premier terme est 10.
Donc $x = 10$.

Réponse : (D)

11. Supposons que Ivan a parcouru une distance de x km lundi.
Donc mardi, il a parcouru $2x$ km ; mercredi, il a parcouru x km ; jeudi, il a parcouru $\frac{1}{2}x$ km ; vendredi, il a parcouru x km.
La distance la plus courte parcourue en une journée est celle de jeudi. Donc $\frac{1}{2}x = 5$, d'où $x = 10$.
Les distances parcourues sont donc 10 km, 20 km, 10 km, 5 km et 10 km, pour un total de 55 km.

Réponse : (A)

12. Lorsque le point (0,0) est réfléchi par rapport à la droite d'équation $x = 1$, l'image est le point (2,0).



Lorsque le point (2,0) est réfléchi par rapport à la droite d'équation $y = 2$, l'image est le point (2,4).

RÉPONSE : (E)

13. *Solution 1*
Puisque le rapport $AN : AC$ est égal au rapport $AP : PB$ (chacun est égal à $1 : 2$) et que l'angle A est commun aux triangles APN et ABC, alors les triangles APN et ABC sont semblables.
Puisque les longueurs de deux côtés correspondants dans ces triangles sont dans un rapport de $1 : 2$, alors les aires sont dans un rapport de $1^2 : 2^2$, soit $1 : 4$.
Donc, l'aire du triangle ABC est égale à 4×2 cm^2, soit 8 cm^2.

Solution 2
Puisque le rapport $AN : AC$ est égal au rapport $AP : PB$ (chacun est égal à $1 : 2$) et que l'angle A est commun aux triangles APN et ABC, alors les triangles APN et ABC sont semblables.
Donc $\angle ANP = \angle ACB = 90°$.
De même, les triangles PMB et ACB sont semblables, d'où $\angle PMB = \angle ACB = 90°$.
Donc $AN = NC = PM = \frac{1}{2}AC$ et $NP = CM = MB = \frac{1}{2}CB$.
Donc, les triangles PMB et ANP sont congruents. Chacun a donc une aire de 2 cm^2.
Le rectangle $NPMC$ a la même base et la même hauteur que le triangle ANP. Son aire est donc le double de celle du triangle APN, soit 4 cm^2.
Donc, l'aire du triangle ABC est égale à $(2 + 4 + 2)$ cm^2, soit 8 cm^2.

Solution 3
On joint C à P.
Puisque CP est une diagonale du rectangle, les triangles CPN et PCM sont congruents. Ils ont donc la même aire.
Puisque $AN = NC$ et que les triangles PNA et PNC ont la même hauteur, soit PN, ils ont la même aire.
De même, les triangles PMC et PMB ont la même aire.
Donc, les quatre petits triangles ont la même aire.
Puisque le triangle APN a une aire de 2 cm^2, le triangle ABC a une aire de 8 cm^2.

RÉPONSE : (A)

14. On utilise un dénominateur commun pour simplifier le membre de gauche :
$\dfrac{3}{x-3} + \dfrac{5}{2x-6} = \dfrac{6}{2x-6} + \dfrac{5}{2x-6} = \dfrac{11}{2x-6}$.
L'équation devient $\dfrac{11}{2x-6} = \dfrac{11}{2}$, d'où $2x - 6 = 2$.

RÉPONSE : (A)

15. Puisque les triangles ABC et PQR sont équilatéraux, $\angle ABC = \angle ACB = \angle RPQ = 60°$.
Donc $\angle YBP = 180° - 65° - 60°$, ou $\angle YBP = 55°$. De plus, $\angle YPB = 180° - 75° - 60°$, ou $\angle YPB = 45°$.
Dans le triangle BYP, $\angle BYP = 180° - \angle YBP - \angle YPB$, d'où $\angle BYP = 180° - 55° - 45°$, ou $\angle BYP = 80°$.
Puisque $\angle XYC = \angle YBP$, alors $\angle XYC = 80°$.
Dans le triangle CXY, $\angle CXY = 180° - 60° - 80°$, ou $\angle CXY = 40°$.

Réponse : (C)

16. Puisque 60 % des 10 000 étudiants sont inscrits dans un programme de lettres, 6000 étudiants sont en lettres et 4000 étudiants sont en sciences.
Puisque 40 % des étudiants inscrits en sciences sont des hommes, cela correspond à 0,4(4000) hommes. Il y a donc 1600 hommes en sciences.
Puisque la moitié des 10 000 étudiants sont des hommes, il y a 5000 hommes inscrits à l'université.
Le nombre d'hommes en lettres est donc égal à $5000 - 1600$, ou 3400.
Le nombre de femmes en lettres est égal à $6000 - 3400$, ou 2600. Donc, le pourcentage des étudiants en lettres qui sont des femmes est égal à $\frac{2600}{6000} \times 100\,\%$, soit environ 43,33 %.

Réponse : (E)

17. On remarque que peu importe le nombre de Héros présents, tous les quatre répondront toujours « Un Héro » lorsqu'on leur demande « Êtes-vous un Héro ou un Vilain ? ». (En effet, les Héros diront la vérité et répondront « Un Héro » et les Vilains mentiront et répondront « Un Héro ».)
Lorsqu'on leur demande « La personne à votre droite est-elle un Héro ou un Vilain ? », chacun répond « Un Vilain ». Donc, chaque Héro doit avoir un Vilain à sa droite (sinon il aurait répondu « Un Héro ») et chaque Vilain doit avoir un Héro à sa droite (sinon il aurait un Vilain à sa droite et aurait répondu « Un Héro »).
Donc, les Héros et les Vilains doivent alterner autour de la table. Il y a donc 2 Héros à la table.
(Il est bon de vérifier que si 2 Héros et 2 Vilains alternent autour de la table, on recevra bien ces réponses aux questions.)

Réponse : (C)

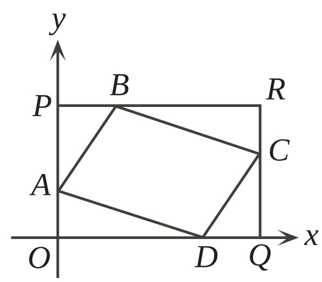
18. *Solution 1*
Soit x le nombre total de boules dans le sac.
Il y a donc $\frac{1}{3}x$ boules rouges et $\frac{2}{7}x$ boules bleues dans le sac.
Le nombre de boules vertes est donc égal à $x - \frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x$, c'est-à-dire à $\frac{21}{21}x - \frac{7}{21}x - \frac{6}{21}x$, ou $\frac{8}{21}x$.
Or, on sait que le nombre de boules vertes est égal à $2 \times \frac{2}{7}x - 8$.
Donc $\frac{8}{21}x = 2 \times \left(\frac{2}{7}x\right) - 8$, c'est-à-dire $\frac{8}{21}x = \frac{12}{21}x - 8$, d'où $\frac{4}{21}x = 8$, ou $x = 42$.
Puisque $x = 42$, le nombre de boules vertes est égal à $\frac{8}{21}x$, c'est-à-dire à $\frac{8}{21}(42)$, ou 16.

Solution 2
On suppose qu'il y a 21 boules dans le sac. (On choisit 21, car dans le problème, on parle d'une fraction ayant un dénominateur de 3 et d'une autre ayant un dénominateur de 7.)
Puisque $\frac{1}{3}$ des boules sont rouges, il y a 7 boules rouges dans le sac.
Puisque $\frac{2}{7}$ des boules sont bleues, il y a 6 boules bleues dans le sac.
Le nombre de boules vertes dans le sac est donc égal à $21-7-6$, soit 8. Or, ce nombre correspond à seulement 4 de moins que deux fois le nombre de boules bleues. Donc, il ne peut pas y avoir 21 boules dans le sac.

Pour corriger la situation, on vérifie ce qui arrive si on double le nombre de billes dans le sac. S'il y a 42 boules dans le sac, il y a 14 boules rouges et 12 boules bleues. Donc, il y a 16 boules vertes, ce qui est 8 de moins que deux fois le nombre de boules bleues.
Le nombre de boules vertes est donc égal à 16.

Réponse : (B)

19. Au point B, on trace une droite horizontale qui coupe l'axe des ordonnées en P. Au point C, on trace une droite verticale qui coupe l'axe des abscisses en Q. Soit R le point d'intersection de ces droites.



Puisque B a une ordonnée de 3, alors P a pour coordonnées $(0, 3)$. Puisque C a une abscisse de 5, alors Q a pour coordonnées $(5, 0)$. Donc, R a pour coordonnées $(5, 3)$.
D'après ces coordonnées, on a $OA = 1$, $AP = 2$, $PB = 1$, $BR = 4$, $RC = 1$, $CQ = 2$, $QD = 1$ et $DO = 4$.
L'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à l'aire du rectangle $PRQO$ moins l'aire des triangles APB, BRC, CQD et DOA.
Le rectangle $PRQO$ a une aire de 3×5, soit 15.
Les triangles APB et CQD ont une base respective, PB et QD, de longueur 1 et une hauteur respective, AP et CQ, de longueur 2. Donc, chacun a une aire de $\frac{1}{2}(1)(2)$, soit 1.
Les triangles BRC et DOA ont une base respective, BR et DO, de longueur 4 et un hauteur respective, CR et AO, de longueur 1. Donc, chacun a une aire de $\frac{1}{2}(4)(1)$, soit 2.
L'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à $15 - 1 - 1 - 2 - 2$, ou 9.
(On aurait pu remarquer que $ABCD$ est un parallélogramme. Donc, si on trace la diagonale AC, on obtient deux parties ayant la même aire. Au point C, si on abaisse une perpendiculaire CQ à l'axe des abscisses, on obtient un trapèze $ACQO$. On peut calculer son aire et en soustraire l'aire de deux triangles pour obtenir l'aire de la moitié du quadrilatère $ABCD$.)

Réponse : (A)

20. Puisque $3(n^{2007}) < 3^{4015}$, alors $n^{2007} < \dfrac{3^{4015}}{3}$, d'où $n^{2007} < 3^{4014}$.
Or $3^{4014} = (3^2)^{2007} = 9^{2007}$. On a donc $n^{2007} < 9^{2007}$.
Donc $n < 9$. Le plus grand entier n qui vérifie l'inéquation est $n = 8$.

Réponse : (D)

21. Puisque T a joué 5 parties, elle a rencontré chaque autre équipe, soit P, Q, R, S et W.
Puisque P a joué une partie et qu'elle a rencontré T, alors P a seulement joué cette partie.
Puisque S a joué 4 parties et qu'elle n'a pas rencontré P, alors S doit avoir rencontré chacune des 4 autres équipes, soit Q, R, T et W.
Puisque Q a joué 2 parties et qu'elle a rencontré T et S, alors Q a seulement joué ces parties.
Puisque R a joué 3 parties, qu'elle a rencontré T et S, mais qu'elle n'a pas rencontré P ou Q, alors R doit avoir rencontré W.

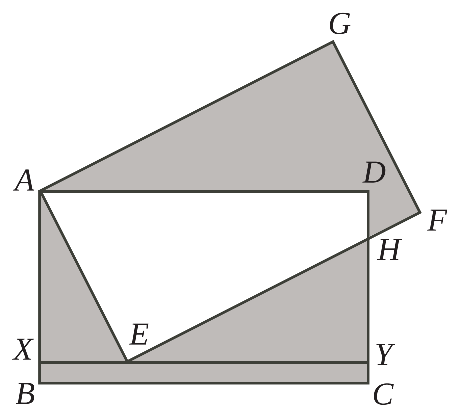
Donc, W a rencontré T, S et R. Elle a donc joué 3 parties. (Puisqu'on a tenu compte de tous les adversaires possibles de W, alors W n'a joué aucune autre partie.)

Réponse : (C)

22. Soit n le premier entier de cette liste.
Les entiers suivants sont donc $n+3$, $n+6$, $n+9$ et $n+12$.
Puisque le cinquième nombre est un multiple du premier, alors $\dfrac{n+12}{n}$ est un entier.
Or $\dfrac{n+12}{n} = \dfrac{n}{n} + \dfrac{12}{n} = 1 + \dfrac{12}{n}$.
Donc $1 + \dfrac{12}{n}$ est un entier. Donc $\dfrac{12}{n}$ est un entier, c'est-à-dire que n est un diviseur positif de 12.
Les diviseurs positifs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Il y a donc 6 valeurs possibles de n. Il y a donc 6 listes différentes possibles.
(On peut vérifier que chacune des valeurs de n produit une liste particulière et que chacune vérifie la propriété exigée.)

Réponse : (D)

23. Puisque la région non ombrée, soit $AEHD$, se retrouve à l'intérieur de chaque rectangle et que les deux rectangles ont la même aire, alors les deux régions ombrées ont la même aire.
Au point E, on trace une droite horizontale qui coupe les côtés AB et HC aux points respectifs X et Y.



Puisque $\angle BAE = 30°$, le triangle AEX est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Puisque $AE = 12$, alors $EX = \frac{1}{2}AE$ et $AX = \sqrt{3}EX$, d'où $EX = 6$ et $AX = 6\sqrt{3}$.
L'aire du triangle EXA est donc égale à $\frac{1}{2}(6)(6\sqrt{3})$, soit $18\sqrt{3}$.
Puisque $AB = 12$ et que $AX = 6\sqrt{3}$, alors $XB = 12 - 6\sqrt{3}$.
Le rectangle $BXYC$ a donc une hauteur de $12 - 6\sqrt{3}$ et une base de 18. Il a donc une aire de $18(12 - 6\sqrt{3})$, ou $216 - 108\sqrt{3}$.
Puisque $XY = BC = 18$ et que $EX = 6$, alors $EY = 12$.
Puisque $\angle AEB = 60°$ et que $\angle AEH = 90°$, alors $\angle HEY = 30°$.
Le triangle EHY est donc un triangle remarquable $30° - 60° - 90°$. Puisque $EY = 12$, alors $HY = \dfrac{12}{\sqrt{3}}$, ou $HY = 4\sqrt{3}$.
Le triangle EHY a donc une aire de $\frac{1}{2}(12)(4\sqrt{3})$, ou $24\sqrt{3}$.
L'aire totale de la région $AEHCB$ est donc égale à $18\sqrt{3} + (216 - 108\sqrt{3}) + 24\sqrt{3}$, ou $216 - 66\sqrt{3}$.
L'aire totale des régions ombrées est donc égale à $2(216 - 66\sqrt{3})$, ou $432 - 132\sqrt{3}$, soit environ 203,369.

Réponse : (C)

24. Pour former une telle collection, on commence par inclure des entiers supérieurs à 1 dont le produit est égal à 2007. Ensuite, on ajoutera autant de 1 qu'il faut pour que la somme soit égale à 2007.

Pour faire en sorte que n soit aussi petit que possible, on veut que le nombre de 1 soit aussi petit que possible. On veut donc que les entiers choisis initialement, qui ont un produit de 2007, soient aussi grands que possible.

Pour trouver des entiers qui ont un produit de 2007, on détermine les diviseurs de 2007.

On a $2007 = 3 \times 669 = 3 \times 3 \times 223$ et 223 est un nombre premier. On peut le vérifier en vérifiant qu'il n'est pas divisible par les nombres premiers de 2 à 23.

Les collections possibles d'entiers supérieurs à 1 qui ont un produit de 2007 sont $\{3, 669\}$, $\{3, 3, 223\}$ et $\{9, 223\}$.

La collection ayant la plus grande somme est $\{3, 669\}$, avec une somme de 672. Pour obtenir une somme de 2007, il faut ajouter $2007 - 672$, soit 1335 fois le nombre 1. La collection contient donc $(1335 + 2)$ entiers, soit 1337 entiers.

La plus petite valeur possible de n est 1337.

Réponse : (B)

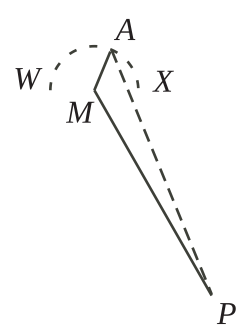
25. Puisque $\angle WAX = 90°$, quelle que soit la position du carré $ABCD$, alors A est toujours situé sur le demi-cercle de diamètre WX.

Le centre de ce demi-cercle est le milieu M de WX.

Pour se rendre de P à M, sur la figure, on monte de 4 et on parcourt 3 unités vers la gauche (puisque $WX = 2$). Donc $PM^2 = 3^2 + 4^2$, d'où $PM = 5$.

Puisque $WX = 2$ le demi-cercle de diamètre WX a un rayon de 1. Donc $AM = 1$.

On a donc $AM = 1$ et $MP = 5$.



La longueur maximale possible de AP est égale à $5 + 1$, soit 6, lorsque les points A, M et P sont alignés.

Réponse : (E)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Cayley 2006

(10^{e} année ou Secondaire IV)

le mercredi 22 février 2006

Solutions

1. On a : $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Réponse : (E)

2. On a : $(\sqrt{100} - \sqrt{36})^2 = (10-6)^2 = 4^2 = 16$

Réponse : (A)

3. On effectue d'abord les soustractions :

$$43 - 41 + 39 - 37 + 35 - 33 + 31 - 29 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

Réponse : (A)

4. Puisque $a = -3$ et $b = 2$, alors $a(b-3) = (-3)(2-3)$, ce qui est égal à $(-3)(-1)$, ou 3.

Réponse : (C)

5. Pour connaître le nombre par lequel on multiplie le 1$^{\text{er}}$ terme pour obtenir le 2$^{\text{e}}$, on divise le 2$^{\text{e}}$ terme par le 1$^{\text{er}}$. On obtient $0{,}02 \div 0{,}001 = 20$. (On peut vérifier que 20 fois le 2$^{\text{e}}$ terme est égal au 3$^{\text{e}}$ terme.) Le 4$^{\text{e}}$ terme est donc égal à $20(0{,}4)$, ou 8.

Réponse : (B)

6. La base BC du triangle ABC a une longueur de 20.
Puisque le triangle ABC a une aire de 240, alors $\frac{1}{2}bh = 240$, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}(20)h = 240$, d'où $10h = 240$, ou $h = 24$. Donc, le point A a une ordonnée de 24.

Réponse : (D)

7. *Solution 1*
La fraction $\frac{3}{2}$ est égale à $\frac{6}{4}$. L'équation devient $\dfrac{6}{x+1} = \dfrac{6}{4}$.
Puisque les numérateurs sont égaux, les dénominateurs sont égaux. Donc $x + 1 = 4$, d'où $x = 3$.

Solution 2
On a $\dfrac{6}{x+1} = \dfrac{3}{2}$. Le produit en croix donne $2(6) = 3(x+1)$, ou $12 = 3x + 3$, d'où $x = 3$.

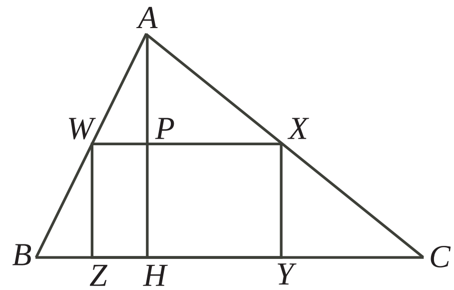
Solution 3
Si on inverse les deux membres de l'équation, l'égalité est conservée. Donc $\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{2}{3}$, d'où $x + 1 = 6 \times \frac{2}{3}$. Donc $x = 3$.

Réponse : (C)

8. *Solution 1*
Puisque $WXYZ$ est un rectangle, alors $\angle ZWX = \angle WXY = 90^\circ$.
Donc $\angle AWX = 180^\circ - \angle ZWX - \angle BWZ$, c.-à-d. que $\angle AWX = 180^\circ - 90^\circ - 22^\circ$,
ou $\angle AWX = 68^\circ$. De même, $\angle AXW = 180^\circ - \angle WXY - \angle CXY$, c.-à-d. que
$\angle AXW = 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ$, ou $\angle AXW = 25^\circ$.
Dans le triangle AWX, $\angle BAC = 180^\circ - \angle AWX - \angle AXW$, ou $\angle BAC = 180^\circ - 68^\circ - 25^\circ$.
Donc $\angle BAC = 87^\circ$.

Solution 2
Puisque $WXYZ$ est un rectangle, les angles WZY et XYZ sont droits et les triangles WZB et XYC sont rectangles. Donc $\angle WBZ = 90° - \angle BWZ$, c.-à-d. que $\angle WBZ = 90° - 22°$, ou $\angle WBZ = 68°$.
De même, $\angle XCY = 90° - \angle CXY$, c.-à-d. que $\angle XCY = 90° - 65°$, ou $\angle XCY = 25°$.
Dans le triangle ABC, $\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle ACB$, c.-à-d. que $\angle BAC = 180° - 68° - 25°$, ou $\angle BAC = 87°$.

Solution 3
Au point A, on abaisse une perpendiculaire AH à BC.



Puisque WZ, AH et XY sont perpendiculaires à BC, elles sont parallèles entre elles.
Donc $\angle BAH = \angle BWZ = 22°$ et $\angle CAH = \angle CXY = \angle 65°$.
Donc $\angle BAC = 22° + 65°$, ou $\angle BAC = 87°$.

Réponse : (A)

9. Puisque le triangle a un périmètre de 36, alors $7 + (x + 4) + (2x + 1) = 36$, ou $3x + 12 = 36$. Donc $3x = 24$, ou $x = 8$.
L'expression $x + 4$ est égale à $8 + 4$, ou 12, et l'expression $2x + 1$ est égale à $2(8) + 1$, ou 17. Les côtés du triangle ont pour longueurs 7, 12 et 17. Le plus grand côté a donc une longueur de 17.

Réponse : (C)

10. Selon les renseignements donnés, la somme des notes des élèves de la classe est égale à $20(80) + 8(90) + 2(100)$, ou 2520.
La note moyenne de la classe est égale à $2520 \div 30$, ou 84.

Réponse : (B)

11. *Solution 1*
Puisque les côtés du triangle DEF sont 50 % plus longs que ceux du triangle ABC, les côtés du triangle DEF ont pour longueurs respectives $\frac{3}{2}(6)$, $\frac{3}{2}(8)$ et $\frac{3}{2}(10)$, soit 9, 12 et 15.
On sait que le triangle DEF est rectangle. L'hypoténuse est le côté le plus long. Donc, les cathètes ont pour longueurs 9 et 12.
L'aire du triangle DEF est donc égale à $\frac{1}{2}(9)(12)$, ou 54.

Solution 2
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(6)(8)$, ou 24.
Puisqu'on multiplie la longueur des côtés du triangle ABC par $\frac{3}{2}$ pour obtenir la longueur des côtés du triangle DEF, alors l'aire du triangle DEF est égale à $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ fois l'aire du triangle ABC.
L'aire du triangle DEF est donc égale à $\left(\frac{3}{2}\right)^2(24)$, c.-à-d. à $\frac{9}{4}(24)$, ou 54.

Réponse : (E)

12. *Solution 1*
Puisque Jules conduit de 19 h 45 à 21 h 30, il conduit pendant 1 heure et 45 minutes, c'est-à-dire $1\frac{3}{4}$ heure, ou $\frac{7}{4}$ heure.
Puisqu'il parcourt 84 km en $\frac{7}{4}$ heure à une vitesse constante, sa vitesse est égale à $\dfrac{84}{\frac{7}{4}}$ km/h, c'est-à-dire à $84 \times \frac{4}{7}$ km/h, ou 48 km/h.

Solution 2
Puisque Jules conduit de 19 h 45 à 21 h 30, il conduit pendant 1 heure et 45 minutes, ce qui correspond à 7 quarts d'heure. Il parcourt 84 km en 7 quarts d'heure, ou 12 km par quart d'heure. Il parcourt donc 4×12 km, ou 48 km, en une heure. Sa vitesse est donc égale à 48 km/h.

Réponse : (E)

13. On reporte $x = 2y$ dans l'équation $x + 1 = y - 8$ pour obtenir $2y + 1 = y - 8$, d'où $y = -9$.
Donc $x = 2(-9)$, ou $x = -18$. Donc $x + y = (-9) + (-18)$, ou $x + y = -27$.

Réponse : (D)

14. On évalue chacun des choix de réponse en utilisant $x = -3$:

$$(-3)^2 - 3 = 6 \qquad (-3-3)^2 = 36 \qquad (-3)^2 = 9 \qquad (-3+3)^2 = 0 \qquad (-3)^2 + 3 = 12$$

La plus petite valeur est celle de $(x + 3)^2$.

Réponse : (D)

15. *Solution 1*
Puisque le chiffre des unités du produit $39P \times Q3$ provient du produit $P \times 3$ et que ce chiffre des unités est un 1, alors P doit être le chiffre 7.
On a donc $397 \times Q3 = 32\,951$, d'où $Q3 = 32\,951 \div 397$, ou $Q3 = 83$. Donc $Q = 8$. Donc $P + Q = 15$.

Solution 2
Puisque le chiffre des unités du produit $39P \times Q3$ provient du produit $P \times 3$ et que ce chiffre des unités est un 1, alors P doit être le chiffre 7. On a donc :

$$\begin{array}{r} 3\,9\,7 \\ \times \quad Q\,3 \\ \hline 1\,1\,9\,1 \\ \square \\ \hline 3\,2\,9\,5\,1 \end{array}$$

Or, le chiffre des unités du produit $Q \times 7$ doit être un 6 (là où est placé le $\square$) pour que le chiffre des dizaines du produit donné soit un 5. Puisque le chiffre des unités de $Q \times 7$ est un 6, alors $Q = 8$. Donc $P + Q = 15$.

Réponse : (C)

16. Soit c le coût, en cents, du téléchargement d'une chanson en 2005.
En 2004, le coût du téléchargement d'une chanson était donc de $c + 32$ cents.
Le coût total des téléchargements était donc de $360c$ cents en 2005 et de $200(c + 32)$ cents en 2004. Donc $360c = 200(c + 32)$, d'où $160c = 6400$, ou $c = 40$.
Le coût total des téléchargements de 2005 était donc de $360(40)$ cents, soit 14 400 cents, ou 144,00 \$.

Réponse : (A)

17. Puisque w est strictement positif, alors $w \neq 0$. On peut donc diviser chaque membre de l'équation $w^3 = 9w$ par w (qui n'est pas nul) pour obtenir $w^2 = 9$. Puisque w est positif, alors $w = 3$.
Donc $w^5 = 3^5$, ou $w^5 = 243$.

Réponse : (B)

18. Soit a, b et c les longueurs des côtés, c étant celle de l'hypoténuse.
D'après le théorème de Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$. Or, on sait que $a^2 + b^2 + c^2 = 1800$.
Cette équation devient donc $c^2 + c^2 = 1800$, ou $2c^2 = 1800$. Donc $c^2 = 900$, d'où $c = 30$ (car on sait que les longueurs sont positives). Donc, l'hypoténuse a une longueur de 30.

Réponse : (D)

19. *Solution 1*
Au départ, 90 % des 200 bonbons sont noirs. Il y avait donc 180 bonbons noirs. Les 20 autres bonbons étaient donc rouges.
Puisque Jacob ne mange que des bonbons noirs, le nombre de bonbons rouges ne change pas.
À la fin, les 20 bonbons rouges représentent 20 % des bonbons qui restent dans la boîte. Il doit donc y avoir 100 bonbons dans la boîte.
Donc, Jacob a mangé $(200 - 100)$ bonbons noirs, soit 100 bonbons noirs.

Solution 2
Au départ, 90 % des 200 bonbons sont noirs. Il y avait donc 180 bonbons noirs.
Supposons que Jacob a mangé n bonbons noirs.
Il reste donc $200 - n$ bonbons en tout, dont $180 - n$ sont noirs.
Puisque 80 % des bonbons qui restent sont noirs, alors $\dfrac{180 - n}{200 - n} = \dfrac{4}{5}$, c'est-à-dire que $5(180 - n) = 4(200 - n)$, ou $900 - 5n = 800 - 4n$, d'où $n = 100$.
Donc, Jacob a mangé 100 bonbons noirs.

Réponse : (D)

20. *Solution 1*
D'après l'équation $y = -\frac{3}{4}x + 9$, la droite a une ordonnée à l'origine de 9. Donc, Q a pour coordonnées $(0, 9)$. Pour déterminer l'abscisse à l'origine, posons $y = 0$. L'équation devient $0 = -\frac{3}{4}x + 9$, ou $\frac{3}{4}x = 9$, d'où $x = 12$. Donc, P a pour coordonnées $(12, 0)$.
Puisque le triangle POQ est rectangle en O, son aire est égale à $\frac{1}{2}(12)(9)$, ou 54.
Or, l'aire du triangle TOP doit être $\frac{1}{3}$ de celle du triangle POQ. Elle doit donc être égale à 18.
Puisque T a pour coordonnées (r, s), le triangle TOP a une base TO de longueur 12 et une hauteur de s. Donc $\frac{1}{2}(12)(s) = 18$, d'où $6s = 18$, ou $s = 3$.
Puisque T est sur la droite, alors $s = -\frac{3}{4}r + 9$, c'est-à-dire $3 = -\frac{3}{4}r + 9$, d'où $\frac{3}{4}r = 6$, ou $r = 8$.
Donc $r + s = 8 + 3$, ou $r + s = 11$.

Solution 2
L'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $y = -\frac{3}{4}x + 9$ est égale à 9. Donc, Q a pour coordonnées $(0, 9)$.
Pour déterminer l'abscisse à l'origine, posons $y = 0$. L'équation devient $0 = -\frac{3}{4}x + 9$, ou $\frac{3}{4}x = 9$, d'où $x = 12$. Donc, P a pour coordonnées $(12, 0)$.
Puisque les triangles POQ et TOP ont la même base OP, leur aire est proportionnelle à leur hauteur. Puisque l'aire du triangle POQ est égale à 3 fois celle du triangle TOP, alors la hauteur du triangle TOP est égale à $\frac{1}{3}$ de la hauteur du triangle POQ.
Donc, T est situé à $\frac{1}{3}$ de la distance de P vers Q, le long de PQ.
Puisque P a pour coordonnées $(12, 0)$ et que Q a pour coordonnées $(0, 9)$, alors T a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}(12), \frac{1}{3}(9)\right)$, ou (8,3).
Donc $r + s = 8 + 3$, ou $r + s = 11$.

Réponse : (C)

21. *Solution 1*
On sait que $\dfrac{25}{19} = 1 + \dfrac{6}{19} = 1 + \dfrac{1}{\frac{19}{6}} = 1 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{6}}$. Si on compare cette dernière expression à $p + \dfrac{1}{q + \dfrac{1}{r}}$, on peut conclure que $p = 1$, $q = 3$ et $r = 6$.

Solution 2
Puisque p, q et r sont des entiers strictement positifs, alors $q + \dfrac{1}{r}$ est supérieur à 1. Donc $\dfrac{1}{q + \dfrac{1}{r}}$ est supérieur à 0 et inférieur à 1.
Puisque $p + \dfrac{1}{q + \dfrac{1}{r}}$ est égal à $\dfrac{25}{19}$ et que cette fraction est supérieure à 1 et inférieure à 2, alors p doit être égal à 1. Donc $\dfrac{1}{q + \dfrac{1}{r}} = \dfrac{25}{19} - 1$, ou $\dfrac{1}{q + \dfrac{1}{r}} = \dfrac{6}{19}$. Donc $q + \dfrac{1}{r} = \dfrac{19}{6}$.
Puisque r est un entier strictement positif, alors $\dfrac{1}{r}$ est supérieur à 0 et inférieur à 1. Or, puisque $\dfrac{19}{6}$ est supérieur à 3 et inférieur à 4, alors $q = 3$. On peut aussi vérifier que $q = 3$.

Réponse : (C)

22. Soit n un entier multiplicativement parfait. Il ne peut être un nombre premier, car un nombre premier n'admet qu'un seul diviseur propre, soit 1.
Supposons que n peut être exprimé comme produit de deux entiers positifs supérieurs à 1, soit a et b. On a donc $n = a \times b$. n ne peut admettre un autre diviseur autre que 1, car on a déjà $n = 1 \times a \times b$ et un autre diviseur viendrait s'ajouter au membre de droite qui ne serait plus égal à n. Donc, n ne peut admettre plus de deux diviseurs autres que 1. On peut aussi affirmer qu'il ne peut admettre plus de deux diviseurs premiers distincts (autrement il aurait plus de deux diviseurs autres que 1).
1^{er} cas
n admet deux diviseurs premiers distincts, soit p et q. Alors ni p, ni q, ne paraît plus d'une fois dans la factorisation première de n, autrement p^2 ou q^2 serait un autre diviseur propre de n. On

a donc $n = p \times q$ (qui admet trois diviseurs propres, soit 1, p et q). Les entiers de 2 à 30 qui sont de la forme $n = p \times q$ sont 6, 10, 14, 15, 21, 22 et 26. Il y en a 7.
2[e] cas
n admet un seul diviseur premier, soit p. On doit avoir $n = p^3$ pour que n admette exactement trois diviseurs propres (soit 1, p et p^2). Les plus grandes puissances de p admettent plus de trois diviseurs propres, tandis que les plus petites puissances de p admettent moins de trois diviseurs propres. (Par exemple, p^2 admet 2 diviseurs propres et p^5 admet 5 diviseurs propres.)
Les entiers de 0 à 30 qui sont de la forme $n = p^3$ sont 8 et 27. Il y en a 2.
De 2 à 30, il y a donc 9 entiers multiplicativement parfaits.

Réponse : (A)

23. On procède d'abord par tâtonnements, tout en analysant les résultats.
Puisque Céline est plus rapide à déplacer les petites boîtes et que René est plus rapide à déplacer les grandes, on suppose que Céline déplace toutes les petites, ce qui prend 32 minutes, et que René déplace toutes les grandes, ce qui prend 50 minutes. Ils finissent donc en 50 minutes.
Si on laisse Céline déplacer 2 grandes boîtes, en plus des 16 petites, elle mettra 44 minutes pour le faire. René mettra alors 40 minutes à déplacer 8 grandes boîtes. Ils finissent donc en 44 minutes. On peut donc éliminer le choix de réponse (E).
Si on laisse René déplacer 1 des petites boîtes, en plus des 8 grandes boîtes, il mettra 43 minutes pour le faire. Céline mettra alors 42 minutes pour déplacer 15 petites boîtes et 2 grandes boîtes. Ils finissent donc en 43 minutes. On peut donc éliminer le choix de réponse (D).

Pourquoi est-il impossible de finir en moins de 43 minutes ? Supposons qu'ils finissent en 42 minutes. Ils mettraient, en tout, un total d'au plus 84 minutes pour finir le travail.
Supposons que Céline déplace x petites boîtes et y grandes boîtes, ce qui lui prendrait $2x + 6y$ minutes. Alors René déplace $16 - x$ petites boîtes et $10 - y$ grandes boîtes, ce qui lui prendrait $3(16 - x) + 5(10 - y)$ minutes, ou $98 - 3x - 5y$ minutes.
Puisqu'ils mettent au plus 84 minutes de travail au total, alors $(2x + 6y) + (98 - 3x - 5y) \leq 84$, ou $14 \leq x - y$.
Puisque $0 \leq x \leq 16$ et $0 \leq y \leq 10$, alors les couples (x,y) qui vérifient l'inéquation $14 \leq x - y$ sont (16,0), (16,1), (16,2), (15,0), (15,1), (14,0). Ces valeurs donnent les résultats suivants :

x	y	Céline N$^{\text{bre}}$ de pet. boîtes	Céline N$^{\text{bre}}$ de gr. boîtes	Céline N$^{\text{bre}}$ de minutes	René N$^{\text{bre}}$ de pet. boîtes	René N$^{\text{bre}}$ de gr. boîtes	René N$^{\text{bre}}$ de minutes
16	0	16	0	32	0	10	50
16	1	16	1	38	0	9	45
16	2	16	2	44	0	8	40
15	0	15	0	30	1	10	53
15	1	15	1	36	1	9	48
14	0	14	0	28	2	10	56

Dans chacun de ces cas, bien que le temps total soit inférieur à 84 minutes, il faut plus de 43 minutes pour que les deux aient fini de déplacer les boîtes.
Il est donc impossible de finir en moins de 43 minutes. Ils peuvent donc finir à 9 h 43.

Réponse : (C)

24. Examinons la situation pour les premières valeurs de n.
Si $n = 1$, Anne gagne en enlevant le cure-dent.
Si $n = 2$, Anne doit enlever 1 cure-dent (car il n'y en a pas suffisamment pour qu'elle puisse en

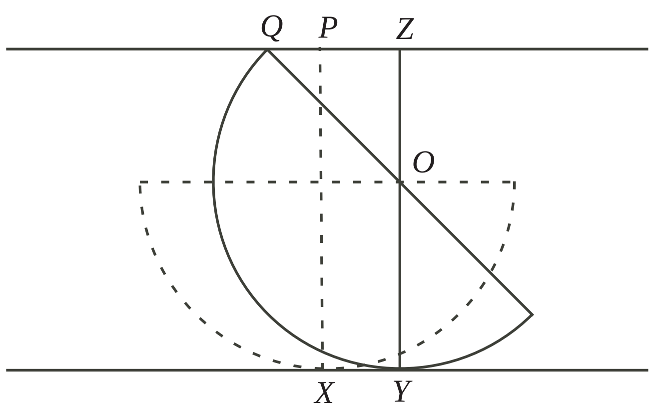
enlever 3 ou 4). Bahia enlève le dernier cure-dent et gagne.
Si $n = 3$ ou $n = 4$, Anne peut gagner en enlevant tous les cure-dents.
Si $n = 5$, Anne peut enlever 3 cure-dents et en laisser 2 pour Bahia. Cette dernière ne peut gagner, car Anne ne pouvait pas gagner devant 2 cure-dents. Anne gagne.
Si $n = 6$, Anne peut enlever 4 cure-dents, ce qui produit la même situation que dans le cas précédent. Anne gagne.
Si $n = 7$, Anne peut enlever 1, 3 ou 4 cure-dents, laissant 6, 4 ou 3 cure-dents pour Bahia. Or, comme on l'a vu, 6, 4 ou 3 cure-dents accordent une stratégie gagnante à la prochaine personne qui joue, soit Bahia. Donc si $n = 7$ Bahia gagne, puisque dans chaque cas, elle peut utiliser la stragégie gagnante d'Anne.
De façon générale, dans un jeu de n cure-dents, Bahia a une stratégie gagnante si Anne avait une stratégie gagnante dans un jeu de $n - 1$, $n - 3$ et $n - 4$ cure-dents. (En effet, puisque Anne commence avec n cure-dents et en enlève 1, 3 ou 4, Bahia se retrouve devant $n - 1$, $n - 3$ ou $n - 4$ cure-dents qui offrent des stratégies gagnantes à la prochaine personne qui joue.)
Anne aura une stratégie gagnante autrement. (En effet, si Bahia ne peut gagner devant $n - 1$, $n - 3$ ou $n - 4$ cure-dents, Anne peut enlever le nombre approprié de cure-dents de manière à laisser la position perdante à Bahia.)
On construit une liste de situations initiales qui offrent une stratégie gagnante pour chacune. Devant un entier n, on ajoute ce nombre à la liste de Bahia si $n - 1$, $n - 3$ et $n - 4$ sont tous dans la liste d'Anne. On ajoute n à la liste d'Anne autrement.

Anne gagne : 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 34
Bahia gagne : 2, 7, 9, 14, 16, 21, 23, 28, 30, 35

Parmi les choix de réponse, un jeu de 35 cure-dents offre une stratégie gagnante à Bahia.

Réponse : (E)

25. En position initiale, soit X le point où le demi-disque touche à la ligne du dessous. P est le point, sur la deuxième droite, qui est directement au-dessus de X . On considère ce qui arrive lorsque le demi-disque est bercé vers la droite et qu'il frappe la ligne du dessus au point Q.



Dans cette position, soit Y le point de contact du demi-disque et de la ligne du dessous et Z le point directement au-dessus de lui sur la deuxième ligne. O est le point d'intersection du haut du demi-disque et du segment YZ. On a $XY = PZ$. Q est un des deux points où le demi-disque frappe la ligne du dessus. Par symétrie, l'autre point est l'image de Q par réflexion par rapport à la droite XP. Donc, la distance que l'on cherche est deux fois la longueur de PQ.
Or $PQ = QZ - PZ = QZ - XY$.
Puisque le demi-disque est tangent à la droite du dessous, YO est perpendiculaire à cette droite. Puisque O est aussi situé sur le diamètre, il est le centre du demi-disque. Donc $OY = OQ = 8$ cm,

puisque OY et OQ sont des rayons.
De plus, $OZ = 4$ cm, puisqu'il y a une distance de 12 cm entre les deux droites.
Puisque le triangle QZO est rectangle, alors $QZ^2 = QO^2 - ZO^2$, c'est-à-dire que $QZ^2 = 8^2 - 4^2$, ou $QZ^2 = 48$, d'où $QZ = 4\sqrt{3}$ cm. Puisque $QZ : ZO = \sqrt{3} : 1$, alors $\angle QOZ = 60°$.
Donc, l'angle entre QO et l'horizontale est de 30°. Le demi-disque a donc tourné sur 30°, ce qui constitue $\frac{1}{12}$ d'une rotation complète (s'il s'agissait d'un disque complet).
La distance de Y à X est donc égale à $\frac{1}{12}$ de la circonférence d'un disque ayant un rayon de 8 cm.
Donc $XY = \frac{1}{12}(2\pi(8))$ cm, ou $XY = \frac{4}{3}\pi$ cm. (On peut penser à une roue qui tourne sur 30° et à la distance qu'elle a parcourue.)
Donc $PQ = QZ - XY$, ou $PQ = 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$ cm.
La distance que l'on cherche est le double de cette distance, soit $8\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi$ cm, ou environ 5,4788 cm. Parmi les choix de réponse, la réponse la plus près est 55 mm.

Réponse : (A)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Cayley 2005

(10^{e} année ou Secondaire IV)

Le mercredi 23 février 2005

Solutions

1. On simplifie : $a+1+a-2+a+3+a-4 = a+a+a+a+1-2+3-4 = 4a-2$

Réponse : (C)

2. On annule les facteurs qui sont communs dans les numérateurs et les dénominateurs :

$$\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{8}{9}\right) = \left(\frac{4}{\cancel{5}}\right)\left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\right)\left(\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}}\right)\left(\frac{\cancel{7}}{\cancel{8}}\right)\left(\frac{\cancel{8}}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

Réponse : (A)

3. Le plus grand multiple de 17 qui est inférieur à 70 est 68. On a donc $70 = 4(17) + 2$. Le reste est égal à 2.

Réponse : (D)

4. Puisque $\dfrac{3}{x+10} = \dfrac{1}{2x}$, on obtient $6x = x + 10$ par le produit en croix, d'où $5x = 10$, ou $x = 2$.

Réponse : (D)

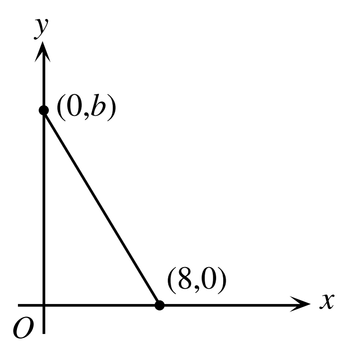
5. $(5^2 - 4^2)^3$ est égal à $(25-16)^3$, c'est-à-dire à 9^3, ou 729.

Réponse : (E)

6. 8 volontaires qui travaillent 40 heures chacun et qui recueillent chacun 18 \$ l'heure recueillent en tout $8 \times 40 \times 18$ \$, c'est-à-dire 5760 \$.
Si 12 volontaires travaillent 32 heures chacune, tout en recueillant un total de 5760 \$, alors chacune a recueilli $\dfrac{5760}{12 \times 32}$ \$ l'heure, c'est-à-dire 15 \$ l'heure.

Réponse : (C)

7. *Solution 1*
Puisque la pente est de $-\frac{3}{2}$, alors à partir d'un point sur la droite, on doit descendre de 3 unités chaque fois que l'on bouge de 2 unités vers la droite si on veut rester sur cette droite.



Pour se rendre du point $(0, b)$ au point $(8, 0)$, on bouge de 8 unités vers la droite, c'est-à-dire qu'on bouge quatre fois de 2 unités.
On doit donc bouger quatre fois de 3 unités vers le bas pour un total de 12 unités.
Donc $b = 12$.

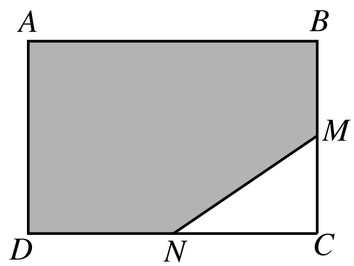
Solution 2
Puisque la pente est de $-\frac{3}{2}$, alors $\frac{b-0}{0-8} = -\frac{3}{2}$, ou $-\frac{b}{8} = -\frac{3}{2}$. Donc $b = 8 \times \frac{3}{2}$, d'où $b = 12$.

Réponse : (B)

8. José a couru un total de 24 km.
Il a couru les premiers 12 km à une vitesse de 12 km/h. Il a donc mis 1 h pour courir ces 12 km.
Il a couru les 12 km suivants à une vitesse de 6 km/h. Il a donc mis 2 h pour courir ces 12 km.
Il a donc couru pendant 3 heures.
Puisque Julie a couru les 24 km en 3 heures, elle a couru à une vitesse de 8 km/h.

Réponse : (A)

9. *Solution 1*
Puisque M est le milieu du côté BC et que $CM = 4$, alors $BC = 8$.

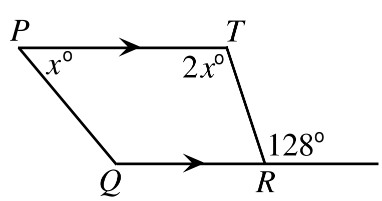


Puisque N est le milieu du côté CD et que $NC = 5$, alors $CD = 10$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, son aire est égale à 10×8, ou 80.
L'aire du triangle NCM est égale à $\frac{1}{2}(4)(5)$, ou 10. L'aire de la partie ombrée est égale à l'aire du rectangle moins celle du triangle NCM, soit à 70.
La fraction du rectangle qui est ombrée est égale à $\dfrac{70}{80}$. Cette fraction est équivalente à 0,875. Donc, 87,5 % du rectangle est ombré.

Solution 2
On peut généraliser la Solution 1.
Soit $BC = 2x$ et $CD = 2y$.
Puisque M est le milieu du côté BC, alors $CM = x$.
Puisque N est le milieu du côté CD, alors $NC = y$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, son aire est égale à $(2x)(2y)$, ou $4xy$.
L'aire du triangle NCM est égale à $\frac{1}{2}(NC)(MC)$, ou $\frac{1}{2}xy$. L'aire de la partie ombrée est égale à l'aire du rectangle moins celle du triangle NCM, c'est-à-dire à $4xy - \frac{1}{2}xy$, ou $\frac{7}{2}xy$.
La fraction du rectangle qui est ombrée est égale à $\dfrac{\frac{7}{2}xy}{4xy}$, ou $\frac{7}{8}$. Cette fraction est équivalente à 0,875. Donc, 87,5 % du rectangle est ombré.

Réponse : (D)

10. *Solution 1*
Puisque PT et RQ sont parallèles, alors $2x^\circ = 128^\circ$, ou $x = 64$. Donc $\angle TPQ = 64^\circ$.



Puisque PT et QR sont parallèles, les angles TPQ et PQR sont supplémentaires.
Donc $\angle PQR + 64^\circ = 180^\circ$, d'où $\angle PQR = 116^\circ$.

Solution 2
Puisque la somme de la mesure des deux angles au point R est égale à $180°$, alors $\angle QRT + 128° = 180°$, d'où $\angle QRT = 52°$.
Puisque PT et QR sont parallèles, les angles PTR et QRT sont supplémentaires.
Donc $2x° + 52° = 180°$, d'où $2x° = 128°$, ou $x = 64$.
Donc, trois des angles du quadrilatère $PQRT$ ont une mesure respective de $64°$, $128°$ et $52°$.
Puisque la somme de la mesure des angles d'un quadrilatère est égale à $360°$, alors $\angle PQR = 360° - 64° - 128° - 52°$, d'où $\angle PQR = 116°$.

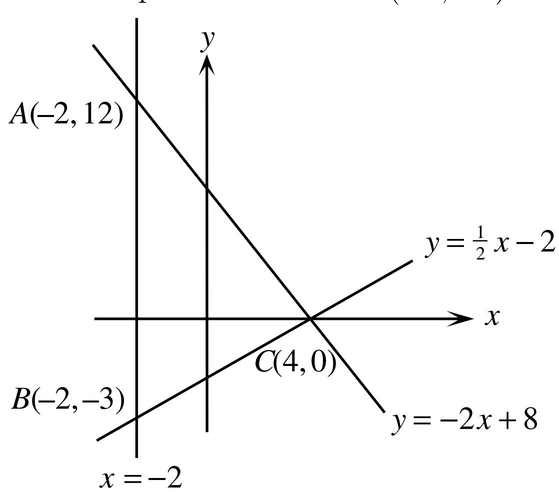
Réponse : (A)

11. *Solution 1*
Le botté le plus long a 6 m de plus que la longueur moyenne des trois bottés.
La longueur totale des deux autres bottés doit donc avoir 6 m de moins que cette moyenne.
Puisque ces deux autres bottés sont de la même longueur, chacun doit avoir 3 m de moins que la moyenne. Les deux autres bottés ont donc chacun une longueur de 34 m.

Solution 2
Puisque les trois bottés ont une longueur moyenne de 37 m, leur longueur totale est de 3×37 m, ou 111 m.
Soit x la longueur de chacun des autres bottés, en mètres.
Donc $43 + 2x = 111$, d'où $x = 34$.

Réponse : (D)

12. On détermine d'abord les points où les droites obliques coupent la droite verticale. Aux points d'intersection, on a $x = -2$.
Pour l'intersection avec la droite d'équation $y = -2x + 8$, posons $x = -2$. On a $y = -2(-2) + 8$, d'où $y = 12$. Le point d'intersection a pour coordonnées $(-2, 12)$.
Pour l'intersection avec la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$, posons $x = -2$. On a $y = \frac{1}{2}(-2) - 2$, ou $y = -3$. Le point d'intersection a pour coordonnées $(-2, -3)$.

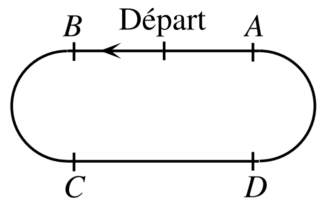


Le triangle ABC a donc une base AB de longueur $12-(-3)$, ou 15. La hauteur correspondante est mesurée sur l'axe des abscisses, entre le sommet C et le segment AB. Sa longueur est de $4-(-2)$, ou 6.
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(15)(6)$, ou 45.

Réponse : (E)

13. Puisqu'il marche à une vitesse de 1,4 m/s, André parcourt une distance de $60 \times 1{,}4$ m par minute, ou 84 m par minute.

Puisqu'il marche pendant 30 minutes, il parcourt une distance totale de 30×84 m, ou 2520 m. La piste a un tour de 400 m. Après avoir marché 2400 m, André est de retour à la ligne de départ.
Puisque les points A, B, C et D divisent la piste en quatre sections de même longueur, il y a une distance de 100 m entre deux points consécutifs.
Puisque le point de départ est à mi-chemin entre A et B, il est à 50 m de B.



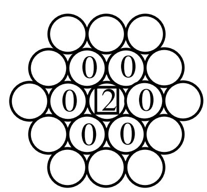
Après avoir parcouru 2450 m, André est au point B.
Il lui reste alors 70 m à parcourir. À la fin, il sera donc à 70 m au-delà du point B et à 30 m du point C. Le point le plus près est donc le point C.

Réponse : (C)

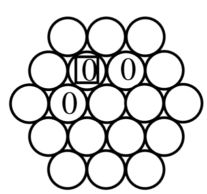
14. Pour que le nombre $\sqrt{1+2+3+4+x}$ soit un entier, il faut que le nombre $1+2+3+4+x$, ou $10+x$, soit un carré parfait.
On peut donc reformuler la question comme suit : Combien y a-t-il de valeurs de x, inférieures à 100, pour lesquelles le nombre $10+x$ est un carré parfait ?
Puisque x peut prendre des valeurs de 1 à 99, l'expression $10+x$ peut prendre des valeurs de 11 à 109.
Or, il y a 7 carrés parfaits dans cet intervalle, soit 16, 25, 36, 49, 64, 81 et 100. Il y a donc 7 valeurs possibles de x, soit 6, 15, 26, 39, 54, 71 et 90.

Réponse : (B)

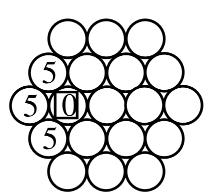
15. À partir du 2 au centre, on peut se déplacer vers six chiffres 0.



À partir de n'importe quel 0, on peut se déplacer vers deux chiffres 0.



À partir de n'importe quel 0, on peut se déplacer vers trois chiffres 5.



Pour chacun des 6 choix du premier chiffre 0, on peut choisir n'importe quel des 2 chiffres disponibles pour le deuxième 0 et dans chaque cas, on peut choisir n'importe quel des 3 chiffres 5 disponibles.
Le nombre de chemins disponibles est donc égal à $6 \times 2 \times 3$, ou 36.

Réponse : (A)

16. Pour commencer, il est bon d'écrire d'autres termes de la suite pour y déceler une régularité :

$$88, 24, 64, 40, 24, 16, 8, 8, 0, 8, 8, 0, 8, 8, 0, 8, \ldots$$

On voit qu'après quelques termes, la suite est formée de blocs répétés des nombres « 8, 8, 0 ». (On peut vérifier pourquoi : après « 8, 0 », on fait $8-0=8$ et le terme suivant est 8. On a donc « 8, 0, 8 ». Après « 0, 8 », on fait $8-0=8$ et le terme suivant est 8. On a donc « 8, 0, 8, 8 ». Après « 8, 8 », on fait $8-8=0$ et le terme suivant est 0. On a donc « 8, 0, 8, 8, 0 » et la régularité recommence.)
Les 99 premiers termes de la suite sont composés des 6 premiers, soit 88, 24, 64, 40, 24 et 16, puis de 31 blocs « 8, 8, 0 ». Le 100$^{\text{e}}$ terme est le premier terme du bloc « 8, 8, 0 », soit 8.
La somme des 100 premiers termes de la suite est égale à

$$88 + 24 + 64 + 40 + 24 + 16 + 31(8 + 8 + 0) + 8,$$

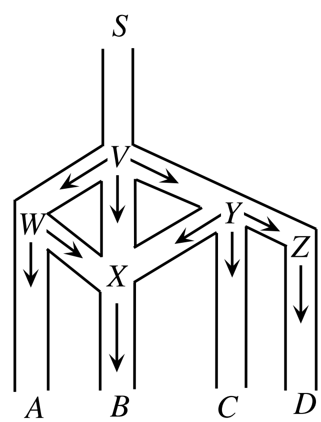
c'est-à-dire à $256 + 31(16) + 8$, ou 760.

Réponse : (B)

17. D'après la loi des exposants, on a $1000^{100} = (10^3)^{100} = 10^{300} = (10^{100})^3 = \text{googol}^3$.

Réponse : (E)

18. On nomme les bifurcations V, W, X, Y et Z.

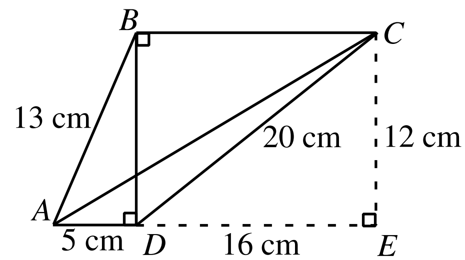


D'après les flèches, on voit que pour se rendre à B, Henri doit d'abord se rendre à X (et de X, il doit continuer jusqu'à B). On calcule donc la probabilité pour qu'il se rende à X.
Pour se rendre à X, Henri peut aller de S à V à W à X, ou de S à V à Y à X, ou encore de S à V et directement à X.
À V, la probabilité pour qu'Henri emprunte n'importe quel des chemins (c'est-à-dire vers W, X ou Y) est égale à $\frac{1}{3}$.
Donc, la probabilité pour qu'Henri aille directement de V à X est égale à $\frac{1}{3}$.
À W, la probabilité pour qu'Henri tourne en direction de X est égale à $\frac{1}{2}$. La probabilité pour qu'il aille de V à W à X est égale à $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{6}$.
À Y, la probabilité pour qu'Henri aille vers X est égale à $\frac{1}{3}$. Donc, la probabilité pour qu'il aille

de V à Y à X est égale à $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{9}$.
Donc, la probabilité pour qu'Henri aboutisse à X (et donc à B) est égale à $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}$, c'est-à-dire à $\frac{6+3+2}{18}$, ou $\frac{11}{18}$.

Réponse : (C)

19. On prolonge le côté AD jusqu'au point E, où il coupe la perpendiculaire à BC abaissée au point C.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADB, $BD^2 = BA^2 - AD^2$, c'est-à-dire que $BD^2 = 13^2 - 5^2$, d'où $BD^2 = 144$, ou $BD = 12$ cm.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle DBC, $BC^2 = DC^2 - BD^2$, c'est-à-dire que $BC^2 = 20^2 - 12^2$, d'où $BC^2 = 256$, ou $BC = 16$ cm.
Puisque le quadrilatère $BCED$ admet quatre angles droits, il s'agit d'un rectangle.
Donc $DE = BC = 16$ cm et $CE = BD = 12$ cm.
Si on examine le triangle AEC, on voit que $AE = (16 + 5)$ cm, ou $AE = 21$ cm. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = 21^2 + 12^2$, d'où $AC^2 = 585$, ou $AC \approx 24{,}2$ cm, au dixième de centimètre près.

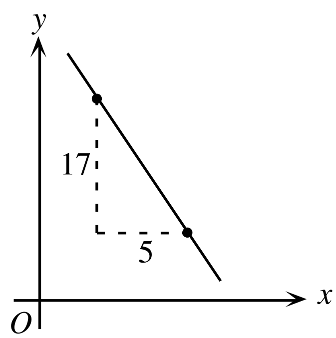
Réponse : (A)

20. Soit B le nombre total de Beetles dans le stationnement.
Le nombre d'Acuras est donc égal à $\frac{1}{2}B$.
Le nombre de Camrys est égal à 80 % de $\frac{1}{2}B + B$. Il est donc égal à $\frac{4}{5} \times \frac{3}{2}B$, c'est-à-dire à $\frac{6}{5}B$.
Puisqu'il y a 81 voitures dans le stationnement, $B + \frac{1}{2}B + \frac{6}{5}B = 81$, c'est-à-dire $\frac{27}{10}B = 81$, d'où $B = \frac{10}{27} \times 81$, ou $B = 30$.
Il y a 30 Beetles dans le stationnement.

Réponse : (B)

21. On détermine d'abord la combinaison de billets qui ont une valeur de 453 Yacs et qui comprend le plus petit nombre possible de billets de 17 Yacs.
On cherche un multiple de 17, inférieur à 453, qui se termine par un 5 ou un 8. On pourra alors compléter la somme de 453 Yacs en ajoutant des billets de 5 Yacs.
Les premiers multiples de 17 sont 17, 34, 51, 68.
Si on utilise quatre billets de 17 Yacs, pour un total de 68 Yacs, il reste une somme de $453 - 68$ Yacs, ou 385 Yacs à compléter avec des billets de 5 Yacs pour obtenir un total de 453 Yacs. On a donc besoin de 77 billets de 5 Yacs.
Donc, la combinaison de 4 billets de 17 Yacs et 77 billets de 5 Yacs est bonne.
Pour obtenir d'autres combinaisons, on utilise le fait que 5 billets de 17 Yacs ont la même valeur que 17 billets de 5 Yacs. Cela nous permet de soustraire 17 billets de 5 Yacs et d'ajouter 5 billets de 17 Yacs, tout en gardant la même valeur.
Puisque $77 - 17 = 60$ et $4 + 5 = 9$, alors 60 billets de 5 Yacs et 9 billets de 17 Yacs ont une valeur de 453 Yacs. (On peut le vérifier !)
De la même manière, 43 billets de 5 Yacs et 14 billets de 17 Yacs forment aussi une combinaison acceptable, de même que 26 billets de 5 Yacs et 19 billets de 17 Yacs, et 9 billets de 5 Yacs et

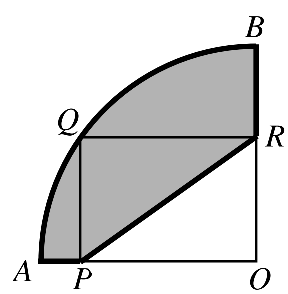
24 billets de 17 Yacs.
Puisqu'il ne reste que 9 billets de 5 Yacs, on ne peut plus continuer cet échange, car il faudrait échanger 17 billets de 7 Yacs.
Il y a donc 5 combinaisons différentes de billets qui ont une valeur de 453 Yacs.
(Pour une approche semblable, mais plus visuelle, soit x le nombre de billets de 17 Yacs et y le nombre de billets de 5 Yacs utilisés.
On a alors l'équation $17x + 5y = 453$ et on cherche le nombre de couples (x,y) qui vérifient l'équation, x et y étant des entiers positifs.
Les points du plan cartésien dont les coordonnées sont entières et qui vérifient l'équation de droite $17x+5y = 453$ sont appelés des points de treillis de la droite. On cherche donc le nombre de points de treillis de cette droite dans le quadrant I.
Comme on l'a fait ci-haut, on détermine que $(x,y) = (4,77)$ est un point de treillis.
Puisque la droite a une pente de $-\frac{17}{5}$, alors le point de treillis suivant se trouve à 17 unités vers le bas et 5 unités vers la droite.



On répète ce processus pour obtenir un total de 5 points de treillis.)

Réponse : (C)

22. Pour déterminer le périmètre, il faut connaître la longueur de l'arc AQB et celle des segments AP, PR et RB.



Puisque AOB est un quart de disque de rayon 10, la longueur de l'arc AQB est égale à $\frac{1}{4}(2\pi(10))$, ou 5π.
Puisque $PQRO$ est un rectangle, alors $PR = QO$. Or, QO est un rayon du quart de disque. Donc $PR = QO = 10$. Il reste à déterminer $AP + RB$.
Or, $AP+RB = (AO-PO)+(BO-RO) = AO+BO-(PO+RO)$. On sait que $AO = BO = 10$, puisque AO et BO sont des rayons du quart de disque.
Puisque le rectangle a un périmètre de 26 et que $PO + RO$ est égal au demi-périmètre, alors $PO + RO = 13$.
Donc $AP + RB = 10 + 10 - 13$, ou $AP + RB = 7$.
Le périmètre de la région ombrée est donc égal à $5\pi + 10 + 7$, ou $17 + 5\pi$.

Réponse : (C)

23. On résout ce problème en tenant compte, de façon systématique, de la distance entre la position d'Anna, de Bruno et de Milou par rapport à la maison, à tout moment. À 12 h, chacun est à 0 km de la maison.

À 12 h 15 :

Milou est à 0 km de la maison, car il n'a pas commencé à courir.
Anna est à $\frac{1}{4} \times 4$ km, ou 1 km de la maison, puisqu'elle a marché à une vitesse de 4 km/h pendant $\frac{1}{4}$ d'heure.
Bruno est à $\frac{1}{4} \times 3$ km, ou $\frac{3}{4}$ km de la maison, puisqu'il a marché à une vitesse de 3 km/h pendant $\frac{1}{4}$ d'heure.

À 12 h 15, Milou quitte la maison et court jusqu'à ce qu'il rattrape Anna.
Combien de temps met-il pour la rattraper ? Puisque Anna marche à une vitesse de 4 km/h et que Milou court à une vitesse de 6 km/h dans la même direction, alors le chien gagne 2 km sur Anna en une heure. Puisqu'elle a une avance de 1 km sur le chien, Milou met $\frac{1}{2}$ heure pour la rattraper. Il la rattrape donc à 12 h 45.

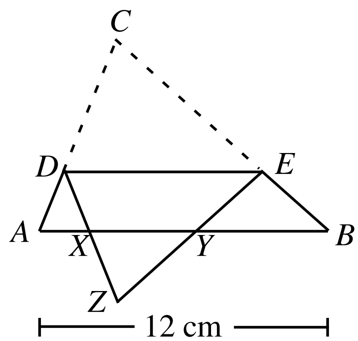
À 12 h 45 :

Milou est à 3 km de la maison, puisqu'il a couru à une vitesse de 6 km/h pendant $\frac{1}{2}$ heure.
Anna est à $\frac{3}{4} \times 4$ km, ou 3 km de la maison, car elle a marché à une vitesse de 4 km/h pendant $\frac{3}{4}$ d'heure.
Bruno est à $\frac{3}{4} \times 3$ km, ou $\frac{9}{4}$ km de la maison, car il a marché à une vitesse de 3 km/h pendant $\frac{3}{4}$ d'heure.

À 12 h 45, Milou se retourne instantanément et court depuis Anna jusquà Bruno.
Combien de temps met-il pour rattraper Bruno ? Puisque celui-ci marche à une vitesse de 3 km/h et que Milou court à une vitesse de 6 km/h dans la direction opposée, alors Bruno et Milou se rapprochent l'un de l'autre à une vitesse de 9 km/h.
Puisque la distance qui les sépare est égale à $3 - \frac{9}{4}$ km, ou $\frac{3}{4}$ km, alors Milou met $\frac{1}{9} \times \frac{3}{4}$ h, ou $\frac{1}{12}$ h (ou 5 minutes) pour rattraper Bruno.
Il rattrape donc Bruno à 12 h 50.

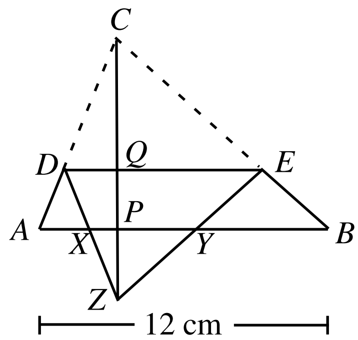
Réponse : (E)

24. *Solution 1*
Soit X et Y les points où la partie pliée du triangle coupe AB et Z la position du sommet C après le pliage.



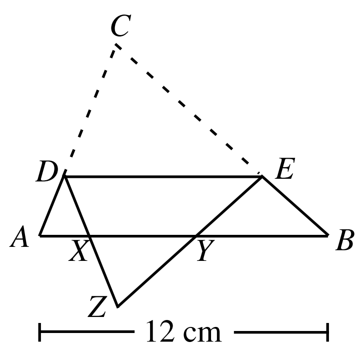
On sait que le triangle XYZ a une aire égale à 16 % de l'aire du triangle ABC.
Or, les triangles ACB et XZY sont semblables. En effet, l'angle XZY correspond à l'angle ACB. De plus, puisque le pli DE est parallèle au côté AB, alors
$\angle XYZ = \angle EYB = \angle DEY = \angle CED = \angle CBA$.
Puisque le triangle XZY est semblable au triangle ACB et que son aire est égale à 0,16 de celle

du triangle ACB, c'est-à-dire à $(0{,}4)^2$ de celle du triangle ACB, alors la longueur des côtés du triangle XZY doit être égale à 0,4 de la longueur des côtés correspondants du triangle ACB.
Au point C, on trace la hauteur CP du triangle ACB et on la prolonge jusqu'à Z. La hauteur coupe le côté DE en Q.



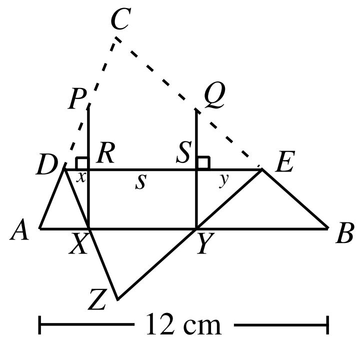
Or, $CP = CQ + QP = ZQ + QP = ZP + 2PQ$.
Puisque la longueur des côtés du triangle XZY est égale à 0,4 de la longueur des côtés correspondants du triangle ACB, alors $ZP = 0{,}4CP$.
Puisque $CP = ZP + 2PQ$, alors $PQ = 0{,}3CP$. Donc $CQ = CP - PQ$, ou $CQ = 0{,}7CP$.
Puisque les triangles CDE et CAB sont semblables et que la longueur de CQ est égale à 0,7 de celle de CP, alors la longueur de DE est égale à 0,7 de celle de AB. Donc $DE = 0{,}7(12)$, ou $DE = 8{,}4$.

Solution 2
Soit X et Y les points où la partie pliée du triangle coupe AB et Z la position du sommet C après le pliage.



On sait que le triangle XYZ a une aire égale à 16 % de l'aire du triangle ABC.
Or, les triangles ACB et XZY sont semblables. En effet, l'angle XZY correspond à l'angle ACB. De plus, puisque le pli DE est parallèle au côté AB, alors
$\angle XYZ = \angle EYB = \angle DEY = \angle CED = \angle CBA$.
Puisque le triangle XZY est semblable au triangle ACB et que son aire est égale à 0,16 de celle du triangle ACB, c'est-à-dire à $(0{,}4)^2$ de celle du triangle ACB, alors la longueur des côtés du triangle XZY doit être égale à 0,4 de la longueur des côtés correspondants du triangle ACB.
Aux points X et Y, on abaisse des perpendiculaires au côté AB. Elles coupent les côtés AC et BC aux points respectifs P et Q, ainsi que le côté DE aux points respectifs R et S.
Par symétrie à cause du pliage, PQ et RS sont parallèles à XY et ils ont la même longueur. Donc $PQ = RS = XY = s$.
Puisque la longueur des côtés du triangle XZY est égale à 0,4 de celle des côtés correspondants du triangle ACB, alors $s = 0{,}4 \times 12$, ou $s = 4{,}8$.
Puisque les triangles CDE et ZDE sont congruents (l'un est la version pliée de l'autre), alors

par symétrie, on a $PR = RX$ et $QS = SY$.
Soit $DR = x$ et $ES = y$.



On a $AX = 2x$, puisque le triangle PXA est semblable au triangle PRD et que ses côtés sont deux fois plus longs que les côtés correspondants du triangle PRD (puisque $PX = 2PR$). De même, $BY = 2y$.
Or, $AB = 2x + s + 2y$ et $AB = 12$. Donc $x + y = \frac{1}{2}(12 - s)$, c'est-à-dire que $x + y = \frac{1}{2}(12 - 4{,}8)$, ou $x + y = 3{,}6$.
Donc $DE = s + x + y$, d'où $DE = 4{,}8 + 3{,}6$, ou $DE = 8{,}4$.

Réponse : (B)

25. Au départ, il faut déterminer un premier ensemble de nombres, a, b et c, qui vérifient l'équation. Puisque l'équation ressemble à la formule de Pythagore, on peut écrire l'égalité $3^2 + 4^2 = 5^2$ et la manipuler.
Si on divise chaque membre par le plus petit commun multiple de 3^2, 4^2 et 5^2, qui est $(3 \times 4 \times 5)^2$, ou 60^2, on obtient $\frac{3^2}{60^2} + \frac{4^2}{60^2} = \frac{5^2}{60^2}$, ou $\frac{1}{20^2} + \frac{1}{15^2} = \frac{1}{12^2}$.
On obtient donc deux triplets, soit $(a,b,c) = (20,15,12)$ et $(a,b,c) = (15,20,12)$. On a donc deux valeurs de a jusqu'à maintenant.
Comment peut-on en déterminer d'autres ? On peut multiplier chaque membre de l'égalité $\frac{1}{20^2} + \frac{1}{15^2} = \frac{1}{12^2}$ par l'inverse de carrés parfaits.
Si on multiplie par $\frac{1}{2^2}$, on obtient $\frac{1}{40^2} + \frac{1}{30^2} = \frac{1}{24^2}$.
Si on multiplie par $\frac{1}{3^2}$, on obtient $\frac{1}{60^2} + \frac{1}{45^2} = \frac{1}{36^2}$.
Si on multiplie par $\frac{1}{4^2}$, on obtient $\frac{1}{80^2} + \frac{1}{60^2} = \frac{1}{48^2}$.
Si on multiplie par $\frac{1}{5^2}$, on obtient $\frac{1}{100^2} + \frac{1}{75^2} = \frac{1}{60^2}$.
Si on multiplie par $\frac{1}{6^2}$, on obtient $\frac{1}{120^2} + \frac{1}{90^2} = \frac{1}{72^2}$.
Si on multiplie par $\frac{1}{7^2}$, on obtient $\frac{1}{140^2} + \frac{1}{105^2} = \frac{1}{84^2}$.
La stratégie ne fonctionne plus, car on cherche des valeurs de a telles que $a \leq 100$.
Jusqu'ici, les valeurs possibles de a sont 20, 15, 40, 30, 60, 45, 80, 100, 75 et 90. On les obtient en prenant tour à tour les dénominateurs du membre de gauche des égalités. (Remarquer qu'on ne compte pas le 60 deux fois !) La somme de ces nombres est égale à 555.

Peut-on obtenir d'autres égalités en prenant d'autres triplets pythagoriciens ?
On peut prendre $5^2 + 12^2 = 13^2$ et diviser chaque membre par le plus petit commun multiple de

5^2, 12^2 et 13^2, qui est $(5\times 12\times 13)^2$, ou 780^2, on obtient $\dfrac{1}{156^2}+\dfrac{1}{65^2}=\dfrac{1}{60^2}$. On a donc une autre valeur de a, soit 65.

Le total cumulé des valeurs de a est égal à $555+65$, ou 620.

Il est impossible de générer d'autres valeurs de a à partir de l'égalité $\dfrac{1}{156^2}+\dfrac{1}{65^2}=\dfrac{1}{60^2}$, car si on multiplie chaque membre par l'inverse de n'importe quel carré parfait, on obtient des valeurs de a et de b qui sont supérieures ou égales à 130 et qui sont donc supérieures à 100.

Peut-on utiliser l'égalité $6^2+8^2=10^2$? Le plus petit commun multiple de 6^2, 8^2 et 10^2 est 120^2. Si on divise chaque membre par 120^2, on obtient l'égalité $\dfrac{1}{20^2}+\dfrac{1}{15^2}=\dfrac{1}{12^2}$ qui a déjà été utilisée.

Peut-on utiliser d'autres triplets pythagoriciens ? Non, car les autres ont des nombres qui sont au moins aussi gros que ceux du triplet 7-24-25, ce qui aurait pour résultat que le plus petit dénominateur du membre de gauche serait égal à $(7\times 25)^2$, ou 175^2, et a aurait une valeur supérieure à 100.

Il est à noter que n'importe quel triplet (a,b,c) qui fonctionne doit provenir d'un triplet pythagoricien, car on peut multiplier chaque membre de l'équation $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{c^2}$ par $(abc)^2$ pour obtenir $(bc)^2+(ac)^2=(ab)^2$.

Chaque triplet (a,b,c) possible provient d'un triplet phythagoricien et il n'existe aucun autre triplet pythagoricien qui donne une valeur possible de a. On a donc déterminé toutes les valeurs possibles de a.

La somme de toutes les valeurs possibles de a, $a\le 100$, est égale à 620.

Réponse : (E)

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre
en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo,

2004 Solutions
Concours Cayley (10e – année)

(Secondaire IV au Québec)

pour les prix du

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Solutions du Concours Cayley 2004

1. On a : $2^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 4 + 1 + 0 + 1 + 4$
$= 10$

RÉPONSE : (E)

2. 25 % de 2004, c'est $\frac{1}{4}$ de 2004, ou 501.
50 % de 4008, c'est $\frac{1}{2}$ de 4008, ou 2004.
50 % de 1002, c'est $\frac{1}{2}$ de 1002, ou 501.
100 % de 1002, c'est 1002.
10 % de 8016, c'est $\frac{1}{10}$ de 8016, ou 801,6.
20 % de 3006, c'est $\frac{1}{5}$ de 3006, ou 601,2.

RÉPONSE : (B

3. Pour aller de A à B, il faut bouger de 3 unités vers le haut et de 2 unités vers la droite. Puisque B est le milieu de AC, alors pour aller de B à C, il faut aussi bouger de 3 unités vers le haut et de 2 unités vers la droite. Les coordonnées de C sont donc $(5,7)$.

RÉPONSE : (E)

4. On simplifie l'équation $x + 1 - 2 + 3 - 4 = 5 - 6 + 7 - 8$, ce qui donne $x - 2 = -2$. Donc $x = 0$.

RÉPONSE : (C)

5. La 1re figure a un périmètre extérieur de 4. La 2e figure a un périmètre extérieur de 8. La 3e figure a un périmètre extérieur de 12. D'une figure à la suivante, on voit que le périmètre extérieur augmente de 4. Le périmètre extérieur de la 5e figure sera donc 8 de plus que celui de la 3e figure. Il sera égal à 20. (On aurait pu dessiner la 5e figure, formée de 9 petits carrés.)

RÉPONSE : (C)

6. Par la mise en évidence d'un facteur commun, on a : $7x + 42y = 7(x + 6y)$
$= 7(17)$
$= 119$

RÉPONSE : (E)

7. *Solution 1*
$3^2 + 3^2 + 3^2 = 3 \times 3^2$
$= 3^3$
Donc $a = 3$.

Solution 2

$$3^2 + 3^2 + 3^2 = 9 + 9 + 9$$
$$= 27$$

Donc $3^a = 27$, d'où $a = 3$.

RÉPONSE : (B)

8. La circonférence d'un cercle est égale à πd, d étant le diamètre du cercle.
Puisque le cercle extérieur a une circonférence de 24π, il a un diamètre de 24 et un rayon de 12. Donc $OB = 12$.
Puisque le cercle intérieur a une circonférence de 14π, il a un diamètre de 14 et un rayon de 7. Donc $OA = 7$.
Puisque $AB = OB - OA$, alors $AB = 5$.

RÉPONSE : (B)

9. Puisque le triangle *BCD* est rectangle, *BC* est égal à $\sqrt{16^2 + 30^2}$ m, c.-à-d. à $\sqrt{1156}$ m ou 34 m.
Pour déterminer *AC*, on forme un triangle rectangle en traçant une ligne horizontale au point *A*. Le triangle a un côté horizontal d'une longueur de 16 m et un côté vertical d'une longueur de 12 m, soit la différence entre la longueur des tours. Donc *AC* est égal à $\sqrt{16^2 + 12^2}$ m, c.-à-d. à $\sqrt{400}$ m ou 20 m.
La longueur totale des cordes est de 54 m.

RÉPONSE : (A)

10. Lorsqu'on replie, les faces H et I ont une arête en commun. À une extrémité de cette arête, la face G a un sommet commun aux faces H et I. À l'autre extrémité de l'arête, la face J a un sommet commun aux faces H et I.
Donc, la face J est opposée à la face G.

RÉPONSE : (D)

11. Puisque chaque terme, après le deuxième, est le produit des deux termes précédents, alors 18 est le produit de 3 et du nombre dans la 4e position. Le nombre dans la 4e position est donc égal à 6.
La suite est donc *x*, ____, 3, 6, 18.
D'après la règle, 6 est le produit du nombre dans la 2e position et de 3. Le nombre dans la 2e position est donc égal à 2. La suite est donc *x*, 2, 3, 6, 18.
D'après la règle, on a $2x = 3$, d'où $x = \frac{3}{2}$.

RÉPONSE : (B)

12. La somme des nombres de la première ligne est égale à $2x+5$. Donc, la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale est égale à $2x+5$.
Dans la 1re colonne, le 2e nombre doit donc être égal à 5.
Dans la 2e ligne, le deuxième nombre doit donc être égal à $2x+3$.
Dans la 2e colonne, on a donc : $$\begin{aligned} 3+(2x+3)+x &= 2x+5 \\ 3x+6 &= 2x+5 \\ x &= -1 \end{aligned}$$
La somme des nombres d'une ligne est donc égale à $2(-1)+5$, ou 3.

Réponse : (C)

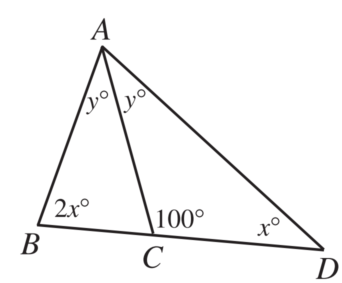
13. Puisque le petit carré a un périmètre de 72 cm, ses côtés mesurent $\frac{1}{4}(72)$ cm, ou 18 cm.
Le petit carré a donc une aire de 18^2 cm^2, ou 324 cm^2.
L'aire du grand carré est égale à la somme de l'aire du petit carré et de l'aire de la partie ombrée. Elle est donc égale à 160 cm^2 + 324 cm^2, ou 484 cm^2.
Les côtés du grand carré mesurent donc $\sqrt{484}$ cm, ou 22 cm. Le périmètre du grand carré est donc égal à $4(22)$ cm ou 88 cm.

Réponse : (B)

14. La moyenne de 4, 20 et x est égale à $\frac{4+20+x}{3}$. La moyenne de y et 16 est égale à $\frac{16+y}{2}$.
Puisque ces moyennes sont égales, alors : $$\begin{aligned} \frac{4+20+x}{3} &= \frac{16+y}{2} \\ 2(4+20+x) &= 3(16+y) \\ 48+2x &= 48+3y \\ 2x &= 3y \\ \frac{x}{y} &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Réponse : (A)

15. Dans le triangle ACD, on a $x^\circ + y^\circ + 100^\circ = 180^\circ$, d'où $x+y=80$.
Puisque les angles ACB et ACD sont supplémentaires et que $\angle ACD = 100^\circ$, alors $\angle ACB = 80^\circ$.
Dans le triangle ACB, on a donc $2x^\circ + y^\circ + 80^\circ = 180^\circ$, d'où $2x+y=100$.
On soustrait l'équation de l'équation, membre par membre, pour obtenir $x=20$.



Réponse : (E)

16. Lorsqu'on jette deux dés, le premier dé donne 6 résultats possibles et pour chacun de ces résultats, il y a 6 résultats possibles pour le deuxième dé. Il y a donc 36 résultats équiprobables en tout.
Les résultats qui donnent 3 points ou moins sont : 1 et 1, 1 et 2, 1 et 3, 2 et 1, 2 et 2, 2 et 3, 3 et 1, 3 et 2, 3 et 3. Donc 9 des 36 résultats possibles donnent 3 points ou moins. La probabilité d'obtenir 3 points ou moins est égale à $\frac{9}{36}$ ou $\frac{1}{4}$.

RÉPONSE : (A)

17. On additionne les fractions en utilisant le dénominateur commun mn :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}+\frac{1}{n} &= \frac{5}{24} \\ \frac{n}{mn}+\frac{m}{mn} &= \frac{5}{24} \\ \frac{m+n}{mn} &= \frac{5}{24} \\ \frac{20}{mn} &= \frac{5}{24} \\ mn &= \frac{24 \times 20}{5} \\ mn &= 96 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (D)

18. Ce problème exige beaucoup de tâtonnements. On constate alors que la foumi peut parcourir un maximum de 9 arêtes, soit 108 cm, avant de devoir s'arrêter. (Par exemple, elle peut procéder de A à B à F à E à A à D à C à G à H à D. À ce somment, elle ne peut plus continuer.)
La fourmi peut parcourir une distance maximale de 108 cm.

Pour justifier ce résultat, on peut faire appel à une branche fascinante des mathématiques appelée la théorie des graphes. (La théorie des graphes est issue des travaux du grand mathématicien suisse du 18^e^ siècle, Euler, alors qu'il résolvait le célèbre problème des 7 ponts de Königsberg.)
Supposons que la fourmi pouvait parcourir 10 arêtes. Sur chaque arête, il y a un départ d'un sommet et une arrivée à un autre sommet. Il y aurait donc un total de 20 départs et arrivées. Or le cube a 8 sommets et à chaque sommet, il y a 3 arêtes qui se rencontrent. À chaque sommet, il ne peut donc pas y avoir plus de 3 départs et arrivées.
Pour 20 départs et arrivées, il doit y avoir 4 sommets qui ont été utilisés 3 fois (2 départs et 1 arrivée ou 1 départ et 2 arrivées). Or seul le sommet initial peut faire l'objet de 2 départs et 1 arrivée et seul le dernier sommet visité peut faire l'objet de 1 départ et 2 arrivées. Il ne peut donc pas y avoir plus de 2 sommets qui ont été utilisés un nombre impair de fois.

La supposition est donc fausse et la fourmi ne peut parcourir 10 arêtes.
La fourmi peut parcourir une distance maximale de 108 cm.

RÉPONSE : (D)

19. Chaque fraction peut être réduite à $\frac{1}{2}$.
La somme est donc égale à 2004 fois $\frac{1}{2}$, ce qui est égal à 1002.

RÉPONSE : (A)

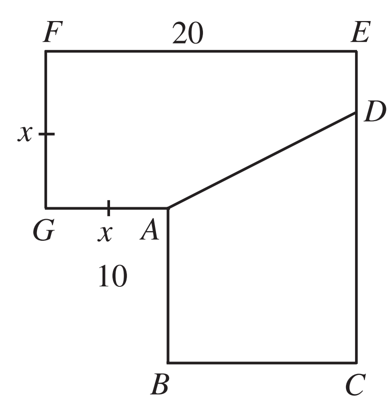
20. Soit a, b et c le nombre de points accordés dans les régions respectives A, B et C.
Selon les résultats des trois archères, on a :
$$c + a = 15$$
$$c + b = 18$$
$$b + a = 13$$
On cherche la valeur de $2b$.
On additionne la 2e et la 3e équation, membre par membre, pour obtenir $a + 2b + c = 31$.
On reporte $c + a = 15$ dans cette équation, ce qui donne $2b + 15 = 31$, d'où $2b = 16$.
(On aurait pu déterminer la valeur de chaque inconnue, mais ce n'était pas nécessaire.)

RÉPONSE : (C)

21. Supposons que Lara utilise la dernière feuille bleue le jour numéro n.
Elle a donc utilisé n feuilles bleues et $3n$ feuilles rouges.
Puisqu'il lui reste 15 feuilles rouges, le nombre initial de feuilles rouges est égal à $3n + 15$.
Puisque le rapport du nombre initial de feuilles bleues au nombre initial de feuilles rouges est égal à $2:7$, alors :
$$\frac{n}{3n+15} = \frac{2}{7}$$
$$7n = 6n + 30$$
$$n = 30$$
Au départ, il y avait donc 30 feuilles bleues et 105 feuilles rouges pour un total de 135 feuilles.

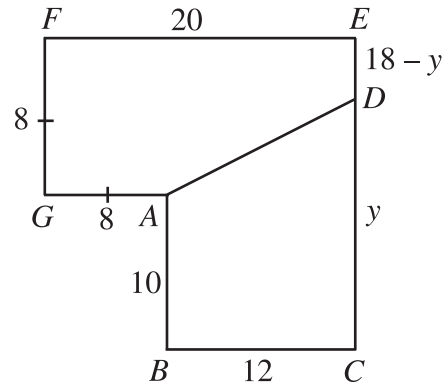
RÉPONSE : (C)

22. On détermine d'abord la longueur des côtés.
Soit $AG = x$. Donc $FG = x$.
L'aire de la salle, soit 280 m^2, est égale à l'aire d'un grand rectangle, mesurant 20 m sur $(10 + x)$ m, moins l'aire d'un petit rectangle mesurant x m sur 10 m. Donc :
$$20(10 + x) - 10x = 280$$
$$10x + 200 = 280$$
$$x = 8$$



En partant du point B et en allant dans le sens des aiguilles d'une montre, les côtés ont une longueur respective de 10 m, 8 m, 8 m, 20 m, 18 m et 12 m.
Soit $y = CD$.

$ABCD$ est un trapèze ayant pour bases CD et AB. La haute ur est égale à BC, ou 12.
On veut que l'aire du trapèze soit la moitié de l'aire de la salle. On a donc :



$$\frac{1}{2}(12)(10+y) = 140$$
$$6(10+y) = 140$$
$$10 + y = \frac{70}{3}$$
$$y = \frac{40}{3}$$

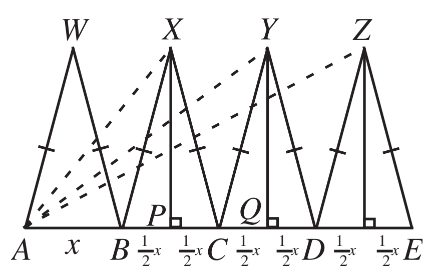
La distance de C à D est égale à $\frac{40}{3}$ m.

RÉPONSE : (E)

23. Le ballon roule vers Marcos à une vitesse de 4 m/s et celui-ci court en direction du ballon à une vitesse de 8 m/s. Marcos se rapproche donc du ballon à une vitesse de 12 m /s. Puisqu'il est à 30 m du ballon, au départ, il mettra $\frac{30}{12}$ s, ou 2,5 s pour atteindre le ballon.
Le ballon s'éloigne de Michel à une vitesse de 4 m/s, mais Michel court dans la direction du ballon à une vitesse de 9 m/s. Il gagne donc 5 m/s sur le ballon. Puisqu'il est à 15 m du ballon, au départ, il mettrait 3 s pour le rattraper si celui-ci continuait à rouler.
Marcos est donc le premier à toucher le ballon. Après 2,5 s, Michel a gagné $2{,}5 \times 5$ m ou 12,5 m sur le ballon. Au moment où Marcos touche le ballon, Michel est à 2,5 m de Marcos.

RÉPONSE : (C)

24. On détermine d'abord la longueur des côtés du nouveau triangle en fonction de x.
On trace les hauteurs XP, YQ et ZR. Puisque les triangles sont isocèles, on a $BP = PC = CQ = QD = DR = RE = \frac{1}{2}x$.



Le triangle ARZ est rectangle en R. On a $AZ = AE = 4x$. Selon le théorème de Pythagore :

$$AR^2 + RZ^2 = AZ^2$$
$$RZ^2 = (4x)^2 - \left(\tfrac{7}{2}x\right)^2$$
$$RZ^2 = \tfrac{15}{4}x^2$$

Le carré de la hauteur de chaque triangle est égal à $\frac{15}{4}x^2$.

Donc : $AY^2 = AQ^2 + QY^2$ et $AX^2 = AP^2 + PX^2$

$$\begin{aligned} &= \left(\tfrac{5}{2}x\right)^2 + \tfrac{15}{4}x^2 & &= \left(\tfrac{3}{2}x\right)^2 + \tfrac{15}{4}x^2 \\ &= 10x^2 & &= 6x^2 \\ AY &= \sqrt{10}x & AX &= \sqrt{6}x \end{aligned}$$

Les côtés du nouveau triangle ont pour longueur respective $\sqrt{6}x$, $\sqrt{10}x$ et $4x$.

Puisque $\left(\sqrt{6}x\right)^2 + \left(\sqrt{10}x\right)^2 = (4x)^2$, le nouveau triangle est rectangle. L'hypoténuse a pour longueur $4x$. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}x\right)\left(\sqrt{10}x\right)$, c.-à-d. à $\frac{1}{2}\sqrt{60}x^2$ ou $\sqrt{15}x^2$.

On veut que cette aire soit inférieure à 2004. On a donc $\sqrt{15}x^2 < 2004$ d'où $x < \sqrt{\dfrac{2004}{\sqrt{15}}}$ ou $x < 22{,}747$. La plus grande valeur entière de x pour laquelle l'aire est inférieure à 2004 est 22.

RÉPONSE : (E)

25. On récrit chaque expression de manière à montrer un numérateur commun.

$$\begin{aligned} \frac{7x+1}{2} &= \frac{2+(7x-1)}{2} & \frac{7x+2}{3} &= \frac{3+(7x-1)}{3} & \cdots \\ &= 1+\frac{7x-1}{2} & &= 1+\frac{7x-1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{7x+300}{301} &= \frac{301+(7x-1)}{301} \\ &= 1+\frac{7x-1}{301} \end{aligned}$$

Dans chaque cas, l'expression rationnelle initiale sera réduite à sa plus simple expression si la nouvelle expression rationnelle l'est aussi. Par exemple, $\dfrac{7x+1}{2}$ est réduite à sa plus simple expression si $\dfrac{7x-1}{2}$ est réduite à sa plus simple expression.

On cherche donc le nombre de valeurs entières de x, de 1 à 60, pour lesquelles chacune des expressions rationnelles $\dfrac{7x-1}{2}$, $\dfrac{7x-1}{3}$, …, $\dfrac{7x-1}{301}$ est réduite à sa plus simple expression.

On cherche donc le nombre de valeurs entières de x, de 1 à 60, pour lesquelles la valeur de $7x-1$ n'admet aucune diviseur commun avec les entiers de 2 à 301.

Pour les valeurs de x de 1 à 43, l'expression $7x-1$ aura des valeurs entières positives inférieures ou égales à 301. Il y aura donc des diviseurs communs.

On considère donc les valeurs de x de 44 à 60.

Si x a une valeur impaire, alors $7x-1$ prend une valeur paire. Il y a donc un diviseur commun, 2.

Il suffit donc de considérer les entiers 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58 et 60 comme valeurs de x.

Les valeurs correspondantes de $7x-1$ sont 307, 321, 335, 349, 363, 377, 391, 405 et 419. On cherche les valeurs qui n'admettent aucun diviseur commun avec les entiers positifs de 2 à 301.

On peut éliminer les nombres 321, 363 et 405 qui sont divisibles par 3. On peut aussi éliminer le nombre 335 qui est divisible par 5. Il reste les nombres 307, 349, 377, 391 et 419.
307 est un nombre premier.
349 est un nombre premier.
377 est divisible par 13. On peut l'éliminer.
391 est divisible par 17, On peut l'éliminer.
419 est un nombre premier.
Un nombre premier n'est divisible que par 1 et par lui-même. Les nombres 307, 349 et 419 n'admettent donc aucun diviseur commun avec les entiers de 2 à 301.

Il y a donc trois valeurs entières de x, de 1 à 60, pour lesquelles chacune des expressions rationnelles est une fraction réduite à sa plus simple expression.

RÉPONSE : (C)

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre
en mathématiques et en
Université de Waterloo, Waterloo,

2003 Solutions
Concours Cayley (10e – année)

(Secondaire IV au Québec)

pour les prix du

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. On calcule : $\frac{3-(-3)}{2-1}$ est égal à $\frac{6}{1}$, ou 6 RÉPONSE : (D)

2. $17^2 - 15^2$ est égal à $289 - 225$, ou 64. Donc $17^2 - 15^2 = 8^2$. RÉPONSE : (A)

3. Puisque $42 = 6 \times 7$, le seul choix correct est que 42 est divisible par 7. On peut vérifier que les autres choix sont faux. RÉPONSE : (D)

4. Puisque 25 % du nombre est 5 fois 5 % du nombre, alors 25 % du nombre est égal à 5×8, ou 40. RÉPONSE : (A)

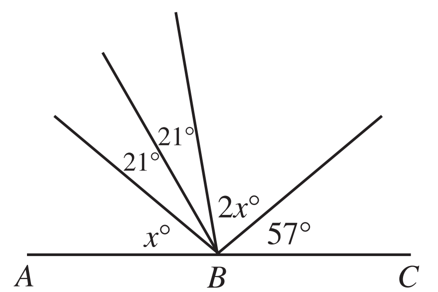
5. On peut évaluer l'expression à l'aide d'une calculatrice et arrondir la réponse. On peut aussi calculer au long :

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{7}{2} &= \frac{2}{3}+\frac{7}{2}\\ &= \frac{4}{6}+\frac{21}{6}\\ &= \frac{25}{6}\\ &= 4+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Arrondie à l'unité près, la valeur de l'expression est égale à 4. RÉPONSE : (B)

6. Puisque ABC est une droite, la somme des mesures des cinq angles est égale à 180°. Donc :

$$\begin{aligned}x^\circ + 21^\circ + 21^\circ + 2x^\circ + 57^\circ &= 180^\circ\\ 3x + 99 &= 180\\ 3x &= 81\\ x &= 27\end{aligned}$$



RÉPONSE : (A)

7. *Solution 1*

Le quart de cercle supérieur droit ne contient aucune inconnue. On peut donc calculer la somme des trois nombres. On a $13 + 17 + 45 = 75$. Donc la somme des nombres dans chaque quart de cercle est égale à 75. On a donc :

$$\begin{aligned}(z + 28 + 8) + (x + 19 + 50) + (y + 3 + 63) &= 3(75)\\ x + y + z + 36 + 69 + 66 &= 225\\ x + y + z &= 54\end{aligned}$$

Solution 2

Le quart de cercle supérieur droit ne contient aucune inconnue. On peut donc calculer la somme des trois nombres. On a $13 + 17 + 45 = 75$.

Dans le quart de cercle supérieur gauche, on a donc $z + 28 + 8 = 75$, d'où $z = 39$.

De même, $x = 6$ et $y = 9$.

Donc $x + y + z = 54$. RÉPONSE : (C)

8. Puisque le triangle équilatéral a des côtés de longueur 20, il a un périmètre de 60.
Or un carré qui a un périmètre de 60 a des côtés de longueur 15.
Un carré qui a des côtés de longueur 15 a une aire de 225. RÉPONSE : (C)

9. *Solution 1*

Puisque $\dfrac{1}{x+\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{3}$, alors $\dfrac{x+\frac{1}{5}}{1}=\dfrac{3}{5}$, ou $x+\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{5}$, d'où $x=\dfrac{2}{5}$.

Solution 2
On utilise le produit en croix :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+\frac{1}{5}}&=\frac{5}{3}\\ 5\left(x+\frac{1}{5}\right)&=3\\ x+\frac{1}{5}&=\frac{3}{5}\\ x&=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

10. *Solution 1*
Lorsque $\frac{5}{8}$ des participants seront des filles, $\frac{3}{8}$ des participants seront des garçons. Puisqu'il y a 6 garçons et que ce nombre ne change pas, il doit y avoir 16 participants en tout de manière que $\frac{6}{16}$, ou $\frac{3}{8}$ des participants soient des garçons. Puisqu'il y avait 8 participants au départ, il faut ajouter 8 filles.

Solution 2
Soit f le nombre de filles qu'il faut ajouter. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{2+f}{8+f}&=\frac{5}{8}\\ 16+8f&=40+5f\\ 3f&=24\\ f&=8\end{aligned}$$

RÉPONSE : (D)

11. Puisque N est la somme de puissances de 10, on voit que N est égal à $1\,111\,111\,000$.
La somme de ses chiffres est égale à 7. RÉPONSE : (E)

12. *Solution 1*
Pour se rendre du point B au point C, on doit aller 12 unités vers la gauche et monter de 4 unités. Sur la droite qui contient ces points, on monte toujours de 1 à chaque fois que l'on fait 3 unités vers la gauche.

Pour se rendre du point *B* au point *A*, il faut monter de 1 unité. Puisque le point *A* est sur la même droite que les points *B* et *C*, il faut donc que l'on fasse 3 unités vers la gauche à partir de 9. Donc $a = 9 - 3$, d'où $a = 6$.

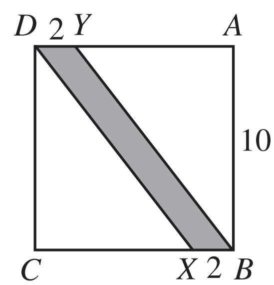
Solution 2
Puisque les points sont alignés, alors :

$$\begin{aligned}
\text{Pente de } BA &= \text{Pente de } CB \\
\frac{1-0}{a-9} &= \frac{0-4}{9-(-3)} \\
\frac{1}{a-9} &= \frac{-4}{12} \\
12 &= -4a + 36 \\
4a &= 24 \\
a &= 6
\end{aligned}$$

RÉPONSE : (D)

13. *Solution 1*
Puisque $AY = CX = 8$, alors $DY = BX = 2$ et *DYBX* est donc un parallélogramme.

Si on fait tourner le diagramme sur 90°, dans le sens des aiguilles d'une montre, on voit que *DYBX* est un parallélogramme ayant une base de 2 et une hauteur de 10. Il a donc une aire de 2×10, ou 20.



Solution 2
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du carré, moins l'aire des triangles ABY et DCX. Or chacun de ces rectangles est rectangle avec une base de 10 unités et une hauteur de 8 unités. On a donc :

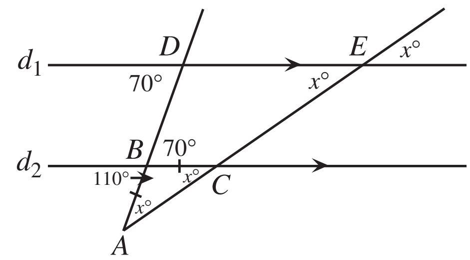
$$\begin{aligned}
\text{Aire de la région ombrée} &= \text{Aire du carré} - \text{Aire des triangles} \\
&= (10)^2 - 2\left[\tfrac{1}{2}(8)(10)\right] \\
&= 100 - 2[40] \\
&= 20
\end{aligned}$$

RÉPONSE : (B)

14. Carla parcourt $3 \times 0{,}5$, ou 1,5 m en 3 pas. Puisque Jacob parcourt la même distance en 4 pas, il parcourt 6 fois cette distance en 24 pas. Il parcourt donc $6 \times 1{,}5$, ou 9 m en 24 pas.

RÉPONSE : (B)

15. Soit *D* et *E* les points indiqués sur le diagramme.
À cause des angles opposés par le sommet, $\angle DEC = x^\circ$.
Puisque les droites d_1 et d_2 sont parallèles et que AD et AE sont des sécantes, alors $\angle DBC = 70^\circ$ et $\angle BCA = x^\circ$.



Puisque les angles ABC et DBC sont supplémentaires et que $\angle DBC = 70^\circ$, alors $\angle ABC = 110^\circ$.
Puisque le triangle ABC est isocèle, $\angle BAC = \angle BCA = x^\circ$. D'après la somme des mesures des angles du triangle ABC :

$$\begin{aligned} x^\circ + 110^\circ + x^\circ &= 180^\circ \\ 2x &= 70 \\ x &= 35 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

16. On utilise 2 et 3 pour bases et on fait appel aux lois des exposants :

$$\frac{\left(4^{2003}\right)\left(3^{2002}\right)}{\left(6^{2002}\right)\left(2^{2003}\right)} = \frac{\left(\left(2^2\right)^{2003}\right)\left(3^{2002}\right)}{\left((2\cdot 3)^{2002}\right)\left(2^{2003}\right)} = \frac{\left(2^{4006}\right)\left(3^{2002}\right)}{\left(2^{2002}\right)\left(3^{2002}\right)\left(2^{2003}\right)} = \frac{\left(2^{4006}\right)\left(3^{2002}\right)}{\left(2^{4005}\right)\left(3^{2002}\right)} = 2^{4006-4005} = 2$$

RÉPONSE : (B)

17. Puisque le grand cercle a un rayon de 4, son aire est égale à $\pi \times 4^2$, ou 16π.
Le petit cercle ombré a un rayon de 1. Son aire est égale à $\pi \times 1^2$, ou π.
L'aire de l'anneau ombré est égale à l'aire d'un cercle de rayon 3, moins l'aire d'un cercle de rayon 2. Elle est donc égale à $\pi \times 3^2 - \pi \times 2^2$, ou 5π.
L'aire totale des régions ombrées est égale à $\pi + 5\pi$, ou 6π.
Le rapport de l'aire des régions ombrées à l'aire du grand cercle est égal à $6\pi:16\pi$, ou $3:8$.

RÉPONSE : (E)

18. Puisque 496 est inférieur à 2^m, on peut chercher une puissance de 2 qui est supérieure à 496, sans être trop grande. Or 2^9, qui est égal à 512, est une telle puissance. De plus, on constate que $496 = 512 - 16$, ou $496 = 2^9 - 2^4$. Donc $m + n = 9 + 4$, ou $m + n = 13$.
(On peut aussi utiliser une approche algébrique.)

RÉPONSE : (A)

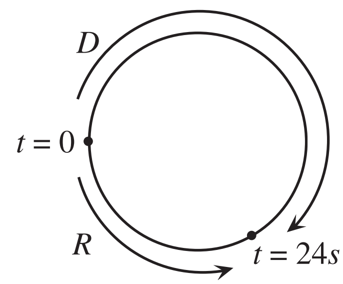
19. Soit a, b, c et d les chiffres du nombre. On a donc le produit $abcd = 810$.
On doit déterminer comment écrire le nombre 810 comme produit de 4 entiers positifs différents, chacun inférieur à 10 et supérieur à 0. On écrit d'abord 810 en factorisation première. On a $810 = 81 \times 10$, d'où $810 = 2 \times 3^4 \times 5$.
Un des chiffres doit donc être un multiple de 5. Or le seul tel chiffre est 5. Un des chiffres du nombre est donc 5.
On doit donc déterminer trois autres chiffres distincts dont le produit est égal à $3^4 \times 2$.
Seuls les chiffres 3, 6 et 9 sont des multiples de 3. Or le produit de ces nombres est égal à $3^4 \times 2$. En effet, $3 \times 6 \times 9 = 3 \times (2 \times 3) \times (3 \times 3)$. Les autres chiffres sont donc 3, 6 et 9.
Les chiffres du nombre sont donc 3, 5, 6 et 9. Leur somme est égale à 23.

RÉPONSE : (C)

20. Le coût pour modifier le réglage du moteur, 400 \$, est équivalent au coût de $\frac{400}{0,80}$, ou 500 L d'essence. Pour recouvrer le coût de la modification, la propriétaire doit donc parcourir une distance qui épargnera 500 L d'essence.
Au départ, la voiture consomme 8,4 L d'essence aux 100 km. Après la modification, elle consomme 6,3 L aux 100 km, soit une épargne de 2,1 L aux 100 km.
Pour épargner 500 L d'essence, il faudrait parcourir $\frac{500}{2,1} \times 100$, ou $23\,809,52$ km.

RÉPONSE : (D)

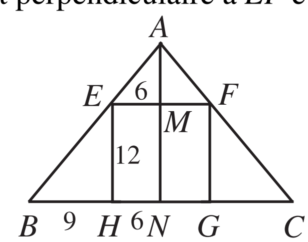
21. Soit $t = 0$ s le temps où Robert et Danielle se croisent la première fois. Ils se croiseront donc de nouveau à $t = 24$ s.
Quelle distance Robert parcourt-il en 24 secondes?
Puisqu'il fait un tour de piste à toutes les 56 secondes, il fait $\frac{24}{56}$, ou $\frac{3}{7}$ d'un tour de piste en 24 secondes.



Puisque Danielle court en sens opposé, elle parcourt $\frac{4}{7}$ d'un tour de piste en 24 secondes.
Elle met donc $\frac{7}{4} \times 24$, ou 42 secondes pour faire un tour de piste.

RÉPONSE : (E)

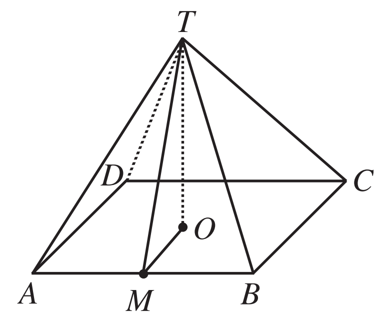
22. Soit M le milieu de EF et N le milieu de HG. Par symétrie, N est aussi le milieu de BC.
De plus, le segment de droite AM passe au point N et il est perpendiculaire à EF et à BC.
Puisque les côtés du carré mesurent 12 cm, $EM = HN = 6$ cm et $EH = 12$ cm.
Puisque $BC = 30$ cm, alors $BN = 15$ cm et $BH = 9$ cm.
Puisque $EFGH$ est un carré, EF est parallèle à HG. Donc $\angle AEM = \angle EBH$. Les triangles AME et EHB sont donc semblables. Donc $\frac{AM}{6} = \frac{12}{9}$, d'où $AM = 8$ cm.



L'aire du triangle AEF est égale à $\frac{1}{2}(12)(8)$, ou 48 cm^2.

RÉPONSE : (D)

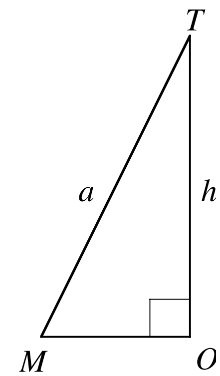
23. Soit A, B, C et D les sommets à la base de la pyramide et T l'apex. Soit M le milieu de l'arête AB et O le centre de la base.
Puisque la base de la pyramide est un carré et que les faces latérales ont la même aire, ces faces sont des triangles isocèles congruents et la pyramide est droite.



On trace les segments TO, TM et MO.
Puisque la pyramide est droite, TO est perpendiculaire à MO. Le triangle TOM est donc rectangle en O.
Soit h la hauteur de la pyramide, c'est-à-dire que $h = TO$.
Puisque la base de la pyramide a une aire de 1440 cm^2, alors $BC = \sqrt{1440}$ cm, ou $BC = 12\sqrt{10}$ cm. Puisque M est le milieu de AB, que O est le centre de la pyramide et que celle-ci est droite, alors $MO = 6\sqrt{10}$ cm.
Soit a la longueur de l'apothème de la pyramide, c'est-à-dire que $a = TM$. Puisque le triangle ABT est isocèle, TM est la hauteur du triangle.
Puisque l'aire du triangle ABT est égale à 840 cm^2, alors $\frac{1}{2}AB \times TM = 840$ cm^2, d'où $\left(12\sqrt{10}\right)a = 1680$ cm. Donc $a = \dfrac{140}{\sqrt{10}}$ cm, ou $a = 14\sqrt{10}$ cm.
Puisque le triangle TOM est rectangle, alors :

$$\begin{aligned} TO^2 &= TM^2 - MO^2 \\ h^2 &= a^2 - MO^2 \\ &= \left(14\sqrt{10}\right)^2 - \left(6\sqrt{10}\right)^2 \\ &= 1960 - 360 \\ &= 1600 \\ h &= 40 \end{aligned}$$

La pyramide a une hauteur de 40 cm.



RÉPONSE : (B)

24. Lorsqu'on choisit quatre nombres de l'ensemble $\{0, 1, 2, ..., 9\}$, il n'y a qu'une façon de les écrire en ordre croissant. Il suffit donc de choisir quatre nombres dont la somme est un multiple de 3, sans égard à l'ordre des nombres.
Si la somme de quatre nombres est divisible (ou n'est pas divisible) par 3, elle est divisible par 3 (ou ne l'est pas) si on soustrait un multiple de 3 d'un de ces nombres, car la différence de deux multiples de 3 est aussi un multiple de 3.
On utilisera aussi le fait qu'un nombre est soit un multiple de 3, soit un de plus ou un de moins qu'un multiple de 3, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous forme $3n$, $3n+1$ ou $3n-1$.
On utilise ces deux propriétés pour transformer l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ de manière à obtenir la collection $\{0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0\}$, en soustrayant des multiples de 3, p. ex., 6 de 5 pour obtenir –1. (Puisqu'un ensemble ne peut contenir le même élément plus d'une fois, on a utilisé le mot « collection ».)
On veut choisir quatre nombres de la collection $\{0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0\}$, de manière que la somme soit un multiple de 3, y compris 0. Comment s'y prend-on?
Si on choisit quatre zéros, leur somme est $0+0+0+0$, ou 0, qui est un multiple de 3.
Si on choisit trois zéros, le quatrième nombre doit être un 1 ou un –1 et la somme n'est pas un multiple de 3.

Si on choisit deux zéros, on peut ensuite choisir deux 1, deux –1 ou un 1 et un –1. Seul le dernier choix donne une somme qui est un multiple de 3.
Si on choisit un zéro, il faut choisir trois 1 ou trois –1 pour que la somme soit un multiple de 3. (On peut vérifier qu'aucun autre choix ne donnera un multiple de 3.)
Si on ne choisit aucun zéro, alors il faut choisir deux 1 et deux –1 pour que la somme soit un multiple de 3 (autrement on choisit trois d'une sorte et un de l'autre sorte, ou quatre d'une même sorte, ce qui ne donne pas une somme qui est un multiple de 3).
On compte maintenant le nombre de chois dans chaque cas :

1er cas : 0, 0, 0, 0
Il y a une seule façon de choisir quatre zéros. (Ce choix correspond au choix de 0, 3, 6 et 9, dont la somme est un multiple de 3.)

2e cas : 0, 0, 1, –1
On doit choisir deux zéros parmi quatre, un 1 parmi trois et un –1 parmi trois. Étant donné quatre objets, A, B, C et D, il y a 6 façons de choisir deux des objets (AB, AC, AD, BC, BD, CD). Étant donné trois objets, il y a 3 façons de choisir un des objets. Il y a donc 6 façons de choisir deux zéros. Pour chacune d'elles, il y a 3 façons de choisir un 1. Pour chacun des choix précédents, il y a 3 façons de choisir un –1. En tout, le nombre de choix est égal à $6 \times 3 \times 3$, ou 54.

3e cas : 0, 1, 1, 1
Il y a 4 façons de choisir un zéro parmi quatre. Pour chaque choix, il y a 1 façon de choisir trois 1 parmi trois. En tout, le nombre de choix est égal à 4.

4e cas : 0, –1, –1, –1
Comme dans le cas précédent, il y a 4 choix possibles.

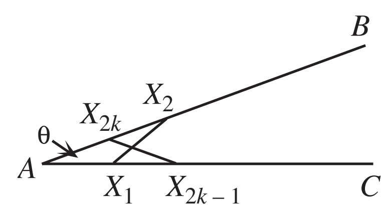
5e cas : 1, 1, –1, –1
Il y a 3 façons de choisir deux 1 parmi trois. Pour chaque choix, il y a trois façons de choisir deux –1 parmi trois. En tout, le nombre de choix est égal à 3×3, ou 9.

Il y a donc $1 + 54 + 4 + 4 + 9$, ou 72 façons de choisir quatre nombres dont la somme est un multiple de 3.
RÉPONSE : (E)

25. Soit un angle aigu θ, qui peut être lacé avec $2k$ points. On veut déterminer les valeurs possibles de θ.
On remarque que le diagramme doit être symétrique, puisque

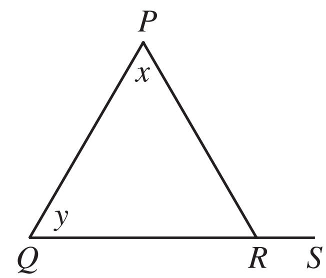
$$AX_1 = X_1X_2 = X_{2k-1}X_{2k} = X_{2k}A.$$

Les triangles AX_1X_2 et $AX_{2k}X_{2k-1}$ ont donc deux paires de côtés congrus deux à deux et ils sont isocèles. Puisqu'ils partagent un même angle à la base, ils sont congruents. Donc $AX_2 = AX_{2k-1}$.



De la même manière, on peut démontrer que deux points correspondants, sur les demi-droites AB et AC, sont équidistants du point A.
On a donc $AX_k = AX_{k+1}$. Le triangle AX_kX_{k+1} est donc isocèle et on a $\angle AX_kX_{k+1} = \angle AX_{k+1}X_k = \frac{1}{2}(180° - \theta)$.

On développera maintenant une autre expression pour la mesure de ces angles. Pour le faire, on fera appel à l'angle extérieur d'un triangle. Dans le triangle ci-contre, $\angle PRQ + x + y = 180°$ et $\angle PRQ + \angle PRS = 180°$, d'où $\angle PRS = x + y$.



Puisque le triangle AX_1X_2 est isocèle, alors $\angle X_1AX_2 = \angle AX_2X_1 = \theta$. On connaît donc la mesure de l'angle extérieur correspondant : $\angle X_2X_1C = 2\theta$.
Puisque le triangle $X_1X_2X_3$ est isocèle, alors $\angle X_2X_1X_3 = \angle X_2X_3X_1 = 2\theta$. On connaît donc la mesure de l'angle extérieur X_3X_2C du triangle AX_2X_3 : $\angle X_3X_2C = 3\theta$.
De la même manière, $\angle X_3X_2X_4 = \angle X_3X_4X_2 = 3\theta$, et ainsi de suite, jusqu'à

$$\angle X_kX_{k-1}X_{k+1} = \angle X_kX_{k+1}X_{k-1} = k\theta.$$

(On peut le vérifier avec le diagramme de l'énoncé du problème.) On peut comparer les deux expressions pour la mesure des angles congrus, $AX_{k+1}X_k$ et $X_{k-1}X_{k+1}X_k$, pour obtenir :

$$\frac{1}{2}\left(180^\circ - \theta\right) = k\theta$$
$$180^\circ = 2k\theta + \theta$$
$$\theta = \frac{180^\circ}{2k+1}$$

Puisque θ doit être un entier, $2k+1$ doit être un diviseur impair (supérieur à 1) de 180.
Les diviseurs de 180 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90 et 180.
Les diviseurs impairs et supérieurs à 1 sont 3, 5, 9, 15 et 45.

Il y a donc cinq angles aigus θ qui peuvent être lacés : 60°, 36°, 20°, 12° et 4°.

RÉPONSE : (C)

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2002 Solutions
Concours Cayley (10^{e} - Sec. IV)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

1. On développe et on simplifie :
$$5x + 2(4 + x) = 5x + (8 + 2x)$$
$$= 7x + 8$$
RÉPONSE : (C)

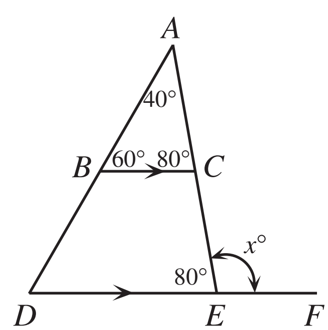
2. On a :
$$(2+3)^2 - \left(2^2 + 3^2\right) = 5^2 - (4+9)$$
$$= 25 - 13$$
$$= 12$$
RÉPONSE : (A)

3. Si $x = -3$, alors :
$$x^2 - 4(x-5) = (-3)^2 - 4(-3-5)$$
$$= 9 - 4(-8)$$
$$= 41$$
RÉPONSE : (D)

4. Puisque $n = \frac{5}{6}(240)$, alors :
$$\frac{2}{5}n = \frac{2}{5}\left(\frac{5}{6}\right)(240)$$
$$= \frac{1}{3}(240)$$
$$= 80$$
RÉPONSE : (B)

5. À l'aide des lois des exposants :
$$2^{-2} \times 2^{-1} \times 2^0 \times 2^1 \times 2^2 = 2^{-2-1+0+1+2}$$
$$= 2^0$$
$$= 1$$
En calculant :
$$2^{-2} \times 2^{-1} \times 2^0 \times 2^1 \times 2^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times 4$$
$$= 1$$
RÉPONSE : (B)

6. Dans le triangle ABC, on a :
$$\angle ACB + 40^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$
$$\angle ACB = 80^\circ$$
Puisque BC est parallèle à DE, $\angle AED = \angle ACB = 80^\circ$.
Donc $x^\circ = 180^\circ - \angle AED$, d'où $x^\circ = 100^\circ$.
Donc $x = 100$.



RÉPONSE : (D)

7. Puisque la droite a une pente de $\frac{1}{2}$, la droite monte de 1 unité lorsqu'on avance de 2 unités vers la droite. Donc le point $(-2+2, 4+1)$, ou $(0, 5)$, est situé sur la droite. L'ordonnée à l'origine de la droite est donc égale à 5. RÉPONSE : (A)

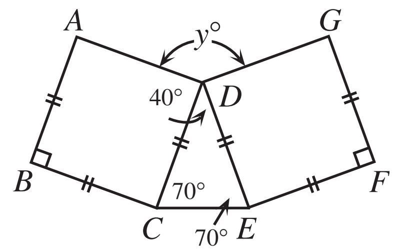
8. Puisqu'elle a compté une moyenne de 18 points par partie en trois parties, Maryse a compté un total de 3×18, ou 54 points, dans ses trois premières parties. De même, elle a compté un total de 4×17, ou 68 points, dans ses quatre premières parties. Dans sa quatrième partie, elle a donc compté $68 - 54$, ou 14 points. RÉPONSE : (E)

9. Puisque les carrés *ABCD* et *DEFG* ont les mêmes longueurs de côtés, alors $DC = DE$ et le triangle CDE est donc isocèle. Donc $\angle DEC = \angle DCE = 70^\circ$, d'où :

$$\angle CDE = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$$

et

$$y^\circ = 360^\circ - \angle ADC - \angle CDE - \angle GDE$$
$$y^\circ = 360^\circ - 90^\circ - 40^\circ - 90^\circ$$
$$y^\circ = 140^\circ$$
$$y = 140$$



RÉPONSE : (E)

10. Soit x le nombre initial. Donc :

$$\frac{x-5}{4} = \frac{x-4}{5}$$
$$20\left(\frac{x-5}{4}\right) = 20\left(\frac{x-4}{5}\right)$$
$$5(x-5) = 4(x-4)$$
$$5x - 25 = 4x - 16$$
$$x = 9$$

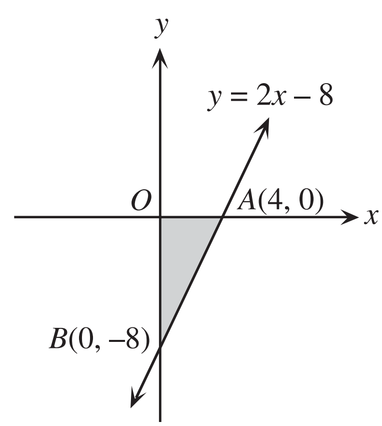
RÉPONSE : (C)

11. Au point B, posons $x = 0$, d'où $y = -8$. B a donc pour coordonnées $(0, -8)$. Au point A, posons $y = 0$, d'où :

$$0 = 2x - 8$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

A a donc pour coordonnées $(4, 0)$. On a donc :

$$\text{Aire du triangle } AOB = \frac{1}{2}(OA)(OB)$$
$$= \frac{1}{2}(4)(8)$$
$$= 16$$

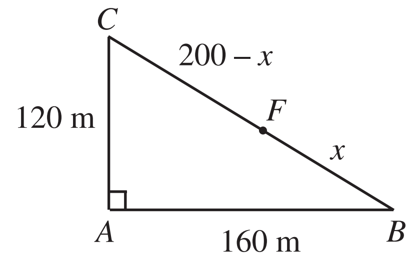


RÉPONSE : (B)

12. Après l'augmentation de 40 %, le nouveau prix est égal à 140 % de 10 \$, ou 14,00 \$. Lorsque ce nouveau prix est diminué de 30 %, le prix final est égal à 70 % de 14,00 \$, ce qui est égal à $0,7 \times 14,00$ \$, ou 9,80 \$. RÉPONSE : (A)

13. D'après la relation de Pythagore :

$$BC^2 = 120^2 + 160^2$$
$$BC^2 = 40000$$
$$BC = 200$$



Soit $FB = x$. Donc $FC = 200 - x$. D'après les renseignements donnés :

$$AC + CF = AB + BF$$
$$120 + 200 - x = 160 + x$$
$$160 = 2x$$
$$x = 80$$

La distance de F à B est égale à 80 m. RÉPONSE : (D)

14. On reporte $c + d = 3$ dans la première équation pour obtenir :

$$a(3) + b(3) = 42$$
$$3(a + b) = 42$$
$$a + b = 14$$

Puisque $a + b = 14$ et $c + d = 3$, alors :

$$a + b + c + d = 14 + 3$$
$$= 17$$

RÉPONSE : (D)

15. Si on part du point A, on peut se diriger vers D, E ou B.
Si on va de A à D, on doit suivre les flèches pour poursuivre de D à E à F, ce qui donne le trajet $A \to D \to E \to F$.
Si on va de A à E, on doit suivre les flèches pour poursuivre de E à F, ce qui donne le trajet $A \to E \to F$.
Si on va de A à B, on peut poursuivre de B vers E, C ou F. Dans ce dernier cas, on a le trajet $A \to B \to F$. De E ou C, on va directement à F, ce qui donne les trajets $A \to B \to E \to F$ et $A \to B \to C \to F$.
Il y a donc 5 trajets différents de A à F. RÉPONSE : (B)

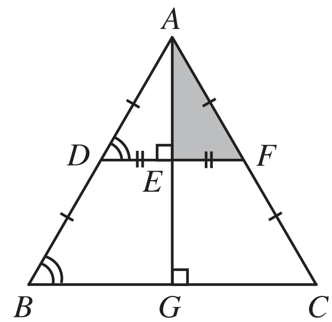
16. Soit n, $n+1$, $n+2$ et $n+3$ les quatre entiers positifs consécutifs.
On a donc l'équation $n(n+1)(n+2)(n+3) = 358\ 800$.
Or ce produit $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est à peu près égal à n^4. Donc n^4 est presque égal à $358\ 800$ et n est presque égal à $\sqrt[4]{358\ 800}$, ou 24,5.
On vérifie : $24(25)(26)(27) = 421\ 200$ et ce produit est trop petit.
$23(24)(25)(26) = 358\ 800$ et ce produit est le bon.
La somme des quatre entiers est égale à $23 + 24 + 25 + 26$, ou 98.

RÉPONSE : (B)

17. Un nombre « double-singulier » est de la forme *aab*, *a* et *b* étant des chiffres différents. Il y a 9 possibilités pour *a* (puisque *a* ne peut égaler 0). Pour chacune de ces possibilités, il y a 9 possibilités pour *b* (puisque *b* peut égaler n'importe quel chiffre de 0 à 9, à l'exception de la valeur de *a*). Il y a donc 9×9, ou 81 nombres doubles-singuliers.

RÉPONSE : (A)

18. *Solution 1*



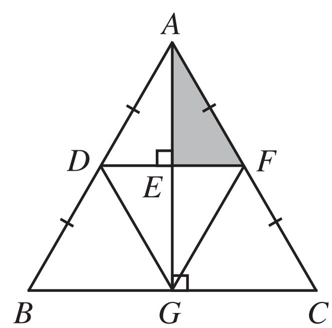
Puisque les triangles ADF et ABC partagent l'angle DAF et que $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$, alors les triangles sont semblables. Le rapport des aires est donc égal au carré du rapport des longueurs de côtés. Donc :

$$\text{Aire du triangle } ADF = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \text{Aire du triangle } ABC.$$

Puisque les triangles sont semblables, $\angle ADF = \angle ABC$ et DF est donc parallèle à BC. Puisque AG est perpendiculaire à BC, alors AG est perpendiculaire à DE. Donc AE est une hauteur du triangle ADF. Puisque le triangle ADF est isocèle, $DE = EF$. Donc :

$$\begin{aligned}\text{Aire du triangle } ADF &= \frac{1}{2} \times \text{Aire du triangle } ADF \\ &= \frac{1}{8} \times \text{Aire du triangle } ABC\end{aligned}$$

Solution 2



On trace les segments *DG* et *FG*. On a donc quatre triangles isocèles identiques, soit ADF, GDF, BDG, et CFG. Chacun a donc la même aire. Donc :

$$\begin{aligned}\text{Aire du triangle } AEF &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} \times \text{Aire du triangle } ABC\right) \\ &= \frac{1}{8} \times \text{Aire du triangle } ABC\end{aligned}$$

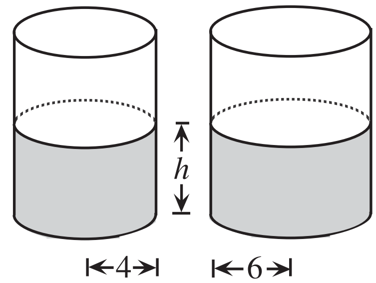
RÉPONSE : (E)

19. Soit $x = 777\,777\,777\,777\,777$ et $y = 222\,222\,222\,222\,223$.
L'entier est égal à $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.
Or $x + y = 1\,000\,000\,000\,000\,000$ et $x - y = 555\,555\,555\,555\,554$.
Donc $x^2 - y^2 = 555\,555\,555\,555\,554\,000\,000\,000\,000\,000$ et la somme de ses chiffes est égale à $14 \times 5 + 4$, ou 74.

RÉPONSE : (C)

20. Soit h la profondeur de l'eau dans chaque réservoir à la fin.
Le volume initial d'eau, en mètres cubes, est égal à $\pi(4)^2(10)$, ou 160π.
À la fin, lorsque les deux réservoirs ont la même profondeur d'eau, on a :

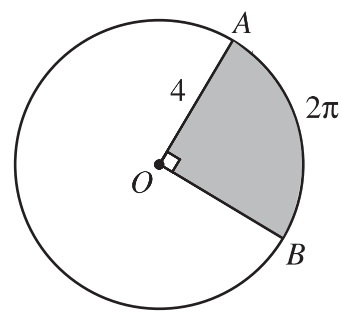
$$\begin{aligned} \pi(4)^2h+\pi(6)^2h &= 160\pi \\ 52\pi h &= 160\pi \\ h &= \frac{160}{52} \\ h &= \frac{40}{13} \end{aligned}$$



RÉPONSE : (E)

21. Soit r le rayon du cercle.
Puisque $\angle AOB = 90°$, la longueur de l'arc AB est un quart de la circonférence. Celle-ci est donc égale à $4\times 2\pi$, ou 8π.
Donc $2\pi r = 8\pi$, d'où $r = 4$.
L'aire du secteur AOB est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\pi r^2 &= \frac{1}{4}\pi(16) \\ &= 4\pi \end{aligned}$$



RÉPONSE : (A)

22. La somme d'entiers consécutifs est égale au produit du nombre d'entiers et de leur moyenne.
Par exemple, $6+7+8+9+10=5\times 8$ et $20+21+22+23+24+25=6\times 22{,}5$.
Soit N le nombre d'entiers consécutifs et M leur moyenne. Donc $NM = 75$.
On remarque que N doit être inférieur à 12, car $1+2+3+\ldots+11+12=78$ et la somme de 12 entiers ou plus, tous strictement positifs, est nécessairement supérieure à 78.

1er cas : N est impair.
Dans ce cas, le nombre M est un entier. Il correspond au nombre du milieu. Puisque $NM = 75$, N doit être un diviseur impair de 75. Puisqu'il est supérieur à 1 et inférieur à 12, il peut égaler 3 ou 5. On a donc 3×25, ce qui donne $24+25+26=75$, et 5×15, ce qui donne $13+14+15+16+17=75$.

2e cas : N est pair.
Dans ce cas, M est la moyenne des deux entiers consécutifs du milieu. Il est donc égal à la moitié d'un nombre impair.
On a donc $N=2k$ et $M=\frac{2l+1}{2}$, k et l étant des entiers. On remarque que les entiers du milieu sont respectivement l et $l+1$. Donc :

$$\begin{aligned} 2k\left(\frac{2l+1}{2}\right) &= 75 \\ k(2l+1) &= 75 \end{aligned}$$

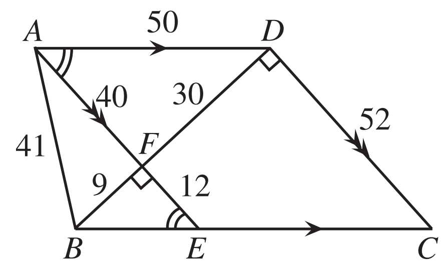
Donc k est un diviseur de 75, le deuxième facteur étant impair. Les possibilités sont 1×75, 3×25 et 5×15. Les valeurs possibles de k sont donc 1, 3 et 5, puisque N est inférieur à 12 et k est donc inférieur à 6.
Si $k=1$, on a $1\times 75 = 75$, d'où $N=2$ et $l=37$, ce qui donne $37+38=75$.
Si $k=3$, on a $3\times 25=75$, d'où $N=6$ et $l=12$, ce qui donne $10+11+12+13+14+15=75$. Si $k=5$, on a $5\times 15=75$, d'où $N=10$ et $l=7$, ce qui donne $3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=75$.
Il y a donc 5 façons d'exprimer 75 sous la forme d'une somme de deux entiers consécutifs ou plus, chacun strictement positif. RÉPONSE : (E)

23. Le triangle AFB est rectangle. D'après la relation de Pythagore, on a :

$$AF^2+9^2=41^2$$
$$AF=40$$

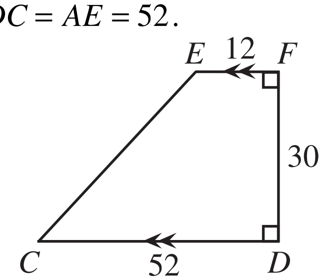
De même, dans le triangle AFD, on a:

$$FD^2+40^2=50^2$$
$$FD=30$$



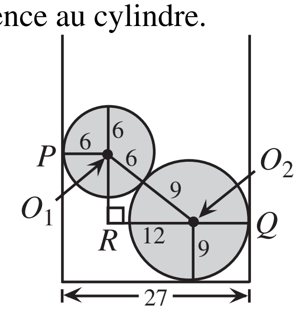
Puisque AD est parallèle à BC, $\angle FAD=\angle FEB$. Les triangles AFD et EFB sont semblables, puisqu'ils ont deux angles congrus deux à deux. Donc $\frac{AF}{FD}=\frac{EF}{FB}$, ou $\frac{40}{30}=\frac{EF}{9}$, d'où $EF=12$.
Puisque AE est perpendiculaire à BD et que DC est perpendiculaire à BD, alors AE est parallèle à DC. Donc $AECD$ est un parallélogramme. Donc $DC=AE=52$.
On considère le quadrilatère $FECD$. Puisqu'il s'agit d'un trapèze, alors :

$$\begin{aligned}\text{Aire de } FECD &= \frac{1}{2}(EF+CD)(FD)\\ &= \frac{1}{2}(12+52)(30)\\ &= 960\end{aligned}$$



RÉPONSE : (C)

24. On considère une coupe transversale verticale du cylindre et des sphères qui passe par l'axe vertical du cylindre et par les centres des sphères. Une telle coupe existe, puisque les sphères seront placées dans une telle position par la pesanteur.
Soit O_1 et O_2 les centres respectifs des sphères, comme l'indique le diagramme.
On joint les centres des sphères l'un à l'autre et aux points de tangence au cylindre.
Puisque le segment O_1O_2 passe par le point de tangence des deux sphères, on a $O_1O_2=6+9$, ou $O_1O_2=15$, ainsi que $O_1P=6$ et $O_2Q=9$.
On trace le triangle O_1RO_2, tel que O_1P soit perpendiculaire à O_1R et que $\angle O_1RO_2=90°$.
D'après la largeur du cylindre, on a $PO_1+RO_2+O_2Q=27$.
Puisque $PO_1=6$ et $O_2Q=9$, alors $RO_2=12$.



Puisque le triangle O_1RO_2 est rectangle, on obtient, à l'aide de la relation de Pythagore, $O_1R = 9$.

La profondeur de l'eau est égale à :

$$\begin{aligned}\text{Rayon de la sphère du bas} + RO_1 + \text{Rayon de la sphère du haut} &= 9+9+6\\ &= 24\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\text{Volume de l'eau} &= (\text{Volume du cylindre à une hauteur de } 24) - (\text{Volume des sphères})\\ &= \pi\left(\frac{27}{2}\right)^2(24) - \frac{4}{3}\pi(6)^3 - \frac{4}{3}\pi(9)^3\\ &= 4374\pi - 288\pi - 972\pi\\ &= 3114\pi\end{aligned}$$

Le volume d'eau qu'il faut verser est égal à 3114π. RÉPONSE : (D)

25. On soustrait, membre par membre, la première équation de la deuxième pour obtenir :

$$k^2x - kx - 6 = 0$$
$$\left(k^2 - k\right)x = 6$$
$$k(k-1)x = 6$$

Puisque *k* et *x* doivent prendre des valeurs entières, l'expression $k(k-1)$ doit être un diviseur de 6. Elle doit donc égaler ± 1, ± 2, ± 3 ou ± 6. Or $k(k-1)$ est le produit de deux entiers consécutifs. On peut donc éliminer six des huit possibilités. Il reste donc $k(k-1) = 2$ et $k(k-1) = 6$. La première équation a pour solutions $k = 2$ et $k = -1$. La deuxième a pour solutions $k = 3$ et $k = -2$.

D'après la première équation donnée, $y = \frac{1}{5}(kx+7)$. On calcule les valeurs correspondantes de *x* et de *y*.

k	x	y
2	3	$\frac{13}{5}$
-1	3	$\frac{4}{5}$
3	1	2
-2	1	1

Il y a deux valeurs entières de *k* pour lesquelles les droites se coupent à un point de treillis.

RÉPONSE : (B)

Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2001 Solutions
Concours Cayley (10e - Sec. IV)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Partie A

1. La valeur de $\dfrac{5(6)-3(4)}{6+3}$ est :

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 6 **(D)** 12 **(E)** 31

Solution

$$\begin{aligned}\frac{5(6)-3(4)}{6+3} &= \frac{30-12}{9}\\ &= \frac{18}{9}\\ &= 2\end{aligned}$$

RÉPONSE : (B)

2. Lorsque $\frac{1}{4}$ de 15 est multiplié par $\frac{1}{3}$ de 10, la réponse est :

(A) 5 **(B)** $\frac{25}{2}$ **(C)** $\frac{85}{12}$ **(D)** $\frac{99}{8}$ **(E)** $\frac{25}{7}$

Solution

On a :

$$\begin{aligned}&\left[\tfrac{1}{4}(15)\right]\left[\tfrac{1}{3}(10)\right]\\ &= \frac{1}{\cancel{4}_2}(\cancel{15}^5)\frac{1}{\cancel{3}_1}(\cancel{10}^5)\\ &= \frac{25}{2}\end{aligned}$$

RÉPONSE : (B)

3. Si $x=\frac{1}{4}$, laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur?

(A) x **(B)** x^2 **(C)** $\frac{1}{2}x$ **(D)** $\dfrac{1}{x}$ **(E)** $\sqrt{x}$

Solution

On calcule la valeur de chaque expression.

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

(C) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$

(D) $\dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 1\times 4 = 4$

(E) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

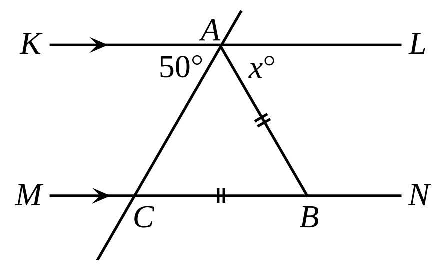
RÉPONSE : (D)

4. Dans une école, 20 filles et 30 garçons se sont inscrits au concours Cayley. Des certificats ont été remis à 20 % des filles et à 10 % des garçons. Quel pourcentage des élèves inscrits ont reçu un certificat?

(**A**) 14 (**B**) 15 (**C**) 16 (**D**) 30 (**E**) 50

Solution
Puisque 30 garçons se sont inscrits et que 10 % d'entre eux ont reçu un certificat, alors $(0,1)(30)$, ou 3 garçons ont reçu un certificat. De même, des 20 filles qui se sont inscrites, $(0,2)(20)$, ou 4 filles ont reçu un certificat. Il y a donc 7 élèves sur 50, ou 14 % des élèves qui ont reçu un certificat. RÉPONSE : (A)

5. Dans le diagramme, KL est parallèle à MN, $AB = BC$ et $\angle KAC = 50°$. La valeur de x est :



(**A**) 40 (**B**) 65 (**C**) 25
(**D**) 100 (**E**) 80

Solution
Puisque KL est parallèle à MN, les angles ACB et KAC sont alternes-internes.
Donc $\angle ACB = 50°$.
Puisque le triangle BCA est isocèle, $\angle BCA = \angle BAC = 50°$. Puisque les mesures des angles KAC, BAC et LAB ont une somme de $180°$:

$$50° + 50° + x° = 180°$$
$$x = 80$$

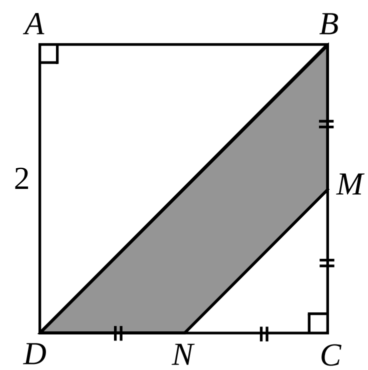
RÉPONSE : (E)

6. Dino a compté un total de 252 points dans 28 parties de basket-ball. Rima a joué 10 parties de moins que Dino. Sa moyenne de points par partie était supérieure de 0,5 point à celle de Dino. Combien de points Rima a-t-elle comptés?

(**A**) 153 (**B**) 171 (**C**) 180 (**D**) 266 (**E**) 144

Solution
Puisque Dino a compté 252 points en 28 parties, sa moyenne est égale à $\frac{252}{28}$, ou 9 points par partie.
Rima a donc une moyenne de 9,5 points par partie. En 18 parties, elle a donc compté $9,5 \times 18$, ou 171 points. RÉPONSE : (B)

7. Dans le diagramme, le carré $ABCD$ a des côtés de longueur 2, M est le milieu de BC et N est le milieu de CD. L'aire de la région ombrée $BMND$ est égale à :



(**A**) 1 (**B**) $2\sqrt{2}$ (**C**) $\frac{4}{3}$

(**D**) $\frac{3}{2}$ (**E**) $4-\frac{3}{2}\sqrt{2}$

Solution

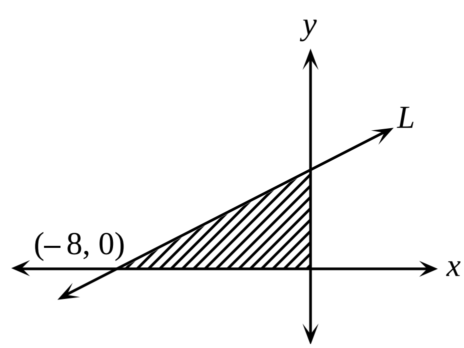
L'aire du triangle MNC est égale à $\frac{1}{2}(1)(1)$, ou $\frac{1}{2}$. Puisque le triangle BDC est la moitié du carré, son aire est égale à 2.

L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du triangle BDC moins celle du triangle MNC.

Elle est donc égale à $2-\frac{1}{2}$, ou $\frac{3}{2}$.

RÉPONSE : (D)

8. La droite L croise l'axe des x au point $(-8, 0)$. L'aire de la partie ombrée est égale à 16. Quelle est la pente de la droite L?



(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) 4 (**C**) $-\frac{1}{2}$

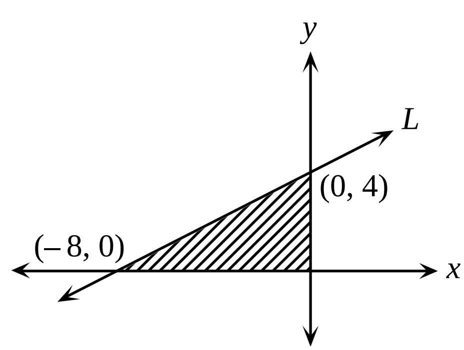
(**D**) 2 (**E**) -2

Solution

Puisque l'aire de la partie ombrée est égale à 16 et que la base a une longueur de 8, la hauteur doit être égale à 4.

La droite croise donc l'axe des y au point $(0, 4)$, car sa pente est positive selon le diagramme.

La pente est donc égale à $\frac{4-0}{0-(-8)}$, ou $\frac{1}{2}$.



$$\text{Aire} = \frac{8\times 4}{2}$$
$$= 16$$

RÉPONSE : (A)

9. Si $\left[\left(10^3\right)\left(10^x\right)\right]^2 = 10^{18}$, la valeur de x est :

(**A**) $\sqrt{2}$ (**B**) 12 (**C**) 6 (**D**) 1 (**E**) 3

Solution
On simplifie à l'aide des lois des exposants.

$$\left(10^{3+x}\right)^2 = 10^{18}$$
$$10^{6+2x} = 10^{18}$$

Les exposants doivent donc être égaux.
Donc : $6 + 2x = 18$

$$2x = 12$$
$$x = 6$$

RÉPONSE : (C)

10. La somme de cinq entiers consécutifs est égale à 75. La somme du plus grand et du plus petit de ces cinq entiers est égale à :

(**A**) 15 (**B**) 25 (**C**) 26 (**D**) 30 (**E**) 32

Solution
On peut résoudre ce problème de plusieurs façons. Voici une façon algébrique.
On représente les entiers par $x-2$, $x-1$, x, $x+1$ et $x+2$.
Donc : $(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2) = 75$

$$5x = 75$$
$$x = 15$$

Les cinq entiers consécutifs sont donc 13, 14, 15, 16 et 17.
La somme du premier et du dernier est égale à $13+17$, ou 30. RÉPONSE : (D)

Partie B

11. Lorsqu'un entier positif N est divisé par 60, le reste est égal à 49. Lorsque N est divisé par 15, le reste est égal à :

(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 8

Solution
Il y a plusieurs façons de résoudre ce problème. Voici une façon facile. Puisque N donne un reste de 49 lorsqu'on le divise par 60, N doit être un nombre de la forme $60k + 49$, $k = 0, 1, 2, ...$
Les premières valeurs possibles de N sont 49, 109, 169, 229, … Si on divise ces nombres par 15, on obtient toujours un reste de 4. RÉPONSE : (C)

12. Les 6 membres d'un comité directeur veulent convoquer une réunion. Chaque membre appelle 6 autres personnes qui, à leur tour, appellent chacune 6 autres personnes. Si aucune personne n'est

appelée plus d'une fois, combien de personnes sauront qu'il y a une réunion?

(**A**) 18 (**B**) 36 (**C**) 216 (**D**) 252 (**E**) 258

Solution

Les 6 membres du comité directeur appellent chacun 6 personnes pour un total de 36 personnes.
Ces 36 personnes appellent chacune 6 personnes pour un total de 216 personnes.
Le nombre de personnes qui sauront qu'il y a une réunion est égal à $6+36+216$, ou 258.

RÉPONSE : (E)

13. Les suites 3, 20, 37, 54, 71, … et 16, 27, 38, 49, 60, 71, … ont le terme commun 71. Le prochain terme commun aux deux suites est :

(**A**) 115 (**B**) 187 (**C**) 258 (**D**) 445 (**E**) 1006

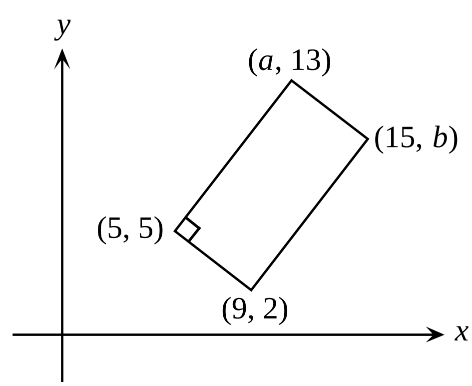
Solution

Les termes de la première suite augmentent de 17 et ceux de la deuxième augmentent de 11.
Après 71, le prochain terme commun aux deux suites sera égal à 71 plus le plus petit commun multiple de 11 et de 17, soit $71+187$ ou 258.

RÉPONSE : (C)

14. D'après le rectangle, quelle est la valeur de $a-b$?

(**A**) -3 (**B**) -1 (**C**) 0
(**D**) 3 (**E**) 1



Solution

Pour se rendre du point $(5,5)$ au point $(9,2)$, il faut se déplacer de 4 unités vers la droite et de 3 unités vers le bas.
Puisqu'il s'agit d'un rectangle, il faut se déplacer de la même façon pour se rendre du point $(a,13)$ au point $(15,b)$.
Donc $a+4=15$ et $13-3=b$, d'où $a=11$ et $b=10$. Donc $a-b=1$.

RÉPONSE : (E)

15. Les $\frac{2}{5}$ de la surface d'une petite île sont recouverts de forêts et $\frac{1}{4}$ du reste de l'île est recouvert de dunes de sable. L'île comprend aussi 90 hectares de terre arable. Si l'île n'est formée que de forêts, de dunes et de terre arable, quelle est la superficie totale de l'île, à l'hectare près?

(**A**) 163 (**B**) 120 (**C**) 200 (**D**) 138 (**E**) 257

Solution
Puisque les $\frac{2}{5}$ de la surface de l'île sont recouverts de forêts, $\frac{3}{5}$ de la surface de l'île sont recouverts de dunes et de terre arable.
Puisque $\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}$, ou $\frac{3}{20}$ de la surface de l'île sont recouverts de dunes de sable, alors $\frac{3}{5}-\frac{3}{20}$, ou $\frac{9}{20}$ de la surface de l'île sont recouverts de terre arable. Donc $\frac{9}{20}$ de la surface de l'île correspondent à 90 hectares, ou $\frac{1}{20}$ de la surface correspond à 10 hectares. La superficie de l'île est donc égale à 20×10, ou 200 hectares. RÉPONSE : (C)

16. Combien y a-t-il de valeurs entières de x qui vérifient $\frac{x-1}{3}<\frac{5}{7}<\frac{x+4}{5}$?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

Solution
Si on multiplie les trois fractions par $3(5)(7)$, les inégalités sont conservées et on a :

$$\cancel{(3)}(5)(7)\frac{(x-1)}{\cancel{3}}<(3)(5)\cancel{(7)}\frac{5}{\cancel{7}}<(3)\cancel{(5)}(7)\frac{x+4}{\cancel{5}}$$

$$35(x-1)<75<21(x+4)$$

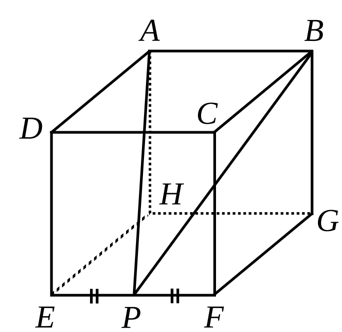
On doit donc avoir :

$$\begin{array}{rcr} 35(x-1)<75 & \text{et} & 21(x+4)>75 \\ 35x-35<75 & \text{et} & 21x+84>75 \\ 35x<110 & & 21x>-9 \\ x<3\frac{1}{7} & & x>-\frac{9}{21} \end{array}$$

Les seules valeurs entières de x qui vérifient les deux inéquations simultanément sont 0, 1, 2 et 3. Il y en a quatre. RÉPONSE : (E)

17. $ABCDEFGH$ est un cube ayant des côtés de longueur 2. P est le milieu de EF. L'aire du triangle APB est égale à :

(**A**) $\sqrt{8}$ (**B**) 3 (**C**) 6
(**D**) $\sqrt{2}$ (**E**) $\sqrt{32}$



Solution
La base AB du triangle APB a une longueur de 2. La hauteur correspondante du triangle est égale à BF. D'après le théorème de Pythagore, $BF=\sqrt{2^2+2^2}$, c'est-à-dire que $BF=\sqrt{8}$.

L'aire du triangle APB est égale à $\frac{2\times\sqrt{8}}{2}$, ou $\sqrt{8}$. RÉPONSE : (A)

18. Combien peut-on écrire d'entiers positifs de cinq chiffres si les entiers sont divisibles par 9 et si on n'emploie que les chiffres 3 et 6?

(**A**) 5 (**B**) 2 (**C**) 12 (**D**) 10 (**E**) 8

Solution

Puisque l'entier de cinq chiffres doit être divisible par 9, la somme de ses chiffres doit être divisible par 9. Il y a donc deux seuls cas à considérer.

1er cas Les entiers sont composés de un 6 et quatre 3.
Il y a cinq entiers possibles : $63\,333$, $36\,333$, $33\,633$, $33\,363$ et $33\,336$.

2e cas Les entiers sont composés de un 3 et quatre 6.
Il y a cinq entiers possibles : $36\,666$, $63\,666$, $66\,366$, $66\,636$ et $66\,663$.

Il y a 10 entiers en tout. RÉPONSE : (D)

19. Trois nombres différents sont choisis tels que lorsqu'on additionne tour à tour un des nombres à la moyenne des deux autres, on obtient 65, 69 et 76. La moyenne des trois nombres choisis est égale à :

(**A**) 34 (**B**) 35 (**C**) 36 (**D**) 37 (**E**) 38

Solution

Soit a, b et c les trois nombres.

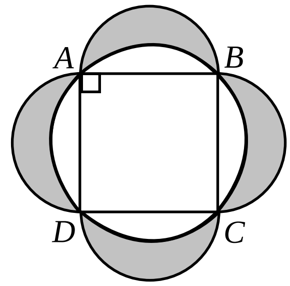
Selon l'énoncé, on a $a+\frac{b+c}{2}=65$, $b+\frac{c+a}{2}=69$ et $c+\frac{a+b}{2}=76$.

On multiplie chaque membre de chaque équation par 2 pour obtenir $2a+b+c=130$, $a+2b+c=138$ et $a+b+2c=152$.

On additionne les trois équations, membre par membre, pour obtenir $4a+4b+4c=420$, ou $a+b+c=105$.

La moyenne des trois nombres est égale à $\frac{a+b+c}{3}$, ou 35. RÉPONSE : (B)

20. Le carré $ABCD$, dont les côtés ont une longueur de 2, est inscrit dans un cercle. On utilise ensuite chaque côté du carré comme diamètre pour tracer quatre demi-cercles. L'aire de la partie ombrée à l'extérieur du cercle et à l'intérieur des demi-cercles est égale à :



(**A**) π (**B**) 4 (**C**) $2\pi - 2$
(**D**) $\pi + 1$ (**E**) $2\pi - 4$

Solution

La figure au complet est formée d'un carré et de 4 demi-cercles. L'aire de la partie ombrée est égale à l'aire de la figure au complet mois l'aire du cercle. Or on sait que le carré a des côtés de longueur 2 et que les demi-cercles ont des rayons de 1. Il reste à calculer le rayon du cercle.
D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = 2^2 + 2^2$, d'où $AC = \sqrt{8}$ ou $AC = 2\sqrt{2}$. Le cercle a donc un rayon de $\sqrt{2}$.

L'aire du carré est égale à 4. L'aire d'un demi-cercle est égale à $\frac{\pi \times 1^2}{2}$, ou $\frac{\pi}{2}$. L'aire du cercle est égale à $\pi \times \left(\sqrt{2}\right)^2$, ou 2π.

L'aire de la figure au complet est égale à $4 + 4\left(\frac{\pi}{2}\right)$, ou $4 + 2\pi$.

L'aire de la partie ombrée est égale à $(4 + 2\pi) - 2\pi$, ou 4. RÉPONSE : (B)

Partie C

21. Le point P est sur la droite définie par $y = 5x + 3$. Les coordonnées d'un point Q sont $(3, -2)$. Si M est le milieu de PQ, alors M doit être situé sur la droite définie par :

(**A**) $y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$ (**B**) $y = 5x + 1$ (**C**) $y = -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$ (**D**) $y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ (**E**) $y = 5x - 7$

On trace la droite donnée, définie par $y = 5x + 3$. Elle passe par le point $(0, 3)$.

Solution 1

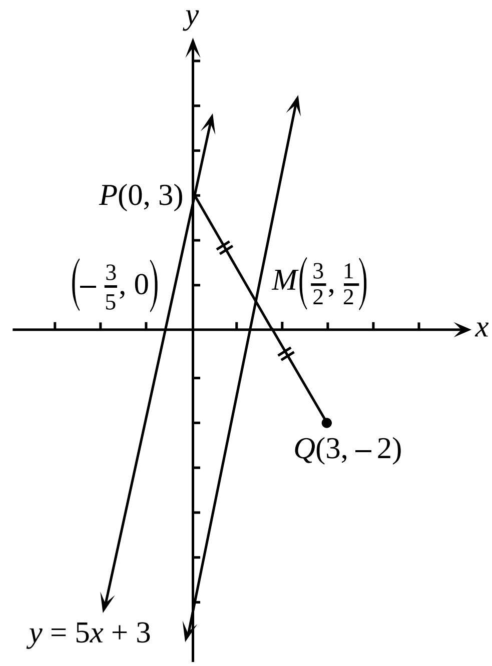
On choisit le point $P(0,3)$ sur la droite.

Le milieu du segment PQ est le point $M\left(\frac{3+0}{2}, \frac{-2+3}{2}\right)$, ou $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

La droite que l'on cherche doit passer par le point M et doit passer par le milieu de n'importe quel segment joignant un point de la droite donnée et le point Q. La seule droite qui satisfait à cette condition est la droite de pente 5, passant par $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Son équation est :

$$y - \tfrac{1}{2} = 5\left(x - \tfrac{3}{2}\right)$$

ou $$y = 5x - 7$$



Solution 2

Soit $P(a, 5a+3)$ un point sur la droite d'équation $y = 5x + 3$ et soit $M(x, y)$ le milieu du segment PQ. On cherche une équation de la droite qui contient tous les points M. Puisque $M(x, y)$ est le milieu de PQ :

$$M(x,y) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{(5a+3)+(-2)}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{a+3}{2}, \frac{5a+1}{2}\right)$$

On a donc $x = \frac{a+3}{2}$ et $y = \frac{5a+1}{2}$. On isole a dans chaque équation pour obtenir $a = 2x - 3$ et $a = \frac{2y-1}{5}$. Puisqu'il s'agit du même a, alors $2x - 3 = \frac{2y-1}{5}$.

$$10x - 15 = 2y - 1$$
$$y = 5x - 7$$

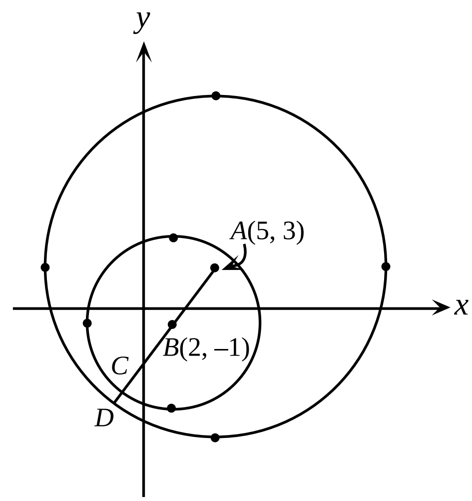
L'équation est $y = 5x - 7$. RÉPONSE : (E)

22. On considère deux cercles, le premier de centre $A(5,3)$ et de rayon 12 et le deuxième de centre $B(2,-1)$ et de rayon 6. Quelle est la distance la plus courte entre les deux cercles?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution

On trace un grand cercle de centre $A(5, 3)$ et un petit cercle de centre $B(2, -1)$. On trace ensuite un rayon du grand cercle, passant par *B*. Le rayon coupe le petit cercle au point *C* et le grand cercle au point *D*. La distance la plus courte entre les deux cercles est égale à CD. Or $BC = 6$ et $AD = 12$.



$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(5-2)^2 + (3-(-1))^2} \\ &= \sqrt{9+16} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CD &= AD - (AB + BC) \\ &= 12 - (5+6) \\ &= 1 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

23. Une bouteille fermée, contenant de l'eau, a été construite en attachant un cylindre de rayon 1 cm à un cylindre de rayon 3 cm, comme dans la Figure A. Lorsque la bouteille est tenue à l'endroit, le niveau de l'eau est à une hauteur de 20 cm, comme l'illustre la vue de face dans la Figure B. Lorsque la bouteille est tenue à l'envers, le niveau de l'eau est à une hauteur de 28 cm, comme l'illustre la Figure C. Quelle est la hauteur totale de la bouteille, en centimètres?

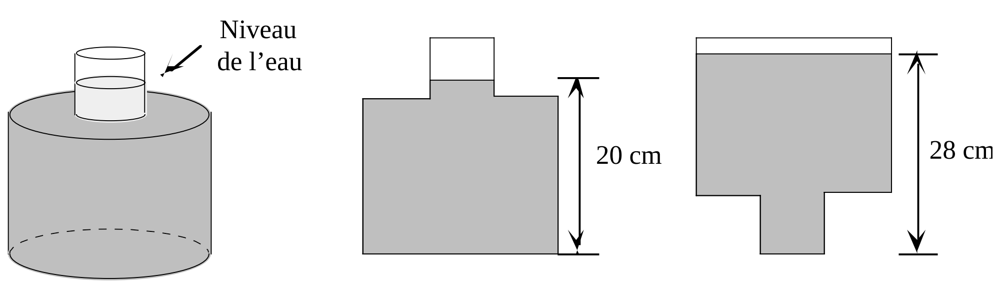


Figure A Figure B Figure C

(**A**) 29 (**B**) 30 (**C**) 31 (**D**) 32 (**E**) 48

Solution

Soit *h* la hauteur totale de la bouteille, en centimètres.

Le volume de l'eau est le même dans les deux positions. De même, le volume de la partie vide est le même dans les deux positions. Or il est plus facile de calculer le volume des deux parties vides.

Dans la figure B, la partie vide a une hauteur égale à $h-20$.

Son volume est donc égal à $\pi \times 1^2 \times (h-20)$, ou $\pi(h-20)$.

Dans la figure C, la partie vide a une hauteur égale à $h-28$.

Son volume est donc égal à $\pi \times 3^2 \times (h-28)$, ou $9\pi(h-28)$.

Puisque ces volumes sont égaux, on a :

$$\begin{aligned}\pi(h-20) &= 9\pi(h-28)\\ h-20 &= 9h-252\\ 8h &= 232\\ h &= 29\end{aligned}$$

La hauteur totale de la bouteille est de 29 cm. RÉPONSE : (A)

24. Un palindrome est un entier strictement positif dont les chiffres peuvent être lus de gauche à droite ou de droite à gauche, tout en donnant le même nombre. Par exemple, le nombre 2882 est un palindrome de quatre chiffres et le nombre 49194 est un palindrome de cinq chiffres. Il existe des paires de palindromes de quatre chiffres dont la somme est un palindrome de cinq chiffres. À titre d'exemple, les nombres 2882 et 9339. Combien de telles paires existe-t-il?

(**A**) 28 (**B**) 32 (**C**) 36 (**D**) 40 (**E**) 44

Solution

Puisqu'on additionne deux palindromes de quatre chiffres pour obtenir un palindrome de cinq chiffres, il doit s'agir de nombres de la forme suivante,

$$\begin{array}{r} a\,b\,b\,a \\ c\,d\,d\,c \\ \hline 1\,e\,f\,e\,1 \end{array}$$

c'est-à-dire que le premier chiffre de la somme doit être 1.

On conclut que $a+c=11$, puisque le chiffre des unités de $a+c$ est 1 et que $10<a+c<20$.

Il y a quatre valeurs possibles de a et de c :

a	2	3	4	5
c	9	8	7	6

On remarque que l'on pourrait prolonger le tableau, mais on obtiendrait les valeurs de a attribuées à c et vice versa.

On considère un de ces cas, $a=2$ et $c=9$.

$$\begin{array}{r} 2\,b\,b\,2 \\ 9\,d\,d\,9 \\ \hline 1\,e\,f\,e\,1 \end{array}$$

On voit que l'on peut former des palindromes de deux façons possibles, selon qu'il y a une retenue ou non. En effet, si on porte attention au e dans la colonne des milliers, on voit que $e=1$ s'il n'y a aucune retenue ou que $e=2$ s'il y a une retenue.

Si $e=1$, on voit, d'après les colonnes des dizaines et des centaines, que $b+d=0$, c'est-à-dire que $b=d=0$.

Si $e=2$, on voit, d'après les colonnes des dizaines et des centaines, que $b+d=11$.

Quelles que soient les valeurs de a et de c choisies, on doit avoir $b=d=0$ ou $b+d=11$.

On revient à la situation générale en examinant ces deux cas.

1er cas : $b = d = 0$
Il y a 4 possibilités pour les valeurs de a et de c. Dans chaque cas, on a $b = d = 0$ puisque $b + d = 0$.

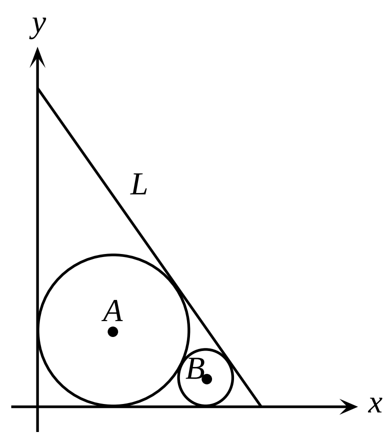
2e cas : $b + d = 11$
Pour chacune des 4 possibilités pour les valeurs de a et de c, il y a 8 façons de choisir des valeurs de b et de d pour que $b + d = 11$. Il y a donc 32 possibilités dans ce cas.
Il y a un total de $4 + 32$, ou 36 possibilités.

RÉPONSE : (C)

25. Le cercle de centre A a un rayon de 3. Il est tangent à la partie positive de l'axe des x et à la partie positive de l'axe des y. Le cercle de centre B a un rayon de 1 et il est tangent à la partie positive de l'axe des x et au cercle de centre A. La droite L est tangente au deux cercles. L'ordonnée à l'origine de la droite L est :

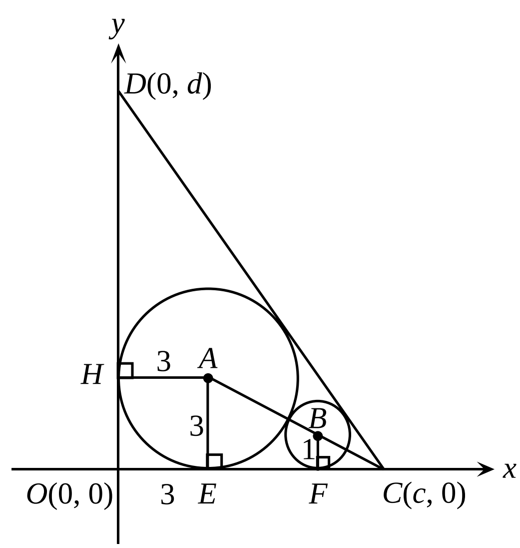
(**A**) $3+6\sqrt{3}$ (**B**) $10+3\sqrt{2}$ (**C**) $8\sqrt{3}$

(**D**) $10+2\sqrt{3}$ (**E**) $9+3\sqrt{3}$

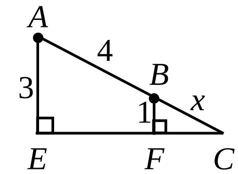


Solution

Soit $C(c, 0)$ et $D(0, d)$ les points d'intersection respectifs de la droite et des axes des x et des y.
On trace le segment AC qui passe par le point B, car AC est la bissectrice de l'angle OCD.
Aux points A et B, on abaisse des perpendiculaires à l'axe des x, jusqu'aux points respectifs E et F.
On abaisse aussi une perpendiculaire AH à l'axe des y.
On a donc $AH = AE = 3$.



Le diagramme ci-contre illustre les triangles ACE et BCF qui sont semblables, puisque leurs angles sont congrus deux à deux.



Soit $x = BC$. Donc :

$$\frac{x}{1} = \frac{x+4}{3}$$
$$x = 2$$

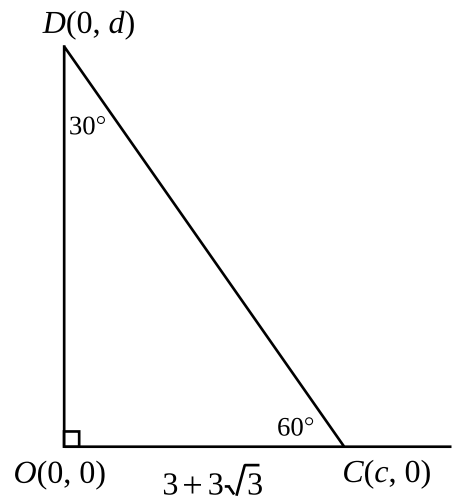
Dans le triangle BCF, $FC^2 = 2^2 - 1^2$, ou $FC^2 = 3$.

$$FC = \sqrt{3}, \quad (FC > 0).$$

Le triangle est donc un triangle $30° - 60° - 90°$ et on a $\angle BCF = 30°$ et $\angle OCD = 60°$.
D'après les triangles semblables, on a donc $EF = 2\sqrt{3}$.

On a donc le diagramme ci-contre.
Donc : $d = \sqrt{3}\left(3 + 3\sqrt{3}\right)$

$$= 3\sqrt{3} + 9$$



RÉPONSE : (E)

✿✿✿✿✿✿✿✿✿✿

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2000 Solutions
Concours Cayley (10e - Sec. IV)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Part A:

1. The value of $2(5-2)-5^2$ is

(A) -19 **(B)** -4 **(C)** 1 **(D)** -11 **(E)** -17

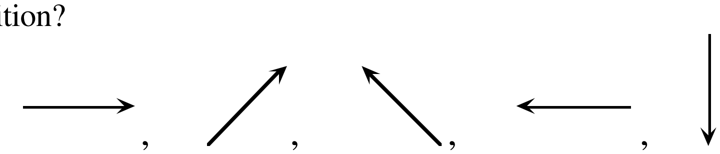
Solution

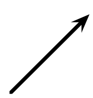
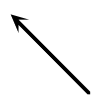
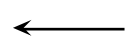
When evaluating this expression, we use 'order of operations' in the standard way. Doing so, we find,

$$\begin{aligned} &2(5-2)-5^2 \\ &=2(3)-25 \\ &=6-25 \\ &=-19. \end{aligned}$$

ANSWER: (A)

2. If the following sequence of five arrows repeats itself continuously, what arrow would be in the 48th position?



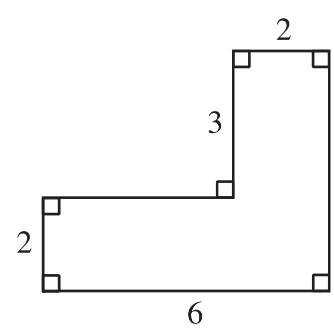
(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

Solution

Since this sequence repeats itself, once it has completed nine cycles it will be the same as starting at the beginning. Thus the 48th arrow will be the same as the third one.

ANSWER: (C)

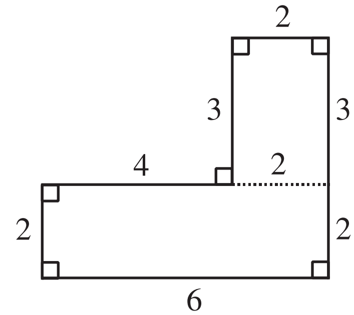
3. In the given diagram, the numbers shown are the lengths of the sides. What is the perimeter of the figure?



(A) 13 **(B)** 18 **(C)** 22
(D) 21 **(E)** 19

Solution

The easiest way to determine the length of the missing side is by drawing in a line to form two rectangles. Since opposite sides in a rectangle are equal we can label the sides as shown. The required perimeter is thus $2+3+2+6+2+4+3=22$.



ANSWER: (C)

4. A farmer has 7 cows, 8 sheep and 6 goats. How many more goats should be bought so that half of her animals will be goats?

(**A**) 18 (**B**) 15 (**C**) 21 (**D**) 9 (**E**) 6

Solution 1

If the cows and sheep were themselves goats we would have 15 goats. This means that she would need nine extra goats.

Solution 2

Let the number of goats added be x.

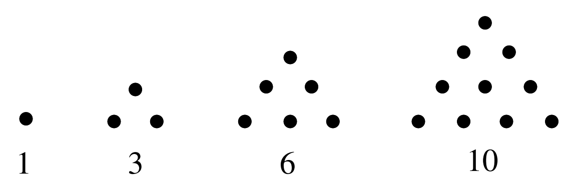
Therefore, $\frac{6+x}{21+x}=\frac{1}{2}$.

Cross multiplying gives,
$$\begin{aligned} 2(6+x)&=21+x \\ 12+2x&=21+x \\ x&=9. \end{aligned}$$

As in solution 1, she would add 9 goats.

ANSWER: (D)

5. The first four triangular numbers 1, 3, 6, and 10 are illustrated in the diagram. What is the tenth triangular number?



(**A**) 55 (**B**) 45 (**C**) 66
(**D**) 78 (**E**) 50

Solution

From our diagram, it can be seen that the fifth triangular number is found by adding a row with five dots. This number is thus, $1+2+3+4+5=\frac{5\times 6}{2}=15$. The sixth triangular number is $1+2+3+4+5+6=\frac{6\times 7}{2}=21$. If we follow this to its conclusion, the nth triangular number is

$1+2+3+\ldots+n=\frac{(n)(n+1)}{2}$. The tenth triangular number will be $\frac{(10)(11)}{2}=55$.

ANSWER: (A)

6. The sum of the digits of an even ten digit integer is 89. The last digit is

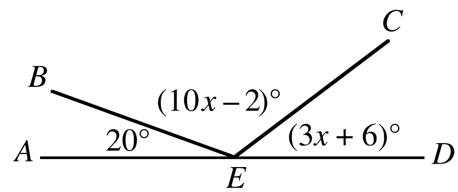
(**A**) 0 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 8

Solution

89 is a large number to be the sum of the digits of a ten digit number. In fact, the largest possible digital sum is 10×9 or 90. Since 89 is only 1 less than 90, the number in question must be composed of nine 9's and one 8. In order that the number be divisible by 2, the last digit must be 8.

ANSWER: (E)

7. If AD is a straight line segment and E is a point on AD, determine the measure of $\angle CED$.



(**A**) 20° (**B**) 12° (**C**) 42°
(**D**) 30° (**E**) 45°

Solution

Since there are 180° in a straight line, we can form the equation,

$$20°+(10x-2)°+(3x+6)°=180°$$
$$20+10x-2+3x+6=180 \text{ (in degrees)}$$
$$13x+24=180$$
$$13x=156$$
$$x=12.$$

Therefore $\angle CED=\left(3(12)+6\right)°=42°$.

ANSWER: (C)

8. On a 240 kilometre trip, Corey's father drove $\frac{1}{2}$ of the distance. His mother drove $\frac{3}{8}$ of the total distance and Corey drove the remaining distance. How many kilometres did Corey drive?

(**A**) 80 (**B**) 40 (**C**) 210 (**D**) 30 (**E**) 55

Solution

If Corey's father and mother drove $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{8}$ the total distance, respectively, altogether they drove $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$ or $\frac{7}{8}$th the total distance. Thus Corey must have driven $\frac{1}{8}\times 240$ or 30 kilometres.

ANSWER: (D)

9. Evaluate $(-50)+(-48)+(-46)+\ldots+54+56$.

(**A**) 156 (**B**) 10 (**C**) 56 (**D**) 110 (**E**) 162

Solution

If we add some terms to this series, we would have the following:

$$(-50)+(-48)+(-46)+\ldots+48+50+52+54+56.$$

Each of the negative integers has its opposite included in the sum and each pair of these sums is 0. This implies that, $(-50)+(-48)+(-46)+\ldots+46+48+50$ is 0. The overall sum is now just $52+54+56$ or 162. ANSWER: (E)

10. The ages of three contestants in the Cayley Contest are 15 years, 9 months; 16 years, 1 month; and 15 years, 8 months. Their average (mean) age is

(**A**) 15 years, 8 months (**B**) 15 years, 9 months (**C**) 15 years, 10 months
(**D**) 15 years, 11 months (**E**) 16 years

Solution 1

Consider one of the ages, say the youngest, as a base age. The other two contestants are one month and five months older respectively. Since $\frac{0+1+5}{3}=2$, this implies that the average age is two months greater than the youngest. This gives an average age of 15 years, 10 months.

Solution 2

This second solution involves a little more calculation but still gives the same correct answer. Since there are twelve months in a year, the age of the first contestant, in months, is $15\times12+9$ or 189 months. Similarly, the ages of the other two students would be 193 and 188 months. The average age would thus be $\frac{189+193+188}{3}$ or 190 months. The average age is then 15 years, 10 months because $190=12\times15+10$. ANSWER: (C)

Part B: Each correct answer is worth 6.

11. A store had a sale on T-shirts. For every two T-shirts purchased at the regular price, a third T-shirt was bought for \$1.00. Twelve T-shirts were bought for \$120.00. What was the regular price for one T-shirt?

(**A**) \$10.00 (**B**) \$13.50 (**C**) \$14.00 (**D**) \$14.50 (**E**) \$15.00

Solution

We will start this question by representing the regular price of one T-shirt as x dollars. If a person bought a 'lot' of three T-shirts, they would thus pay $(2x+1)$ dollars. Since the cost of twelve T-shirts is \$120.00, this implies that a single 'lot' would cost \$30. This allows us to write the equation, $2x+1=30$ or $x=14.50$. The regular price of a T-shirt is \$14.50.

ANSWER: (D)

12. Natural numbers are equally spaced around a circle in order from 1 to n. If the number 5 is directly opposite the number 14, then n is

(**A**) 14 (**B**) 15 (**C**) 16 (**D**) 18 (**E**) 20

Solution

If 5 is opposite 14 then each of the eight numbers between and including 6 and 13 are each opposite a natural number. These eight numbers would be matched giving a total of 2×8 or 16 numbers. If we add 5 and 14 the total is 18.

ANSWER: (D)

13. The average of 19 consecutive integers is 99. The largest of these integers is

(**A**) 118 (**B**) 108 (**C**) 109 (**D**) 117 (**E**) 107

Solution

If the average of the 19 consecutive numbers is 99 the middle number is 99 which is the tenth number. If the tenth number is 99, the nineteenth number will be 108.

ANSWER: (B)

14. A positive integer is to be placed in each box. The product of any four adjacent integers is always 120. What is the value of x?

		2			4		x				3		

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution

Since the product of any four integers is 120, $a_1a_2a_3a_4 = a_2a_3a_4a_5 = 120$ where a_n represents the number in the nth box. Therefore, $a_1 = a_5$ and similarly $a_2 = a_6$, $a_3 = a_7$, $a_4 = a_8$ or more generally, $a_n = a_{n+4}$. Thus the boxes can be filled as follows:

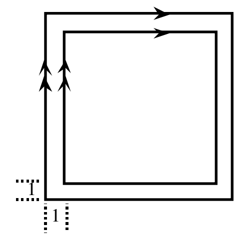
x	4	2	3	x	4	2	3	x	4	2	3	x	4

Therefore, $(4)(2)(3)(x)=120$

$$x=\frac{120}{24}=5.$$

ANSWER: (E)

15. Eight squares with the same centre have parallel sides and are one unit apart. The two largest squares are shown. If the largest square has a perimeter of 96, what is the perimeter of the smallest square?



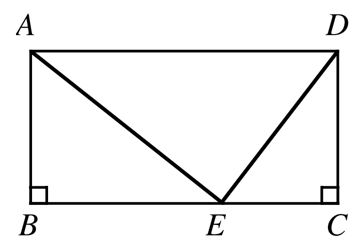
(**A**) 40 (**B**) 68 (**C**) 32
(**D**) 64 (**E**) 89

Solution

Since the largest square has perimeter 96, it has a side length of $\frac{96}{4}$ or 24. From the diagram, the side length of the next square is $24-2$ or 22. Continuing thus, the side lengths of the eight squares form the sequence: 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10. The side length of the eighth square will be 10 giving a perimeter of $4\times10=40$.

ANSWER: (A)

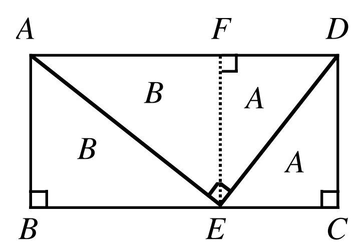
16. In the diagram, $ABCD$ is a rectangle with $AD=13$, $DE=5$ and $EA=12$. The area of $ABCD$ is



(**A**) 39 (**B**) 60 (**C**) 52
(**D**) 30 (**E**) 25

Solution

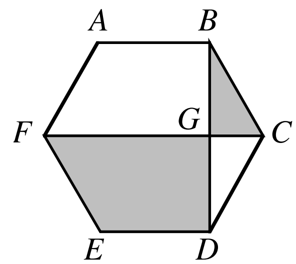
Since $13^2=12^2+5^2$ we use the converse of Pythagorus' Theorem to conclude that $\angle AED=90°$.



The area of ΔAED is then $\frac{1}{2}(5)(12)=30$. Through *E*, we draw a line parallel to CD and BA. Since the area of ΔFDE equals the area of ΔCDE we label each of these areas *A*. Similarly, the area of ΔAFE equals the area of ΔBAE and so each of these areas can be labelled *B*. Since $A+B=30$, the area of the rectangle is $2(A+B)$ or $2(30)=60$.

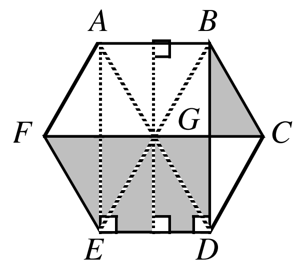
ANSWER: (B)

17. In the regular hexagon $ABCDEF$, two of the diagonals, FC and BD, intersect at G. The ratio of the area of quadrilateral $FEDG$ to ΔBCG is

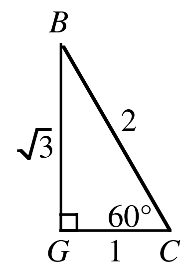


(**A**) $3\sqrt{3}:1$ (**B**) 4:1 (**C**) 6:1
(**D**) $2\sqrt{3}:1$ (**E**) 5:1

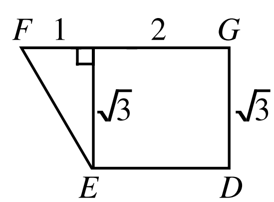
Solution 1
Join E to B and D to A as shown. Also join E to A and draw a line parallel to AE through the point of intersection of BE and AD. Quadrilateral $FEDG$ is now made up of five triangles each of which has the same area as ΔBCG. The required ratio is 5:1.



Solution 2
For convenience, assume that each side of the hexagon has a length of 2 units. Each angle in the hexagon equals $120°$ so $\angle BCG = \frac{1}{2}(120°) = 60°$. Now label ΔBCG as shown. Using the standard ratios for a $30°-60°-90°$ triangle we have $BG = \sqrt{3}$ and $GC = 1$.



The area of $\Delta BCG = \frac{1}{2}(1)\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dividing the quadrilateral $FGDE$ as illustrated, it will have an area of
$2\left(\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}(1)\left(\sqrt{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.
The required ratio is $\frac{5\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}$ or 5:1, as in solution 1.



ANSWER: (E)

18. If a, b and c are distinct positive integers such that $abc = 16$, then the largest possible value of $a^b - b^c + c^a$ is

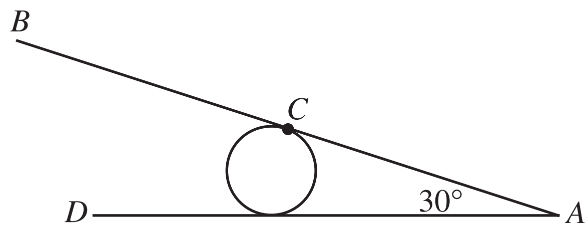
(**A**) 253 (**B**) 63 (**C**) 249 (**D**) 263 (**E**) 259

Solution

If a, b and c are distinct then the correct factorization is $16 = 1 \times 2 \times 8$. Since a, b and c must be some permutation of 1, 2 and 8 there are exactly six possibilities which give the values –247, -61, 65, 249, 263, and 63. Of these, $8^1 - 1^2 + 2^8$ or 263 is the largest.

ANSWER: (D)

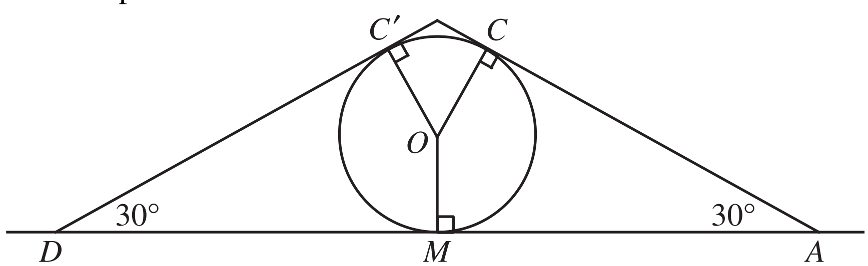
19. A metal rod with ends A and B is welded at its middle, C, to a cylindrical drum of diameter 12. The rod touches the ground at A making a $30°$ angle. The drum starts to roll along AD in the direction of D. How far along AD must the drum roll for B to touch the ground?



(**A**) π (**B**) 2π (**C**) 3π (**D**) 4π (**E**) 5π

Solution

The drum rolls so that point C moves to C'.



Since a line drawn from the centre of the circle makes angles of $90°$ with tangents drawn to a circle, $\angle COM = 360° - 90° - 90° - 30° = 150°$. By symmetry, $\angle C'OM = 150°$ and thus $\angle C'OC = 360° - 150° - 150° = 60°$. Since $\angle C'OC = 60°$, this implies that point C will have to travel $\frac{1}{6}$th the circumference of the circle or $\frac{1}{\cancelto{1}{6}}(\cancelto{2}{12}\pi) = 2\pi$.

ANSWER: (B)

20. Twenty pairs of integers are formed using each of the integers 1, 2, 3, ..., 40 once. The positive difference between the integers in each pair is 1 or 3. (For example, 5 can be paired with 2, 4, 6 or 8.) If the resulting differences are added together, the greatest possible sum is

(**A**) 50 (**B**) 54 (**C**) 56 (**D**) 58 (**E**) 60

Solution
Since we have twenty pairings, it is possible to have nineteen differences of 3 and one difference of 1. The maximum sum of these differences is thus, $3(19)+1=58$. The pairings can be achieved in the following way: $\{(1,4),\ (2,5),\ (3,6),\ (7,10),\ (8,11),\ (9,12),\ (13,16),\ (14,17),\ (15,18),\ (19,22),\ (20,23),\ (21,24),\ (25,28),\ (26,29),\ (27,30),\ (31,34),\ (32,35),\ (33,36),\ (37,40),\ (38,39)\}$. Note that there is just one pair, $(38,39)$, that differs by one.

ANSWER: (D)

Part C: Each correct answer is worth 8.

21. A wooden rectangular prism has dimensions 4 by 5 by 6. This solid is painted green and then cut into 1 by 1 by 1 cubes. The ratio of the number of cubes with exactly two green faces to the number of cubes with three green faces is

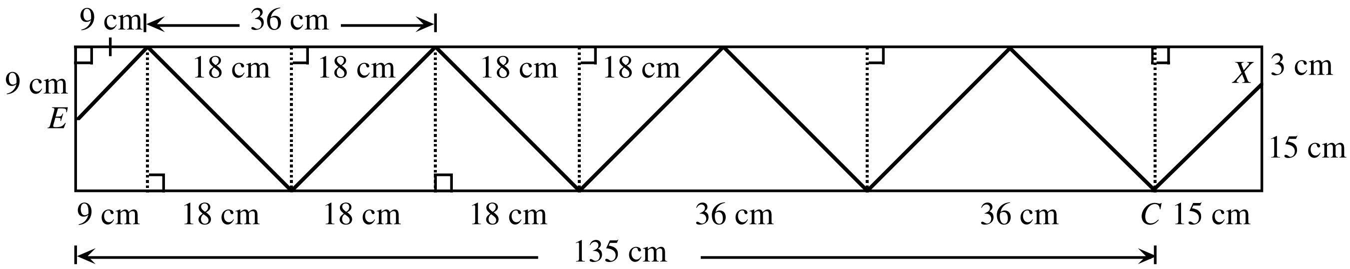
(**A**) 9:2 (**B**) 9:4 (**C**) 6:1 (**D**) 3:1 (**E**) 5:2

Solution
The cubes with two green faces are the cubes along the edges, not counting the corner cubes. In each dimension, we lost two cubes to the corners so we then have four edges with 4 cubes, four with 3 cubes and four with 2 cubes. The total number of cubes with paint on two edges is then $4(4)+4(3)+4(2)=36$. The number of cubes that have paint on three sides are the corner cubes of which there are eight. The required ratio is then 36:8 or 9:2.

ANSWER: (A)

22. An ant walks inside a 18 cm by 150 cm rectangle. The ant's path follows straight lines which always make angles of $45°$ to the sides of the rectangle. The ant starts from a point X on one of the shorter sides. The first time the ant reaches the opposite side, it arrives at the midpoint. What is the distance, in centimetres, from X to the nearest corner of the rectangle?
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

Solution
If we took a movie of the ant's path and then played it backwards, the ant would now start at the point E and would then end up at point X. Since the ant now 'starts' at a point nine cm from the corner, the 'first' part of his journey is from E to B. This amounts to nine cm along the length of the rectangle since ΔBAE is an isosceles right-angled triangle. This process continues as illustrated, until the ant reaches point C. By the time the ant has reached C, it has travelled $9+18+3\times 36$ or 135 cm along the length of the rectangle. To travel from C to X, the ant must travel 15 cm along the length of the rectangle which puts the ant 3 cm from the closest vertex.



ANSWER: (A)

23. The left most digit of an integer of length 2000 digits is 3. In this integer, any two consecutive digits must be divisible by 17 or 23. The 2000th digit may be either 'a' or 'b'. What is the value of $a+b$?

(**A**) 3 (**B**) 7 (**C**) 4 (**D**) 10 (**E**) 17

Solution

We start by noting that the two-digit multiples of 17 are 17, 34, 51, 68, and 85. Similarly we note that the two-digit multiples of 23 are 23, 46, 69, and 92. The first digit is 3 and since the only two-digit number in the two lists starting with 3 is 34, the second digit is 4. Similarly the third digit must be 6. The fourth digit, however, can be either 8 or 9. Let's consider this in two cases.

Case 1

If the fourth digit is 8, the number would be 3468517 and would stop here since there isn't a number in the two lists starting with 7.

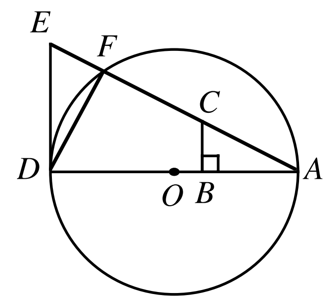
Case 2

If the fourth digit is 9, the number would be 34692 34692 34 ... and the five digits '34692' would continue repeating indefinitely as long as we choose 9 to follow 6.

If we consider a 2000 digit number, its first 1995 digits must contain 399 groups of '34692'. The last groups of five digits could be either 34692 or 34685 which means that the 2000th digit may be either 2 or 5 so that $a+b=2+5=7$.

ANSWER: (B)

24. In the diagram shown, $\angle ABC = 90°$, $CB \parallel ED$, $AB = DF$, $AD = 24$, $AE = 25$ and O is the centre of the circle. Determine the perimeter of $CBDF$.



(**A**) 39 (**B**) 40 (**C**) 42
(**D**) 43 (**E**) 44

Solution
We start by showing that $\Delta ABC \cong \Delta DFE$.
Since $ED \parallel CB$ this implies that $\angle DEF = \angle BCA$ because of corresponding angles. Also, $\angle DFA = 90°$ because it is an angle in a semicircle which also means that $\angle DFE$ is $90°$. Thus the two triangles are equiangular. Since $AB = DF$, $\Delta ABC \cong \Delta DFE$ (ASA). Therefore, $EF = CB$ and $DF = BA$. Using Pythagorus in ΔADE, $DE^2 = 25^2 - 24^2 \Rightarrow DE = 7 = CA$.
Thus $CE = 25 - 7 = 18$.
The required perimeter is,

$$\begin{aligned} CB + BD + DF + FC = EF + (BD + DF) + FC &= (EF + FC) + (BD + DF) \\ &= (EF + FC) + (BD + BA), \text{ since } DF = BA \\ &= CE + AD \\ &= 18 + 24 = 42. \end{aligned}$$

ANSWER: (C)

25. For the system of equations $x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 525$ and $x + xy + xy^2 = 35$, the sum of the real y values that satisfy the equations is

(**A**) 20 (**B**) 2 (**C**) $\frac{3}{2}$ (**D**) $\frac{55}{2}$ (**E**) $\frac{5}{2}$

Consider the system of equations $x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 525$ (1)
and $x + xy + xy^2 = 35$ (2)

The expression on the left side of equation (1) can be rewritten as,

$$\begin{aligned} x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 &= \left(x + xy^2\right)^2 - x^2y^2 \\ &= \left(x + xy^2 - xy\right)\left(x + xy^2 + xy\right) \end{aligned}$$

Thus, $\left(x + xy^2 - xy\right)\left(x + xy^2 + xy\right) = 525$

Substituting from (2) gives, $\left(x + xy^2 - xy\right)(35) = 525$

or, $x + xy^2 - xy = 15$ (3)

Now subtracting (3) from (2), $2xy = 20$, $x = \frac{10}{y}$

Substituting for x in (3) gives,

$$\frac{10}{y} + 10y - 10 = 15$$
$$10y^2 - 25y + 10 = 0$$
$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$
$$(2y-1)(y-2) = 0$$
$$y = \frac{1}{2} \quad \text{or} \quad y = 2$$

The sum of the real y values satisfying the system is $\frac{5}{2}$.

ANSWER: (E)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1999 Solutions
Concours Cayley (10^{e} - Sec. IV)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

Partie A

1. La valeur de $3^2 + 7^2 - 5^2$ est :

(**A**) 75 (**B**) 83 (**C**) 33 (**D**) 25 (**E**) 10

Solution

$$3^2 + 7^2 - 5^2 = 9 + 49 - 25$$
$$= 33$$

RÉPONSE : (C)

2. Si on ajoute 8 au carré de 5, le résultat est divisible par :

(**A**) 5 (**B**) 2 (**C**) 8 (**D**) 23 (**E**) 11

Solution

$8 + 5^2 = 33$

Parmi les cinq choix, le seul diviseur de 33 est 11. RÉPONSE : (E)

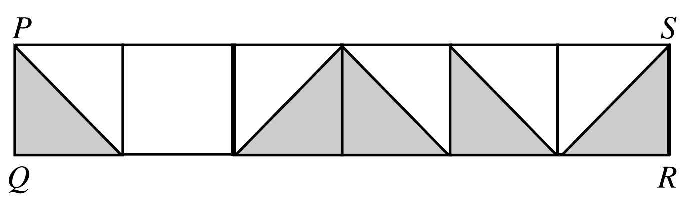
3. Nous sommes aujourd'hui mercredi. Quel jour de la semaine serons-nous dans 100 jours?

(**A**) lundi (**B**) mardi (**C**) jeudi (**D**) vendredi (**E**) samedi

Solution

Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine et que $98 = 7 \times 14$, nous serons un mercredi dans 98 jours. Dans 100 jours, nous serons donc un vendredi. RÉPONSE : (D)

4. Le rectangle $PQRS$ est formé de six carrés égaux. Quelle fraction du rectangle $PQRS$ est ombrée?



(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{7}{12}$ (**C**) $\frac{5}{11}$ (**D**) $\frac{6}{11}$ (**E**) $\frac{5}{12}$

Solution

Il y a 5 demi-carrés ombrés sur un total possible de 12 demi-carrés.

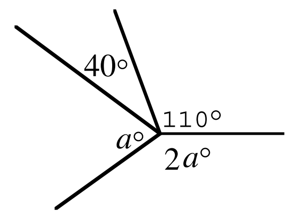
Donc $\frac{5}{12}$ du rectangle $PQRS$ est ombrée. RÉPONSE : (E)

5. Si $x = 4$, $y = 3x$ et $z = 2y$, alors $y + z$ est égal à :

(**A**) 12 (**B**) 20 (**C**) 40 (**D**) 24 (**E**) 36

Solution
Si $x = 4$, alors $y = 12$ et $z = 24$.
Donc $y + z = 36$. RÉPONSE : (E)

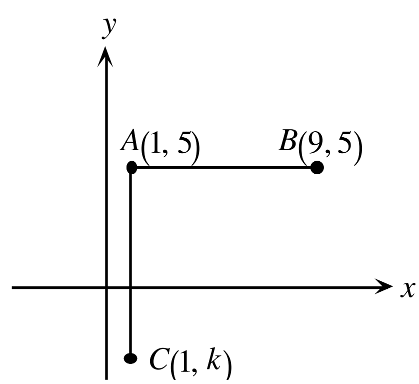
6. Selon le diagramme, la valeur de a est :



(**A**) 50 (**B**) 65 (**C**) 70
(**D**) 105 (**E**) 110

Solution
Puisque $3a° + 150° = 360°$, alors
$$3a° = 210°.$$
Donc $a = 70$. RÉPONSE : (C)

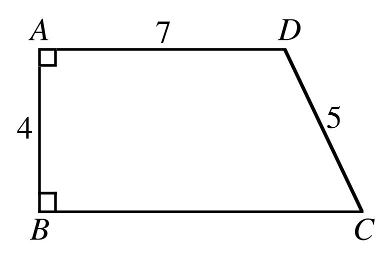
7. Dans le diagramme, les longueurs des segments AB et AC sont égales. Quelle est la valeur de k?



(**A**) -3 (**B**) -4 (**C**) -5
(**D**) -7 (**E**) -8

Solution
Puisque $AB = AC = 8$, alors $5 - k = 8$.
Donc $k = -3$. RÉPONSE : (A)

8. Dans le diagramme, on a $AD < BC$. Quel est le périmètre de $ABCD$?

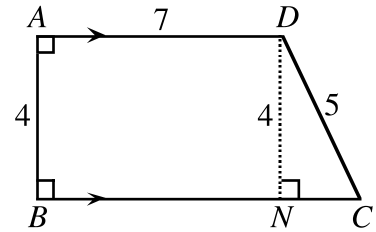


(**A**) 23 (**B**) 26 (**C**) 27
(**D**) 28 (**E**) 30

Solution

Au point *D*, on abaisse une perpendiculaire DN à BC. Puisque $ADNB$ est un rectangle, alors $DN = 4$ et $BN = 7$. Puisque le triangle CDN est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $NC = 3$. On a donc $BC = 7 + 3$, ou 10.

Le périmètre est égal à $7 + 5 + 10 + 4$, ou 26.



RÉPONSE : (B)

9. On achète trois disques compacts à un coût moyen de 15 $. Si on achète un quatrième disque, le coût moyen devient 16 $. Quel est le coût du quatrième disque?

(**A**) $16 (**B**) $17 (**C**) $18 (**D**) $19 (**E**) $20

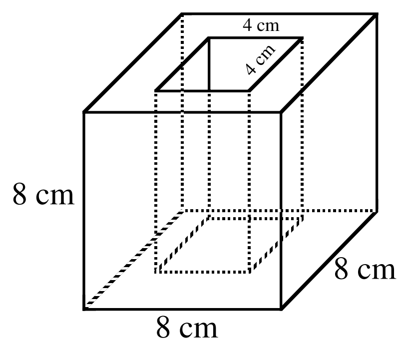
Solution

Puisque le coût moyen des quatre disques est 16 $, leur coût total est 64 $. De même, le coût total des trois premiers disques est 45 $. Le quatrième disque coûte donc $64\ \$ - 45\ \$$, ou 19 $.

RÉPONSE : (D)

10. Le diagramme illustre un cube de 8 cm dans lequel on a creusé un trou ayant la forme d'un carré de 4 cm. Quel est le volume, en cm^3, du bloc troué?

(**A**) 64 (**B**) 128 (**C**) 256
(**D**) 384 (**E**) 448



Solution

Le volume du bloc troué, en cm^3, est égal à :

$8 \times 8 \times 8 - 8 \times 4 \times 4 = 384$

RÉPONSE : (D)

Partie B

11. Une montre à affichage digital indique $5{:}55$. Combien de minutes s'écouleront avant que la montre indique de nouveau des chiffres qui sont tous identiques?

(**A**) 71 (**B**) 72 (**C**) 255 (**D**) 316 (**E**) 436

Solution

Les prochains chiffres identiques seront $11{:}11$. Cela représente une différence de 316 minutes. (On remarque que les affichages $6{:}66$, $7{:}77$, etc., sont impossibles.)

RÉPONSE : (D)

12. On place les nombres 49, 29, 9, 40, 22, 15, 53, 33, 13 et 47 en paires de manière que la somme des nombres de chaque paire soit la même. Quel nombre forme une paire avec 15?

(**A**) 33 (**B**) 40 (**C**) 47 (**D**) 49 (**E**) 53

Solution 1
Si on place les nombres en ordre ascendant, on obtient 9, 13, 15, 22, 29, 33, 40, 47, 49, 53.
Pour obtenir des sommes égales, on forme les paires suivantes : $9 \leftrightarrow 53$, $13 \leftrightarrow 49$, $15 \leftrightarrow 47$, $22 \leftrightarrow 40$, $29 \leftrightarrow 33$.

Solution 2
La somme des 10 nombres est égale à 310. Chacune des cinq paires doit donc avoir une somme de $\frac{310}{5}$, ou 62. Le nombre 47 forme donc une paire avec 15. RÉPONSE : (C)

13. Le chiffre des unités du produit $\left(5^2+1\right)\left(5^3+1\right)\left(5^{23}+1\right)$ est :

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 5 (**E**) 6

Solution
Si on développe les nombres 5^2, 5^3 et 5^{23}, leur chiffre des unités est égal à 5. Si on développe les nombres 5^2+1, 5^3+1 et $5^{23}+1$, le chiffre des unités de chaque nombre est donc un 6. Si on multiplie deux nombres ayant chacun 6 pour chiffre des unités, le produit aura aussi 6 pour chiffre des unités. Le chiffre des unités du produit $\left(5^2+1\right)\left(5^3+1\right)\left(5^{23}+1\right)$ est donc 6.

RÉPONSE : (E)

14. Quatre candidates et candidats se présentent à la présidence d'un comité. Chacun des 61 membres doit voter pour une seule candidate ou un seul candidat. Celle ou celui qui reçoit le plus grand nombre de votes est élu. Le plus petit nombre de votes que l'élu ou l'élue peut recevoir est :

(**A**) 15 (**B**) 16 (**C**) 21 (**D**) 30 (**E**) 31

Solution
Après que 60 membres ont voté, il se pourrait que chaque candidate ou candidat ait reçu 15 votes. Le dernier membre à voter, le 61^{e}, permettrait alors à une personne d'être élue en recevant 16 votes seulement. RÉPONSE : (B)

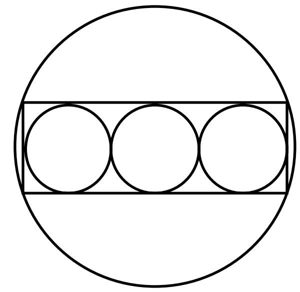
15. Une boisson au chocolat contient 6 % de chocolat pur en volume. Si on ajoute 10 litres de lait pur à 50 litres de cette boisson, le pourcentage de chocolat pur dans la nouvelle boisson sera égal à :

(**A**) 5 (**B**) 16 (**C**) 10 (**D**) 3 (**E**) 26

Solution
Puisqu'il y a 6 % de chocolat pur dans 50 litres de boisson, celle-ci contient trois litres de chocolat

pur. La nouvelle boisson contient 60 litres dont trois litres de chocolat pur. Cela représente $\frac{3}{60}$ ou 5 % de chocolat pur.
RÉPONSE : (A)

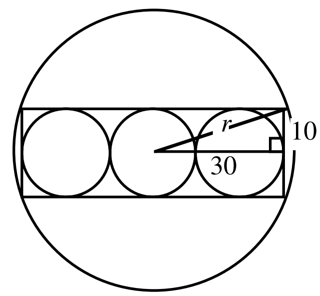
16. On trace trois cercles, ayant chacun un rayon de 10 cm, de manière qu'ils soient tangents l'un à l'autre et que leurs centres soient placés en ligne droite. Ces cercles sont inscrits dans un rectangle qui est lui-même inscrit dans un autre cercle. L'aire de ce grand cercle est égale à :



(**A**) 1000π (**B**) 1700π (**C**) 900π
(**D**) 1600π (**E**) 1300π

Solution
Par symétrie, le centre du grand cercle est le centre du petit cercle au milieu. D'après le diagramme, on a $r^2 = 30^2 + 10^2$, ou $r^2 = 1000$. L'aire du grand cercle est égale à :

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ &= \pi(1000) \\ &= 1000\pi \end{aligned}$$



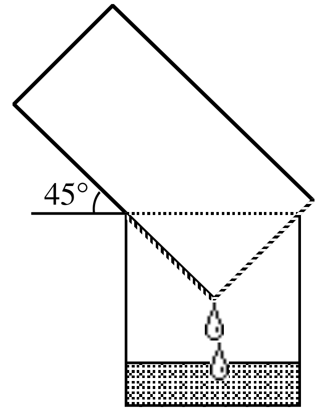
RÉPONSE : (A)

17. Soit N le plus petit entier positif dont le produit des chiffres est égal à 2000. La somme des chiffres de N est égale à :

(**A**) 21 (**B**) 23 (**C**) 25 (**D**) 27 (**E**) 29

Solution
Puisque $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, le plus petit entier positif dont le produit des chiffres est égal à 2000 est $25\,558$. La somme de ses chiffres est égale à $2+5+5+5+8$, ou 25. On pourrait croire que la réponse est 23, car le produit des chiffres de l'entier $44\,555$ est égal à 2000 et la somme de ses chiffres est égale à 23. Or $25\,558 < 44\,555$ et on demandait le plus petit entier. La réponse est donc 25 et non pas 23.
RÉPONSE : (C)

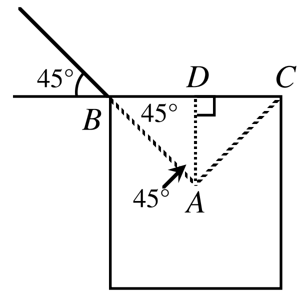
18. On laisse l'eau d'un seau s'écouler dans un bassin cylindrique ayant un diamètre de 40 cm et une profondeur de 50 cm. Le seau est placé à un angle de $45°$ par rapport à l'horizontale, comme l'illustre le diagramme. Quelle est la profondeur de l'eau dans le bassin lorsque le niveau de l'eau atteint le seau?



(**A**) 10 cm (**B**) 20 cm (**C**) 30 cm
(**D**) 35 cm (**E**) 40 cm

Solution

Soit les points *A*, *B* et *C* indiqués dans le diagramme. Le triangle *ABC* est rectangle en *A*. Puisque l'angle *ABC* mesure 45°, le triangle est aussi isocèle.



La hauteur *AD* forme un deuxième triangle rectangle isocèle *ABD*. Puisque $BD = 20$ cm et $BD = DA$, alors $DA = 20$ cm.

La profondeur de l'eau dans le bassin est donc égale à $50\text{ cm} - 20\text{ cm}$, ou 30 cm.

RÉPONSE : (C)

19. Un nombre est *Beprisque* s'il est le seul nombre naturel situé entre un nombre premier et un carré parfait (p. ex., 10 est Beprisque, mais 12 ne l'est pas). Combien y a-t-il de nombres de deux chiffres qui sont Beprisque, incluant le nombre 10?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution

On cherche les suites de trois entiers consécutifs du genre $\{C, B, P\}$ ou $\{P, B, C\}$, où C est un carré parfait et P est un nombre premier. B est alors un nombre Beprisque.

Puisque B doit être un nombre de deux chiffres, $P \neq 2$. Donc P, qui est un nombre premier, doit être impair. C doit aussi être impair, puisqu'il est deux de plus ou deux de moins que P.

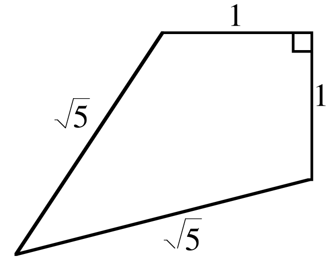
On examine les possibilités à partir des carrés parfaits impairs 9, 25, 49 et 81 : $\{9, \mathbf{10}, 11\}$,
$\{23, \mathbf{24}, 25\}$, $\{25, 26, 27\}$, $\{47, \mathbf{48}, 49\}$, $\{49, 50, 51\}$, $\{79, \mathbf{80}, 81\}$, $\{81, \mathbf{82}, 83\}$

Les nombres Beprisque sont en caractères gras. Il y en a cinq. RÉPONSE : (E)

20. L'aire du quadrilatère illustré est égale à :

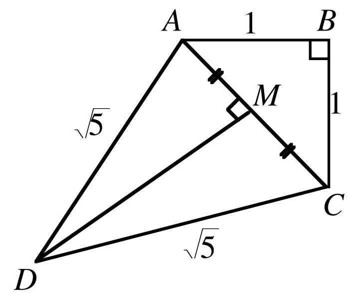
(**A**) $\frac{3}{2}$ (**B**) $\sqrt{5}$ (**C**) $\frac{1+\sqrt{10}}{2}$

(**D**) 2 (**E**) 3



Solution 1

Soit *A*, *B*, *C* et *D* les points indiqués dans le diagramme. On joint *A* et *C*. Puisque le triangle ABC est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $AC = \sqrt{2}$. Puisque le triangle ACD est isocèle, la médiane DM est aussi une hauteur. Puisque $AC = \sqrt{2}$, alors $AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



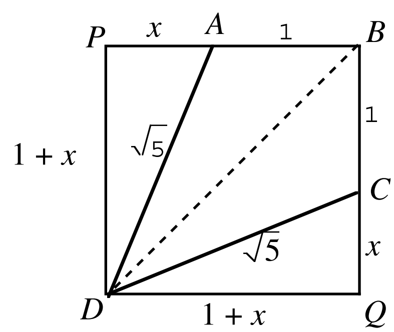
Dans le triangle rectangle ADM, on a $AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $DA = \sqrt{5}$. On utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $DM = \frac{3}{\sqrt{2}}$. L'aire du quadrilatère est égale à :

Aire du triangle ADC + Aire du triangle ABC

$$= \frac{1}{2}(AC)(DM) + \frac{1}{2}(AB)(AC)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}(1)(1)$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= 2$$

Solution 2

Le quadrilatère $ABCD$ est symétrique par rapport à sa diagonale BD. Si on prolonge les côtés BA et BC pour former un rectangle $BQDP$, on a, par symétrie, $PB = QB$ et $BQDP$ est donc un carré.



Soit $AP = x$. Donc $QC = x$. On a alors $PD = QD = 1 + x$.

Puisque le triangle CDQ est rectangle, on a, d'après le théorème de Pythagore :

$$(1+x)^2 + x^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$1 + 2x + x^2 + x^2 = 5$$
$$2x^2 + 2x - 4 = 0$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x+2)(x-1) = 0$$
$$x = -2 \text{ ou } x = 1$$

On rejète $x = -2$ car $x > 0$.
Aire de $ABCD$ = Aire du carré $BQDP$ − aire des deux triangles

$$= 2 \times 2 - 2 \times \frac{1}{2}(2)(1)$$
$$= 2$$

RÉPONSE : (D)

Partie C

21. On forme un nombre en utilisant les chiffres 1, 2, ..., 9. N'importe quel chiffre peut être utilisé plus d'une fois, mais deux chiffres en positions adjacentes doivent être différents. Lorsque deux chiffres paraissent en positions adjacentes, ces deux chiffres ne peuvent plus paraître ensemble dans le même ordre. Si on forme le plus grand nombre possible de cette façon, combien ce dernier a-t-il de chiffres?

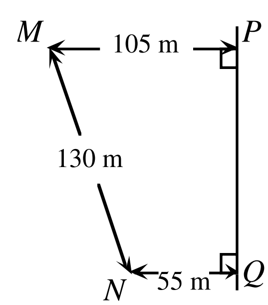
(**A**) 72 (**B**) 73 (**C**) 144 (**D**) 145 (**E**) 91

Solution
Il est possible de former 9×8, ou 72 paires différentes de chiffres en positions adjacentes.
Or un nombre de n chiffres contient $(n-1)$ paires de chiffres en positions adjacentes. Par exemple, le nombre de 5 chiffres, 98712, contient 4 paires de chiffres en positions adjacentes, soit 98, 87, 71 et 12.
Donc le plus grand nombre pouvant contenir 72 paires différentes de chiffres en positions adjacentes ne peut avoir plus de 73 chiffres, autrement il y aurait des répétions. Un tel nombre existe-t-il? Oui. Le plus grand est le suivant :

98 97 96 95 94 93 92 91 87 86 85 84 83 82 81 76 75 74 73 72 71 65 64 63 62 61
54 53 52 51 43 42 41 32 31 21 9.

On peut vérifier qu'il contient 73 chiffres. RÉPONSE : (B)

22. Un pipeline passe aux points P et Q. À partir d'un point T, sur PQ, un tuyau d'alimentation se rend à une maison située au point M et un deuxième tuyau d'alimentation se rend à une maison située au point N. Quelle est la longueur totale minimale requise pour les deux tuyaux d'alimentation?



(**A**) 200 (**B**) 202 (**C**) 198
(**D**) 210 (**E**) 214

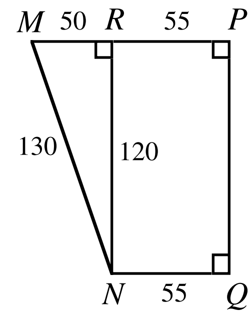
Solution

On trace le point R pour former le rectangle $RPQN$.

Donc $MR = 105 - 55$
$= 50$.

Puisque le triangle MRN est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $RN = 120$.

Donc $PQ = 120$.

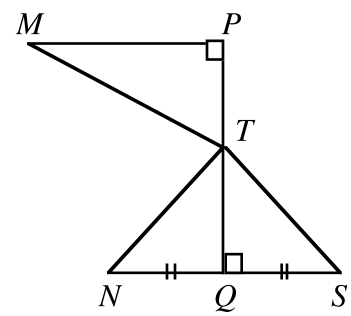


Soit S le symétrique de N par rapport à PQ.

On trace les segments TM, TN et TS.

Les triangles rectangles TNQ et TSQ ont un côté commun et deux côtés congruents. Ils sont donc congruents et alors $TN = TS$.

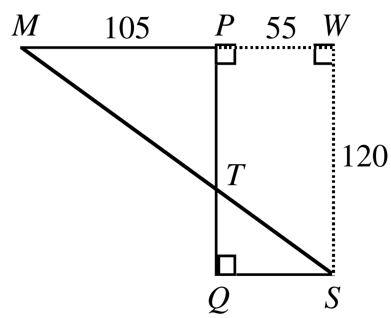
La longueur totale des deux tuyaux d'alimentation est égale à $MT + TN$, ou $MT + TS$.



Or $MT + TS$ est un minimum lorsque les points M, T et S sont alignés. On a alors $MT + TS = MS$.

Soit le triangle rectangle MSW illustré.

Selon le théorème de Pythagore, $MS = \sqrt{160^2 + 120^2}$
$= 200$.



RÉPONSE : (A)

23. Combien d'entiers peut-on exprimer comme une somme de trois nombres distincts choisis dans l'ensemble {4, 7, 10, 13, …, 46}?

(**A**) 45 (**B**) 37 (**C**) 36 (**D**) 43 (**E**) 42

Solution

Chacun des nombres de l'ensemble est de la forme $1+3n$, où $n = 1, 2, 3, ..., 15$. La somme de trois nombres distincts sera donc de la forme $3+3k+3l+3m$ ou $3(1+k+l+m)$, k, l et m étant choisis dans l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., 15\}$. Le problème est donc équivalent au problème suivant qui est plus facile : « Combien d'entiers différents peut-on former en additionnant trois nombres de l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., 15\}$? »

La plus petite somme est $1+2+3$, ou 6 et la plus grande somme est $13+14+15$, ou 42.

Il est possible d'obtenir chaque somme de 6 à 42 :

a) en remplaçant un des entiers par l'entier suivant pour augmenter la somme de 1 ou
b) en remplaçant un des entiers par l'entier précédent pour diminuer la somme de 1.

Le nombre total de sommes distinctes est donc égal à $42-5$, ou 37. RÉPONSE : (B)

24. La somme des valeurs de x qui vérifient l'équation $\left(x^2-5x+5\right)^{x^2+4x-60}=1$ est égale à :

(**A**) -4 (**B**) 3 (**C**) 1 (**D**) 5 (**E**) 6

Solution
On peut considérer trois cas.

1^er^ cas La base est égale à 1.
On a alors $x^2-5x+5=1$.
$$x^2-5x+4=0$$
$$(x-1)(x-4)=0$$
$$x=1 \text{ ou } x=4$$
Ces deux valeurs de x vérifient l'équation donnée.

2^e^ cas L'exposant est égal à 0.
On a alors $x^2+4x-60=0$.
$$(x+10)(x-6)=0$$
$$x=-10 \text{ ou } x=6$$
On peut vérifier que $x=-10$ et $x=6$ ne sont pas des racines de $x^2-5x+5=0$, ce qui fait que nous n'avons pas la forme indéterminée 0^0.

3^e^ cas La base est égale à –1 et l'exposant est pair.
On a alors $x^2-5x+5=-1$ et $x^2+4x-60$ est pair.
$$x^2-5x+5=-1$$
$$x^2-5x+6=0$$
$$(x-2)(x-3)=0$$
$$x=2 \text{ ou } x=3$$
Si $x=2$, alors $x^2-4x-60$ est pair et $x=2$ est donc une solution.
Si $x=3$, alors $x^2-4x-60$ est impair et $x=3$ ***n'est pas*** une solution.
La somme des solutions est $1+4-10+6+2$, ou 3. RÉPONSE : (B)

25. Soit $a=3^p$, $b=3^q$, $c=3^r$ et $d=3^s$, où p, q, r et s sont des entiers positifs. Déterminer la plus petite valeur de $p+q+r+s$ telle que $a^2+b^3+c^5=d^7$.

(**A**) 17 (**B**) 31 (**C**) 106 (**D**) 247 (**E**) 353

Solution
On reporte $a=3^p$, $b=3^q$, $c=3^r$ et $d=3^s$ dans l'équation $a^2+b^3+c^5=d^7$ pour obtenir $3^{2p}+3^{3q}+3^{5r}=3^{7s}$.

Dans le membre de gauche, on met en évidence la plus petite puissance de 3, disons 3^{2p} :
$3^{2p}\left(1+3^{3q-2p}+3^{5r-2p}\right)=3^{7s}$

Le facteur $1+3^{3q-2p}+3^{5r-2p}$ doit être une puissance de 3. Ceci n'est vrai que si $3^{3q-2p}=1$ et $3^{5r-2p}=1$, c'est-à-dire si $3q-2p=0$ et $5r-2p=0$. Donc $2p=3q=5r$ et ces trois exposants doivent donc être un multiple de 30, disons 30*m*.

On a donc $3^{30m}+3^{30m}+3^{30m}=3^{7s}$.

$$(3)\left(3^{30m}\right)=3^{7s}$$

$$3^{30m+1}=3^{7s}$$

On cherche donc les plus petits entiers, *m* et *s*, tels que $30m+1=7s$.

En posant $m=1, 2, 3, 4, ...$, on obtient $m=3$ et $s=13$.

Donc $2p=90$, $3q=90$, $5r=90$ et $7s=91$, d'où $p=45$, $q=30$, $r=18$ et $s=13$.

Donc $p+q+r+s=45+30+18+13$, ou 106. RÉPONSE : (C)

canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Anniversaire
1963 – 1998

1998 Solutions
Concours Cayley (10e - Sec. IV)

pour les prix
BANQUE NATIONALE DU CANADA

PARTIE A :

1. La valeur de $(0,3)^2 + 0,1$ est :

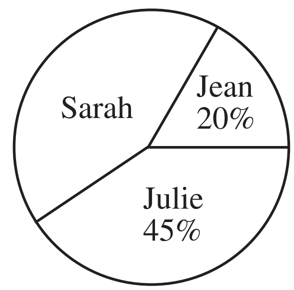
(**A**) 0,7 (**B**) 1 (**C**) 0,1 (**D**) 0,19 (**E**) 0,109

Solution

$$\begin{aligned}(0,3)^2 + 0,1 &= 0,09 + 0,1\\ &= 0,19\end{aligned}$$

RÉPONSE : (D)

2. Le diagramme circulaire indique les pourcentages des 1000 votes reçus par les candidats lors d'une élection à l'école. Combien de votes Sarah a-t-elle reçus?



(**A**) 550 (**B**) 350 (**C**) 330
(**D**) 450 (**E**) 935

Solution

Le pourcentage des votes reçus par Sarah est égal à $100-(20+45)$, c'est-à-dire à 35. Or 35 % de 1000 est égal à $0,35(1000)$, c'est-à-dire à 350. Sarah a reçu 350 votes.

RÉPONSE : (B)

3. L'expression $\dfrac{a^9 \times a^{15}}{a^3}$ est égale à :

(**A**) a^{45} (**B**) a^8 (**C**) a^{18} (**D**) a^{14} (**E**) a^{21}

Solution

$$\begin{aligned}\frac{a^9 \times a^{15}}{a^3} &= \frac{a^{24}}{a^3}\\ &= a^{21}\end{aligned}$$

RÉPONSE : (E)

4. Le produit de deux entiers positifs, p et q, est égal à 100. Quelle est la plus grande valeur possible de $p+q$?

(**A**) 52 (**B**) 101 (**C**) 20 (**D**) 29 (**E**) 25

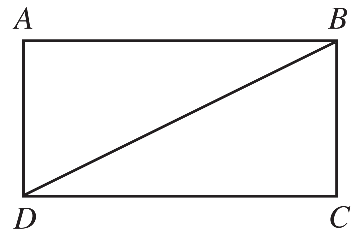
Solution

Les paires d'entiers positifs dont le produit est égal à 100 sont : 1 et 100, 2 et 50, 4 et 25,
5 et 20, 10 et 10. La paire 1 et 100 donne la plus grande somme. La plus grande valeur possible de

$p+q$ est 101. RÉPONSE : (B)

5. Le diagramme illustre un rectangle $ABCD$ tel que $DC=12$. Si le triangle BDC a une aire de 30, quel est le périmètre du rectangle $ABCD$?

(**A**) 34 (**B**) 44 (**C**) 30
(**D**) 29 (**E**) 60



Solution

Puisque le triangle BDC a une aire de 30, alors le rectangle $ABCD$ a une aire de 60. Donc :

$$12(BC)=60$$
$$BC=5$$

Le rectangle $ABCD$ a un périmètre égal à $2(12)+2(5)$, c'est-à-dire à 34. RÉPONSE : (A)

6. Si $x=2$ est une solution de l'équation $qx-3=11$, quelle est la valeur de q?

(**A**) 4 (**B**) 7 (**C**) 14 (**D**) -7 (**E**) -4

Solution

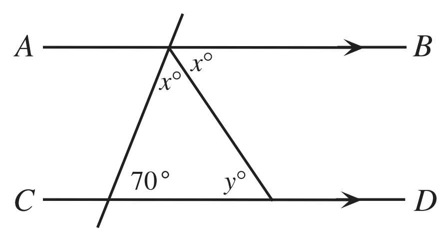
Puisque $x=2$ est une solution de l'équation $qx-3=11$, alors :

$$q(2)-3=11$$
$$2q=14$$
$$q=7$$

RÉPONSE : (B)

7. Dans le diagramme, AB est parallèle à CD. Quelle est la valeur de y?

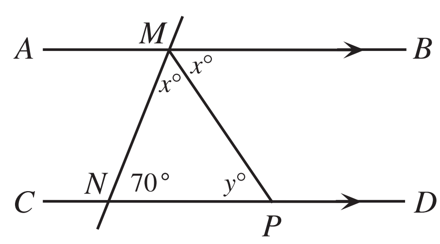
(**A**) 75 (**B**) 40 (**C**) 35
(**D**) 55 (**E**) 50



Solution

Puisque AB est parallèle à CD, alors $\angle BMN+\angle MND=180°$. Donc :

$$2x+70=180$$
$$2x=110$$
$$x=55$$



D'après la somme des angles du triangle MNP,

$$y=180-(70+55)$$
$$=55.$$

RÉPONSE : (D)

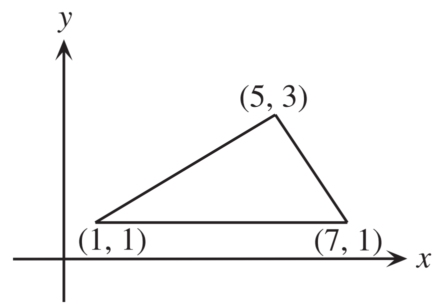
8. Les sommets d'un triangle ont pour coordonnées $(1,1)$, $(7,1)$ et $(5,3)$. Quelle est l'aire de ce triangle?

(**A**) 12 (**B**) 8 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 9

Solution

Ce triangle a une base de 6 et une hauteur de 2, comme on peut le voir sur le diagramme.

Son aire est égale à $\frac{1}{2}(6)(2)$, c'est-à-dire à 6.

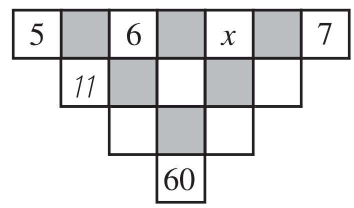


RÉPONSE : (C)

9. Un nombre dans une case blanche est obtenu en additionnant les nombres des deux cases blanches de la rangée précédente qui sont tout près. (Le '11' a été obtenu de cette façon.) La valeur de x est :

(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 9

(**D**) 15 (**E**) 10



Solution

De gauche à droite, les trois nombres des cases blanches de la deuxième rangée sont 11, $6+x$ et $x+7$. De gauche à droite, les deux nombres des cases blanches de la troisième rangée sont $11+(6+x)$ et $(6+x)+(x+7)$, c'est-à-dire $17+x$ et $2x+13$. Le nombre de la quatrième rangée est $(17+x)+(2x+13)$, c'est-à-dire $3x+30$. Donc :

$$3x+30=60$$
$$3x=30$$
$$x=10$$

RÉPONSE : (E)

10. La somme des chiffres d'un nombre entier positif de cinq chiffres est égale à 2. (Un nombre entier de cinq chiffres ne peut pas commencer par un zéro.) Combien y a-t-il de tels entiers?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution

Puisque la somme des chiffres est égale à 2, les seules possibilités sont $20\,000$, $11\,000$, $10\,100$, $10\,010$ et $10\,001$. Il y a en a cinq. RÉPONSE : (E)

PARTIE B :

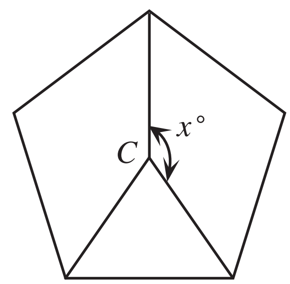
11. Si $x+y+z=25$, $x+y=19$ et $y+z=18$, alors y est égal à :
(**A**) 13 (**B**) 17 (**C**) 12 (**D**) 6 (**E**) -6

Solution
On a: $x+y+z=25$ (1)
$x+y=19$ (2)
$y+z=18$ (3)
On additionne les équations (2) et (3), membre par membre, pour obtenir $x+2y+z=37$ (4). On soustrait l'équation (1) de l'équation (4), membre par membre, pour obtenir $y=12$.

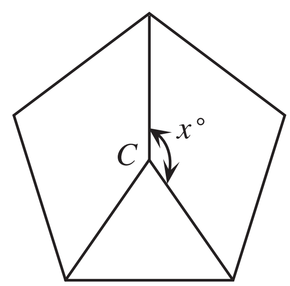
RÉPONSE : (C)

12. Le diagramme illustre un pentagone régulier de centre C. La valeur de x est :

(**A**) 144 (**B**) 150 (**C**) 120
(**D**) 108 (**E**) 72



Solution
On joint le point C à chacun des autres sommets, comme dans le diagramme. Puisque le pentagone est régulier, chacun des cinq petits angles en C mesure $360^\circ \div 5$, c'est-à-dire 72°.
Donc la valeur de x est 2×72, c'est-à-dire 144.



RÉPONSE : (A)

13. Si la surface d'un cube a une aire de 54, quel est le volume du cube?
(**A**) 36 (**B**) 9 (**C**) $\frac{81\sqrt{3}}{8}$ (**D**) 27 (**E**) $162\sqrt{6}$

Solution
Puisque la surface du cube a une aire de 54, chacune des six faces a une aire de 9.
Le cube a donc une arête de 3 unités.
Le volume du cube est donc égal à 3^3, c'est-à-dire à 27.

RÉPONSE : (D)

14. Si x et y sont des entiers positifs, combien de solutions (x, y) l'équation $3x+y=100$ admet-elle?
(**A**) 33 (**B**) 35 (**C**) 100 (**D**) 101 (**E**) 97

Solution

On récrit l'équation sous la forme $x = \dfrac{100-y}{3}$. Puisque x doit être un entier positif, $100-y$ doit être divisible par 3. Puisque y doit aussi être un entier positif, ses seules valeurs possibles sont 1, 4, 7, 10, 13, …, 94 et 97. Il y a donc 33 valeurs possibles de y. L'équation $3x+y=100$ admet donc 33 solutions.

RÉPONSE : (A)

15. Si $\sqrt{y-5}=5$ et $2^x=8$, alors $x+y$ est égal à :

(**A**) 13 (**B**) 28 (**C**) 33 (**D**) 35 (**E**) 38

Solution

On a :

$$\begin{aligned}\sqrt{y-5} &= 5\\ \left(\sqrt{y-5}\right)^2 &= 5^2\\ y-5 &= 25\\ y &= 30\end{aligned}$$

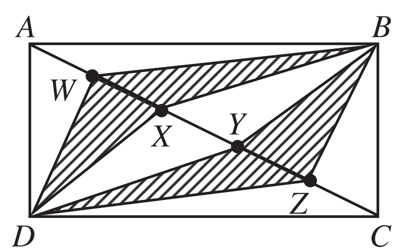
De plus :

$$\begin{aligned}2^x &= 8\\ x &= 3\end{aligned}$$

Donc $x+y=33$.

RÉPONSE : (C)

16. Le rectangle $ABCD$ a une longueur de 9 et une largeur de 5. Sa diagonale AC est divisée en cinq parties égales par les points W, X, Y et Z. Quelle est l'aire de la partie ombrée?



(**A**) 36 (**B**) $\frac{36}{5}$ (**C**) 18

(**D**) $\dfrac{4\sqrt{106}}{5}$ (**E**) $\dfrac{2\sqrt{106}}{5}$

Solution

L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(9)(5)$, c'est-à-dire à $\frac{45}{2}$. Puisque les triangles ABW, WBX, XBY, YBZ et ZBC ont des bases égales et la même hauteur, leur aire est égale à $\frac{1}{5}\left(\frac{45}{2}\right)$, c'est-à-dire à $\frac{9}{2}$. De même, les triangles ADW, WDX, XDY, YDZ et ZDC ont tous une aire de $\frac{9}{2}$. L'aire de la partie ombrée est donc égale à $4\times\frac{9}{2}$, c'est-à-dire à 18.

RÉPONSE : (C)

17. Si le nombre $N=\left(7^{p+4}\right)\left(5^q\right)\left(2^3\right)$ est un cube parfait, p et q étant des entiers positifs, la plus petite

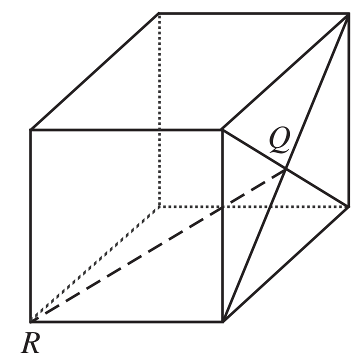
valeur possible de $p+q$ est :

(**A**) 5 (**B**) 2 (**C**) 8 (**D**) 6 (**E**) 12

Solution

Pour que N soit un cube parfait, il faut que chacun de ses facteurs premiers ait pour exposant un multiple de 3. La plus petite valeur possible de p est 2 et la plus petite valeur possible de q est 3. La plus petite valeur possible de $p+q$ est 5. RÉPONSE : (A)

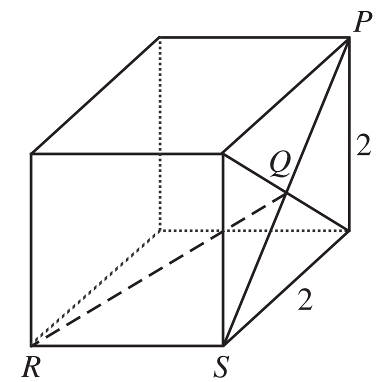
18. Les arêtes d'un cube ont une longueur de 2 unités. Le point Q est le point d'intersection des diagonales d'une des faces. La longueur du segment QR est égale à :



(**A**) 2 (**B**) $\sqrt{8}$ (**C**) $\sqrt{5}$
(**D**) $\sqrt{12}$ (**E**) $\sqrt{6}$

Solution

On considère les points P et S illustrés dans le diagramme. Sachant que les arêtes ont une longueur de 2 unités, on utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur de la diagonale PS.



$$PS^2 = 2^2 + 2^2$$
$$PS^2 = 8$$
$$PS = 2\sqrt{2}$$

Puisque Q est le milieu du segment PS, alors $QS = \sqrt{2}$.

Puisqu'il s'agit d'un cube, le triangle QRS est rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

$$QR^2 = 2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$QR^2 = 6$$
$$QR = \sqrt{6}$$

RÉPONSE : (E)

19. Monsieur Lebel a plus de 25 élèves dans sa classe. Il y a plus de 2, mais moins de 10 garçons dans sa classe. De plus, il y a plus de 14, mais moins de 23 filles dans sa classe. Combien de nombres différents peuvent représenter le nombre total d'élèves dans sa classe, tout en vérifiant ces conditions?

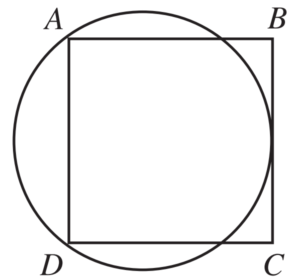
(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 3 (**E**) 4

Solution

Soit g le nombre de garçons et f le nombre de filles dans la classe de Monsieur Lebel.
On sait que $g + f > 25$, $2 < g < 10$ et $14 < f < 23$.
Seuls les couples $(g,\ f)$ suivants vérifient toutes les trois contraintes : $(4, 22)$, $(5, 21)$, $(5, 22)$, $(6, 20)$, $(6, 21)$, $(6, 22)$, $(7, 19)$, $(7, 20)$, $(7, 21)$, $(7, 22)$, $(8, 18)$, $(8, 19)$, $(8, 20)$, $(8, 21)$, $(8, 22)$, $(9, 17)$, $(9, 18)$, $(9, 19)$, $(9, 20)$, $(9, 21)$ et $(9, 22)$.
Ces couples $(g,\ f)$ donnent les sommes suivantes : 26, 27, 28, 29, 30 et 31.
Le total d'élèves dans la classe de Monsieur Lebel peut être représenté par 6 nombres différents.

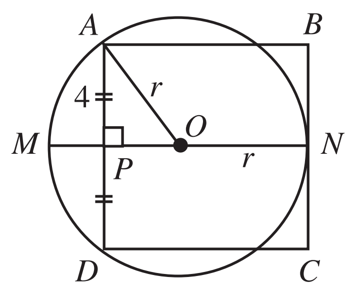
RÉPONSE : (B)

20. Chaque côté d'un carré $ABCD$ a une longueur de 8. On trace un cercle, passant aux points A et D, de manière qu'il soit tangent au côté BC. Quel est le rayon du cercle?



(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6
(**D**) $4\sqrt{2}$ (**E**) 5,25

Solution



Soit r le rayon du cercle et O son centre. Soit MN le diamètre qui coupe le côté AD perpendiculairement en son milieu P. On joint O et A.
Puisque P est le milieu de AD, on a $AP = 4$.
Puisque $ON = r$, alors :

$$PO = PN - ON$$
$$= 8 - r$$

Le triangle APO est rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

$$r^2 = 4^2 + (8 - r)^2$$
$$r^2 = 16 + 64 - 16r + r^2$$
$$16r = 80$$
$$r = 5$$

Le cercle a donc un rayon de 5.

RÉPONSE : (B)

PARTIE C :

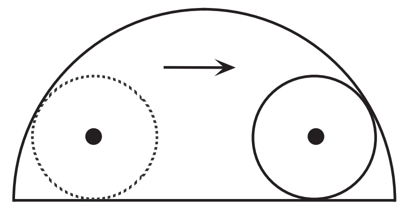
21. Lorsque Clodie reporte $x = 1$ dans l'expression $ax^3 - 2x + c$, elle obtient une valeur de -5. Lorsqu'elle reporte $x = 4$ dans l'expression, elle obtient une valeur de 52. Parmi les nombres suivants, la valeur de x qui donne à l'expression une valeur de zéro est :

(**A**) 2 (**B**) $\frac{5}{2}$ (**C**) 3 (**D**) $\frac{7}{2}$ (**E**) 4

Solution

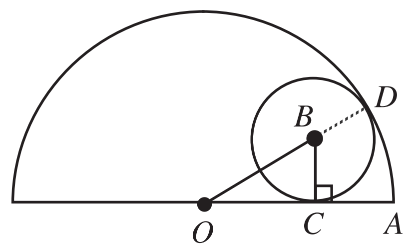
Lorsque $x = 1$, Clodie obtient $a(1)^3 - 2(1) + c = -5$, c'est-à-dire $a + c = -3 \quad (1)$.
De même, lorsque $x = 4$, elle obtient $a(4)^3 - 2(4) + c = 52$, c'est-à-dire $64a + c = 60 \quad (2)$.
On soustrait l'équation (1) de l'équation (2), membre par membre, pour obtenir $63a = 63$, d'où $a = 1$.
On reporte $a = 1$ dans l'équation (1) pour obtenir $c = -4$.
L'expression $ax^3 - 2x + c$ devient donc $x^3 - 2x - 4$.
On peut procéder par tâtonnement en attribuant à x des valeurs qui sont des diviseurs positifs ou négatifs de 4. Lorsque $x = 2$, on obtient $2^3 - 2(2) - 4 = 0$. RÉPONSE : (A)

22. On fait rouler une roue de rayon 8 le long du diamètre d'un demi-cercle de rayon 25, jusqu'à ce qu'elle frappe le demi-cercle. Quelle est la longueur totale des deux parties du diamètre qui ne peuvent être touchées par la roue?



(**A**) 8 (**B**) 12 (**C**) 15
(**D**) 17 (**E**) 20

Solution
Soit O le centre du demi-cercle, B le centre de la roue et C le point de tangence de la roue et du diamètre du demi-cercle. Le triangle OBC est donc rectangle en C.



On prolonge OB jusqu'à ce qu'il rencontre le demi-cercle en D.
Puisque BD et BC sont des rayons de la roue, ils ont chacun une longueur de 8. Donc :

$$\begin{aligned} OB &= 25 - 8 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Le triangle OBC est rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} OC^2 &= 17^2 - 8^2 \\ OC^2 &= 225 \\ OC &= 15 \end{aligned}$$

Donc $AC = 25 - 15$
$= 10$.

La longueur totale des deux parties du diamètre qui ne peuvent être touchées par la roue est égale à $2AC$, c'est-à-dire à 20. RÉPONSE : (E)

23. On considère quatre entiers positifs différents, a, b, c et N, tels que $N = 5a + 3b + 5c$. De plus, $N = 4a + 5b + 4c$ et N est un nombre entre 131 et 150. Quelle est la valeur de $a + b + c$?
(**A**) 13 (**B**) 17 (**C**) 22 (**D**) 33 (**E**) 36

Solution

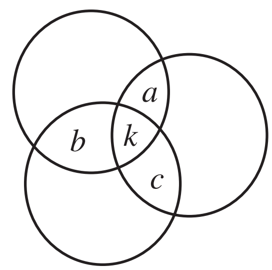
On a $N = 5a + 3b + 5c$ (1) et $N = 4a + 5b + 4c$ (2).
On multiplie chaque membre de l'équation (1) par 4 pour obtenir $4N = 20a + 12b + 20c$ (3).
On multiplie chaque membre de l'équation (2) par 5 pour obtenir $5N = 20a + 25b + 20c$ (4).
On soustrait l'équation (3) de l'équation (4), membre par membre, pour obtenir $N = 13b$.
Puisque N et b sont des entiers positifs, N doit être un multiple de 13.
Puisque $131 < N < 150$, N doit être égal à 143. Donc $143 = 13b$, d'où $b = 11$.
On reporte $N = 143$ et $b = 11$ dans l'équation (1) pour obtenir :

$$143 = 5a + 3(11) + 5c$$
$$110 = 5a + 5c$$
$$22 = a + c$$

Donc la valeur de $a + b + c$ est égale à $11 + 22$, c'est-à-dire 33. RÉPONSE : (D)

24. Trois tapis ont une aire totale de 200 m^2. En les superposant partiellement, on recouvre une surface de 140 m^2. La partie recouverte par exactement deux tapis a une aire de 24 m^2. Quelle est l'aire de la surface recouverte par trois tapis?
(**A**) 12 m^2 (**B**) 18 m^2 (**C**) 24 m^2 (**D**) 36 m^2 (**E**) 42 m^2

Solution
On illustre les trois tapis comme dans le diagramme. $a + b + c$ représente l'aire de la surface recouverte par exactement deux tapis et k représente l'aire de la surface recouverte par trois tapis.
On donne $a + b + c = 24$ (1).



Puisque les trois tapis ont une aire totale de 200 m^2 et puisqu'ils recouvrent une surface de 140 m^2 lorsqu'ils sont partiellement superposés, il y a alors une surface de 60 m^2 qui est « gaspillée » par les deux ou trois couches de tapis superposés.
Donc $a + b + c + 2k = 60$ (2). On soustrait l'équation (1) de l'équation (2), membre par membre, pour obtenir $2k = 36$, d'où $k = 18$.
L'aire de la surface recouverte par trois tapis est donc égale à 18 m^2. RÉPONSE : (B)

25. On veut placer 10 000 cercles, ayant chacun un diamètre de 1, dans un carré mesurant 100 sur 100. On peut le faire en plaçant les cercles en 100 rangées de 100 cercles. Si on place plutôt les cercles de manière que les centres de n'importe quels trois cercles tangents l'un à l'autre forment un triangle équilatéral, quel est le nombre maximal de cercles additionnels que l'on peut placer?
(**A**) 647 (**B**) 1442 (**C**) 1343 (**D**) 1443 (**E**) 1344

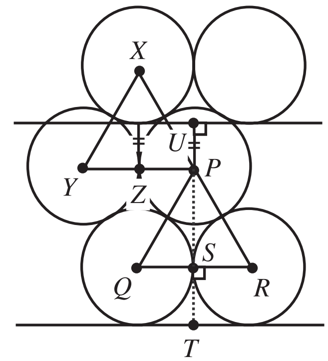
Solution
Pour commencer, on retire un cercle de chaque deuxième rangée et on déplace ces rangées de manière que les centres de n'importe quels trois cercles tangents l'un à l'autre forment un triangle équilatéral. Le diagramme illustre quelques-uns de ces cercles. Puisque chaque cercle a un diamètre de 1, les

triangles PQR et PXY sont équilatéraux avec des côtés de longueur 1.
Dans le triangle PQR, on abaisse la hauteur PS.
Le triangle PRS est rectangle. D'après le triangle de Pythagore, on a :

$$PS^2 = (1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$PS^2 = \frac{3}{4}$$

$$PS = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



De même, $XZ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Puisque chaque cercle a un rayon de $\frac{1}{2}$, alors $PU = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ et $TU = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire $TU = \sqrt{3}$. Ayant placé deux rangées de cercles, ceux-ci occupent donc une hauteur de $\sqrt{3}$ avant de permettre le placement d'une troisième rangée. Cette hauteur est la hauteur entre les lignes horizontales du diagramme. Or $\frac{100}{\sqrt{3}} \approx 57,7$.

On peut placer 57 rangées doubles, chaque rangée double contenant $100 + 99 = 199$ cercles.
Est-il possible de placer une rangée additionnelle? Oui. Le carré a des côtés de longueur 100, tandis que les 57 rangées doubles occupent une hauteur de $57\sqrt{3}$ et $57\sqrt{3} \approx 98,7$. Il reste donc assez de place pour une rangée additionnelle de 100 cercles.
Le nombre total de cercles que l'on peut placer est égal à $57(199) + 100$, c'est-à-dire à $11\,443$.
Le nombre maximal de cercles additionnels que l'on peut placer est égal à $11\,443 - 10\,000$, c'est-à-dire à 1443.

RÉPONSE : (D)

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1997 Solutions et Concours Cayley (10e - Sec. IV)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

PARTIE A

1. La valeur de $2\frac{1}{10}+3\frac{11}{100}$ est :

(**A**) 5,11 (**B**) 5,111 (**C**) 5,12 (**D**) 5,21 (**E**) 5,3

Solution

$$2\frac{1}{10}+3\frac{11}{100} = 2{,}1+3{,}11$$
$$= 5{,}21$$

RÉPONSE : (D)

2. La valeur de $(1)^{10}+(-1)^8+(-1)^7+(1)^5$ est :

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 16 (**E**) 4

Solution

$$(1)^{10}+(-1)^8+(-1)^7+(1)^5 = 1+1-1+1$$
$$= 2$$

RÉPONSE : (C)

3. On multiplie un entier par 2 et on multiplie ensuite le résultat par 5. La réponse finale pourrait être :

(**A**) 64 (**B**) 32 (**C**) 12 (**D**) 25 (**E**) 30

Solution

Puisqu'on multiplie l'entier par 2, puis par 5, c'est équivalent à une multiplication par 10. La réponse doit donc avoir un zéro à droite. Le seul choix de réponse est 30. RÉPONSE : (E)

4. Le plus grand nombre de lundis qu'il pourrait y avoir dans une période de 45 jours consécutifs est :

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

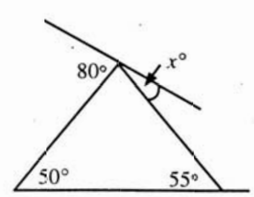
Solution

Si le premier jour est un lundi, alors ce sera aussi lundi 7 jours plus tard. Les lundis tomberont donc les jours suivants : 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43.

Dans une période de 45 jours consécutifs, il peut y avoir au plus sept lundis. RÉPONSE : (C)

5. La valeur de x est :

(**A**) 25 (**B**) 30 (**C**) 50
(**D**) 55 (**E**) 20

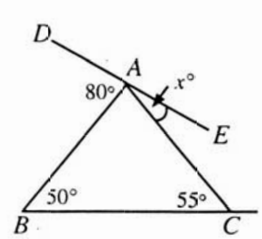


Solution

La mesure de l'angle BAC, en degrés, est égale à $180-50-55=75$.

Puisque les points D, A et E sont alignés,

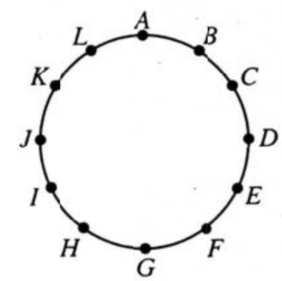
$$80+75+x=180$$
$$x=25.$$



RÉPONSE : (A)

6. On a placé douze ballons en cercle, tel qu'illustré. En procédant dans le sens des aiguilles d'une montre, on crève chaque troisième ballon. Le premier ballon crevé est le C. On continue de la sorte jusqu'à ce qu'il ne reste que deux ballons non crevés. Ces deux derniers ballons sont :

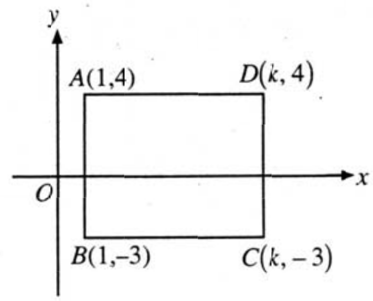
(A) B, H (B) B, G (C) A, E
(D) E, J (E) F, K



Solution
On crève les dix premiers ballons dans l'ordre suivant : C, F, I, L, D, H, A, G, B et K. Les deux derniers ballons sont E et J. RÉPONSE : (D)

7. Dans le diagramme, le rectangle $ABCD$ a une aire de 70. La valeur de k est :

(A) 8 (B) 9 (C) 10
(D) 11 (E) 12



Solution 1
Le côté AB du rectangle a une longueur de $4-(-3)=7$. Puisque le rectangle a une aire de 70, le côté AD doit avoir une longueur de $\frac{70}{7}=10$.

Donc k est égal à $1+10=11$.

Solution 2
Le côté AB du rectangle a une longueur de $4-(-3)=7$.
Le côté AD du rectangle a une longueur de $k-1$.
Puisque le rectangle a une aire de 70, alors $7(k-1)=70$.

$$k-1=10$$
$$k=11$$

RÉPONSE : (D)

8. On considère des nombres p, q, r, s et t tels que $r<s$, $t>q$, $q>p$ et $t<r$. Lequel de ces nombres est le plus grand?

(A) t (B) s (C) r (D) q (E) p

Solution
On peut récrire les inégalités et les comparer pour obtenir $p<q<t<r<s$. Le plus grand des nombres est s. RÉPONSE : (B)

9. La somme de sept entiers consécutifs est égale à 77. Le plus petit de ces entiers est :

(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 11 (E) 14

Solution

Puisque la somme des sept entiers est égale à 77, leur moyenne est égale à $\frac{77}{7}$ ou 11.

Puisqu'il y a un nombre impair d'entiers consécutifs, le nombre du milieu est 11 et le plus petit est donc 8. RÉPONSE : (C)

10. Chacun des nombres 1, 2, 3 et 4 prend la place d'une des lettres p, q, r et s dans un certain ordre. La plus grande valeur possible de $p^q + r^s$ est :

(A) 12 **(B)** 19 **(C)** 66 **(D)** 82 **(E)** 83

Solution

La plus grande valeur possible de p^q est 3^4 ou 81.

La plus grande valeur possible de $p^q + r^s$ est $3^4 + 2^1$ ou 83. RÉPONSE : (E)

PARTIE B

11. Le tableau indique les produits des nombres représentés par des lettres dans chaque rangée et chaque colonne. Par exemple, $xy = 6$ et $xz = 12$. Si x, y, z et w sont des entiers, quelle est la valeur de xw?

(A) 150 **(B)** 300 **(C)** 31
(D) 75 **(E)** 30

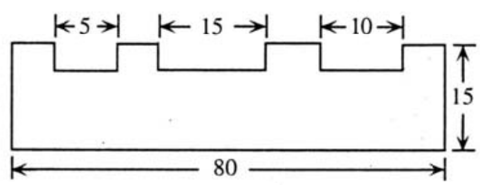
x	y	6
z	w	50
12	25	

Solution

Puisque x, y, z et w sont des entiers, alors y doit être un diviseur de 6 et de 25. La seule valeur possible de y est donc 1. Donc $x = 6$ et $w = 25$. La valeur de xw est $(6)(25) = 150$. RÉPONSE : (A)

12. On a découpé et enlevé trois petits rectangles, de même hauteur, d'une feuille de métal de forme rectangulaire. Le morceau qui reste a une aire de 990. Quelle est la hauteur de chaque rectangle enlevé?

(A) 8 **(B)** 7 **(C)** 6
(D) 5 (E) 4



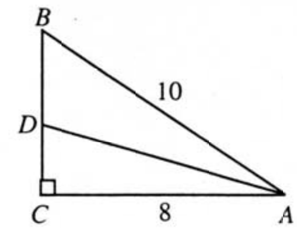
Solution

Soit h la hauteur de chaque rectangle enlevé. Donc :

$$\begin{aligned} 80(15) - 5h - 15h - 10h &= 990 \\ 1200 - 30h &= 990 \\ 30h &= 210 \\ h &= 7 \end{aligned}$$

La hauteur de chaque rectangle enlevé est 7. RÉPONSE : (B)

13. On considère un triangle rectangle ABC, où $AB = 10$ et $AC = 8$. Si $BC = 3DC$, alors AD est égal à :



(A) 9 **(B)** $\sqrt{65}$ **(C)** $\sqrt{80}$
(D) $\sqrt{73}$ **(E)** $\sqrt{68}$

Solution

On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABC pour obtenir $BC = 6$.
Puisque $BC = 3DC$, alors $DC = 2$.
On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ADC :

$$\begin{aligned} AD^2 &= 2^2 + 8^2 \\ &= 68 \\ AD &= \sqrt{68} \end{aligned}$$

RÉPONSE : (E)

14. En changeant l'ordre des chiffres 1, 2, 3 et 4, on peut former vingt-quatre nombres différents de quatre chiffres. Si on écrit ces vingt-quatre nombres en ordre, du plus petit au plus grand, dans quelle position le nombre 3142 se trouve-t-il?

(A) 13^e **(B)** 14^e **(C)** 15^e **(D)** 16^e **(E)** 17^e

Solution

Les douze premiers nombres commencent par un 1 ou un 2. Les six nombres suivants commencent par un 3. Ces six nombres, dans l'ordre, sont 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421.
Le nombre 3142 est en 14^e position. RÉPONSE : (B)

15. On écrit le produit de 20^{50} et de 50^{20} sous la forme développée d'un entier régulier. En partant de la droite, le nombre de zéros consécutifs qui paraissent dans le nombre est :

(A) 70 **(B)** 71 **(C)** 90 **(D)** 140 **(E)** 210

Solution

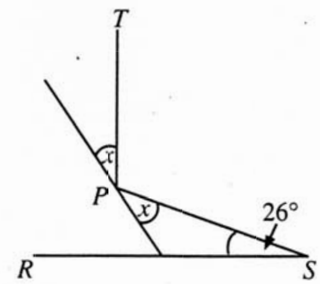
Chaque facteur 10 forme un zéro à la fin du produit. On veut donc compter le nombre de facteurs 10 qu'il y a dans le produit. On remarque que 10 est formé en multipliant 2 et 5. On décomposera 20 et 50 pour les écrire sous forme $2 \cdot 2 \cdot 5$ et $2 \cdot 5 \cdot 5$.
On peut récrire le produit de 20^{50} et de 50^{20} comme suit :

$$\begin{aligned} (20^{50})(50^{20}) &= (2^2 \cdot 5)^{50}(5^2 \cdot 2)^{20} \\ &= 2^{100} \cdot 5^{50} \cdot 5^{40} \cdot 2^{20} \\ &= 2^{120} \cdot 5^{90} \\ &= 2^{30}(2^{90} \cdot 5^{90}) \\ &= 2^{30} \cdot 10^{90} \end{aligned}$$

Essentiellement, les deux dernières lignes indiquent que puisque le produit contient 120 facteurs 2, soit 2^{120}, et 90 facteurs 5, soit 5^{90}, il est possible de former 90 produits $(2 \cdot 5)$ ou 90 zéros. En partant de la droite, il y a donc 90 zéros. RÉPONSE : (C)

16. Un faisceau de lumière est projeté à partir du point S. Il est réfléchi dans un miroir au point P pour atteindre le point T, de manière que PT soit perpendiculaire à RS. Alors la mesure de x est égale à :

(A) 32° **(B)** 37° **(C)** 45°
(D) 26° **(E)** 38°



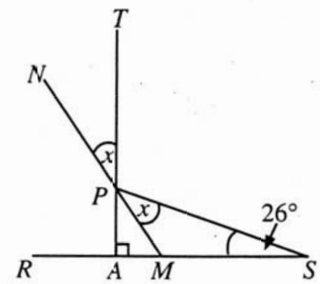
Solution

On prolonge le segment TP jusqu'au point A sur RS. Puisque TP et RS sont perpendiculaires, alors $\angle SPA = 180° - 90° - 26° = 64°$.

Soit les points M et N indiqués sur le diagramme. Puisque les angles TPN et MPA sont opposés par le sommet, $\angle MPA = x$.

Puisque $\angle SPA = 2x$, alors $2x = 64°$, d'où $x = 32°$.

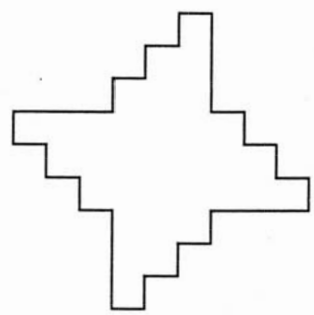
Alors la mesure de x est égale à 32°.



Réponse : (A)

17. Dans le diagramme, tous les segments adjacents forment des angles droits. Les quatre grands segments ont une même longueur et tous les petits segments ont une même longueur. La figure a une aire de 528. Quel est le périmètre de la figure?

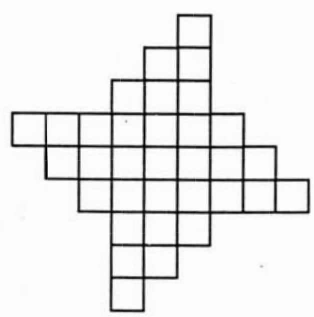
(A) 132 **(B)** 264 **(C)** 92
(D) 72 **(E)** 144



Solution

Puisque les petits segments ont une même longueur et que tous les grands segments ont une même longueur, on peut diviser le diagramme en 33 petits carrés. Chaque petit carré a une aire de $\frac{528}{33} = 16$ unités carrées. Chacun a donc des côtés de $\sqrt{16} = 4$ unités.

On peut compter pour constater que la figure a un périmètre de 36 petits segments pour un total de 144 unités.



Réponse : (E)

18. Si x, y et z sont des entiers positifs et si $\frac{30}{7} = x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}}$, alors la valeur de $x + y + z$ est :

(A) 13 **(B)** 9 **(C)** 11 **(D)** 37 **(E)** 30

Solution

On récrit $\frac{30}{7}$ sous la forme : $4+\frac{2}{7}=4+\cfrac{1}{\left(\frac{7}{2}\right)}$

$$=4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}$$

On compare à l'expression donnée pour obtenir $x=4$, $y=3$ et $z=2$.
Donc $x+y+z=9$.

RÉPONSE : (B)

19. Si $x^2yz^3=7^4$ et $xy^2=7^5$, alors xyz est égal à :
(**A**) 7 (**B**) 7^2 (**C**) 7^3 (**D**) 7^8 (**E**) 7^9

Solution

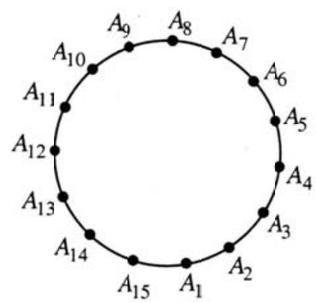
On multiplie les deux égalités, membre par membre, pour obtenir : $\left(x^2yz^3\right)\left(xy^2\right)=\left(7^4\right)\left(7^5\right)$

$$x^3y^3z^3=7^9$$

Donc $xyz=7^3$.

RÉPONSE : (C)

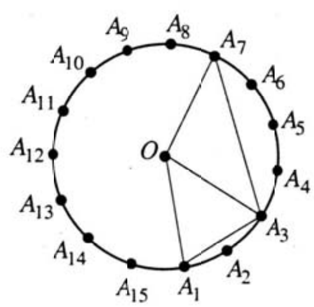
20. Quinze points, A_1, A_2, A_3, …, A_{15}, sont placés en ordre, à intervalles réguliers, sur un cercle. Quelle est la mesure de l'angle $A_1A_3A_7$?
(**A**) 96° (**B**) 100° (**C**) 104°
(**D**) 108° (**E**) 120°



Solution

Soit O le centre du cercle. On trace les segments OA_1, OA_3, OA_7, A_1A_3 et A_3A_7.

Puisque les points A_1, A_2, A_3, …, A_{15} sont placés à intervalles réguliers, ils forment des angles au centre égaux, mesurant chacun $\frac{360°}{15}=24°$.



Donc $\angle A_1OA_3=48°$ et $\angle A_3OA_7=96°$.

Puisque $OA_1=OA_3$, le triangle A_1OA_3 est isocèle.

Donc $\angle A_1A_3O=\frac{(180°-48°)}{2}$
$=66°$.

De même, le triangle A_3OA_7 est isocèle. Donc $\angle OA_3A_7=\frac{(180°-96°)}{2}$
$=42°$.

Donc $\angle A_1A_3A_7=\angle A_1A_3O+\angle OA_3A_7$
$=66°+42°$
$=108°$.

RÉPONSE : (D)

PARTIE C

21. Soit a, b et c trois entiers positifs tels que $\dfrac{\left(\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1\right)}{\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1\right)}=11$. Le nombre de triplets (a,b,c), tels que $a+2b+c \le 40$, est égal à :

(A) 33 (B) 37 (C) 40 (D) 42 (E) 45

Solution

$$\frac{\left(\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1\right)}{\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1\right)}=11$$

$$\frac{abc\left(\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1\right)}{abc\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1\right)}=11$$

$$\frac{a^2b+a^2c+abc}{b^2c+ab^2+abc}=11$$

$$\frac{a(ab+ac+bc)}{b(bc+ab+ac)}=11$$

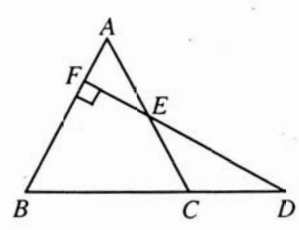
$$\frac{a}{b}=11$$

$$a=11b$$

On reporte $a=11b$ dans l'inéquation $a+2b+c \le 40$ pour obtenir $13b+c \le 40$.
Puisque b et c sont des entiers positifs, b ne peut prendre que les valeurs 1, 2 et 3. Puisque $a=11b$, a prend trois valeurs correspondantes.
Si $b=3$, l'inéquation $13b+c \le 40$ devient $39+c \le 40$, d'où $c \le 1$.
Elle admet un triplet, $(33, 3, 1)$.
Si $b=2$, l'inéquation devient $26+c \le 40$, d'où $c \le 14$.
Elle admet 14 valeurs possibles de c et donc 14 triplets.
Si $b=1$, l'inéquation devient $13+c \le 40$, d'où $c \le 27$.
Elle admet 27 valeurs possibles de c et donc 27 triplets.
Le nombre de triplets qui vérifient les conditions données est égal à $1+14+27=42$.

RÉPONSE : (D)

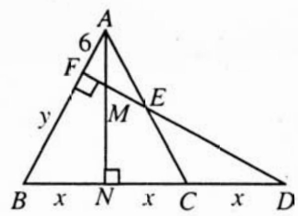
22. Dans le diagramme, le triangle ABC est équilatéral, $BC=2CD$, $AF=6$ et DEF est perpendiculaire à AB. Quelle est l'aire du quadrilatère $FBCE$?



(A) $144\sqrt{3}$ (B) $138\sqrt{3}$ (C) $126\sqrt{3}$
(D) $108\sqrt{3}$ (E) $66\sqrt{3}$

Solution

Au point A, on abaisse une perpendiculaire à BC. Soit M et N comme dans le diagramme. Puisque le triangle ABC est équilatéral, on a $BN = NC = CD$. Soit $BN = x$ et $BF = y$.



Alors $6 + y = 2x$. (1)

De plus, $\angle FAM = 30°$, et le triangle AMF est un triangle $30° - 60° - 90°$. Les longueurs de ses côtés sont donc dans un rapport $1 : \sqrt{3} : 2$.

Donc $AM = 4\sqrt{3}$ et $FM = 2\sqrt{3}$.

Puisque le triangle DBF est un triangle $30° - 60° - 90°$, les longueurs de ses côtés sont dans un rapport $1 : \sqrt{3} : 2$.

Donc $\frac{3x}{y} = \frac{2}{1}$, d'où $3x = 2y$. (2)

On résout les équations (1) et (2) pour obtenir $x = 12$ et $y = 18$.

Donc $AN = 12\sqrt{3}$. L'aire du triangle ABC est alors égale à $\frac{24(12\sqrt{3})}{2}$ ou $144\sqrt{3}$.

Le triangle EAF est un triangle $30° - 60° - 90°$. Les longueurs de ses côtés sont donc dans un rapport $1 : \sqrt{3} : 2$.

Donc $FE = 6\sqrt{3}$. L'aire du triangle EAF est alors égale à $\frac{6(6\sqrt{3})}{2}$ ou $18\sqrt{3}$.

L'aire du quadrilatère $FBCE$ est donc égale à $144\sqrt{3} - 18\sqrt{3}$ ou $126\sqrt{3}$. RÉPONSE : (C)

23. On considère l'ensemble $\{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\}$. Combien d'entiers, entre 3 et 89, ne peuvent pas être exprimés comme la somme d'exactement deux éléments de l'ensemble?

(**A**) 51 (**B**) 57 (**C**) 55 (**D**) 34 (**E**) 43

Solution

On compte d'abord le nombre d'entiers, entre 3 et 89, qui peuvent être exprimés comme la somme d'exactement deux éléments de l'ensemble. Puisque chaque élément de l'ensemble est la somme des deux éléments précédents, on peut ajouter 55 à chacun des sept premiers éléments pour former sept entiers différents, chacun inférieur à 89.

De même, on peut ajouter 34 à chacun des sept premiers éléments, on peut ajouter 21 à chacun des six premiers éléments, ainsi de suite. Le nombre d'entiers, entre 3 et 89, qui peuvent être exprimés comme la somme d'exactement deux éléments de l'ensemble est égal à $7 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 34$. Puisqu'il y a 85 entiers entre 3 et 89, alors il y a $85 - 34 = 51$ entiers qui ne peuvent pas être exprimés comme la somme d'exactement deux éléments de l'ensemble. RÉPONSE : (A)

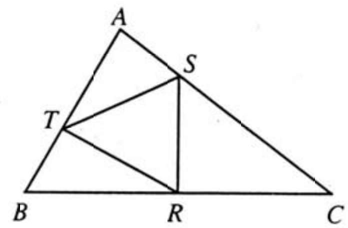
24. Dans un polygone convexe, exactement cinq des angles intérieurs sont obtus. Le plus grand nombre possible de côtés que ce polygone peut admettre est :

(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

Solution

Puisque exactement cinq des angles intérieurs sont obtus, alors cinq angles extérieurs sont aigus. Les autres angles extérieurs doivent être obtus ou droits. On veut alors maximiser le nombre d'angles obtus ou droits. Supposons que les cinq angles extérieurs aigus ont une somme inférieure ou égale à $90°$. Puisque la somme des angles extérieurs est égale à $360°$ et puisque les angles obtus sont supérieurs à $90°$, on ne peut avoir que trois angles obtus ou droits.
Le polygone peut donc admettre un maximum de $3+5=8$ côtés. RÉPONSE : (B)

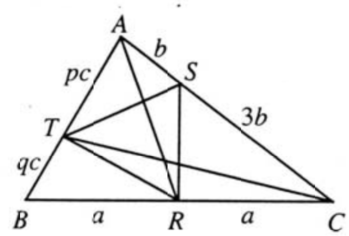
25. Dans le triangle ABC, $BR = RC$, $CS = 3SA$ et $\frac{AT}{TB} = \frac{p}{q}$. Si l'aire du triangle RST est deux fois l'aire du triangle TBR, alors $\frac{p}{q}$ est égal à :



(A) $\frac{2}{1}$ **(B)** $\frac{8}{3}$ **(C)** $\frac{5}{2}$ **(D)** $\frac{7}{4}$ **(E)** $\frac{7}{3}$

Solution

On joint A et R, de même que C et T. Soit a, b et c les longueurs indiquées et soit k l'aire du triangle ABC.



Puisque $CS = 3SA$, alors $\dfrac{\text{aire du triangle } CRS}{\text{aire du triangle } CRA} = \dfrac{3}{4}$.

Donc l'aire du triangle CRS est égale à $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{k}{2}$ ou $\dfrac{3k}{8}$.

Puisque $BT : TA = q : p$, alors $\dfrac{\text{aire du triangle } TBR}{\text{aire du triangle } ABR} = \dfrac{q}{p+q}$.

Donc l'aire du triangle TBR est égale à $\dfrac{q}{p+q}\cdot\dfrac{k}{2}$ ou $\dfrac{qk}{2(p+q)}$.

De même, $\dfrac{\text{aire du triangle } ATC}{\text{aire du triangle } ABC} = \dfrac{p}{p+q}$. Donc l'aire du triangle ATC est égale à $\dfrac{pk}{p+q}$.

Puisque $CS = 3SA$, alors $\dfrac{\text{aire du triangle } ATS}{\text{aire du triangle } ATC} = \dfrac{1}{4}$.

Donc l'aire du triangle ATS est égale à $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{pk}{p+q}$ ou $\dfrac{pk}{4(p+q)}$.

Puisque $BR = RC$, alors (aire du triangle RST) = 2(aire du triangle TBR).

$$k - \frac{3k}{8} - \frac{qk}{2(p+q)} - \frac{pk}{4(p+q)} = \frac{2qk}{2(p+q)}$$

$$1 - \frac{3}{8} - \frac{q}{2(p+q)} - \frac{p}{4(p+q)} = \frac{2q}{2(p+q)} \quad \text{(puisque } k \neq 0\text{)}$$

$$\frac{5}{8} - \frac{q}{2(p+q)} - \frac{p}{4(p+q)} = \frac{2q}{2(p+q)}$$

$$5(p+q) - 4q - 2p = 8q$$

$$5p + 5q - 4q - 2p = 8q$$

$$3p = 7q$$

$$\frac{p}{q} = \frac{7}{3}$$

RÉPONSE : (E)