



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 28 février 2024

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 29 février 2024

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée: 60 minutes

©2024 University of Waterloo

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Les parties A et B du concours sont composées de questions à choix multiple. Chacune de ces questions est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. La réponse juste à chaque question de la partie C est un entier de 0 à 99 inclusivement. Après avoir décidé de votre réponse, remplissez les deux cercles appropriés sur la feuille-réponse. Une réponse à un chiffre (p. ex. $\langle 7 \rangle$) doit être codée avec un zéro non significatif ($\langle 07 \rangle$).
8. Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C. Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée. Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
9. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
10. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
11. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

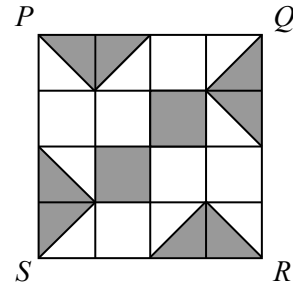
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

- Quelle est la valeur de $3\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\right)$?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6
- Si $x = 2$, quelle est la valeur de $4x^2 - 3x^2$?
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 2 (E) 5
- Combien de cubes $1 \times 1 \times 1$ faut-il pour former un cube $2 \times 2 \times 2$?
(A) 4 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 8
- Shuxin a initialement 10 bonbons rouges, 7 bonbons jaunes et 3 bonbons bleus. Après en avoir mangé quelques-uns, elle se retrouve avec une quantité égale de bonbons de chaque couleur. Quel est le nombre minimal de bonbons que Shuxin a pu manger??
(A) 11 (B) 7 (C) 17 (D) 20 (E) 14

- Le carré $PQRS$ est divisé en 16 petits carrés congruents, comme dans la figure ci-contre. Quelle fraction de $PQRS$ est ombrée?

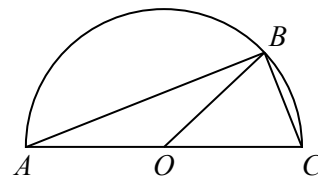
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{3}{8}$



- Combien y a-t-il d'entiers supérieurs à $\sqrt{15}$ et inférieurs à $\sqrt{50}$?
(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 5 (E) 2
- La droite d'équation $y = 3x + 6$ subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées. Quelle est l'abscisse à l'origine de l'image?
(A) 2 (B) -2 (C) 6 (D) -6 (E) $\frac{1}{2}$
- Si $10^n = 1000^{20}$, quelle est la valeur de n ?
(A) 1000 (B) 60 (C) 2000 (D) 300 (E) 102

- Dans la figure ci-contre, un demi-cercle a pour centre O et pour diamètre AC . De plus, le point B est situé sur le demi-cercle de manière que $\angle BAC = 25^\circ$. Quelle est la mesure de l'angle BOC ?

- (A) 60° (B) 55° (C) 45°
(D) 50° (E) 65°



10. Dans une photographie, Aristote, David, Flora, Munirah et Pedro sont assis, dans un ordre aléatoire, sur 5 chaises qui forment une rangée. Si David est assis au milieu de la rangée, quelle est la probabilité pour que Pedro soit assis à côté de lui ?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{5}$ (E) $\frac{3}{5}$

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Dans la Figure 1, on voit 3 lignes qui se croisent en 1 seul point d'intersection. Dans la Figure 2, on voit 3 lignes qui se croisent de manière à former 3 points d'intersection.

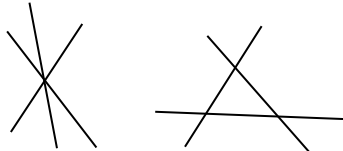


Figure 1

Figure 2

Quel est le nombre maximum de points d'intersection que peuvent former 4 lignes ?

(A) 5 (B) 4 (C) 8 (D) 6 (E) 7

12. Les nombres 5, 6, 10, 17 et 21 sont réorganisés de sorte que la somme des trois premiers nombres soit égale à celle des trois derniers. Quel nombre se trouve au milieu de ce nouvel arrangement ?

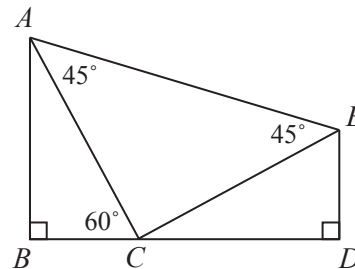
(A) 5 (B) 6 (C) 10 (D) 17 (E) 21

13. Supposons que l'expression $(x + m)(x + n)$, m et n étant des entiers, est égale à une expression quadratique dont le terme constant est -12 . Parmi les choix de réponse suivants, lequel ne peut pas être une valeur de m ?

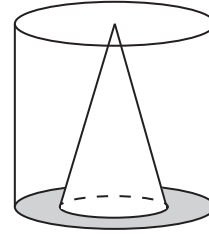
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

14. Dans la figure ci-contre, le point C est situé sur le côté BD du quadrilatère $ABDE$. De plus, AB et ED sont perpendiculaires à BD , $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle CAE = 45^\circ$ et $\angle AEC = 45^\circ$. Si $AB = \sqrt{3}$, quel est le périmètre du quadrilatère $ABDE$?

(A) $1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
 (B) $2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$
 (C) $1 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
 (D) $2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
 (E) $2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$



20. Un cylindre contient de l'eau. Un cône solide, ayant la même hauteur et un rayon équivalent à la moitié de celui du cylindre, est immergé dans l'eau jusqu'à ce que sa face circulaire repose à plat sur la base circulaire du cylindre, comme dans la figure ci-contre. Après l'immersion du cône, la profondeur de l'eau est égale à la moitié de la hauteur du cylindre. Si le cône est ensuite retiré, quelle sera la fraction de la hauteur du cylindre que représente la profondeur de l'eau ?



(Le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est égal à $\pi r^2 h$ et le volume d'un cône de rayon r et de hauteur h est égal à $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.)

- (A) $\frac{3}{16}$ (B) $\frac{41}{96}$ (C) $\frac{5}{16}$
 (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{7}{16}$

Partie C (8 points par bonne réponse).

Chaque bonne réponse est un entier de 0 à 99 inclusivement.

Une réponse à un chiffre (p. ex. « 7 ») doit être codée avec un zéro non significatif (« 07 »).

Remarque: L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 12345 est 45. L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 6307 est 7, que l'on code 07.

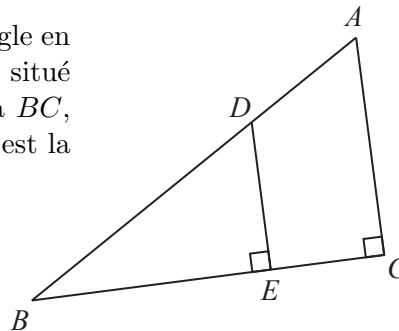
21. Les neuf cases d'un tableau 3×3 contiennent initialement des 0. On modifie le tableau selon les étapes suivantes :

- (i) ajouter 1 aux trois nombres de n'importe quelle rangée ;
 (ii) ajouter 2 aux trois nombres de n'importe quelle colonne.

Après avoir appliqué l'étape (i) a fois et l'étape (ii) b fois, on obtient le tableau dans la figure ci-contre. Quelle est la valeur de $a + b$?

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 1 | 5 |
| 9 | 3 | 7 |
| 8 | 2 | 6 |

22. On choisit quatre entiers distincts a , b , c et d parmi les entiers de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Quelle est la plus grande valeur possible de $ac + bd - ad - bc$?
23. Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en C . Le point D est situé sur AB et le point E est situé sur BC de manière que DE soit perpendiculaire à BC , $BE = AC$, $BD = 120$ et $DE + BC = 288$. Quelle est la longueur de DE ?



24. L'entier N est le plus petit entier strictement positif qui est un multiple de 2024, a plus de 100 diviseurs positifs (y compris 1 et N) et moins de 110 diviseurs positifs (y compris 1 et N). Quelle est la somme des chiffres de N ?
25. Une suite de 11 nombres réels positifs, soit $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}$, satisfait $a_1 = 4$ et $a_{11} = 1024$ et $a_n + a_{n-1} = \frac{5}{2}\sqrt{a_n \cdot a_{n-1}}$ pour tout entier n ($2 \leq n \leq 11$). Par exemple, lorsque $n = 7$, $a_7 + a_6 = \frac{5}{2}\sqrt{a_7 \cdot a_6}$. Il y a S telles suites. Quels sont les deux chiffres les plus à droite de S ?



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2024! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- plus d'information à propos du concours Hypatie
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
- utiliser notre générateur de séries de problèmes gratuit pour créer des séries de problèmes afin de soutenir et d'enrichir le programme scolaire; veuillez noter que cette ressource n'est disponible qu'en anglais
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours