Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2023

le mercredi 5 avril 2023
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 6 avril 2023
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Léon se repose pendant 30 s entre les 1^er^ et 2^e^ sprints, les 2^e^ et 3^e^ sprints et ainsi de suite jusqu'au 23^e^ et 24^e^ sprints inclus.
Donc, Léon se repose pendant 30 s à 23 reprises.

(b) Puisque Léon sprinte à une vitesse constante de 8 m/s, alors il lui faut $\dfrac{200 \text{ m}}{8 \text{ m/s}} = 25$ s pour parcourir 200 m.
Étant donné qu'il a fait un sprint de 200 m vingt-quatre fois, cela lui a pris 24×25 s $= 600$ s.
Puisque Léon se repose pendant 30 s à 23 reprises, il se reponse pendant 23×30 s $= 690$ s.
Donc, Léon s'est entraîné pendant 600 s $+$ 690 s $=$ 1290 s lundi.

(c) *Solution 1*
Mardi, chacun des sprints de 240 m lui prend $\dfrac{240 \text{ m}}{8 \text{ m/s}} = 30$ s. Donc, Léon sprinte pendant 20×30 s $= 600$ s.
Léon se repose 19 fois. Il se repose donc pendant 19×30 s $= 570$ s en tout.
Donc, le temps total pendant lequel il s'est entraîné mardi est égal à 600 s$+$570 s $=$ 1170 s.
Donc, l'entraînement de mardi a duré $1290 - 1170 = 120$ secondes de moins par rapport à celui de lundi.

Solution 2
Lundi, Léon parcourt 24×200 m $= 4800$ m en sprintant.
Mardi, Léon parcourt également 20×240 m $= 4800$ m en sprintant.
Puisque Léon sprinte à la même vitesse constante les deux jours, alors il sprinte pendant le même montant de temps chaque jour.
Donc, la différence entre le temps total pendant lequel il s'est entraîné lundi et le temps total pendant lequel il s'est entraîné mardi est égale à la différence entre le temps pendant lequel il s'est reposé lundi et le temps pendant lequel il s'est reposé mardi.
Lundi, Léon se repose pendant 30 s à 23 reprises. Mardi, Léon se répose pendant 30 s à 19 reprises.
Comme il se repose 4 fois de plus le lundi que le mardi, alors l'entraînement de mardi a duré $4 \times 30 = 120$ secondes de moins par rapport à celui de lundi.

2. (a) La 5^e^ rangée comprend les entiers 17, 19, 21, 23 et 25. Ces entiers ont une moyenne de $\dfrac{17 + 19 + 21 + 23 + 25}{5} = 21$.

(b) La rangée dans laquelle l'entier 145 parait à la 1^re^ position doit suivre directement la rangée dans laquelle l'entier 144 parait à la dernière position.
Puisque $12^2 = 144$, alors l'entier 144 parait à la dernière position de la 12^e^ rangée. Donc, l'entier 145 parait à la 1^re^ position de la 13^e^ rangée.

(c) Puisque $40^2 = 1600$, alors l'entier qui parait à la dernière position (soit la 40^e^ position) de la 40^e^ rangée est 1600.
Lorsque l'on se déplace de droite à gauche le long de chaque rangée, les entiers diminuent de 2. Donc, l'entier qui parait à la 39^e^ position de la 40^e^ rangée est $1600 - 2 = 1598$.

(d) *Solution 1*
Lorsque l'on se déplace de gauche à droite le long d'une rangée, les entiers augmentent d'une constante (soit 2). Donc, la moyenne des entiers dans une rangée est égale à la moyenne des entiers aux première et dernière positions de la rangée. Pouvez-vous voir pourquoi cela est vrai ?
Puisque $15^2 = 225$, alors l'entier qui parait à la dernière position de la 15^e^ rangée est 225, d'où celui qui parait à la 1^re^ position de la 16^e^ rangée est donc 226.
Puisque $16^2 = 256$, alors l'entier qui parait à la dernière position de la 16^e^ rangée est 256.

Donc, les entiers de la 16^{e} rangée ont une moyenne de $\dfrac{226+256}{2} = 241$, d'où $r = 16$.

Solution 2

Puisque $15^2 = 225$, alors chacun des entiers dans les 15 premières rangées est au plus 225. Cela signifie que la moyenne des entiers dans chaque rangée jusqu'à la 15^{e} rangée incluse doit être inférieure ou égale à 225.

Puisque $16^2 = 256$, chacun des entiers dans les rangées après la 16^{e} rangée est supérieur à 256. Cela signifie que chaque rangée après la 16^{e} contient des entiers dont la moyenne est supérieure à 256.

Cela signifie que r doit être supérieur à 15 et inférieur à 17. Autrement dit, $r = 16$.

On peut vérifier que les entiers de la 16^{e} rangée sont

$$226, 228, 230, 232, 234, 236, 238, 240, 242, 244, 246, 248, 250, 252, 254, 256$$

et que ces derniers ont effectivement une moyenne de 241.

3. (a) L'entier strictement positif de cinq chiffres $4B5B2$ est divisible par 3 uniquement lorsque la somme de ses chiffres, soit $4 + B + 5 + B + 2 = 2B + 11$, est divisible par 3.

Dans le tableau ci-dessous, on vérifie les valeurs possibles de B :

Valeur de B	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Valeur de $2B + 11$	13	15	17	19	21	23	25	27	29

On voit donc que $2B + 11$ est divisible par 3 lorsque $B = 2$, $B = 5$ et $B = 8$.

(b) *Solution 1*

Puisque $ABABA$ n'est pas divisible par 3, alors $A + B + A + B + A = 3A + 2B$ n'est pas divisible par 3.

Puisque $3A$ est divisible par 3 pour toutes les valeurs possibles du chiffre A, alors si $2B$ était également divisible par 3 (c'est-à-dire si $B = 3$, 6, 9), il en résulterait que $3A + 2B$ serait divisible par 3.

Puisque $3A + 2B$ n'est pas divisible par 3, alors $2B$ ne peut être divisible par 3, d'où les valeurs possibles de B sont donc 1, 2, 4, 5, 7, 8.

Puisque $ABABA$ est divisible par 4, alors l'entier strictement positif de deux chiffres BA est divisible par 4.

Pour chacune des valeurs possibles de B (soit $B = 1$, 2, 4, 5, 7, 8) on détermine les valeurs de A telles que BA soit divisible par 4 .

Par exemple, lorsque $B = 1$, l'entier strictement positif de deux chiffres $1A$ est divisible par 4 uniquement lorsque $A = 2$ ou $A = 6$.

Dans le tableau ci-dessous, on détermine le restant des paires possibles A et B.

B	A	(A,B)
1	2, 6	$(2,1)$, $(6,1)$
2	4, 8	$(4,2)$, $(8,2)$
4	4, 8	$(4,4)$, $(8,4)$
5	2, 6	$(2,5)$, $(6,5)$
7	2, 6	$(2,7)$, $(6,7)$
8	4, 8	$(4,8)$, $(8,8)$

Donc, il y a 12 paires différentes de chiffres non nuls A et B qui sont possibles.

Solution 2
Puisque $ABABA$ est divisible par 4, alors il est également divisible par 2. L'entier $ABABA$ est donc pair.
Puisque $ABABA$ est pair, alors son chiffre des unités est pair, d'où les valeurs possibles de A sont donc 2, 4, 6, 8.
Puisque $ABABA$ est divisible par 4, alors l'entier strictement positif de deux chiffres BA est divisible par 4.
Pour chacune des valeurs possibles de A (soit $A = 2$, 4, 6, 8) on détermine les valeurs de B telles que BA soit divisible par 4 .
Par exemple, lorsque $A = 2$, l'entier strictement positif de deux chiffres $B2$ est divisible par 4 uniquement lorsque $B = 1$, 3, 5, 7 et 9.
Lorsque $A = 4$, l'entier strictement positif de deux chiffres $B4$ est divisible par 4 uniquement lorsque $B = 2$, 4, 6 et 8.
Lorsque $A = 6$, l'entier strictement positif de deux chiffres $B6$ est divisible par 4 uniquement lorsque $B = 1$, 3, 5, 7 et 9.
Lorsque $A = 8$, l'entier strictement positif de deux chiffres $B8$ est divisible par 4 uniquement lorsque $B = 2$, 4, 6 et 8.
Enfin, considérons le fait que $ABABA$ n'est pas divisible par 3.
Comme on l'a démontré dans la Solution 1, les valeurs possibles de B sont 1, 2, 4, 5, 7, 8 ($B \neq 3, 6, 9$).
Lorsqu'on prend cela et les valeurs précédentes de A et B en compte, on a que les couples différents de chiffres non nuls (A, B) qui sont possibles sont $(2, 1)$, $(2, 5)$, $(2, 7)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$, $(4, 8)$, $(6, 1)$, $(6, 5)$, $(6, 7)$, $(8, 2)$, $(8, 4)$ et $(8, 8)$.
Donc, il y a 12 paires différentes de chiffres non nuls A et B qui sont possibles.

(c) Si $t = ACA2 \times BAC$ est divisible par 15, alors t est divisible à la fois par 5 et par 3.
Un entier est divisible par 5 uniquement lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5. Donc, $ACA2$ n'est pas divisible par 5.
Puisque $t = ACA2 \times BAC$ est divisible par 5 et que $ACA2$ ne l'est pas, alors BAC doit être divisible par 5, ce qui signifie que $C = 5$ (puisque C est un chiffre non nul).
Lorsqu'on reporte $C = 5$ dans l'équation, on obtient $t = A5A2 \times BA5$.

Puisque t est divisible par 3 et que 3 est un nombre premier, alors au moins l'un de $A5A2$ ou $BA5$ est divisible par 3. Donc, $A + 5 + A + 2 = 2A + 7$ est divisible par 3, ou $B + A + 5$ est divisible par 3, ou les deux sont divisibles par 3.

Puisque t n'est pas divisible par 12 mais que t est divisible par 3, alors t n'est pas divisible par 4.
L'entier de trois chiffres $BA5$ n'est pas divisible par 2 (et n'est donc pas divisible par 4) pour toutes les valeurs possibles de A. Donc, l'entier de quatre chiffres $A5A2$ n'est pas divisible par 4.
L'entier de quatre chiffres $A5A2$ est divisible par 4 lorsque l'entier de deux chiffres $A2$ est divisible par 4 ou lorsque $A = 1$, 3, 5, 7 ou 9. Donc, les valeurs possibles de A sont 2, 4, 6 et 8.

Enfin, on retourne à la condition selon laquelle $t = A5A2 \times BA5$ est divisible par 3, ce qui signifie qu'au moins l'un de $2A + 7$ ou $B + A + 5$ est divisible par 3.

Lorsque $A = 2$, alors $2A + 7 = 11$, ce qui n'est pas divisible par 3. Donc, $B + A + 5 = B + 7$ doit être divisible par 3. $B + 7$ est divisible par 3 uniquement lorsque $B = 2$, 5 ou 8. Donc, il y a 3 triplets A, B, C qui sont possibles dans ce cas.

Lorsque $A = 4$, alors $2A + 7 = 15$, ce qui est divisible par 3, d'où on a donc que B peut être égal à n'importe quel chiffre non nul. Donc, il y a 9 triplets A, B, C qui sont possibles dans ce cas.

Lorsque $A = 6$, alors $2A+7 = 19$, ce qui n'est pas divisible par 3. Donc, $B+A+5 = B+11$ doit être divisible par 3. $B+11$ est divisible par 3 uniquement lorsque $B = 1$, 4 ou 7. Donc, il y a 3 triplets A, B, C qui sont possibles dans ce cas.

Lorsque $A = 8$, alors $2A+7 = 23$, ce qui n'est pas divisible par 3. Donc, $B+A+5 = B+13$ doit être divisible par 3. $B+13$ est divisible par 3 uniquement lorsque $B = 2$, 5 ou 8. Donc, il y a 3 triplets A, B, C qui sont possibles dans ce cas.

Donc, il y a $3 + 9 + 3 + 3 = 18$ triplets différentes de chiffres non nuls A, B, C qui sont possibles.

4. (a) L'ordinateur 1 est un ordinateur impair. Donc, chaque cordon reliant l'ordinateur 1 à un autre ordinateur impair est rouge.
Donc, il existe un chemin composé entièrement de cordons rouges reliant l'ordinateur 1 et chacun des ordinateurs impairs de 3 à 49 inclus.
Chaque cordon qui relie un ordinateur impair et un ordinateur pair est bleu.
L'ordinateur 1 est un ordinateur impair. Donc, tout chemin possible reliant l'ordinateur 1 à un ordinateur pair doit comprendre au moins un cordon bleu.
Il n'existe donc aucun chemin composé entièrement de cordons rouges reliant l'ordinateur 1 à un ordinateur pair.
Il y a 24 nombres impairs entre 2 et 50. Donc, il y a 24 valeurs possibles de n.

(b) Deux entiers sont dits de *parité différente* si l'un des entiers est pair tandis que l'autre est impair.
En revanche, deux entiers sont dits de *même parité* s'ils sont tous deux pairs ou tous deux impairs.
Il y a deux cas à considérer : A et B sont soit de parité différente, soit de même parité.
Si A et B sont de parité différente, alors le cordon reliant l'ordinateur A et l'ordinateur B est bleu. Il existe donc un chemin composé entièrement de cordons bleus qui les relie.
Si A et B sont de même parité, alors on choisit un nombre C qui a une parité différente de celle de A et B.
Le cordon reliant l'ordinateur A et l'ordinateur C est bleu et le cordon reliant l'ordinateur C et l'ordinateur B est également bleu. Donc, le chemin qui mène de l'ordinateur A à l'ordinateur C et ensuite à l'ordinateur B est composé entièrement de cordons bleus.
Donc, pour toute paire d'ordinateurs distincts, soit l'ordinateur A et l'ordinateur B, il y a toujours un chemin composé entièrement de cordons bleus qui les relie.

(c) Si le cordon reliant l'ordinateur 13 et l'ordinateur 14 est jaune, alors il y a un chemin composé entièrement de cordons jaunes qui les relie. Donc, supposons que le cordon qui les relie est vert.
Puisqu'il n'existe aucun chemin composé entièrement de cordons verts reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 50, alors le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 50 doit être jaune.
De plus, puisqu'il n'existe aucun chemin composé entièrement de cordons verts reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 50, alors au moins une des affirmations suivantes doit être vraie :

(i) le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 13 est jaune ou

(ii) le cordon reliant l'ordinateur 13 et l'ordinateur 50 est jaune,

sinon le chemin reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 13 serait composé entièrement de cordons verts.
De même, puisqu'il n'existe aucun chemin composé entièrement de cordons verts reliant

l'ordinateur 1 et l'ordinateur 50, alors au moins une des affirmations suivantes doit être vraie :

(iii) le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 14 est jaune ou

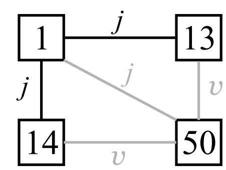
(iv) le cordon reliant l'ordinateur 14 et l'ordinateur 50 est jaune,

sinon le chemin reliant l'ordinateur 1 à l'ordinateur 14 à l'ordinateur 50 serait composé entièrement de cordons verts.

Puisqu'au moins l'un de (i) ou (ii) doit être vrai et qu'au moins l'un de (iii) ou (iv) doit être vrai, alors il y a 4 cas à considérer.

Cas A : (i) et (iii) sont vrais

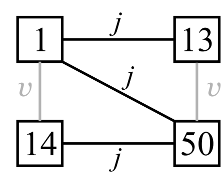
Dans ce cas, le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 13 est jaune et le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 14 est jaune. Donc, le chemin reliant l'ordinateur 13 à l'ordinateur 1 à l'ordinateur 14 est composé entièrement de cordons jaunes.



Cas B : (i) et (iv) sont vrais

Dans ce cas, le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 13 est jaune et le cordon reliant l'ordinateur 14 et l'ordinateur 50 est jaune.

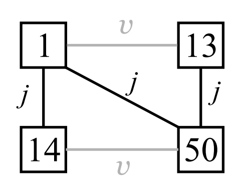
Rappelons-nous que le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 50 est également jaune. Donc, le chemin reliant l'ordinateur 13 à l'ordinateur 1 à l'ordinateur 50 à l'ordinateur 14 est composé entièrement de cordons jaunes.



Cas C : (ii) et (iii) sont vrais

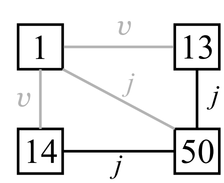
Dans ce cas, le cordon reliant l'ordinateur 13 et l'ordinateur 50 est jaune et le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 14 est jaune.

Puisque le cordon reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 50 est également jaune, alors le chemin reliant l'ordinateur 13 à l'ordinateur 50 à l'ordinateur 1 à l'ordinateur 14 est composé entièrement de cordons jaunes.



Cas D : (ii) et (iv) sont vrais

Dans ce cas, le cordon reliant l'ordinateur 13 et l'ordinateur 50 est jaune et le cordon reliant l'ordinateur 14 et l'ordinateur 50 est jaune. Donc, le chemin reliant l'ordinateur 13 à l'ordinateur 50 à l'ordinateur 14 est composé entièrement de cordons jaunes.



Donc, s'il n'existe aucun chemin composé entièrement de cordons verts reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 50, alors il y aura toujours un chemin composé entièrement de cordons jaunes reliant l'ordinateur 13 et l'ordinateur 14.