Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer

(9^e année – Sec. III)

le mercredi 5 avril 2023
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 6 avril 2023
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

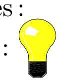
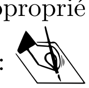
Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. À la séance d'entraînement du lundi, Léon fait un sprint de 200 m vingt-quatre fois. À la séance d'entraînement du mardi, il fait un sprint de 240 m vingt fois. Les deux jours, il se repose pendant 30 s entre chaque paire de sprints consécutifs. Léon sprinte à une vitesse constante de 8 m/s.

   (a) Le lundi, combien de fois Léon se repose-t-il pendant 30 s entre deux sprints consécutifs ?

   (b) Déterminer le temps total pendant lequel Léon s'est entraîné lundi. Autrement dit, déterminer le nombre total de secondes qui se sont écoulées entre le début de son premier sprint et la fin de son dernier sprint, incluant les repos.

   (c) Déterminer combien de secondes de moins l'entraînement de mardi durera par rapport à celui de lundi.

2. On considère la disposition suivante d'entiers strictement positifs :

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 2 & 4 & & \\ 5 & 7 & 9 & \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ & \vdots & & \end{array}$$

La 1^re^ rangée comprend l'entier impair 1 et la 2^e^ rangée comprend les deux entiers pairs 2 et 4. Pour $k \geq 2$, la $k^{\text{ième}}$ rangée

- commence par l'entier qui est un de plus que le dernier entier de la rangée précédente,
- comprend, en ordre croissant, k entiers impairs consécutifs lorsque k est impair et
- comprend, en ordre croissant, k entiers pairs consécutifs lorsque k est pair.

Il est utile de remarquer que l'entier dans la $k^{\text{ième}}$ rangée et la $k^{\text{ième}}$ position (soit la dernière position de la $k^{\text{ième}}$ rangée) est k^2. Par exemple, $4^2 = 16$ et l'entier à la 4^{e} position de la 4^{e} rangée est 16.

(a) Quelle est la moyenne des entiers de la 5^{e} rangée ?

(b) Dans quelle rangée l'entier 145 parait-il à la 1^{re} position ?

(c) Déterminer la rangée et la position dans lesquelles parait l'entier 1598.

(d) Les entiers de la rangée r ont une moyenne de 241. Déterminer la valeur de r.

3. Un entier strictement positif est divisible par 3 uniquement lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Un entier strictement positif est divisible par 4 uniquement lorsque l'entier strictement positif formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4. Par exemple :

- 3816 est divisible par 3, puisque $3 + 8 + 1 + 6 = 18$ et que 18 est divisible par 3 ;
- 3817 n'est pas divisible par 3, puisque $3 + 8 + 1 + 7 = 19$ et que 19 n'est pas divisible par 3 ;
- 3816 est divisible par 4, puisque 16 est divisible par 4 ;
- 3817 n'est pas divisible par 4, puisque 17 n'est pas divisible par 4.

Dans chaque partie qui suit, A, B et C sont des chiffres non nuls (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9) et ne sont pas nécessairement distincts.

(a) L'entier $4B5B2$ est un entier strictement positif de cinq chiffres divisible par 3. Quelles sont les valeurs possibles du chiffre non nul B ?

(b) L'entier $ABABA$ est un entier strictement positif de cinq chiffres divisible par 4 et non divisible par 3. Déterminer le nombre de paires différentes de chiffres non nuls A et B qui sont possibles.

(c) Un entier strictement positif t est égal au produit de l'entier strictement positif de quatre chiffres $ACA2$ et de l'entier strictement positif de trois chiffres BAC. Autrement dit, $t = ACA2 \times BAC$. Si t est divisible par 15 et non divisible par 12, déterminer le nombre de triplets différents de chiffres non nuls A, B, C qui sont possibles.

4. Un laboratoire dispose de 50 ordinateurs numérotés de 1 à 50. Chaque paire d'ordinateurs est reliée à l'autre par un cordon. Les cordons sont colorés selon les règles suivantes :

- Si les numéros des deux ordinateurs sont tous deux pairs ou tous deux impairs, le cordon qui les relie est rouge.
- Sinon, le cordon qui les relie est bleu.

Un *chemin* est une suite de cordons dans lesquelles les données peuvent voyager pour aller d'un ordinateur à un autre dans le laboratoire. Par exemple, à partir de l'ordinateur 5, les données peuvent emprunter le chemin qui mène directement à l'ordinateur 12 ou elles peuvent emprunter le chemin qui mène d'abord à l'ordinateur 15 et ensuite à l'ordinateur 12.

(a) Il existe un chemin composé entièrement de cordons rouges reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur n. Si $n \neq 1$, combien y a-t-il de valeurs possibles de n ?

(b) Démontrer que pour toute paire d'ordinateurs distincts, soit l'ordinateur A et l'ordinateur B, il y a toujours un chemin composé entièrement de cordons bleus qui les relie.

(c) Chaque cordon rouge et chaque cordon bleu est retiré et remplacé au hasard par un cordon vert ou un cordon jaune. Danielle remarque qu'il n'existe aucun chemin composé entièrement de cordons verts reliant l'ordinateur 1 et l'ordinateur 50. Démontrer qu'il y aura toujours un chemin composé entièrement de cordons jaunes reliant l'ordinateur 13 et l'ordinateur 14.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fryer de 2023! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2023.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2023/2024
— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11e et 12e année
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les concours