Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2023

(11e année – Secondaire V)

le mercredi 22 février 2023
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 23 février 2023
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a $0{,}3 + 0{,}03 = 0{,}33$.

RÉPONSE : (D)

2. Puisque $3 + x = 5$, alors $x = 2$.
Puisque $-3 + y = 5$, alors $y = 8$.
Donc, $x + y = 10$.
On aurait également pu additionner les 2 équations initiales pour obtenir $(3+x)+(-3+y) = 5+5$ ou $x + y = 10$.

RÉPONSE : (E)

3. Lorsque $x = 2$, on obtient $2x^2 + 3x^2 = 5x^2 = 5 \cdot 2^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

RÉPONSE : (E)

4. Il y a 60 minutes dans une heure et 24 heures dans une journée.
Il y a donc $60 \cdot 24 = 1440$ minutes dans une journée.
Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine, le nombre de minutes dans une semaine est égal à $7 \cdot 1440 = 10\,080$.
Parmi les choix de réponse, le choix (C) 10 000 est celui qui est le plus près de 10 080.

RÉPONSE : (C)

5. En utilisant la règle donnée, l'entier que l'on obtiendra comme sortie est $2 \times 0 + 2 \times 3 = 0 + 6 = 6$.

RÉPONSE : (D)

6. Puisqu'il y a 3 portes et 2 choix de couleurs pour chaque porte, il y a $2^3 = 8$ façons de peindre les trois portes.
Soit « N » une porte peinte en noir et « B » une porte peinte en bleu. On peut peindre les trois portes des huit façons différentes suivantes : NNN, NNB, NBN, NBB, BNN, BNB, BBN et BBB.

RÉPONSE : (A)

7. Comme les boîtes de jus sont vendues en paquets de 3, Daniel doit acheter au moins 6 paquets de jus pour les 17 joueurs. (Si Daniel achetait 5 paquets de jus, il aurait 15 boîtes de jus (ce qui n'est pas suffisant) tandis que s'il achetait 6 paquets de jus, il aurait 18 boîtes de jus.)
Comme les pommes sont vendues en sacs de 5, Daniel doit acheter au moins 4 sacs de pommes. (Remarquons que $3 \cdot 5 = 15$ n'est pas un nombre suffisant de pommes tandis que $4 \cdot 5 = 20$ l'est.)
Donc, le montant minimum que Daniel doit dépenser est égal à $6 \cdot 2{,}00\ \$ + 4 \cdot 4{,}00\ \$ = 28{,}00\ \$$.

RÉPONSE : (B)

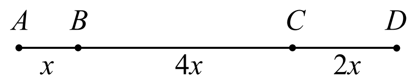
8. Puisque Bri roule à 15 km/h, elle terminera le trajet de 30 km en $\dfrac{30 \text{ km}}{15 \text{ km/h}} = 2$ h.
Puisqu'Ari roule à 20 km/h, il terminera le trajet de 30 km en $\dfrac{30 \text{ km}}{20 \text{ km/h}} = 1{,}5$ h.
Donc, Bri terminera le trajet 0,5 h après qu'Ari l'ait terminé, ce qui correspond à 30 minutes.

RÉPONSE : (C)

9. Au total, les trois réservoirs contiennent $3600 \text{ L} + 1600 \text{ L} + 3800 \text{ L} = 9000 \text{ L}$.
Si l'eau est répartie également entre les trois réservoirs, chacun des réservoirs contiendra $\frac{1}{3} \cdot 9000 \text{ L} = 3000 \text{ L}$.
Donc, il faut pomper et transvaser $3600 \text{ L} - 3000 \text{ L} = 600 \text{ L}$ d'eau du réservoir A au réservoir B.
(Remarquons qu'il faut également pomper et transvaser 800 L d'eau du réservoir C au réservoir B afin que chaque réservoir contienne le même volume d'eau.)

RÉPONSE : (B)

10. Supposons que $AB = x$ avec $x > 0$.
Puisque $AB : AC = 1 : 5$, alors $AC = 5x$.
Cela signifie que $BC = AC - AB = 5x - x = 4x$.
Puisque $BC : CD = 2 : 1$ et que $BC = 4x$, alors $CD = 2x$.



Donc, $AB : CD = x : 2x = 1 : 2$.

RÉPONSE : (B)

11. Supposons que Mathilde avait m pièces au début du mois dernier et que Salah avait s pièces au début du mois dernier.
D'après l'énoncé, 100 est 25 % de plus que m. Donc, $100 = 1{,}25m$, d'où on a donc $m = \dfrac{100}{1{,}25} = 80$.
D'après l'énoncé, 100 est 20 % de moins que s. Donc, $100 = 0{,}80s$, d'où on a donc $s = \dfrac{100}{0{,}80} = 125$.
Donc, au début du mois dernier, Mathilde et Salah avaient $m+s = 80+125 = 205$ pièces en tout.

RÉPONSE : (E)

12. L'aire d'un rectangle ayant une longueur de 8 cm et une largeur de π cm est égale à 8π cm^2.
Soit r cm le rayon du demi-cercle.
L'aire d'un cercle de rayon r cm est égale à πr^2 cm^2. Donc, l'aire du demi-cercle est égale à $\frac{1}{2}\pi r^2$ cm^2.
Puisque le rectangle et le demi-cercle ont la même aire, alors $\frac{1}{2}\pi r^2 = 8\pi$, d'où $\pi r^2 = 16\pi$ ou $r^2 = 16$.
Puisque $r > 0$, alors $r = 4$. Donc, le demi-cercle a un rayon de 4 cm.

RÉPONSE : (B)

13. Les deux termes du membre de gauche de l'équation $a(x+2) + b(x+2) = 60$ ont $x+2$ comme facteur commun.
Donc, on peut récrire l'équation de la manière suivante : $(a+b)(x+2) = 60$.
Lorsque $a+b = 12$, on obtient $12 \cdot (x+2) = 60$, d'où $x+2 = 5$ ou $x = 3$.

RÉPONSE : (A)

14. La droite ayant une pente de 2 et une ordonnée à l'origine de 6 a pour équation $y = 2x + 6$.
Pour déterminer son abscisse à l'origine, on pose $y = 0$ et on obtient $0 = 2x + 6$ ou $2x = -6$, d'où $x = -3$.
La droite ayant une pente de -4 et une ordonnée à l'origine de 6 a pour équation $y = -4x + 6$.
Pour déterminer son abscisse à l'origine, on pose $y = 0$ et on obtient $0 = -4x + 6$ ou $4x = 6$, d'où $x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.
Donc, les abscisses à l'origine des droites ont pour coordonnées $(-3, 0)$ et $(\frac{3}{2}, 0)$ et la distance entre ces deux points est égale à $3 + \frac{3}{2}$, ce qui est égal à $\frac{6}{2} + \frac{3}{2}$ ou $\frac{9}{2}$.

RÉPONSE : (E)

15. Le 1^{er} terme de la suite est 16.
Puisque 16 est pair, le 2^{e} terme de la suite est $\frac{1}{2} \cdot 16 + 1 = 9$.
Puisque 9 est impair, le 3^{e} terme de la suite est $\frac{1}{2}(9+1) = 5$.
Puisque 5 est impair, le 4^{e} terme de la suite est $\frac{1}{2}(5+1) = 3$.
Puisque 3 est impair, le 5^{e} terme de la suite est $\frac{1}{2}(3+1) = 2$.
Puisque 2 est pair, le 6^{e} terme de la suite est $\frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$.
L'étape précédente démontre que lorsqu'un terme est égal à 2, le terme suivant sera également égal à 2.
Donc, les termes restants de cette suite sont tous 2.
Donc, le 101^{e} terme de la suite est 2.

Réponse : (B)

16. Dans l'arrangement donné, on voit quatorze 0 et onze 1.
Lauriane peut choisir n'importe quelle rangée ou colonne pour retourner les 5 cartes. De plus, la rangée ou la colonne que Lauriane choisit peut contenir entre 0 et 5 des cartes portant des nombres différents sur les deux faces.
Sur les 5 rangées et 5 colonnes, 3 contiennent quatre 0 et un 1, 2 contiennent trois 0 et deux 1 et 5 contiennent deux 0 et trois 1.
Cela signifie que le nombre de zéros ne peut pas diminuer de plus de 4 lorsque les cartes d'une rangé ou d'une colonne sont retournées, puisque le seul moyen pour que le nombre de zéros diminue de 5 est que les cinq cartes de la rangée ou de la colonne portent toutes un 0 sur la face supérieure et un 1 sur la face inférieure.
Par conséquent, il ne peut y avoir $14 - 5 = 9$ zéros après que Lauriane ait retourné les cartes, ce qui signifie que le rapport ne peut pas être 9 : 16, soit le choix (C).

Par souci d'exhaustivité, on va démontrer que les autres rapports sont effectivement possibles.
Si Lauriane choisit la première colonne et si cette colonne comprend 3 cartes qui portent chacune un 1 sur les deux faces et 2 cartes qui portent chacune un 0 sur une face (sur la face supérieure) et un 1 sur l'autre face, alors en retournant les cartes de cette colonne on obtient $14 - 2 = 12$ zéros et $11 + 2 = 13$ uns.
Donc, le rapport 12 : 13 (choix (A)) est possible.
Si Lauriane choisit la cinquième colonne et si cette colonne comprend une carte qui porte un 1 sur les deux faces et 4 cartes qui portent chacune un 0 sur une face (sur la face supérieure) et un 1 sur l'autre face, alors en retournant les cartes de cette colonne on obtient $14 - 4 = 10$ zéros et $11 + 4 = 15$ uns.
Donc, le rapport 10 : 15 = 2 : 3 (choix (B)) est possible.
Si Lauriane choisit la première colonne et si chacune des quatre premières cartes de cette colonne porte le même nombre sur les deux faces et que la dernière carte de la colonne porte un 1 sur la face supérieure et un 0 sur la face inférieure, alors en retournant les cartes de cette colonne on obtient $14 + 1 = 15$ zéros et $11 - 1 = 10$ uns.
Donc, le rapport 15 : 10 = 3 : 2 (choix (D)) est possible.
Si Lauriane choisit la première colonne et si les première, quatrième et cinquième cartes de cette colonne portent chacune les mêmes nombres sur les deux faces et que les deuxième et troisième cartes portent chacune un 1 sur la face supérieure et un 0 sur la face inférieure, alors en retournant les cartes de cette colonne, on obtient $14 + 2 = 16$ zéros $11 - 2 = 9$ uns.
Donc, le rapport 16 : 9 (choix (E)) est possible.
Donc, le rapport 9 : 16, soit le choix (C), est le seul rapport impossible.

Réponse : (C)

17. On détermine d'abord les facteurs premiers de 1184 :

$$1184 = 2 \cdot 592 = 2^2 \cdot 296 = 2^3 \cdot 148 = 2^4 \cdot 74 = 2^5 \cdot 37$$

Les diviseurs positifs de 1184 peuvent uniquement contenir 2 et 37 comme facteurs premiers et ne peuvent contenir plus de 5 facteurs 2 ou 1 facteur 37.
Donc, les diviseurs positifs sont

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 74, 148, 296, 592, 1184$$

(Parmi ces diviseurs, les cinq premiers ont 0 facteur 37 et 0 à 5 facteurs 2, tandis que les cinq derniers ont 1 facteur 37 et 0 à 5 facteurs 2.)
La somme, S, de ces diviseurs est égale à

$$\begin{aligned} S &= 1+2+4+8+16+32+37+74+148+296+592+1184 \\ &= (1+2+4+8+16+32)+37\cdot(1+2+4+8+16+32) \\ &= (1+2+4+8+16+32)\cdot(1+37) \\ &= 63 \cdot 38 \\ &= 2394 \end{aligned}$$

Réponse : (A)

18. Chaque groupe de quatre sauts amène la sauterelle à se déplacer de 1 cm vers l'est et de 3 cm vers l'ouest, ce qui équivaut à 2 cm vers l'ouest, et de 2 cm vers le nord et de 4 cm vers le sud, ce qui équivaut à 2 cm vers le sud.
En d'autres termes, on peut voir que chaque groupe de quatre sauts, en commençant par le premier, entraîne un déplacement net de 2 cm vers l'ouest et de 2 cm vers le sud.
Remarquons que $158 = 2 \times 79$.
Donc, après 79 groupes de quatre sauts, la sauterelle se trouve à $79 \times 2 = 158$ cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale.
La sauterelle a fait $4 \times 79 = 316$ sauts jusqu'à présent.
Après le 317e saut (1 cm vers l'est), la sauterelle se trouve à 157 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale.
Après le 318e saut (2 cm vers le nord), la sauterelle se trouve à 157 cm à l'ouest et 156 cm au sud de sa position initiale.
Après le 319e saut (3 cm vers l'ouest), la sauterelle se trouve à 160 cm à l'ouest et 156 cm au sud de sa position initiale.
Après le 320e saut (4 cm vers le sud), la sauterelle se trouve à 160 cm à l'ouest et 160 cm au sud de sa position initiale.
Après le 321e saut (1 cm vers l'est), la sauterelle se trouve à 159 cm à l'ouest et 160 cm au sud de sa position initiale.
Après le 322e saut (2 cm vers le nord), la sauterelle se trouve à 159 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale.
Après le 323e saut (3 cm vers l'ouest), la sauterelle se trouve à 162 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale, ce qui correspond à la position souhaitée.
À mesure que la sauterelle continue de sauter, chacune de ses positions sera toujours située au moins 160 cm au sud de sa position initiale. On voit donc que ceci est la seule fois qu'elle se trouvera à cette position.
Donc, $n = 323$. La somme des carrés des chiffres de n est égale à $3^2 + 2^2 + 3^2 = 9 + 4 + 9 = 22$.

Réponse : (A)

19. Si x et y vérifient $2x^2 + 8y = 26$, alors $x^2 + 4y = 13$, d'où $4y = 13 - x^2$.
Puisque x et y sont des entiers, alors $4y$ est pair, d'où $13 - x^2$ est donc pair, ce qui signifie que x est impair.
Puisque x est impair, on peut écrire $x = 2q + 1$, q étant un entier quelconque.
Donc, $4y = 13 - x^2 = 13 - (2q + 1)^2 = 13 - (4q^2 + 4q + 1) = 12 - 4q^2 - 4q$.
Puisque $4y = 12 - 4q^2 - 4q$, alors $y = 3 - q^2 - q$.
Donc, $x - y = (2q + 1) - (3 - q^2 - q) = q^2 + 3q - 2$.
Lorsque $q = 4$, on obtient $x - y = q^2 + 3q - 2 = 4^2 + 3 \cdot 4 - 2 = 26$.
Remarquons également que lorsque $q = 4$, $x = 2q + 1 = 9$ et $y = 3 - q^2 - q = -17$, ce qui vérifie $x^2 + 4y = 13$.
On peut aussi vérifier qu'il n'existe aucun entier q tel que $q^2 + 3q - 2$ soit égal à l'un de -8, -16, 22 ou 30. (Par exemple, si $q^2 + 3q - 2 = -16$, alors $q^2 + 3q + 14 = 0$ et cette équation quadratique n'admet aucune solution entière)

Réponse : (B)

20. Si $n!$ se termine par exactement m zéros, alors $n!$ est divisibe par 10^m mais n'est pas divisible par 10^{m+1}. (Si $n!$ était divisible par 10^{m+1}, alors $n!$ se terminerait par au moins $m + 1$ zéros.)
Dans ce cas, on peut écrire $n! = 10^m \cdot q$, q n'étant pas divisible par 10. Cela signifie que q n'est pas divisible par 2 ou n'est pas divisible par 5 ou les deux.
Puisque $2 < 5$, alors lorsque $n \geq 2$, le produit $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n - 1) \cdot n$ comprend plus de multiples de 2 que de multiples de 5 parmi les n entiers dans son produit. Donc, $n!$ comprend plus de facteurs 2 que de facteurs 5.
Cela signifie que si $n!$ se termine par exactement m zéros, alors $n! = 10^m \cdot q$, q n'étant pas divisible par 5. Donc, $n!$ se termine par un nombre de zéros qui est exactement égal au nombre de facteurs 5 dans la factorisation première de $n!$.
On remarque également qu'à mesure que n augmente, le nombre de zéros à la fin de $n!$ ne diminue jamais puisque le nombre de facteurs 5 demeure constant ou augmente à mesure que n augmente.
Pour $n = 1$ à $n = 4$, le produit $n!$ comprend 0 multiple de 5. Donc, $n!$ se termine par 0 zéros.
Pour $n = 5$ à $n = 9$, le produit $n!$ comprend 1 multiple de 5 (à savoir 5), donc $n!$ se termine par 1 zéro.
Pour $n = 10$ à $n = 14$, le produit $n!$ comprend 2 multiples de 5 (à savoir 5 et 10), donc $n!$ se termine par 2 zéros.
Pour $n = 15$ à $n = 19$, le produit $n!$ comprend 3 multiples de 5 (à savoir 5, 10 et 15), donc $n!$ se termine par 3 zéros.
Pour $n = 20$ à $n = 24$, le produit $n!$ comprend 4 multiples de 5 (à savoir 5, 10, 15 et 20), donc $n!$ se termine par 4 zéros.
Pour $n = 25$ à $n = 29$, le produit $n!$ comprend 5 multiples de 5 (à savoir 5, 10, 15, 20 et 25) et comprend 6 facteurs 5 (puisque 25 contribue 2 facteurs 5), donc $n!$ se termine par 6 zéros.
Pour $n = 30$ à $n = 34$, $n!$ se termine par 7 zéros. Pour $n = 35$ à $n = 39$, $n!$ se termine par 8 zéros.
Pour $n = 40$ à $n = 44$, $n!$ se termine par 9 zéros. Pour $n = 45$ à $n = 49$, $n!$ se termine par 10 zéros.
Pour $n = 50$ à $n = 54$, $n!$ se termine par 12 zéros, puisque le produit $n!$ comprend 10 multiples de 5, dont deux comprennent 2 facteurs 5.
Pour $n = 55$ à $n = 74$, $n!$ se termine par 13, 14, 15, 16 zéros à mesure que n augmente.
Pour $n = 75$ à $n = 79$, $n!$ se termine par 18 zéros.
Pour $n = 80$ à $n = 99$, $n!$ se termine par 19, 20, 21, 22 zéros à mesure que n augmente.
Pour $n = 100$ à $n = 104$, $n!$ se termine par 24 zéros.
Pour $n = 105$ à $n = 124$, $n!$ se termine par 25, 26, 27, 28 zéros.

Pour $n = 125$, $n!$ se termine par 31 zéros puisque 125 comprend 3 facteurs 5, donc 125! se termine par 3 zéros de plus que 124!.
Parmi les entiers m avec $1 \leq m \leq 30$, il n'y a aucune valeur de n pour laquelle $n!$ se termine par m zéros lorsque $m = 5, 11, 17, 23, 29, 30$. Cela signifie que $30 - 6 = 24$ des valeurs de m sont possibles.

Réponse : (D)

21. D'après les données de l'énoncé, si a et b se trouvent dans deux carrés consécutifs, alors $a + b$ se trouve dans le cercle qui les sépare.
Comme tous les entiers que l'on peut utiliser sont positifs, alors $a + b$ est supérieur à a et à b.
Cela signifie que le plus grand entier de la liste, soit 13, ne peut être ni x ni y (et ne peut être placé dans un carré) car l'entier dans le cercle à côté doit être inférieur à 13 (qui est le plus grand entier de la liste) et ne peut donc pas être égal à la somme de 13 et d'un autre entier positif de la liste.
Donc, pour que la valeur de $x + y$ soit aussi grande que possible, il faudrait que x et y soient égaux à 10 et 11 dans un certain ordre. Or, on est confronté au même problème : il n'y a qu'un seul entier de la liste supérieur à 10 et à 11 (soit 13) qui pourrait aller dans les cercles à côté de 10 et 11 ; cependant, puisque chaque entier ne peut être utilisé qu'une seule fois, alors les cercles à côté de 10 et 11 ne peuvent contenir tous deux l'entier 13.
Donc, la plus grande valeur possible de $x + y$ se produit lorsque $x = 9$ et $y = 11$ (ou lorsque $y = 9$ et $x = 11$).
Dans ce cas, on pourrait avoir $13 = 11 + 2$ et $10 = 9 + 1$, d'où on aurait la liste partielle suivante :

11	13	2				1	10	9

Afin de remplir les conditions du problème, les entiers restants (4, 5 et 6) peuvent être placés dans les cercles et les carrés de la manière suivante :

11	13	2	6	4	5	1	10	9

On voit donc que la plus grande valeur possible de $x + y$ est 20.

Réponse : 20

22. *Solution 1*
On manipule l'équation donnée pour obtenir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+y} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\
xy &= (x+y)y - (x+y)x \qquad \text{(en multipliant par } xy(x+y)\text{)} \\
xy &= xy + y^2 - x^2 - xy \\
x^2 + xy - y^2 &= 0 \\
\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} - 1 &= 0 \qquad \text{(en divisant par } y^2\text{, dont la valeur est non-nulle)} \\
t^2 + t - 1 &= 0
\end{aligned}$$

t étant égal à $\frac{x}{y}$.

Puisque $x > 0$ et $y > 0$, alors $t > 0$. À l'aide de la formule quadratique,

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Puisque $t > 0$, alors $\dfrac{x}{y} = t = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Donc,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 \\
&= (\sqrt{5})^2 \\
&= 5
\end{aligned}$$

Solution 2
Puisque $x,y > 0$, les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+y} &= \frac{1}{x}-\frac{1}{y} \\
1 &= \frac{x+y}{x}-\frac{x+y}{y} \\
1 &= \frac{x}{x}+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}-\frac{y}{y} \\
1 &= 1+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}-1 \\
1 &= \frac{y}{x}-\frac{x}{y} \\
-1 &= \frac{x}{y}-\frac{y}{x}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2 &= \frac{x^2}{y^2}+2\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2} \\
&= \frac{x^2}{y^2}+2+\frac{y^2}{x^2} \\
&= \frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2}+4 \\
&= \frac{x^2}{y^2}-2\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}+4 \\
&= \left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+4 \\
&= (-1)^2+4 \\
&= 5
\end{aligned}$$

Réponse : 05

23. On exprime un entier n ($100 \leq n \leq 999$) sous la forme $n = 100a + 10b + c$, a, b et c étant des chiffres.
Autrement dit, n a a pour chiffre des centaines, b pour chiffre des dizaines et c pour chiffre des unités.
Pour chaque tel entier n, on a $s(n) = a + b + c$.
On veut compter le nombre de tels entiers n avec $7 \leq a + b + c \leq 11$.
Lorsque $100 \leq n \leq 999$, on sait que $1 \leq a \leq 9$, que $0 \leq b \leq 9$ et que $0 \leq c \leq 9$.

On compte d'abord le nombre de n avec $a + b + c = 7$.
Si $a = 1$, alors $b + c = 6$ et il y a 7 paires de valeurs possibles de b et de c. Ces paires sont $(b, c) = (0, 6)$,$(1, 5)$,$(2, 4)$,$(3, 3)$,$(4, 2)$,$(5, 1)$,$(6, 0)$.
Si $a = 2$, alors $b + c = 5$ et il y a 6 paires de valeurs possibles de b et de c.
De même, lorsque $a = 3, 4, 5, 6, 7$, il y a respectivement 5, 4, 3, 2, 1 paires de valeurs possibles de b et c.
Autrement dit, le nombre d'entiers n avec $a + b + c = 7$ est égal à $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$.

En utilisant le même processus, on peut déterminer que le nombre de tels entiers n avec $s(n) = 8$ est égal à $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ et que le nombre de tels entiers n avec $s(n) = 9$ est égal à $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$.

On doit être plus prudents en comptant le nombre d'entiers n avec $s(n) = 10$ et $s(n) = 11$, car aucun des chiffres ne peut être supérieur à 9.
Considérons les entiers n avec $a + b + c = 10$.
Si $a = 1$, alors $b + c = 9$ et il y a 10 paires de valeurs possibles de b et de c. Ces paires sont $(b, c) = (0, 9)$,$(1, 8)$,$\ldots$,$(8, 1)$,$(9, 0)$.
Si $a = 2$, alors $b + c = 8$ et il y a 9 paires de valeurs possibles de b et de c.
À mesure que a augmente de 1 à 9, on trouve qu'il y a $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 54$ tels entiers n.
(Remarquons que lorsque $a = 9$, on a $b+c = 1$ et il y a 2 paires de valeurs possibles de b et de c.)
Enfin, on considère les entiers n avec $a + b + c = 11$.
Si $a = 1$, alors $b + c = 10$ et il y a 9 paires de valeurs possibles de b et de c. Ces paires sont $(b, c) = (1, 9)$,$(2, 8)$,$\ldots$,$(8, 2)$,$(9, 1)$.
Si $a = 2$, alors $b + c = 9$ et il y a 10 paires de valeurs possibles de b et de c.
Si $a = 3$, alors $b + c = 8$ et il y a 9 paires de valeurs possibles de b et de c.
En continuant de cette façon, on trouve qu'il y a $9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 61$ tels entiers n.

Ayant considéré tous les cas, on voit que le nombre de tels entiers n est égal à

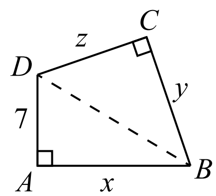
$$S = 28 + 36 + 45 + 54 + 61 = 224$$

Donc, l'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de S est 24.

Réponse : 24

24. *Solution 1*

Supposons que $AB = x$, que $BC = y$, que $CD = z$ et que $DA = 7$. (On peut attribuer cette longueur de 7 à n'importe lequel des côtés de $ABCD$.)
On sait que x, y et z sont des entiers.
Puisque $ABCD$ a un périmètre de 224, on a $x + y + z + 7 = 224$ ou $x + y + z = 217$.
On joint B et D.



L'aire de $ABCD$ est égale à la somme des aires des triangles DAB et BCD.
Puisque ces triangles sont rectangles, alors $2205 = \frac{1}{2} \cdot DA \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD$.
On multiplie par 2 pour obtenir $4410 = 7x + yz$.
Enfin, remarquons également qu'en utilisant deux fois le théorème de Pythagore, on obtient

$$DA^2 + AB^2 = DB^2 = BC^2 + CD^2$$

d'où $49 + x^2 = y^2 + z^2$.
On doit déterminer la valeur de $S = x^2 + y^2 + z^2 + 7^2$.
Puisque $x + y + z = 217$, alors $x = 217 - y - z$.
Lorsqu'on reporte $x = 217 - y - z$ dans l'équation $4410 = 7x + yz$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
4410 &= 7x + yz \\
4410 &= 7(217 - y - z) + yz \\
4410 &= 1519 - 7y - 7z + yz \\
2891 &= yz - 7y - 7z \\
2891 &= y(z - 7) - 7z \\
2891 &= y(z - 7) - 7z + 49 - 49 \\
2940 &= y(z - 7) - 7(z - 7) \\
2940 &= (y - 7)(z - 7)
\end{aligned}$$

Donc, $y - 7$ et $z - 7$ forment une paire de diviseurs complémentaires positifs de 2940. (Puisque leur produit est positif, ils sont soit tous deux positifs, soit tous deux négatifs. Puisque y et z sont positifs, si $y - 7$ et $z - 7$ sont tous deux négatifs, on aurait $0 < y < 7$ et $0 < z < 7$, ce qui n'est pas assez grand pour que l'on puisse obtenir une valeur admissible de x.)
On remarque que $y + z = 217 - x$, donc $y + z < 217$, ce qui signifie que $(y - 7) + (z - 7) < 203$.
Puisque

$$2940 = 20 \cdot 147 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7^2$$

alors les diviseurs de 2940 sont les entiers strictement positifs de la forme $2^r \cdot 3^s \cdot 5^t \cdot 7^u$ avec $0 \le r \le 2$, $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 1$ et $0 \le u \le 2$.
Donc, ces diviseurs sont

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 28, 30, 35, 42, 49,$$

$$60, 70, 84, 98, 105, 140, 147, 196, 210, 245, 294, 420, 490, 588, 735, 980, 1470, 2940$$

On peut supprimer de cette liste les paires de diviseurs complémentaires dont la somme est supérieure à 203. On a donc la liste :

$$20, 21, 28, 30, 35, 42, 49, 60, 70, 84, 98, 105, 140, 147$$

Cela signifie qu'il reste 7 paires de diviseurs à considérer. On peut supposer que $y < z$. En utilisant le fait que $x + y + z = 217$, on peut isoler x dans chaque cas. Ces valeurs de x, y et z satisferont les conditions du périmètre et de l'aire, mais on doit vérifier la condition pythagoricienne. On dresse le tableau suivant :

$y - 7$	$z - 7$	y	z	$x = 217 - y - z$	$y^2 + z^2 - x^2$
20	147	27	154	36	23 149
21	140	28	147	42	20 629
28	105	35	112	70	8869
30	98	37	105	75	6769
35	84	42	91	84	2989
42	70	49	77	91	49
49	60	56	67	94	−1211

Puisqu'il faut que $y^2 + z^2 - x^2 = 49$, alors on doit avoir $y = 49$ et $z = 77$ et $x = 91$.
Cela signifie que $S = x^2 + y^2 + z^2 + 7^2 = 91^2 + 49^2 + 77^2 + 7^2 = 16\,660$.
Donc, l'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de S est 60.

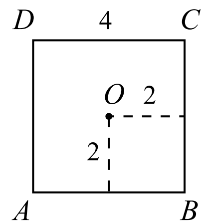
Solution 2
Comme dans la Solution 1, on a $x + y + z = 217$ et $4410 = 7x + yz$ et $x^2 + 49 = y^2 + z^2$.
En réécrivant et en élevant au carré la première équation et en utilisant les deuxième et troisième équations, on obtient

$$\begin{aligned}
y + z &= 217 - x \\
y^2 + z^2 + 2yz &= x^2 - 434x + 217^2 \\
(x^2 + 49) + 2(4410 - 7x) &= x^2 - 434x + 217^2 \\
49 + 8820 - 14x &= -434x + 217^2 \\
420x &= 217^2 - 8820 - 49 \\
420x &= 38\,220 \\
x &= 91
\end{aligned}$$

Donc, $y + z = 217 - 91 = 126$ et $yz = 4410 - 7 \cdot 91 = 3773$.
On a donc, $y(126 - y) = 3773$, d'où $y^2 - 126y + 3773 = 0$ ou $(y - 49)(y - 77) = 0$.
Donc, $y = 49$ (ce qui signifie que $z = 77$) ou $y = 77$ (ce qui signifie que $z = 49$).
On remarque que $y^2 + z^2 = 49^2 + 77^2 = 8330 = 91^2 + 7^2 = x^2 + 7^2$ ce qui vérifie l'équation restante.
Cela signifie que $S = x^2 + y^2 + z^2 + 7^2 = 91^2 + 49^2 + 77^2 + 7^2 = 16\,660$.
Donc, l'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de S est 60.

Réponse : 60

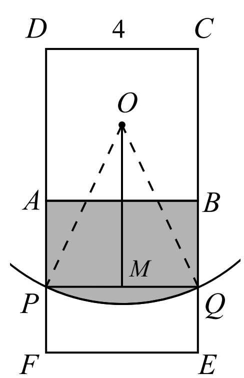
25. Toutes longueurs et aires présentées dans cette solution sont, respectivement, en mètres et en mètres carrés. Par souci de simplicité, les unités ont été omises.
Soit $ABCD$ la face carrée supérieure du cube. Soit O le centre de $ABCD$.
Puisque les arêtes du cube ont une longueur de 4, alors les côtés du carré $ABCD$ ont également une longueur de 4.
Cela signifie que la distance entre le centre O et chacun des côtés du carré $ABCD$ est égale à 2. Donc, la distance entre le centre O et chacun des sommets du carré $ABCD$ est égale à $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$.



Les sommets de $ABCD$ sont les points les plus éloignés de O.
Puisque $\sqrt{8}\approx 2{,}8$, alors l'extrémité libre de la corde de longueur 5 peut atteindre tout point situé sur $ABCD$, dont l'aire est égale à 16.

Ensuite, la corde ne peut pas atteindre la face inférieure du cube car la distance la plus courte le long de la surface du cube de O à la face inférieure est égale à 6. Or, la corde a une longueur de 5. On va confirmer cela d'une autre manière sous peu.
De plus, comme la corde est ancrée au centre de la face supérieure et que toutes les faces sont carrées, la corde peut atteindre la même surface sur chacune des quatre faces latérales.
Soit a l'aire de l'une des faces latérales que la corde peut atteindre. Puisque la corde peut atteindre tout point situé sur la face supérieure du cube, alors l'aire totale que la corde peut atteindre est égale à $16+4a$.
On doit donc déterminer la valeur de a.

Soit le carré $ABEF$ l'une des faces latérales du cube. Comme on l'a indiqué précédemment, les carrés qui forment les faces du cube ont des côtés de longueur 4. Considérons la figure créée par le carré $ABCD$ et le carré $ABEF$. On peut considérer celle-ci comme étant un « dépliement » d'une partie du cube.



Lorsque la corde est tendue, son extrémité libre trace sur le carré $ABEF$ un arc de cercle de centre O et de rayon 5.
Remarquons que sur le carré $ABEF$, le point le plus bas que la corde peut atteindre est situé à une distance de 3 du côté AB puisque le point O où la corde est ancrée est situé à une distance de 2 du côté AB. Cela confirme que la corde ne peut pas atteindre la face inférieure du cube

puisqu'il faudrait qu'elle puisse traverser le côté FE pour ce faire.
Supposons que cet arc coupe AF en P et coupe BE en Q.
On doit déterminer la partie de l'aire du carré $ABEF$ qui est située au-dessus de l'arc PQ (soit la région ombrée). Comme on l'a indiqué précédemment, a représente l'aire de cette région.

On va calculer la valeur de a en déterminant l'aire du rectangle $ABQP$ et en y ajoutant l'aire de la région comprise entre l'arc de cercle et le segment de droite PQ.
On va calculer l'aire de la région comprise entre l'arc de cercle et le segment de droite PQ en déterminant l'aire du secteur OPQ et en soustrayant l'aire du triangle OPQ.
On remarque que $PQ = 4$. Soit M le milieu de PQ ; donc $PM = MQ = 2$.
Puisque le triangle OPQ est isocèle avec $OP = OQ = 5$, alors OM est perpendiculaire à PQ.
D'après le théorème de Pythagore, $OM = \sqrt{OP^2 - PM^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$.
Donc, l'aire du triangle OPQ est égale à $\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{21} = 2\sqrt{21}$.
De plus, puisque la distance entre O et AB est égale à 2 et que $OM = \sqrt{21}$, alors la hauteur du rectangle $ABQP$ est égale à $\sqrt{21} - 2$.
Donc, l'aire du rectangle $ABQP$ est égale à $4 \cdot (\sqrt{21} - 2) = 4\sqrt{21} - 8$.
Pour déterminer l'aire du secteur OPQ, on remarque que l'aire d'un cercle de rayon 5 est égale à $\pi \cdot 5^2$. Donc, l'aire du secteur est égale à $\dfrac{\angle POQ}{360^\circ} \cdot 25\pi$.

Puisque le triangle POM est rectangle en M, alors $\sin(\angle POM) = \dfrac{PM}{OP}$.
Donc, $\angle POQ = 2\angle POM = 2\sin^{-1}(2/5)$.
Donc, l'aire du secteur est égale à $\dfrac{2\sin^{-1}(2/5)}{360^\circ} \cdot 25\pi$.

On a donc

$$\begin{aligned}
100A &= 100(16 + 4a) \\
&= 1600 + 400a \\
&= 1600 + 400\left((4\sqrt{21} - 8) + \frac{2\sin^{-1}(2/5)}{360^\circ} \cdot 25\pi - 2\sqrt{21}\right) \\
&= 1600 + 400\left(2\sqrt{21} - 8 + \frac{2\sin^{-1}(2/5)}{360^\circ} \cdot 25\pi\right) \\
&= 800\sqrt{21} - 1600 + \frac{800\sin^{-1}(2/5) \cdot 25\pi}{360^\circ} \\
&\approx 6181{,}229
\end{aligned}$$

(Remarquons que l'on n'a pas utilisé les approximations décimales avant la dernière étape afin d'éviter toute erreur d'arrondi.)
Donc, l'entier le plus près de $100A$ est 6181, dont les deux chiffres les plus à droite sont 81.

Réponse : 81