



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le mardi 12 avril 2022

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 13 avril 2022

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 75 minutes

©2022 University of Waterloo

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4

Chaque question vaut 10 points.

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 2 ou 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.



ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

Renseignement utile :

Il vous sera peut-être utile de savoir que $2^n \geq n+1$ pour tous les entiers strictement positifs n .

1. Un *hexagone régulier* est un polygone qui a six côtés de même longueur et six angles intérieurs de même mesure. Dans la Figure 1, l'hexagone régulier $ABCDEF$ a des côtés de longueur $2x$ et ses sommets sont situés sur le cercle de centre O . Les diagonales AD , BE et CF divisent $ABCDEF$ en six triangles équilatéraux isométriques.



(a) Exprimer le rayon du cercle en fonction de x .



(b) Soit M le milieu du côté AB , comme dans la Figure 2 ci-dessous. Exprimer la longueur de OM en fonction de x .



(c) Exprimer l'aire de l'hexagone $ABCDEF$ en fonction de x .



(d) Dans la Figure 3, la région située à l'intérieur du cercle et à l'extérieur de l'hexagone $ABCDEF$ est ombrée. Cette région ombrée a une aire de 123. Déterminer la valeur de x au dixième près.

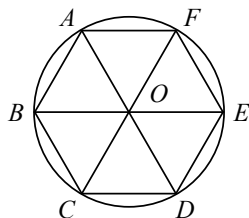


Figure 1

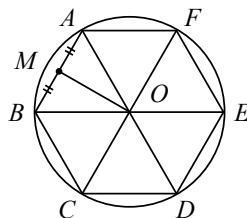


Figure 2

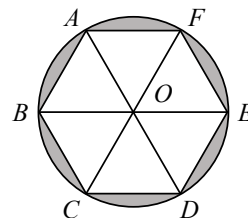


Figure 3

2. Avec 1 kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement 24 mini muffins et 2 grands muffins. Avec 2 kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement 36 mini muffins et 6 grands muffins.



(a) Avec 2 kg de pâte à muffins, on peut également préparer exactement 48 mini muffins et n grands muffins. Quelle est la valeur de n ?



(b) Avec x kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement 84 mini muffins et 10 grands muffins. Quelle est la valeur de x ?



(c) Déterminer le nombre de mini muffins que l'on peut préparer avec la même quantité de pâte que celle requise pour la préparation de 7 grands muffins.

3. On forme une suite de la manière suivante :

- un nombre réel est choisi comme premier nombre de la suite,
- chacun des nombres suivants de la suite est généré en appliquant une fonction au nombre précédent de la suite.

Par exemple, si le premier nombre d'une suite est 1 et que les nombres suivants sont générés par la fonction $x^2 - 5$, alors les trois premiers nombres de la suite sont 1, -4 et 11 puisque $1^2 - 5 = -4$ et $(-4)^2 - 5 = 11$.



(a) Le premier nombre d'une suite est 3 et cette suite est générée par la fonction $x^2 - 3x + 1$. Quels sont les quatre premiers nombres de la suite ?



(b) Le nombre 7 est le troisième nombre d'une suite générée par la fonction $x^2 - 4x + 7$. Quels sont tous les nombres possibles qui pourraient occuper la première position de la suite ?



(c) Le premier nombre d'une suite est c et la suite est générée par la fonction $x^2 - 7x - 48$. Si tous les nombres de la suite sont égaux à c , déterminer toutes les valeurs possibles de c .



(d) Une suite générée par la fonction $x^2 - 12x + 39$ alterne entre deux nombres différents. Autrement dit, la suite est a, b, a, b, a, b, \dots , où $a \neq b$. Déterminer toutes les valeurs possibles de a .

4. On peut écrire chaque entier $N > 1$ sous la forme $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_k^{a_k}$, k étant un entier strictement positif, $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_k$ étant des nombres premiers et $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ étant des entiers strictement positifs. Par exemple, $1400 = 2^3 5^2 7^1$.

Soit $f(N)$ le nombre de diviseurs positifs de N . On sait que

$$f(N) = (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \cdots (1 + a_k)$$



(a) Combien de diviseurs positifs le nombre 240 admet-il ? Autrement dit, quelle est la valeur de $f(240)$?



(b) Un entier $N > 1$ est *refactorisable* s'il admet $f(N)$ comme diviseur. Par exemple, 6 et 8 admettent tous deux 4 diviseurs positifs. Donc, puisque 8 admet 4 comme diviseur, alors 8 est refactorisable. Or, puisque 6 n'admet pas 4 comme diviseur, alors 6 n'est pas refactorisable. Déterminer tous les nombres refactorisables N tels que $f(N) = 6$.



(c) Déterminer le plus petit nombre refactorisable N tel que $f(N) = 256$.



(d) Démontrer que pour tout entier $m > 1$, il existe un nombre refactorisable N tel que $f(N) = m$.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2022! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2022.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2022/2023
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours