Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2022

le mardi 12 avril 2022
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 13 avril 2022
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Chaque lancer réussi ajoute 7 points au pointage de Sébastien. Donc, 4 lancers réussis ajoutent $7 \times 4 = 28$ points à son pointage.
Pour chaque lancer raté, 3 points sont soustraits du pointage de Sébastien. Donc, 2 lancers ratés enlèvent $3 \times 2 = 6$ points de son pointage.
Étant donné qu'un joueur commence toujours avec un pointage de 0, alors le pointage de Sébastien après ses 6 lancers est égal à $28 - 6 = 22$.

(b) *Solution 1*
Après exactement h lancers réussis et 6 lancers ratés, le pointage de Suzanne peut être représenté par l'expression $7 \times h - 3 \times 6$ ou $7h - 18$.
Après ses lancers, Suzanne a un pointage de 59. Donc, $7h - 18 = 59$.
On a donc $7h = 59 + 18$ ou $7h = 77$, soit $h = 11$.

Solution 2
Les 6 lancers ratés de Suzanne enlèvent $3 \times 6 = 18$ points de son pointage.
Puisqu'elle a 59 points, alors Suzanne a dû obtenir $59 + 18 = 77$ points à partir de lancers réussis.
Puisque chaque lancer réussi vaut 7 points, alors la valeur de h est égale à $77 \div 7 = 11$.

(c) *Solution 1*
On commence en faisant une estimation initiale de la valeur de m, puis on ajuste systématiquement cette valeur à la hausse ou à la baisse selon les besoins.
Par exemple, si l'on commence avec $m = 3$, alors le nombre de lancers réussis est égal à $20 - 3 = 17$ et le pointage de Souresh est égal à $7 \times 17 - 3 \times 3 = 119 - 9 = 110$.
Puisque ce pointage est supérieur à 105, alors la valeur de m est supérieure à 3 (plus on rate de lancers, moins on en réussit, ce qui résulte en un pointage plus bas).
Lorsque $m = 4$, le nombre de lancers réussis est égal à $20-4 = 16$ et Souresh a un pointage de $7 \times 16 - 3 \times 4 = 112 - 12 = 100$.
Puisque ce pointage est supérieur à 85 et inférieur à 105, alors 4 est une valeur possible de m.
Lorsque $m = 5$, le nombre de lancers réussis est égal à $20-5 = 15$ et Souresh a un pointage de $7 \times 15 - 3 \times 5 = 105 - 15 = 90$.
Ce pointage est également supérieur à 85 et inférieur à 105, alors 5 est une valeur possible de m.
Lorsque $m = 6$, le nombre de lancers réussis est égal à 14 et Souresh a un pointage de $7 \times 14 - 3 \times 6 = 98 - 18 = 80$.
Puisque ce pointage est inférieur à 85, alors 6 n'est pas une valeur possible de m.
Si l'on augmente le nombre de lancers ratés, le pointage de Souresh continuera à diminuer.
Donc, les seules valeurs possibles sont $m = 4$ et $m = 5$.

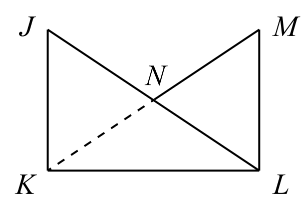
Solution 2
Puisque Souresh effectue 20 lancers dont m sont des lancers ratés, alors les $20 - m$ lancers restants sont des lancers réussis.
Après exactement $20 - m$ lancers réussis et m lancers ratés, le pointage de Souresh peut être représenté par l'expression $7(20 - m) - 3m$ ou $140 - 10m$.
Puisque le pointage de Souresh $(140-10m)$ est supérieur à 85, alors $10m$ doit être inférieur à 55 (remarquons que $140 - 85 = 55$), d'où $m < \frac{55}{10}$.
Puisque $\frac{55}{10} = 5\frac{1}{2}$ et que m est un entier strictement positif, alors $m \leq 5$.
Puisque le pointage de Souresh est inférieur à 105, alors $10m$ doit être supérieur à 35 (remarquons que $140 - 105 = 35$), d'où $m > \frac{35}{10}$.
Puisque $\frac{35}{10} = 3\frac{1}{2}$ et que m est un entier strictement positif, alors $m \geq 4$.

Donc, m est un entier strictement positif et $4 \leq m \leq 5$, d'où $m = 4$ ou $m = 5$.
(On peut vérifier que le pointage de Souresh est égal à $7 \times 16 - 3 \times 4 = 112 - 12 = 100$ lorsque $m = 4$ et à $7 \times 15 - 3 \times 5 = 105 - 15 = 90$ lorsque $m = 5$.)

2. (a) *Solution 1*
L'aire de $ABGH$ est égale à la somme des aires de $ABCD$ et $EFGH$ moins l'aire du chevauchement $EFCD$ puisqu'elle est prise en compte deux fois dans cette somme.
Donc, l'aire de $ABGH$ est égale à $(13 \text{ cm}^2) + (13 \text{ cm}^2) - (5 \text{ cm}^2) = 21 \text{ cm}^2$.

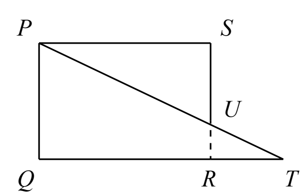
Solution 2
L'aire de $ABCD$ est égale à 13 cm^2 et à la somme des aires de $ABFE$ et $EFCD$.
Puisque l'aire de $EFCD$ est égale à 5 cm^2, alors l'aire de $ABFE$ est égale à $(13 \text{ cm}^2) - (5 \text{ cm}^2) = 8 \text{ cm}^2$.
L'aire de $ABGH$ est égale à la somme des aires de $ABFE$ et $EFGH$, soit $(8 \text{ cm}^2) + (13 \text{ cm}^2) = 21 \text{ cm}^2$.

(b) Soit $x \text{ cm}^2$ l'aire de la région où les deux triangles se chevauchent (soit le triangle KLN).
L'aire du triangle KLN est égale à la moitié de l'aire du triangle JKL. Donc, le triangle JKN a également une aire de $x \text{ cm}^2$.
Puisque les triangles JKL et MLK sont identiques, alors le triangle MLN a également une aire de $x \text{ cm}^2$.
Donc, la figure $JKLMN$ a une aire de $3x \text{ cm}^2$. On a donc $3x = 48$ ou $x = 16$.



Puisque le triangle JKL est rectangle en K, alors son aire est égale à $\frac{1}{2}(JK)(KL)$.
Puisque l'aire du triangle JKL est égale à $2x \text{ cm}^2 = 32 \text{ cm}^2$, alors $\frac{1}{2}(JK)(KL) = 32 \text{ cm}^2$ ou $\frac{1}{2}(6 \text{ cm})(KL) = 32 \text{ cm}^2$, d'où $KL = \frac{32}{3}$ cm.

(c) On utilise la notation $|\triangle URT|$ pour représenter l'aire du triangle URT et on représente les aires des autres formes de la même manière.
Puisque $|PQRS| + |\triangle URT| = |PQTUS|$, alors



$$|\triangle URT| = |PQTUS| - |PQRS| = 117 \text{ cm}^2 - 108 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2.$$

Puisque $|PQRU| + |\triangle URT| = |\triangle PQT|$, alors

$$|PQRU| = |\triangle PQT| - |\triangle URT| = 81 \text{ cm}^2 - 9 \text{ cm}^2 = 72 \text{ cm}^2.$$

3. (a) La factorisation première de $675 = 3^3 \times 5^2$. Donc, 675 admet $4 \times 3 = 12$ diviseurs positifs.

(b) L'entier strictement positif n admet $4 + 14 = 18$ diviseurs positifs en tout.
Puisque n admet les diviseurs positifs $9 = 3^2$, 11, $15 = 3 \times 5$ et $25 = 5^2$, alors la factorisation première de n doit comprendre au moins deux facteurs 3, au moins deux facteurs 5 et au moins un facteur 11.
En d'autres termes, n doit admettre $3^2 \times 5^2 \times 11$ comme diviseur.
Supposons que $n = 3^2 \times 5^2 \times 11$. Alors n admet $3 \times 3 \times 2 = 18$ diviseurs positifs, comme souhaité.
Si la factorisation première de n contenait plus de facteurs, alors n admettrait plus de 18 diviseurs positifs.
Donc, $n = 3^2 \times 5^2 \times 11 = 2475$.

(c) Supposons que m est un entier strictement positif inférieur à 500 qui admet exactement $2+10=12$ diviseurs positifs.
Puisque m admet les diviseurs positifs 2 et $9=3^2$, alors la factorisation première de m doit comprendre au moins un facteur 2 et au moins deux facteurs 3.
En d'autres termes, m doit admettre 2×3^2 comme diviseur.
Pour commencer, supposons que m a exactement 2 facteurs premiers distincts.
C'est-à-dire qu'on suppose que $m=2^a\times 3^b$, a et b étant des entiers tels que $a\geq 1$ et $b\geq 2$.
Dans ce cas, m admet $(a+1)(b+1)=12$ diviseurs positifs.
Puisque $a\geq 1$ et $b\geq 2$, alors $a+1\geq 2$ et $b+1\geq 3$.
À partir de ces restrictions, il y a exactement trois possibilités pour lesquelles $(a+1)(b+1)=12$. Ces dernières sont

$$a+1=2 \text{ et } b+1=6,\ \text{d'où } a=1 \text{ et } b=5$$

$$a+1=3 \text{ et } b+1=4,\ \text{d'où } a=2 \text{ et } b=3$$

$$a+1=4 \text{ et } b+1=3,\ \text{d'où } a=3 \text{ et } b=2$$

Si $a=1$ et $b=5$, alors $m=2\times 3^5=486$.
Si $a=2$ et $b=3$, alors $m=2^2\times 3^3=108$.
Si $a=3$ et $b=2$, alors $m=2^3\times 3^2=72$.
Puisque chacune de ces valeurs est inférieure à 500, alors il y a 3 entiers strictement positifs dans ce cas qui satisfont aux conditions données.

Ensuite, supposons que m a exactement 3 facteurs premiers distincts.
C'est-à-dire qu'on suppose que $m=2^a\times 3^b\times p^c$, p étant un nombre premier qui n'est pas égal à 2 ou à 3, et a, b et c étant des entiers tels que $a\geq 1$, $b\geq 2$ et $c\geq 1$.
Si $a=1$, $b=2$ et $c=1$ (les valeurs minimales possibles de a,b,c), alors $m=2\times 3^2\times p$.
Dans ce cas, m admet $2\times 3\times 2=12$ diviseurs positifs, comme souhaité.
Le fait d'augmenter a, b ou c augmente le nombre de diviseurs positifs. Donc, $a=1$, $b=2$ et $c=1$ est la seule possibilité pour laquelle m admet 12 diviseurs positifs et a 3 facteurs premiers distincts.
Si $a=1$, $b=2$ et $c=1$, alors $m=2\times 3^2\times p=18p$.
Quels nombres premiers $p>3$ sont tels que $18p$ soit inférieur à 500 ?
Puisque $18p<500$, alors $p<\frac{500}{18}$, d'où $p\leq 27$.
Les nombres premiers de cet intervalle sont 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23. Dans ce cas, on a donc 7 entiers strictement positifs qui satisfont aux conditions données.

Enfin, supposons que m a exactement 4 facteurs premiers distincts.
C'est-à-dire qu'on suppose que $m=2^a\times 3^b\times p^c\times q^d$, p et q étant des nombres premiers différents qui ne sont pas égaux à 2 ou à 3, et a, b, c, d étant des entiers tels que $a\geq 1$, $b\geq 2$, $c\geq 1$ et $d\geq 1$.
Si $a=1$, $b=2$, $c=1$ et $d=1$ (les valeurs minimales possibles de a,b,c,d), alors m admet $2\times 3\times 2\times 2=24$ diviseurs positifs, ce qui est une contradiction.
Le fait d'augmenter a, b, c ou d, ou le fait d'augmenter le nombre de facteurs premiers distincts augmente le nombre de diviseurs positifs. Donc, il n'y a pas de possibilités telles que m admette 12 diviseurs positifs et ait 4 facteurs premiers distincts ou plus.

Donc, il y a $3+7=10$ entiers strictement positifs inférieurs à 500 qui admettent 2, 9 et exactement dix autres entiers comme diviseurs positifs.

4. (a) Puisque l'un des bocaux contient 0 haricot, alors tous les haricots doivent être retirés du bocal qui en contient 40.

Aux tours de François, le nombre de haricots qu'il retire est de 1, 3, 4, 1, 3, 4, ... et ainsi de suite.
Après les 5 tours de François, il aura retiré un total de $1 + 3 + 4 + 1 + 3 = 12$ haricots.
Aux tours de Sarah, le nombre de haricots qu'elle retire est de 2, 5, 2, 5, 2, 5, ... et ainsi de suite.
Après les 5 tours de Sarah, elle aura retiré un total de $2 + 5 + 2 + 5 + 2 = 16$ haricots.
Après un total de 10 tours, le nombre total de haricots retirés par François et Sarah est inférieur à 40. On comprend donc que chacun des deux joueurs a pu retirer le nombre de haricots requis à chacun de ses 5 tours.
Après un total de 10 tours, le nombre total de haricots restant dans les deux bocaux est égal à $40 - (12 + 16) = 40 - 28 = 12$.

(b) Puisque l'un des bocaux contient 0 haricot, alors tous les haricots doivent être retirés du bocal qui en contient 384.
À chaque série de trois tours de François, il doit essayer de retirer $1, 3$ et 4 haricots, ce qui est un cycle de longueur 3.
À chaque série de deux tours de Sarah, elle doit essayer de retirer 2 et 5 haricots, ce qui est un cycle de longueur 2.
Puisque 6 est le plus petit commun multiple de 3 et 2, alors après que chaque joueur ait joué 6 fois (12 tours au total), ils seront chacun au début de leur cycle.
Après les 12 premiers tours (François et Sarah ont chacun joué 6 fois), François aura retiré

$$1 + 3 + 4 + 1 + 3 + 4 = 2(1 + 3 + 4) = 16 \text{ haricots,}$$

et Sarah aura retiré

$$2 + 5 + 2 + 5 + 2 + 5 = 3(2 + 5) = 21 \text{ haricots.}$$

À chaque cycle de 12 tours, François retire en tout 16 haricots et Sarah retire en tout 21 haricots.
À partir du début de la partie, ils retirent ensemble $16+21 = 37$ haricots tous les 12 tours.
Après 10 tels cycles de 12 tours, (soit un total de $10 \times 12 = 120$ tours), le nombre total de haricots retirés est égal à $10 \times 37 = 370$, d'où il reste donc $384 - 370 = 14$ haricots dans le bocal.
Après ces 120 tours, François et Sarah seront chacun au début de leur cycle de tours et c'est au tour de François de jouer.
Au 121^{e} tour, François retire 1 haricot et il reste donc $14 - 1 = 13$ haricots.
Au 122^{e} tour, Sarah retire 2 haricots et il reste donc $13 - 2 = 11$ haricots.
Au 123^{e} tour, François retire 3 haricots et il reste donc $11 - 3 = 8$ haricots.
Au 124^{e} tour, Sarah retire 5 haricots et il reste donc $8 - 5 = 3$ haricots.
C'est au tour de François de jouer. Or, il ne peut retirer le nombre requis de haricots (soit 4). Par conséquent, François perd et Sarah gagne après exactement $n = 124$ tours.

(c) On utilise la notation Tn pour représenter le tour n et (x, y) pour représenter la manière dont les haricots sont répartis ; soit x haricots dans un bocal et y dans l'autre bocal.
Lorsque la partie commence, les haricots sont répartis de la manière $(17, 6)$, soit un total de $17 + 6 = 23$ haricots.
Après T4 (2 tours chacun), François a retiré $1 + 3 = 4$ haricots et Sarah a retiré $2 + 5 = 7$ haricots.
Donc, après T4, il reste un total de $23 - (4 + 7) = 12$ haricots dans les bocaux.
Puisqu'il reste 12 haricots, au moins un des bocaux doit contenir 6 haricots ou plus, car si

les deux bocaux contenaient moins de 6 haricots, le nombre total de haricots serait d'au plus $5 + 5 = 10$.
Puisqu'au moins un des bocaux contient 6 haricots ou plus, alors François peut retirer 4 haricots au T5. Il reste donc $12 - 4 = 8$ haricots.
Puisqu'il reste 8 haricots, au moins un des bocaux doit contenir 4 haricots ou plus, alors Sarah peut retirer 2 haricots au T6 et François peut retirer 1 haricot au T7.
Après T7 (François a donc joué 4 fois et Sarah joué 3 fois), le nombre total de haricots restant dans les bocaux est égal à $8 - (2 + 1) = 5$.
Sarah doit retirer 5 haricots au T8 (soit le 4^{e} tour de Sarah).
Si les haricots sont répartis de la manière $(5, 0)$, alors Sarah retirera les 5 haricots et gagnera au T8.
En revanche, si les haricots sont répartis de la manière $(4, 1)$ ou $(3, 2)$, alors Sarah ne pourra retirer 5 haricots et perdra le jeu (François sera donc vainqueur).

Pour résumer :
- Aucun joueur ne peut gagner du T1 au T6.
- Après le T7, il reste 5 haricots en tout dans les deux bocaux.
- Au T8, c'est au tour de Sarah de jouer et elle doit retirer 5 haricots.
- Après le T7, François gagne s'il fait de sorte que les haricots soient répartis de la manière $(4, 1)$ ou $(3, 2)$ après son tour.
- Après le T7, François perdra si les haricots sont répartis de la manière $(5, 0)$ après son tour (Sarah gagnera au T8)

Donc, François a une stratégie gagnante s'il peut s'assurer que les 5 derniers haricots ne sont pas tous dans un seul bocal, sinon c'est Sarah qui a une stratégie gagnante.

François a la stratégie gagnante.
On résume sa stratégie ci-dessous et on explique pourquoi cette stratégie lui garantit une victoire.
La stratégie de François :
- Retirer 1 haricot du bocal contenant 17 haricots au T1
- Retirer 3 haricots du bocal contenant le moins de haricots au T3
- Retirer les haricots du bocal contenant le plus grand nombre de haricots au T5 et T7.

Au T1, François retire 1 haricot du bocal contenant 17 haricots. Les haricots sont répartis de la manière $(16, 6)$ après ce tour.
Au T2, Sarah retire 2 haricots de l'un des bocaux. Les haricots sont répartis de la manière $(14, 6)$ ou de la manière $(16, 4)$ après ce tour.
Au T3, François retire 3 haricots du bocal contenant le moins de haricots.
Donc, après exactement 3 tours, les haricots sont répartis de la manière $(14, 3)$ ou de la manière $(16, 1)$.
Du T4 au T7 inclusivement, on retire $5 + 4 + 2 + 1 = 12$ haricots de plus.
Donc, dans chacun des deux cas ci-dessus, le bocal contenant le plus grand nombre de haricots (14 et 16) ne peut pas être vidé.
Sarah peut-elle vider un bocal qui contient 3 haricots ou qui contient 1 haricot sans que François ne retire aucun haricot de ces bocaux ?
Puisque Sarah peut retirer 2 ou 5 haricots à chacun de ses tours, elle ne pourra pas retirer exactement 3 haricots et elle ne pourra pas non plus retirer exactement 1 haricot.
Cela signifie que pour chacun des deux cas ci-dessus, Sarah ne pourra pas vider l'un ou l'autre des bocaux.
Par conséquent, après exactement 7 tours, les bocaux contiendront $(2, 3)$, ou $(4, 1)$. Donc Sarah perdra puisqu'elle ne pourra pas retirer 5 haricots au T8.

(d) Il y a $2023 + 2022 = 4045$ haricots en tout au début de la partie.
Comme dans la partie (b), 37 haricots sont retirés tous les 12 tours à partir du début de la partie.
Après 109 tels cycles de 12 tours (soit un total de $109 \times 12 = 1308$ tours), le nombre total de haricots retirés est égal à $109 \times 37 = 4033$, d'où il reste donc $4045 - 4033 = 12$ haricots dans le bocal.
Après 1308 tours, François et Sarah seront chacun au début de leur cycle de tours et ce sera au tour de François de jouer.
Puisqu'il reste 12 haricots, au moins un des bocaux doit contenir 6 haricots ou plus, cela signifie que François et Sarah ont pu retirer le nombre de haricots requis à chacun des 1308 premiers tours.

À partir de ce point du jeu, le gagnant est déterminé par la manière dont les 12 haricots sont répartis entre les deux bocaux.
Par exemple, supposons que les 12 derniers haricots sont répartis de la manière $(12, 0)$.
François en retire 1, Sarah en retire 2, François en retire 3, Sarah en retire 5 et il reste donc $12 - (1 + 2 + 3 + 5) = 1$ haricot.
Au tour suivant, François ne peut pas retirer 4 haricots et donc Sarah gagne dans ce cas.

Supposons que les 12 derniers haricots sont répartis de la manière $(11, 1)$.
Après que François ait retiré 1 haricot, les haricots sont répartis de la manière $(10, 1)$ ou de la manière $(11, 0)$.
Comme nous l'avons vu dans le cas précédent, si les haricots sont répartis de la manière $(11, 0)$ à ce stade du jeu, alors Sarah gagnera.
On suppose donc que François retire le haricot du bocal contenant 11 haricots de sorte que les haricots soient répartis de la manière $(10, 1)$.
Au cours des 3 tours suivants, les haricots devront être retirés du bocal contenant 10 haricots : Sarah en retire 2, François en retire 3, Sarah en retire 5 et il reste donc $10 - (2 + 3 + 5) = 0$ haricot dans ce bocal et encore 1 haricot dans l'autre bocal.
Au tour suivant, François ne peut pas retirer 4 haricots et donc Sarah gagne dans ce cas.

Il existe d'autres manières de répartir les 12 derniers haricots entre les deux bocaux, certaines garantissant une victoire pour Sarah.
Cependant, pour décrire de façon concise une stratégie gagnante pour Sarah, on démontre comment Sarah peut s'assurer que les 12 derniers haricots soient répartis de l'une des deux manières décrites ci-dessus.

Ensuite, on va démontrer comment Sarah peut s'assurer que les 12 derniers haricots soient répartis de la manière $(12, 0)$ ou de la manière $(11, 1)$.
La stratégie gagnante de Sarah est de retirer tous les haricots de l'un des bocaux, ou de retirer tous les haricots des bocaux et de n'en laisser qu'un seul dans un bocal.
Appelons ce bocal le bocal *cible*. La stratégie de Sarah est la suivante :

- Si le bocal cible contient 5 haricots ou plus, Sarah retire des haricots du bocal cible à chacun de ses tours.
- Si le bocal cible contient 2, 3 ou 4 haricots, Sarah retire 2 haricots du bocal cible (au tour où elle doit retirer 2 haricots) et retire 5 haricots de l'autre bocal (au tour où elle doit retirer 5 haricots).
- Lorsque le bocal cible contient 0 ou 1 haricot, Sarah retire des haricots de l'autre bocal à chacun de ses tours restants.

Enfin, on explique pourquoi Sarah est capable d'exécuter cette stratégie.
À chaque cycle de 12 tours (Sarah joue 6 fois), Sarah retire $3(2 + 5) = 21$ haricots.

Donc, dans les 109 premiers cycles de 12 tours (soit 1308 tours), Sarah retire $109 \times 21 = 2289$ haricots.
Puisque les bocaux contenaient initialement 2022 et 2023 haricots, Sarah pourra retirer suffisamment de haricots pour que le bocal cible contienne 0 haricot ou 1 haricot.
Après les 1308 tours, l'autre bocal contient 12 ou 11 haricots. Donc, Sarah sera en mesure de retirer le nombre requis de haricots à chacun de ses tours.
(On remarque que François peut également retirer des haricots du bocal cible. Or, cela n'aura aucun effet sur la stratégie de Sarah).

En résumé, Sarah a une stratégie qui lui permet de s'assurer que les 12 derniers haricots soient répartis de la manière $(12, 0)$ ou de la manière $(11, 1)$.
Étant donné que les 12 derniers haricots sont répartis de l'une de ces deux manières, Sarah est sûr de gagner la partie. Elle a donc une stratégie gagnante.

Il est intéressant de noter que le joueur qui a la stratégie gagnante dans ce jeu, Sarah, est unique, cependant l'argument démontrant sa victoire garantie, n'est pas unique. Par exemple, Sarah est également sûr de gagner si les 12 derniers haricots sont répartis de la manière $(10, 2)$ ou de la manière $(9, 3)$, ce qu'on aurait également pu utiliser pour décrire la stratégie gagnante de Sarah.